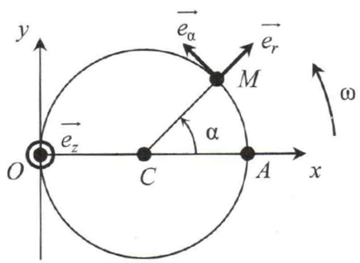
EXERCICES DE REVISION

❑ Exercice 1.5. Oscillations en référentiel tournant*

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon r, est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre (R_T) supposé galiléen.

À partir de l'instant $t = 0$, on fait tourner cet anneau par rapport à (R_T), à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. À $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$), et sa vitesse par rapport à (R_T) est encore nulle.



On note $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.

1. a) Le référentiel (R) lié à l'anneau est-il galiléen ?

b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans (R), et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\alpha}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

On pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ est de la forme : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0$.

3. a) Déterminer les positions d'équilibre de M dans (R).

b) Préciser leur stabilité en utilisant l'équation différentielle précédente.

4. a) On suppose maintenant $\alpha \ll 1$ (petites oscillations). Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

b) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin\alpha$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.

5. a) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans (R), en fonction de α, $\dot{\alpha}$ et des paramètres du système.

b) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

Mécanique *Référentiels non galiléens*

❑ Exercice 1.6. Force de Coriolis sur un train

Un train à grande vitesse, de masse $m = 7{,}8\cdot10^5$ kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$; à l'instant considéré il se trouve à la hauteur de Valence à la latitude $\lambda = 45°$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormale $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{e_z}$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.

2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre, et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne : $\Omega = 7{,}3\cdot10^{-5}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?