Fonctions de plusieurs variables et calcul différentiel

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

0 Introduction

L'appellation « fonction de plusieurs variables » désigne une fonction définie sur un produit cartésien d'ensembles $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$. Les variables en question sont donc les m-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$. Toute fonction $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \longrightarrow X$ est ainsi appelée fonction de plusieurs variables.

❒ Dans la suite, on s'intéressera tout particulièrement à des fonctions définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$, la plupart du temps à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$f : \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{array}$$

❒ La topologie de $\mathbb{R}^m$ est définie par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^m$ [a], par exemple $N_{\infty, \mathrm{BC}_m}$. Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in U$, U est ouvert donc $\exists r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_N(a, r) \subset U$. Or

$$\overline{\mathcal{B}}_N(a, r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r] \times \cdots \times [a_m - r, a_m + r]$$

donc pour $j \in [\![1, m]\!]$, on peut définir une application

$$f_j : \begin{array}{l} [a_{j-1}, a_{j+1}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_m) \end{array}$$

f_j est la j-ième application partielle de f. Lorsque $m = 2$, $a = (\alpha, \beta)$, f_1 se note $f(\cdot, \beta)$ et f_2 se note $f(\alpha, \cdot)$. f_j est toujours définie sur un voisinage de a_j dans $\mathbb{R}$.

❒ Supposons f continue au point a, montrons que $\forall j \in [\![1, m]\!]$, f_j est continue en a_j. Par exemple, montrons que f_1 est continue en a_1. Soit $\varepsilon > 0$, f est continue en a donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in U$, $N_\infty(x - a) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Soit $t \in [a_1 - r, a_1 + r]$ tel que $|t - a_1| \leqslant \alpha$, si on pose $x_t = (t, a_2, \ldots, a_m) \in U$, alors $x_t - a = (t - a_1, 0, \ldots, 0)$ donc $N_\infty(x_t - a) = |t - a_1| \leqslant \alpha$ donc $|f(x_t) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ or $|f(x_t) - f(a)| = |f_1(t) - f_1(a_1)|$ donc f_1 est continue en a_1.

❒ La réciproque est fausse : soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

Soit $a = (0, 0)$, pour $t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = f(t, 0) = 0 = f_2(t)$ donc f_1 et f_2 sont l'application nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc f_1 et f_2 sont continues en 0. Néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, si tel est le cas, $\forall u \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathbb{N}}$ convergente vers $(0, 0)$, $f(u)$ converge vers $f(0) = 0$. Or si pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, $f(u_n) = \dfrac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 0$.

1 Fonctions différentiables

1.1 Faits de base

Dans la suite, (E, N) et (F, ν) sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$. Si $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_N(a, r) \subset U$ donc, pour $h \in E$ vérifiant $N(h) \leqslant r$, $a + h \in U$.

Soit $a \in U$, on dit que f est différentiable en a s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour h voisin de 0_E,

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + L(h) + N(h)\varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0 \\ &\underset{0_E}{=} f(a) + L(h) + \mathrm{o}(N(h)) \end{aligned}$$

[a] Voir la section 30.2.1 du cours complet page 612.

Si f est différentiable en a, alors il existe une unique $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(a+h) - f(a) - L(h) \underset{0_E}{=} \mathrm{o}(N(h))$. L s'appelle la différentielle de f en a et se note $\mathrm{d}f(a)$. On dira que f est différentiable sur U si $\forall a \in U$, f est différentiable en a. Dans ce cas,

$$\begin{array}{rl} \mathrm{d}f : & U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ & a \mapsto \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

s'appelle la différentielle de f.

En effet, montrons l'unicité de $\mathrm{d}f(a)$. Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ qui conviennent, alors pour h voisin de 0,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + L_1(h) + N(h)\,\varepsilon_1(h) \text{ avec } \varepsilon_1(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0 \\ &= f(a) + L_2(h) + N(h)\,\varepsilon_2(h) \text{ avec } \varepsilon_2(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Par différence, pour h voisin de 0, $(L_1 - L_2)(h) = N(h)(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h))$. Soit $v \in E$, pour $t > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} (L_1 - L_2)(tv) = N(tv)(\varepsilon_2(tv) - \varepsilon_1(tv)) &\Leftrightarrow t(L_1 - L_2)(v) = tN(v)(\varepsilon_2(tv) - \varepsilon_1(tv)) \\ &\Leftrightarrow (L_1 - L_2)(v) = N(v)(\varepsilon_2(tv) - \varepsilon_1(tv)) \end{aligned}$$

En faisant tendre $t \to 0$, on obtient $(L_1 - L_2)(v) = 0_F$ d'où le résultat.

1.2 Exemples, remarques

(1) Soit $b \in F$ et $f : x \in U \subset E \longrightarrow b$, alors $\forall a \in U$, f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.
En effet, soit $a \in U$, pour $h \in E$ assez petit, $f(a+h) - f(a) = 0_F = 0_{\mathcal{L}(E,F)}(h) + 0_F$ et $0_F = \mathrm{o}(N(h))$.

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $a \in U$. Pour $h \in E$,

$$f(a+h) - f(a) = f(h) + \underbrace{0_F}_{\mathrm{o}(N(h))}$$

f est déjà linéaire donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = f$.

(3) Prenons $E = F = \mathbb{R}$, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.
- Si f est dérivable en a, on sait que pour h voisin de 0, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \mathrm{o}(h)$ donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \longrightarrow f'(a)h$.
- Réciproquement, si f est différentiable en a, soit $L = \mathrm{d}f(a)$, on sait que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(x) = \alpha x$. Pour h voisin de 0 non nul,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{L(h) + \mathrm{o}(h)}{h} = \alpha + \mathrm{o}(1) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \alpha$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

(4) Généralisons : prenons $E = \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow F$, $a \in I$.
- Supposons qu'il existe $v = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Alors, pour h voisin de 0, $f(a+h) - f(a) = hv + \mathrm{o}(h)$ donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \in \mathbb{R} \longrightarrow hv$.
- Réciproquement, si f est différentiable en a, soit $L = \mathrm{d}f(a)$, $v = L(1)$, pour $h \in \mathbb{R}$, on a $L(h) = h \cdot L(1) = hv$ donc pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = v + \mathrm{o}(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} v$$

Ainsi, f est différentiable en a si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, $\mathrm{d}f(a) : h \in \mathbb{R} \longrightarrow hv$. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F, pour $t \in I$ notons $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t))$ donc $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t)\varepsilon_i$. Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\varepsilon_i$.
Soit $v = \sum_{i=1}^{p} v_i\varepsilon_i$, on sait que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} v \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} v_i$$

Si c'est le cas, $\mathrm{d}f(a) : h \in \mathbb{R} \longrightarrow hv$ avec $v = \sum_{i=1}^{p} f_i'(a)\varepsilon_i$.

(5) Soit N une norme sur E, $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, montrons que N n'est jamais différentiable en 0.
En effet, dans le cas contraire, notons $L = \mathrm{d}N(0)$, on doit avoir pour h assez petit, $N(h) = L(h) + \mathrm{o}(N(h)) = L(h) + N(h)\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Soit $v \in E$, pour $t > 0$ assez petit,

$$N(tv) = L(tv) + N(tv)\varepsilon(tv) \Leftrightarrow N(v) = L(v) + N(v)\varepsilon(tv)$$

En faisant tendre $t \to 0$, $N(v) = L(v)$,ce qui est impossible car N n'est pas linéaire. En effet, $N(-v) \geqslant 0$ or $L(-v) = -L(v)$ donc $N(v) = 0$ pour tout vecteur, ce qui est faux.

(6) On suppose E euclidien munit du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associé N. Soit $a \in E\backslash\{0\}$, pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} N(a+h)^2 &= \langle a+h, a+h\rangle \\ &= \langle a,a\rangle + 2\langle a,h\rangle + \langle h,h\rangle \\ &= N(a)^2 + 2\langle a,h\rangle + N(h)^2 \\ \Rightarrow N(a+h) &= \sqrt{N(a)^2 + 2\langle a,h\rangle + N(h)^2} \\ &= N(a)\sqrt{1 + \frac{2\langle a,h\rangle}{N(a)^2} + \frac{N(h)^2}{N(a)^2}} \end{aligned}$$

Si on pose $\varphi(h) = \dfrac{2\langle a,h\rangle}{N(a)^2} + \dfrac{N(h)^2}{N(a)^2}$, on a $\varphi(h) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0$ et on sait que pour u voisin de $0_{\mathbb{R}}$, $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} + u\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} N(a+h) &= N(a)\left[1 + \frac{\langle a,h\rangle}{N(a)^2} + \frac{N(h)^2}{2N(a)^2} + \varphi(h)\varepsilon(\varphi(h))\right] \\ &= N(a) + \frac{\langle a,h\rangle}{N(a)} + \underbrace{\frac{N(h)^2}{2N(a)} + N(a)\varphi(h)\varepsilon(\varphi(h))}_{\omega(h)} \end{aligned}$$

et, pour $h \neq 0$, $\left|\dfrac{\omega(h)}{N(h)}\right| \leqslant \dfrac{N(h)}{2N(a)} + \left(\dfrac{2}{N(a)} + \dfrac{N(h)}{N(a)}\right) N(a)\varepsilon(\varphi(h)) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, N est différentiable en a et $\mathrm{d}N(a) : h \in E \longrightarrow \dfrac{\langle a,h\rangle}{N(a)}$.

