Calculs

I. Notations et règles de calculs

On s'intéresse aux calculs de sommes et de produits.

Notation. *La somme de n complexes $a_1, \cdots a_n$ sera notée* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *et leur produit* $\prod_{k=1}^{n} a_k$.
Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de complexes, on note $\sum_{k\in I} a_k$ *et* $\prod_{k\in I} a_k$ *leur somme et leur produit.*

Exemple. *Pour tout entier n non nul, on a* $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque. *La variable k de la somme* $\sum_{k\in I} a_k$ *est muette :* $\sum_{k\in I} a_k = \sum_{i\in I} a_i$.

Proposition. *Soient $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$ deux familles finies de complexes, on a :*

- $\sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k = \sum_{k\in I} (a_k + b_k)$.
- $\sum_{k\in I} \lambda a_k = \lambda \sum_{k\in I} a_k$.
- $\sum_{k\in I} (a_k + \lambda) = \sum_{k\in I} a_k + \lambda \# I$.
- $\prod_{k\in I} a_k \times \prod_{k\in I} b_k = \prod_{k\in I} (a_k b_k)$.
- $\prod_{k\in I} (\lambda a_k) = \lambda^{\# I} \prod_{k\in I} a_k$.
- $\prod_{k\in I} a_k^p = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p$

Proposition. *Soient $(a_k)_{k\in I}$ et $(a_k)_{k\in J}$ deux familles finies de complexes telles que $I \cap J = \emptyset$. On a :*

- $\sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k = \sum_{k\in I\cup J} a_k$.
- $\prod_{k\in I} a_k \times \prod_{k\in J} a_k = \prod_{k\in I\cup J} a_k$.

Remarque. *Par convention, si I est vide, alors* $\sum_{k\in I} a_k = 0$ *et* $\prod_{k\in I} a_k = 1$.
Les règles énoncées sont conservées dans ce cas.
Ainsi, si $n < m$, alors $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ *et* $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.
On pose donc $0! = 1$.

Proposition. *(*) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Proposition. *(*) Soit q un complexe et $n \in \mathbb{N}$, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice. *(*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :*

1. $\displaystyle\sum_{k \in [\![1,2n]\!],\, pair} k$
2. $\displaystyle\sum_{k \in [\![1,2n]\!],\, impair} k$
3. $\displaystyle\prod_{k \in [\![1,2n]\!],\, pair} k$
4. $\displaystyle\prod_{k \in [\![1,2n]\!],\, impair} k$

II. Changement d'indice

Un changement d'indices est une réindexation d'une somme ou d'un produit.

Exemple. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$.
Dans le premier cas on parle d'un décalage, dans le deuxième d'une symétrisation

Exercice. *A l'aide d'une symétrisation, retrouver la formule* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition. *(*) Soient p et q deux entiers tels que $p < q$. On a* $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} k = (q-p+1)\frac{p+q}{2}$.

Plus généralement, si u est une suite arithmétique, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p+u_q}{2}$.

Proposition. *Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des complexes, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Proposition. *Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des complexes non nuls, on a*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

Exercice. *Simplifier* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k+2} - a_k)$.

Exercice. *(*) En remarquant que* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice. *Simplifier* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice. *(*) En calculant de deux façons la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$, *retrouver la formule de la somme des carrés.*
Adapter pour obtenir celle des cubes.

Proposition. *(*) Soient p et q deux entiers tels que $p < q$. On a, pour tout complexe a :*

$$\sum_{k=p}^{q} a^k = \begin{cases} q-p+1 & \text{si } a = 1 \\ a^p \dfrac{1-a^{q-p+1}}{1-a} = \dfrac{a^p - a^{q+1}}{1-a} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition. *(*) (Égalité de Bernoulli) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Alors, pour tout entier n, on a :*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

III. Coefficient binomial et formule du binôme

Définition. *Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on appelle coefficient binomial "k parmi n" le réel :*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$*

Proposition. *(*) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a la relation de Pascal : $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$*

Remarque. *Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être interprété comme :*
- *le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.*
- *le nombre de façons d'obtenir k succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.*

Exercice. *(*) Montrer que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{k}$ est un entier.*

Proposition. *(*) (Binôme de Newton) Soit a et b deux complexes alors pour tout entier n,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice. *(*) Calculer les sommes suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k \in [\![0,n]\!],\, k \text{ pair}} \binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k \in [\![0,n]\!],\, k \text{ impair}} \binom{n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{j=i}^{p} (-1)^{p-j} \binom{p}{j} \binom{j}{i}$

IV. Sommes doubles

On appelle somme double une somme finie de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$.

Lorsque $K = I \times J$ (on dit que K est un produit cartésien), alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

Exercice. *Calculer* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} i^2\, 3^j$.

Dans le cas très favorable où $a_{i,j} = b_i c_j$ et $K = I \times J$, de cet exemple, on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \sum_{i\in I} b_i \times \sum_{j\in J} c_j.$$

Exercice. *(*) Calculer* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \min(i,j)$.

Remarque. *On a* ***PAS*** $\displaystyle\prod_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \prod_{i\in I} b_i \prod_{j\in J} c_j$ *mais* $\displaystyle\prod_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \left(\prod_{i\in I} b_i\right)^{\#J} \left(\prod_{j\in J} c_j\right)^{\#I}$.

Un cas fréquent de sommes doubles est celui des sommes triangulaires pour lesquelles on a

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\ \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\ \sum_{i=0}^{j} a_{i,j}$$

De même $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$.

Ces résultats se généralisent aux produits doubles :

$$\prod_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \prod_{i=0}^{n}\ \prod_{j=i}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=0}^{n}\ \prod_{i=0}^{j} a_{i,j} \quad \text{et} \quad \prod_{0\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \prod_{i=0}^{n-1}\ \prod_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\ \prod_{i=0}^{j-1} a_{i,j}$$

Exercice. *(*) Calculer les sommes suivantes :*

— $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)$

— $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i)^2$

— $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$

— $\displaystyle\sum_{i\in[\![0,n]\!]} i3^i$ *en remarquant que* $\displaystyle i = \sum_{j=1}^{i} 1$.