Espaces vectoriels

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Définitions

Définition. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble, E, muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ telles que*
- $(E, +)$ *est un groupe commutatif*
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x),$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
- $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, ceux de E sont appelés vecteurs.
L'élément neutre de la loi $+$ est appelé vecteur nul.
Étant donné un vecteur x, son inverse pour la loi $+$ est appelé opposé de x et noté $-x$.

Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles.*
$\mathbb{C}$ *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
$\mathbb{K}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition. *(*) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. On a alors :*

- $\lambda \cdot 0_E = 0_E,$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E,$
- $(-\lambda) \cdot x = -\lambda \cdot x = \lambda \cdot (-x),$
- $\lambda \cdot x = 0_E \ \Rightarrow\ \lambda = 0_K$ *ou* $x = 0_E$.

II. Deux cas importants

Proposition. *(*) Soient $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Alors $E_1 \times E_2$ munies des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\forall \left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) \in \left(E_1 \times E_2\right)^2, \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2)$$

$$\forall (x_1, x_2) E_1 \times E_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot_1 x_1, \lambda \cdot_2 x_2)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit

Exemple. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel pour l'addition et la multiplication usuelles définie par*

$$\forall \left((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)\right) \in \left(\mathbb{K}^n\right)^2, \quad (a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

et de la multiplication externe usuelle $\cdot$ définie par

$$\forall (a_1, ..., a_n) \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (a_1, ..., a_n) = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$$

est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition. *(*) Si E est un $\mathbb{K}$ ev et X une partie quelconque, alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois usuelles*

Exemple. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et, plus généralement, $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

III. Sous-espaces vectoriels

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.*
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable par les lois $+$ et $\cdot$ et si F est un espace vectoriel pour les lois induites.

Proposition. *(*) Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0_E \in F$,
- $\forall (x,y) \in F^2, \quad x+y \in F$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F$.

Remarque : L'hypothèse $0_E \in F$ peut être remplacée par F non vide.

Proposition. *(*) Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0_E \in F$,
- $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Exemple. *(*)*
$\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\mathcal{C}^n(D,\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}^n(D,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ paire}\right\}$ et $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ impaire}\right\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ périodique de période rationnelle}\right\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ s'annulant en } \pi\right\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\left\{f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{K}) \ : \ f''' + 5f' - \sqrt{2}f = 0\right\}$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel.
$\left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\right\}$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel.

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x_1, ...,x_r, r vecteurs de E.*
On appelle combinaison linéaire des vecteurs x_1, ...,x_r tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \quad \textit{avec} \quad (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r.$$

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de la forme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle.*
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ les suites de scalaires presque nulles. Les combinaisons linéaires des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ sont donc les vecteurs de la forme $\sum\limits_{k\in I} \lambda_k x_k$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

IV. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition. *(*) Intersections d'espaces vectoriels*
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : En particulier, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. L'union de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Corollaire. *(*) Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E alors il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E au sens de l'inclusion contenant A.*
Il est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par A et noté $\mathrm{Vect}(A)$.

Proposition. *Soient* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $x \in E$.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x\})$ *est égal à* $\{\lambda \cdot x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. *Il est noté* $\mathrm{Vect}(x)$ *ou* $\mathbb{K}x$.

Remarque : Lorsque $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ est appelée la droite engendrée par x.

Proposition. *(*) Soient* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $x_1, \ldots, x_r$, r *vecteurs de* E.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x_1, ..., x_r\}$ *est égal à* $\left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k,\ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \right\}$.
Il est noté $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.

Exemple. *Si* $E = \mathbb{C}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *alors* $\mathrm{Vect}(2) = \mathbb{R}$.
Si $E = \mathbb{C}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *alors* $\mathrm{Vect}(2) = \mathbb{C}$.
Si $E = \mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *alors* $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \{(x,y,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Proposition. *(*) Soit* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-ev et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque de vecteurs de* E.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I\})$ *est égal à* $\left\{ \sum_{k\in I} \lambda_k x_k,\ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}$.

Corollaire. *Soit* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A *une partie de* E *alors* $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaison linéaires des vecteurs de* A.

