

Physique

Exercices

incontournables

MP • PT

Jean-Noël Beury
*Professeur de chaire supérieure
en classes préparatoires au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux).
Membre de jurys de concours*

DUNOD

www.iconcours.net

Avec la collaboration scientifique de Sébastien Fayolle.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058361-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constitue donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 3352 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1	
Mécanique du solide	
1. Étude cinématique et dynamique d'un solide	3
2. Lois de Coulomb du frottement de glissement	23
Partie 2	
Électrocinétique	
3. Électrocinétique	49
Partie 3	
Électromagnétisme	
4. Calculs de champ électromagnétique	75
5. Induction électromagnétique	108
6. Conducteur	145
Partie 4	
Propagation	
7. Propagation	169
Partie 5	
Optique ondulatoire	
8. Interférences	215
9. Diffraction	247
Partie 6	
Thermodynamique	
10. Diffusion thermique	275
11. Rayonnement d'équilibre thermique	302
12. Thermodynamique industrielle	307
Index	346

Avant-propos

Cet ouvrage d'exercices et de méthodes s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques MP et PT. Il est divisé en douze chapitres, consacrés chacun à une partie du programme de deuxième année.

Ces 83 exercices incontournables vous serviront aussi bien pour la préparation de l'écrit que de l'oral des Concours d'entrée aux Ecoles d'Ingénieurs.

Dans chacune des 6 parties de l'ouvrage, vous trouverez un sommaire avec la liste des exercices classés par thèmes. Dans le titre de chaque exercice, vous pouvez savoir si l'exercice concerne la filière MP, la filière PT ou les deux. Un astérisque signale un exercice plus délicat.

Avant d'aborder la résolution de l'exercice, une analyse du problème est proposée systématiquement. Un rappel de cours succinct permet d'insister sur les notions utilisées ultérieurement. Une **méthode systématique de résolution des exercices** vous est proposée.

La solution de l'exercice est alors entièrement décortiquée :

- utilisation de la méthode de résolution ;
- rubrique « Attention » qui identifie les erreurs à éviter ;
- résolution proprement dite.

Bon courage !

Pour bien utiliser cet ouvrage :



Cet encadré met en avant un piège à éviter



Le stylo-plume vous signale l'étape de la rédaction finale.

Partie 1

Mécanique du solide

Plan

1. Étude cinématique et dynamique d'un solide	3
1.1 : Pendule pesant (MP-PT)	3
1.2 : Machine d'Atwood (MP)	5
1.3 : Yoyo (MP)	9
1.4 : Poulie mobile (MP)	11
1.5 : Barre sur un mur (MP)	15
1.6 : Chaîne sur une table (MP)	20
2. Lois de Coulomb du frottement de glissement	23
2.1 : Déplacement d'un solide sur un plan horizontal (MP)	23
2.2 : Sphère sur un plan incliné (MP)	29
2.3 : Sphère dans une cuvette (MP)	35
2.4 : Voiture (MP)	41

Étude cinématique et dynamique d'un solide

Exercice 1.1 : Pendule pesant (MP-PT)

On considère un pendule pesant homogène dans un plan vertical en rotation autour d'un axe fixe Oz , de moment d'inertie J par rapport à cet axe et de masse m . La distance entre O et le barycentre G du pendule est notée a . La liaison pivot est supposée parfaite. A $t = 0$, le pendule pesant est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 \ll 1$ par rapport à la position d'équilibre.

Déterminer par deux méthodes l'expression de θ en fonction du temps.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. On va obtenir l'équation différentielle du mouvement par deux méthodes :

- Première méthode : utilisation du théorème du moment cinétique.
- Deuxième méthode : raisonnement énergétique. Le système étant conservatif, il est souvent intéressant en mécanique d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En calculant la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps, on en déduit l'équation différentielle du mouvement.

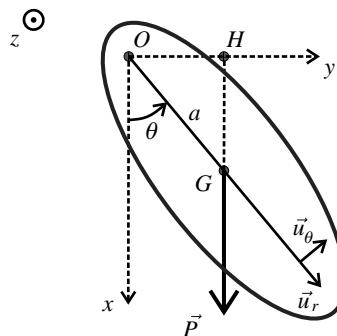
Cours : Liaison pivot parfaite

Quand on a uniquement une rotation autour d'un axe fixe Δ , on dit que l'on a une liaison pivot. Si cette liaison pivot est parfaite, alors le moment de la liaison est nul par rapport à l'axe Δ et la puissance de la liaison est nulle puisque $P = \Gamma_\Delta \omega = 0$

Méthode pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide

On utilisera la méthode systématique pour démarrer les exercices de mécanique du solide :

- a) Définir le référentiel et les axes de projection.
- b) Effectuer le bilan des actions.
- c) Déterminer les différents éléments cinétiques.
- d) Théorèmes généraux de la mécanique : théorème de la quantité de mouvement, théorème du moment cinétique, raisonnement énergétique.



L'axe Δ est l'axe $z'z$ orienté suivant $+\vec{u}_z$. La vitesse angulaire est $\dot{\theta}$ que l'on note également ω .

a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen

b) Bilan des actions :

- Le moment de l'action de la liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- Les forces de pesanteur sont équivalentes pour un solide à une force unique appliquée en G et égale à $\vec{P} = m\vec{g}$. Il reste à déterminer le moment du poids par rapport à l'axe Δ .



Le moment du poids peut se calculer avec la relation : force \times longueur du bras de levier $= mg \times OH = mga \sin \theta$. Il reste à mettre le bon signe devant cette dernière relation. Si $\sin \theta > 0$, le poids a tendance à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. En appliquant la règle de la main droite, le pouce est dirigé suivant $(-\vec{u}_z)$. Il faut donc mettre un signe $-$, soit Γ_Δ (poids) $= -mga \sin \theta$



c) Éléments cinétiques :

Le pendule pesant est de moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ . Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est :

$$\sigma_\Delta = J\omega$$

L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$$

d) Première méthode : théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Δ

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_\Delta = -mga \sin \theta$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \sin \theta = 0$$

Si $\theta \ll 1$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$

La résolution de l'oscillateur harmonique est : $\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On en déduit que : $\dot{\theta} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$
À $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. On en déduit immédiatement que : $A = \omega_0$ et $B = 0$.

D'où

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Le moment de l'action de liaison est nul. L'action de contact est donc conservative.

Le poids dérive d'une énergie potentielle : $E_p = -mgx_G$.



Attention au signe – car l'axe Ox est dirigé vers le bas.



Comme toutes les forces sont conservatives, **le système est conservatif**. L'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

On a donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = cte$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps.

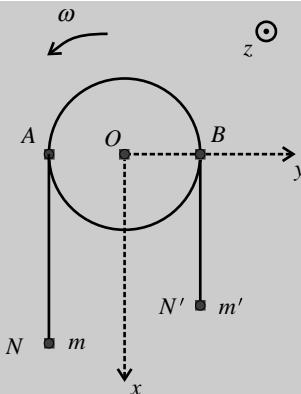
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = J \ddot{\theta} \dot{\theta} + mga \dot{\theta} \sin \theta$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$ qui est une solution parasite, on retrouve bien l'équation différentielle précédente :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \sin \theta = 0$$

Exercice 1.2 : Machine d'Atwood (MP)

On considère une machine d'Atwood constituée d'une poulie immobile, d'un fil ne glissant pas sur la poulie et deux masses m et m' . La poulie est en rotation autour de l'axe $\Delta = Oz$, de masse M , de moment d'inertie $J_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R . La liaison pivot est supposée parfaite.



Déterminer l'expression de ω en fonction du temps sachant qu'à $t = 0$, $\omega = 0$.

Analyse du problème

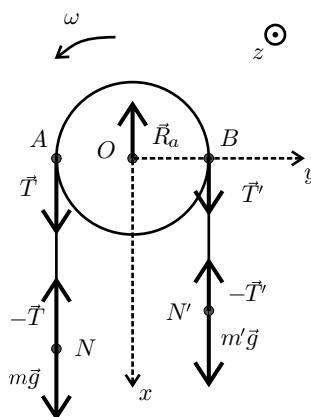
On utilisera la méthode systématique pour démarrer les exercices de mécanique du solide :

- Définir le référentiel et les axes de projection.
- Effectuer le bilan des actions.
- Déterminer les différents éléments cinétiques. On utilisera la formule de Varignon pour deux points appartenant à un même solide.
- Théorèmes généraux de la mécanique : théorème de la quantité de mouvement, théorème du moment cinétique, raisonnement énergétique.



a) Référentiel $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :



On pose $\vec{T} = T\vec{u}_x$ et $\vec{T}' = T'\vec{u}_x$.

Remarque

On considère toujours, sauf indication contraire, un fil idéal, c'est-à-dire de masse nulle et parfaitement souple. Si le fil est tendu, sa tension est uniforme le long du fil. Le fil exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$.

**c) Éléments cinétiques :**

On a un solide en rotation autour de l'axe Oz repéré par l'angle θ . La vitesse angulaire est $\omega = \dot{\theta}$. Le vecteur rotation est :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$



Bien vérifier avec la main droite que si θ augmente, $\omega > 0$ et le pouce est bien dirigé suivant $(+\vec{u}_z)$.

Remarque

Les vitesses de deux points A et B appartenant à un même solide sont reliées par la formule de Varignon ou relation du champ des vitesses :

$$\vec{v}(A)_{\mathfrak{N}} = \vec{v}(B)_{\mathfrak{N}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$$

en notant $\vec{\omega}$ le vecteur rotation du solide par rapport au référentiel \mathfrak{N} .



Il n'y a pas de glissement au point A . La vitesse du fil au point de contact est la même que la vitesse de la poulie au point de contact. Pour la poulie, on peut appliquer la formule de Varignon :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix} = R\omega \vec{u}_x$$

De même, pour le point B , on a :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{vmatrix} = -R\omega \vec{u}_x$$

Tous les points du fil ont la même vitesse. On a donc $\vec{v}_A = \vec{v}_N = R\omega \vec{u}_x$ et $\vec{v}_B = \vec{v}_{N'} = -R\omega \vec{u}_x$

d) On a quatre inconnues : T, T', R et ω .

Il faut donc quatre équations : PFD (principe fondamental de la dynamique) au point N , PFD au point N' , théorème de la quantité de mouvement à la poulie et théorème du moment cinétique à la poulie.

PFD au point N en projection sur Ox :

$$mR \frac{d\omega}{dt} = mg - T \quad (\text{eq.1})$$

PFD au point N' en projection sur Ox :

$$-m'R \frac{d\omega}{dt} = m'g - T' \quad (eq.2)$$

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie en projection sur Ox . La poulie est en équilibre. On a donc :

$$T + T' + Mg - R_a = 0 \quad (eq.3)$$

Théorème du moment cinétique en O appliqué à la poulie :

Bilan des moments des actions extérieures :

- poids $M\vec{g}$ de moment nul puisque la force est appliquée au point O .
- Le moment de l'action de la liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- $\vec{\Gamma}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = -R\vec{u}_y \wedge T\vec{u}_x = RT\vec{u}_z$
- $\vec{\Gamma}_O(\vec{T}') = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{T}' = R\vec{u}_y \wedge T'\vec{u}_x = -RT'\vec{u}_z$

La projection du théorème du moment cinétique sur l'axe Oz s'écrit :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \frac{MR^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = RT - RT'$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = T - T' \quad (eq.4)$$

Pour finir la résolution, on effectue la combinaison linéaire (4) + (1) - (2) :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = mg - mR \frac{d\omega}{dt} - m'g - m'R \frac{d\omega}{dt}$$

En simplifiant par R , on a :

$$\frac{d\omega}{dt} \left(\frac{MR}{2} + mR + m'R \right) = mg - m'g$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{mg - m'g}{\frac{MR}{2} + mR + m'R} dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\omega = \frac{(m - m')g}{R \left(\frac{M}{2} + m + m' \right)} t$$

Interprétation physique :

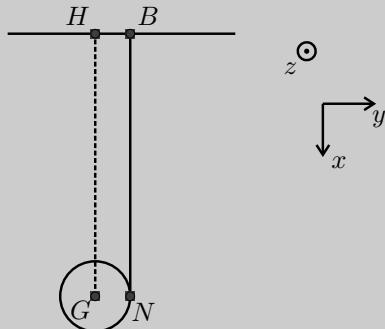
Si $m > m'$, alors $\frac{d\omega}{dt} > 0$. C'est tout à fait cohérent.

L'équation (4) permet de déterminer la réaction du support pour maintenir la poulie à l'équilibre.

Exercice 1.3 : Yoyo (MP)

On considère un yoyo constitué d'une poulie qui se déroule sur un fil. La poulie est de masse M , de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R .

Déterminer l'expression de v la vitesse du point G sachant qu'à $t = 0$, $v = 0$.

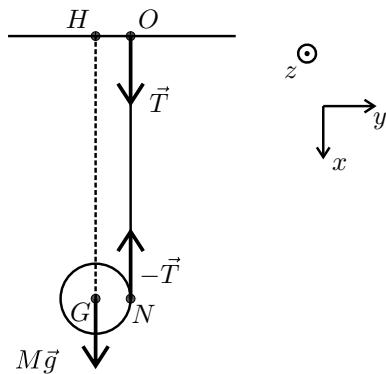
**Analyse du problème**

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire ω puis en fonction de v .



a) **Référentiel** : $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) **Bilan des actions** :



Le fil est supposé idéal. Il exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$. On pose $\vec{T} = T\vec{u}_x$.

c) **Éléments cinétiques** :

Le vecteur rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

La poulie se déroule sur un fil inextensible, donc la vitesse au point O est la même qu'au point N . Comme le point O est immobile, on a donc :

$$\vec{v}_N = \vec{0}$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_N + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{NG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix} = R\omega \vec{u}_x$$

On a donc :

$$v = R\omega$$

Le moment cinétique en G de la poulie est :

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gz}\omega \vec{u}_z = \frac{MR^2}{2}\omega \vec{u}_z = \frac{MR}{2}v \vec{u}_z$$

d) On a deux inconnues : v et T .

Il faut donc deux équations : théorème de la quantité de mouvement à la poulie et théorème du moment cinétique en G appliqué à la poulie.

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie :

Bilan des actions extérieures sur la poulie :

- $M\vec{g}$: poids de la poulie appliquée en G .
- $-\vec{T}$: tension du fil appliquée au point N .

La projection sur Oz du théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - T \quad (eq.1)$$

Théorème du moment cinétique en G appliqué à la poulie :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G(\vec{P}) + \vec{\Gamma}_G(-\vec{T})$$

On a donc : $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GN} \wedge (-\vec{T}) = R\vec{u}_y \wedge (-T\vec{u}_x) = RT\vec{u}_z$

En divisant par M , on a :

$$\frac{MR}{2} \frac{dv}{dt} = RT \quad (eq.2)$$

On en déduit que :

$$T = \frac{M}{2} \frac{dv}{dt}$$

On réinjecte dans l'équation 1 :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - \frac{M}{2} \frac{dv}{dt}$$

Soit :

$$\frac{3}{2}M \frac{dv}{dt} = Mg$$

On sépare les variables :

$$dv = \frac{2}{3}g dt$$

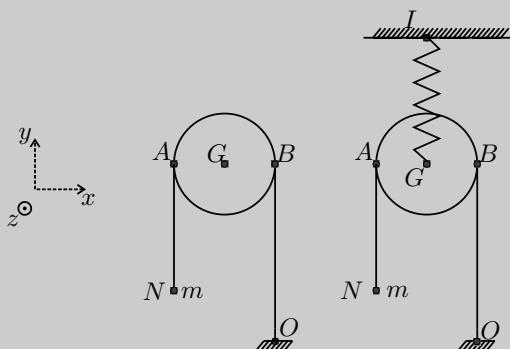
On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$v = \frac{2}{3}gt$$

Exercice 1.4 : Poulie mobile (MP)

On considère une poulie qui se déroule sur un fil. Une extrémité du fil est fixée au sol. Une masse m est fixée à l'autre extrémité. La poulie est de masse M , de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{MR^2}{2}$ et de rayon R . Le point G peut se déplacer suivant la verticale Gy et soumis à une force $\vec{F} = F\vec{u}_y$.

1. Exprimer $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R, M, m, F et g .
2. Le point G est relié à un ressort fixé en I . On appelle $y(t)$ le déplacement du point G par rapport à sa position d'équilibre. Déterminer $y(t)$ sachant qu'à $t = 0$, $y = y_0$ et $\dot{y} = 0$.



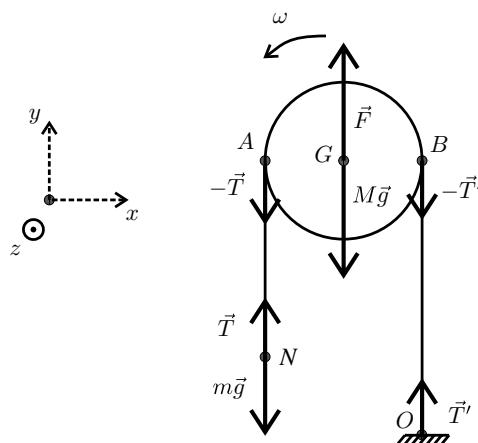
Analyse du problème

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire ω .



a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :



Le fil est supposé idéal. Il exerce sur une extrémité une force \vec{T} et sur l'autre extrémité une force $-\vec{T}$. On pose $\vec{T} = T\vec{u}_y$ et $\vec{T}' = T'\vec{u}_y$

c) Éléments cinétiques :

Le vecteur rotation est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

La poulie se déroule sur un fil inextensible, donc la vitesse au point B est la même qu'au point O . Comme le point O est immobile, on a donc :

$$\vec{v}_B = \vec{0}$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & -R \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -R\omega\vec{u}_y$$

On applique la formule de Varignon à la poulie :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & -2R \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -2R\omega\vec{u}_y$$

Comme le fil est inextensible, on a

$$\vec{v}_A = \vec{v}_N = -2R\omega\vec{u}_y$$

Le moment cinétique en G de la poulie est :

$$\vec{\sigma}_G = J_{Gz}\omega \vec{u}_z = \frac{MR^2}{2}\omega \vec{u}_z$$

d) On a trois inconnues : T, T' et ω . Il faut donc trois équations :

PFD au point N :

$$m \frac{dv_N}{dt} = -2mR \frac{d\omega}{dt} = T - mg \quad (eq.1)$$

Théorème de la quantité de mouvement à la poulie :

$$M \frac{dv_G}{dt} = -MR \frac{d\omega}{dt} = -T - T' - Mg + F \quad (eq.2)$$

Théorème du moment cinétique en G à la poulie :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{GA} \wedge (-T \vec{u}_y) + \overrightarrow{GB} \wedge (-T' \vec{u}_y) + \vec{0}$$

Le moment en G du poids $M\vec{g}$ est nul ainsi que le moment de la force F puisque ces forces s'exercent au point G .

On en déduit :

$$\frac{MR^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = -R \vec{u}_x \wedge (-T \vec{u}_y) + R \vec{u}_x \wedge (-T' \vec{u}_y) = R(T - T') \vec{u}_z$$

Soit :

$$\frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} = T - T' \quad (eq.3)$$

Des équations (1) et (3), on a : $T = mg - 2mR \frac{d\omega}{dt}$

et $T' = T - \frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt}$.

En remplaçant dans l'équation (2), on a :

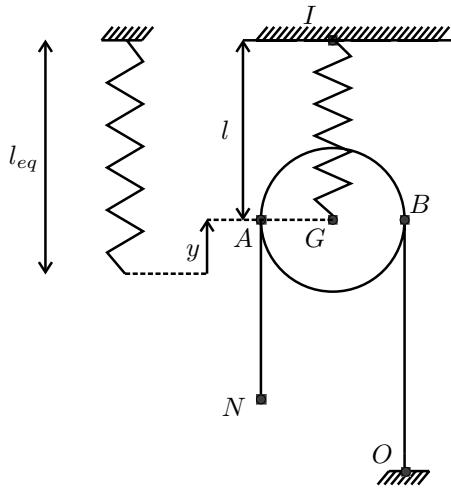
$$-MR \frac{d\omega}{dt} = -2mg + 4mR \frac{d\omega}{dt} + \frac{MR}{2} \frac{d\omega}{dt} - Mg + F$$

D'où

$$\frac{d\omega}{dt} \left(\frac{3MR}{2} + 4mR \right) = 2mg + Mg - F$$

Interprétation : Si $F > 2mg + Mg$, le point G monte et on a bien $\frac{d\omega}{dt} < 0$. On vérifie l'homogénéité de l'expression obtenue.

2. Le point G est relié à un ressort fixé en I . On représente le ressort à l'équilibre et à un instant t quelconque.



Cours : Méthode systématique pour bien déterminer la force exercée par un ressort :

- Faire un schéma à l'équilibre et à un instant t pour déterminer la longueur du ressort puis l'allongement. Attention : Il faut prendre l'initiative d'appeler l_0 la longueur à vide et l_{eq} la longueur à l'équilibre.
- La projection de la force sur un axe va s'écrire : $+$ ou $- k(l - l_0)$. Pour déterminer correctement le signe, on imagine que le ressort est étiré. On regarde alors dans quel sens est la force exercée par ce ressort et on en déduit le signe de la projection sur l'axe choisi.
- Écrire le théorème de la quantité de mouvement et le réécrire à l'équilibre. Il suffit de faire la différence des deux équations pour supprimer les termes inconnus.



La longueur du ressort à un instant t est : $l = l_{eq} - y$. La force exercée par le ressort est : $F = k(l - l_0) = k(l_{eq} - y - l_0)$.

On a vu que $v_G = \dot{y} = -R\omega$. On remplace F par son expression dans la relation trouvée à la fin de la question 1. On obtient :

$$\frac{-\ddot{y}}{R} \left(\frac{3MR}{2} + 4mR \right) = 2mg + Mg - k(l_{eq} - y - l_0)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\ddot{y} \left(\frac{3M}{2} + 4m \right) + ky = -2mg - Mg + k(l_{eq} - l_0) \quad (eq.1)$$

À l'équilibre, on a $y = 0$ et $\ddot{y} = 0$. L'équation (1) s'écrit :

$$0 = -2mg - Mg + k(l_{eq} - l_0) \quad (eq.2)$$

En faisant la différence (1) – (2), on a :

$$\ddot{y} \left(\frac{3M}{2} + 4m \right) + ky = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. On définit la pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{3M}{2} + 4m}}$$

La résolution donne :

$$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

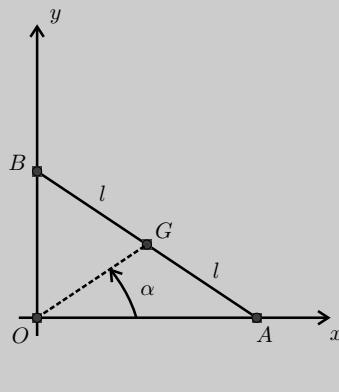
Comme à $t = 0$, $y = y_0$ et $\dot{y} = 0$. On a donc $A = y_0$ et $B = 0$. On obtient finalement :

$$y = y_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 1.5 : Barre sur un mur (MP)

On considère une barre homogène de longueur $2l$ dans un plan vertical. Une extrémité A peut se déplacer sans frottement sur l'axe Ox . L'autre extrémité B peut se déplacer sans frottement sur l'axe Oy . La barre est de masse m , de centre d'inertie G et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{1}{3}ml^2$. À $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$ et $\dot{\alpha} = 0$.

1. Établir une relation entre $\ddot{\alpha}$ et α . En déduire une relation entre $\dot{\alpha}$ et α .
2. Pour quel angle α la barre quitte le mur en B ?



Analyse du problème

On utilise la méthode systématique pour bien démarrer les exercices de mécanique du solide : référentiel et axes de projection, bilan des actions, éléments cinétiques et théorèmes généraux de la mécanique. On exprimera les éléments cinétiques en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

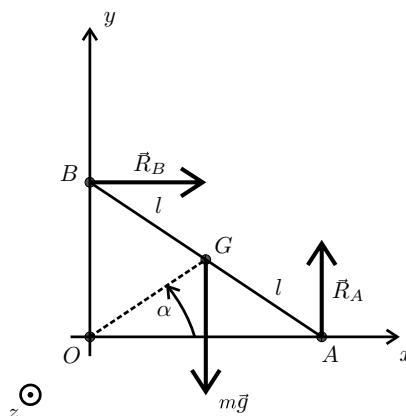
La première difficulté est de déterminer le vecteur rotation.

On utilisera deux méthodes pour trouver $\dot{\alpha}$ en fonction de α : méthode 1 avec les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique, méthode 2 utilisant un raisonnement énergétique souvent très rapide. Il convient tout particulièrement ici puisqu'on a un système conservatif à une dimension.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :



Comme il n'y a pas de frottement en A et en B, la réaction du support est orthogonale au petit déplacement. La réaction en A peut se mettre sous la forme : $\vec{R}_A = R_A \vec{u}_y$ et la réaction en B sous la forme : $\vec{R}_B = R_B \vec{u}_x$

c) Éléments cinétiques :

On cherche à exprimer les différents éléments cinétiques en fonction de α qui est le paramètre le plus pertinent de l'exercice.



La difficulté est de déterminer le vecteur rotation en fonction de $\dot{\alpha}$. Quand la détermination n'est pas immédiate, on calcule directement deux vitesses du solide (ici les points A et B) et on déduit le vecteur rotation en utilisant la formule de Varignon.



Les coordonnées des points A et B sont :

$$A \begin{vmatrix} 2l \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; B \begin{vmatrix} 0 \\ 2l \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

G est le milieu du segment $[AB]$, on en déduit :

$$G \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) = l \cos \alpha \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) = l \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$\vec{v}_A \begin{vmatrix} -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \vec{v}_B \begin{vmatrix} 0 \\ 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}. \text{ On en déduit : } \vec{v}_G \begin{vmatrix} -l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'accélération du point G est :

$$\vec{a}_G \begin{vmatrix} l(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ l(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le vecteur rotation peut se mettre sous la forme : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On applique la formule de Varignon à la barre :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -2l \cos \alpha \\ 2l \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{vmatrix} 0 = -2l\dot{\alpha} \sin \alpha - 2\omega l \sin \alpha \\ 0 = 2l\dot{\alpha} \cos \alpha - 2\omega l \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit que :

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha} \vec{u}_z$$

Remarque

Il ne faut pas être surpris d'avoir un signe $-$. En effet, si α augmente, la barre tourne dans le sens horaire et le pouce de la main droite est dirigé suivant $-\vec{u}_z$.



d) On a trois inconnues : α, R_A et R_B . Il faut donc trois équations.

Cours : On va utiliser deux méthodes pour répondre à la question :

Méthode 1 : écrire les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

Méthode 2 : écrire la conservation de l'énergie mécanique. On va voir que le raisonnement énergétique est beaucoup plus rapide.



Première méthode : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Théorème de la quantité de mouvement à la barre :

La projection sur \vec{u}_x, \vec{u}_y s'écrit :

$$ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) = R_B \quad (\text{eq.1})$$

$$ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = R_A - mg \quad (\text{eq.2})$$

0

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$J_{Gz} \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{GG} \wedge (m\vec{g}) + \overrightarrow{GA} \wedge (\vec{R}_A) + \overrightarrow{GB} \wedge (\vec{R}_B)$$

Il reste à calculer les produits vectoriels :

$$-J_{Gz}\ddot{\alpha}\vec{u}_z = \begin{vmatrix} l \cos \alpha & 0 & R_B \\ -l \sin \alpha & R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La projection sur \vec{u}_z s'écrit :

$$-J_{Gz}\ddot{\alpha} = l(\cos \alpha)R_A - l(\sin \alpha)R_B \quad (\text{eq.3})$$

On élimine R_A et R_B avec les deux premières équations et on réinjecte dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} -J_{Gz}\ddot{\alpha} &= l(\cos \alpha)(mg + ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)) \\ &\quad - l(\sin \alpha)(ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)) \end{aligned}$$

En développant, on a :

$$-J_{Gz}\ddot{\alpha} = mgl \cos \alpha + ml^2 \ddot{\alpha}$$

Soit :

$$\ddot{\alpha}ml^2(1 + \frac{1}{3}) = -mgl \cos \alpha$$

On en déduit :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha$$

On multiplie par $\dot{\alpha}$ pour trouver une relation entre $\dot{\alpha}$ et α :

$$\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l}(\cos \alpha)\dot{\alpha}$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - 0 = -\frac{3g}{4l}(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Les réactions R_A et R_B ne travaillent pas car il n'y a pas de frottement en A et B .

Le poids de la barre dérive d'une énergie potentielle : $E_p = mgy_B = mgl \sin \alpha$.

Le système est donc conservatif. On a conservation de l'énergie mécanique. On calcule l'énergie cinétique en utilisant le théorème de Koenig :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2$$

Dans le référentiel barycentrique, on a : $E_c^* = \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\alpha}^2$.

On a vu que la vitesse du point G est : $\vec{v}_G \begin{vmatrix} -l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

On a donc : $\frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$.

L'énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha = \frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha$$

À $t = 0$, on a : $E_{m0} = mgl \sin \alpha_0$.

En faisant la différence, on a :

$$\frac{2}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 = mgl (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

En simplifiant, on a :

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$$

On retrouve bien l'équation trouvée avec la première méthode. On peut en déduire l'équation différentielle en calculant la dérivée par rapport au temps.

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{2l} (\cos \alpha) \dot{\alpha}$$

En simplifiant par $\dot{\alpha}$, on a :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha$$

La méthode énergétique est beaucoup plus rapide que la première méthode.

