Spéciales MP* – 22/23 – Préparation à l'oral
Exercices posés à l'oral des Mines en 2022

Algèbre générale

1. a. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$. On suppose trouvé $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m + 1$ soit premier. Montrer que a est pair, et que m est une puissance de 2.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

c. Montrer que, si p et q sont deux naturels distincts, alors $F_p \wedge F_q = 1$. En déduire une démonstration du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

2. Soient G et H deux groupes cycliques, de cardinaux respectifs p et q. Montrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si $p \wedge q = 1$.

3. Soit p un nombre premier ; on pose $\quad G_p = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad z^{p^k} = 1 \}$.

a. Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

b. Soit H un sous-groupe de G_p, distinct de G_p et de $\{1\}$. Montrer que H est cyclique.

4. Soit A un anneau commutatif ; soit I un idéal de A. On pose $\quad \sqrt{I} = \{ a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \in I \}$.

a. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A, qui contient I.

b. Déterminer $\sqrt{I}$ si I est un idéal de $\mathbb{Z}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A_n l'ensemble des polynômes P à coefficients entiers, unitaires et de degré n, et dont toutes les racines sont de module 1.
Montrer que A_n est fini.

6. Soient $n \geqslant 2$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, scindé à racines simples, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $P' + \lambda P$ est scindé à racines simples.

7. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; soit $P = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$ en précisant les conditions d'existence.

Algèbre linéaire élémentaire

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne $2n$ réels vérifiant $\quad x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n$.

a. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

b. Montrer qu'il existe $P \neq 0$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,dt = 0$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner sa dimension.

b. Donner une base de F.

10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $u^2 = 0$ si et seulement s'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\quad p = \max\{ \operatorname{rg} M \ ; \ M \in V \}$, $\quad$ et on suppose $1 < p < n$. Le but de l'exercice est de démontrer que $\quad \dim V \leqslant np$.

a. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\Phi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto Y$ réalise un isomorphisme de $\operatorname{Ker} M$ sur $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$.
En déduire que $\operatorname{rg} M = p$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

b. Pourquoi peut-on supposer que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$?

c. On note W l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$.
Montrer que $V \cap W = \{0\}$. Conclure.

12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note u l'endomorphisme de E défini par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u(e_n) = e_{n+1}$. Soit $\Phi : \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathcal{L}(E)$, $v \longmapsto u \circ v - v \circ u$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{L}(E)$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi$ est de dimension infinie.

c. Soient $x \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $v(e_0) = x$ et $\Phi(v) = w$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $m_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i + j$ est impair.

a. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si sa comatrice est dans $\mathcal{D}$.

14. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.

Réduction des endomorphismes

15. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ vérifiant $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que BA est diagonalisable.

16. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, A_t est diagonalisable. On note $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ ses valeurs propres, avec $a(t) \leqslant b(t) \leqslant c(t)$.

b. Montrer que $a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t)$.

c. Déterminer les limites respectives de $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent simple de $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

17. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, soient $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes. On pose $B = \begin{pmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_n & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A^{-1}B$ et BA^{-1} sont de rang $n - 1$, et n'admettent que 0 comme valeur propre.

18. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme minimal de B en fonction de celui de A.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

19. Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note D l'endomorphisme de E qui à une fonction associe sa dérivée.
Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ \varphi = D$; on pourra considérer les ensembles $E_\lambda = \operatorname{Ker}(D - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui commutent deux à deux. Montrer que $A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1 = 0$.

21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \big(P(A)\big)^n = 0 \implies P(A) = 0$$

22. Pour quels entiers n existe-t-il $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^3 - f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\mathrm{tr}\, f \in \mathbb{Q}$?

23. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, de multiplicité q.
Montrer que $\dim E_\lambda(u) = q$ si et seulement si $E = E_\lambda(u) \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \longmapsto AM$.

a. Étudier le lien entre l'inversibilité de A et celle de f.

b. Étudier le lien entre la diagonalisabilité de A et celle de f.

25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \longmapsto AMA^\top$.

a. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

b. Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{C}^{2n}$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$, si et seulement si $(X_i Y_j^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Montrer que, si A est diagonalisable, alors f l'est aussi.

d. Soit Y un vecteur propre de A. Montrer que $F = \{XY^\top ; X \in \mathbb{C}^n\}$ est stable par f.

e. Montrer que, si f est diagonalisable, alors A l'est aussi.

