DM 10. Exercices de topologie

Les différents exercices sont indépendants et sont tous des classiques.

Exercice 1 : continuité des formes linéaires

Soit $E, ||..||$ un espace normé et f une forme linéaire sur E.

1. Soit A une partie de E et $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$
2. On suppose que f est continue. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un fermé.
3. On suppose que $\operatorname{Ker} f$ est un fermé.
   a) Soit x_0 un vecteur non nul qui n'est pas dans $H = \operatorname{Ker} f$. Que dire de $d(x_0, H)$?
   b) Démontrer, pour tout x, $\|xf(x_0)\| \geq d(xf(x_0), H) = d(x_0 f(x), H) = |f(x)|d(x_0, H)|$
   c) En déduire que f est continue.

Exercice 2 : inégalités de Holder et minkowski

1. Démontrer que si p et q sont deux réels strictement positifs qui vérifient $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors on a $\forall \alpha > 0 \forall, \beta > 0, \alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$.
   Quels sont les cas d'égalité ?
2. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$.
   On note $n_p(f) = (\int_0^1 |f(x)^p| \, dx)^{\frac{1}{p}}$,
   Démontrer que l'on a l'inégalité de Hölder :
   $$\int_0^1 |f(x)g(x)| \, dx \leq n_p(f)n_q(g)$$
   on choisira $\alpha = \dfrac{|f(x)|}{n_p(f)}, \beta = \dfrac{|g(x)|}{n_q(g)}$ *dans la première question*
   Que retrouve-t-on lorsque $p = 2$?
3. En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $(f + g)^{p-1}, f$ d'une part et $(f + g)^{p-1}, g$ d'autre part, démontrer que que l'on a l'inégalité de Minkowski :
   $$n_p(f + g) \leq n_p(f) + n_p(g)$$
4. Démontrer que n_p est une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
5. Montrer que pour tout $p > 1$, n_p est plus fine que n_1 et que la norme infinie est plus fine que n_p mais qu'il n'y a pas d'équivalences.

Exercice 3 : une preuve de l'équivalence des normes en dimension finie.

On note $\|\dot{}\|$ la norme infinie sur $E = \mathbb{K}^p$.
On note $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de E.

1. Soit $U_n = (u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)})$ une suite de vecteurs de $\mathbb{K}^p$. On suppose que pour tout entier k la suite $(u_n^{(k)})_n$ est bornée. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que toutes lest p suites $(u_{\varphi(n)}^{(k)})_n$, $k = 1..p$ soient convergentes.
   On raisonnera par récurrence sur p et l'on fera des extractions successives judicieuses
2. Soit N une norme quelconque sur E et $K = \sum_{i=1}^{p} N(e_i)$. Etablir pour tout x l'inégalité
   $$N(x) \leq K\|x\|$$
3. On note $\alpha = \inf\{N(x), \, x \in E\|x\| = 1\}$. Vérifier que α est bien défini et que c'est un réel positif ou nul.

4. On se propose de démontrer que α est non nul.
    (a) Etablir l'existence d'une suite $(U_n)_n$ d'éléments de E telle que $\|U_n\| = 1$ et $N(U_n) \to \alpha$ quand n tend vers l'infini.
    (b) Démontrer l'existence d'un vecteur U tel que $\|U\| = 1$ et $N(U) = \alpha$.
    (c) Conclure.
5. Déterminer une constance $C > 0$ telle que l'on ait pour tout x

$$\|x\| \leq CN(x)$$

Ainsi toutes les normes sur $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes à la norme infinie et donc par transitivité, toutes les normes sont équivalentes entre elles. Le passage de $\mathbb{K}^p$ à un ev de dimemsion p quelconque ne pose pas de problème.

Exercice 4 : le théorème du point fixe

Dans ce problème $(E\ ,\|\|)$ désigne un espace vectoriel normé complet, c'est à dire un espace vectoriel dans lequel toute série absolument convergente est convergente. On rappelle que tous les espaces de dimension finie sont complets.