Exemple. $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^n,\ n \in \mathbb{N})$.

V. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition. *Somme d'espaces vectoriels*
Soient F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E,+,\cdot)$.
On appelle somme des sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *l'ensemble*

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2,\ (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

Remarque : Soient x et y deux vecteurs, on a $\mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \mathrm{Vect}(x,y)$.
Plus généralement, étant donnés n vecteurs $(x_1, ..., x_n)$, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r) + \mathrm{Vect}(x_{r+1}, ..., x_n).$$

Proposition. *(*) La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est un sous-espace vectoriel de* E. *C'est le plus petit sev de* E *contenant* F_1 *et* F_2.

Corollaire. *(*) Soit* $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ *alors*

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}A + \mathrm{Vect}B$$

En particulier, $\forall (x,y) \in E^2$, $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$

Corollaire. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *alors* $F_1 + F_2 = E$ *si et seulement si* $\forall x \in E,\ \exists (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$ *c'est-à-dire si, et seulement si, l'application* $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *est surjective*

Définition. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *On dit que les sous-espaces vectoriels* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si*

$$\forall x \in F_1 + F_2,\ \exists! (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$$

c'est-à-dire si si et seulement si l'application $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *est injective.*
Dans ce cas, $F_1 + F_2$ *est noté* $F_1 \bigoplus F_2$.

Proposition. *(*) Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.
Les sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si et seulement si* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.
On dit que les sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *sont supplémentaires s'ils sont en somme directe et si* $F_1 \bigoplus F_2 = E$ *c'est-à-dire si* $\forall x \in E,\ \exists! (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$ *c'est-à-dire si l'application* $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *est bijective. c'est-à-dire si tout vecteur de* E *se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2.

VI. Compléments : Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. *Soit $(F_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle somme des sous-espaces vectoriels F_1,..., F_r l'ensemble*

$$\sum_{i=1}^{r} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i,\ (x_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \in F_1 \times ... \times F_r \right\}$$

Proposition. *Soit $(F_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est le plus petit sev de E contenant les F_i.*

Définition. *Soit $(F_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est dite directe si l'application $F_1 ... \times F_r \to E,\ (x_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \mapsto \sum_{i=1}^{r} x_i$ est injective, c'est-à-dire si*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{r} F_i,\ \exists!(x_1, ..., x_r) \in F_1 \times ... \times F_r\ :\ x = \sum_{i=1}^{r} x_i$$

On note alors $\sum_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Proposition. *La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe si, et seulement si,*

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n, \quad \sum_{i=1}^{r} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$$

Remarque : Si la somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe, alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$ tel que $i \neq j$, les sev F_i et F_j sont en somme directe mais il n'y a pas de réciproque.
Par exemple, les droite $D_1 = \mathbb{K}(1,0,0)$, $D_2 = \mathbb{K}(0,1,0)$ et $D_3 = \mathbb{K}(1,1,0)$ sont en somme directe deux à deux mais la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas directe

Remarque : Pour que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ soit directe il est nécessaire et suffisant que les sommes $F_1 + F_2$ et $(F_1 \bigoplus F_2) + F_3$ soit directes.
Cela prouve ainsi que les égalités $\bigoplus_{i=1}^{3} F_i = \left(F_1 \bigoplus F_2\right) \bigoplus F_3 = F_1 \bigoplus \left(F_2 \bigoplus F_3\right)$ ont un sens et justifie que lorsque la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe, alors on écrive $\bigoplus_{i=1}^{3} F_i = F_1 \bigoplus F_2 \bigoplus F_3$

Les exercices suivants donnent des CNS pour qu'une somme soit directe.

Exercice. *Soit $(F_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

- *La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe si et seulement si $\forall i \in [\![2,r]\!], \quad F_i \bigcap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j \right) = \{0_E\}$.*
- *La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe si et seulement si $\forall i \in [\![1,r]\!], \quad F_i \bigcap \left(\sum_{j\in[\![1,r]\!],\ j\neq i} F_j \right) = \{0_E\}$.*