Espaces euclidiens

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \big(k^n - P(k)\big)^2$.
Montrer que φ admet un minimum sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et calculer ce minimum.

27. Notons $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, que l'on munit du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit v l'application de $\mathbb{E}$ dans lui-même qui, à toute $f \in \mathbb{E}$, associe sa primitive nulle en 0.

a. Montrer que v est un endomorphisme de E.

b. Montrer qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout couple $(f,g) \in E^2$, $\langle v(f), g\rangle = \langle f, w(g)\rangle$.

c. Quels sont les valeurs propres et vecteurs propres de $v \circ w$?

28. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $B(f,g) = \int_0^1 \big[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big]\,dt$. On pose d'autre part $F = \big\{f \in E \,|\, f(0) = f(1) = 0\big\}$ et $G = \big\{g \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big) \,|\, g'' = g\big\}$.

a. Montrer que B est un produit scalaire.

b. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans E.

c. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; soit $E_{a,b} = \big\{f \in E \,|\, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\big\}$. Donner un élément f_0 de $E_{a,b}$, et déterminer le projeté orthogonal de f_0 sur G.

d. Déterminer $\inf\Big\{\int_0^1 \big[f(t)^2 + f'(t)^2\big]\,dt ; f \in E_{a,b}\Big\}$.

29. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dont l'image par f est une famille orthogonale.

30. Soit f un endomorphisme autoadjoint défini positif d'un espace euclidien E.
Montrer que $\forall x \in E \quad \big(x|f(x)\big)\big(x|f^{-1}(x)\big) \geqslant \|x\|^4$. Cas d'égalité ?

31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, soit M' la matrice obtenue en remplaçant la dernière colonne de M par son opposée. Montrer que l'une au moins des deux matrices M et M' admet -1 pour valeur propre.

32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top AX = 0$.

b. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont tous nuls.

Espaces vectoriels normés

33. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour toute fonction $f \in E$, $N_2(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_1$ et $N_3(f) = |f(0)| + \|f'\|_1$.

a. Montrer que N_2 et N_3 sont des normes.

b. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

34. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On dit qu'un point a est un point d'accumulation pour une partie A si, pour tout $r > 0$, $B(a,r) \cap \big(A \setminus \{a\}\big) \neq \varnothing$.
Soit A une partie de E ayant un et un seul point d'accumulation a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \big\{x \in A | n^{-1} \leqslant \|x - a\| \leqslant n\big\}$; et on pose $A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

a. Montrer que chaque partie A_n est finie.

b. Montrer que $A \cup \{a\} = A' \cup \{a\}$, puis que A est dénombrable.

35. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $G_f = \big\{\big(x, f(x)\big); x \in \mathbb{R}\big\}$ son graphe.

a. Montrer que, si f est continue, alors G_f est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que la réciproque est fausse.

c. Montrer que, si f est bornée et G_f fermé, alors f est continue.

36. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $r \in [0,1[$ et (s_n) une suite réelle positive telle que $\sum s_n$ converge. Soit enfin (u_n) une suite de vecteurs de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant r\|u_{n+1} - u_n\| + s_n$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

37. **a.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |P(z)| \geqslant \left|\operatorname{Im} z\right|^n$.

b. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

c. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

38. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A une partie de E et f une fonction continue de $[0,1]$ dans E telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$.

Montrer que l'intersection de la frontière de A et de $f([0,1])$ n'est pas vide.

39. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$, vérifiant $\quad \|u\|_{\mathrm{op}} \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(u - \mathrm{Id}_E) \circ v_n$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

c. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires. Étudier la convergence simple de la suite (v_n), puis sa convergence pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{op}}$.

d. On suppose désormais que E est de dimension infinie. Montrer que, si $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(u-\mathrm{Id}_E) = E$, alors la suite (v_n) converge simplement, et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ est fermé.

e. Étudier la réciproque.

40. **a.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :
▷ il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\quad G = a\mathbb{Z} = \{pa \ ;\ p \in \mathbb{Z}\}$;
▷ G est dense dans $\mathbb{R}$.

b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\quad \{p\theta + 2q\pi \ ;\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\} \quad$ est dense dans $\mathbb{Z}$.

c. Donner les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(n\theta)\big)$.

d. Donner les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(\sqrt{n}\theta)\big)$.

