

DS DE PHYSIQUE N°7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables sont interdits.

- ✓ La durée de l'épreuve est de 3h.
- ✓ Ce devoir comporte trois problèmes indépendants :
 - Problème 1 (CCINP MP 2022) : Rayonnement, réaction de rayonnement et décalage de Lamb
 - Problème 2 (Centrale MP 2022) : Centres de données

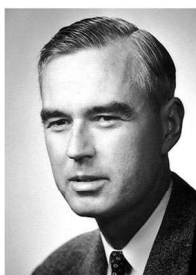
NB. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.

Rayonnement, réaction de rayonnement et décalage de Lamb

L'atome d'hydrogène est un des systèmes physiques les mieux connus en tenant compte des corrections relativistes et des corrections liées à la théorie quantique des champs. Le décryptage des propriétés d'émission ou d'absorption de l'atome d'hydrogène a constitué un examen de passage pour la théorie quantique. Dans ce sujet, nous en évoquerons une étape clé qui est le mythique décalage de Lamb.



*Photographie extraite de
Reflet de la physique,
n° 36, 2013*

Willis Eugene Lamb fut le découvreur, avec son étudiant Robert Retherford, du décalage de Lamb (ou Lamb-shift) en 1947.

Ce décalage est un exemple de l'impact des particules virtuelles en physique fondamentale. Il s'agit d'un très faible écart entre deux niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène qui trouve son origine dans l'interaction entre le seul électron de cet atome et les photons virtuels qui apparaissent et disparaissent en permanence dans le vide qui l'entoure. Ses travaux lui ont valu le prix Nobel en 1955. Le décalage de Lamb a depuis joué un rôle important, à travers la validation des fluctuations de l'énergie du vide, dans la découverte du rayonnement de S. Hawking émanant des trous noirs.

Le sujet, constitué de quatre parties, s'intéresse au rayonnement d'un électron, à la force dite réaction de rayonnement qui traduit l'interaction de la particule avec l'onde électromagnétique qu'il crée et à une de ses manifestations le " Lamb shift ". Certaines redites de l'énoncé sont délibérées pour rendre les parties indépendantes, tout en introduisant un lien logique entre elles.

La **partie I** sur le rayonnement du dipôle oscillant fait essentiellement appel à l'électromagnétisme.

La **partie II** sur la résonance de la puissance rayonnée fait essentiellement appel à la mécanique.

La **partie III** sur l'étude de la courbe de résonance fait appel au programme d'Informatique Pour Tous.

La **partie IV** sur le " Lamb-shift " fait essentiellement appel à la physique quantique.

Données

Constantes physiques

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Relation entre ces trois constantes : $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Charge élémentaire de l'électron : $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron : $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Énergie au repos de l'électron : $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$

Rayon de Bohr : $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

Constante de structure fine : $\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$

Constante de Rydberg énergétique : $R_Y = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} = 13,6 \text{ eV}$

Valeur : $\int_0^\pi (\sin(u))^3 du = 4/3$

Notation : des crochets $\langle \rangle$ indiquent les valeurs moyennes temporelles : par exemple,