2. On a vu que : $R_B = ml(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)$

La barre quitte le mur en B lorsque $R_B = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\ddot{\alpha} \sin \alpha = \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$$

D'après la question précédente :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha \text{ et } \dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha).$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on a :

$$-\frac{3g}{4l} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{3g}{2l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \cos \alpha$$

La solution $\cos \alpha = 0$ n'est pas intéressante car la barre est verticale. En simplifiant, on a :

$$-\sin \alpha = 2(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$$

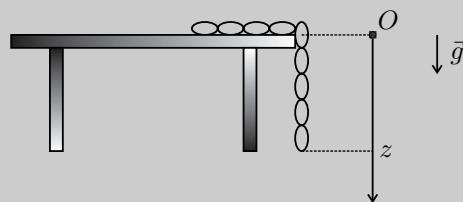
Finalement, la barre quitte le mur lorsque :

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$$

Exercice 1.6 : Chaîne sur une table (MP)

On considère une chaîne de longueur L , de masse linéique λ uniforme. Elle glisse sans frottement sur une table. On appelle z la position de l'extrémité de la chaîne dans l'air. A $t = 0$, $z(0) = \frac{L}{4}$ et $\dot{z}(0) = 0$. On pose $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

En utilisant un raisonnement énergétique, déterminer $z(t)$.



Analyse du problème

On utilise le raisonnement énergétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement. Cette méthode convient tout particulièrement aux systèmes conservatifs à une dimension.



1. Obtention de l'équation différentielle

- a) **Système** : chaîne de longueur L .
- b) **Référentiel** : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

c) Bilan des actions :

- Comme il n'y a pas de frottement entre la chaîne et la table, la réaction du support est orthogonale au petit déplacement. Le travail élémentaire est nul, c'est donc une force conservative.
- La force de pesanteur est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle.

Le système est donc conservatif.

On choisit l'origine des énergies potentielles de pesanteur pour $z = 0$.

La partie de chaîne qui est sur la table a une énergie potentielle nulle.

La partie de chaîne qui n'est plus sur la table a son centre d'inertie G au milieu, c'est-à-dire en $\frac{z}{2}$. La masse est λz . L'énergie potentielle de pesanteur est donc :

$$E_p = -(\lambda z)g\left(\frac{z}{2}\right)$$



Attention : l'axe Oz est orienté vers le bas. Il faut donc un signe $-$ dans l'expression de l'énergie potentielle.



Tous les points de la chaîne ont la même vitesse \dot{z} .

L'énergie cinétique de la chaîne de masse λL est :

$$E_c = \frac{1}{2}(\lambda L)\dot{z}^2$$

L'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\lambda L\dot{z}^2 - \lambda g \frac{z^2}{2}$$

d) On obtient l'équation différentielle en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps. Comme le système est conservatif, l'énergie mécanique est constante au cours du temps. On a alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}\lambda L 2\ddot{z}\dot{z} - \lambda g \frac{2z\dot{z}}{2}$$

On obtient alors :

$$\ddot{z} - \frac{g}{L}z = 0$$

2. Résolution de l'équation différentielle

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \frac{g}{L} = 0$$

On a deux racines réelles : $r = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} = \pm \omega$.



Ce n'est pas l'équation d'un oscillateur harmonique. Il faut donc résoudre l'équation caractéristique pour déterminer $z(t)$.

Attention à ne pas écrire $-\frac{g}{L}r$ au lieu de $-\frac{g}{L}$.



On a alors :

$$z = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t)$$

La vitesse est :

$$\dot{z} = A\omega \exp(\omega t) - B\omega \exp(-\omega t)$$

On détermine A et B en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0) = \frac{L}{4} = A + B \\ \dot{z}(0) = A\omega - B\omega \end{cases}$$

On en déduit que $A = B = \frac{L}{8}$. On a alors :

$$z(t) = \frac{L}{8} \exp(\omega t) + \frac{L}{8} \exp(-\omega t) = \frac{L}{4} \operatorname{ch}(\omega t)$$

Remarque

On aurait pu utiliser directement les fonctions ch et sh pour résoudre l'équation différentielle :

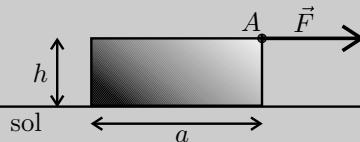
$$z = A' \operatorname{ch}(\omega t) + B' \operatorname{sh}(\omega t)$$

Lois de Coulomb du frottement de glissement

Exercice 2.1 : Déplacement d'un solide sur un plan horizontal (MP)

On considère un solide homogène de masse m qui repose sur un sol horizontal. Le coefficient de frottement entre le solide et le sol est f . Il n'y a pas force appliquée au point A.

1. On augmente progressivement la force \vec{F} . Quelle est la valeur maximale de la force pour que le solide reste à l'équilibre ?
2. Quelle force doit-on exercer au point A pour déplacer le solide à vitesse constante ? Quelle est la condition pour qu'il n'y ait pas de basculement ?
3. Le solide se déplace à vitesse constante v_0 . A $t = 0$, on supprime la force \vec{F} . Calculer la distance parcourue.



Analyse du problème

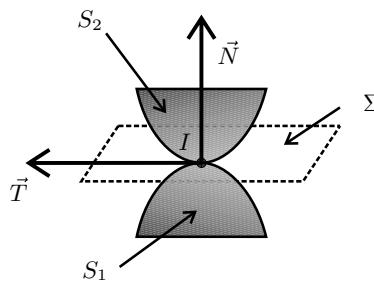
Dans cet exercice, on a un frottement entre le sol et le solide. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

Méthode de résolution des exercices : on fait des hypothèses (glissement ou pas de glissement) et on n'oubliera pas de bien vérifier les hypothèses.

On verra comment traduire correctement la condition de non basculement.

Cours : Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

On considère un contact ponctuel au point I entre deux solides S_1 et S_2 . On appelle Σ la surface de contact entre les deux solides.



On appelle \vec{R} l'action de contact que le solide S_1 exerce sur le solide S_2 . D'après le principe des actions réciproques, l'action de contact que S_2 exerce sur S_1 est $-\vec{R}$.

On peut décomposer R en deux termes :

- composante tangentielle \vec{T} (contenue dans le plan Σ)
- composante normale \vec{N} (orthogonale au plan Σ).

On a donc :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \text{ et } \vec{\Gamma}_I(\vec{R}) = \vec{\Gamma}_I(\vec{T}) + \vec{\Gamma}_I(\vec{N})$$

On rencontre deux cas :

Premier cas : pas de glissement

On considère le cas où la vitesse de glissement est nulle.

On a alors :

$$\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{v}_{I \in S_2} - \vec{v}_{I \in S_1} = \vec{0}$$

On définit un coefficient de frottement statique f_S qui caractérise le contact entre les deux solides. La loi de Coulomb s'écrit :

$$\|\vec{T}\| \leq f_S \|\vec{N}\|$$

Lorsqu'on effectue le bilan des forces, on n'est pas obligé de connaître l'orientation de \vec{T} .

On pourra choisir arbitrairement le sens de \vec{T} .

Deuxième cas : glissement

On considère le cas où le solide S_2 glisse sur le solide S_1 . On définit f_C le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) qui caractérise le contact entre les deux solides.

La loi de Coulomb s'écrit :

- \vec{T} est colinéaire et de sens opposé à la vitesse de glissement

$$\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{v}_{I \in S_2} - \vec{v}_{I \in S_1}$$

- $\|\vec{T}\| = f_c \|\vec{N}\|$

On a vu que dans le cas où il n'y a pas de glissement, on n'est pas obligé de connaître l'orientation de \vec{T} .

Par contre, dans le cas du glissement, il faut connaître le sens de \vec{T} .

On a en général $f_c \leq f_S$ et souvent dans les exercices on prend $f_c = f_S$ que l'on note f .



Lorsqu'on a un contact entre deux solides sur une surface, l'action de contact n'est pas toujours une force appliquée en un point. Par contre, si on trouve un point I pour lequel le moment de l'action de contact est nul en ce point, alors l'action de contact est équivalente à une force appliquée en ce point.

Le point I doit appartenir à la surface de contact entre les deux solides. On utilisera cette propriété pour avoir une condition de non basculement.

Cas où il n'y a pas de frottement

Lorsqu'il n'y a pas de frottement entre deux solides, on a vu en première année que la réaction est normale à la surface de contact Σ entre les deux solides. Ce qui revient à avoir $f = 0$. On a donc nécessairement un glissement.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

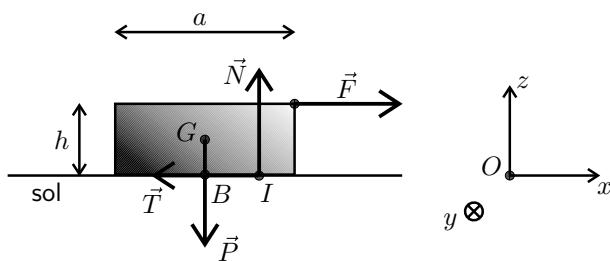
b) Bilan des actions :

On pose $\vec{F} = F\vec{u}_x$. On augmente progressivement la force F .

On note \vec{R} l'action de contact du sol sur le solide. On a :
 $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$.

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre du solide.

Il n'a pas de glissement puisque le solide est à l'équilibre.



On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide à l'équilibre :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T + F \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

Vérification des hypothèses de non glissement : $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$, soit

$$F \leq fmg$$

La valeur maximale de la force à appliquer est $F_{\max} = fmg$.

2. On cherche à déplacer le solide à vitesse constante : $\vec{v}_G = v\vec{u}_x$ avec $v > 0$.

Il y a nécessairement glissement.

La composante tangentielle de la réaction \vec{R} est forcément dirigée suivant $-\vec{u}_x$. On a donc $T > 0$.

On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide qui se déplace à vitesse constante :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T + F \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

On a glissement, donc $T = fN$. On a donc :

$$F = T = fN = fmg$$

Vérification des hypothèses de glissement :

La vitesse de glissement du solide par rapport au sol doit être positive. L'hypothèse est bien vérifiée puisqu'il se déplace à vitesse constante avec $v > 0$.



La condition $F = fmg$ n'est pas suffisante pour avoir un mouvement rectiligne uniforme. Si on fait l'expérience, on constate que si la force est trop grande, on peut avoir un basculement !

C'est souvent délicat de traduire correctement la condition de non basculement : il faut appliquer le théorème du moment cinétique au point I dans le référentiel barycentrique et trouver la condition pour que le point I appartienne bien à la surface de contact entre le solide et le sol.



Pour qu'il n'y ait pas de basculement, il faut que le moment cinétique du solide dans le référentiel barycentrique soit nul :

$$\vec{\sigma}^* (\text{solide}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique barycentrique peut se calculer en n'importe quel point. On va le calculer au point I et appliquer au solide le théorème du moment cinétique en I dans le référentiel barycentrique $\mathfrak{N}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$:

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_I^*}{dt} \right)_{\mathfrak{N}^*} = \vec{\Gamma}_{I(\text{ext})} = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{I(\text{ext})} = \vec{II} \wedge \vec{T} + \vec{II} \wedge \vec{N} + \vec{IG} \wedge m\vec{g} + \vec{IA} \wedge \vec{F}$$

On repère la position du point I par : $\vec{BI} = x_I \vec{u}_x$. Il reste à calculer les projections :

$$\begin{vmatrix} -x_I \\ 0 \\ \frac{c}{2} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{a}{2} - x_I \\ 0 \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mgx_I + cF \\ 0 \end{vmatrix}$$

La condition de non basculement est donc :

$$-mgx_I + cF = 0$$

On a donc : $x_I = \frac{cF}{mg}$

Le point I doit donc appartenir à la surface de contact entre le solide et le sol, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$-\frac{a}{2} \leq x_I \leq \frac{a}{2}$$

D'où :

$$-\frac{a}{2} \leq \frac{cF}{mg} \leq \frac{a}{2}$$

Comme la force F est positive, **la condition de non basculement** s'écrit donc :

$$F \leq \frac{mga}{2c}$$

Si cette condition est vérifiée, le moment en I de l'action de contact est nul. L'action de contact est donc équivalente à une force appliquée en ce point. On peut réaliser facilement l'expérience et se rendre compte des différents cas étudiés dans l'exercice.

3. On supprime la force \vec{F} à $t = 0$.

Il y a nécessairement glissement tant que le solide se déplace. Il ralentit et finit pas s'arrêter pour $t = t_1$. On est alors dans le cas où il n'y a pas de glissement et restera immobile.

La composante tangentielle de la réaction \vec{R} est forcément dirigée suivant $-\vec{u}_x$ puisque le mouvement est suivant $+\vec{u}_x$. On a donc $T > 0$.

On applique le théorème de la quantité de mouvement au solide qui est se déplace à vitesse constante :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{u}_x = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$

La projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z s'écrit :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -T \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

On a glissement, donc $T = fN$, soit

$$m \frac{dv}{dt} = -T = -fN = -fmg$$

On sépare les variables :

$$dv = -fg dt$$

On intègre entre $t = 0$ et $t = t_1$, l'instant où il va s'arrêter :

$$0 - v_0 = -fg(t_1 - 0)$$

On a donc :

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}$$

Pour déterminer l'abscisse, on part de l'équation $dv = -fg dt$ que l'on intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$v - v_0 = -fg t$$

On en déduit : $\frac{dx}{dt} = v_0 - fg t$.

On sépare à nouveau les variables : $dx = (v_0 - fg t) dt$. On intègre entre $t = 0$, instant pour lequel on a $x = 0$ et $t = t_1$, instant pour lequel on a $x = x_1$:

$$x_1 - 0 = v_0 t_1 - \frac{fg t_1^2}{2}$$

la distance parcourue est donc :

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{fg t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{fg} - \frac{fg}{2} \left(\frac{v_0}{fg} \right)^2$$

Vérification des hypothèses de glissement :

La vitesse de glissement du solide par rapport au sol doit être positive. L'hypothèse est bien vérifiée puisqu'il se déplace à vitesse constante avec $v > 0$.

Quand il s'arrête, on n'a plus de glissement. Il faut vérifier que $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$.

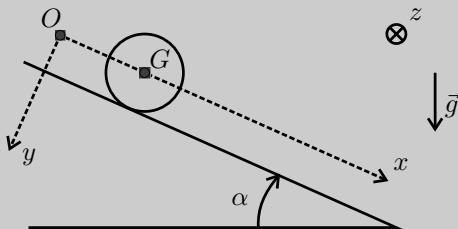
C'est bien le cas puisque la projection du principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -T \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

Exercice 2.2 : Sphère sur un plan incliné (MP)

On considère une sphère homogène de masse m , de rayon R et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2$. On pose $\overrightarrow{OG} = x\vec{u}_x$ et $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$. Le coefficient de frottement entre la sphère et le sol est f . A $t = 0$, $x = 0$ et $\omega = 0$.

1. Quelle est la condition sur l'angle α pour avoir un roulement sans glissement ? Déterminer ω en fonction de t par deux méthodes.
2. Dans le cas d'un roulement avec glissement, déterminer ω en fonction de t .

**Analyse du problème**

On a un frottement entre le sol et la sphère. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

On fait des hypothèses (glissement ou pas de glissement) et on n'oubliera pas de vérifier les hypothèses.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système conservatif à une dimension.

Cours : Roulement sans glissement

On a un roulement sans glissement lorsque le vecteur rotation $\vec{\omega}_{S_1/S_2}$ est contenu dans le plan Σ (voir exercice 2.1) et que la vitesse de glissement est nulle $\vec{v}_g (S_1/S_2) = \vec{v}_{I \in S_1} - \vec{v}_{I \in S_2}$.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

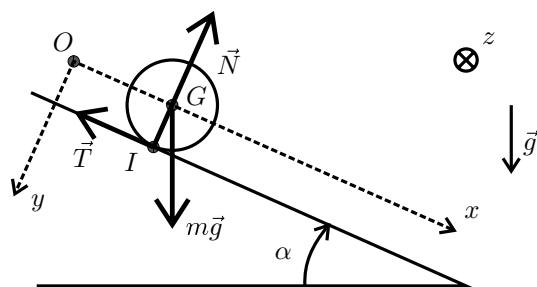
b) Bilan des actions :

On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

On note \vec{R} l'action de contact du sol sur le solide. On a : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{u}_x - N\vec{u}_y$.

On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T} . Il faudra vérifier que $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$.

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la sphère.



c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, la vitesse de glissement de la sphère par rapport au plan incliné est donc nulle : \vec{v}_g (sphère/sol) = $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{sol}}$.

Comme $\vec{v}_{I \in \text{sol}}$, alors $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{0}$.

Le vecteur rotation est : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

On applique la formule de Varignon pour calculer la vitesse de G :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$\dot{x} = R\omega$$

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a quatre inconnues : T , N , ω et x . Il faut quatre équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$\dot{x} = R\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$$

La projection sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg \sin \alpha & (\text{eq.2}) \\ 0 = mg \cos \alpha - N & (\text{eq.3}) \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z &= \frac{2}{5} m R^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{GG} \wedge (m\vec{g}) + \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{N}) + \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T}) \\ &= RT \vec{u}_z \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{2}{5} m R \frac{d\omega}{dt} = T \quad (\text{eq.4})$$

On fait la somme (eq.4) + (eq.2) et on remplace \ddot{x} par $R \frac{d\omega}{dt}$, on obtient :

$$\left(\frac{2}{5} m R + m R \right) \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) dt$$

L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$\omega = \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) t$$



Il ne faut pas oublier à la fin de vérifier la condition de roulement sans glissement.



On en déduit :

$$T = \frac{2}{5} m R \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5} m R \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) = \frac{2}{7} mg \sin \alpha$$

et

$$N = mg \cos \alpha$$

La condition $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$ se traduit par :

$$\frac{2}{7} mg \sin \alpha \leq f mg \cos \alpha$$

Soit :

$$\tan \alpha \leq \frac{7f}{2}$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse du point I est nulle. Les forces \vec{T} et \vec{N} ne travaillent pas. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Le système est donc conservatif.

Remarque : Comme $\dot{x} = R\omega$, on a un **système conservatif à une dimension**. L'énergie mécanique est une grandeur conservative. L'équation différentielle du mouvement s'obtient directement en écrivant que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle.



L'énergie potentielle est :

$$E_p = -mgx \sin \alpha$$



Attention au signe – pour l'énergie potentielle.



On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique.

Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Comme $\dot{x} = R\omega$, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mgx \sin \alpha$$

On dérive par rapport au temps et on utilise la relation $\dot{x} = R\omega$:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{2}{5}mR^2\omega \frac{d\omega}{dt} + mR^2\omega \frac{d\omega}{dt} - mgR\omega \sin \alpha$$

On simplifie par ω qui est une solution parasite :

$$\frac{7}{5} \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{R} \sin \alpha$$

Remarque

Il ne faut pas être surpris de simplifier par ω grandeur proportionnelle à la vitesse. Pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique, on multiplie le principe fondamental de la dynamique par la vitesse pour faire apparaître la puissance cinétique. Ici on fait l'opération inverse.



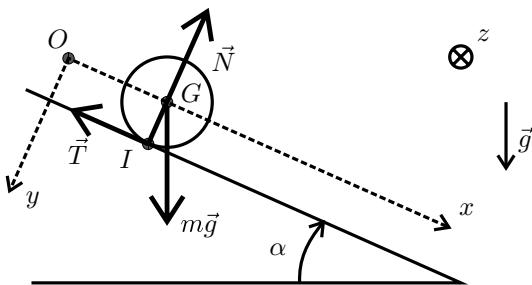
On sépare les variables : $d\omega = \frac{5g}{7R}(\sin \alpha)dt$. L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$\omega = \frac{5g}{7R} (\sin \alpha) t$$

On retrouve beaucoup plus rapidement le même résultat que précédemment. Il ne faut pas oublier de vérifier la condition de roulement sans glissement.

2. On a un roulement avec glissement.

Dans ce cas, il faut connaître le sens de \vec{T} . Comme le mouvement se fait suivant $+\vec{u}_x$, alors \vec{T} est suivant $-\vec{u}_x$. On pose $\vec{T} = -T\vec{u}_x$.



On a quatre inconnues : T, N, ω et x . Il faut quatre équations :

Roulement avec glissement :

$$T = fN \quad (\text{eq.5})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

On a déjà écrit la projection sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg \sin \alpha & (\text{eq.6}) \\ 0 = mg \cos \alpha - N & (\text{eq.7}) \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$\frac{2}{5}mR^2 \frac{d\omega}{dt} = RT \quad (\text{eq.8})$$

On en déduit que :

$$\frac{2}{5}mR \frac{d\omega}{dt} = T = fN = fmg \cos \alpha$$

On sépare les variables :

$$d\omega = \frac{5fg \cos \alpha}{2R} dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant t :

$$\omega = \frac{5fg \cos \alpha}{2R} t$$

On a vu que $T = fN = fmg \cos \alpha$. En reportant dans l'équation (6), on a :

$$m\ddot{x} = -fmg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

On intègre :

$$\dot{x} = -fg(\cos \alpha)t + g(\sin \alpha)t$$

Vérification des hypothèses de glissement : La vitesse de glissement par rapport au plan incliné doit être positive. On calcule la vitesse au point I en utilisant la formule de Varignon :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x}\vec{u}_x + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} - R\omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit que :

$$\dot{x}_I = -fg(\cos \alpha)t + g(\sin \alpha)t - R \frac{5fg \cos \alpha}{2R} t$$

D'où :

$$\dot{x}_I = - \left(\frac{7fg \cos \alpha}{2} - g \sin \alpha \right) t$$

La condition de glissement est $\dot{x}_I > 0$, soit :

$$g \sin \alpha > \frac{7fg \cos \alpha}{2}$$

On retrouve bien :

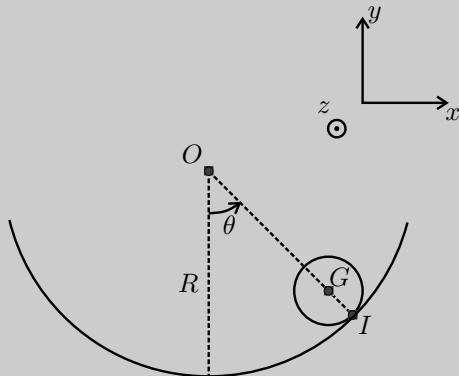
$$\tan \alpha > \frac{7f}{2}$$

Exercice 2.3 : Sphère dans une cuvette (MP)

On considère une sphère homogène de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{2}{5}mr^2$. Elle roule sans glissement à l'intérieur d'une sphère immobile de rayon R . Le coefficient de frottement entre les deux sphères est $f = 0,5$. A $t = 0$, $\theta_0 = 1$ et $\dot{\theta}_0 = 0$.

1. Déterminer par deux méthodes l'équation différentielle du mouvement. On pourra vérifier graphiquement la condition de roulement sans glissement.

2. Déterminer θ en fonction du temps dans le cas où $\theta_0 \ll 1$.

**Analyse du problème**

On a un frottement entre deux sphères. Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement.

On fait des hypothèses (ici roulement sans glissement) et on n'oubliera pas de vérifier les hypothèses.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système conservatif à une dimension.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{M} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen. On projette dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

b) Bilan des actions :

On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

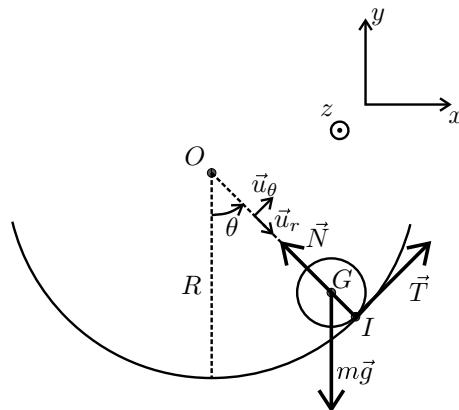
On note \vec{R} l'action de contact du support sur la sphère de rayon r . On a :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{u}_\theta - N\vec{u}_r.$$

On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T} . Il faudra vérifier que

$$\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|.$$

La résultante des forces de pesanteur est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la sphère.



c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, la vitesse de glissement de la sphère par rapport au support est donc nul : \vec{v}_g (sphère/support) = $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{support}}$.

Comme $\vec{v}_{I \in \text{support}}$, alors $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{0}$

Le vecteur rotation de la sphère est : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.



La détermination du vecteur rotation n'est pas évidente ici. Il faut donc utiliser la formule de Varignon pour le déterminer.



$$\vec{v}_G = \vec{v}_I + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IG} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -r\omega \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a $\overrightarrow{OG} = (R - r)\vec{u}_r$ et $\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

On a donc :

$$(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$$

Interprétation physique : Si $\omega < 0$, on a bien $\dot{\theta} > 0$.

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a quatre inconnues : T , N , ω et $\dot{\theta}$. Il faut quatre équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$(R - r)\dot{\theta} = -r\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la sphère :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$$

On a vu que : $\vec{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

On a vu en première année que : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et que $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$.

On a donc : $\vec{a}_G = (R - r) (\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{u}_r)$.

On en déduit la projection du théorème de la quantité de mouvement dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\begin{cases} -m(R - r)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - N & \text{(eq.2)} \\ m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + T & \text{(eq.3)} \\ 0 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique en G à la barre :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z &= \frac{2}{5} mr^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{GG} \wedge (m\vec{g}) + \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{N}) + \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T}) \\ &= rT\vec{u}_z \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{2}{5} mr \frac{d\omega}{dt} = T$$

Soit :

$$-\frac{2}{5} m(R - r)\ddot{\theta} = T \quad \text{(eq.4)}$$

En combinant les équations (3) et (4), on a :

$$m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \frac{2}{5} m(R - r)\ddot{\theta}$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{7}{5} m(R - r)\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin \theta = 0$$



Il ne faut pas oublier à la fin de vérifier la condition de roulement sans glissement.



On en déduit :

$$T = -\frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta} = \frac{2}{5}m(R-r)\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$

et

$$N = m(R-r)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Pour exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ , on multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$ et on l'intègre.

On obtient :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}(\sin\theta)\dot{\theta} = 0$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta\right) = 0$$

Le fonction à l'intérieur de la dérivée prend donc la même valeur à l'instant t et à l'instant $t = 0$:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta = -\frac{5g}{7(R-r)}\cos\theta_0$$

On a donc :

$$(R-r)\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

On en déduit la composante normale :

$$N = \frac{10mg}{7}(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta = \frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg\cos\theta_0$$

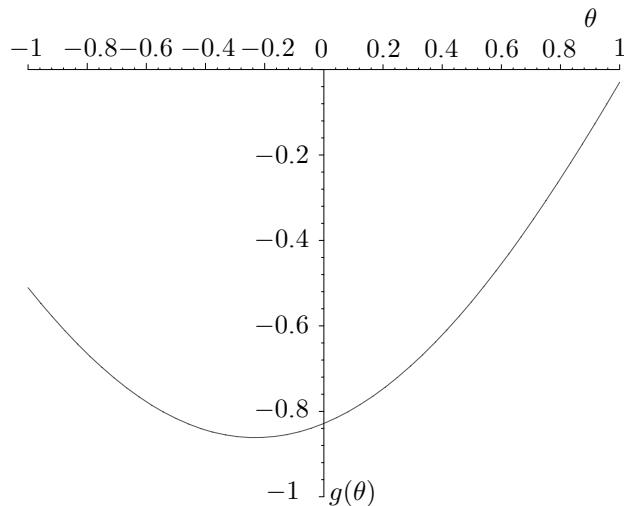
La condition de roulement sans glissement est : $|T| \leq f|N|$, soit :

$$\frac{2}{7}mg\sin\theta \leq f\left(\frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg\cos\theta_0\right)$$

On pose :

$$g(\theta) = \frac{2}{7}\sin\theta - f\frac{17}{7}\cos\theta + f\frac{10}{7}\cos\theta_0$$

On représente graphiquement g en fonction de θ .



On a nécessairement $|\theta| < \theta_0$ puisque à $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Vérification des hypothèses de non glissement :

Pour θ compris entre -1 et 1 , on a bien $|T| \leq f |N|$.

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse du point I est nulle. Les forces \vec{T} et \vec{N} ne travaillent pas. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Le système est donc conservatif.

Remarque : Comme $(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$, on a un **système conservatif à une dimension**. L'énergie mécanique est une grandeur conservative. L'équation différentielle du mouvement s'obtient directement en écrivant que la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle.



On choisit le point O comme origine des énergies potentielles. On a donc :

$$E_p = -mg(R - r) \cos \theta$$



Attention au signe – pour l'énergie potentielle.



On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique.

Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$$

Comme $(R - r)\dot{\theta} = -r\omega$, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{2}{5} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R - r) \cos \theta$$

L'énergie mécanique prend la même valeur à t et à $t = 0$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{5} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R - r) \cos \theta \\ &= -mg(R - r) \cos \theta_0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$(R - r) \dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

On dérive par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique pour en déduire l'équation différentielle du mouvement :

$$2(R - r) \ddot{\theta} = -\frac{10}{7} g (\sin \theta) \dot{\theta}$$

On simplifie par $\dot{\theta}$ pour en déduire l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \sin \theta = 0$$

On retrouve les mêmes résultats que précédemment sans oublier la vérification de la condition de roulement sans glissement.

Remarque

La méthode énergétique est beaucoup plus simple avec un système conservatif à une dimension.



2. Dans le cas des petites oscillations, on fait un développement limité à l'ordre 1.

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \theta = 0$$

On définit la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}}$.

On a un oscillateur harmonique dont la solution peut se mettre sous la forme :

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

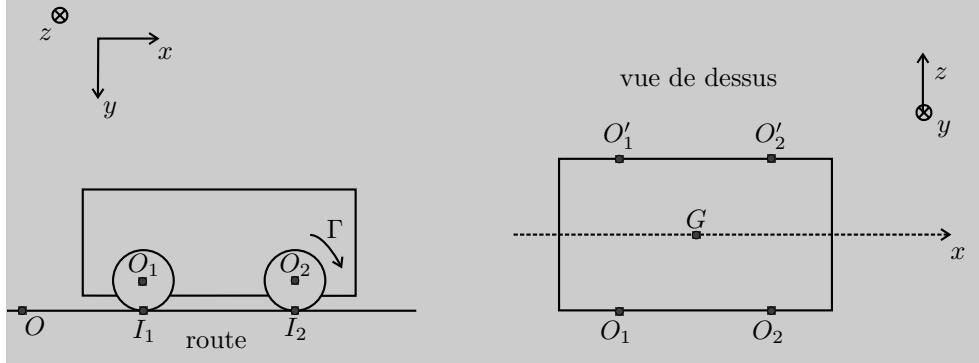
À $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$. On a donc :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 2.4 : Voiture (MP)*

On considère une voiture constituée d'un chassis de masse M et de quatre roues. Chaque roue est de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J_{Gz} = \frac{1}{2}mr^2$. On suppose que chaque liaison pivot est parfaite. Le moteur exerce sur chaque roue avant un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ tel que $\Gamma > 0$. La voiture est équilibrée et se déplace à vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$. On pose $\overrightarrow{GO_1} = -l \vec{u}_x + a \vec{u}_y$ et $\overrightarrow{GO_2} = l \vec{u}_x + a \vec{u}_y$.