Suites et séries numériques

41. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \ ;\quad v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \ ;\quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} \ ;\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\quad x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

b. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\quad x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

c. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_{2n} à l'aide de v_n et w_n.

d. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\quad H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

e. Exprimer ℓ à l'aide de γ.

42. Soit (b_n) une suite strictement positive, strictement croissante et non majorée.

a. Soit (a_n) une suite convergente de limite ℓ. Montrer que $\quad \dfrac{1}{b_n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) a_k \longrightarrow \ell$.

b. On ne fait plus d'hypothèses sur (a_n). Montrer que $\quad \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \longrightarrow \ell \Longrightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \ell$.

43. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un et un seul $a_n \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\quad \displaystyle\int_0^{a_n} \big[f(t) + 1\big]^{1/n}\, dt = \frac{1}{n^p}$.

b. Donner un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

44. Donner un équivalent de $\quad u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k^2 + n^2)^{1/n}$.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \longmapsto nt^{n+1} - (n+1)t^n$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\quad f_n(x) = 1 \quad$ admet une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $f\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$. Montrer que (x_n) converge et donner sa limite.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad y_n = n(x_n - 1)\,;\quad$ soit $h : t \longmapsto (t-1)e^t$. Montrer que $\big(h(y_n)\big)$ a pour limite 1.

d. Montrer que $\quad x_n \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad$ où a est la solution de $h(x) = 1$.

46. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ n'admettant aucune racine entière. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$.

47. **a.** Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers telle que $p_1 \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}$ converge, et que sa somme appartient à $]0, 1]$.

b. Soit $x \in]0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique suite croissante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 tel que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}$

c. Montrer que x est rationnel si, et seulement si, (p_n) est stationnaire.

48. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}. \quad$ Étudier la nature de $\sum u_n$.

49. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule pas, vérifiant $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} -1 + \dfrac{a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Discuter la convergence de $\sum u_n$ suivant les valeurs de a.

Analyse élémentaire

50. Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$; soit $f \in \mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ ayant pour limites $+\infty$ en a^+ et $-\infty$ en b^-, et vérifiant, pour tout $x \in]a, b[, \quad f'(x) + f(x)^2 \geqslant -1$.
Montrer que $b - a \geqslant \pi$; donner un exemple pour lequel $b - a = \pi$.

51. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $G : x \in]0, 1] \longmapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a. Montrer que G est prolongeable par continuité en 0 ; on note toujours G ce prolongement.

b. Montrer que $\quad \int_0^1 G(t)^2\,dt \leqslant 2\int_0^1 G(t)f(t)\,dt$.

c. En déduire que $\quad \int_0^1 G(t)^2\,dt \leqslant \int_0^1 f(t)^2\,dt$.

52. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad \int_0^1 t^k f(t)\,dt = 0. \quad$ Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0, 1]$.

b. On suppose que $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 t^k f(t)\,dt = 0. \quad$ Montrer que f est la fonction nulle.

Intégration

53. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{x}\,dx$.

54. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \lambda \sin^2 t}\,dt$.

b. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta\,dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.

55. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, admettant une limite réelle ℓ en $-\infty$, et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; calculer $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \big[f(t+b) - f(t+a)\big]\,dt$.

56. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$, intégrable sur $[1, +\infty[$; soit $\alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge.

57. **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \sin t}{1 + t^4}\,dt$.

b. Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3 \sin t}{1+t^4}\,dt$.

58. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

a. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

59. a. Montrer que $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt = \frac{3}{4}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

b. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

60. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,e^{-nt}\,dt$ quand n tend vers $+\infty$.

61. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$ quand n tend vers $+\infty$.

62. Déterminer la limite et un équivalent simple en 0^+ de $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

63. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

a. Montrer que I_n est bien définie à partir d'un certain rang $n_0(\alpha)$.

b. Pour $n \geqslant n_0(\alpha)$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

c. Montrer que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

d. Montrer qu'il existe une constante $K(\alpha) > 0$ telle que $\quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

64. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,e^{-xt}\,dt$.

a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,dt$.

65. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}-1}{t^2\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.
Calculer sa valeur en cas de convergence.

Suites et séries de fonctions

66. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et étudier son sens de variation.

b. Donner des équivalents simples de $f(x)$ au voisinage de 0 et $+\infty$.

67. Soient $\quad f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \quad$ et $\quad g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

a. Déterminer les domaines de définitions de f et g.

b. Donner des équivalents simples de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de 0^+.