Soit f une application de E dans lui même, on dit que f est une contraction de rapport $k < 1$ si elle vérifie :

$$\forall x, y, \|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x - y\|$$

1. Soit f une contraction et $x_0 \in E$. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par la relation $x_n = f(x_{n-1})$.
    (a) Démontrer qu'il existe une constante c telle que l'on ait pour tout couple $(p, n), p < n$ l'inégalité $\|x_n - x_p\| \leq ck^p$.
    (b) En déduire que la suite (x_n) est convergente vers une limite l
    (c) Démontrer que l est l'unique point fixe de f.

On a ainsi démontré que toute contraction de E possède un unique point fixe. C'est le théorème du point fixe de Picard

On illustre ce théorème par deux exemples :

2. Dans cette question $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne notée$\|\|$
    (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ établir que pour tout $X \in E$ on a l'inégalité $\|AX\| \leq k\,\|X\|$ où $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{i,j}^2}$
    (b) On considère la suite (x_n, y_n) définie par $x_0 = y_0 = 0$ et la condition

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,1y_n + 1.1 \\ y_{n+1} = 0.2x_n + 0.4y_n + 0.8 \end{cases}$$

    Montrer que la suite (x_n, y_n) converge vers l'unique solution du système système linéaire

$$\begin{cases} x = 0,4x + 0,1y + 1.1 \\ y = 0.2x + 0.4y + 0.8 \end{cases}$$

    (c) Montrer plus généralement que si $k < 1$ le système linéaire $(A - I_n)X = B$ possède une unique solution.

3. Dans cette question $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\|_\infty$. (on admet que c'est un espace complet). On fixe un réel α et on considère l'application Φ qui à $f \in E$ associe g telle que $g(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x (\frac{\cos(f(t))}{2} + t)dt$.
    (a) Démontrer que Φ est une contraction de E.
    (b) Utiliser alors le théorème du point fixe pour démontrer que l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}\cos(y) + x$ possède une unique solution sur $[0,1]$ vérifiant $y(0) = \alpha$.

Exercice 5. Sous groupes de $\mathbb{R}$ et applications

I. Structure des sous groupes additifs de $\mathbb{R}$

1. Soit $G \neq \{0\}$ un sous groupe de $\mathbb{R}$ pour la loi +. On note G^+ l'ensemble des éléments de G qui sont strictement positifs. Justifier que G^+ possède une borne inférieure qui sera notée a.
2. On suppose que a est non nulle.
   (a) Montrer que $]a, 2a[$ ne peut pas contenir deux éléments de G. En déduire que $a \in G$.
   (b) Soit $x \in G^+$ Montrer que $x - E(\dfrac{x}{a})a$ est élément de G. En déduire que $G = a\mathbb{Z}$
3. On suppose que a est nulle.
   (a) Montrer que tout intervalle $]0, \varepsilon[$ contient un élément de G.
   (b) Montrer que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de G.
   (c) Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

II. Exemples d'applications

Le résultat précédent possède de nombreuses applications. En voici quelques unes.

1. Soit f une fonction périodique et continue. Montrer que l'ensemble des périodies de f est un sous groupe additif.
   Que dire de f si ce sous groupe est dense ?
   En déduire l'existence, pour f non constante d'une plus petite période positive (c'est "la" période).
2. Soit α, β des réels non nuls. On pose $G_{\alpha,\beta} = \{n\beta + m\alpha, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $G_{\alpha,\beta}$ est un sous groupe, et qu'il est dense si et seulement si $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel.
3. Soit G un sous groupe (multiplicatif) compact de $\mathbb{C}^*$
   a) Montrer que les éléments de G sont tous de module 1
   b) On pose $H = \{x \in \mathbb{R}, \exp(ix) \in G\}$. Vérifier que H est un sous groupe fermé de $\mathbb{R}$ qui contient $2\pi\mathbb{Z}$ et que G est l'image de H par $x \mapsto \exp(ix)$
   c) Des résultats précédents déduire que G est égal à $\mathbb{U}$ ou a l'un des groupes $\mathbb{U}_n$