(7) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^3y + xy^2 \end{array}$, montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et trouvons sa différentielle. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f((a,b)+(h,k)) &= (a+h)^3(b+k) + (a+h)(b+k)^2 \\ &= \left(a^3 + 3ah^2 + 3a^2h + h^3\right)(b+k) + (a+b)\left(b^2 + 2bk + k^2\right) \\ &= a^3b + ab^2 + 3a^2bh + a^3k + hb^2 + 2abk + \mathrm{o}(N(h,k)) \end{aligned}$$

car tous les termes en hk, k^2, h^2 ou d'ordre supérieurs sont compris dans $\mathrm{o}\left(N\left(h,k\right)\right)$. f est différentiable en (a,b) et

$$\mathrm{d}f\left(a,b\right):\left(h,k\right)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow\left(3a^2b+b^2\right)h+\left(a^3+2ab\right)k$$

1.3 Opérations sur les différentielles

(1) Soient $f,g:U\subset E\longrightarrow F$, $\alpha\in\mathbb{R}$, on suppose f et g différentiables en $a\in U$, alors $\alpha f+g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}\left(\alpha f+g\right)\left(a\right)=\alpha\mathrm{d}f\left(a\right)+\mathrm{d}g\left(a\right)$.
En effet [a], pour h assez petit,

$$\begin{aligned}\left(\alpha f+g\right)\left(a+h\right) &= \alpha f\left(a+h\right)+g\left(a+h\right)\\ &= \alpha f\left(a\right)+\alpha\mathrm{d}f\left(a\right)\left(h\right)+\mathrm{o}\left(N\left(h\right)\right)+g\left(a\right)+\mathrm{d}g\left(a\right)\left(h\right)+\mathrm{o}\left(N\left(h\right)\right)\\ &= \alpha f\left(a\right)+g\left(a\right)+\underbrace{\alpha\mathrm{d}f\left(a\right)\left(h\right)+\mathrm{d}g\left(a\right)\left(h\right)}_{\text{linéaire en } h}+\mathrm{o}\left(N\left(h\right)\right)\end{aligned}$$

(2) Soient (E,N), (F,ν) et $(G,\|\cdot\|)$ trois espaces vectoriels normés de dimensions finies, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f:U\longrightarrow V$ et $g:V\longrightarrow G$, $a\in U$, $b=f\left(a\right)\in V$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en b, alors $g\circ f$ est différentiable en a et

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(g\circ f\right)\left(a\right) &= \mathrm{d}g\left(b\right)\circ\mathrm{d}f\left(a\right)\\ &= \mathrm{d}g\left(f\left(a\right)\right)\circ\mathrm{d}f\left(a\right)\end{aligned}$$

En effet, notons $L=\mathrm{d}f\left(a\right)\in\mathcal{L}\left(E,F\right)$, $T=\mathrm{d}g\left(b\right)\in\mathcal{L}\left(F,G\right)$. L et T sont continues car E et F sont de dimensions finies donc L et T sont lipschitziennes :

$$\exists\lambda>0/\forall x\in E,\ \nu\left(L\left(x\right)\right)\leqslant\lambda N\left(x\right)\ \text{ et }\exists\mu>0/\forall y\in F,\ \left\|T\left(y\right)\right\|\leqslant\mu\nu\left(y\right)$$

De plus, pour h assez petit,

$$\begin{aligned}g\circ f\left(a+h\right) &= g(\underbrace{f\left(a\right)}_{b}+\underbrace{L\left(h\right)+N\left(h\right)\varepsilon\left(h\right)}_{\alpha(h)})\text{ où }\varepsilon\left(h\right)\underset{h\to0_E}{\longrightarrow}0_F\\ &= g\left(b\right)+T\left(\alpha\left(h\right)\right)+\nu\left(\alpha\left(h\right)\right)\omega\left(\alpha\left(h\right)\right)\ \text{ où }\omega\left(y\right)\underset{y\to0_F}{\longrightarrow}0_G\\ &= g\circ f\left(a\right)+T\circ L\left(h\right)+\underbrace{N\left(h\right)T\left(\varepsilon\left(h\right)\right)+\nu\left(\alpha\left(h\right)\right)\omega\left(\alpha\left(h\right)\right)}_{\text{gloubi-boulga}}\end{aligned}$$

Montrons que $\text{gloubi-boulga}\left(h\right)\underset{0_E}{=}\mathrm{o}\left(N\left(h\right)\right)$. On a

$$\begin{aligned}\nu\left(\alpha\left(h\right)\right) &= \nu\left(L\left(h\right)+N\left(h\right)\varepsilon\left(h\right)\right)\\ &\leqslant \nu\left(L\left(h\right)\right)+N\left(h\right)\nu\left(\varepsilon\left(h\right)\right)\\ &\leqslant \lambda N\left(h\right)+N\left(h\right)\nu\left(\varepsilon\left(h\right)\right)\\ &\leqslant N\left(h\right)\left[\lambda+\nu\left(\varepsilon\left(h\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left\|\text{gloubi-boulga}\left(h\right)\right\| &\leqslant N\left(h\right)\left\|T\left(\varepsilon\left(h\right)\right)\right\|+\nu\left(\alpha\left(h\right)\right)\left\|\omega\left(\alpha\left(h\right)\right)\right\|\\ &\leqslant N\left(h\right)[\underbrace{\left\|T\left(\varepsilon\left(h\right)\right)\right\|+\lambda+\nu\left(\varepsilon\left(h\right)\right)}_{\underset{h\to0}{\longrightarrow}\lambda}+\underbrace{\left\|\omega\left(\alpha\left(h\right)\right)\right\|}_{\underset{h\to0}{\longrightarrow}0}]\text{ car }\alpha\left(h\right)\underset{h\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

D'où le résultat.

---

a. Un petit extrait des conversations plutôt animées qui eurent lieu ce vendredi matin :
« *Ça c'est le théorème bidon. Y a rien de plus con que ça !*
– *Si, y a Maissem !*
– *Non, la connerie c'est conscient !* »
La dernière réplique est bien évidemment l'œuvre de notre orateur préféré, l'ineffable Aménofis !

Exemple d'application Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$, $k : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \|x\|$, alors $k = g \circ f$ avec

$$f: \begin{array}{l} E\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \langle x, x\rangle \end{array} \quad \text{et } g: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{t} \end{array}$$

Soit $a \in E$, pour $h \in E$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \langle a+h, a+h\rangle \\ &= f(a) + 2\langle a, h\rangle + \underbrace{\|h\|^2}_{\mathrm{o}(\|h\|)} \end{aligned}$$

donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) : h \in \mathbb{R} \longrightarrow 2\langle a, h\rangle$.

On sait que g est différentiable car dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$ donc , par composition, $g \circ f$ est différentiable sur $E\backslash\{0\}$ et $\forall a \in E\backslash\{0\}$, $\forall h \in E$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g \circ f(a)(h) &= [\mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)](h) \\ &= \mathrm{d}g(f(a))(h)\,\mathrm{d}f(a)(h) \text{ car ce sont des fonctions linéaires réelles} \\ &= \mathrm{d}g(f(a))\,2\langle a, h\rangle \end{aligned}$$

Or pour $u \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}g(u)(t) = g'(u)\,t = \dfrac{t}{2\sqrt{u}}$. Ici, $t = h$ et $u = f(a)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g \circ f(a)(h) &= \frac{1}{2\sqrt{\|a\|^2}} 2\langle a, h\rangle \\ &= \frac{\langle a, h\rangle}{\|a\|} \end{aligned}$$

1.4 De l'importance des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$, $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_p)$ une base de F. Pour $x \in U$, écrivons $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(x)\,\varepsilon_i$ donc $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$ où $\mathcal{B}^* = \left(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \ldots, \epsilon_p^*\right)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

❒ Soit $a \in U$ tel que f est différentiable en a. Soit $i \in [\![1, p]\!]$, ε_i^* est linéaire donc différentiable en $b = f(a)$ et $\mathrm{d}\varepsilon_i^*(b) = \varepsilon_i^*$ car ε_i^* est linéaire. Par composition, $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}f_i(a) = \mathrm{d}\varepsilon_i^*(b) \circ \mathrm{d}f(a) = \varepsilon_i^* \circ \mathrm{d}f(a)$.

❒ Réciproquement, supposons que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est différentiable en a. Pour h assez petit,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{i=1}^{p} f_i(a+h)\,\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(f_i(a) + \mathrm{d}f_i(a)(h) + N(h)\,\omega_i(h)\right)\varepsilon_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \omega_i(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0 \\ &= f(a) + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h)\,\varepsilon_i}_{\text{linéaire}} + \underbrace{N(h) \sum_{i=1}^{p} \omega_i(h)\,\varepsilon_i}_{\underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0_F} \end{aligned}$$

Donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h)\,\varepsilon_i$.

Ainsi, f est différentiable en a si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est différentiable en a. De plus, si c'est le cas, $\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h)\,\varepsilon_i$.

Cas particulier Prenons $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, soit $\mathcal{B} = \text{BC}_p$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$.

Alors f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est différentiable en a et si c'est le cas, $\forall h \in E$

$$\mathrm{d}f(a)(h) = (\mathrm{d}f_1(a)(h), \mathrm{d}f_2(a)(h), \ldots, \mathrm{d}f_p(a)(h))$$

2 Fonctions numériques

On s'intéresse ici à des fonctions du type $U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et U un ouvert de E [a]. En pratique, on prendra $E = \mathbb{R}^n$.