68. a. Montrer que $\quad h\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{nh}} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \ln 2$.

b. En déduire la limite de $\quad (1-t)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} \quad$ quand t tend vers 1^-.

Séries entières

69. Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad a_n = \left(\dfrac{\sin n}{\alpha} + \alpha \sin \dfrac{1}{n}\right)^n$.

a. Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

Équations différentielles

70. Résoudre l'équation différentielle $\quad y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$.

71. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E_n l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

a. Montrer que E_n est un espace vectoriel, et donner sa dimension.

b. Donner une base de E_n.

72. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(E) : xy' + \lambda y = \dfrac{1}{1+x}$.

a. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$ à l'aide d'une expression intégrale.

b. Que peut-on dire des solutions ayant une limite finie en 0^+ ?

c. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0.

d. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(3n+1)}$.

73. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x \sin t}\, dt$.

a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad xy'' + y' - xy = 0$.

b. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

c. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t\, dt$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

74. **a.** Déterminer les solutions développables en série entière de $\quad (1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$.

b. En déduire les solutions de $\quad (1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

75. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus $\int_0^T a(t)\, dt \neq 0$. Soit (E) l'équation différentielle $\quad y' + a(t)y = b(t)$.

a. Montrer que (E) admet une et une seule solution T-périodique.

b. Étudier le comportement asymptotique des solutions de (E).

76. **a.** Soit f une fonction définie et continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $c \in \mathbb{R}_+$; soit $F : x \longmapsto c + \int_0^x f(t)\, dt$. On suppose que $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad xf(x) \leqslant F(x)$.

Étudier les variations de $\quad x \longmapsto \dfrac{F(x)}{x}$; en déduire que f est bornée.

b. Soit g une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $\quad y'' + xy = 0$. En s'intéressant à g^2, montrer que g est bornée.

77. Résoudre le système différentiel $\quad \begin{cases} x' = (t+1)x + ty + e^t \\ y' = -tx + (1-t)y - e^t \end{cases}$

78. Soit M une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le spectre de $M(t)$ soit inclus dans $\mathbb{R}_-^*$. Montrer que toutes les solutions du système $\quad X' = M(t)X \quad$ ont pour limite 0 en $+\infty$.

79. Soit M une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

i. M est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $\big(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\cdot\big)$;

ii. il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, antisymétrique, telle que $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad M(t) = e^{tA}$.

Calcul différentiel

80. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Montrer que f atteint un minimum et un maximum globaux sur $\mathbb{R}^2$; puis déterminer ces extremums.

81. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et de la norme associée. Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$; soit $f : x \longmapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Déterminer les extremums de f.

82. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

a. Soit $a \in \mathbb{R}^n$; soit $\varphi : x \longmapsto (a|x)$. Déterminer le gradient de φ.

b. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

c. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{f(x)}{\|x\|} \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $x \longmapsto \nabla f(x)$ est surjective.

Probabilités

83. Soient n et b deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches. On tire les boules successivement et sans remise. On note X la variable aléatoire qui donne le rang du premier tirage donnant une boule noire.
Déterminer la loi et l'espérance de X.

84. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$; soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$; autrement dit, $\forall\omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.
Déterminer la loi de Y.

85. Soient $n > 1$ entier et $m \in [\![1, n]\!]$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leqslant m \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Déterminer la loi de Z ; on remarquera que $\{Z = k\} = (\{X = k\}\cap\{Y \leqslant m\})\cup(\{Y = k\}\cap\{Y > m\})$.

b. Calculer les espérances de X, Y et Z.

c. Déterminer les valeurs de m qui maximisent l'espérance de Z.

86. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, S_n).

b. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = k)$, où $k \in [\![0, n]\!]$.

c. Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant $(X_1 = \varepsilon)$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

87. Soient a, b et m trois réels vérifiant $a \leqslant m \leqslant b$. On considère l'ensemble A des variables aléatoires discrètes X qui vérifient : $E(X) = m$ et $a \leqslant X \leqslant b$.
Déterminer le maximum de $E(X^2)$ quand X décrit A.

88. On jette un dé deux fois ; soit S la variable donnant la somme des deux résultats. On suppose que S suit la même loi que si le dé est équilibré ; montrer que le dé est équilibré.

