Dimension finie

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Existence de bases en dimension finie

Définition. *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.*

Exemple. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ *et plus généralement* $\mathbb{R}^n$ *sont de dimensions finies.*
$\mathbb{K}[X]$ *et* $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ *ne sont pas de dimensions finies.*

Remarque : Par convention, le sous-espace vectoriel de E, $\{0_E\}$, est de dimension finie et engendré par la famille vide

Proposition. *Théorème de la base extraite : Si E est de dimension finie, alors de toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base.*

Proposition. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base de cardinal fini.*

Proposition. *Théorème de la base incomplète :*
Si E est de dimension finie, alors toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Théorème. *Soit $(g_1, ..., g_r)$ une famille génératrice de E et $(f_1, .., f_p)$ une famille libre de E alors on peut compléter la famille $(f_1, .., f_p)$ avec des vecteurs de $(g_1, ..., g_r)$ pour en faire une base.*

II. Dimension

Théorème. *Si E est engendré par n vecteurs, alors :*
- *toute famille de $n+1$ éléments de E est liée.*
- *toute famille d'éléments de E ayant strictement plus de n éléments est liée.*
- *toute famille libre d'éléments de E est de cardinal inférieur ou égal à n.*

Proposition. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille génératrice de E et $(f_1, .., f_p)$ une famille libre de E alors $p \leq n$.*

Proposition. *Si E est de dimension finie alors toutes ses bases sont de même cardinal appelé dimension de E.*

Définition. *Tout sous-espace vectoriel de dimension un est appelé une droite vectorielle.*
Tout sous-espace vectoriel de dimension deux est appelé une plan vectoriel.

Exemple. $\mathbb{R}^n$ *est de dimension n,* $\mathbb{R}_n[X]$ *est de dimension $n+1$.*

Remarque : Le corps de base est primordial.
Ainsi, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.
Plus généralement, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Proposition. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*
Une famille génératrice de E a au moins n éléments.
Une famille de E ayant strictement moins de n éléments n'est pas génératrice.
Une famille libre de E a au plus n éléments.
Une famille de E ayant strictement plus de n éléments n'est pas libre.

Proposition. *Si E est de dimension finie n alors :*
- *Toute famille libre à n éléments est une base de E.*
- *Toute famille génératrice à n éléments est une base de E.*

Proposition. *Si E et F sont de dimensions finies, alors $E \times F$ aussi et*

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Corollaire. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout entier p, E^p est de dimension finie égale à $p \times \dim E$.*

Proposition. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes.*
- *Si E est de dimension finie, alors F aussi et $\dim E = \dim F$;*
- *sinon, E et F sont tous les deux de dimensions infinies.*

Remarque : On a donc montré que si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes, alors ils sont de même dimension (finie ou pas).

Proposition. *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont de même dimension si, et seulement s'ils sont isomorphes.*
Ainsi, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Proposition. *Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ aussi et*

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

III. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E de dimension finie n.

Théorème. *Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq n$ avec égalité si, et seulement si, $F = E$.*

Proposition. *Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.*

Proposition. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, alors*

$$\dim F + \dim G = \dim E.$$

Remarque : Il n'y a pas unicité du supplémentaire mais si G_1 et G_2 sont deux supplémentaires d'un sous-espace vectoriel F de E, alors $\dim G_1 = \dim G_2$. Les sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 sont donc isomorphes.

Corollaire. *Les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$*

Proposition. *Formule de Grassman :*
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Corollaire. *Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\dim(F_1 + F_2) \leq \dim F_1 + \dim F_2$$

avec égalité si, et seulement si, F_1 et F_2 sont en somme directe.

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
- *Si F et G sont en somme directe et si $\dim F + \dim G = n$, alors $E = F \oplus G$.*
- *Si $F + G = E$ et si $\dim F + \dim G = n$, alors $E = F \oplus G$.*

IV. Dimension et applications linéaires

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie, alors :*
- *Imf est de dimension finie ;*
- *$\dim Imf \leq \dim E$ avec égalité si, et seulement si, f est injective*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec F de dimension finie, alors :*
- *Imf est de dimension finie ;*
- *$\dim Imf \leq \dim F$ avec égalité si, et seulement si, f est surjective*

Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Alors f est injective si, et seulement si, f est surjective si, et seulement si, f est bijective.*

Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors f est surjective si, et seulement si, f est injective.*

Proposition. *Soient E et F de dimension finie.*
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective, alors $\dim E \leq \dim F$.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et G un sous-espace vectoriel de E.*
Le sous-espace vectoriel $f(G)$ est alors de dimension finie et $\dim f(G) \leq \dim G$.