2.1 Dérivée suivant un vecteur, différentielle

Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $v \in E \setminus \{0\}$. On pose $\varphi : t \in \mathbb{R} \longrightarrow f(a + tv)$, φ est au moins défini sur un intervalle du type $[-\alpha, \alpha]$. On dit que f admet une dérivée en a suivant v si φ est dérivable en 0. Si c'est le cas, on note

$$\mathcal{D}_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Remarques ❒ Supposons que f est différentiable en a, soit $v \in E \setminus \{0\}$. Pour t voisin de 0 non-nul,

$$\begin{aligned} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= \frac{f(a) + \mathrm{d}f(a)(tv) + tN(v)\varepsilon(tv) - f(a)}{t} \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0_E}{\longrightarrow} 0 \\ &= \mathrm{d}f(a)(v) + N(v)\varepsilon(tv) \end{aligned}$$

donc f admet en a une dérivée suivant v.

❒ Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et supposons que f est différentiable en a. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f admet une dérivée suivant e_i égale à $\mathrm{d}f(a)(e_i)$. Pour $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a)(h) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{d}f(a)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \mathcal{D}_{e_i} f(a) \end{aligned}$$

Cas particulier

Quand $E = \mathbb{R}^n$ avec les notations précédentes, $\mathcal{D}_{e_i} f(a)$ s'appelle en cas d'existence la i-ième dérivée partielle de f et se note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\mathcal{D}_i f(a)$.

Si f est différentiable en a, les dérivées partielles de f existent et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{D}_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$. Pour $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i}$$

et si on note pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{d}x_i = e_i^*$, alors

$$\boxed{\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i}$$

a. E est muni de la topologie définie par n'importe quelle norme.

Piège ! Il se peut que f admette des dérivées partielles au point a mais que f ne soit même pas continue en a, et donc pas différentiable.

Prenons

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \end{array}$$

On a vu [a] que f n'était pas continue en $(0,0)$. Néanmoins, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$: pour $t \neq 0$,

$$\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2.1.1 Lien entre dérivées partielles et applications partielles

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ et $j \in [\![1, n]\!]$. On peut définir $f_j : u \in \mathbb{R} \longrightarrow (a_1, \ldots, a_{j-1}, u, \ldots, a_n)$ sur un intervalle du type $[a_j - \alpha, a_j + \alpha]$ car U est ouvert. Notons e_j le j-ième vecteur de $\textsc{bc}_n$, pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, $a + te_j \in U$ et $f(a + te_j) = f_j(a_j + t)$.

❒ Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe, alors

$$\frac{f_j(a_j+t) - f_j(a_j)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

donc f_j est dérivable en a_j et $f_j'(a_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

❒ Réciproquement, si f_j est dérivable en a_j, alors

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \frac{f_j(a_j+t) - f_j(a_j)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(a_j)$$

donc f admet une dérivée partielle en a et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f_j'(a_j)$.

> Ainsi, avec les notations précédentes, f admet une dérivée partielle en a suivant e_j si et seulement si f_j est dérivable en a_j. Si c'est le cas, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f_j'(a_j)$.

Utilisation courante

> Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x : y \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x,y)$ est dérivable en x. Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi_x'(y)$. De même, si φ_y est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi_y'(x)$.

Exemples

(1) Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^2y + 3xy^2$, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x : y \longrightarrow x^2y + 3xy^2$ est dérivable et $\varphi_x'(y) = x^2 + 6xy$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 6xy$. De même, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\varphi_y : x \longrightarrow x^2y + 3xy^2$ est dérivable en y et $\varphi_y'(x) = 2xy + 3y^2$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y^2$.

---

a. Voir page 2.

(2) Soit $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$. Soient $(x,y)\neq(0,0)$, alors $f(\cdot,y):t\longrightarrow\sqrt{t^2+y^2}$ est dérivable par composition en x de dérivée $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On retrouve bien, puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x,y)(h,k) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}h+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}k\\ &= \frac{\langle(x,y),(h,k)\rangle}{\|(x,y)\|}\end{aligned}$$

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

2.2.1 À valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ où U est ouvert, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si :

(1) $\forall a\in U$, $\forall v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, f admet en a une dérivée suivant v ;

(2) $\forall v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\mathcal{D}_v f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ bien définie d'après (1) est continue.

Remarque Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

(1) $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall a\in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe ;

(2) $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur U.

Théorème

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues en tout point de U. Alors :

(1) $\forall a\in U$, f est différentiable en a ;

(2) f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrons le résultat pour $n=2$. Soit $f:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur U, soit $a=(\alpha,\beta)\in U$.

Si f est différentiable en a, on doit avoir pour $u=(h,k)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(a)(u)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)k$. Il s'agit donc de montrer que pour $u=(h,k)$ assez petit,

$$f(a+u)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h-\frac{\partial f}{\partial y}(a)k=\mathrm{o}(N(u))\Leftrightarrow\frac{\left|f(a+u)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h-\frac{\partial f}{\partial y}(a)k\right|}{\|u\|}\underset{\substack{u\to0\\u\neq0}}{\longrightarrow}0$$

❒ On sait que $\exists r>0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_\infty(a,r)\subset U$, soit alors $u=(h,k)$ tel que $N_\infty(u)\leqslant r$ (et donc $a+u\in U$), posons $\Delta(u)=f(a+u)-f(a)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, montrons que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\omega>0$ tel que $\forall u\in\mathbb{R}^2$, $N_\infty(u)\leqslant\omega\Rightarrow|\Delta(u)|\leqslant\varepsilon N_\infty(u)$. On écrit donc

$$\begin{aligned}f(a+u)-f(a) &= f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha,\beta)\\ &= \underbrace{f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha+h,\beta)}_{\Delta_1}+\underbrace{f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)}_{\Delta_2}\end{aligned}$$

❒ On fixe maintenant h et k, soit $\varphi : t \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h] \longrightarrow f(t, \beta)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur U, on sait que φ est dérivable et $\forall t \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h]$, $\varphi'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \beta)$. D'après le théorème des accroissements finis [a], $\exists c \in [\alpha, \alpha + h]$ tel que $\Delta_2 = \varphi(\alpha + h) - \varphi(h) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(c, \beta)$.

❒ Soit $\psi : t \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + k] \longrightarrow f(\alpha + h, t) \in \mathbb{R}$ bien définie et dérivable, $\psi'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, t)$. D'après le théorème des accroissements finis, $\exists d \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + k]$ tel que $\Delta_1 = \psi(\beta + k) - \psi(\beta) = k\dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, d)$.

Ainsi, $\exists c \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h]$ et $\exists d \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + k]$ tels que

$$\Delta(u) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, \beta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta)\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta)\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en a donc $\exists \omega_1 > 0$ tel que $\forall v \in U \cap \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \omega_1)$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(v)\right| \leqslant \varepsilon$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en a donc $\exists \omega_2 > 0$ tel que $\forall v \in U \cap \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \omega_2)$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(v)\right| \leqslant \varepsilon$.

❒ Prenons $\omega = \min(r, \omega_1, \omega_2)$, soit $u = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_\infty(u) \leqslant \omega$, alors $a + u \in U$. D'après ce qui précède, $\exists c \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h]$ et $\exists d \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + k]$ qui permettent d'exprimer $\Delta(u)$ comme ci-dessus donc

$$|\Delta(u)| \leqslant \underbrace{|h|}_{\leqslant N_\infty(u)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c, \beta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta)\right| + \underbrace{|k|}_{\leqslant N_\infty(u)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta)\right|$$

Or $N_\infty((c, \beta) - (\alpha, \beta)) = |c - \alpha| \leqslant |h| \leqslant N_\infty(u) \leqslant \omega_1$ donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(c, \beta) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta)\right| \leqslant \varepsilon$. De même,

$$N_\infty((\alpha + h, d) - (\alpha, \beta)) = \max(|h|, |d - \beta|) \leqslant \max(|h|, |k|) \leqslant N_\infty(u) \leqslant \omega_2$$

donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha + h, d) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta)\right| \leqslant \varepsilon$ donc $|\Delta(u)| \leqslant 2\varepsilon N_\infty(u)$.

❒ Ainsi $\Delta(u) \underset{(0,0)}{=} \mathrm{o}(N_\infty(u))$ donc f est différentiable en a et $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}f(a)(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

❒ Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on sait que f est différentiable en a donc f admet en a une dérivée suivant v et $\mathcal{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$ donc pour $v = (h, k)$, $\mathcal{D}_v f(a)(u) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$. On voit que $\mathcal{D}_v f(a)$ est bien définie et $\mathcal{D}_v f = h\dfrac{\partial f}{\partial x} + k\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Ainsi, $\mathcal{D}_v f$ est continue sur U comme combinaison linéaires de fonctions continues.

Illustration Montrons que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

---

a. Voir section 14.2.2.1 du cours complet page 210.

❒ Soit $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
\det(M + tE_{i,j}) &= \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}_1(M), \ldots, \mathrm{C}_{j-1}(M), \mathrm{C}_j(M) + te_i, \ldots, \mathrm{C}_n(M)) \\
&= \det M + t\underbrace{\begin{vmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j-1} & 0 & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j-1} & 0 & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}}_{\text{Cofacteur de } M \text{ d'indice } (i,j)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \neq 0$, $\dfrac{\det(M + tE_{i,j}) - \det(M)}{t} = A_{i,j}(M) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} A_{i,j}(M)$ donc det admet en M une dérivée suivant $E_{i,j}$ et $\mathcal{D}_{E_{i,j}} \det(M) = A_{i,j}(M)$.