Indications

1. a. Si $m = pq$ avec q impair, factoriser $(a^p)^q + 1$ par Bernoulli. **b.** Utiliser $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
2. Si $p \wedge q = 1$, c'est le théorème chinois. Sinon, l'ordre de $a \in G$ divise p, celui de $b \in H$ divise q, donc l'ordre de (a, b) divise...
3. b. Commencer par montrer que H est fini ; on notera pour cela que G_p est l'union croissante des $\mathbb{U}_{p^k}$. En considérant l'ordre des éléments, il est alors facile de montrer que les $\mathbb{U}_n$ sont les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.
5. Les relations entre coefficients et racines permettent de borner les coefficients.
6. La fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}$ s'annule n fois, et a pour limite 0 en $-\infty$ ou $+\infty$.
7. Utiliser la formule $A(a)/B'(a)$ pour le coefficient de $1/(X-a)$ dans la décomposition en éléments simples.
8. b. Considérer les noyaux des formes linéaires $P \longmapsto \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,dt$.
9. b. Poser $Q = P(1 + X)$ pour se ramener à une condition sur les coefficients.
10. Pour le sens indirect, montrer que la relation entraîne $p \circ u = u$ et $u \circ p = 0$; cela montre comment choisir p pour le sens direct.
11. c. Si $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \in V$, alors la matrice obtenue en remplaçant le bloc nul par λI_p est aussi dans V, d'où $\lambda A = B^\top B$ pour tout λ.
12. b. $\operatorname{Ker}\Phi$ contient les u^n. **c.** Commencer par déterminer les $v(e_n)$.
13. Pour les deux questions, considérer les sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ engendrés par les vecteurs de rang pair (respectivement impair) de la base canonique. Pour **b.**, noter que $\operatorname{Com} M \in \mathcal{D} \iff M^{-1} \in \mathcal{D}$.
14. Utiliser les E_{ij}.
15. Montrer que AB et BA sont semblables.
16. b. et **c.** Écrire l'équation sous la forme $t = \lambda - 1/2\lambda - 1/2(\lambda - 2)$. Pour $b(t)$, commencer par montrer $b(t) \geqslant 1$. Pour $c(t)$, montrer $c(t) \geqslant t$.
17. Étudier valeurs et vecteurs propres de $(A^{-1}B)^\top$, et se ramener à une équation de la forme $B^\top Y = \lambda A^\top Y$.
20. Étudier la dimension de l'image de $A_k A_{k-1} \cdots A_1$ par récurrence, en notant que cette image est stable par A_{k+1}.
22. Commencer par montrer que $X^3 - X - 1$ a une seule racine réelle, et qu'elle n'est pas rationnelle.
23. Avec $v = u - \lambda \mathrm{Id}_E$, montrer que $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\}$ équivaut à $\operatorname{Ker} v^q = \operatorname{Ker} v$.
24. b. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, que vaut $P(f)$?
26. $\varphi(P)$ est le carré de la distance $\|P - X^n\|$ pour un produit scalaire à préciser.
27. c. Commencer par montrer que ces valeurs propres sont strictement positives.
29. Il suffit de trouver une base orthonormée de vecteurs propres pour $f^* \circ f$, qui justement...
31. Étudier déterminant et forme réduite des deux matrices.
32. a. Pour le sens indirect, commencer par montrer $Y^\top AX = -X^\top AY$ pour tout (X, Y), en utilisant $X + Y$.
35. b. Prendre $x \longmapsto 1/x$ prolongée arbitrairement en 0. **c.** Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, et le fait qu'une suite d'un compact qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est forcément convergente.
36. Montrer que $\sum \|u_{n+1} - u_n\|$ converge, en majorant son terme général par celui d'un produit de Cauchy.
37. a. Pour le sens direct, factoriser P et minorer chaque $|z - a_i|$ par $|\operatorname{Im} z|$. **b.** Montrer que χ_M est une fonction continue de M et utiliser **a**.
39. b. Si x est dans l'intersection, déterminer la limite de $v_n(x)$ de deux manières différentes. **d.** $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ est le noyau de la projection limite ; montrer que cette projection est continue.
40. a. Poser $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ sous réserves d'existence, et discuter suivant que a est nul ou non. **c.** Noter que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$; l'ensemble cherché est $[-1, 1]$. **d.** La suite contient les $\cos(n\theta)$.
42. a. Écrire $a_n = \ell + o(1)$ et appliquer la sommation des relations de comparaison. **b.** Utiliser **a.** avec une suite (a_n) bien choisie.
43. Utiliser $F_n : x \longmapsto \int_0^x \big[f(t) + 1\big]^{1/n}\,dt$ et sa réciproque.
44. Passer au ln ; attention, pour avoir un équivalent en revenant à u_n, il faut un DA de $\ln u_n$ avec un $o(1)$ comme terme d'erreur.
48. Montrer que la série vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, en écrivant en particulier $|u_n| - |u_{n+1}|$ comme somme d'une série.
49. Dans les cas $a > 0$ et $a = 0$, étudier la série de terme général $\ln\big(|u_{n+1}|/|u_n|\big)$ pour avoir la limite de la suite $(|u_n|)$.