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}.$$

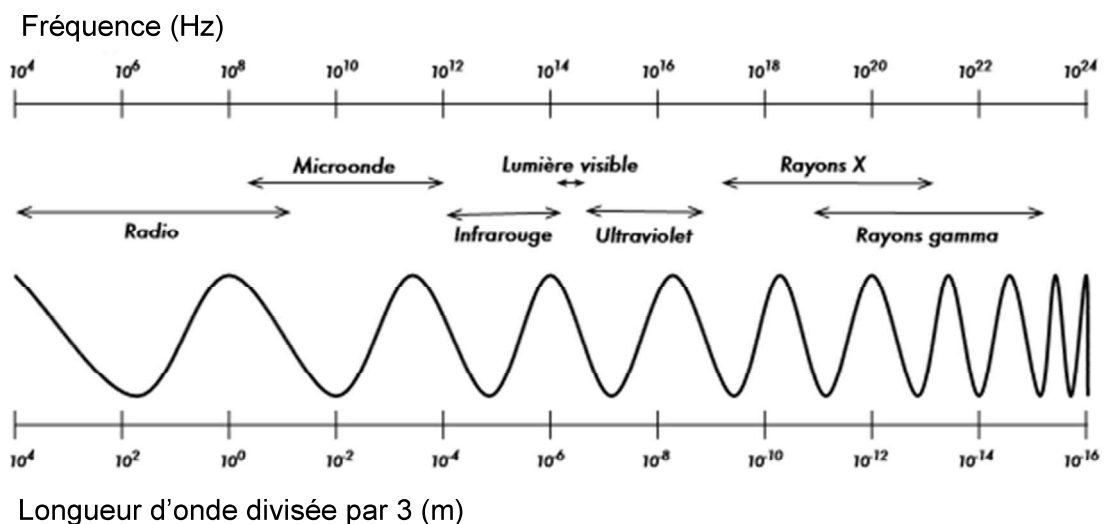
Informations

Nomenclature des premiers états d'énergie applicable à l'atome d'hydrogène dans l'ordre du remplissage selon la règle de Klechkowski : 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p.

La notation s correspond à la valeur $l = 0$, la notation p correspond à $l = 1$ et la notation d à $l = 2$.

Dans le modèle semi-classique de Bohr, le rayon de l'orbite circulaire de l'électron autour du noyau d'un niveau ns vaut $r_n = n^2 a_0$, l'énergie vaut $\varepsilon_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} = -\frac{R_Y}{n^2}$ et sa vitesse vaut $v = \alpha \frac{c}{n}$.

Spectre électromagnétique



Partie I - Rayonnement par un dipôle oscillant

On rappelle qu'un dipôle oscillant, constitué d'une charge fixe $+e$ au point O et d'un électron mobile au point P animé d'un mouvement forcé sur Oz , tel que $\overline{OP} = d \cos(\omega t) \overline{e_z}$, est caractérisé par son vecteur moment dipolaire $\overline{p(t)} = -e \overline{OP(t)}$.

Le champ électrique "lointain" créé par ce dipôle, en un point M "très éloigné" repéré en coordonnées sphériques $(r = OM, \theta, \phi)$ (**figure 1**), est donné par :

$$\overline{E} = \frac{ed\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta)}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \overline{e_\theta}. \quad (1)$$