❒ Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $M \longmapsto A_{i,j}(M)$ est clairement polynômiale en les coefficients de M d'après l'expression théorique du déterminant. Or les coefficients de M sont les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$ donc $M \longmapsto A_{i,j}(M)$ est continue donc det est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

❒ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\det(M)(H) &= \mathrm{d}\det(M)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H[i,j]\, E_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H[i,j]\, \underbrace{\mathrm{d}\det(M)(E_{i,j})}_{A_{i,j}(M)}
\end{aligned}$$

Or pour $A, b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A[i,j]\, B[j,i]$. Si $\operatorname{com}(M) = (A_{i,j}(M))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$,

$$\mathrm{d}\det(M)(H) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H[i,j]\, {}^{\mathrm{T}}\operatorname{com}(M)[j,i] \Rightarrow \boxed{\mathrm{d}\det(M)(H) = \operatorname{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}\operatorname{com}(M)\, H\right)}$$

De plus, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\det(M)(H) = \det M \operatorname{Tr}\left(M^{-1}H\right)$.

2.2.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Opérations et dérivées suivant un vecteur

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, U un ouvert de E, $f, g : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $v \in E\setminus\{0\}$. Supposons que $\mathcal{D}_v f(a)$ et $\mathcal{D}_v g(a)$ existent. Pour t assez petit, on pose $\varphi(t) = f(a + tv)$ et $\psi(t) = g(a + tv)$. On sait que φ et ψ sont dérivables en 0 et $\varphi'(0) = \mathcal{D}_v f(a)$, $\psi'(0) = \mathcal{D}_v g(a)$.

(1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + g)(a + tv) = \alpha\varphi(t) + \psi(t)$ donc $\theta : t \longrightarrow (\alpha f + g)(a + tv)$ est dérivable en 0 d'après les théorèmes généraux sur les fonctions réelles dérivables et $\theta'(0) = \alpha\varphi'(0) + \psi'(0)$ donc $\mathcal{D}_v(\alpha f + g)(a)$ existe et

$$\boxed{\mathcal{D}_v(\alpha f + g)(a) = \alpha\mathcal{D}_v f(a) + \mathcal{D}_v g(a)}$$

(2) De même, $\theta : t \longrightarrow (fg)(a + tv)$ est dérivable en 0 car $\theta = \varphi\psi$ et $\theta'(0) = \varphi(0)\psi'(0) + \psi(0)\varphi'(0)$ donc

$$\boxed{\mathcal{D}_v(fg)(a) = f(a)\mathcal{D}_v g(a) + g(a)\mathcal{D}_v f(a)}$$

(3) On suppose de plus que $\forall x \in U,\ f(x) \neq 0$. Alors $t \longmapsto \left(\dfrac{1}{f}\right)(a+tv)$ est dérivable donc $\mathcal{D}_v \dfrac{1}{f}(a)$ existe [a] et

$$\boxed{\mathcal{D}_v \frac{1}{f}(a) = -\frac{\mathcal{D}_v f(a)}{f^2(a)}}$$

(4) Supposons en particulier que $E = \mathbb{R}^n$ et que f et g admettent des dérivées partielles en a. Alors :
- $\alpha f + g$ admet des dérivées partielles en a et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f + g)(a) = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$;
- fg admet des dérivées partielles en a et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial (fg)}{\partial x_i}(a) = f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) + g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$;
- si f ne s'annule pas sur U, $\dfrac{1}{f}$ admet des dérivées partielles en a et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{1}{f^2(a)}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Gradient

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Supposons que f est différentiable en a, alors $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ donc [a] $\exists! w(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \langle w(a), \cdot \rangle$. $w(a)$ est le gradient de f en a et se note $\operatorname{grad} f(a)$.

a. Voir section 25.3.3 du cours complet page 489.

On a vu que $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a)(h) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i \\ &= \langle w, h \rangle \text{ où } w = (w_1(a), w_2(a), \dots, w_n(a)) \end{aligned}$$

Il vient donc que

$$\boxed{\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)}$$

Théorèmes généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ Alors :

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\forall a \in U$, $\mathrm{d}(\alpha f + g)(a) = \alpha \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$ et si $E = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{grad}(\alpha f + g)(a) = \alpha \operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} g(a)$;

(2) $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\forall a \in U$, $\mathrm{d}(fg)(a) = f(a)\mathrm{d}g(a) + g(a)\mathrm{d}f(a)$ et si $E = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{grad}(fg)(a) = f(a)\operatorname{grad} g(a) + g(a)\operatorname{grad} f(a)$;

(3) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\forall a \in U$, $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{f}\right)(a) = -\dfrac{1}{f^2(a)}\mathrm{d}f(a)$ et si $E = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{f}\right)(a) = -\dfrac{1}{f^2(a)}\operatorname{grad} f(a)$.

Démonstration On ne montrera que l'appartenance à $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, le reste découlant immédiatement des propriétés de la différentielle et du gradient. Soit $v \in E \setminus \{0\}$, on sait que $\forall a \in U$, $\mathcal{D}_v f(a)$ et $\mathcal{D}_v g(a)$ existent et ces deux fonctions sont continues sur U.

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a vu que $\mathcal{D}_v(\alpha f + g)$ est définie sur U et $\mathcal{D}_v(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{D}_v f + \mathcal{D}_v g$ donc $\mathcal{D}_v(\alpha f + g)$ est continue comme combinaison linéaire de fonctions continues.

(2) On a vu que $\mathcal{D}_v(fg) = f\mathcal{D}_v(g) + g\mathcal{D}_v(f)$. $f, g, \mathcal{D}_v f$ et $\mathcal{D}_v g$ sont continues sur U donc $\mathcal{D}_v(fg)$ est continue sur U.

(3) On a vu que $\mathcal{D}_v\left(\dfrac{1}{f}\right)$ est définie et continue sur U ainsi que f. Or $\mathcal{D}_v\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{\mathcal{D}_v f}{f^2}$ donc $\mathcal{D}_v\left(\dfrac{1}{f}\right)$ est continue sur U.

a. C'est alors que M. Sellès eut une pensée mémorable à l'intention de nos amis les physiciens : « *Alors là le physicien nous sortira des notations très pratiques mais pas très rigoureuses... Enfin le physicien est excusable de par sa nature faible !* ».

Exemple Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E de duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$. Montrons que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, e_j^* est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ et $i \in [\![1, n]\!]$, alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e_j^*(a + te_i) - e_j^*(a)}{t} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}$$

Ainsi, $\mathcal{D}_{e_i} e_j^*(a)$ existe et vaut $\delta_{i,j}$. Dans tous les cas, $\mathcal{D}_{e_i} e_j^*$ est définie et continue sur E donc e_j^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

On en déduit que si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynômiale en les coordonnées de $x \in E$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.
De même, toute fonction rationnelle définie sur U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans un autre espace vectoriel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Pour $x \in U$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$.

2.3.1 Matrices jacobiennes

Avec les notations précédentes, supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est différentiable en a donc $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur U. f_i est différentiable en a et pour $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$,

$$\mathrm{d}f_i(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, h_j$$

Puisque chaque f_i est différentiable en a, on sait que f est différentiable en a et pour $h \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(a)(h) = (\mathrm{d}f_1(a)(h), \dots, \mathrm{d}f_n(a)(h))$. Notons $\mathrm{BC}_p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$, pour $j \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{d}f(a)(\varepsilon_j) = (\mathrm{d}f_1(a)(\varepsilon_j), \dots, \mathrm{d}f_n(a)(\varepsilon_j))$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_i(a)(\varepsilon_j) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) \underbrace{\varepsilon_k^*(\varepsilon_j)}_{\delta_{k,j}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

Soit MJ la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ relativement à BC_p et BC_n, $MJ = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_p, \mathrm{BC}_n}(\mathrm{d}f(a))$. $MJ(a)$ s'appelle la matrice jacobienne de f au point a, et on a

$$MJ = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$$

Lorsque $p = n$, on note $\mathrm{Jac}\, f(a)$ le déterminant de $MJ(a)$. $\mathrm{Jac}\, f(a)$ est le jacobien de f en a.

Illustration : passage en coordonnées polaires Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) \mapsto (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta)) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \end{aligned}$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$: en effet, $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \cos\theta$ et $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta$. Or $(r,\theta) \longmapsto \theta$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $(r,\theta) \longmapsto \cos\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$. De même, $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}$ est continue par produit et composition donc $\varphi_1 \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$. De même, φ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,\theta) = \sin\theta$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cos\theta$. Soit $M(r,\theta)$ la matrice jacobienne de φ en (r,θ), alors

$$\begin{aligned}
M(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \operatorname{Jac}\varphi(r,\theta) &= \det M(r,\theta) \\
&= r
\end{aligned}$$

2.3.2 Théorème : composée d'application de classe $\mathcal{C}^1$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(U) \subset V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On suppose que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaines de définition respectifs. Pour $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$, on note $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ et pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$.