50. Considérer $\displaystyle\int_x^y \frac{-f'(t)}{1+f(t)^2}\,dt$.

51. b. Introduire $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et intégrer par parties. **c.** Appliquer Cauchy-Schwarz.

52. a. Raisonner par l'absurde, et considérer $\int_0^1 f(t)P(t)\,dt$, où P est un polynôme à définir qui change de signe aux mêmes points que f. **b.** Déjà vu : Weierstrass.

53. Sur $[1,+\infty[$: intégration par parties.

54. a. Poser $u = \tan t$. **b.** Commencer par encadrer l'intégrale sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ en utilisant **a**.

55. Transformer $\int_x^y \big[f(t+b) - f(t+a)\big]\,dt$ en $\int_{y+a}^{y+b} f(t)\,dt - \dots$

56. Intégrer par parties, en primitivant f.

57. a. Une intégration par parties. **b.** Deux intégrations par parties.

58. b. Dans l'expression $\int_0^A f(t)\,dt$, réaliser autant d'intégrations par parties que nécessaire pour obtenir la limite quand A tend vers $+\infty$.

59. a. Linéariser. **b.** Approcher $\displaystyle\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ par $\displaystyle\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt$.

60. Poser $u = nt$.

61. Poser $u = t^n$.

62. Comparer à $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{x+t}$ en coupant évidemment l'intégrale en deux.

63. b. Écrire $\displaystyle\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} = \frac{1+t^\alpha-t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$ et effectuer une intégration par parties dans le dernier terme.
d. Poser $J_n = n^{1/\alpha} I_n$ et étudier $\sum\big(\ln J_{n+1} - \ln J_n\big)$.

64. a. Pour la continuité sur $\mathbb{R}_+$, intégrer par parties en choisissant la bonne primitive de $\cos t - e^{-t}$, et noter que $(1+xt)e^{-xt}$ est borné indépendamment de x et t. Justifier la dérivabilité uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$.

65. Pour calculer l'intégrale, dériver par rapport à α.

66. b. En $+\infty$, grouper les termes par 2 et comparer à une intégrale ; le groupement marche aussi pour le sens de variation.

67. b. Pour g, comparer à $\sum 1/(nx)^2$. Pour f, comparaison à une intégrale.

71. b. Multiplier par exp.

72. b. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\lambda}{1+t}$ en utilisant l'intégration des relations de comparaison ; une seule solution convient.

73. b. Effectuer une intégration par parties dans l'intégrale qui donne f'.

75. a. Commencer par montrer qu'une solution est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$.

76. b. Étudier les variations de $x \longmapsto xg(x)^2 - \int_0^x g(t)^2\,dt$ et montrer que g^2 vérifie les hypothèses du **a** pour un bon choix de c.

77. Considérer $x + y$.

78. Multiplier l'équation à gauche par $X(t)^\top$, en déduire que $t \longmapsto \|X(t)\|^2$ vérifie une relation de la forme $y' \leqslant Ky \quad$ où $K < 0$.

79. Pour **i** $\Longrightarrow$ **ii**, poser $A = M'(0)$ et montrer que, pour tout t, $M'(t) = AM(t)$, puis raisonner sur les colonnes de $M(t)$.

80. Montrer que f tend vers 0 quand $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$.

81. Mettre $\varphi(x)$ sous la forme $(a|x)$, puis travailler dans une base bien choisie.

82. c. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, montrer que $x \longmapsto f(x) - (a|x)$ admet un minimum.

87. Pour majorer, écrire que $(X-a)(X-b) \leqslant 0$. Pour montrer que le majorant est atteint, noter que la variance est maximale quand les valeurs de X sont concentrées aux bornes de l'intervalle.

88. Utiliser les fonctions génératrices.