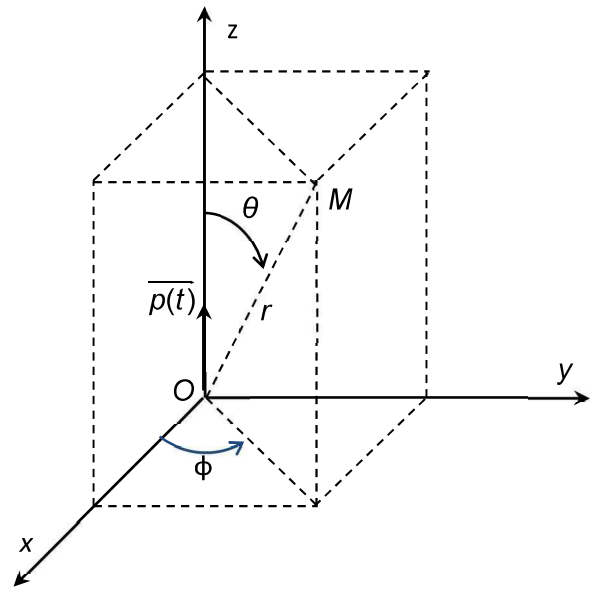


Figure 1 - Coordonnées sphériques d'un point M

- Q1.** Préciser ce que signifie " très éloigné ".
- Q2.** Justifier par des considérations de symétrie la direction du champ magnétique.
- Q3.** On donne l'expression du champ magnétique $\overline{B} = \frac{\mu_0 ed\omega^2}{4\pi c} \frac{\sin(\theta)}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \overline{e_\phi}$. Pourquoi dit-on que l'onde est localement plane ?
- Q4.** Écrire le vecteur de Poynting \overline{II} associé à l'onde.
- Q5.** Calculer le flux de celui-ci à travers une sphère de centre O et de rayon r très grand.
- Q6.** En déduire quelle est l'énergie moyenne temporelle rayonnée par l'électron.
- Q7.** a) Montrer que la puissance moyenne, appelée puissance de Larmor P_L , rayonnée par cet électron oscillant, peut s'écrire $P_L = K_e \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle$ en appelant $\vec{\gamma}$ l'accélération de la particule chargée et mobile.
b) Donner l'expression de la constante K_e en fonction de c , e et de ϵ_0 et indiquer sa dimension, puis son unité.

Partie II - Mise en évidence d'une résonance de puissance

L'interaction de l'électron, d'accélération $\vec{\gamma}$, avec le champ électromagnétique qu'il crée, peut être décrite par une force appliquée à la particule appelée réaction de rayonnement égale à $\overrightarrow{f_{ray}} = K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$.

- Q8. a)** Donner la définition de la puissance instantanée P_{ray} associée à cette force.
b) Calculer la valeur moyenne sur une période de cette puissance, pour le mouvement forcé d'un électron mobile placé au point P tel que $\overrightarrow{OP} = d \cos(\omega t) \overrightarrow{e_z}$.

Dans un premier temps, on considère que l'électron de masse m_e est soumis à un ensemble de 2 forces : la force de réaction de rayonnement $\overrightarrow{f_{ray}} = K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ et une force de rappel de type élastique $\overrightarrow{f_{rappel}} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OP}$. Le mouvement de l'électron se fait uniquement le long de Oz ($OP(t) = z(t)$).

- Q9.** Écrire l'équation différentielle du mouvement $z(t)$ de l'électron.

- Q10.** On cherche des solutions complexes sous la forme $\exp(i\Omega t)$ avec $i^2 = -1$ et Ω complexe.

Écrire l'équation liant Ω, ω_0 et $\tau = \frac{K_e}{m_e}$.

On peut alors écrire $\Omega = \pm \omega_0 + i \frac{1}{2\tau_0}$ avec $\tau_0 \omega_0 \gg 1$.

- Q11.** Dans le cadre de cette approximation, on trouve $\frac{1}{\tau_0} = \omega_0^2 \tau = \omega_0^2 \frac{K_e}{m_e}$. Que représente le temps τ_0 ?

Pour évaluer la " pulsation " ω_0 , on peut supposer que cette force " élastique " modélise l'interaction entre le proton et l'électron, par exemple dans un modèle de Thomson. Dans cette modélisation, on considère la charge du proton $+e$ uniformément répartie dans une boule sphérique de rayon égal au rayon de Bohr a_0 .

- Q12.** En utilisant le théorème de Gauss, qu'on énoncera, indiquer quel est le champ électrostatique auquel est soumis l'électron en P ($OP < a_0$).

- Q13. a)** En déduire ce que vaut la pulsation ω_0 définie par $\overrightarrow{f_{rappel}} = -m_e \omega_0^2 \overrightarrow{OP}$. On l'exprimera en fonction de e, m_e et de a_0 .
b) Évaluer numériquement la longueur d'onde associée. Commenter.

Dans un second temps, on considère que l'électron de masse m_e est soumis à un ensemble de 3 forces : la force de réaction de rayonnement $\overrightarrow{f_{ray}} = K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$, la force de rappel de type élastique

$\overline{f_{\text{rappel}}} = -m_e \omega_0^2 \overline{OP}$ et une force électrostatique supplémentaire créée par un champ extérieur oscillant uniforme $\overline{E_{\text{ext}}} = E_0 \cos(\omega t) \overline{e_z}$.