❒ Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$, notons $b = f(a) \in V$. f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est différentiable en a et g est différentiable en b. On sait alors que $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}g \circ f(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$. Pour $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ on note $g \circ f(t) = h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $h_i = g_i \circ f$. h est différentiable en a donc chaque h_i est aussi différentiable en a donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial h_i}{\partial t_j}(a)$ existe et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_m}(\mathrm{d}h(a)) &= \left(\frac{\partial h_i}{\partial t_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,p]\!]} \\
&= \operatorname{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_m}(\mathrm{d}g \circ f(a))
\end{aligned}$$

❒ Or $\mathrm{d}g \circ f(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$ donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_m}(\mathrm{d}h(a)) &= \operatorname{Mat}_{\mathrm{BC}_n,\mathrm{BC}_m}(\mathrm{d}g(b)) \times \operatorname{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_n}(\mathrm{d}f(a)) \\
&= \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(f(a))\right)_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} \times \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial h_i}{\partial t_j}(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial t_j}(a)$ donc $\dfrac{\partial h_i}{\partial t_j}$ existe sur U et

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \circ f \times \frac{\partial f_k}{\partial t_j}$$

❒ Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue et $\dfrac{\partial f_k}{\partial t_j}$ est continue, g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k} \circ f$ est continue par composition. Par produit et somme, $\dfrac{\partial h_i}{\partial t_j}$ est continue sur U, donc h est de classe $\mathcal{C}^1$.

Bilan

Pour $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $h = g \circ f$ aussi et$\forall a \in U$, $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$, $$\frac{\partial h_i}{\partial t_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial t_j}(a)$$

Illustration : retour en coordonnées polaires Soit $\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $h = f\circ\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta)) \in \mathbb{R}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après ce qui précède, h est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ donc pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Rédaction « *à la physicienne* » ! On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, alors [a] :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Autre exemples

(1) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $f(U) \subset I$. Alors $\varphi\circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}\varphi\circ f(x)(h) = \mathrm{d}\varphi(f(x))\circ \mathrm{d}f(x)(h)$$

et la composition est en fait ici une multiplication car pour $t \in I$ et $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}\varphi(t)(u) = \varphi'(t)u$ d'où $\mathrm{d}\varphi\circ f(x)(h) = \varphi'(f(x)) \times \mathrm{d}f(x)(h)$. On en déduit que $\boxed{\operatorname{grad}\varphi\circ f(x) = \varphi'(f(x))\operatorname{grad} f(x)}$.

(2) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\varphi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ également telle que $\varphi(I) \subset U$. Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_k \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $f\circ\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour $t \in I$ et $u \in I$, $\mathrm{d}f\circ\varphi(t)(u) = \mathrm{d}f(\varphi(t))\circ\mathrm{d}\varphi(t)(u)$ or $\forall u \in I$, $\mathrm{d}\varphi(t)(u) = u\varphi'(t)$ où $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_n'(t))$ donc

$$\mathrm{d}f\circ\varphi(t)(u) = u\mathrm{d}f(\varphi(t))\left(\varphi'(t)\right)$$

Or pour $a \in U$ et $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,h_k$ donc ici,

$$\mathrm{d}f\circ\varphi(t)(u) = u\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t))\,\varphi_k'(t)$$

et on sait que $\mathrm{d}f\circ\varphi(t)(u) = u(f\circ\varphi)'(t)$ donc pour $t \in I$,

$$\boxed{(f\circ\varphi)'(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t))\,\varphi_k'(t)}$$

Pour $n = 2$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi : t \in I \longrightarrow (u(t), v(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ également, on a pour $t \in I$

$$(f\circ\varphi)'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

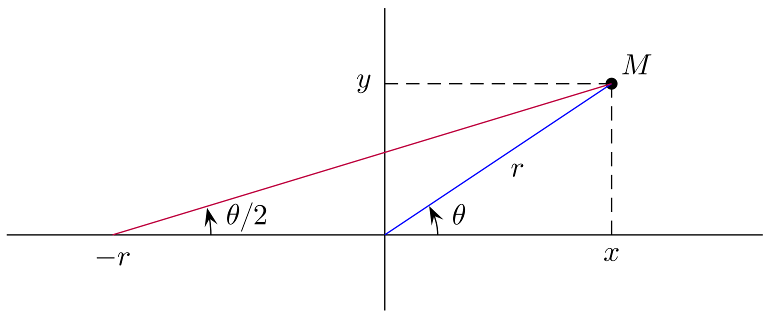
a. Et, au grand dam de M Sellès, on note encore f au lieu de $f\circ\varphi$.

3 Changements de variables et équations aux dérivées partielles

3.1 Difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si φ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^1(V,U)$.

Exemple : retour en coordonnées polaires Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$, on pose pour $(r,\theta) \in U$ $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $V = \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ [a]



❒ Montrons que g est surjective. Soit $(x,y) \in V$, on a toujours $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$: en effet, $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 \geqslant x^2$ donc $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x + \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$ et si $x + \sqrt{x^2+y^2} = 0$, alors $y^2 = 0$ et $|x| + x = 0$ donc $x \leqslant 0$ et $y = 0$, ce qui n'est pas possible au vu de la définition de V. $M = (x,y) \simeq x + iy$ et $M \neq 0$ donc $\exists (r,\theta) \in U$ tels que $M = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. De plus, θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$ et si $M' = (-r,0)$ et $M'' = (r,0)$, d'après le théorème de l'angle au centre, $2\left(\widehat{\overrightarrow{M'M''}, \overrightarrow{M'M}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$ donc $\theta/2$ est une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{M'M''}, \overrightarrow{M'M}}\right)$. Ainsi, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+r}$ et si $\theta \in \left]-\pi,\pi\right[$, $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\dfrac{\theta}{2} = \arctan\left(\dfrac{y}{x+r}\right)$.

❒ Ainsi, $M = g\left(r, 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+r}\right)\right)$ et g est injective car pour $(r,r') \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \left]-\pi,\pi\right[$,

$$r\mathrm{e}^{i\theta} = r'\mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta \quad [2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases} \quad \text{car } \theta, \theta' \in \left]-\pi,\pi\right[$$

Donc g est bijective de U sur V et, pour $(x,y) \in V$, on a

$$g^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) = (r(x,y), \theta(x,y))$$

D'après les théorèmes généraux sur les fonctions réelles, r et θ sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc g^{-1} aussi [b].

❒ De plus, pour $(x,y) \in V$,

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{r(x,y)} \text{ et } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r(x,y)}$$

a. $(\mathbb{R}_- \times \{0\}) = \{(x,0) \,|x \in \mathbb{R}_-\}$ est l'axe réel négatif.

b. En effet, $(x,y) \in V \longmapsto x^2+y^2$ est polynômiale donc $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc r est $\mathcal{C}^1$ par composition. D'autre part, $(x,y) \in V \longmapsto y$ est $\mathcal{C}^1$ et $(x,y) \longmapsto x + r(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur V donc θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y) &= 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x+r}\right)^2}\cdot\frac{-y}{(x+r)^2}\cdot\left[1+\frac{x}{r}\right] \\
&= -\frac{2y}{(x+r)^2+y^2}\frac{x+r}{r} \\
&= -\frac{2y(x+r)}{(x^2+y^2+r^2+2rx)\,r} \\
&= -\frac{y}{r(x+r)}\frac{x+r}{r} \\
&= -\frac{y}{r^2} \\
\text{et } \frac{\partial\theta}{\partial y} &= 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x+r}\right)^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x+r}\right) \\
&= \frac{2\left(x+r-\frac{y^2}{r}\right)}{(x+r)^2+y^2} \\
&= \frac{2}{r}\frac{xr+r^2-y^2}{x^2+y^2+r^2+2xr} \\
&= \frac{2}{r}\frac{xr+x^2}{2r(x+r)} \\
&= \frac{x}{r^2}
\end{aligned}$$

Remarque Si on pose

$$g_1 : \begin{array}{l} U_1=\mathbb{R}_+^*\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow V_1=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} \\ (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{array}$$

g_1 est aussi un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U_1 dans V_1 et pour $(x,y)\in V_1$, $g^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)=(r(x,y),\theta_1(x,y))$. On doit donc nécessairement avoir pour $(x,y)\in V_1$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=2\arctan\left(\frac{y}{x+r}\right),\ \frac{\partial\theta_1}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}\text{ et }\frac{\partial\theta_1}{\partial y}=\frac{x}{r^2}$$

3.2 Équations aux dérivées partielles du premier ordre

3.2.1 Résolution de l'équation homogène standard

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$, $U=I\times J$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On veut trouver les $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x}=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

❒ Soit f qui convient et $y\in J$, alors la fonction $\varphi : x\in I\longrightarrow f(x,y)$ est dérivable de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ donc φ est constante : $\exists\lambda(y)\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in I$, $f(x,y)=\lambda(y)$. Soit maintenant $x_0\in I$. $\lambda(y)=f(x_0,y)$ pour $y\in J$ or $y\longmapsto f(x_0,y)$ est dérivable de dérivée $y\longmapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur U donc $y\longmapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ est continue donc $y\longmapsto\lambda(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\exists\lambda : J\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall(x,y)\in I\times J$, $f(x,y)=\lambda(y)$.

❒ Réciproquement, soit $\lambda\in\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$, $f : (x,y)\in I\times J\longrightarrow\lambda(y)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent avec pour $(x,y)\in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda'(y)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien continues.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}) \,/\, \forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \lambda(y)$$

Applications

(1) Soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, trouvons les $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ qui vérifient $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$.

- Soit f qui convient, H une primitive de h sur I. On pose pour $(x,y) \in U$ $f_1(x,y) = f(x,y) - H(x)$. $f_1 \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - h(x) = 0$ donc $\exists \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in U,\ f_1(x,y) = \varphi(y)$ d'après le problème précédent donc finalement, $f(x,y) = H(x) + \varphi(y)$.
- Réciproquement, il est clair que les fonctions de ce type conviennent.