V. Rang

Définition. *On appelle rang d'une application linéaire la dimension de son image lorsque celle-ci est finie.*

Proposition. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et si E ou F est de dimension finie, alors Imf aussi.*
Plus précisément :
- *si E est de dimension finie, alors $rg\, f \leq \dim E$ avec égalité ssi f est injective ;*
- *si F est de dimension finie, alors $rg\, f \leq \dim F$ avec égalité ssi f est surjective.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ telles que les rangs de f et de g soient définis. Alors $rg(g \circ f) \leq \min(rg\, f, rg\, g)$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ telles que le rang de g soit défini et que f soit surjective. Alors $rg(g \circ f) = rg\, g$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ telles que le rang de f soit défini et que g soit injective. Alors $rg(g \circ f) = rg\, f$.*

Théorème. *Théorème du rang :*
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et si E est de dimension finie, alors $\dim E = rg\, f + \dim Kerf$.

On retrouve les deux résultats suivants :

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de même dimension finie, alors f est surjective si, et seulement si, f est injective si, et seulement si, f est bijective.*

Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, alors f est surjective si, et seulement si, f est injective.*

Exemple. *Soient a_1,..., a_{n+1}, $n+1$ scalaires distincts.*
L'application $\mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_1), \cdots, P(a_{n+1}))$ est bijective.
On retrouve le théorème d'interpolation de Lagrange.

Définition. *Soit $(f_1, .., f_p)$ une famille de vecteurs de E.*
On appelle rang de la famille $(f_1, .., f_p)$ et on note $rg(f_1, .., f_p)$ la dimension de $Vect(f_1, .., f_p)$.

Proposition. *Soit $(f_1, .., f_p)$ une famille de vecteurs de E.*
On a alors $rg(f_1, .., f_p) \leq p$ avec égalité si, et seulement si, $(f_1, .., f_p)$ est libre.

Proposition. *Soit E de dimension finie n et $(f_1, .., f_p)$ une famille de vecteurs de E.*
On a alors $rg(f_1, .., f_p) \leq n$ avec égalité si, et seulement si, $(f_1, .., f_p)$ engendre E.

Proposition. *Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(f_1, .., f_p)$ une famille de vecteurs de E.*
Alors $rg\,(g(f_1), .., g(f_p)) \leq rg(f_1, .., f_p)$.

Remarque : Pour qu'il y ait égalité il suffit que g soit injective.
En fait, il y a égalité si, et seulement si, $g_{|\mathrm{Vect}(f_1,..,f_p)}$ est injective c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Vect}(f_1, .., f_p) = \{0\}$.

VII. Dimension et hyperplans

Soit E de dimension finie n.

Proposition. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul, alors*

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;\; \textit{avec } (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \textit{ tel que } \sum_{k=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

est un hyperplan, il s'agit du noyau de la forme linéaire non nulle

$$\phi \,:\, E \to \mathbb{K},\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_i x_i.$$

Réciproquement, si H' est un hyperplan de E, alors il existe des scalaires b_1,...,b_n non tous nuls tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i \in H'$ si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{n} b_i x_i = 0$ c'est-à-dire tels que

$$H' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;\; \textit{avec } (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \textit{ tel que } \sum_{k=1}^{n} b_i x_i = 0 \right\}$$

*On dit que $\sum_{k=1}^{n} b_i x_i = 0$ est **une** équation de H' dans la base $(e_1, ..., e_n)$.*

Proposition. *Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs non nuls et H_1, H_2 les hyperplans d'équations respectives $\sum_{k=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_i x_i = 0$ dans une même base de E.*
Alors $H_1 = H_2$ si, et seulement si, les vecteurs $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ sont proportionnels.

Proposition. *Soit H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors $\dim(F \cap H) \geq \dim F - 1$.
Plus précisément, $\dim(F \cap H) = \begin{cases} \dim F & \textit{si } F \subset H \\ \dim F - 1 & \textit{sinon} \end{cases}$

Proposition. *L'intersection de m hyperplans de E est de dimension au moins $n - m$.*

Proposition. *Tout sous-espace vectoriel de E de dimension d peut s'écrire comme l'intersection de $n - d$ hyperplans.*