Exprimer $\frac{dv}{dt}$ en fonction de Γ, r, m et M par deux méthodes. On ne vérifiera pas la condition de roulement sans glissement.

**Analyse du problème**

Il faut donc appliquer les lois de Coulomb sur le frottement et vérifier les hypothèses à la fin des calculs.

On utilisera deux méthodes :

- Méthode 1 : théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.
- Méthode 2 : raisonnement énergétique. On verra que le raisonnement énergétique permet d'obtenir beaucoup plus rapidement la solution. Elle est tout particulièrement adaptée pour un système à une dimension pour lequel on peut calculer facilement la puissance des forces.



1. a) Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.

b) Bilan des actions :

On suppose qu'on a un roulement sans glissement.

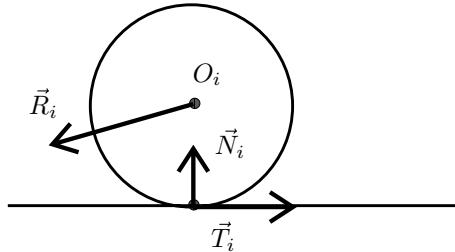
On note \vec{R}_i l'action du chassis sur la roue d'indice i . L'action de la roue i sur le chassis est donc $-\vec{R}_i$.

On a un roulement sans glissement. On note $\vec{T}_i = T_i \vec{u}_x$ et $\vec{N}_i = -N_i \vec{u}_y$ les composantes tangentielles et normales de l'action de contact entre la roue et le sol. On peut choisir arbitrairement l'orientation de \vec{T}_i .

La voiture est équilibrée. Les forces sont symétriques par rapport à l'axe Gx .

On a donc $T_1 = T'_1, N_1 = N'_1, \vec{R}_1 = \vec{R}'_1, T_2 = T'_2, N_2 = N'_2, \vec{R}_2 = \vec{R}'_2$.

Sur une roue d'indice i , on a donc les forces suivantes : $m\vec{g}, \vec{R}_i, T_i \vec{u}_x$ et $-N_i \vec{u}_y$.



La résultante des forces de pesanteur sur la voiture (chassis + 4 roues) est équivalente à une force unique appliquée au point G barycentre de la voiture.

c) Éléments cinétiques :

On n'a pas de glissement, donc $\vec{v}_{I_i \in \text{roue } i} = \vec{0}$.

Les 4 roues tournent à la même vitesse angulaire. Le vecteur rotation de chaque roue est : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{I_i} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IO_i} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{vmatrix} = r\omega \vec{u}_x$$

On a donc :

$$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_G = v \vec{u}_x = r\omega \vec{u}_x$$

Le moment cinétique de la roue d'indice i est :

$$\vec{\sigma}_{O_i} = J\vec{\omega} = \left(\frac{mr^2}{2} \right) \omega \vec{u}_z = \frac{mr}{2} v \vec{u}_z$$

d) Première méthode : utilisation des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

On a 12 inconnues : $T_1, N_1, T_2, N_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}, \omega$ et v . Il faut donc 12 équations :

Roulement sans glissement :

On a vu que cette condition se traduit par :

$$v = r\omega \quad (\text{eq.1})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la voiture :

La masse totale est $(4m + M)$. On projette dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y)

$$(4m + M) \frac{dv}{dt} = 2T_1 + 2T_2 \quad (\text{eq.2})$$

$$0 = (4m + M) g - 2N_1 - 2N_2 \quad (\text{eq.3})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la roue d'indice 1 :

$$m \frac{dv}{dt} = T_1 + R_{1x} \quad (\text{eq.4})$$

$$0 = -N_1 + R_{1y} + mg \quad (\text{eq.5})$$

$$0 = R_{1z} \quad (\text{eq.6})$$

Théorème de la quantité de mouvement à la roue d'indice 2 :

$$m \frac{dv}{dt} = T_2 + R_{2x} \quad (\text{eq.7})$$

$$0 = -N_2 + R_{2y} + mg \quad (\text{eq.8})$$

$$0 = R_{2z} \quad (\text{eq.9})$$

Théorème du moment cinétique en G au chassis :

$$\vec{0} = -2\vec{\Gamma} + \overrightarrow{GG} \wedge (M)\vec{g} + 2\overrightarrow{GO_1} \wedge (-\vec{R}_1) + 2\overrightarrow{GO_2} \wedge (-\vec{R}'_2)$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2l \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{1x} \\ -R_{1y} \\ -R_{1z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2l \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{2x} \\ -R_{2y} \\ -R_{2z} \end{vmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} 0 = -2aR_{1z} - 2aR_{2z} \\ 0 = -2lR_{1z} + 2lR_{2z} \\ 0 = 2lR_{1y} + 2aR_{1x} - 2lR_{2y} + 2aR_{2x} - 2\Gamma \end{cases} \quad (\text{eq.10})$$

Les deux premières projections ne sont pas des équations supplémentaires par rapport à (6) et (9).

On utilise les équations (4), (5), (7) et (8) pour simplifier la troisième projection :

$$\begin{aligned} 0 &= 2l(N_1 - mg) + 2a \left(m \frac{dv}{dt} - T_1 \right) - 2l(N_2 - mg) \\ &\quad + 2a \left(m \frac{dv}{dt} - T_2 \right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$0 = 4am \frac{dv}{dt} - 2a(T_1 + T_2) + 2l(N_1 - N_2) \quad (\text{eq.A})$$

Théorème du moment cinétique en O_2 à la roue d'indice 2 :

$$J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = \overrightarrow{O_2 I_2} \wedge (\vec{T}_2 + \vec{N}_2) + \overrightarrow{O_2 G_2} \wedge m\vec{g} + \vec{\Gamma}$$

On obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} T_2 \\ -N_2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -rT_2 + \Gamma \end{vmatrix}$$

On a donc pour chaque roue avant :

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = -rT_2 + \Gamma$$

De même, on a pour chaque roue arrière :

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = -rT_1$$

On en déduit :

$$T_2 = -\frac{mr}{2} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\Gamma}{r} = -\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{\Gamma}{r} \quad (\text{eq.11})$$

et

$$T_1 = -\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} \quad (\text{eq.12})$$

En utilisant les équations (2), (11) et (12), on a :

$$(4m + M) \frac{dv}{dt} = -m \frac{dv}{dt} - m \frac{dv}{dt} + 2 \frac{\Gamma}{r}$$

Soit :

$$(6m + M) \frac{dv}{dt} = 2 \frac{\Gamma}{r}$$

Vérification des hypothèses :

Il faut que $|T_1| \leq f |N_1|$ et $|T_2| \leq f |N_2|$

On a :

$$T_1 = -\frac{m}{2} \frac{dv}{dt} = -\frac{m}{2} \frac{2\Gamma}{r(6m+M)} = -\frac{m\Gamma}{r(6m+M)}$$

et

$$T_2 = -\frac{m\Gamma}{r(6m+M)} + \frac{\Gamma}{r} = \frac{\Gamma}{r} \left(1 - \frac{m}{6m+M} \right)$$

On a $T_2 > 0$ et $T_1 < 0$.

Interprétation physique : Si $\Gamma > 0$, le couple moteur a tendance à faire tourner la roue dans le sens horaire. Pour que la roue 2 ne glisse pas, on doit avoir $T_2 > 0$.

Le couple moteur ne s'applique pas sur les roues arrières. Pour ne pas avoir de glissement, on doit donc avoir $T_1 < 0$ puisque c'est la seule force qui contribue au moment et donc à la rotation de la roue 1.

Avec les équations (A) et (3), on peut en déduire N_1 et N_2 puis le couple maximum pour ne pas avoir de glissement.

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Le système étudié est la voiture constituée du châssis et des quatre roues. Il faut faire le bilan des actions extérieures et intérieures :

- Actions extérieures : Dans le cas du roulement sans glissement, la vitesse aux points I_i est nulle. Les forces \vec{T}_i et \vec{N}_i ne travaillent pas. Les forces de pesanteur ne travaillent pas.
- Actions intérieures : Les liaisons pivot sont parfaites. La puissance des actions de liaison est donc nulle. Attention : la puissance du couple $\vec{\Gamma}$ qui s'applique sur chaque roue avant est non nulle. Elle vaut : $\vec{\Gamma} \cdot \omega \vec{u}_z + \vec{\Gamma} \cdot \omega \vec{u}_z = 2\Gamma \frac{v}{r}$. Par contre, la puissance du couple $\vec{\Gamma}$ exercé par chaque roue sur le châssis, est nulle car il n'y a pas de rotation du châssis.

On utilise le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique de chaque roue. Le référentiel barycentrique est : $\mathfrak{R}^* = (O_i; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

L'énergie cinétique de la voiture est :

$$E_c = 4 \left(\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{1}{2} M v^2$$

Comme $\omega = \frac{v}{r}$ on a :

$$E_c = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (M + 4m) v^2 = \frac{1}{2} (M + 6m) v^2$$

La puissance des forces extérieures est nulle.

La puissance des forces intérieures est égale à :

$$P_{\text{int}} = 2\Gamma \frac{v}{r}$$

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = (6m + M) v \frac{dv}{dt} = P_{\text{int}} = 2\Gamma \frac{v}{r}$$

En simplifiant par v , on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$(6m + M) \frac{dv}{dt} = P_{\text{int}} = \frac{2\Gamma}{r}$$

Remarque

On voit tout l'intérêt de la méthode énergétique. La simplification est spectaculaire puisqu'on a trouvé l'équation différentielle avec une seule équation alors qu'il fallait 12 équations avec la première méthode !

Partie 2 Électrocinétique

Plan

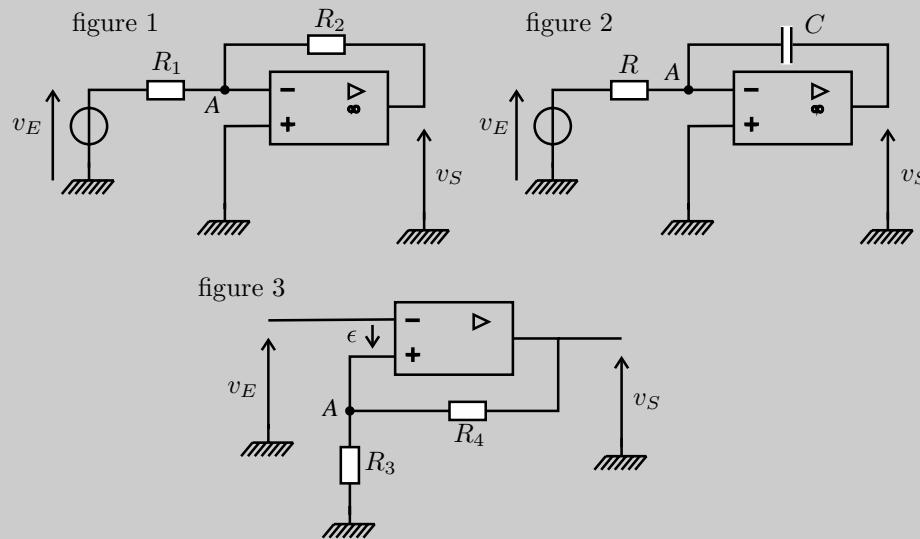
3. Électrocinétique	49
3.1 : Montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels (MP-PT)	49
3.2 : Oscillateur de relaxation (MP-PT)	53
3.3 : Oscillateur à pont de Wien* (MP-PT)	56
3.4 : Oscillateur à résistance négative (MP-PT)	59
3.5 : Filtre de Rauch et Fourier (MP-PT)	63
3.6 : Passe-bande et réponse à un créneau (MP-PT)	67

Électrocinétique

Exercice 3.1 : Montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels (MP-PT)

On considère trois montages avec des amplificateurs opérationnels idéaux. On pose $\beta = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$.

1. Déterminer la fonction de transfert pour la figure 1.
2. Déterminer la relation entre $v_E(t)$ et $v_S(t)$ par deux méthodes pour la figure 2. À $t = 0$, on applique une tension continue $v_E = -V_0 < 0$ au dispositif et le condensateur est déchargé. Déterminer la tension de sortie $v_S(t)$ pour $t > 0$.
3. Pour quelle valeur de v_E la tension de sortie de la figure 3 passe-t-elle de la valeur $v_S = V_{\text{sat}}$ à $v_S = -V_{\text{sat}}$? Tracer le graphe représentant v_S en fonction de v_E . Comment appelle-t-on ce montage ?



Analyse du problème

Cet exercice reprend quelques montages fondamentaux avec des amplificateurs opérationnels en régime linéaire ou en régime de saturation. On va voir plusieurs méthodes permettant d'obtenir l'équation différentielle.

Cours : La méthode générale pour la mise en équation dans les montages avec des amplificateurs opérationnels est d'écrire :

- le théorème de Millman ou la loi des noeuds en termes de potentiels à tous les noeuds sauf à la masse et à la sortie,
- l'équation de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel : saturation positive ou saturation négative ou régime linéaire ($\epsilon = 0$ pour un amplificateur opérationnel idéal).



1. On suppose l'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseur. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\epsilon = 0 - v_A = 0$.

On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut deux équations :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v_E}{R_1} + \frac{v_S}{R_2}$$

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\epsilon = 0 - v_A = 0$$

Comme $v_A = 0$, on a :

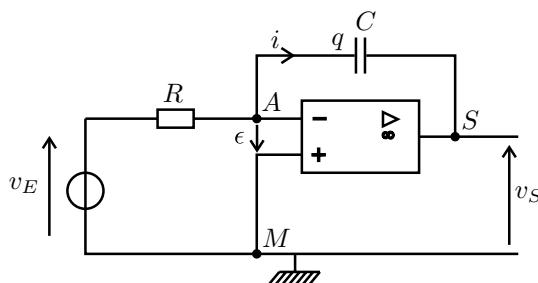
$$\frac{v_S}{v_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

C'est un montage inverseur.

2. Première méthode

On cherche à obtenir directement l'équation différentielle.

On suppose l'amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseur. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\epsilon = 0 - v_A = 0$.



On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut donc deux équations :

- loi des noeuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{v_e}{R} - i = 0$$

Il faut relier l'intensité i à la tension de sortie v_S .

Soit q la charge du condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C(v_A - v_S)$.

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 = 0 - v_A$$

On a donc :

Soit :

$$\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_S}{dt} = 0$$

On obtient finalement :

$$v_S(t) - v_S(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_e(t) dt$$

On a donc un montage intégrateur. L'amplificateur opérationnel doit rester en régime linéaire pour fonctionner en intégrateur.

Deuxième méthode

On se place en régime sinusoïdal forcé pour calculer la fonction de transfert. On pourra en déduire directement l'équation différentielle.

Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$\underline{V_A} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{\underline{V_E}}{R} + \underline{V_S} jC\omega$$

- amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 = 0 - V_A$$

On a alors :

$$\underline{V_S} = -\frac{\underline{V_E}}{jRC\omega}$$

Soit :

$$j\omega \underline{V_S} = -\frac{\underline{V_E}}{RC}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dv_S}{dt} = -\frac{v_e}{RC}$$

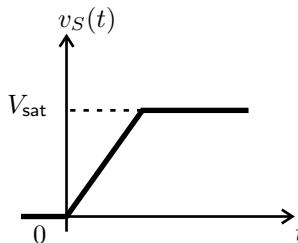
On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

À $t = 0$, $v_S = 0$ et $v_E = -V_0$. On intègre de 0 à t :

$$v_S(t) - 0 = \frac{V_0}{RC} t$$



Ce résultat est valable uniquement jusqu'à 15 V où on a une saturation de l'amplificateur opérationnel.



- 3.** On n'a pas de rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Le régime linéaire ne peut pas être stable. On a donc uniquement un régime de saturation positive ou négative. On définit :

$$\varepsilon = v_A - v_e$$

Cours : On a plusieurs modes de fonctionnement possible de l'amplificateur opérationnel. Pour analyser un tel montage, on fait des hypothèses de fonctionnement et on vérifie les hypothèses à la fin des calculs.



1^{re} hypothèse :

Supposons l'amplificateur opérationnel en régime de saturation positive. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{v_S}{R_4}$$

Soit :

$$v_A = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_S = \beta v_S$$

- amplificateur opérationnel en régime de saturation positive : $v_S = +V_{\text{sat}}$

Remarque : On aurait pu appliquer la formule du diviseur de tension pour calculer V_A puisque $i_+ = 0$.



Vérification des hypothèses : Il faut que $\epsilon > 0$. Comme $v_A = \beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E < \beta V_{\text{sat}}$$

2^e hypothèse :

Supposons l'amplificateur opérationnel en régime de saturation négative. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A : C'est la même équation d'avec la première hypothèse. On a :

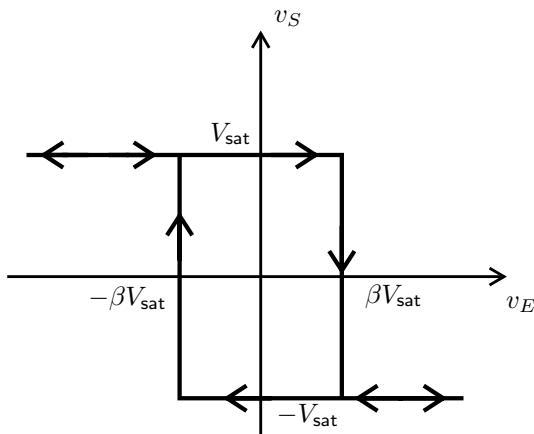
$$v_A = \beta v_s$$

- amplificateur opérationnel en régime de saturation négative : $v_S = -V_{\text{sat}}$

Vérification des hypothèses : Il faut que $\epsilon < 0$. Comme $v_A = -\beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E > -\beta V_{\text{sat}}$$

Conclusion : On a la caractéristique suivante :



Explication du sens de parcours du cycle :

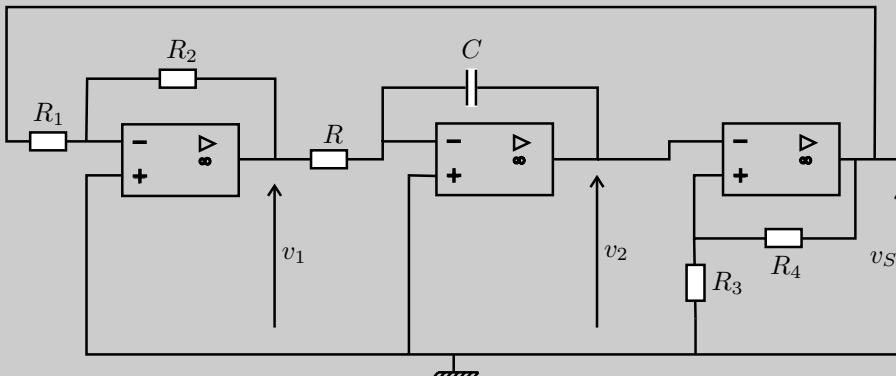
- On augmente la tension v_E à partir d'une valeur inférieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. La tension de sortie vaut V_{sat} . v_S vaut V_{sat} tant que v_E est inférieure à βV_{sat} . On a un basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$ quand v_E vaut βV_{sat} . Au delà, v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ puisque v_E est comparée à $-\beta V_{\text{sat}}$.
- On diminue la tension v_E à partir d'une valeur supérieure à βV_{sat} . La tension de sortie vaut $-V_{\text{sat}}$. v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ tant que v_E est supérieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. On a un basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} quand v_E vaut $-\beta V_{\text{sat}}$. Au delà, v_S vaut V_{sat} puisque v_E est comparée à βV_{sat} .

Une fois le basculement effectué, le seuil de comparaison change. Ce montage permet d'éviter des rebonds successifs. Le cycle est appelé cycle à hystéresis.

Exercice 3.2 : Oscillateur de relaxation (MP-PT)

On considère le montage suivant reprenant les figures décrites dans l'exercice précédent. À l'instant $t = 0$, la tension de sortie v_S est égale à $v_S = V_{\text{sat}} = 14,7 \text{ V}$ et le condensateur est déchargé. On donne : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $R_3 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$.

1. Étudier l'évolution ultérieure des tensions $v_S(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
2. Tracer les graphes de ces trois tensions et calculer la fréquence des signaux obtenus.



Analyse du problème

Dans l'exercice précédent, on a analysé en détail le fonctionnement de chaque montage à amplificateur opérationnel. On travaille en régime transitoire. Il faut donc étudier le montage en partant de $t = 0$ avec une saturation positive d'après l'énoncé. On reste en saturation positive tant que v_2 est inférieure à βV_{sat} . On calcule le temps t_1 correspondant au premier basculement puis le temps t_2 correspondant au deuxième basculement.

Il ne faut pas utiliser les notations complexes pour analyser le montage globalement car le circuit n'est pas linéaire. Par contre, on peut utiliser les complexes pour déterminer l'équation différentielle reliant v_1 et v_2 .



1. Régime de saturation positive entre $t = 0$ et $t = t_1$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1}V_{\text{sat}} = -6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(0) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le condensateur est déchargé à $t = 0$, donc :

$$v_2(t) = 69000 t$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, on a : $69000t_1 = \beta V_{\text{sat}}$. D'où :

$$t_1 = 6,81 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Régime de saturation négative entre $t = t_1$ et $t = t_2$:

La tension de sortie vaut : $v_S = -14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = \frac{R_2}{R_1}V_{\text{sat}} = 6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(t_1) = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}(t - t_1) = -69000(t - t_1)$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $4,7 \text{ V}$ à $t = t_1$, donc :

$$v_2(t) = 4,7 - 69000(t - t_1)$$

Vérification des hypothèses : il faut que $v_2 > -\beta V_{\text{sat}}$

Pour $t = t_2$, v_2 atteint $-\beta V_{\text{sat}} = -4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} .

Pour $t = t_2$, on a : $v_2(t_2) = -4,7 = 4,7 - 69000(t_2 - t_1)$. D'où :

$$t_2 - t_1 = 1,36 \times 10^{-4} \text{ s}$$



Attention au montage intégrateur avec les conditions initiales. Il est inutile de remplacer t_1 par une expression qui peut être compliquée. Il est préférable de garder des termes en $t - t_1$.



2. Régime de saturation positive entre $t = t_2$ et $t = t_3$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1}V_{\text{sat}} = -6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

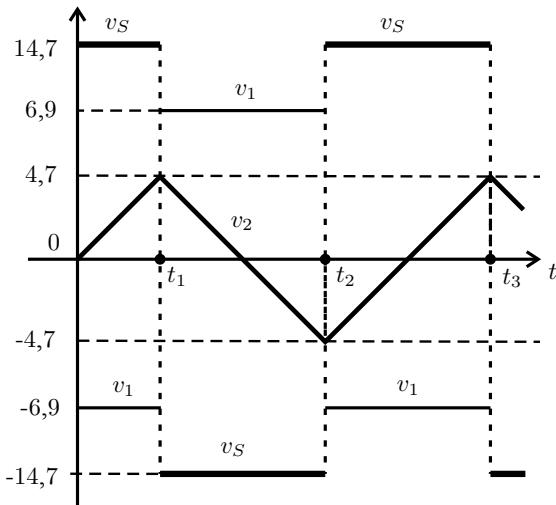
$$v_2(t) - v_2(t_2) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $-4,7 \text{ V}$ à $t = t_2$, donc :

$$v_2(t) = -4,7 + 69000(t - t_2)$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_3$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7$ V. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.



Oscillations périodiques :

On a des signaux périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

D'après l'étude précédente, on a $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. La période des oscillations est :

$$T = 2(t_2 - t_1)$$

La fréquence des signaux est donc :

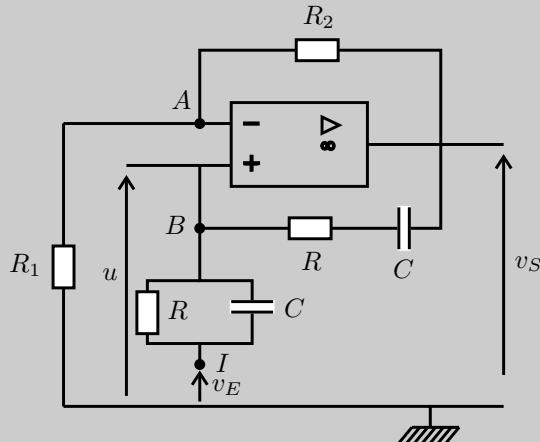
$$f = \frac{1}{T} = 3670 \text{ Hz}$$

Exercice 3.3 : Oscillateur à pont de Wien* (MP-PT)

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. La tension v_E est une tension sinusoïdale, de pulsation ω . On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $X = x - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $K = \frac{V_S}{U}$. Exprimer U en fonction de V_E et V_S . Montrer que l'on peut écrire : $U = \underline{T} V_E + \frac{1}{3+jX} V_S$.
2. Exprimer V_S en fonction de K , X et V_E .

3. Déterminer la valeur du couple (K, ω) pour laquelle on a des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



Analyse du problème

Après avoir déterminé la fonction de transfert, on va en déduire la condition pour avoir des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



1. On applique le théorème de Millman en A et comme l'amplificateur opérationnel est idéal en régime linéaire : $\epsilon = 0$. On a donc :

$$\frac{\underline{V}_A}{\underline{V}_A} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{U} = \frac{\underline{V}_S}{R_2}$$

D'où $\underline{U} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\underline{V}_S}{R_2}$, soit : $\underline{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V}_S$. On en déduit :

$$K = \frac{\underline{V}_S}{\underline{U}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

On applique le théorème de Millman en B :

$$\frac{\underline{V}_B}{\underline{V}_B} \left(\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) = \frac{\underline{V}_S}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{\underline{V}_E}{R} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)$$



Pour bien mener à terme les calculs, il ne faut pas multiplier par l'expression conjuguée. Il est préférable de faire intervenir le plus vite possible des termes en $jx = jRC\omega$.



D'où :

$$\underline{V_B} \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \right) = \frac{\underline{V_S}}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} + \underline{V_E} (1 + jRC\omega)$$

Comme $\underline{V_B} = \underline{U}$, on a :

$$\underline{U} \left(1 + jx + \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} \right) = \frac{\underline{V_S}}{1 + \frac{1}{jx}} + \underline{V_E} (1 + jx)$$

On multiplie par $1 + \frac{1}{jx}$:

$$\underline{U} \left((1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right) + 1 \right) = \underline{V_S} + \underline{V_E} (1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right)$$

D'où :

$$\underline{U} \left(3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = \underline{V_S} + \underline{V_E} \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

On obtient finalement :

$$\underline{U} = \frac{\underline{V_E}}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)} + \frac{\underline{V_S}}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

soit :

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} \underline{V_S} \quad \text{avec } \underline{T} = \frac{2 + jX}{3 + jX}$$

2. D'après la question 1 : $\underline{U} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{K}}$. On a donc :

$$\frac{\underline{V_S}}{\underline{K}} = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} \underline{V_S}$$

Soit : $\underline{V_S} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{3 + jX} \right) = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V_E}$. On obtient finalement :

$$\underline{V_S} = \frac{K (2 + jX)}{3 - K + jX} \underline{V_E}$$

3. Obtention de l'équation différentielle

On fait le produit en croix :

$$\underline{V_S} \left(3 - K + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = K \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \underline{V_E}$$

On multiplie par jx :

$$\underline{V_S} ((3 - K) jx + (jx)^2 + 1) = K (2 jx + (jx)^2 + 1) \underline{V_E}$$

Pour en déduire l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$, il faut remplacer formellement $jx = \frac{j\omega}{\omega_0}$ par $\frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt}$, V_E par $v_E(t)$ et V_S par $v_S(t)$.



On en déduit directement l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$:

$$(3 - K) \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_S}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 v_S}{dt^2} + v_S = K \left(2 \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_E}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 v_E}{dt^2} + v_E \right)$$

Pour $v_E = 0$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique si $K = 3$. On a alors :

$$\frac{d^2 v_S}{dt^2} + \omega_0^2 v_S = 0$$

On a donc des oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega = \omega_0$.

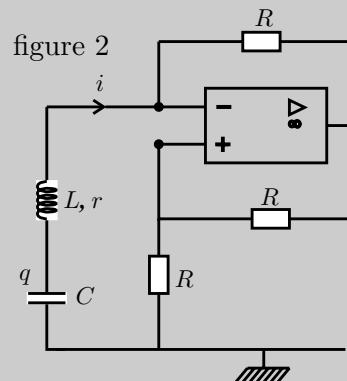
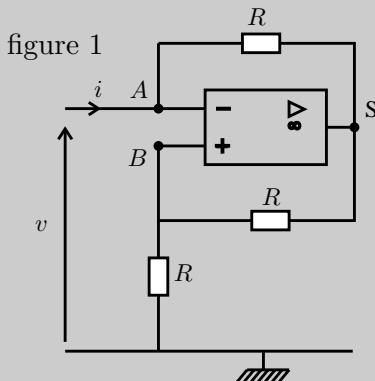
Remarque

On va étudier dans l'exercice suivant la naissance des oscillations. Le terme $(3 - K)$ ne peut pas être rigoureusement nul en pratique. Il doit être négatif pour observer la naissance des oscillations.