Le mouvement de l'électron se fait toujours uniquement sur Oz ($OP = z(t)$).

Q14. a) Écrire l'équation du mouvement.

b) En utilisant les notations complexes, déterminer la solution $\underline{z(t)}$ "forcée" de pulsation ω imposée par le champ extérieur. Écrire l'accélération $\underline{\gamma(t)}$ de l'électron en fonction de $\omega, \omega_0, e, m_e, \tau$ et de E_0 .

On rappelle que la partie réelle d'une grandeur complexe est la grandeur physique associée :

$$\gamma(t) = \text{Re}(\underline{\gamma(t)}) \text{ et } z(t) = \text{Re}(\underline{z(t)}).$$

Q15. a) En admettant que la formule de la puissance de Larmor $P_L = K_e \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle$ peut être utilisée, établir la puissance rayonnée P par l'électron.

b) Que vaut la puissance notée P_0 pour $\omega = \omega_0$? Comment s'exprime la puissance $P(\omega)$ pour $\omega \ll \omega_0$ et pour $\omega \gg \omega_0$? Que vaut-elle pour $\omega = 0$ et pour ω tendant vers l'infini ?

On observe donc un phénomène de résonance de la puissance P en fonction de la fréquence. L'expression de la puissance P peut se mettre sous la forme $P = P_0 g(\omega)$.

Q16. On peut montrer que cette fonction $g(\omega)$ peut s'écrire au voisinage de $\omega = \omega_0$ sous la forme

$$\text{approchée } g(\omega) \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\tau \omega_0^3} \right)^2}.$$

a) En admettant que les pulsations de coupure haute et basse sont suffisamment proches de ω_0 pour que la forme approchée de $g(\omega)$ convienne et que $\omega_0 \tau \ll 1$, en déduire la pulsation de résonance, la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ et le facteur de qualité Q .

b) L'application numérique de la formule obtenue en **Q7b** donne $K_e = 5,75 \cdot 10^{-54} \text{ (SI)}$: que valent la largeur de bande passante $\Delta\omega$ et le facteur de qualité Q dans le domaine optique ?

II Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir ?

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et « gratuit », une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

II.A – De la difficulté d'une communication directe

Chaque satellite est assimilé à un point matériel M de masse $m_S = 4\text{ t}$, en orbite circulaire à l'altitude $h = 650\text{ km}$ autour de la Terre de centre O , de rayon R_T et de masse M_T . On suppose que la Terre est un astre présentant une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O . Les frottements sont négligés ; seule la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est à prendre en compte.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , de repère associé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, supposé galiléen. L'axe (Oz) est défini de sorte que la trajectoire du satellite considéré soit contenue dans le plan $z = 0$. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à ce plan (figure 5).

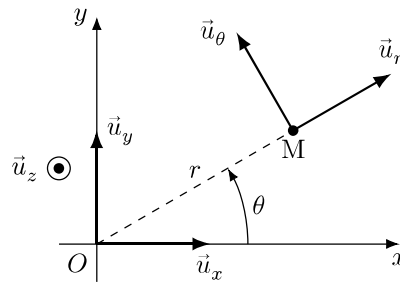


Figure 5

Q 12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

Q 13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite v_0 sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle G et des paramètres M_T , R_T et h .

Q 14. Évaluer numériquement la vitesse v_0 , ainsi que la période de révolution T_0 correspondante.

Pour appréhender la difficulté à communiquer avec les satellites de basse altitude directement depuis la surface de la Terre, on peut se référer à un article publié sur le site Internet du journal Le Monde le 13 janvier 2017, intitulé « Comment communique-t-on en direct avec l'ISS ? ». Dans cet article, publié lors du premier séjour de l'astronaute Thomas Pesquet à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS), on peut lire l'extrait suivant.