(2) Soit $h \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$, trouvons les $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$.

- Soit f qui convient, on pose $f_1 : (x,y) \in U \longrightarrow f(x,y) - xh(y)$, f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ donc $\exists \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in U,\ f_1(x,y) = \varphi(y)$ donc f est du type
$$(x,y) \longmapsto \varphi(y) + xh(y)$$
- Réciproquement, les fonctions de ce type conviennent.

(3) Trouvons les $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy$.

- Soit f qui convient, alors $f_1 : (x,y) \in U \longrightarrow f(x,y) - \dfrac{1}{2}x^2 y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ donc f est du type
$$(x,y) \in U \longmapsto \frac{1}{2}x^2 y + \varphi(y) \text{ avec } \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$$
- Réciproquement, les fonctions de ce type conviennent.

3.2.2 Changement de variable linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on souhaite trouver les $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

On cherche un changement de variable linéaire qui transforme le problème en un problème plus simple.

❒ Donnons-nous $\varphi \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^2\right)$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(u,v) = (au + bv, cu + dv)$ avec $ad - bc \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, $g = f \circ \varphi$, notons $\varphi^{-1} = (a'u + b'v, c'u + d'v)$. Alors $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + c\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + d\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$

d'où, en prenant les matrices,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{M} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $M^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) = a'\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + c'\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = b'\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + d'\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

Donc
$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi\left(u,v\right)\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi\left(u,v\right)\right)=\left(\lambda a'-b'\right)\frac{\partial g}{\partial u}\left(u,v\right)-\left(\lambda c'-d'\right)\frac{\partial g}{\partial v}\left(u,v\right)$$

❒ On choisit $a'=1$, $b'=\lambda$, $c'=0$ et $d'=1$, on a donc $M^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$ d'où $M=\begin{pmatrix}1&0\\-\lambda&1\end{pmatrix}$ donc $a=1$, $c=0$, $b=-\lambda$ et $d=1$ donc $\forall\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi\left(u,v\right)=\left(u-\lambda v,v\right)$. φ est $\mathcal{C}^1$, bijective et φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

❒ Soit maintenant $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$, $g=f\circ\varphi$, on a alors

$$\begin{aligned}
f\text{ est solution}\quad&\Leftrightarrow\quad\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad\forall\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi\left(u,v\right)\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi\left(u,v\right)\right)=0\\
&\qquad\text{car lorsque }\left(u,v\right)\text{ décit }\mathbb{R}^2\ ,\varphi\left(u,v\right)\text{ décrit }\mathbb{R}^2\\
&\Leftrightarrow\quad\forall\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial v}\left(u,v\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad\exists h\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)/\forall\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2,\ g\left(u,v\right)=h\left(u\right)
\end{aligned}$$

donc $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$, $f\left(x,y\right)=g\left(\varphi^{-1}\left(x,y\right)\right)=g\left(x-\lambda y,y\right)=h\left(x-\lambda y\right)$.

3.2.3 Changement de variable polaire

Soit $V=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, en utilisant les coordonnées polaires, trouvons les $f\in\mathcal{C}^1\left(V,\mathbb{R}\right)$ telles que $\forall\left(x,y\right)\in V$,
$$x\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)+y\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0$$

❒ Soit $f\in\mathcal{C}^1\left(V,\mathbb{R}\right)$, $\varphi:\left(r,\theta\right)\in U=\mathbb{R}_+^*\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V de réciproque $\varphi^{-1}:\left(x,y\right)\in V\longrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Posons $g=f\circ\varphi$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour $\left(r,\theta\right)\in U$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}\left(r,\theta\right)&=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\\
\frac{\partial g}{\partial\theta}\left(r,\theta\right)&=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial g}{\partial r}\left(r,\theta\right)&=r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\\
&=x\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

❒ Finalement,

$$\begin{aligned}
f\text{ est solution}\quad&\Leftrightarrow\quad\forall\left(x,y\right)\in V,\ x\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)+y\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad\forall\left(r,\theta\right)\in U,\ r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad\forall\left(r,\theta\right)\in U,\ r\frac{\partial g}{\partial r}\left(r,\theta\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad\forall\left(r,\theta\right)\in U,\ \frac{\partial g}{\partial r}\left(r,\theta\right)=0\text{ car }r\neq0\\
&\Leftrightarrow\quad\exists\psi\in\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right)/\forall\left(r,\theta\right)\in U,\ g\left(r,\theta\right)=\psi\left(\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right) / \forall (x,y)\in V,\ f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right) / \forall (x,y)\in V,\ f(x,y) = \psi\circ\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right) / \forall (x,y)\in V,\ f(x,y) = \alpha\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, f est fonction de la variable $\dfrac{y}{x}$.

Méthode alternative Soit $\lambda : (x,y)\in V \longrightarrow \left(x, \dfrac{y}{x}\right)\in V$. λ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $(u,v)\in V$,

$$(u,v) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = uv\end{cases}$$

λ est donc bijective de V dans V et $\lambda^{-1} : (u,v)\in V \longrightarrow (u,uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc λ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $g = f\circ\lambda^{-1} : (u,v)\in V \longrightarrow f(u,uv)\in\mathbb{R}$. Pour $(u,v)\in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)$$

Donc

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution } &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in V,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall (u,v)\in V,\ u\frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + uv\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall (u,v)\in V,\ u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall (u,v)\in V,\ g(u,v) = \varphi(v)\\
&\Leftrightarrow \exists \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \forall (x,y)\in V,\ f(x,y) = g\left(x,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

4 Dérivées d'ordre supérieur

4.1 Dérivées de fonctions numériques

4.1.1 Généralités

Soit $f : U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si chacune des dérivées partielle de f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si et seulement si $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur U et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ existe et est continue.
On définit de manière analogue les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ $(p\geqslant 2)$: $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ si f et $\mathcal{C}^1$ et si $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.
Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Toute fonction polynômiale est $\mathcal{C}^\infty$ car les dérivées partielles d'une fonction polynômiale de classe $\mathcal{C}^1$ sont elles-même des fonctions polynômiales de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorèmes généraux Soit $p\in\mathbb{N}^*$, $f,g\in\mathcal{C}^p(U,\mathbb{R})$, alors $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha f+g, fg, \dfrac{1}{f}\in\mathcal{C}^p(U,\mathbb{R})$ si toutefois ces fonctions sont définies (f ne s'annule pas sur U pour $\dfrac{1}{f}$).

Démonstration

- C'est vrai pour $p = 1$.
- Si le résultat est vrai pour $p \in \mathbb{N}^*$, soient $f, g \in \mathcal{C}^{p+1}(U, \mathbb{R})$, alors $\alpha f + g$, fg et $\dfrac{1}{f}$ sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial(\alpha f + g)}{\partial x_i} = \underbrace{\alpha \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\mathcal{C}^p} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}}_{\mathcal{C}^p}}_{\mathcal{C}^p \text{ (hyp. rec.)}}$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f}_{\mathcal{C}^{p+1} \Rightarrow \mathcal{C}^p} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}}_{\mathcal{C}^p}}_{\mathcal{C}^p \text{ (hyp. rec.)}} + \underbrace{\underbrace{g}_{\mathcal{C}^{p+1} \Rightarrow \mathcal{C}^p} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\mathcal{C}^p}}_{\mathcal{C}^p \text{ (hyp. rec.)}}}_{\mathcal{C}^p \text{ (hyp. rec.)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{f}\right) = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{f^2}}_{\mathcal{C}^{p+1} \Rightarrow \mathcal{C}^p} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\mathcal{C}^p}}_{\mathcal{C}^p}$$

Soit $f : x \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ lorsque $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.

Composition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$.

- C'est vrai pour $k = 1$.
- Supposons le résultat vrai pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, V)$, $g \in \mathcal{C}^{k+1}(V, \mathbb{R}^n)$, $h = g \circ f$. On note pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, pour $y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in V$ $g(y) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ et $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$. h est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial y_k} \circ f}_{\mathcal{C}^k} \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}}_{\mathcal{C}^k}}_{\mathcal{C}^k \text{ (hyp. rec., produit et somme)}}$$

4.1.2 Théorème de Schwarz

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Démonstration On démontre le résultat pour $n = 2$, ce qui le prouve en fait dans toutes les situations en l'appliquant plusieurs fois de suite.

Soit donc U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $a = (\alpha, \beta) \in U$, $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_\infty(a, r) \subset U$. Montrons que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. Pour cela, soit $h \in [-r, r]$, on pose

$$\Delta_h = f(\alpha + h, \beta + h) - f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta + h) + f(\alpha, \beta)$$

et on montrera que $\dfrac{\Delta_h}{h^2} \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{\longrightarrow} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\Delta_h}{h^2} \underset{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}{\longrightarrow} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

❒ Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \ & [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto f(t, \beta + h) - f(t, \beta) \end{aligned}$$

alors φ est dérivable sur $[\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h]$ et $\varphi'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \beta + h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \beta)$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ, $\exists c(h) \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h]$ tel que

$$\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(h), \beta + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(c(h), \beta)\right)$$

Or $\theta : t \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + h] \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(c(h), t)$ est dérivable et $\theta'(t) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(c(h), t)\right)$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists d(h) \in [\beta, \beta + h]$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(h), \beta + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(c(h), \beta) = h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(h), d(h))\right)$$

❒ Si bien que si $h \neq 0$,

$$\frac{\Delta_h}{h^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c(h), d(h)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est continue sur U donc en a donc $\exists \eta > 0$ tel que $r > \eta$ et $\forall b \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \eta)$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\right| \leqslant \varepsilon$. Soit $h \neq 0$ tel que $|h| \leqslant \eta$, $c(h) \in [\alpha, \underset{\leftrightarrow}{\alpha} + h] \Rightarrow |c(h) - \alpha| \leqslant \eta$ et $|d(h) - \beta| \leqslant \eta$ donc $(c(h), d(h)) \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \eta)$ donc

$$\left|\frac{\Delta_h}{h^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c(h), d(h)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta)\right| \leqslant \varepsilon$$

❒ On a donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\Delta_h}{h^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ et en considérant $\psi : t \in [\beta, \underset{\leftrightarrow}{\beta} + h] \longrightarrow f(\alpha + h, t) - f(\alpha, t)$, on montre de la même façon que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\Delta_h}{h^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$. On conclut donc par unicité de la limite.