Exercice 3.4 : Oscillateur à résistance négative (MP-PT)

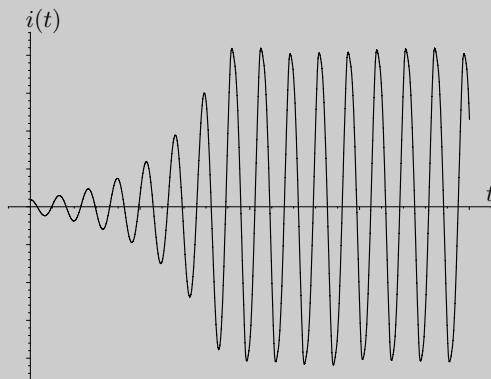
L'amplificateur opérationnel est idéal. On note V_{sat} et $-V_{\text{sat}}$ les tensions de saturation positive et négative.

1. On considère le montage de la figure 1. Donner la relation entre v et i en régime linéaire et en régime de saturation. Quelle est la condition sur i pour être en régime linéaire ? Construire le graphe $v = f(i)$. Dans quelle partie le montage est-il équivalent à une résistance négative ? Donner une interprétation physique.



2. Pour le montage de la figure 2, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ en régime linéaire et en régime de saturation.

- 3.** Quelle est la condition sur R pour avoir des oscillations sinusoïdales ?
- 4.** Interpréter l'enregistrement suivant avec des conditions initiales quasi nulles. Pourquoi doit-on avoir $r < R$ pour avoir des oscillations quasi sinusoïdales ?



Analyse du problème

La connaissance de la caractéristique du dipôle de la figure 1 permettant de simplifier l'étude du montage de la figure 2.

On va étudier la naissance des oscillations avec une phase initiale d'amplification où l'amplificateur opérationnel est en régime linéaire.



1. Régime linéaire :

Bilan des inconnues : v_S , v et v_B . On cherche à les exprimer en fonction de i .

Il faut donc écrire 3 équations :

$v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R}$ $i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0$ $\varepsilon = v_B - v = 0$	théorème de Millman en B loi des noeuds en termes de potentiels en A amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire
--	--

On a donc :

$$\begin{cases} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ \varepsilon = v_B - v = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } v_S = R \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) v = 2v.$$

On en déduit que :

$$v = -Ri \text{ (en convention récepteur)}$$

Il ne faut pas oublier de **vérifier les hypothèses**. Les calculs précédents sont valables à condition d'être en régime linéaire. Il faut donc que $|v_S| \leq V_{sat}$.

Les relations précédentes donnent : $v_S = -2Ri$.

On appelle i_0 la valeur de i pour laquelle v_S vaut $-V_{sat}$:

$$i_0 = \frac{V_{sat}}{2R}$$

Pour être en régime linéaire, on doit donc avoir :

$$|i| \leq i_0$$

Régime de saturation positive ou négative :

Les trois équations s'écrivent :

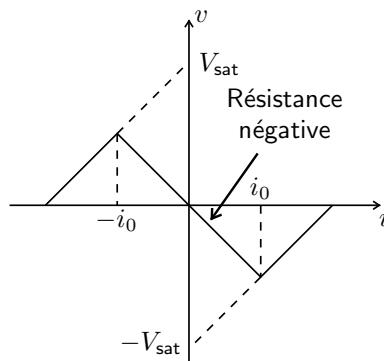
$$\begin{cases} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ v_S = \pm V_{sat} \end{cases}$$

On a alors :

$$v = Ri + V_S$$

Caractéristique :

On en déduit la caractéristique donnant v en fonction de i :



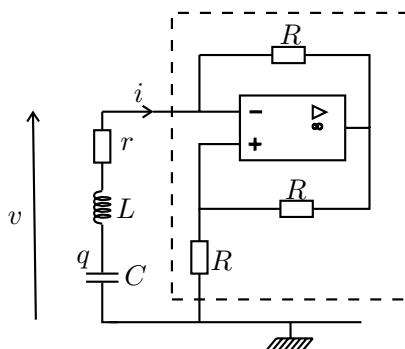
Pour $i \in [-i_0, i_0]$, le montage est équivalent à une résistance négative. C'est en fait un générateur de tension proportionnelle à l'intensité. L'énergie vient de l'alimentation de l'amplificateur opérationnel qui n'est pas représentée sur le schéma mais qu'il ne faut pas oublier en TP !

2. On a étudié dans la question précédente le dipole représenté en pointillés.

Régime linéaire :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = -Ri$$



D'après les orientations de i et q ,

$$i = -\frac{dq}{dt}$$



De très nombreuses erreurs de signe sont commises lors de la mise en équation : loi d'Ohm, relation entre i et q , relation entre q et la tension aux bornes du condensateur.



En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r - R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Le système est donc divergent si $R > r$. Ce régime reste valable tant que la tension v_S n'atteint pas la saturation de l'amplificateur opérationnel. On n'a plus la même équation différentielle une fois la saturation atteinte.

Régime de saturation positive ou négative :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = Ri + v_S$$

On est en régime de saturation avec $v_S = \pm V_{sat}$. En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r + R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

On a donc un régime convergent.

3. Pour $r = R$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

On peut donc avoir des oscillations sinusoïdales.

Remarque : Dans l'exercice précédent, on a utilisé une deuxième méthode qui utilise la fonction de transfert permettant de trouver une condition pour avoir des oscillations sinusoïdales.



4. Analyse de la courbe :

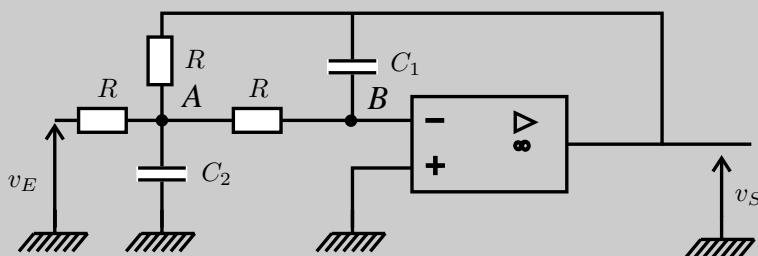
- À $t = 0$, les conditions initiales sont quasi nulles. L'amplificateur opérationnel est en régime linéaire. On a une phase d'amplification. L'énergie reçue vient de l'alimentation de l'amplificateur opérationnel. On observe sur la courbe un régime pseudo-périodique divergent.
- Il y a ensuite une saturation de l'amplificateur opérationnel. On n'a plus la même équation différentielle et on observe une phase d'amortissement.
- On a ensuite une alternance des phases d'amplification et d'amortissement. Un équilibre peut se créer et on obtient d'après la figure des solutions quasi sinusoïdales.

Conclusion :

- $r > R$: le système ne peut pas démarrer. On a toujours une phase d'amortissement et on ne peut pas observer la naissance des oscillations.
- $r = R$ est un cas théorique puisqu'en pratique, on n'a pas l'égalité parfaite.
- $r < R$: on peut observer la naissance des oscillations.

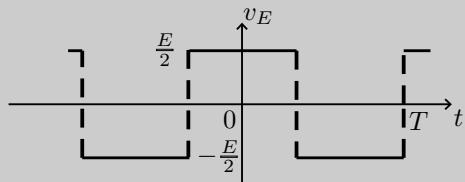
Exercice 3.5 : Filtre de Rauch et Fourier (MP-PT)

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1. Montrer que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme : $H(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On choisit les composants de façon à avoir $f_0 = 2,0$ kHz et $Q = 50$.
2. Montrer que l'on a une résonance pour le gain. Tracer le diagramme de Bode pour l'amplitude.

3. On envoie à l'entrée un signal créneau de fréquence $f = 2,0 \text{ kHz}$ représenté ci-dessous :



La décomposition en série de Fourier du signal d'entrée est :

$$v_E(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) + \dots \right)$$

Déterminer le signal de sortie pour $E = 1 \text{ V}$.

Analyse du problème

Il y a deux façons de déterminer la réponse d'un circuit à une excitation : résolution de l'équation différentielle ou utilisation de la décomposition en série de Fourier.

On utilise la deuxième méthode dans cet exercice. On calcule d'abord la fonction de transfert. Pour déterminer la réponse à l'excitation v_e , on applique le théorème de superposition en utilisant la décomposition en série de Fourier.



1. L'amplificateur opérationnel est idéal en régime linéaire. On travaille en régime sinusoïdal forcé. On utilise les impédances et amplitudes complexes.

Bilan des inconnues : $\underline{V_A}$, $\underline{V_B}$ et $\underline{V_S}$.

Il faut donc écrire 3 équations :

$\underline{V_A} \left(\frac{3}{R} + jC_2\omega \right)$ $\underline{V_B} \left(\frac{1}{R} + jC_1\omega \right)$ $\underline{\varepsilon} = 0 - \underline{V_B} = 0$	théorème de Millman en A théorème de Millman en B amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire
---	---

Soit :

$$\begin{cases} \underline{V_A} \left(\frac{3}{R} + jC_2\omega \right) = \frac{\underline{V_E}}{R} + \frac{\underline{V_S}}{R} + \frac{\underline{V_B}}{R} \\ \underline{V_B} \left(\frac{1}{R} + jC_1\omega \right) = \frac{\underline{V_A}}{R} + \underline{V_S} jC_1\omega \\ \underline{\varepsilon} = 0 - \underline{V_B} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \underline{V_A} (3 + jRC_2\omega) = \underline{V_E} + \underline{V_S} \\ \underline{V_A} = -jRC_1\omega \underline{V_S} \end{cases}$$

On a : $-jRC_1\omega\underline{V_S}(3+jRC_2\omega) = \underline{V_E} + \underline{V_S}$.

soit : $\underline{V_S}[1+3jRC_1\omega-R^2C_1C_2\omega^2] = -\underline{V_E}$.

La fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{-1}{1 - R^2C_1C_2\omega^2 + 3jRC_1\omega}$$

On identifie à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} H_0 = -1 \\ \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \\ Q = \frac{1}{3RC_1\omega_0} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \end{cases}$$

2. Le gain vaut :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + Q^2(1-x^2)^2}}$$

La dérivée de G par rapport à x est :

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{Q}{2} \left[x^2 + Q^2(1-x^2)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} [2x - 2Q^2 2x(1-x^2)]$$

$$\frac{dG}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - 2Q^2 + 2Q^2x^2 = 0$$

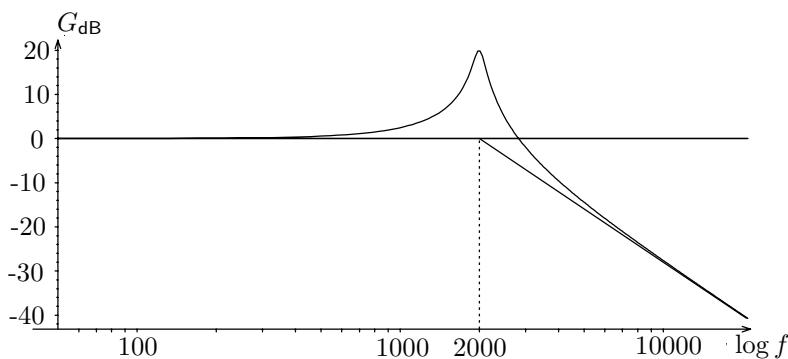
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La deuxième solution est possible puisque $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Comme $Q = 50$, la pulsation de résonance est $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$.

$$G_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + Q^2 \left(\frac{1}{2Q^2}\right)}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx Q$$

- Si $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H} \approx -1$, d'où $G \approx 1$ et $G_{dB} \rightarrow 0$.
- Si $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, d'où $G \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ et $G_{dB} \approx -40 \log \omega + 40 \log \omega_0$.
On a une droite de pente -40 dB par décade.
- Intersection des asymptotes : $0 = 40 \log \omega - 40 \log \omega_0$, donc $\omega = \omega_0$. Le point d'intersection des asymptotes a pour abscisse ω_0 et pour ordonnée 0.



3. Pour calculer le signal en sortie du filtre, on utilise le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} v_E(t) &= \frac{2E}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right) \\ &= v_{E1} + v_{E3} + v_{E5} + \dots \end{aligned}$$

La réponse à une somme d'excitations est la somme des réponses à chacune des excitations appliquées séparément.

La sortie peut se mettre sous la forme :

$$v_S = v_{S1} + v_{S3} + v_{S5} + \dots$$

Si on applique à l'entrée v_{En} tout seul : $v_{En}(t) = \alpha_n \cos(n\omega t)$. C'est l'harmonique de rang n .

La sortie peut se mettre sous la forme : $v_{Sn}(t) = G_n \alpha_n \cos(n\omega t + \theta_n)$ avec $G_n = |\underline{H}(jn\omega)|$ et $\theta_n = \arg(\underline{H}(jn\omega))$.

- Pour $n = 1$, $G_1 = 50$ et $\theta_1 = \pi$.

L'amplitude du fondamental est : $50 \times \frac{2E}{\pi} = 31,8$ V

- Pour $n \geq 3$, on est en dehors de la bande passante. Le gain est vaut 0,12.

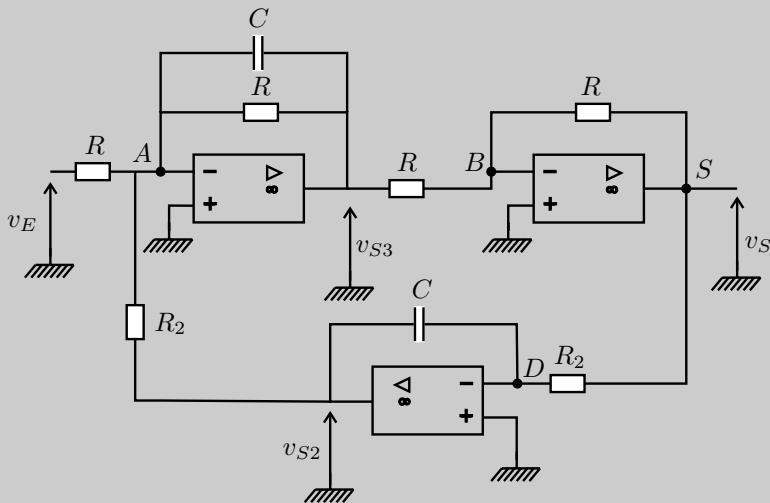
L'amplitude de l'harmonique 3 est : $0,12 \times \frac{2E}{\pi} \times \frac{1}{3} = 0,027$ V.

On néglige la réponse des harmoniques devant celle du fondamental. La tension de sortie est donc quasiment sinusoïdale :

$$v_S(t) = 31,8 \cos(\omega t + \pi) = -31,8 \cos(\omega t)$$

Exercice 3.6 : Passe-bande et réponse à un créneau (MP-PT)

Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



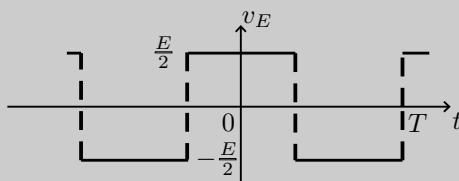
1. Montrer que la fonction de transfert complexe peut se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On choisit les composants de façon à avoir $f_0 = 500$ Hz et $Q = 50$. Le montage peut-il se comporter en intégrateur ou en déivateur ?

2. Tracer le diagramme de Bode. Rappeler la largeur de la bande passante à -3 dB.

3. On envoie à l'entrée un signal créneau de fréquence $f = 500$ Hz représenté ci-dessous :



La décomposition en série de Fourier du signal d'entrée est :

$$v_E(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \dots \right)$$

Déterminer le signal de sortie.

Analyse du problème

La méthode systématique pour calculer une fonction de transfert avec des amplificateurs opérationnels est d'écrire le théorème de Millman à tous les noeuds sauf à la masse et à la sortie, l'équation de fonctionnement de chaque amplificateur opérationnel (ici amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire). Pour déterminer la réponse à l'excitation v_e , on applique le théorème de superposition en utilisant la décomposition en série Fourier.



1. Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

On a donc : $\underline{V_A} = 0$; $\underline{V_B} = 0$ et $\underline{V_D} = 0$.

Théorème de Millman en A :

$$\underline{V_A} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + jC\omega \right) = \frac{\underline{V_E}}{R} + \underline{V_{S3}} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) + \frac{\underline{V_{S2}}}{R_2} = 0$$

On a donc :

$$\underline{V_{S3}} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = -\frac{\underline{V_E}}{R} - \frac{\underline{V_{S2}}}{R_2} \quad (\text{eq. 1})$$

Théorème de Millman en B :

$$\underline{V_B} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{\underline{V_{S3}}}{R} + \frac{\underline{V_S}}{R} = 0$$

On a donc :

$$\underline{V_S} = -\underline{V_{S3}} \quad (\text{eq. 2})$$

Théorème de Millman en D :

$$\underline{V_D} \left(\frac{1}{R_2} + jC\omega \right) = \frac{\underline{V_S}}{R_2} + \underline{V_{S2}} jC\omega = 0$$

$$\underline{V_{S2}} = -\frac{\underline{V_S}}{jR_2 C\omega} \quad (\text{eq. 3})$$

On part de l'équation (2) et on utilise (1) et (3).

$$\underline{V_S} = \frac{-\left(-\frac{\underline{V_E}}{R} - \frac{\underline{V_{S2}}}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} \text{ or } \underline{V_{S2}} = -\frac{\underline{V_S}}{jR_2 C\omega}, \text{ d'où}$$

$$\underline{V_S} = -\frac{\left(-\frac{\underline{V_E}}{R} + \frac{\underline{V_S}}{jR_2^2 C\omega}\right)}{\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}, \text{ soit } -\underline{V_S} \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = -\frac{\underline{V_E}}{R} + \frac{\underline{V_S}}{jR_2^2 C\omega}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jR_2^2C\omega}}$$

On identifie à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $H_0 = 1$; $RC = \frac{Q}{\omega_0}$ et $\frac{R}{R_2^2C} = Q\omega_0$.

On a alors :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{R_2C} \\ Q = RC\omega_0 = \frac{R}{R_2} \end{cases}$$

Si $f \gg f_0$, $\underline{H} \approx -\frac{j}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$: le montage se comporte comme un intégrateur.

Si $f \ll f_0$, $\underline{H} \approx \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$: le montage se comporte comme un dérivateur.

2. On appelle θ l'argument de la fonction de transfert.

- Si $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H} \approx \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$, d'où $G \approx \frac{\omega}{Q\omega_0}$ et $\theta \approx \frac{\pi}{2}$. On a alors :

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \log \omega - 20 \log (Q\omega_0)$$

On a une droite de pente +20 dB par décade.

- Si $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H} \approx -\frac{j}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$, d'où $G \approx \frac{\omega_0}{Q\omega}$ et $\theta \approx -\frac{\pi}{2}$. On a alors :

$$G_{\text{dB}} \approx -20 \log \omega + 20 \log \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)$$

On a une droite de pente -20 dB par décade.

- Intersection des asymptotes :

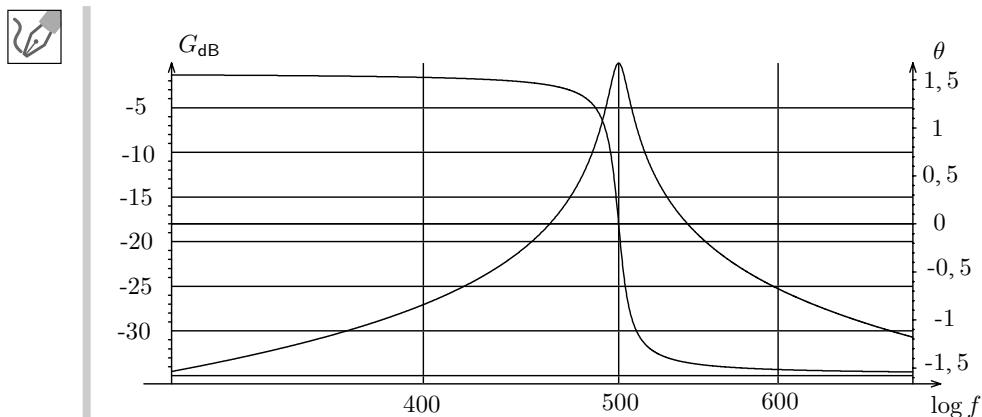
$$-20 \log \omega + 20 \log \left(\frac{\omega_0}{Q} \right) = 20 \log \omega - 20 \log (Q\omega_0)$$

On a alors : $\omega = \omega_0$. Le point d'intersection a pour abscisse ω_0 et pour ordonnée $-20 \log Q$.

- On a résonance pour la courbe réelle pour $\omega = \omega_0$. Le gain vaut 1 et $G_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$.
- On obtient donc le diagramme de Bode pour le gain et pour l'amplitude.

Remarque : L'angle θ est toujours compris entre $-\pi$ et π . On pourra alors interpréter physiquement le signe de θ .

- Si $\theta > 0$, la tension de sortie est en avance de phase sur la tension d'entrée.
- Si $\theta = 0$, la tension de sortie et la tension d'entrée sont en phase.
- Si $\theta < 0$, la tension de sortie est en retard de phase sur la tension d'entrée.



Comme $Q \gg 1$, le filtre est très sélectif. La résonance est très aiguë.
La largeur de la bande passante à -3 dB vaut :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

3. Pour calculer le signal en sortie du filtre, on utilise le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} v_E(t) &= \frac{2E}{\pi} \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) + \dots \right) \\ &= v_{E_1} + v_{E_3} + v_{E_5} + \dots \end{aligned}$$

La réponse à une somme d'excitations est la somme des réponses à chacune des excitations appliquées séparément.

La tension de sortie peut se mettre sous la forme :

$$v_S = v_{S_1} + v_{S_3} + v_{S_5} + \dots$$

Si on applique à l'entrée v_{En} tout seul : $v_{En}(t) = \alpha_n \cos(n\omega t)$. C'est l'harmo-nique de rang n .

La tension de sortie peut se mettre sous la forme : $v_{Sn}(t) = G_n \alpha_n \cos(n\omega t + \theta_n)$ avec $G_n = |\underline{H}(jn\omega)|$ et $\theta_n = \arg(\underline{H}(jn\omega))$.

- Pour $n = 1$, $G_1 = 1$ et $\theta_1 = 0$. Le fondamental n'est pas atténué.
- Pour $n \geq 3$, on est en dehors de la bande passante. Le gain est quasiment nul puisque le filtre est très sélectif. Les harmoniques sont fortement atténués.

La tension de sortie est donc quasiment sinusoïdale :

$$v_S(t) = \frac{2E}{\pi} \cos(\omega t)$$

Partie 3

Électromagnétisme

Plan

4. Calculs de champ électromagnétique	75
4.1 : Distribution volumique entre deux plans (MP-PT)	75
4.2 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques (MP-PT)	83
4.3 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis (MP-PT)	85
4.4 : Champ électrostatique entre deux plaques (MP-PT)	87
4.5 : Capacité d'un câble coaxial (MP-PT)	89
4.6 : Superposition de nappes de courant planes (MP-PT)	93
4.7 : Sphère en rotation* (MP-PT)	98
4.8 : Courants de Foucault dans un cylindre (MP-PT)	101
4.9 : Cylindre, courants induits et ARQS* (MP-PT)	104
5. Induction électromagnétique	108
5.1 : Rail de Laplace (MP-PT)	108
5.2 : Roue de Barlow (MP-PT)	115
5.3 : Haut Parleur (MP-PT)	119
5.4 : Moteur asynchrone (MP-PT)	123
5.5 : Alternateur d'une éolienne (MP-PT)	128
5.6 : Énergie magnétique du câble coaxial (MP-PT)	132
5.7 : Pince ampèremétrique (MP-PT)	135
5.8 : Transformateur torique (MP-PT)	138
6. Conducteur	145
6.1 : Boule conductrice (MP-PT)	145
6.2 : Système de conducteurs (MP-PT)	148
6.3 : Condensateur sphérique et effets thermiques (MP-PT)	152
6.4 : Condensateur cylindrique (MP-PT)	156
6.5 : Microphone* (MP-PT)	160

Calculs de champ électromagnétique

Exercice 4.1 : Distribution volumique entre deux plans (MP-PT)

On considère une distribution volumique D de charges ρ uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$ dans le référentiel $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique par 4 méthodes : théorème de Gauss, équation de Maxwell-Gauss, équation de Poisson et théorème de superposition. On prendra $V(0) = 0$. Étudier le cas particulier où $a \rightarrow 0$.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Le théorème de superposition permet de déduire directement le champ électrostatique créé par la distribution volumique à partir du champ créé par un plan infini.

Cours : Méthode de calcul du champ électrostatique et du potentiel électrostatique

Il y a deux stratégies pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés par une distribution de charges.

Stratégie n°1 : On calcule le champ électrostatique et on en déduit le potentiel électrostatique.

Pour calculer le champ, on a trois possibilités :

- Calcul direct du champ. Avec les plans de symétrie et d'antisymétrie, on prévoit la direction du champ. Le champ $d\vec{E}$ créé par une charge dq est donné par la loi de Coulomb :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM^2} \vec{u}_{K \rightarrow M} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM^3} \overrightarrow{KM}$$

On projette $d\vec{E}$ et on intègre les projections pour en déduire le champ créé par la distribution de charges.

- Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Utilisation du théorème de Gauss pour une surface fermée S :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Cette méthode donne des résultats simples pour des distributions hautement symétriques. Elle se fait en 3 étapes : recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie, recherche des invariances et application du théorème de Gauss (la surface de Gauss est une surface fermée par exemple un cylindre de hauteur h , une sphère, un parallélépipède).

On en déduit directement le potentiel en intégrant la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Stratégie n°2 : On calcule le potentiel électrostatique et on en déduit le champ électrostatique.

Pour calculer le potentiel, on a deux possibilités :

- Utilisation de la loi de Coulomb :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM}$$

avec $dq = \rho d\tau$ ou σdS ou λdl suivant que la distribution est volumique, surfacique ou linéaire. Il reste à intégrer pour en déduire le potentiel V .

ATTENTION : Cette méthode n'est pas valable s'il y a des charges à l'infini.

- Utilisation de l'équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Il reste à intégrer l'équation différentielle pour déterminer le potentiel V .

Après avoir calculé le champ électrostatique, on en déduit le champ à partir de la relation :

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Propriétés importantes en électrostatique

- Pour une distribution volumique, V et \vec{E} sont définis et continus en tout point de l'espace.
- Pour une distribution surfacique, \vec{E} est discontinu à la traversée de la surface de distribution : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ avec 1 et 2 des points de part et d'autre de la surface de distribution. Le potentiel V est continu en tout point de l'espace.
- Pour une distribution linéaire, V et \vec{E} ne sont pas définis sur la distribution.

Il ne faut pas oublier que les distributions surfaciennes et linéaires sont des modélisations et donc une approximation. Il ne faut pas être surpris d'avoir des résultats qui divergent.

Choix de la constante pour le potentiel électrostatique

Pour une distribution finie, on doit choisir $V(\infty) = 0$.

Par contre, pour une distribution infinie, on ne peut pas choisir $V(\infty) = 0$.

Dans ce cas, bien lire l'énoncé qui impose souvent un potentiel de référence.

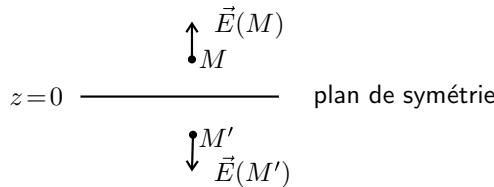


Structure du champ et du potentiel

- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_z$.

- La distribution D de charge est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , donc \vec{E} et V aussi. Les coordonnées du champ ne dépendent pas de x et y . Le potentiel ne dépend pas x et y . Bilan :
 $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$ et $V = V(z)$.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



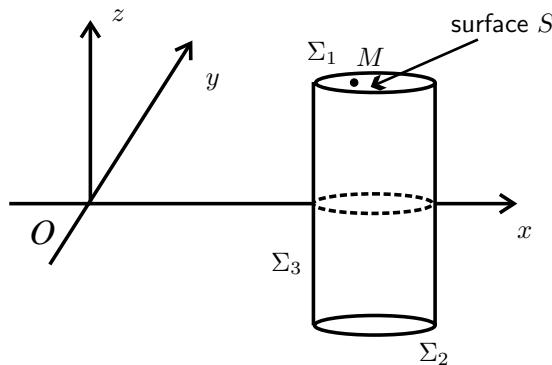
Le champ en M' est le symétrique du champ en M par rapport au plan $z = 0$, d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M)) = -E(z) \vec{u}_z \text{ et } V(M') = V(M)$$

Soit un point M appartenant au plan $z = 0$. Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$, $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, donc $\vec{E} = \vec{0}$ pour $z = 0$.

1. Première méthode : Utilisation du théorème de Gauss

Calcul du champ avec le théorème de Gauss :



On considère un point M dans la région $z > 0$. La surface de Gauss est un cylindre passant par M représenté sur la figure ci-dessus. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{3ext}$$

Le flux à travers la surface latérale Σ_3 est nul car le champ est orthogonal au vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur. On a donc :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} (-E(z)) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

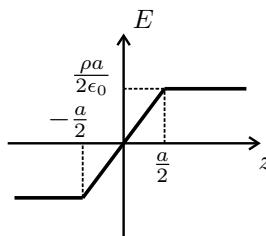
On a donc : $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z) S.$

Il y a plusieurs cas pour calculer la charge intérieure :

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho a S$, on a donc $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.
- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho 2z S$, on a donc $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$

On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, alors $E = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$
- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq 0$, alors $E = -\frac{\rho |z|}{\epsilon_0} = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$



Si l'épaisseur a tend vers 0, on peut considérer la distribution comme surfacique. On peut définir une densité surfacique de charges σ .



Pour exprimer ρ en fonction de σ (c'est-à-dire passer d'une approximation volumique à une approximation surfacique pour les charges), il faut calculer la charge de deux façons.

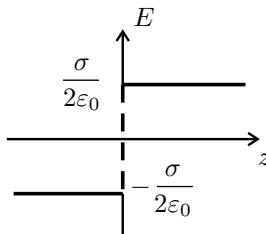


- Distribution surfacique : on considère une charge située en $z = 0$ et de surface S . La charge est $Q = \sigma S$.
- Distribution volumique : on considère une charge située dans un volume de surface S et de hauteur a . La charge est $Q = \rho S a$.

Les deux charges doivent être égales. On a donc :

$$\sigma = \rho a$$

On retrouve bien le champ créé par un plan infini avec un discontinuité en $z = 0$.