« La Station Spatiale Internationale (ISS) étant sur une orbite basse, elle survole la surface terrestre d'assez près (environ 400 kilomètres). À cette altitude, la vitesse orbitale est très rapide (environ 27 500 km/h, soit 7,6 km par seconde), rendant toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute. La communication avec l'ISS passe donc par des satellites relais positionnés très haut, sur une orbite dite « géostationnaire », à 36 000 kilomètres d'altitude, qui permet aux satellites qui y sont de rester au-dessus d'un point de la surface terrestre de façon fixe. [...] Ces satellites servent de relais de communication aussi bien pour des équipages humains que pour de nombreux satellites placés sur une orbite basse qui ont également besoin de communiquer avec les équipes au sol. »

Q 15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».

II.B – Communication avec les satellites relais

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ε_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

II.B.1) Propagation dans le vide

L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe (Ox) et harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k\vec{u}_x$. En notation complexe, son champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

où $i^2 = -1$ et E_0 est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M, t)$ associé au champ électrique $\underline{\vec{E}}(M, t)$.

II.B.2) Propagation dans le plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge $-e$, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge $+e$, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \vec{u}_y$$

où on pose $\underline{k} = k' + i k''$. On considère que n_c , n_e , E_0 , ω , k' et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant c .

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\underline{\vec{v}}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\underline{\vec{E}}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\underline{\vec{v}}_c\|$ par rapport à $\|\underline{\vec{v}}_e\|$?

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\underline{\vec{j}}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}.$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M, t)$ dans le plasma.

Q 24. En déduire l'expression de \underline{k}^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c , e , ε_0 , m_e et n_e .

On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_p$.

Q 25. Expliciter l'expression de \underline{k} et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_p et c .

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_p$.

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de \underline{k} . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_g et v_φ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure 6 présente son évolution.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

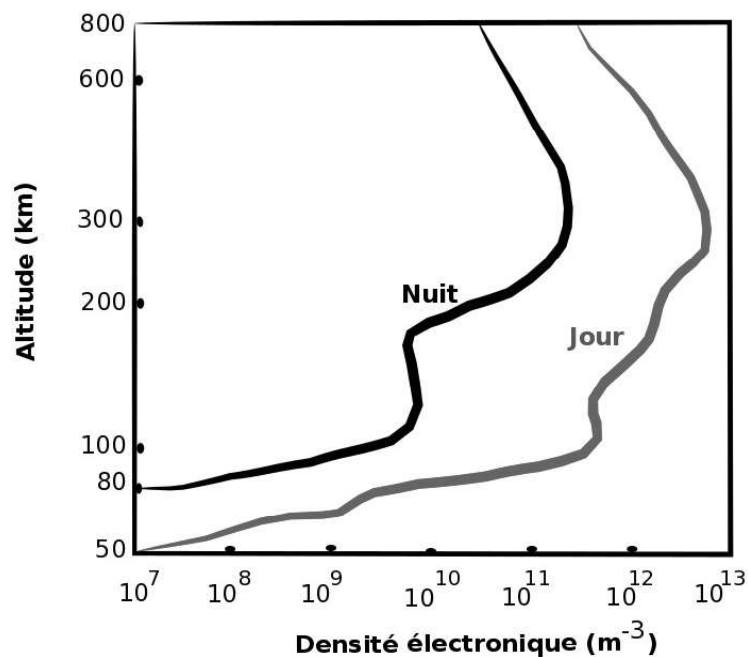


Figure 6 Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

Données

Conductivité thermique du silicium

$$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Conductivité thermique de l'aluminium

$$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Conductivité thermique de l'acier

$$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)

$$h_s = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)

$$h_r = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Prix du kW·h

$$0,17 \text{ €}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Constante de la gravitation universelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Rayon moyen de la Terre

$$R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$$

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Masse de l'électron

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Masse du proton

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Masse molaire atomique du lithium

$$M_{\text{Li}} = 6,94 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Masse molaire atomique du carbone

$$M_{\text{C}} = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Masse molaire atomique de l'azote

$$M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Masse molaire atomique de l'oxygène

$$M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$