4.1.3 Laplacien, fonctions harmoniques

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit le laplacien Δ de f par

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

On dit que f est harmonique sur U si $\Delta f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$. Si $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, f est dite radiale si $\exists \varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ telle que $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, $f(x) = \varphi\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$.

Fonctions radiales harmoniques On cherche les $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\forall \left(x_1, x_2, \dots, x_n \in U\right)$, $\varphi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$ est harmonique.

❒ Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, notons $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$, $f = \varphi \circ r$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi'(r(x)) \dfrac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \varphi'(r(x)) \dfrac{x_i}{r(x)}$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{x_i^2}{r^2(x)} \varphi''(r(x)) + \varphi'(r(x)) \frac{r(x) - x_i \frac{x_i}{r(x)}}{r^2(x)} \\
&= \frac{x_i^2}{r^2(x)} \varphi''(r(x)) + \varphi'(r(x)) \frac{r^2(x) - x_i^2}{r^3(x)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \\
&= \frac{\varphi''(r(x))}{r^2(x)} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{r^2(x)} + \frac{\varphi'(r(x))}{r^3(x)} \underbrace{\sum_{i=1}^n r^2(x) - x_i^2}_{(n-1)r^2(x)} \\
&= \varphi''(r(x)) + \frac{(n-1)\varphi'(r(x))}{r(x)}
\end{aligned}$$

❒ Ainsi,

$$\begin{aligned}
f \text{ est harmonique } &\Leftrightarrow \forall x \in U,\ \varphi''(r(x)) + \frac{\varphi'(r(x))(n-1)}{r(x)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t > 0,\ \varphi''(t) + \frac{n-1}{t}\varphi'(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi' \text{ est solution de l'équation différentielle } y' + \frac{n-1}{t} y = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

- Si $n = 1$, f est harmonique si et seulement si φ' est constante, c'est à dire si f est affine sur $\mathbb{R}_+^*$. f est donc du type
$$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto a\left|r(x)\right| + b \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$
- Si $n = 2$, une primitive de $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{n-1}{t}$ est $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto (n-1)\ln t = \ln t^{n-1}$, donc l'ensemble des solution de $(*)$ est $\left\{t > 0 \longmapsto \lambda \exp\left(-\ln\left(t^{n-1}\right)\right) | \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t > 0 \longmapsto \dfrac{\lambda}{t^{n-1}} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi,
$$f \text{ est harmonique} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(t) = \frac{\lambda}{t^{n-1}}$$
  - Si $n = 2$, f est harmonique si et seulement si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \lambda \ln t + \mu$ donc f est du type
  $$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \lambda \ln(r(x)) + \mu$$
  - Si $n \geqslant 2$, f est harmonique si et seulement si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \dfrac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu$ donc f est du type
  $$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\lambda}{r^{n-2}(x)} + \mu$$

4.1.4 Développement limité à l'ordre 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$. Pour $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ assez petit,

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i}_{\mathrm{d}f(a)(h)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j}_{\text{terme quadratique}} + \mathrm{o}\left(N_\infty^2(h)\right)$$

Par exemple, montrons que pour $n = 2$, $a = (\alpha, \beta) \in U$ et $u = (h, k)$,

$$f(a+u) = f(a) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, k}_{\mathrm{d}f(a)(h,k)} + h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \mathrm{o}\left(N_\infty^2(u)\right)$$

Soit $\varphi : t \in [0,1] \longrightarrow f(a+tu)$, φ est bien définie : $\exists r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_\infty(a,r) \subset U$, on prend $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_\infty(u) \leqslant r$, alors $\forall t \in [0,1]$, $N_\infty(tu) = tN_\infty(u) \leqslant r$ donc $a + tu \in U$. $t \in [0,1] \longmapsto a + tu$ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc, par composition, $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et pour $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(\alpha + th, \beta + tk)$ d'où

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha + th, \beta + tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha + th, \beta + tk) \\
&= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+tu) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+tu) \\
\Rightarrow \varphi''(t) &= h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu)\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+tu) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu)\right) \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu)
\end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a [a] :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)(1-0) + \int_0^1 (1-t)\,\varphi''(t)\;\mathrm{d}t$$

d'où, en développant l'expression :

$$\begin{aligned}
f(a+u) &= f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) \\
&\quad + \int_0^1 (1-t)\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu)\right]\mathrm{d}t \\
&= f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \int_0^1 (1-t)\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^1 (1-t)\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right) + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)\right. \\
&\quad \left. + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En nommant sobrement ce dernier terme $\Delta(u)$, on obtient en intégrant l'expression comportant des dérivées partielles en a uniquement :

$$f(a+u) = f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right] + \Delta(u)$$

Montrons maintenant que $\dfrac{|\Delta(u)|}{N_\infty^2(u)} \underset{u \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues en a donc $\exists \alpha > 0$ avec $\alpha < r$ tel que $\forall b \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \alpha)$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

a. Voir section 17.4.2.3 du cours complet page 273.

Soit $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $N_\infty(u) \leqslant \alpha$, $\forall t \in [0,1]$, $a + tu \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, \alpha)$ donc

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

On majore donc assez brutalement $|\Delta(u)|$:

$$\begin{aligned}
|\Delta(u)| &\leqslant \int_0^1 \underbrace{|1-t|}_{\leqslant 1} \Bigg[\underbrace{|h|^2}_{\leqslant N_\infty^2(u)} \underbrace{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right|}_{\leqslant \varepsilon} + 2 \underbrace{|h|\,|k|}_{\leqslant N_\infty^2(u)} \underbrace{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right|}_{\leqslant \varepsilon} \\
&\qquad + \underbrace{|k|^2}_{\leqslant N_\infty^2(u)} \underbrace{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right|}_{\leqslant \varepsilon} \Bigg] \mathrm{d}t \\
&\leqslant 4\varepsilon N_\infty^2(u)
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Interprétation du terme quadratique

On note $\operatorname{Hess} f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice hessienne de f en a.

D'après le théorème de Schwarz, $\operatorname{Hess} f(a)$ est symétrique et pour $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j &= {}^{\mathrm{T}}H \operatorname{Hess} f(a) H \\
&= \langle h, u(h) \rangle
\end{aligned}$$

où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'endomorphisme canonique associée à $\operatorname{Hess} f(a)$.

5 Extrema locaux des fonctions numériques

5.1 Faits de base

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$. On dit que f présente en a un minimum local (respectivement maximum local) s'il existe un $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_\infty(a, r) \subset U$ et $\forall x \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a, r)$, $f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

Théorème

Avec les notations de la définition, si f présente un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors

$$\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

On dit alors que a est un point critique de f.

En effet, supposons par exemple que f présente en a un minimum local : $\exists r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}_\infty(a,r) \subset U$ et $\forall x \in \overline{\mathcal{B}}_\infty(a,r)$, $f(x) \geqslant f(a)$. Notons $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$ er $t \in [-r,r]$, $a + te_i \in U$ donc $f(a+te_i) \geqslant f(a)$. Ainsi, $\varphi : t \in [-r,r] \longrightarrow f(a+te_i) \in \mathbb{R}$ présente en minimum local en 0. Or φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. D'après les théorèmes sur les fonctions réelles, $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Aisi,

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$$

Piège ! La réciproque de ce théorème est fausse !

Posons $f(x,y) = x^2 - y^2$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donc différentiable. $(0,0)$ est un point critique car $\mathrm{d}f(x,y) = 2x - 2y \Rightarrow \mathrm{d}f(0,0) = 0$. Soit $r > 0$, $(r,0) \in \overline{\mathcal{B}}_\infty((0,0),r)$ et $f(r,0) = r^2 > 0 = f(0,0)$ alors que $f(0,r) \in \overline{\mathcal{B}}_\infty((0,0),r)$ et $f(0,r) = -r^2 < 0$.

Exemple Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 6\left(x^2 - y^2\right) \end{array}$$

Il s'agit de trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale. Voilà un aperçu du graphe de cette fonction :

[colorbar, xlabel=x, ylabel=y, zlabel=$f(x,y)$] 3[surf,domain=-10 :10] x$^3 + y^3 + 6 * (y^2 - x^2)$;

D'après le théorème, si f présente un extremum local en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 12y$ donc

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est point critique } &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x-4) = 0 \\ 3y(y+4) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0,4\} \\ y \in \{0,-4\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 4 points critiques : $(0,0)$, $(0,-4)$, $(4,-4)$, $(4,0)$.