Calcul du potentiel :

La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty) = 0$. On choisit d'après l'énoncé $V(0) = 0$.

Comme la distribution est volumique, le potentiel est continu en tout point de l'espace.

On a vu que le potentiel est une fonction paire de z . Il suffit de le calculer dans la région $z \geq 0$.

On utilise la relation : $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$ pour calculer le potentiel.

On considère un déplacement quelconque du point M :

$$\vec{dl} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

On a donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -E(z)\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = -E(z)dz$$

- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho z}{\epsilon_0}dz$. On intègre entre 0 et z : $V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ puisque $V(0) = 0$. Le potentiel vaut en $z = \frac{a}{2}$:

$$V\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

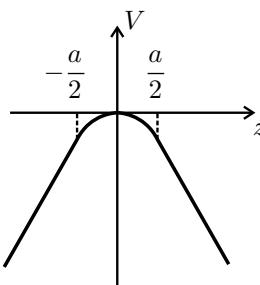
- Si $z \geq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}dz$. On intègre entre $\frac{a}{2}$ et z :

$$V - \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

D'où :

$$V = \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) - \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

On en déduit le graphe représentant V en fonction de z :



Remarque

On a continuité du potentiel en tout point de l'espace puisqu'on a une distribution volumique. On remarque que la dérivée première de V est continue. C'est prévisible puisque $E = -\frac{dV}{dz}$ et que le champ est continu en tout point de l'espace pour une distribution volumique.



2. Deuxième méthode : Équation de Maxwell-Gauss

On a vu que le champ électrique ne dépend que de z .

L'équation de Maxwell-Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array} \right| = \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{dE}{dz}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} + cte$. On a vu que $E = 0$ pour $z = 0$. Soit $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$ (localement il n'y a pas de charge), donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = \frac{a}{2}$ puisqu'on a une distribution volumique, donc $E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$, donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = -\frac{a}{2}$, donc $E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

3. Troisième méthode : Équation de Poisson

L'équation de Poisson est :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} V$$

Soit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On a vu que le champ et le potentiel sont nuls pour $z = 0$. Comme le potentiel ne dépend que de z , l'équation de Poisson s'écrit :

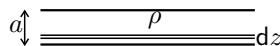
$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 z} + A$ et $V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z^2 + Az + B$. Le champ électrostatique est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z$. On a : $E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} - A$. Or $V = 0$ et $E = 0$ pour $z = 0$. On a donc : $A = 0$ et $B = 0$. On obtient finalement : $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A'z + B'$ et $E = -A'$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = \frac{a}{2}$. On a donc $A' = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A' \left(\frac{a}{2}\right) + B'$, d'où $B' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A''z + B''$ et $E = -A''$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = -\frac{a}{2}$. On a donc $A'' = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A'' \left(-\frac{a}{2}\right) + B''$, d'où $B'' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

4. Quatrième méthode : Théorème de superposition

La distribution volumique est la superposition de plaques d'épaisseur dz représentées sur le schéma ci-dessous.



Pour trouver la relation entre σ , ρ et dz , il faut calculer la charge de deux façons : $dq = \sigma dS = \rho dz dS$.

On en déduit que :

$$\sigma = \rho dz$$

On utilise le champ créé par un plan infini ($\pm \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ - voir première méthode) pour en déduire le champ créé par la plaque d'épaisseur dz :

$$\rho \frac{\frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}}{\frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}}$$

Le schéma montre une plaque horizontale de largeur a et d'épaisseur dz . Le champ créé par un plan infini est indiqué par $\pm \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0}$ à l'endroit de la plaque.

Il reste à appliquer le théorème de superposition pour calculer le champ créé par la distribution de charges D .

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, le point M est au dessus de tous les plans. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$$

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, le point M est au dessous de tous les plans. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho dz}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$. Le point M est au dessus des plans situés entre $-\frac{a}{2}$ et z alors qu'il est au dessous des plans situés entre z et $\frac{a}{2}$. On a donc :

$$E = \int_{-\frac{a}{2}}^z \frac{\rho dz}{2\varepsilon_0} + \int_z^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho dz}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(z + \frac{a}{2} \right) - \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2} - z \right) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

Exercice 4.2 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques (MP-PT)

On considère une charge q négative répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 . On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2 . Le champ électrostatique se met sous la forme : $\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique : $\text{div } \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r}$ avec $E_r = \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r$.

1. Déterminer $\rho(r)$ en fonction de a, r, R_1 et ε_0 .
2. Déterminer a en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2 .
3. Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace. Représenter graphiquement E_r en fonction de r .

Analyse du problème

L'équation de Maxwell-Gauss permet de calculer directement la densité volumique de charges à partir du champ électrostatique. Le théorème de Gauss permet d'en déduire le champ en tout point de l'espace.



1. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Comme $\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$, alors :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r} = a + \frac{2a(r - R_1)}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit : $\rho = \varepsilon_0 \left(a + 2a - \frac{2aR_1}{r} \right)$, soit :

$$\rho = a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right)$$

2. On connaît la charge totale q . On peut l'exprimer en fonction de a en utilisant ρ .

$$q = \iiint_{\text{distribution}} \rho d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_{r=R_1}^{R_2} a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right) 4\pi r^2 dr$$

Remarque

On peut également écrire le petit élément de volume en coordonnées sphériques : $d\tau = (dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)$.

Il reste à intégrer r entre R_1 et R_2 , θ entre 0 et π et ϕ entre 0 et 2π . On retrouve le même résultat.



On a alors :

$$q = 4\pi\varepsilon_0 a [r^3 - R_1 r^2]_{R_1}^{R_2} = 4\pi\varepsilon_0 a (R_2^3 - R_1 R_2^2 - R_1^3 + R_1^3)$$

Finalement, on a :

$$a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2 (R_2 - R_1)}$$

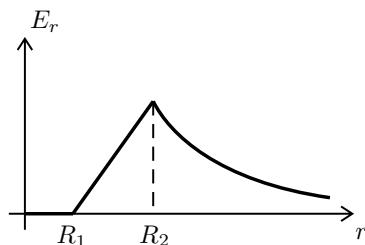
3.

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie des sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r s'écrit : $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Si $r \leq R_1$, $Q_{int} = 0$, donc $\vec{E} = \vec{0}$.

Si $r \geq R_2$, $Q_{int} = q$. Tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle. Le champ vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



Exercice 4.3 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis (MP-PT)

On considère un fil infini d'axe Oz portant une densité linéique de charges constante λ .

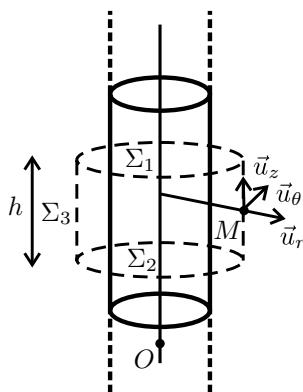
1. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} .
2. En déduire le potentiel électrostatique V .
3. On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz situés en $(x = -a, y = 0)$ et $(x = a, y = 0)$ portant respectivement des densités linéiques de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances r_1 et r_2 aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique. Comme la distribution est hautement symétrique, il est plus simple d'utiliser le théorème de Gauss. On applique le théorème de superposition pour calculer le potentiel créé par deux fils infinis.



1.



Calcul du champ électrostatique en trois étapes

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges (sources du champ), donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r :

$$\oint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint\limits_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h$$

Les trois surfaces formant (Σ) sont : (Σ_1) surface supérieure, (Σ_2) surface inférieure et (Σ_3) surface latérale. Le flux à travers la surface supérieure et la surface inférieure est nul car le champ électrostatique est orthogonal au vecteur élément de surface.



On ne peut pas prendre comme surface de Gauss un cylindre infini ! La surface de Gauss doit être une surface fermée. Le vecteur élément de surface doit être orienté vers l'extérieur.



Le point M est nécessairement à l'extérieur du fil. La charge intérieure est : $Q_{int} = \lambda h$.

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Interprétation physique :

Le champ électrostatique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

2. On en déduit directement le potentiel électrostatique à partir de la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$.

On considère un déplacement quelconque dans l'espace :

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

On a alors :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) = -E(r) dr$$

Soit :

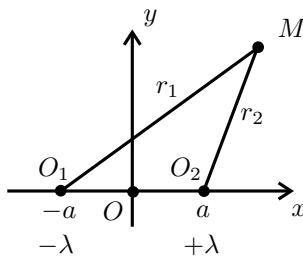
$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$$

On intègre la relation précédente :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + cte$$

La distribution est infinie. On ne peut donc pas choisir : $V(\infty) = 0$. L'énoncé ne précise pas la constante dans cette question.

3.



On applique le théorème de superposition.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 + cte' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + cte'$$

D'après l'énoncé, $V = 0$ si $r_1 = r_2$. On a donc :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Exercice 4.4 : Champ électrostatique entre deux plaques (MP-PT)

On considère un condensateur plan formé de deux plaques parallèles infinies et distantes de d . L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2 . On néglige les effets de bord.

1. Rappeler les équations de Poisson et de Laplace pour l'électrostatique.
2. Déterminer le potentiel et en déduire le champ électrostatique E qui règne entre les armatures de ce condensateur.
3. Ce condensateur est placé dans un milieu où règne une densité volumique de charges ρ uniforme. Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique.

Analyse du problème

On va utiliser une autre méthode que le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique. Avec l'équation de Poisson, on va calculer le potentiel. On pourra alors en déduire directement le champ électrostatique.



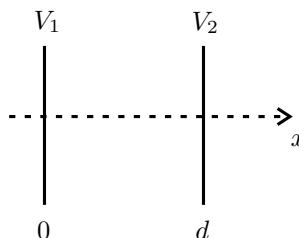
1. L'équation de Poisson en électrostatique s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Laplace pour l'électrostatique est le cas particulier où la densité volumique de charges est nulle :

$$\Delta V = 0$$

2.



On néglige les effets de bord (c'est-à-dire que l'épaisseur d est faible devant les dimensions des plaques considérées comme infinies). Dans ces conditions la distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_y et \vec{u}_z , donc V aussi. On en déduit que :

$$V = V(x)$$

Dans l'espace entre les plaques qui est vide de charge, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

En coordonnées cartésiennes, on a $\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$. On a donc : $V = Ax + B$.

Conditions aux limites

$V = V_1$ pour $x = 0$ et $V = V_2$ pour $x = d$.

On en déduit : $\begin{cases} V_1 = B \\ V_2 = Ad + B \end{cases}$ soit $A = \frac{V_2 - V_1}{d}$.

Finalement, on a :

$$V = \frac{-(V_1 - V_2)}{d}x + V_1$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{d} \vec{u}_x$$

Le champ est uniforme entre les armatures du condensateur.

3. Entre les armatures, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Une première intégration donne : $\frac{dV}{dx} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}x + C_1$.

Une deuxième intégration donne : $V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$.

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} V_1 = C_2 \\ V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{2} + C_1d + C_2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } C_1 = \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

On obtient :

$$V = \frac{-\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) x + V_1$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{V_2 - V_1}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_x$$

Exercice 4.5 : Capacité d'un câble coaxial (MP-PT)

Un câble coaxial est formé d'un conducteur cylindrique plein, de rayon R_1 , de charge Q , de longueur h , d'axe Oz , de potentiel $V_1 > 0$, entouré d'un conducteur cylindrique creux, de rayon intérieur R_2 , de charge $-Q$, de potentiel $V_2 = 0$. Le vide sépare les deux conducteurs. On néglige les effets de bord. On pose $U = V_1 - V_2$. La capacité C du câble coaxial est définie par $Q = CU$. On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

1. Exprimer le potentiel $V(r)$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ en fonction de U, r, R_1 et R_2 . En déduire le champ électrostatique \vec{E} .

2. En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrostatique en fonction de Q et h . En déduire la capacité C du câble coaxial.

- 3.** Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée et l'exprimer en fonction de C et U .
- 4.** On suppose que $R_2 = R_1 + e$, avec $e \ll R_1$. Déterminer dans ces conditions la capacité du condensateur.

Analyse du problème

On cherche à calculer la capacité d'un conducteur cylindrique. La démarche est guidée en calculant de deux façons le champ électrostatique.

Il faut savoir calculer l'énergie électrostatique à partir de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Si l'épaisseur est très faible devant le rayon des cylindres, on retrouve alors la formule du condensateur plan.



- 1.** La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z puisqu'on néglige les effets de bord. Le potentiel est donc aussi invariant par rotation et par translation donc : $V = V(r)$.

Dans le vide, le potentiel doit vérifier l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Comme V ne dépend que de r , on a :

$$\Delta V = 0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

soit $r \frac{dV}{dr} = A$. On sépare les variables : $dV = \frac{A}{r} dr$. En intégrant, on a $V = A \ln r + B$.

Conditions aux limites

On connaît le potentiel pour $r = R_1$ et $r = R_2$:

$$\begin{cases} U = A \ln R_1 + B \\ 0 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

On en déduit : $A = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$ et $B = 0 - A \ln R_2 = -\frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2$.

Finalement, $V = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln r - \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_2$, soit

$$V = \frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2}$$

On en déduit le champ électrostatique :

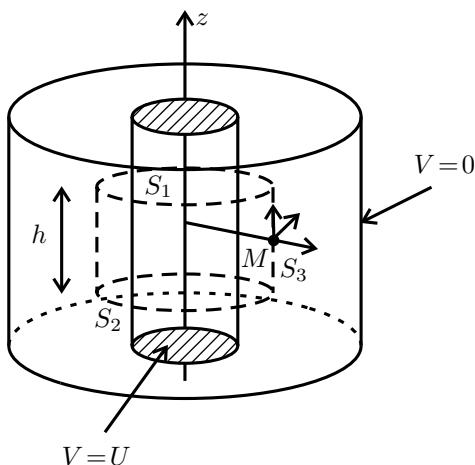
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

On a donc :

$$\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$$

On vérifie le signe positif de E_r si U est positif : le champ électrostatique est bien dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

2.



Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie pour les charges, donc $\vec{E} \in P \cap Q$, c'est-à-dire $\vec{E} // \vec{u}_r$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z , donc \vec{E} aussi.

Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée définie par S_1, S_2 et S_3 (traits en pointillés sur la figure).

Le flux à travers les surfaces S_1 et S_2 est nul. On a alors :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{S_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS_3 \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi rh\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

On a vu que $\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$. En comparant les deux expressions, on a :

$$\frac{Q}{2\pi rh\varepsilon_0} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On en déduit la capacité :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi h\varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3. L'énergie électrostatique est : $U_{el} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau$

On a vu que $\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$. Il faut intégrer z entre 0 et h , θ entre 0 et 2π

et r entre R_1 et R_2 . On en déduit :

$$\begin{aligned} U_{el} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{r^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} dr r d\theta dz \\ &= \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz \end{aligned}$$

Soit :

$$U_{el} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} 2\pi h = \frac{1}{2} \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} U^2$$

On retrouve le résultat de l'énergie emmagasinée par un condensateur :

$$U_{el} = \frac{1}{2} C U^2$$

4. On étudie le cas particulier où $\frac{R_2}{R_1} \ll 1$. On pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

On fait un développement limité au premier ordre :

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}.$$

On a donc $C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\frac{e}{R_1}}$, soit

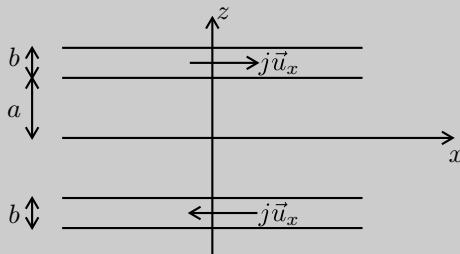
$$C \approx \frac{\varepsilon_0 S_1}{e}$$

On retrouve la formule du condensateur plan avec $S_1 = 2\pi R_1 h$.

Exercice 4.6 : Superposition de nappes de courant planes (MP-PT)

Soit D une distribution infinie de courants, constituée de deux couches planes parallèles, d'épaisseur b . Ces deux couches sont séparées par un interstice d'épaisseur $2a$. Elles sont parcourues par des courants volumiques uniformes et opposés $+j\vec{u}_x$ et $-j\vec{u}_x$ respectivement.

1. Question préliminaire : On considère une seule nappe de courants plane située en $z = 0$. Le courant surfacique uniforme est $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$. Déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.
2. Déterminer le champ magnétostatique de la distribution D en un point de l'axe $z = 0$ en utilisant la résultat de la question 1.
3. En déduire le champ magnétostatique de la distribution D en tout point de l'espace en appliquant le théorème d'Ampère.



Analyse du problème

La première question est une question de cours classique. Pour calculer le champ magnétostatique en $z = 0$, on considère qu'une couche de courants volumiques est la superposition de nappes de courants planes. Il faut savoir passer d'une distribution surfacique à une distribution volumique pour appliquer le théorème de superposition.

Cours : Calcul de champ magnétostatique

Il y a deux stratégies pour calculer le champ magnétostatique créé par une distribution de courants :

- **Stratégie n°1 :** Utilisation de la loi de Biot et Savart. Cette première stratégie se fait en trois étapes :
 - 1) Étude des symétries pour prévoir la direction du champ magnétostatique.
 - 2) Le champ magnétostatique créé par un élément de courant $d\vec{C}$ est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}_{K \rightarrow M}}{KM^2}$$

avec $d\vec{C} = I d\vec{l} = \vec{j}_s dS = \vec{j} d\tau$ suivant que la distribution est linéaire, surfacique ou volumique.

3) On projette $d\vec{B}$ et on intègre la projection.

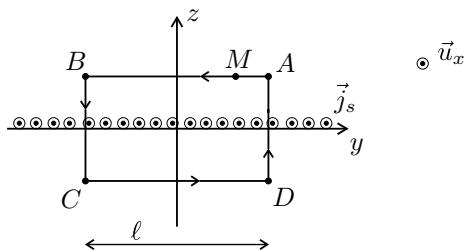
- **Stratégie n°2 :** Utilisation du théorème d'Ampère. Cette deuxième stratégie se fait en trois étapes :
 - 1) Étude des symétries.
 - 2) Étude des invariances.
 - 3) Application du théorème d'Ampère avec un contour Γ ferme et orienté :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Les calculs sont bien plus simples qu'avec la méthode 1 pour des distributions hautement symétriques. N'oubliez pas qu'il y a plusieurs cas pour calculer les courants enlacés : intérieur de la distribution, extérieur de la distribution, $z > 0$, $z < 0$...



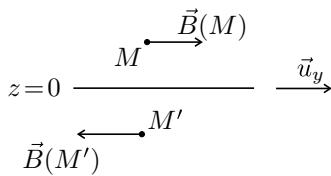
1. On considère une nappe de courants plane de vecteur densité surfacique de courants : $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_x$.



- La distribution de courants est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , les coordonnées du champ magnétostatique ne dépendent que de z .
- Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants, source du champ magnétostatique. Le champ \vec{B} est donc suivant \vec{u}_y .

Bilan : $\vec{B} = B(z) \vec{u}_y$.

- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



Le champ au point M' est l'opposé du symétrique du champ au point M :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M)) = -\vec{B}(M) = -B(z)\vec{u}_y$$

- On applique le théorème d'Ampère avec le contour $ABCD$ pour calculer le champ magnétostatique au point M avec $z > 0$.

Remarque

Le contour d'Ampère est orienté. Il faut faire attention aux signes lors du calcul de la circulation.

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B B(z) \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y = B(z) (y_B - y_A) = -B(z) \ell$$

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car le champ est orthogonal au déplacement } d\vec{l}$$

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C^D -B(z) \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y = -B(z) (y_D - y_C) = -B(z) \ell$$

car le champ en un point du segment $[CD]$ est $-B(z)\vec{u}_y$

$$\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car le champ est orthogonal au déplacement } d\vec{l}.$$



$$\int_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(z) \ell - B(z) \ell = \mu_0 j_s \ell$$

Si $z > 0$:

$$\vec{B} = -\mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y$$

On en déduit le champ magnétostatique dans la région $z < 0$:

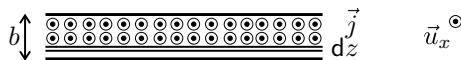
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{j_s}{2} \vec{u}_y$$

Remarque

On a bien une discontinuité du champ magnétostatique à la traversée de la surface de distribution puisqu'on a un distribution surfacique.

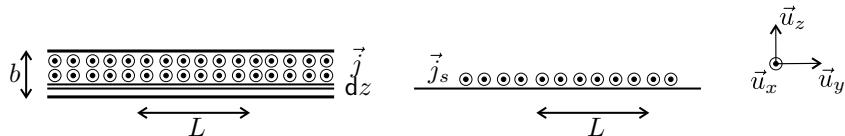


2. La distribution volumique de la région 1 (comprise entre a et $a + b$) est la superposition de plaques de courants d'épaisseur dz représentées sur le schéma ci-dessous :



Relation entre j , j_s et dz pour une plaque élémentaire :

On calcule le courant de deux façons pour une plaque élémentaire d'épaisseur dz :



- Distribution volumique : La surface perpendiculaire aux lignes de courant est dzL . On a alors : $I = jdzL$.
- Distribution surfacique : Le courant qui traverse la « ligne d'arrivée » L est $I = j_s L$.

On a donc $I = jdzL = j_s L$, soit :

$$j_s = jdz$$

Champ magnétique créé par la région 1 située entre $z = a$ et $z = a + b$:

Le champ magnétique créé par une plaque élémentaire d'épaisseur dz est :

$$dB_1 = \mu_0 \frac{j_s}{2} = \mu_0 \frac{jdz}{2}$$

Remarque : On a une contribution positive que l'on peut vérifier avec la règle de la main droite. Le point M est en dessous de la distribution volumique.



On intègre z entre a et $(a + b)$, d'où :

$$B_1 = \int_a^{a+b} \mu_0 \frac{jdz}{2} = \mu_0 \frac{jb}{2}$$

Champ magnétique créé par la région 2 située entre $z = -a - b$ et $z = -a$:

Le vecteur densité de courants de la région 2 est $-j\vec{u}_x$ mais comme le point M est au dessus de la région 2 alors le champ magnétique créé par une plaque élémentaire d'épaisseur dz est :

$$dB_2 = \mu_0 \frac{j dz}{2}$$

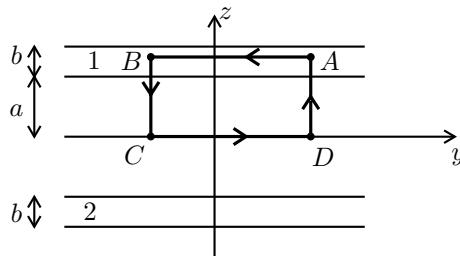
On intègre z entre $(-a - b)$ et $(-b)$, d'où :

$$B_2 = \int_{-a-b}^{-a} \mu_0 \frac{j dz}{2} = \mu_0 \frac{jb}{2}$$

Champ magnétique total en un point de l'axe $z = 0$:

$$\vec{B} = \mu_0 j b \vec{u}_y$$

3.



- La distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , les coordonnées du champ magnétostatique ne dépendent que de z .
- Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie. Le champ est donc suivant \vec{u}_y .

Bilan : $\vec{B} = B(z) \vec{u}_y$

- On applique le théorème d'Ampère avec le contour $ABCD$ avec $z > 0$:

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(z) l + \mu_0 j b l = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Si $0 \leq z \leq a$:

Le courant enlacé est nul. Le champ magnétostatique est :

$$B = \mu_0 j b$$

Si $a \leq z \leq b$:

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = jl(z-a)$. D'où :

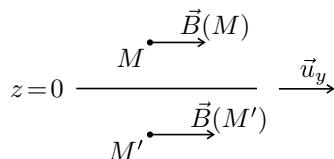
$$B = \mu_0 j(b-z+a)$$

Si $b \leq z$:

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = jlb$. D'où :

$$B = 0$$

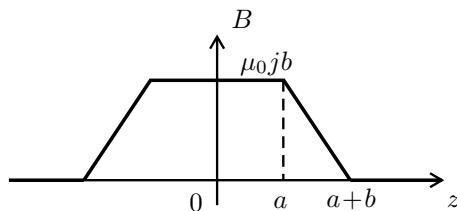
Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie.



On en déduit le champ au point M' en fonction du champ au point M :

$$\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M)) = \vec{B}(M)$$

Le graphe représentant B en fonction de z est donc une fonction paire.



Exercice 4.7 : Sphère en rotation (MP-PT)*

On considère une sphère isolante de rayon R , de centre O , chargée en surface avec la densité surfacique de charges σ uniforme. On la met en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Oz .

1. Calculer le champ créé par une spire circulaire parcourue par un courant I en un point de l'axe.

2. En déduire le champ magnétostatique $\vec{B}(O)$ créé au point O , centre de la sphère.

3. Calculer le moment magnétique \vec{M} de la sphère.

On rappelle que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

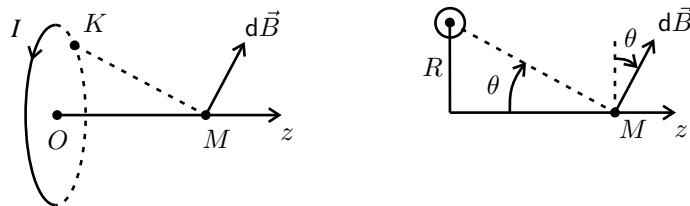
Analyse du problème

La première question est une question de cours classique. Vous devez connaître le résultat et être capable de le redémontrer très rapidement.

La deuxième question est plus délicate puisqu'on va décomposer la distribution en spires élémentaires parcourues par un courant dI . Il restera alors à intégrer toutes les contributions pour calculer le champ magnétostatique résultant.



1.



Tous les plans passant par M et contenant l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de courants, donc $\vec{B}(M)$ appartient à l'intersection des plans d'antisymétrie. On en déduit que $\vec{B}(M) // \vec{u}_z$.

La loi de Biot et Savart s'écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}_{K \rightarrow M}}{KM^2}$$

On calcule le champ magnétostatique \vec{B} dans la région $z > 0$. La projection sur l'axe Oz est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{KM^2} \sin \theta$$

On peut sortir KM et $\sin \theta$ de l'intégrale puisqu'ils sont constants quand on se déplace sur la spire pour décrire la distribution. Le champ résultant est :

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{KM^2} \sin \theta \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{KM^2} (\sin \theta) 2\pi R$$

Comme $\sin \theta = \frac{R}{KM}$, on en déduit que : $\frac{1}{KM^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$. On a donc :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.

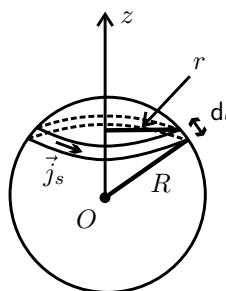
On a calculé le champ en M dans la région $z > 0$.

On en déduit immédiatement le champ en M' symétrique de M par rapport au plan $z = 0$. Ici $\vec{B}(M') = \vec{B}(M)$.

Pour une spire vue sous un angle 2θ , le champ créé sur l'axe est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

2.



On a des charges en surface qui tournent autour de l'axe Oz . On va décomposer la distribution en spires élémentaires parcourues par un courant dI . Soit un élément de longueur $dl = Rd\theta$. On a une spire de rayon $r = R \sin \theta$ parcourue par un courant $dI = j_s R d\theta$ avec $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$.

On a un mouvement circulaire uniforme : $v = r\omega = R \sin \theta \omega$. On a donc

$$dI = (\sigma v) Rd\theta = \sigma (R \sin \theta \omega) Rd\theta = \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta$$

D'après la première question, le champ créé par une spire parcourue par un courant dI est :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta)}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Il reste à intégrer θ entre 0 et π . D'après l'énoncé, $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$. On a donc :

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{4}{3} = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}$$

On obtient finalement :

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3} \vec{u}_z$$

3. La spire parcourue par un courant dI a un moment magnétique élémentaire :

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= S dI \vec{u}_z = (\pi r^2) (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta) \vec{u}_z \\ &= (\pi R^2 \sin^2 \theta) (\sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta) \vec{u}_z \end{aligned}$$

On a donc :

$$d\vec{M} = \pi R^4 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z$$

Il reste à intégrer θ entre 0 et π pour en déduire le moment magnétique :

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} \pi R^4 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z = \pi R^4 \sigma \omega \frac{4}{3} \vec{u}_z$$

On en déduit finalement :

$$\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \omega \vec{u}_z$$

Exercice 4.8 : Courants de Foucault dans un cylindre (MP-PT)

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } (\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. On admet $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$. Montrer que $\vec{E}(P) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$ en utilisant deux méthodes.
2. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$? Expliquer l'intérêt du feuillement pour la réalisation des transformateurs.

Analyse du problème

Le champ magnétique extérieur dépend du temps. Il va donc créer un champ électrique calculé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Il va y avoir naissance de courants induits dans le cylindre conducteur et donc une puissance dissipée par effet Joule.



1. L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet de calculer le champ électrique :

Méthode 1 :

On utilise le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial B}{\partial t} = B_0 \omega \sin (\omega t)$$

On peut écrire des dérivées droites car les fonctions ne dépendent que de r .

On a donc : $\frac{d(r E_\theta)}{dr} = r B_0 \omega \sin (\omega t)$, soit $d(r E_\theta) = r B_0 \omega \sin (\omega t) dr$.

On intègre : $r E_\theta = \frac{r^2}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) + C_1$,

d'où $E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) + \frac{C_1}{r}$.

Le champ est défini pour $r = 0$, donc $C_1 = 0$.

Remarque : On néglige le champ magnétique créé par les courants induits.



Méthode 2 :

La deuxième méthode consiste à calculer la circulation du champ électrique et d'appliquer le théorème de Stokes pour en déduire directement le champ électrique. On utilise le théorème de Stokes dans de nombreux domaines de la physique : théorème d'Ampère, écoulement rotationnel en mécanique des fluides (voir exercice sur le cyclone)...

On calcule la circulation de \vec{E} dans le cylindre sur un cercle de rayon r avec $0 \leq r \leq R$ car $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = E(r) 2\pi r = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

avec S une surface qui s'appuie sur le contour Γ et orientée par la règle de la main droite suivant \vec{u}_z .

