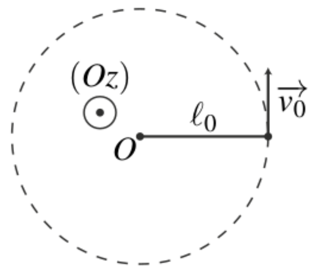
TD 15 : Moment cinétique

1 Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0{,}10\,\mathrm{kg}$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon l_0. Sa vitesse est $v_0 = 1{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



1. Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).

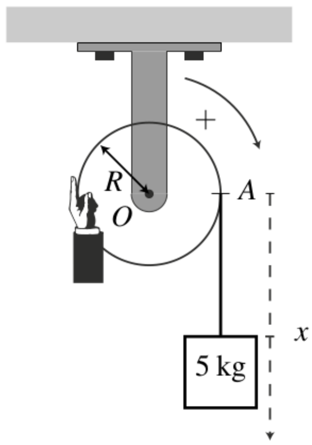
2. On réduit brutalement la longueur du fil à $l_1 = 0{,}50\,\mathrm{m}$. Que devient la vitesse de la sphère ?

3. Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de longueur du fil.

4. Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

2 Étude d'une poulie

Une masse de $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$ en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. On prendra $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2} m_p R^2$.



1. Aspect cinématique : On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Quelle est la vitesse de la masse m ?

2. Aspect statique : Cette même poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?

3. Aspect dynamique : Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

3 Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre pas l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.

2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \ .$$

3. Montrer que cette relation peut-être réécrite :

$$\sqrt{\frac{3g}{L}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} \ .$$

4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On donne pour $\theta_0 = 5°$:

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1 \ .$$

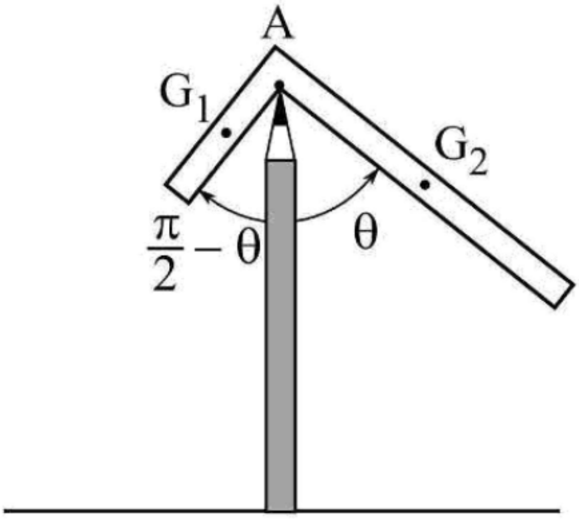
4 Pendule de torsion

On considère un fil d'acier suspendu verticalement à un support, et à l'extrémité duquel est attaché un solide S. Ce solide possède autour de l'axe (Δ) du fil un moment d'inertie $J_\Delta = 0{,}10\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, tandis que le couple du fil a pour valeur $C = 0{,}2\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$.

On fait pivoter le solide autour de l'axe (Δ), pour l'écarter de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 30°$. Déterminer la loi horaire suivie par l'angle $\theta(t)$.

5 Équerre en équilibre

Un élève inattentif cherche à placer son équerre, constituée de deux tiges (de longueurs respectives l et $2l$, de masses respectives m et $2m$) soudées l'une à l'autre en formant un angle droit, en équilibre sur son crayon. Le contact entre l'équerre et le rayon au niveau du point A est supposé parfait.



Déterminer la position d'équilibre de l'équerre et étudier sa stabilité. On donne le moment d'inertie d'une tige de longueur l et de masse m par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par une de ses extrémités : $J = \frac{1}{3}ml^2$.

6 Énergie cinétique d'un ballon

On considère un ballon de football, de masse $m_0 = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ et de rayon $r = 11\,\mathrm{cm}$, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à une vitesse de valeur $v = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer quel pourcentage d'énergie cinétique gagne ce ballon s'il est en outre animé d'un mouvement de rotation sur lui-même à la vitesse angulaire $\omega = 20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. On rappelle le moment d'inertie d'une sphère creuse de masse m et de rayon R, par rapport à tout axe de rotation (Δ) passant par son centre $J_\Delta = \frac{2}{3}mR^2$.

7 Tabouret d'inertie

On considère une personne, assise sur un tabouret libre de tourner autour d'un axe vertical (Δ), fixe par rapport au référentiel terrestre que l'on supposera galiléen. Cette personne tient dans chacune de ses mains une paire d'haltères de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{kg}$, et tient ses bras près de son corps, à une distance $r_i = 0{,}80\,\mathrm{m}$ de l'axe de rotation.

On anime l'ensemble d'une vitesse angulaire $\omega_i = 5{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, puis la personne tend les bras en les gardant dans un plan vertical tout au long du mouvement, amenant les haltères à une distance $r_f = 0{,}30\,\mathrm{m}$ de l'axe de rotation.

Montrer que la vitesse angulaire varie, ainsi que l'énergie cinétique de l'ensemble. Préciser le signe de cette variation, et proposer une interprétation. On considèrera que la personne et le tabouret constituent ensemble, sans les haltères, un système de moment d'inertie $J_\Delta = 4{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.