- Étudions $(0,0)$: $f(0,0) = 0$ et pour $t > 0$, $f(0,t) = t^3 + 6t^2 > 0$ et $f(t,0) = t^3 - 6t^2 \underset{0}{\sim} -6t^2 < 0$ au voisinage de 0. Ainsi, $\forall r > 0$, $\overline{\mathcal{B}}_\infty((0,0),r)$ contient des points dont l'image est plus grande que $f(0,0)$ et des points dont l'image est plus petite que $f(0,0)$ donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
- Étudions $(4,0)$: $f(4,0) = -32$. On pose pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ $\Delta(h,k) = f(4+h,k) - f(4,0)$. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta(h,k) &= (4+h)^3 + k^3 - 6\left((4+h)^2 - k^2\right) + 32 \\ &= 3 \times 16h + 3 \times 4h^2 + h^3 - 48h - 6h^2 + 6k^2 \\ &= 6h^2 + 6k^2 + h^3 + k^3 \\ &= 6h^2\left(1 + \frac{h}{6}\right) + 6k^2\left(1 + \frac{k}{6}\right) \end{aligned}$$

  Ainsi, si $N_\infty(h,k) \leqslant 6$, $\Delta(h,k) \geqslant 0$ donc f présente en $(4,0)$ un maximum local.
- Les études de $(4,-4)$ et $(0,-4)$ sont laissées au courageux lecteur !

5.2 Équations aux dérivées partielles d'ordre 2

5.2.1 Équations standards

Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $U = I \times J$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(1) Trouvons les $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

- Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ qui convient, alors $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de la forme $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi(y)$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ donc f vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi(y)$ donc $\exists \psi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y)$. Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$, alors $\forall y \in J$, $x_1\varphi(y) + \psi(y) = f(x_1, y)$ et $x_2\varphi(y) + \psi(y) = f(x_2, y)$ donc
$$\varphi(y) = \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1}$$
donc φ est a posteriori de classe $\mathcal{C}^2$, ainsi que ψ car $\psi(y) = f(x_1, y) - \varphi(y)$.
- La réciproque est claire.

Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R}) \text{ telles que} \forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y)$$

(2) Trouvons les $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

- Si f convient, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ donc $\exists \varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in U$, . Soit θ une primitive de φ sur J, il existe donc $\psi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$. θ est une primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$, et $\varphi = f - \theta$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ d'après les théorèmes généraux.
- La réciproque et claire.

Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{R}),\ \exists \psi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \text{ telles que } \forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$$

5.2.2 Illustrations

Exercice type Soit $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, trouvons les $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in V$,
$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

❒ Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$, pour $(x, y) \in V$ on pose $f(x, y) = \varphi(xy)$. Vérifions que f est bien solution. $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ et $\forall (x, y) \in V$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\varphi'(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\varphi'(xy)$ donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2\varphi''(xy) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^2\varphi''(xy)$$
Il est clair que f est bien solution.

❒ Soit
$$\psi : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \mapsto & \left(xy, \dfrac{y}{x}\right) \end{array}$$

ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour $(a,b)\,,(x,y)\in V$,

$$\begin{aligned}\psi(x,y)=(a,b) &\Leftrightarrow \begin{cases} xy=u \\ \frac{y}{x}=v\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2v=u \\ \frac{y}{x}=v\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv}\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bijective de réciproque $\varphi^{-1}:(u,v)\in V\longrightarrow\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\in V$. φ^{-1} est aussi $\mathcal{C}^\infty$ donc φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Soit maintenant $f\in\mathcal{C}(V,\mathbb{R})$,

$$g=f\circ\varphi^{-1}:\ \begin{array}{l} V\longrightarrow\mathbb{R} \\ (u,v)\mapsto f\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\end{array}$$

$g\in\mathcal{C}^2(V,\mathbb{R})$ et $f=g\circ\varphi$, donc $\forall(x,y)\in V,\ f(x,y)=g\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$. Calculons les dérivées partielles de f en fonction de celles de g : pour $(x,y)\in V$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right)+\frac{y}{2x^3}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\\
&\quad -\frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right)\\
&= y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{2x^3}\frac{\partial g}{\partial y}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right)+\frac{1}{x}\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)\right)\\
&= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy,\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
f\text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall(x,y)\in V,\ -4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{y}{x}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \forall(u,v)\in V,\ -4uv\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+2v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0\\
&\Leftrightarrow \forall(u,v)\in V,\ -2u\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0\quad(*)
\end{aligned}$$

❒ Fixons $v\in\mathbb{R}_+^*$. Si g est solution de $(*)$, alors $h:u\longrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ vérifie pour $u>0$ $-2uh'(u)+h(u)=0$. h est donc solution de l'équation différentielle

$$-2uy'+y=0\Leftrightarrow y'-\frac{y}{2u}=0$$

Une primitive de $u \longmapsto -\dfrac{1}{2u}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $u \longmapsto -\dfrac{1}{2}\ln u$ donc $D = \{x > 0 \longmapsto \lambda\sqrt{x} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Il existe donc $\lambda(v) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (u,v) \in V$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \lambda(v)\sqrt{u}$. λ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ donc elle admet une primitive $\mu \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$. Alors $g_1 : (u,v) \in V \longrightarrow g(u,v) - \mu(v)\sqrt{u}$ est telle que $\dfrac{\partial g_1}{\partial v} = 0$ donc $\exists \nu \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ telle que $g(u,v) = \mu(v)\sqrt{u} + \nu(u)$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ donc μ et ν aussi.

❒ Réciproquement, soient $\mu, \nu \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$, posons $g(u,v) = \mu(v)\sqrt{u} + \nu(u)$, alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \mu'(v)\sqrt{u} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \dfrac{\mu'(v)}{2\sqrt{u}}$ donc

$$-2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

Ainsi,

$$f \text{ est solution} \Leftrightarrow \exists \mu, \nu \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right) \text{ telles que } \forall (x,y) \in V,\ f(x,y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy} + \nu(xy)$$

Équation des ondes Il s'agit de résoudre pour $c > 0$ et $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,t) \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

❒ On utilise un changement de variable du type $u = x + at$ et $y = x + bt$ avec $a \neq b$. Posons $\varphi(x,t) = (x + at, x + bt)$, φ est $\mathcal{C}^\infty$, linéaire et

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

φ est bijective et φ^{-1} est linéaire donc $\mathcal{C}^\infty$, donc φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

❒ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ $g(u,v) = f \circ \varphi^{-1}(u,v)$. g est $\mathcal{C}^2$ et $f = g \circ \varphi$, on a donc $f(x,t) = g(x + at, x + bt)$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial g}{\partial u}(x+at, x+bt) + \frac{\partial g}{\partial v}(x+at, x+bt) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+at, x+bt) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+at, x+bt) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+at, x+bt) \\
\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) &= a\frac{\partial g}{\partial u}(x+at, x+bt) + b\frac{\partial g}{\partial v}(x+at, x+bt) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) &= a^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+at, x+bt) + 2ab\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+at, x+bt) + b^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+at, x+bt)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(a^2 - c^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+at, x+bt) + 2\left(ab - c^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+at, x+bt) \\
&\quad + \left(b^2 - c^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+at, x+bt)
\end{aligned}$$

❒ On prend $a = c$, $b = -c$. On a bien $a \neq b$ et

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v) \\
&\Leftrightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)
\end{aligned}$$

5.2.3 Théorème des fonctions implicites

Introduction Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^2+y^2-1$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $\Lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\right\}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0 \Leftrightarrow M_0 \notin \{(1,0),(-1,0)\}$.

Supposons par exemple $y_0 > 0$. $x_0^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x_0| < 1$ donc on peut considérer $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset [-1,1]$. Pour y voisin de y_0 et $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Lambda &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Au voisinage de M_0, Λ est le graphe de la fonction $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$.

Théorème

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$. Soit $M_0 = (a,b) \in U$ tel que $f(M_0) = 0$, on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$. On pose $\Lambda = \{(x,y) \in U | f(x,y) = 0\}$, $\Lambda \neq \varnothing$ car $M_0 \in \Lambda$. Alors :

(1) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $[a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta] \subset U$;

(2) il existe une unique fonction $\varphi : [a-\alpha, a+\alpha] \longrightarrow [b-\beta, b+\beta]$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall (x,y) \in [a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta]$, $f(x,y) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x)$.

❒ (2) signifie que $\Lambda \cap [[a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta]]$ est le graphe de φ. On a de plus $(a,b) \in \Lambda \cap [a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta]$ donc $\boxed{b = \varphi(a)}$.

❒ Pour $t \in [a-\alpha, a+\alpha]$,

$$\begin{aligned}(t, \varphi(t)) \in \Lambda &\Rightarrow f(t, \varphi(t)) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t)) = 0 \text{ en dérivant}\end{aligned}$$

En diminuant α, on peut rendre $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ non-nulle au voisinage de (a,b) : $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))$ est continue non-nulle en a donc non nulle au voisinage de a. Ainsi,

$$\boxed{\varphi'(t) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t))} \Rightarrow \varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}} \text{ pour } t = a$$

❒ La tangente au φ au point (a,b) est donc dirigée par

$$\begin{aligned}\left| \begin{array}{l} 1 \\ \varphi'(a) \end{array} \right. &= \left| \begin{array}{l} 1 \\ -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)} \end{array} \right. \\ &= \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{array} \right.\end{aligned}$$

Ainsi, cette tangente est orthogonale à $\operatorname{grad} f(a,b) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.