On a donc : $E(r) 2\pi r = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = (B_0 \omega \sin (\omega t)) \pi r^2$, d'où :

$$E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t)$$

2. La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) \right)^2$$

On a donc :

$$dP_J = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin (\omega t) \right)^2 dr r d\theta dz$$

On intègre sur tout le cylindre : r varie entre 0 et R , z entre 0 et L et θ entre 0 et 2π .

On obtient :

$$P_J = \gamma \frac{R^4}{16} (B_0 \omega \sin (\omega t))^2 2\pi L$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle P_J \rangle = \gamma \frac{R^4}{16} B_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} 2\pi L = \frac{\gamma B_0^2}{16} \pi L (2\pi f)^2 \left(\frac{S_0}{\pi} \right)^2$$

puisque la moyenne de $\sin^2(\omega t)$ sur une période vaut $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2 S_0^2$$

3. On pose $K = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2$, soit $\langle P_J \rangle = K S_0^2$.

Si au lieu d'un seul conducteur, on utilise N conducteurs cylindriques de section S'_0 , la puissance dissipée par effet Joule est :

$$\langle P'_J \rangle = N (K S'_0)^2$$

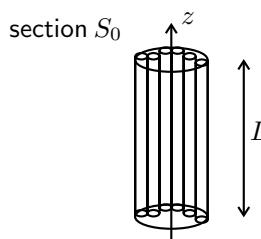
puisque la puissance totale est la somme des puissances moyennes dissipées dans chacun des conducteurs.

Comme $S'_0 = \frac{S_0}{N}$, on a :

$$\langle P'_J \rangle = N \left(K \frac{S_0^2}{N^2} \right) = \frac{\langle P_J \rangle}{N}$$

La puissance est divisée par N , d'où l'intérêt du feuillement pour la réalisation des transformateurs.

On représente sur le schéma ci-dessous quelques cylindres de surface S'_0 .



Exercice 4.9 : Cylindre, courants induits et ARQS (MP-PT)*

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L ($L \gg R$) et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. Montrer que le champ électrique se met sous la forme $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.
2. On a vu dans l'exercice précédent que $\vec{E} = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$. Calculer par trois méthodes le champ magnétique induit et montrer par une des trois méthodes que le champ magnétique induit est nul pour $r = R$.
3. Donner une condition pour que le champ magnétique induit soit négligeable devant B_0 .

Analyse du problème

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent. L'étude des symétries est assez délicate car le dispositif créant le champ extérieur n'est pas précisé dans l'énoncé et la cause du champ électrique est un courant dépendant du temps.



1. Le champ extérieur est $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. L'énoncé ne précise pas le dispositif qui crée le champ magnétique extérieur. Il peut être créé par exemple par un solénoïde infini parcouru par un courant $I(t)$ d'axe Oz .

Le champ magnétique créé par le solénoïde est alors :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$$

On peut l'identifier au champ :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Comme le champ magnétique dépend du temps, il va créer un champ électrique.

Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \in P$.

Le plan $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \perp Q$.

La distribution de courants circulant dans le solénoïde est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz . Les coordonnées de \vec{E} ne dépendent pas de r et de θ .

Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.

Remarque : on vérifie que \vec{B} est colinéaire à \vec{u}_z puisque $\vec{B}(M) \perp P$.

On a vu dans l'exercice précédent comment calculer le champ électrique par deux méthodes.

Cours : Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à négliger les phénomènes de propagation : il faut étudier les phénomènes physiques à des distances des sources très inférieures à la longueur d'onde dans la vide.

On peut montrer que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère.

On a les mêmes équations qu'en régime indépendant du temps sauf pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Le champ électrique n'est pas à circulation conservative contrairement à ce qui se passe en régime stationnaire (voir chapitre sur l'induction).



2. On se place dans le cadre de l'ARQS. Le champ électrique crée un courant de conduction, noté \vec{j}_{induit} :

$$\vec{j}_{\text{induit}} = \gamma \vec{E} = \gamma E(r) \vec{u}_\theta$$

Tout se passe comme si on avait des spires d'axe Oz parcourues par un courant.

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ source du champ magnétique induit \vec{B}_i est un plan de symétrie, donc $\vec{B}_i(M) \perp P$ et $\vec{B}_i(M) / \vec{u}_z$.
- La distribution de courants source de \vec{B}_i est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz .
- Bilan : $\vec{B}_i = B_i(r) \vec{u}_z$.

Il y a trois méthodes pour calculer le champ magnétique induit \vec{B}_i :



Dans le cadre de l'ARQS, le calcul du champ magnétique induit se fait à partir de l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}}$.



Méthode 1 :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\vec{\text{rot}} \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} = \mu_0 \gamma \vec{E}$.

$$\text{On a donc : } -\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} = \mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t).$$

Comme le champ B_i ne dépend que de r , on peut séparer les variables :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) dr$$

L'intégration donne : $B_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$.

On va démontrer avec la méthode 3 que : $B_i(r=R)=0$. On a donc :

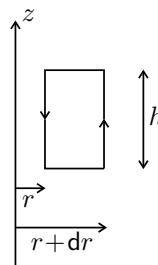
$$B_i(r=R) = 0 = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 R^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$$

On en déduit que :

$$B_i(r) = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 (r^2 - R^2) \omega}{4} \sin(\omega t)$$

Méthode 2 :

On applique le théorème d'Ampère à un rectangle de largeur dr et de hauteur h .



$$B_i(r+dr)h - B_i(r)h = - \iint_S \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} \cdot \vec{dS} = -\mu_0 \gamma E dr h$$

car dr est un infiniment petit.

On a donc :

$$\frac{dB_i}{dr} dr = -\mu_0 \gamma E dr$$

D'où :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) dr$$

On retrouve le même calcul qu'avec la méthode 1.

Méthode 3 :

On considère qu'on a une superposition de solénoïdes infinis puisqu'on néglige les effets de bord. Le champ créé par un solénoïde infini parcouru par des courants surfaciques est : $\mu_0 j_S \vec{u}_z$.

Il faut passer de l'approximation surfacique à l'approximation volumique :

$$j_S dz = j_{\text{induit}} dr dz$$

$$\text{On a donc : } dB_i = \mu_0 j_{\text{induit}} dr = \mu_0 \gamma E dr = \mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) dr.$$

On intègre entre r et R pour calculer la somme de toutes les contributions. En effet, les solénoïdes situés entre 0 et r créent à l'extérieur un champ nul.

On obtient :

$$B_i(r) = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 (r^2 - R^2) \omega}{4} \sin(\omega t)$$

Remarque : On démontre par cette méthode que le champ magnétique induit est nul pour $r = R$.



3. Pour que le module de \vec{B}_i reste inférieur à B_0 , il faut que $\mu_0 \gamma \omega \frac{B_0 R^2}{4} \ll B_0$ puisque le champ magnétique induit est maximal pour $r = 0$. On doit avoir :

$$R \ll \frac{2}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On a vu dans l'exercice sur l'effet de peau que l'épaisseur de peau est

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

On doit donc avoir :

$$R \ll \sqrt{2} \delta$$

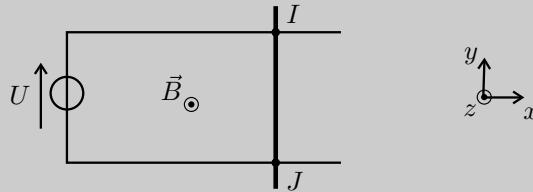
5

Induction électromagnétique

Exercice 5.1 : Rail de Laplace (MP-PT)

On considère une tige métallique de longueur $\ell = IJ$ pouvant se déplacer sur l'axe Ox . Elle glisse sans frottement sur des rails électriques. Le dispositif est placé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Le générateur de tension délivre une tension constante U . La résistance totale du circuit est notée R et ne dépend pas de la position sur les rails. La tige est immobile à $t = 0$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

1. Déterminer la vitesse de la tige et l'intensité du courant électrique circulant dans le circuit en fonction du temps.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.



Analyse du problème

Le générateur de tension U créé un courant électrique. La tige métallique est parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique stationnaire. Elle subit donc une force de Laplace qui la met en mouvement. On a alors une variation du flux magnétique. C'est un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une fem d'induction. La loi de Lenz est une loi de modération : les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

On néglige le champ magnétique induit devant le champ magnétique extérieur. Pour en tenir compte, il faudrait rajouter l'inductance propre L du circuit que l'on néglige dans l'exercice.

Cours : Un phénomène d'induction apparaît lorsqu'il y a une variation du flux du champ magnétique.

Loi de Faraday et équations de Maxwell

Sauf indication contraire, on se placera dans la cadre de l'ARQS pour les exercices d'induction en l'absence d'accumulation de charges.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Le champ électrique est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ est la forme intégrée de la relation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Etude des conducteurs filiformes

Il faut d'abord orienter le conducteur (éventuellement les conducteurs s'il y a plusieurs noeuds).

Pour tenir compte du phénomène d'induction, on rajoute pour chaque conducteur **une force électromotrice d'induction e en convention générateur**.

On note Φ le flux du champ magnétique à travers le conducteur. La force électromotrice se calcule avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

On va étudier d'autres possibilités pour calculer la fem d'induction.

On redessine alors le schéma électrique équivalent en ayant rajouté pour chaque conducteur la fem d'induction en convention générateur.

Remarque : Si on étudie des conducteurs volumiques, on utilisera la relation de Maxwell-Faraday.

On rencontre deux cas dans les exercices :

- Induction de Lorentz : Le champ magnétique ne dépend pas du temps (on dit qu'il est stationnaire) et le circuit est mobile.
- Induction de Neumann : Le champ magnétique dépend du temps et le circuit est fixe.

a) Induction de Lorentz

Le calcul de la fem d'induction peut se faire par deux méthodes. On utilisera la méthode la plus simple dans les exercices.

- **Méthode 1** : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

en notant \vec{v}_e la vitesse d'entraînement du conducteur. La fem d'induction est :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

en faisant attention que \vec{dl} est orienté dans le même sens que le circuit. Il faut faire le tour du circuit.



Interpréter qualitativement le signe de e en utilisant la règle de la main droite et l'orientation de $d\vec{l}$.

- **Méthode 2** : On calcule le flux du champ magnétique à travers une surface :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$
. La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

b) Induction de Neumann

Le calcul de la fem d'induction peut se faire par deux méthodes. On utilisera la méthode la plus simple dans les exercices.

- **Méthode 1** : On calcule le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$ avec S une surface qui s'appuie sur le contour orienté. On calcule la fem avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- **Méthode 2** : Le champ électromoteur est :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On oriente \vec{dl} un vecteur élément de longueur du conducteur dans le même sens que le circuit. La fem d'induction est :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

Interprétation physique

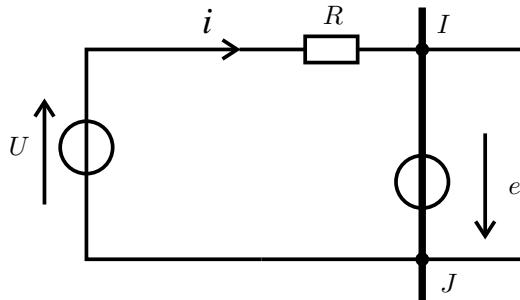
Ne pas oublier d'interpréter physiquement avec la loi de Lenz qui est une loi de modération : **Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.**



1. Équation électrique :

On oriente arbitrairement le circuit.

Comme on a un phénomène d'induction, il faut rajouter en série sur le tronçon IJ une force électromotrice d'induction e en convention générateur. On obtient le schéma électrique :



L'orientation du circuit sert à l'orientation du vecteur \vec{dl} utilisé pour calculer la circulation de \vec{E}_m , à l'orientation du vecteur élément de surface pour le calcul du flux magnétique et dans l'expression de la force de Laplace.

Il ne faut pas oublier que e est toujours orienté en convention générateur.



La loi des mailles s'écrit :

$$U = Ri - e$$

Il y a deux méthodes pour calculer la fem d'induction e :

- **Méthode 1 :** $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_I^J \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

$d\vec{l}$ est orienté dans le même sens que le circuit. Soit O un point fixe du circuit. Le référentiel absolu $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est galiléen et le référentiel relatif $\mathfrak{R}' = (I; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est non galiléen. La vitesse d'entraînement de la tige est $v\vec{u}_x$.

Pour la tige, on a :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y$$

On en déduit :

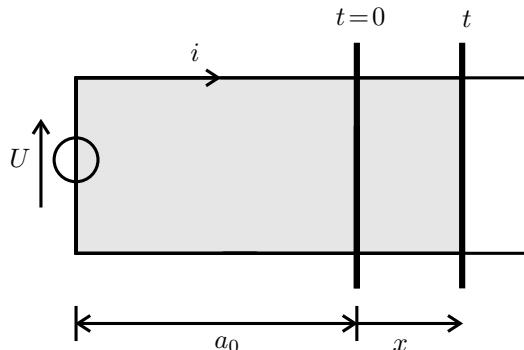
$$e = \int_I^J -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -vB(y_J - y_I)$$

D'où

$$e = vB\ell$$

- **Méthode 2 :** La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Le flux du champ magnétique est défini par :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est orienté avec la règle de la main droite dans le sens de i .

On a donc : $\Phi = -BS$.

Sur le schéma, on a représenté la tige à $t = 0$ et à un instant t . On appelle x le déplacement de la tige. À un instant t , la surface S vaut $\ell(a_0 + x)$. On a donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$



De nombreuses erreurs sont commises avec la circulation du champ électromoteur. La circulation est bien positive car \vec{E}_m et $d\vec{l}$ sont dans le même sens. Il ne faut pas écrire $d\vec{l} = dy\vec{u}_y$ et intégrer entre 0 et ℓ !



Équation mécanique :

Bilan des forces sur la tige :

- Poids appliqué au barycentre G .
- Il n'y a pas de frottement. La réaction du rail en I et J est donc orthogonale au déplacement, c'est-à-dire orthogonal à \vec{u}_x .
- Force de Laplace :

$$\vec{F} = \int_I^J i d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_I^J i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i B [y]_I^J \vec{u}_x = -i B \ell \vec{u}_x$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la tige dans le référentiel galiléen $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$. On projette sur \vec{u}_x , d'où

$$m\ddot{x} = -i\ell B$$

Équations couplées :

On obtient deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} U = Ri - e = Ri - Bv\ell \\ m\dot{v} = -i\ell B \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$ que l'on réinjecte dans la première équation. On a alors : $U = -R\frac{m\dot{v}}{\ell B} - Bv\ell$, soit

$$\dot{v} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = -\frac{\ell B}{mR}U$$

On définit la constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

Interprétation physique : On a toujours des signes + dans l'équation homogène quelque soit le signe de B . C'est à tout à fait normal puisque la loi de Lenz est une loi de modération. Un terme en B au lieu de B^2 serait aberrant.

La solution de l'équation différentielle est :

$$v = A \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \frac{U}{B\ell}$$

D'après l'énoncé, $v = 0$ pour $t = 0$. On a donc : $0 = A - \frac{U}{B\ell}$

On obtient finalement :

$$v = -\frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

Comme $U = Ri - Bv\ell$, on en déduit l'intensité i :

$$i = \frac{U}{R} + \frac{Bv\ell}{R} = \frac{U}{R} - \frac{B\ell}{R} \frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right) = \frac{U}{R} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Remarque

On peut également en déduire l'intensité à partir de la relation :

$$i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$$



L'intensité i vaut $\frac{U}{R}$ à $t = 0$, ce qui est prévisible puisque la fem d'induction est nulle à $t = 0$. L'intensité décroît et tend vers 0 ce qui est conforme à la loi de Lenz qui est une loi de modération. La cause de l'induction est la tension U qui crée un courant. L'effet de l'induction est de créer une fem e qui annule la tension U et on n'a plus de courant dans le circuit.

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie la loi des mailles par l'intensité i et le théorème de la quantité de mouvement par la vitesse v .

On obtient alors :

$$\left| \begin{array}{l}Ui = Ri^2 - ei = Ri^2 - Bv\ell i \\ m\frac{dv}{dt}v = -i\ell Bv\end{array}\right.$$

D'où en éliminant le terme de couplage :

$$Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)$$

La puissance fournie par le générateur sert à dissiper de la puissance dans la résistance et à faire varier l'énergie cinétique de la tige.

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$P_{\text{méca}} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -i\ell B \vec{u}_x \cdot v \vec{u}_x = -i\ell B v$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = Bv\ell i$$

On en déduit que :

$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

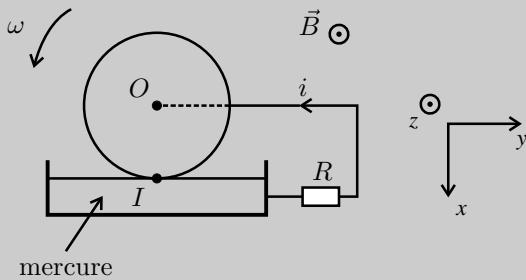
$P_{\text{élec}} = ei = Bv\ell i$ représente algébriquement la puissance fournie par le fem d'induction puisqu'on est en convention générateur. Ici $P_{\text{élec}}$ est négatif. La fem d'induction reçoit donc de l'énergie du circuit électrique. Cette puissance reçue du circuit électrique est donc intégralement transmise à la force de Laplace.

Exercice 5.2 : Roue de Barlow (MP-PT)

On considère une roue de Barlow constituée d'un disque homogène de centre O , de rayon a et de moment d'inertie J par rapport à son axe horizontal. La liaison pivot est supposée parfaite. On relie la roue à un circuit électrique aux points O et I . La résistance totale du circuit est notée R . Le dispositif est placé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

À $t = 0$, la vitesse angulaire de la roue est ω_0 .

1. Déterminer la vitesse angulaire ω et l'intensité i en fonction du temps.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.

**Analyse du problème**

La roue est lancée à la vitesse angulaire ω_0 à $t = 0$. On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique stationnaire. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). La cause est la mise en rotation de la roue. On va donc observer un ralentissement de la roue. On peut prévoir qu'au bout d'un certain temps, la roue va finir par s'arrêter.

On utilisera le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ pour calculer la force électromotrice d'induction. Le calcul est beaucoup plus facile qu'avec la loi de Faraday.

**1. Équation électrique :**

L'orientation du circuit est déjà imposée par le sens du courant.

On néglige l'inductance propre du circuit d'après l'énoncé. Pour tenir compte de l'induction, on rajoute la force électromotrice d'induction e **en convention générateur en série sur la partie OI** .

Remarque : On admet que l'intensité est entièrement concentrée le long du rayon OI . Si on tient compte de la répartition sur la surface de la roue, on peut montrer que l'on obtient le même résultat.

La force électromotrice d'induction est :

$$e = \int_O^I (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl}$$

La vitesse d'entraînement d'un point du segment est $x\omega\vec{u}_y$.

On utilise la formule du mouvement circulaire : $r\omega \vec{u}_\theta$.

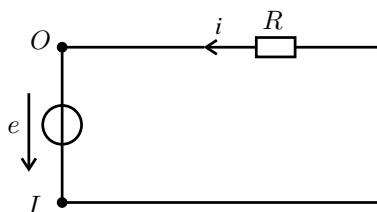


Pour décrire le segment, x varie de 0 à a . Le déplacement élémentaire est : $dx \vec{u}_x$.

On a alors :

$$e = \int_0^a B\omega x \, dx = B\omega \frac{a^2}{2}$$

On obtient le circuit électrique équivalent :



L'équation électrique s'écrit :

$$e = Ri = B\omega \frac{a^2}{2}$$

Équation mécanique :

On va appliquer le théorème de moment cinétique en projection sur l'axe Oz pour le disque en rotation autour d'un axe fixe Oz dans le référentiel lié au laboratoire $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- Le moment de l'action de liaison pivot est nul puisque la liaison pivot est parfaite.
- Les forces de pesanteur sont équivalentes pour un solide à une force unique appliquée en G . Le moment est nul car G est confondu avec le point O .
- Pour calculer le moment des forces de Laplace, on considère un élément $d\vec{l}$ de circuit orienté par le courant i . Le moment élémentaire de la force de Laplace est :

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(i \, d\vec{l} \wedge \vec{B} \right) = x \vec{u}_x \wedge (i dx \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z) \\ &= -i B x dx \vec{u}_z \end{aligned}$$

Il reste à intégrer entre 0 et a (dans le sens de i) :

$$\vec{\Gamma} = - \int_0^a i B x dx \vec{u}_z = -i B \frac{a^2}{2} \vec{u}_z$$

Remarque : On peut remarquer que la résultante des forces de Laplace est équivalente à une force unique appliquée au milieu de $[OI]$ puisque les forces de Laplace sont réparties uniformément sur le segment $[OI]$.



Le théorème du moment cinétique s'écrit en projection sur Oz :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -iB \frac{a^2}{2}$$

On obtient deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} Ri = B\omega \frac{a^2}{2} \\ J \frac{d\omega}{dt} = -iB \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

On obtient en remplaçant le courant dans l'équation mécanique :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B^2 a^4}{4RJ} \omega = 0$$

On pose :

$$\tau = \frac{4RJ}{B^2 a^4}$$

Interprétation physique : Plus J est grand, plus l'inertie du système est grande. Plus B est grand, plus le système réagit rapidement. C'est tout fait à fait normal d'avoir un terme en B^2 puisque le fait de changer B en $-B$ ne va pas faire diverger le système ! La loi de Lenz est une loi de modération. Plus R est grand, plus la constante de temps est grande.

La résolution de l'équation différentielle donne :

$$\omega(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

À $t = 0$, $\omega = \omega_0$. On a donc :

$$\omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Comme $Ri = B\omega \frac{a^2}{2}$, on en déduit :

$$i(t) = \frac{Ba^2 \omega_0}{2R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Au bout de quelques τ , l'intensité tend vers zéro et la vitesse angulaire s'anule. C'est bien conforme à loi de Lenz qui est une loi de modération. La cause de l'induction est le mouvement de la roue. L'effet du courant est de créer un couple qui va s'opposer au mouvement de la roue.

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie la loi des mailles par i et le théorème du moment cinétique par ω .

On obtient :

$$\left| \begin{array}{l} ei = B\omega \frac{a^2}{2} i = Ri^2 \\ J \frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{d(\frac{1}{2} J \omega^2)}{dt} = -i B \frac{a^2}{2} \omega \end{array} \right.$$

On a donc en éliminant le terme de couplage :

$$-\frac{d(\frac{1}{2} J \omega^2)}{dt} = Ri^2$$

L'énergie cinétique perdue par la tige est reçue par la résistance (cette énergie est en fait dissipée sous forme d'effet Joule).

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$P_{\text{méca}} = \Gamma \omega = -i B \frac{a^2}{2} \omega$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = B\omega \frac{a^2}{2} i$$

On en déduit que :

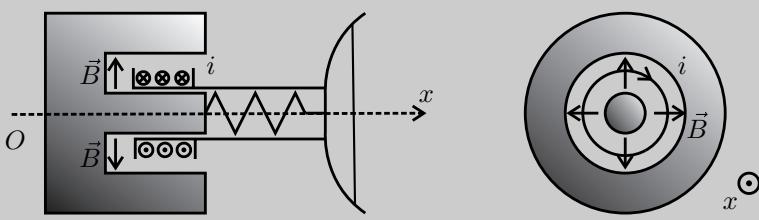
$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

Exercice 5.3 : Haut Parleur (MP-PT)

On considère un haut-parleur constitué d'un aimant permanent créant un champ magnétique stationnaire radial, d'une membrane solidaire d'une bobine soumise à une tension $u(t)$. La bobine est caractérisée par ℓ la longueur totale de fil, R la résistance et L l'inductance propre. On appelle m la masse du dispositif mobile. Il est relié au bâti par un ressort de constante de raideur k . On appelle x le déplacement du dispositif mobile par rapport à la position d'équilibre et on néglige les frottements solides. Lors de son déplacement dans l'air, la membrane crée une onde acoustique et subit une force de frottement fluide $-\lambda \vec{v}$.

1. Déterminer les deux équations différentielles reliant $u(t), i(t)$ et $v(t)$.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.
4. La tension $u(t)$ est de la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé. Exprimer l'impédance du haut-parleur sous la forme $Z = R + jL\omega + Z_{am}$ dans laquelle Z_{am} dépend de B, ℓ, λ, m, k et ω .

**Analyse du problème**

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique stationnaire. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz).

On utilisera le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ pour calculer la force électromotrice d'induction. Le calcul est beaucoup plus facile qu'avec la loi de Faraday.

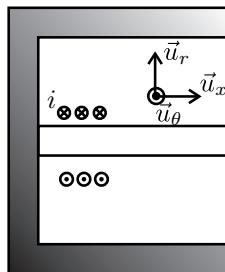


1. On considère la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$ orthonormée directe. Le champ magnétique est $\vec{B} = B \vec{u}_r$.

Équation électrique :

Le champ électromoteur de Lorentz est :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \dot{x} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_r = \dot{x} B \vec{u}_\theta$$



On note a le rayon d'une spire. La circulation du champ électromoteur sur une spire est :

$$\int_{\theta=0}^{-2\pi} \dot{x} B \vec{u}_\theta \cdot (ad\theta) \vec{u}_\theta = -2\pi a \dot{x} B$$



Attention aux erreurs de signes. Il faut intégrer entre 0 et -2π à cause de l'orientation du courant.

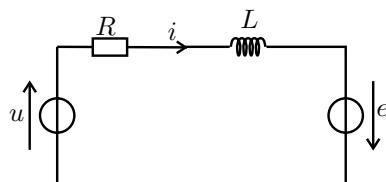


Il reste à multiplier par N le nombre de spires pour en déduire la force électromotrice d'induction. D'après l'énoncé, on a $\ell = N2\pi a$.

On obtient :

$$e = -\dot{x} B \ell$$

Pour tenir compte de l'induction, on rajoute la force électromotrice d'induction e en convention générateur. Le schéma électrique équivalent est :



La loi des mailles s'écrit :

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - e = Ri + L \frac{di}{dt} + \dot{x} B \ell$$

Équation mécanique :

Le système étudié est la masse m . Le référentiel terrestre $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est galiléen.

Bilan des forces :

- Force de Laplace élémentaire :

$$\overrightarrow{df} = i \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = ia d\theta \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -ia B d\theta \vec{u}_x$$

On intègre entre 0 et -2π pour déterminer la force de Laplace qui s'exerce sur une spire :

$$\vec{f}_L = i2\pi aB \vec{u}_x$$

On en déduit la force de Laplace qui s'exerce sur les N spires :

$$\vec{f}_L = Ni2\pi aB \vec{u}_x = i\ell B \vec{u}_x$$

- Force exercée par le ressort : $\vec{f}_{\text{ressort}} = -k(L - L_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$. La longueur à l'équilibre est égale à la longueur à vide L_0 . L'allongement du ressort est x .
- Force de frottement fluide : $\vec{f}_{\text{frot}} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

On applique le théorème de la quantité de mouvement en projection sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x} + i\ell B$$

2. Pour effectuer un bilan de puissance, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\begin{cases} ui = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + B\ell vi \\ m\ddot{x}v = -kxv - \lambda v^2 + i\ell Bv \end{cases}$$

En faisant la différence des équations, on a :

$$ui = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} + m\ddot{x}v + kxv + \lambda v^2$$

Soit :

$$ui = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right) + \lambda v^2 + Ri^2$$

La puissance fournie par le générateur sert à faire varier l'énergie magnétique de la bobine et l'énergie mécanique du dispositif mobile, à dissiper de la puissance dans la résistance et par la force de frottement.

Le terme λv^2 est la grandeur utile pour le haut-parleur puisqu'elle crée une onde acoustique.

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$F_L v = i\ell Bv$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$ei = -vB\ell i$$

On en déduit que :

$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

4. On utilise les amplitudes complexes :

$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t) \\ \underline{U} = U_m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \\ \underline{I} = I_m \exp(j\phi) \end{cases}$$

Les équations électrique et mécanique s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \underline{V}B\ell \\ mj\omega\underline{V} = -k \frac{\underline{V}}{j\omega} - \lambda\underline{V} + \underline{I}\ell B \end{cases}$$

De la deuxième équation, on a : $\underline{V} \left(\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) = \underline{I}B\ell$, soit :

$$\underline{V} = \underline{I} \frac{B\ell}{\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$$

En réinjectant dans la première équation, on a :

$$\underline{U} = \left\{ R + jL\omega + \frac{B^2\ell^2}{\lambda + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \right\} \underline{I}$$

On pose :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{a,m}$$

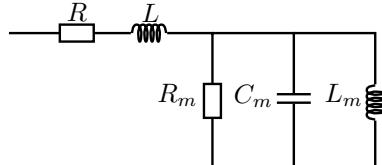
L'impédance du haut-parleur est l'association série de deux impédances :

- Impédance électrique : $\underline{Z}_e = R + jL\omega$
- Impédance acoustico-mécanique ou impédance motionnelle : $\underline{Z}_{a,m}$.

L'admittance motionnelle est :

$$\underline{Y}_{a,m} = \frac{1}{\underline{Z}_{a,m}} = \frac{\lambda}{B^2\ell^2} + \frac{jm\omega}{B^2\ell^2} + \frac{k}{j\omega B^2\ell^2} = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$

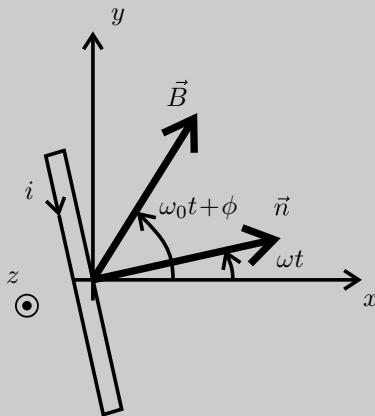
On a alors le schéma électrique équivalent :



Le comportement électrique du haut-parleur dépend donc de la fréquence. Dans la pratique, on utilise plusieurs haut-parleurs suivant les gammes de fréquence.

