TD 12 bis - Equivalents

Ex 1 :

1) $u_n \sim 1$

2) $u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)} \sim n\sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} \sim 1$

3) $u_n = \left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

$= \exp\left(n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

donc $n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim 1$

d'où $\lim n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1$

donc $\exp\left(n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \sim e$

$a^b = \exp(b\ln a)$

4) $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} = \frac{\exp\left(\sqrt{n+1}\ln(n)\right)}{\exp\left(\sqrt{n}\ln(n+1)\right)} = \exp\left(\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n+1)\right)$

$\underbrace{\sqrt{n+1}\ln(n)}_{\sqrt{n}\ln(n)} - \underbrace{\sqrt{n}\ln(n+1)}_{\sqrt{n}\ln(n)} = \sqrt{n}\ln(n)\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$

$\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$

$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \sim \frac{1}{n\ln n}$

$v_n = \sqrt{n}\ln n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)$

$v_n \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$

Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

puis $e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

5) $v_n = n^2 \big(\underbrace{(n+1)^{1/n} - n^{1/n}}_{v_n} \big) \sim 1$

$$v_n = \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n} - n^{1/n}$$

$$= n^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1$$

$$\sim \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^e}$$

$$v_n \sim 1$$

6) $\displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(n^3) - \arctan(n^2)$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\frac{\pi}{2} = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}} - \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\sim \frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\sim \frac{1}{n^2}$$

$\boxed{\text{ou}}$ $\tan u_n = \dfrac{n^3 - n^2}{1+n^5} \sim \dfrac{1}{n^2}$

$u_n \longrightarrow 0$

donc $\tan u_n \sim u_n$

Ainsi $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$

7) $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^3}\,dt$

$\forall t \in [n^2; n^3] : \quad \dfrac{1}{1+n^3} \leqslant \dfrac{1}{1+t^3} \leqslant \dfrac{1}{1+n^2}$

donc $\displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+n^3}\,dt \leqslant \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+n^2}\,dt$

$$\underbrace{\frac{n^3 - n^2}{1+n^3}}_{\sim 1} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{n^3 - n^2}{1+n^2}}_{\sim n}$$

perdu

* $V_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{t^3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{n^2}^{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6}\right)$

$$\sim \frac{1}{2n^4}$$

$$v_n - u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^3+1}\,dt = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{t^3(t^3+1)}\,dt$$

$$\frac{n^3-2}{n^9(n^9+1)} \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{n^3-n^2}{n^6(n^6+1)}$$

$$\sim \frac{1}{n^{15}} \qquad\qquad \sim \frac{1}{n^9}$$

$$\frac{n^3-n^2}{n^5(n^9+1)} \leqslant \frac{v_n-u_n}{1/n^4} \leqslant \frac{n^3-n^2}{n^2(n^6+1)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

Donc $v_n - u_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

càd $u_n - v_n = o(v_n)$

Donc $u_n \sim v_n$

$$\sim \frac{1}{2n^4}$$

Ex 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

Mq l'équation $x + \ln x = n$ a une unique solution

Soit $f : x \mapsto x + \ln x$

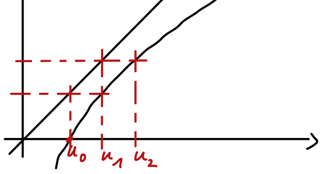
f str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et continue

D'après le théorème de la bijection continue, f établit une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$

dans $\left]\lim_{0} f\,;\, \lim_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $f(u_n) = n$

Rq : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = f^{-1}(n)$



2) Mq $u \nearrow$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Mq $u_n \leq u_{n+1}$

Par def, $f(u_n) = n$

$f(u_{n+1}) = n+1$

donc $f(u_n) < f(u_{n+1})$

Comme $f \nearrow$, $u_n < u_{n+1}$

Ainsi $u \nearrow$

$\boxed{\text{ou}}$ $u = (f^{-1}(n))_{n \in \mathbb{N}}$

Or f^{-1} stc $\nearrow$

donc u stc $\nearrow$

Or $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$

Donc $\lim u = +\infty$

$\boxed{\text{ou}}$ Supp $\lim u \neq +\infty$

alors u a une limite finie l

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n + \ln(u_n) = n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant u_0$, donc $l \geqslant u_0 > 0$

Ainsi en passant à la limite : $l + \ln(l) = +\infty$ absurde

Donc $\lim u = +\infty$

$\boxed{\text{ou}}$ $u_n + \ln(u_n) = n$

$u_n = n - \underbrace{\ln(u_n)}_{\leq u_n - 1}$

$u_n \geqslant n - u_n + 1$

$2u_n \geqslant n+1$

puis $\lim u = +\infty$

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \ln(u_n) = n$

Comme $\lim u = +\infty$, $\ln u_n = o(u_n)$

Donc $u_n + \ln(u_n) \sim u_n$

D'où $u_n \sim n$

et $u_n - n$?

$v_n = u_n - n$

On a déjà $v_n = o(n)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \ln(u_n) = n$

càd : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n + n + \ln(v_n + n) = n$

$$v_n + \ln(v_n + n) = 0$$

$$v_n = -\ln\left(n\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)\right)$$

$$= -\ln n - \underbrace{\ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)}_{\to 0} \sim -\ln n$$