Exercice 5.4 : Moteur asynchrone (MP-PT)

Une bobine plate fermée sur elle même, de surface totale S , de résistance R et d'inductance L est mobile autour d'un axe Δ . Elle est placée dans un champ magnétique uniforme, de module constant B , tournant autour du même axe à la vitesse angulaire constante ω_0 . La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse angulaire ω . On suppose qu'un régime permanent est atteint pour lequel la bobine tourne à une vitesse angulaire constante avec un retard de phase initial ϕ sur le champ tournant. On pose $\Omega = \omega_0 - \omega$.



- Déterminer le courant $i(t)$ dans la bobine après amortissement du régime transitoire en précisant sa valeur efficace et son retard de phase ψ sur la force électromotrice d'induction.
- Donner les expressions du couple instantané Γ et du couple moyen C agissant sur la bobine. Étudier les variations de C en fonction de ω . Calculer sa valeur C_0 pour $\omega = 0$, sa valeur maximale C_m et la valeur ω_m correspondante. Dans quelles conditions a-t-on un fonctionnement moteur ?
- Dans quelles conditions le fonctionnement moteur est-il stable ? Le moteur peut-il démarrer seul ?

Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique dépendant du temps. On a un phénomène d'induction avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). On utilise la loi de Faraday pour calculer la fem d'induction. Cette méthode est à privilégier dans le cas d'une spire en rotation.



1. L'angle entre le vecteur normal à la bobine et le champ magnétique vaut :

$$\left(\vec{n}, \vec{B} \right) = \omega_0 t + \phi - \omega t$$

On a un phénomène d'induction avec un circuit mobile et un champ magnétique dépendant du temps. La force électromotrice d'induction s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos ((\omega_0 - \omega)t + \phi)$$

Remarque : La bobine de rayon R est constituée de N spires. La surface totale vaut alors :

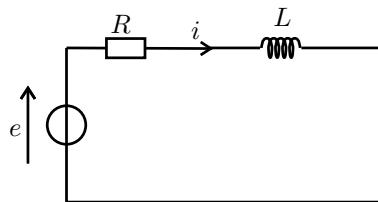
$$S = N\pi R^2$$



D'où

$$e = (\omega_0 - \omega) BS \sin ((\omega_0 - \omega)t + \phi) = BS\Omega \sin (\Omega t + \phi)$$

L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

On travaille en régime sinusoïdal forcé. On utilise la notation complexe, ce qui revient à remplacer $\sin()$ par $\exp(j\cdot)$.

D'après l'énoncé, on appelle ψ le retard de phase de i sur e . On a donc :

$$\begin{cases} i(t) = I_m \sin(\Omega t + \phi - \psi) \\ \underline{i} = I_m \exp(j(\Omega t + \phi - \psi)) \end{cases}$$

En notation complexe, la loi des mailles s'écrit :

$$(R + jL\Omega)\underline{i} = BS\Omega \exp(j(\Omega t + \phi))$$

D'où :

$$\underline{i} = \frac{BS\Omega}{R + jL\Omega} \exp(j(\Omega t + \phi))$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \\ \arg(\underline{i}) = \Omega t + \phi - \psi = \Omega t + \phi - \arg(R + jL\Omega) \end{cases}$$

soit :

$$\psi = \arg(R + jL\Omega)$$

On a donc :

$$I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} ; \tan \psi = \frac{L\Omega}{R} \text{ et } \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} > 0$$

Interprétation physique : L'angle ψ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. i est toujours en retard de phase sur e . C'est normal, puisqu'on a un circuit inductif.

2. Le moment des forces de Laplace est : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

$\vec{\Gamma}$ est colinéaire à \vec{u}_z . On écrit par la suite : $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$.



Il faut utiliser la notation réelle car on a le produit de deux fonctions sinusoïdales.



$\Gamma = MB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t)$ avec $M = iS$.

On a alors :

$$\Gamma = iSB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t)$$

$$= BS \sin(\Omega t + \phi) \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi - \psi)$$

Or $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b))$. On a donc :

$$\Gamma = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \{-\cos(2\Omega t + 2\phi - \psi) + \cos(\psi)\}$$

La valeur moyenne du couple vaut donc :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \cos(\psi)$$

On a vu que $\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$. D'où :

$$C = \langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega R}{2(R^2 + L^2 \Omega^2)}$$

On a un couple moteur si $\Omega > 0$, c'est-à-dire $\omega_0 > \omega$.

Pour étudier la courbe de C en fonction de ω , il faut calculer la dérivée de C par rapport à ω . On pose :

$$f(\omega) = \frac{\omega_0 - \omega}{1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}}$$

La dérivée de f par rapport à ω est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}\right) - (\omega_0 - \omega) \left(\frac{-2L^2}{R^2}(\omega_0 - \omega)\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2} &= (\omega_0 - \omega)^2 \frac{2L^2}{R^2} \Leftrightarrow (\omega_0 - \omega)^2 \frac{L^2}{R^2} = 1 \\ \Leftrightarrow \omega - \omega_0 &= \pm \frac{R}{L} \end{aligned}$$

La valeur minimale est obtenue pour $\omega = \omega_0 + \frac{R}{L}$. La valeur maximale est obtenue pour $\omega = \omega_0 - \frac{R}{L}$. La valeur maximale du couple est :

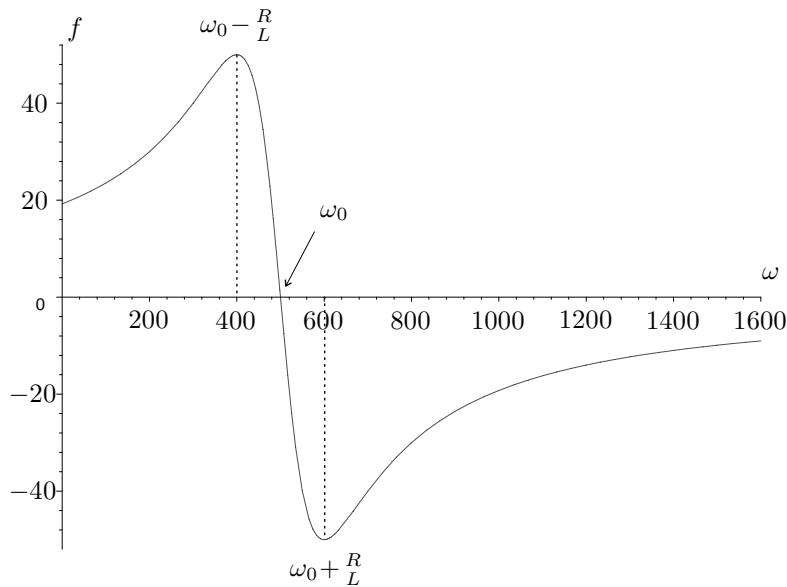
$$C_m = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\frac{R}{L}}{1 + \frac{L^2(\frac{R}{L})^2}{R^2}} = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\frac{R}{L}}{2}$$

D'où :

$$C_m = \frac{B^2 S^2}{4L}$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow 0, C = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\omega_0}{1 + \frac{L^2 \omega_0^2}{R^2}} = C_0.$$

On en déduit la courbe représentant f en fonction de ω .



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



Interprétation physique

On a un fonctionnement moteur si $0 \leq \omega < \omega_0$.

La vitesse de rotation du rotor (bobine) est inférieure à celle du champ tournant.

En régime permanent, on a en moyenne :

$$0 = \langle \Gamma \rangle + \langle \Gamma_r \rangle$$

soit $0 = C + C_r$ en appelant C_r le couple moyen résistant avec $C_r < 0$.

3. Supposons qu'à cause d'une perturbation, $|C_r|$ augmente, la bobine est freinée, donc ω diminue.

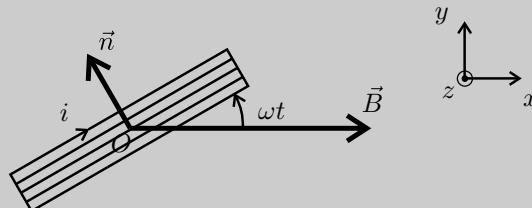
D'après la courbe :

- Si $\omega_0 - \frac{R}{L} < \omega < \omega_0$, C augmente, ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc stable.
- Si $0 < \omega < \omega_0 - \frac{R}{L}$, C diminue, ce qui a pour effet de diminuer la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc instable.

Le moteur asynchrone peut démarrer seul à condition que le couple de frottement en valeur absolue soit inférieur à C_0 . Les T.G.V. Eurostar et Thalys sont équipés de moteurs asynchrones.

Exercice 5.5 : Alternateur d'une éolienne (MP-PT)

Le disque éolien entraîne, par un système de démultiplication, une bobine plate en rotation autour de l'axe Oz . La bobine a une résistance r , une inductance L et elle est fermée sur une résistance R_0 . On pose $R = r + R_0$. Elle comporte N spires de surface s et se déplace dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$.



1. L'éolienne tourne à vitesse angulaire constante ω . En régime sinusoïdal forcé, l'intensité i est de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Déterminer I_m et ϕ .
2. Quelle est la valeur moyenne du moment $\vec{\Gamma}'$ des forces de Laplace subi par la bobine ?
3. Le moteur éolien a une puissance moyenne P . Représenter, sur un même diagramme, le moment $\|\vec{\Gamma}\|$ du couple moteur et $\|\langle\vec{\Gamma}'\rangle\|$, en fonction de ω .
4. A $t = 0$, la vitesse angulaire est nulle et on débloque l'éolienne. Analyser qualitativement le régime transitoire. Déterminer la vitesse angulaire ω_0 en régime permanent et montrer que P doit rester inférieure à une puissance critique notée P_c . Ce régime est-il stable ?

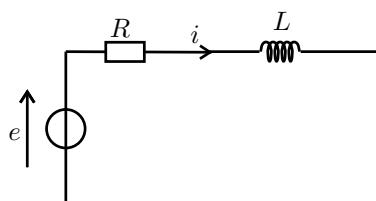
Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique constant. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz).

Il y a deux méthodes pour calculer la fem : utilisation du champ électromoteur ou la loi de Faraday. Ici, c'est beaucoup plus simple d'utiliser la loi de Faraday.



1. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBs \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -NBs \sin (\omega t)$$

car la surface est orientée avec la règle de la main droite : $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

La fem vaut donc :

$$e = NsB\omega \cos (\omega t)$$

La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

avec $\begin{cases} i = I_m \cos (\omega t + \phi) \\ \underline{i} = I_m \exp(j(\omega t + \phi)) \end{cases}$ et $\begin{cases} e = NsB\omega \cos (\omega t) \\ \underline{e} = NsB\omega \exp(j(\omega t)) \end{cases}$

En notation complexe, on a : $\underline{e} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$, d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega} = \frac{NsB\omega \exp(j(\omega t))}{R + jL\omega}$$

On en déduit : $\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \arg(\underline{i}) = \omega t + \phi = \omega t - \arg(R + jL\omega) \end{cases}$

D'où :

$$I_m = \frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} ; \tan \phi = -\frac{L\omega}{R} \text{ et } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} > 0$$

ϕ est donc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 .

2. Le moment magnétique de la bobine est $\vec{M} = NIs\vec{n}$.

Le moment du couple subi par la bobine est : $\vec{\Gamma}' = \vec{M} \wedge \vec{B} = NIs\vec{n} \wedge B\vec{u}_x$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ en projection sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = NIsB \begin{vmatrix} -\sin(\omega t) & B \\ \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -NIsB \cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma}' = -NI_msB \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Or $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = -\frac{NI_msB}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \vec{u}_z$$

La moyenne du moment du couple est :

$$\langle \vec{\Gamma}' \rangle = -\frac{NI_msB}{2} \cos \phi \vec{u}_z$$

La projection du moment du couple est négative. C'est normal d'après la loi de Lenz qui est une loi de modération. La création d'un courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui donnent naissance. La cause est la rotation de la bobine.

3. Soit P la puissance du couple moteur. On a : $P = \Gamma \omega$. La puissance est constante, donc

$$\Gamma = \frac{P}{\omega}$$

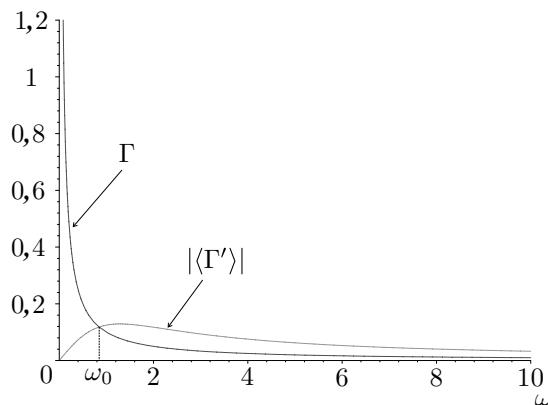
On a vu que :

$$\langle \Gamma' \rangle = -\frac{NI_msB}{2} \cos \phi = -\frac{NsB}{2} \left(\frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right)$$

D'où

$$\langle \Gamma' \rangle = \frac{-N^2s^2B^2R}{2} \frac{\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Le graphe ci-dessous représente l'allure de Γ et de $|\langle \Gamma' \rangle|$ en fonction de ω . Le point de fonctionnement est l'intersection des deux courbes.



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



4. A $t = 0$, on débloque l'éolienne. La vitesse angulaire ω augmente car $J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma' > 0$, le couple de frottement augmente et le couple moteur diminue. On atteint un régime permanent pour $\omega = \omega_0$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma + \Gamma'$$

On doit avoir : $|\langle \Gamma' \rangle| = \Gamma$, soit :

$$\frac{P}{\omega_0} = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2}$$

D'où $2P(R^2 + L^2 \omega_0^2) = N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2$. On a alors :

$$R^2 + L^2 \omega_0^2 = \frac{N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2}{2P}$$

Soit :

$$\omega_0^2 = \frac{R^2}{\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2}$$

Pour que ω_0 soit défini, il faut que $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2 > 0$, c'est-à-dire $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} > L^2$, soit $P < \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$. On pose :

$$P_c = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$$

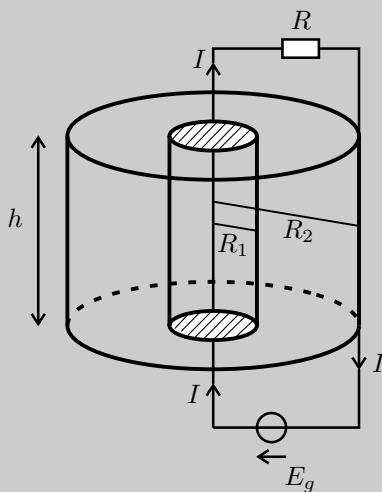
On doit donc avoir :

$$P < P_c$$

Si la vitesse angulaire augmente légèrement, le couple moteur est inférieur au couple résistant en norme. On a donc un ralentissement de la bobine. Le régime est donc stable.

Exercice 5.6 : Énergie magnétique du câble coaxial (MP-PT)

On considère un câble coaxial formé d'un conducteur cylindrique plein, de rayon R_1 , de longueur h , d'axe Oz , entouré d'un conducteur cylindrique creux, de rayon intérieur R_2 et d'épaisseur e . Le conducteur intérieur est parcouru par un courant volumique $\vec{j}_1 = j_1 \vec{u}_z$ et le conducteur extérieur est parcouru par un courant volumique $\vec{j}_2 = j_2 \vec{u}_z$. On note I l'intensité du courant électrique permanent dans le conducteur intérieur. On néglige les effets de bord et la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme (région $r < R_1$) et celle localisée dans la gaine (région $R_2 < r < R_2 + e$) du câble coaxial.



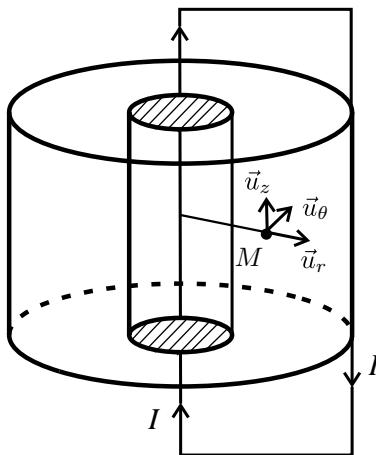
1. Déterminer le champ magnétique en tout point $M(r, \theta, z)$ de l'espace en fonction de I, R_1, R_2, e et r .
2. Déterminer l'énergie magnétique emmagasinée et en déduire l'inductance propre du câble coaxial en fonction de h, R_1, R_2 et e .

Analyse du problème

On utilise les symétries et invariances pour déterminer la structure du champ magnétique. Le théorème d'Ampère permet de calculer le champ magnétique dans tout l'espace. Le calcul de l'énergie magnétique permet d'en déduire l'inductance propre du câble coaxial.



1.



- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courants qui est la source du champ magnétique, $\vec{B} \perp P$, donc $\vec{B} // \vec{u}_\theta$.
- La distribution est invariante par rotation d'angle θ , et par translation suivant \vec{u}_z (on néglige les effets de bord), donc les coordonnées de \vec{B} ne dépendent pas de θ et de z .

On obtient finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

On a des courants volumiques de densité uniforme. D'après les orientations, on a :

$$I = j_1 \pi R_1^2 \text{ et } -I = j_2 \pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle passant par M de rayon r orienté suivant \vec{u}_θ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si $r < R_1$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

- Si $R_1 \leq r \leq R_2$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi R_1^2 = \mu_0 I$, donc

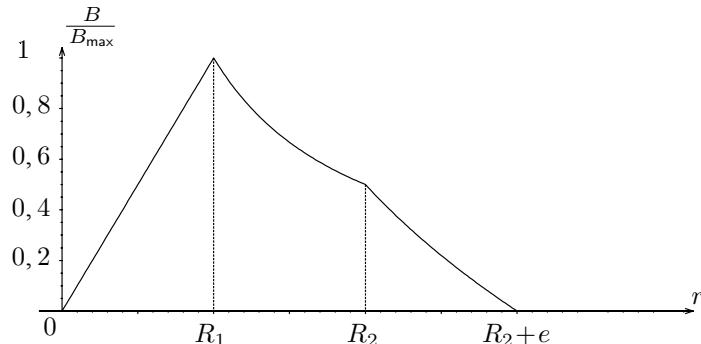
$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Si $R_2 < r < R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2))$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 (I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2))}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I (r^2 - R_2^2)}{2r\pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)}$$

- Si $r > R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2 \pi R_2^2) = \mu_0 (I - I) = 0$, donc

$$B(r) = 0$$



On n'observe pas de discontinuité à la traversée des cylindres car on a des distributions volumiques de courants.

2. La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial est :

$$W_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

D'après l'énoncé, on néglige la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme et dans la gaine. On a donc :

$$W_m = \iint_{\substack{R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{1}{2\mu_0} (dr) (r d\theta) (dz) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) I^2$$

L'inductance propre L du câble coaxial est définie par :

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

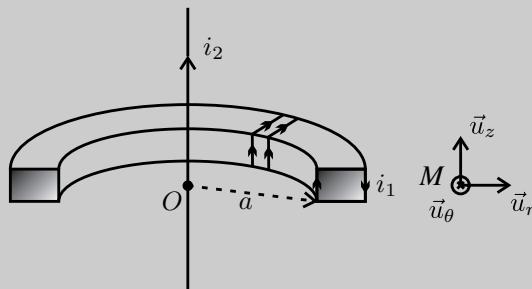
On en déduit :

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Exercice 5.7 : Pince ampèremétrique (MP-PT)

Une bobine torique est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , de hauteur h . On suppose que $N \gg 1$.

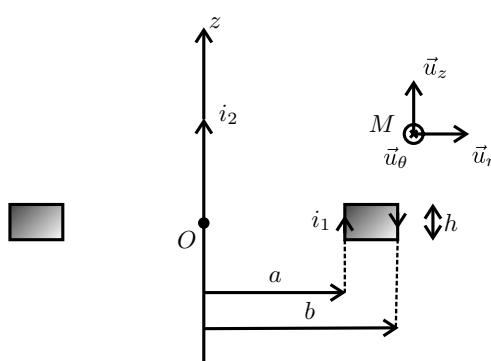
1. Calculer le flux du champ magnétique créé par la bobine torique à travers les N spires. En déduire son inductance propre L_1 .
2. Le tore (circuit 1) enlace un fil infini (circuit 2) d'axe Oz et est parcouru par un courant $i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \phi)$. Calculer le flux du champ magnétique créé par le circuit 2 à travers les N spires du tore. En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.
3. On court-circuite le circuit torique et on néglige sa résistance. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminer la valeur efficace du courant i_1 . Quel est l'avantage de la mesure du courant induit ?

**Analyse du problème**

On a un problème d'induction avec deux circuits couplés. On commence par calculer l'inductance propre et l'inductance mutuelle entre les deux circuits. Le circuit 2 crée un champ magnétique variable. On a un phénomène d'induction à cause de la variation du flux magnétique à travers le circuit 1. Le flux magnétique est la somme du flux propre et du flux extérieur. En utilisant la notation complexe, on pourra en déduire la valeur efficace du courant i_1 .



1.



Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources du champ, donc $\vec{B}_1(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_1(M) // \vec{u}_\theta$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B}_1 aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ . D'où :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r, z) \vec{u}_z$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz, de rayon r passant par M :

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si M est à l'intérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = N i_1$ en appliquant la règle de la main droite. On en déduit :

$$\vec{B}_{1 \text{ int}} = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Si M est à l'extérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = 0$. On a donc :

$$\vec{B}_{1 \text{ ext}} = \vec{0}$$

Le flux à travers une spire est :

$$\Phi_{\text{spire}} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi} h \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

La spire est orientée avec la règle de la main droite.

Le flux à travers les N spires de la bobine torique vaut :

$$\Phi_P = N \Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est appelé flux propre. On peut l'identifier à $\Phi_P = L_1 i_1$, d'où :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

2. On appelle $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux extérieur, c'est-à-dire le flux du champ magnétique \vec{B}_2 créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 :

$$\Phi_{\text{ext}} = \Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{\text{spires de } C_1} \iint_{M \in \text{spire}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

On va calculer le champ magnétique créé par le circuit 2 :

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}_2(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_2(M) // \vec{u}_\theta$.
- La distribution D est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{B}_2 aussi. On a donc :

$$\vec{B}_2 = B_2(r) \vec{u}_\theta$$

- On applique le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère est un cercle orienté suivant \vec{u}_θ passant par M et de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B_2(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_2(r) 2\pi r = \oplus \mu_0 i_2$$

On a donc :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers une spire du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1(1 \text{ spire})} = \iint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers les N spires du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \Phi_{2 \rightarrow 1(1 \text{ spire})} = \frac{\mu_0 N i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

On pose $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$, d'où :

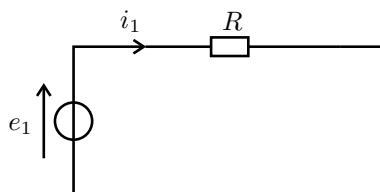
$$M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Remarque

Si on change le sens de i_1 ou i_2 , M change de signe.



3. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention génératriceur.



La force électromotrice d'induction est :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 est :

$$\Phi_1 = \Phi_P + \Phi_{\text{ext}} = L_1 i_1 + M i_2$$



Une erreur fréquente est de ne pas tenir compte du flux propre. Ici, le flux propre dépend de N^2 alors que le flux extérieur dépend de N . Comme N est très grand, il n'y a aucune raison de le négliger.



La loi des mailles s'écrit :

$$e_1 = R i_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Comme la résistance est négligeable d'après l'énoncé, on a :

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

En utilisant la notation complexe, on a : $j L \omega i_1 = -j M \omega i_2$.

On en déduit une relation faisant intervenir les intensités efficaces :

$$L \omega I_{1\text{eff}} = M \omega I_{2\text{eff}}.$$

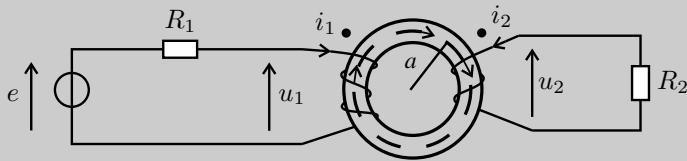
Comme $\frac{L}{M} = N$, on a :

$$I_{1\text{eff}} = \frac{M}{L} I_{2\text{eff}} = \frac{I_{2\text{eff}}}{N}$$

Une pince ampèremétrique permet donc de mesurer des forts courants (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers d'ampères).

Exercice 5.8 : Transformateur torique (MP-PT)

Sur un tore magnétique, on dispose deux enroulements. Le primaire est constitué de N_1 spires, et relié à un générateur de force électromotrice $e(t)$ par l'intermédiaire d'une résistance R_1 . Le secondaire comprend N_2 spires, il est branché sur une résistance R_2 . Les résistances des enroulements sont nulles. Le tore est constitué d'un matériau de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ (μ_r très grand devant l'unité). Sa section est notée S . Son rayon a est grand devant le rayon b de la section S .



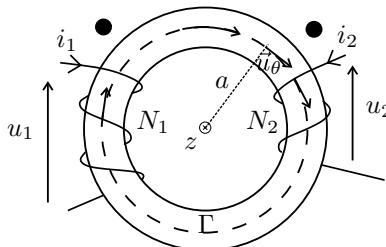
- Montrer qualitativement que l'on néglige les variations du champ magnétique à l'intérieur du tore. Donner la forme des lignes de champ dans le matériau. Déterminer le champ magnétique dans le tore. Définir les bornes homologues.
- Établir les expressions des flux Φ_1 et Φ_2 , traversant respectivement le primaire et le secondaire.
- Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M existant entre les deux circuits, ainsi que leurs inductances propres respectives L_1 et L_2 , en fonction de $L_0 = \frac{\mu_0 \mu_r S}{2\pi a}$. Quelle relation existe entre M, L_1 et L_2 ?
- On étudie le cas où $e(t)$ est un échelon défini par : $e(t) = 0$ pour $t < 0$; $e(t) = E$ pour $t > 0$. Établir les équations différentielles liant i_2 et e d'une part, i_1 et e d'autre part.
- Pour $t < 0$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont nuls. Quelles grandeurs physiques restent continues en $t = 0$? En déduire une relation entre $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un transformateur torique. Il faut faire attention aux signes lors de l'application du théorème d'Ampère. C'est un problème d'induction puisqu'on a une variation du flux magnétique. Il faut donc rajouter les fem d'induction en convention générateur dans le circuit électrique équivalent.



- On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

On ne peut pas utiliser les plans de symétrie et l'invariance par rotation à cause des N_1 et N_2 spires.

Dans le cas d'un matériau de grande perméabilité, il y a canalisation des lignes de champ. Celles-ci restent à l'intérieur du circuit magnétique. On a alors : $\vec{B} // \vec{u}_\theta$.

Comme $b \ll a$, alors le champ magnétique est constant à l'intérieur du tore.

Le champ magnétique est de la forme : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.

Les lignes de champ sont des cercles de rayon r .

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = B2\pi r = \mu I_{\text{enlacé}} = \mu (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$



Attention aux signes pour la circulation du champ magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.



On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{2\pi r} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta \approx \frac{\mu}{2\pi a} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta$$

Définition des bornes homologues : Des courants entrant par les bornes homologues créent des champs magnétiques de même sens dans le circuit. Les bornes homologues sont représentées sur le schéma ci-dessous.

2. Le flux à travers une spire orientée est :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = BS$$

puisque le champ magnétique ne dépend pas de r .

Le flux qui traverse les N_1 spires orientées est :

$$\Phi_1 = N_1 (BS)$$

Le flux qui traverse les N_2 spires orientées est :

$$\Phi_2 = N_2 (BS)$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi a} i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{array} \right.$$

3. On pose $L_0 = \frac{\mu S}{2\pi a}$. On a alors :

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_1 = L_0 N_1^2 i_1 + L_0 N_1 N_2 i_2 \\ \Phi_2 = L_0 N_1 N_2 i_1 + L_0 N_2^2 i_2 \end{array} \right.$$

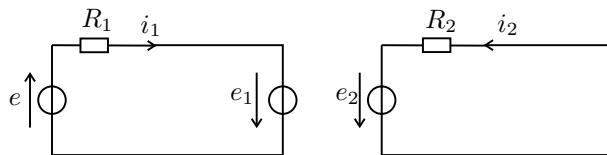
On a donc : $L_1 = L_0 N_1^2$ et $L_2 = L_0 N_2^2$.

On vérifie que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Le couplage magnétique entre le primaire et le secondaire est parfait, toutes les lignes du champ magnétique créé par l'un des deux circuits traversent l'autre circuit :

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = L_0 N_1 N_2$$

4.



Il faut bien orienter les fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles permet d'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} e + e_1 = R_1 i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \text{ (éq.1)} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \text{ (éq.2)} \end{array} \right.$$

a) Pour lever le couplage, on dérive l'équation (1) et on utilise l'équation (2) pour éliminer i_1 .

L'équation (1) devient : $\frac{de}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$.

L'équation (2) s'écrit : $\frac{di_1}{dt} = \frac{-\left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)}{M}$.

On réinjecte dans (1) :

$$\frac{de}{dt} = -R_1 \frac{\left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)}{M} + L_1 \frac{-\left(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2}\right)}{M} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

D'où

$$\frac{de}{dt} = \frac{-R_1 R_2}{M} i_2 - \frac{R_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2 L_1}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{L_1 L_2}{M} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

Or $M^2 = L_1 L_2$. On a donc :

On en déduit :

$$-\frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{1}{M} (R_1 L_2 + R_2 L_1) \text{ (éq.1')}$$

b) On dérive l'équation (2) et on utilise l'équation (1) pour éliminer i_2 .

L'équation (2) devient : $0 = R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$

L'équation (1) s'écrit : $\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right)$

On réinjecte dans (2) :

$$0 = \frac{R_2}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{L_2}{M} \left(\frac{de}{dt} - R_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

D'où :

$$\frac{R_2}{M} e + \frac{L_2}{M} \frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + \frac{R_2 L_1 + R_1 L_2}{M} \frac{di_1}{dt} \text{ (éq.2')}$$

car $M^2 = L_1 L_2$.

On a vu que $L_1 = L_0 N_1^2$; $L_2 = L_0 N_1^2$ et $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Si $e(t) = E$, l'équation (1') s'écrit :

$$0 = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{L_0}{M} (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2), \text{ soit :}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau} = 0$$

avec $\tau = L_0 \frac{R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2}{R_1 R_2}$.

L'équation (2') s'écrit alors : $\frac{R_2}{M} E = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + L_0 \frac{R_2 N_1^2 + R_1 N_2^2}{M} \frac{di_1}{dt}$,
soit :

$$\tau \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{E}{R_1}$$

5. On a rajouté une fem d'induction $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ dans le circuit n°1 et une fem d'induction $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ dans le circuit n°2. Φ_1 et Φ_2 ne peuvent pas varier de façon discontinue, sinon on aurait des fem e_1 et e_2 infinies.



Il est faux ici de dire que $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Il faut raisonner sur le flux et non pas sur les courants.



$\Phi_1(0^+) = \Phi_1(0^-) = 0$, donc $B(0) = 0$ et d'après le théorème d'Ampère :

$$N_1 i_1(0^+) + N_2 i_2(0^+) = 0 \text{ (éq. 3)}$$

On utilise les équations (1) et (2) à $t = 0$:

$$\begin{cases} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + L_0 N_1^2 \frac{di_1}{dt} + L_0 N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_0 N_2^2 \frac{di_2}{dt} + L_0 N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{e - R_1 i_1}{N_1} = L_0 N_1 \frac{di_1}{dt} + L_0 N_2 \frac{di_2}{dt} \\ \frac{-R_2 i_2}{N_2} = L_0 N_2 \frac{di_2}{dt} + L_0 N_1 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Les deux termes de droite sont égaux.

On en déduit donc qu'à $t = 0$: $\frac{E - R_1 i_1}{N_1} = \frac{-R_2 i_2}{N_2}$, soit :

$$E = R_1 i_1(0^+) - \frac{N_1}{N_2} R_2 i_2(0^+) \text{ (éq. 4)}$$

On donc les équations (3) et (4) permettant d'obtenir $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$.

$i_2(0^+) = \frac{-N_1}{N_2} i_1(0^+)$, d'où :

$$E = R_1 i_1(0^+) + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 i_1(0^+) = \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 i_1(0^+) \left(1 + \frac{R_1 N_2^2}{R_2 N_1^2} \right)$$

On a alors :

$$i_1(0^+) = \frac{E}{R_2} \frac{N_2^2}{N_1^2} \alpha$$

en posant $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{R_1 N_2^2}{R_2 N_1^2}}$.

On obtient : $i_2(0^+) = \frac{-N_1}{N_2} i_1(0^+) = \frac{E}{R_2} \left(\frac{-N_1}{N_2} \right) \frac{N_2^2}{N_1^2} \alpha$. On en déduit finalement :

$$i_2(0^+) = \frac{-N_2}{N_1} \frac{E}{R_2} \alpha$$

Conducteur

Exercice 6.1 : Boule conductrice (MP-PT)

- Définir l'équilibre électrostatique d'un conducteur dans le vide et donner les caractéristiques des grandeurs électrostatiques de ce conducteur.
- On considère une boule parfaitement conductrice (S_0) de rayon $R_0 = 6,0$ cm et portée à un potentiel $V_0 = 10$ kV puis isolée seule dans l'air de permittivité ε_0 . Déterminer sa charge q_0 en fonction de R_0 et V_0 . En déduire la capacité de la boule.
- Déterminer la capacité de la boule par une autre méthode en utilisant le théorème de Gauss.
- Calculer son énergie électrostatique U_{el0} . Où est localisée l'énergie de cette boule ?

Analyse du problème

On va rappeler les propriétés de l'équilibre électrostatique d'un conducteur dans le vide et étudier le cas particulier d'une boule conductrice.



- Le conducteur est à l'équilibre si la vitesse d'ensemble des charges libres par rapport au conducteur est nulle en tout point.

La force électrostatique qui s'exerce sur une charge q vaut $q\vec{E}$. Pour que cette charge soit immobile par rapport au conducteur, il faut que :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Comme $\vec{E} = \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, le **potentiel électrostatique est constant** à l'intérieur du conducteur. Le potentiel est continu à la traversée d'une distribution surfacique, la surface du conducteur est donc une **équipotentielle**.

L'équation de Maxwell-Gauss est : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. On a donc $\rho = 0$.

On peut avoir des charges en surface mais on ne peut pas avoir de charges en volume dans un conducteur à l'équilibre électrostatique.

- Le potentiel est constant dans la boule. On le calcule au point le plus simple, c'est-à-dire au centre de la boule O .

Les charges sont situées à la surface de la boule à la distance R_0 du point O . On appelle σ la densité surfacique de charges. Un élément de surface dS porte une charge $dq = \sigma dS$. La loi de Coulomb s'écrit :

$$V(O) = \iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_0} \iint_S \sigma dS$$

On appelle q_0 la charge totale de la boule. Comme les charges sont réparties à la surface de la boule, on a : $q_0 = \iint_S \sigma dS$

On a donc :

$$V(O) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

On en déduit la charge q_0 :

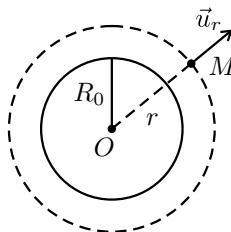
$$q_0 = 4\pi\epsilon_0 R_0 V_0$$

La capacité d'un conducteur est définie par : $q_0 = CV_0$.

On obtient :

$$C_{\text{boule}} = 4\pi\epsilon_0 R_0$$

3. La densité surfacique de charges est inversement proportionnelle au rayon de courbure. σ est donc uniforme pour la boule de rayon R_0 .



Calcul du champ électrostatique :

Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$. La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à une sphère passant par M et de rayon r :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2$$

Il y a deux cas :

- Si $r < R_0$: $Q_{\text{int}} = 0$, donc $\vec{E} = \vec{0}$.
- Si $r > R_0$: $Q_{\text{int}} = q_0$ et $E(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. On a donc :

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Calcul du potentiel électrostatique :

On utilise la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi) = -E(r) dr$$

Il y a deux cas :

- Si $r \geq R_0$: $dV = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$. On a donc $V = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$. Pour une distribution finie, on choisit toujours $V(\infty) = 0$, donc $V = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$.
- Si $r \leq R_0$: $dV = 0$, donc $V = cte$. Le potentiel est continu à la traversée d'une distribution surfacique. Pour $r = R_0$, on a donc : $V_0 = cte = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$.

On retrouve bien : $q_0 = CV_0$ avec

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_0$$

4. L'énergie électrostatique est : $U_{el0} = \frac{1}{2}q_0 V_0$

On en déduit :

$$U_{el0} = \frac{1}{2} (4\pi\varepsilon_0 R_0) V_0^2 = 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2 = 3,34 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Comme \vec{E} est nul entre $r = 0$ et $r = R_0$, l'énergie est localisée entre $r = R_0$ et $r = \infty$.

Remarque : On peut calculer l'énergie électrostatique avec la relation :

$$U_{el0} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Le volume élémentaire en coordonnées sphériques est : $d\tau = dr r d\theta r \sin \theta d\phi$. Il faut intégrer r entre R_0 et l'infini, θ entre 0 et π et ϕ entre 0 et 2π .

Comme $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 4\pi$, on a :

$$U_{el0} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dr r^2 d\theta \sin \theta d\phi = \int_{r=R_0}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

On en déduit que :

$$U_{el0} = \int_{r=R_0}^{\infty} \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{R_0}^{\infty} = \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R_0}$$

Comme $q_0 = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0 V_0$, on a donc :

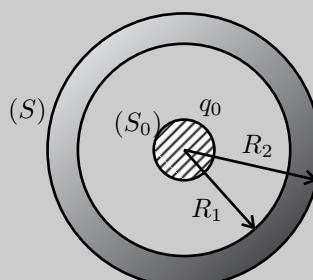
$$U_{el0} = 2\pi\varepsilon_0 R_0 V_0^2$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

Exercice 6.2 : Système de conducteurs (MP-PT)

On considère une sphère parfaitement conductrice (S_0) de rayon R_0 , de charge q_0 positive et portée à un potentiel V_0 . Un opérateur entoure (S_0) de deux hémisphères métalliques initialement neutres formant une coquille sphérique conductrice (S) isolée, de rayons R_1 et R_2 et de même centre O que (S_0). La permittivité de l'air est ε_0 .

1. Déterminer la répartition des charges sur les conducteurs.
2. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point de l'espace.
3. Tracer les graphes V et E en fonction de q_0, R_0, R_1, R_2 et $r = OM$.
4. Déterminer l'énergie électrostatique U_{el} du système de conducteurs. En déduire le travail W_{op} de l'opérateur qui a formé (S) autour de (S_0) et justifier son signe.



Analyse du problème

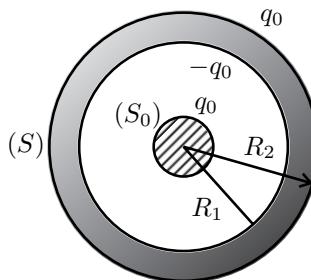
Cet exercice est la suite de l'exercice précédent avec l'étude de la boule conductrice (S_0). Elle est recouverte par une coquille sphérique. On a donc un phénomène d'influence totale. On a **conservation de la charge** mais il faut bien faire attention que le potentiel électrostatique est modifié puisqu'on impose un potentiel nul à l'infini.



- On a un phénomène d'influence et donc l'apparition de charges négatives sur l'armature intérieure de (S) puisqu'elles sont attirées par les charges positives de (S_0). On a donc des charges positives sur l'armature extérieure de (S) puisque la charge totale de (S) est nulle.

L'influence est totale car toutes les lignes de champ partant de (S_0) vont vers (S). Les charges sont donc opposées d'après le théorème des éléments correspondants :

$$Q_{(S_0)} = -Q_{\text{int}(S)}$$



- On a une invariance de la distribution par rotation d'angle θ et ϕ , on peut donc considérer que V ne dépend que de r . On en déduit que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = E(r) \vec{u}_r$$

Calcul du champ électrostatique :

La surface de Gauss est une sphère de centre 0, de rayon r . Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Si $0 \leq r < R_0$: $Q_{\text{int}} = 0$. On a :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

- Si $R_0 < r < R_1$: $Q_{\text{int}} = q_0$. On a :

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- Si $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}} = 0$. On a :

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ conducteur à l'équilibre}$$

- Si $R_2 < r$: $Q_{\text{int}} = q_0$. On a :

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Calcul du potentiel électrostatique :

On utilise la relation $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$.

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques est :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi$$

On a donc :

$$dV = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi) = -E(r) dr$$



Le champ électrostatique subit une discontinuité à la traversée d'une surface chargée. Par contre, le potentiel électrostatique est continu à la traversée d'une surface chargée. Le potentiel de (S_0) n'a aucune raison de rester égal à V_0 . On choisit toujours pour une distribution finie un potentiel nul à l'infini.



- Si $R_2 \leq r$: $E(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, soit $dV = \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$. On intègre :

$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$. Pour avoir $V(\infty) = 0$, la constante doit donc être nulle. On a donc :

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} = V_0 \frac{R_0}{r}$$

- Si $R_1 \leq r \leq R_2$: $dV = 0$. On a donc :

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} = V_0 \frac{R_0}{R_2} = V(R_1) = V(R_2)$$

- Si $R_0 \leq r \leq R_1$: $dV = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$. On intègre entre R_1 et r :

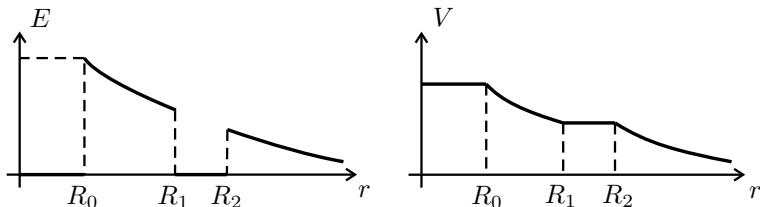
$$V - V(R_1) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right). \text{ D'où :}$$

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = V_0 \left(\frac{R_0}{r} + \frac{R_0}{R_2} - \frac{R_0}{R_1} \right)$$

- Si $0 \leq r \leq R_0$: $dV = 0$. Le potentiel est continu pour une distribution surfacique. On a donc $V = V(R_0)$. D'où :

$$V = V(R_0) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = V_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_2} - \frac{R_0}{R_1} \right)$$

3.



On vérifie bien les propriétés de discontinuité du champ électrostatique et de continuité du potentiel électrostatique pour une distribution surfacique de charges.

4. On a vu dans l'exercice précédent que l'énergie électrostatique du conducteur (S_0) seul est : $U_{el0} = \frac{1}{2}q_0V_0$.

L'énergie électrostatique du système de conducteurs est $U_{el} = \sum_i \frac{1}{2}q_i V_i$.

Pour le conducteur (S), on a : $\frac{1}{2}q_{(S)}V_{(S)} = 0$ car la charge est nulle. Pour

le conducteur (S_0), on a : $\frac{1}{2}q_{(S_0)}V_{(S_0)} = \frac{1}{2}q_0V_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_2} - \frac{R_0}{R_1} \right)$.

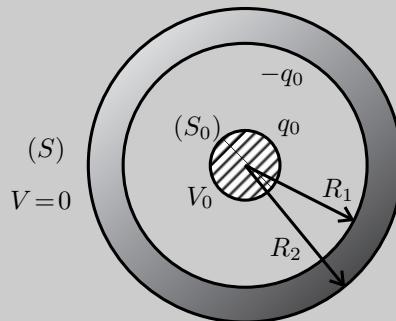
On en déduit le travail que doit fournir l'opérateur pour former (S) autour de (S_0) :

$$W_{op} = U_{el} - U_{el0} = 0 = \frac{1}{2}q_0V_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_2} - \frac{R_0}{R_1} \right) - \frac{1}{2}q_0V_0 < 0$$

On a un travail négatif. C'est normal, car au cours de la formation de (S) autour de (S_0), des charges négatives apparaissent sur R_1 et des charges positives sur R_2 . Ces charges sont de signe opposé. (S_0) exerce une force attractive sur les charges en R_1 et une force répulsive plus faible sur les charges en R_2 . L'opérateur doit donc exercer une force qui tend à s'opposer à une force globalement attractive entre les deux sphères.

Exercice 6.3 : Condensateur sphérique et effets thermiques (MP-PT)

On considère deux conducteurs (S) et (S_0) placés dans l'air de permittivité ϵ_0 , formant un condensateur sphérique. (S) est une coquille sphérique mise à la masse et comprise entre R_1 et R_2 . (S_0) est une sphère de rayon R_0 portée au potentiel V_0 .

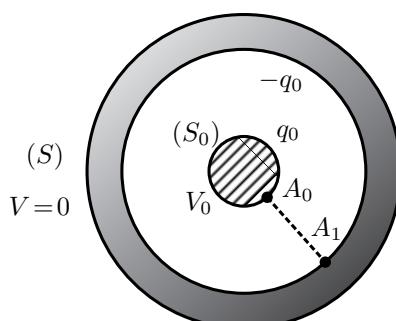


1. Déterminer l'expression de la capacité C_0 de ce condensateur.
2. L'espace entre $r = R_0$ et $r = R_1$ est rempli d'une substance très faiblement conductrice et de conductivité γ . Déterminer le courant I passant d'une armature à l'autre. En déduire la résistance R de ce système et exprimer la relation reliant R à la capacité C .
3. Donner la puissance P_V dépensée par unité de volume de la substance et déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans le condensateur.

Analyse du problème

On va calculer la capacité du condensateur sphérique. On verra dans l'exercice suivant 4 méthodes de calculs des capacités.

Le milieu étant conducteur, un courant peut circuler entre les armatures. On retrouve une relation importante entre la capacité et la résistance d'un condensateur.



1. Calcul du champ électrostatique :

Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie pour les charges, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$ et $\vec{E} // \vec{u}_r$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ et d'angle ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et de ϕ .

On applique le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique. La surface de Gauss est une sphère de rayon r ($R_0 \leq r \leq R_1$) passant par M et de rayon r .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \oint_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \oint_S dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

On a donc :

$$E = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Calcul du potentiel :

On calcule la différence de potentiel entre A_0 et A_1 . On pose :

$$U = V_0 - 0$$

On utilise la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi) = -E(r) dr$$

Soit $dV = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}$. On intègre entre les points A_0 et A_1 :

$$0 - V_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right)$$



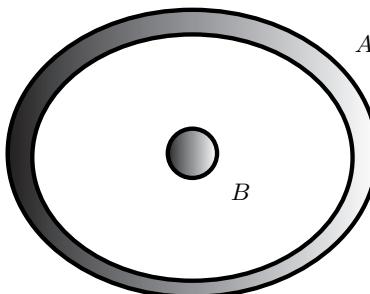
Il faut faire attention aux signes et aux bornes d'intégration.

d'où :

$$U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q_0 (R_1 - R_0)}{4\pi\varepsilon_0 R_0 R_1}$$

Cours : Un condensateur est constitué de deux conducteurs A et B en influence totale : toutes les lignes de champ partant d'un conducteur arrivent sur l'autre conducteur. On démontre alors que $Q_{Aint} = -Q_B$. On néglige le rôle de la charge extérieure de A . Soit :

$$Q_A = Q_{A\text{int}} + Q_{A\text{ext}} \approx Q_{A\text{int}} = -Q_B$$



La capacité est définie par :

$$Q_B = C(V_B - V_A)$$

On peut écrire également :

$$Q_A = C(V_A - V_B)$$

Remarque : On peut retenir le moyen mnémotechnique : charge en A . On commence par A dans la parenthèse.



Capacité :

La capacité est définie par :

$$q_0 = C_0(V_0 - 0)$$

D'où :

$$C_0 = \frac{q_0}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 R_1}{R_1 - R_0}$$

2. L'intensité du courant électrique à travers une sphère de rayon r est :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

La loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. On a donc :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S \gamma E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \gamma E(r) 4\pi r^2$$

On a vu que $E(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Donc $I = \gamma \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2$. Soit :

$$I = \frac{\gamma q_0}{\varepsilon_0}$$

Interprétation physique : c'est tout à fait normal d'avoir I indépendant de r . La conservation de la charge s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

En régime permanent, on a : $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Le vecteur densité de courant \vec{j} est à flux conservatif et un tube de champ transporte un flux constant.

On a vu que $q_0 = C_0 U$. D'où : $I = \frac{\gamma C_0}{\varepsilon_0} U$. La résistance vaut donc :

$$R = \frac{\varepsilon_0}{\gamma C_0} = \frac{R_1 - R_0}{4\pi\gamma R_0 R_1}$$

On retrouve la relation rencontrée très fréquemment entre une résistance et une capacité :

$$RC_0 = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

3. La puissance volumique dépensée par unité de volume vaut : $P_V = \gamma E^2$
Comme E ne dépend que de r , on a :

$$P_{\text{Joule}} = \iiint_V \gamma E(r)^2 dr = \int_{r=R_0}^{R_1} \gamma E(r)^2 4\pi r^2 dr$$

D'où :

$$P_{\text{Joule}} = \int_{r=R_0}^{R_1} \gamma \left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{\gamma q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \int_{r=R_0}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{\gamma q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Soit :

$$P_{\text{Joule}} = \frac{\gamma q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \frac{(R_1 - R_0)}{R_1 R_2} = \left(\frac{\gamma q_0}{\varepsilon_0} \right)^2 \frac{(R_1 - R_0)}{4\pi\gamma R_1 R_2} = RI^2$$

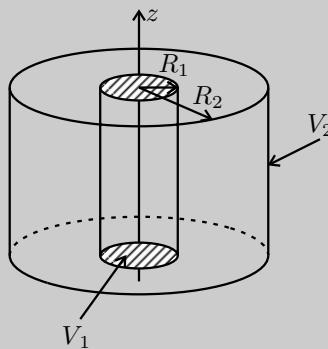
On retrouve bien la relation vue en électrocinétique : $P_{\text{Joule}} = RI^2$.

Exercice 6.4 : Condensateur cylindrique (MP-PT)

Un condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres de rayons R_1 et R_2 , portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 dans l'air de permittivité ε_0 . On néglige les effets de bord. On rappelle que :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1. Déterminer la capacité C du condensateur de hauteur h par quatre méthodes.
2. Étudier le cas où $R_2 \ll R_1$.

**Analyse du problème**

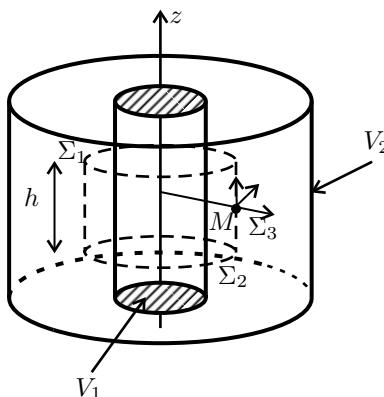
On va calculer la capacité du condensateur cylindrique par 4 méthodes et retrouver la formule du condensateur plan dans le cas où $R_2 \ll R_1$.



1. On considère une hauteur h .

Le cylindre intérieur porte une charge Q . On note σ la densité surfacique de charges.

Le cylindre extérieur porte une charge $-Q$ puisqu'on a influence totale. On néglige les effets de bord en supposant que $h \gg (R_2 - R_1)$.

Première méthode

Calcul du champ électrostatique entre R_1 et R_2 :

Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie pour les charges, donc $\vec{E} \in P \cap Q$ et $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z (on néglige les effets de bord), donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et de z .

On applique le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique. La surface de Gauss est un cylindre de rayon r passant par M et de hauteur h . Le flux à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2 est nul. On a :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = E 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

d'où :

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$

pour r compris entre R_1 et R_2 .

Calcul du potentiel entre R_1 et R_2 :

On calcule la différence de potentiel entre l'armature 1 et l'armature 2. On pose :

$$U = V_1 - V_2$$

On a : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \frac{dr}{r}$. On intègre entre 1 et 2 :

$$V_2 - V_1 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

D'où :

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Capacité :

La capacité est définie par $Q_1 = C(V_1 - V_2)$. On en déduit que :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Deuxième méthode**Détermination du potentiel entre R_1 et R_2 :**Entre les deux armatures ($R_1 \leq r \leq R_2$), on a :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

On a donc : $r \frac{dV}{dr} = A$. On sépare les variables : $dV = A \frac{dr}{r}$, soit $V = A \ln r + B$. Avec les conditions aux limites, on a :

$$\begin{cases} V_1 = A \ln R_1 + B \\ V_2 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

d'où :

$$A = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{-U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Expression du champ électrostatique entre R_1 et R_2 :

On peut en déduire directement le champ électrostatique à partir du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{-A}{r} \vec{u}_r = \frac{U}{r} \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$$

Théorème de Coulomb :On applique le théorème de Coulomb sur la plaque n°1 pour $r = R_1^+$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{U}{R_1} \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_r$$

On pose $Q_1 = Q = \iint \sigma dS = \sigma 2\pi R_1 h$ Soit $\frac{Q}{2\pi R_1 h \varepsilon_0} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$, d'où :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Troisième méthode**Calcul du champ électrostatique :**

En utilisant le théorème de Gauss, on trouve :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rh} \vec{u}_r$$

pour r compris entre R_1 et R_2 . Le champ est nul pour $r < R_1$ et pour $r > R_2$ puisque les charges sont surfaciques.

Énergie électrostatique :

L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur vaut :

$$U_{el} = \underset{\text{espace}}{\iiint} u_{el} d\tau = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{Q^2}{2C} = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rh} \right)^2 dr r d\theta dz$$

Comme le champ est nul sauf entre R_1 et R_2 , il faut intégrer r entre R_1 et R_2 , θ entre 0 et 2π et z entre 0 et h .

Soit :

$$U_{el} = \frac{Q^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}{4\pi\epsilon_0 h} = \frac{Q^2}{2C}$$

d'où :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Quatrième méthode

On considère un condensateur plan de capacité $d^2C = \frac{\epsilon_0 dS}{dr}$ avec $dS = h r d\theta$.

Pour décrire le condensateur cylindrique :

- On fait varier r entre R_1 et R_2 . Les condensateurs sont en série :

$$\frac{1}{dC} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon_0 h r d\theta} = \frac{1}{\epsilon_0 h d\theta} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- On fait varier θ entre 0 et 2π . Les condensateurs sont en parallèle :

$$C = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\epsilon_0 h d\theta}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

On retrouve bien le même résultat avec les quatre méthodes.

2. Dans le cas où $R_2 \ll R_1$. On pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.
On fait un développement limité au premier ordre :

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}.$$

On a donc $C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\frac{e}{R_1}}$, soit :

$$C \approx \frac{\epsilon_0 S_1}{e}$$

On retrouve la formule du condensateur plan avec $S_1 = 2\pi R_1 h$.

Exercice 6.5 : Microphone* (MP-PT)

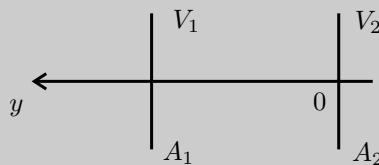
Un condensateur plan est formé de deux armatures planes, conductrices, parallèles, A_1 et A_2 , de surface S , distantes de e , portées aux potentiels respectifs V_1 et V_2 dans l'air de permittivité ϵ_0 . En négligeant les effets de bord le potentiel $V(M)$ en un point M entre les armatures ne dépend que de sa distance y à l'armature A_2 .

1. Déterminer le potentiel $V(y)$, le champ électrique $\vec{E}(M)$ et les densités surfaciques de charge σ_1 et σ_2 sur les deux armatures en fonction de V_1, V_2, e et ϵ_0 . En déduire la capacité C du condensateur.

2. Déterminer la force électrique exercée par l'armature A_2 sur l'armature A_1 . L'axe Oy est horizontal, l'armature A_2 est fixe, l'armature A_1 , mobile horizontalement, est reliée à deux ressorts horizontaux de raideur $k/2$ de telle façon que la distance entre A_1 et A_2 soit e si les ressorts sont au repos et le condensateur déchargé. La position de A_1 sera repérée par sa distance y à A_2 .

3. À l'équilibre, Q_0 est la charge (portée par A_1) du condensateur, C_0 sa capacité et $y = y_0$. Donner l'expression de Q_0 et de la force électrique exercée sur A_1 en fonction de S, U_0 et y_0 .

4. Tracer le graphe de U_0 en fonction de y_0 . Montrer que pour des valeurs de U_0 inférieures à une valeur limite U_m que l'on déterminera, il y a deux positions d'équilibre dont on discutera la stabilité.



Analyse du problème

On va calculer la force qui s'exerce sur une des plaques du condensateur plan et étudier la stabilité de l'équilibre lorsque cette plaque est reliée à deux ressorts.



1. Le potentiel électrostatique doit vérifier l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dans le vide ($\rho = 0$), V doit vérifier l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

Calcul du potentiel électrostatique entre les armatures :

- Comme on néglige les effets de bord, la distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_z , donc V ne dépend pas de x et z : $V = V(y)$.
- L'équation de Laplace s'écrit : $\Delta V = \frac{d^2V}{dy^2} = 0$, donc $\frac{dV}{dy} = A$ et $V = Ay + B$. On utilise les conditions aux limites pour déterminer A et B :

$$\left| \begin{array}{l} V_1 = Ae + B \\ V_2 = B \end{array} \right.$$

d'où $A = \frac{V_1 - V_2}{e}$. On obtient :

$$V = \frac{V_1 - V_2}{e}y + V_2$$

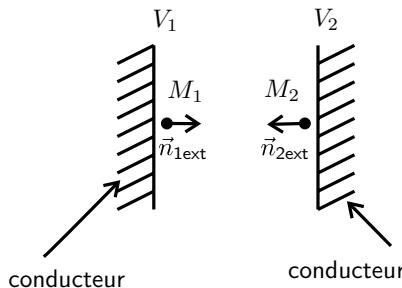
Calcul du champ électrostatique entre les armatures :

Le champ électrostatique vaut : $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{V_1 - V_2}{e}\vec{u}_y$, soit

$$\vec{E} = \frac{V_2 - V_1}{e}\vec{u}_y$$

On vérifie que le champ électrostatique est bien dirigé dans le sens des potentiels décroissants. Si $V_1 > V_2$, on a bien $E_y < 0$.

Calcul des densités surfaciques de charges :





Attention à bien orienter les surfaces vers l'extérieur en appliquant le théorème de Coulomb.



- On applique le théorème de Coulomb :

$$\vec{E}_{M1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1ext} = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{u}_y = \frac{V_2 - V_1}{e} \vec{u}_y, \text{ d'où :}$$

$$\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{e} \varepsilon_0$$

- $\vec{E}_{M2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \vec{n}_{2ext} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \vec{u}_y = \frac{V_2 - V_1}{e} \vec{u}_y, \text{ d'où :}$

$$\sigma_2 = \frac{V_2 - V_1}{e} \varepsilon_0$$

La charge Q_1 vaut : $Q_1 = \sigma_1 S = \frac{V_1 - V_2}{e} S \varepsilon_0$. On en déduit :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

2. Le champ créé par l'armature n°2 est le champ créé par un plan infini :

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{u}_y$$



Attention : ce n'est pas le champ qui existe entre les armatures. C'est uniquement la contribution du champ créé par la plaque n°2.



$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{u}_y$$

σ_2

Ce champ crée sur l'armature n°1 une force :

$$\vec{F} = (\sigma_1 S) \vec{E}_2 = (-\sigma_2 S) \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{u}_y = p S \vec{n}_{2ext}$$

avec $p = \frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon_0}$ et $\vec{n}_{2ext} = -\vec{u}_y$.

Cette force a tendance à arracher les charges de la plaque.

La force qui s'exerce sur l'armature n°1 vaut donc :

$$\vec{F} = \frac{-\sigma_2^2}{2\varepsilon_0} S \vec{u}_y = -\frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{V_1 - V_2}{e} \right)^2 \vec{u}_y$$

3. À l'équilibre, on a $y = y_0$ et $V_1 - V_2 = U_0$.

Or $\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{y_0} \varepsilon_0 = \frac{Q_0}{S}$, d'où : $Q_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_0}{y_0}$.

La force électrique qui s'exerce sur l'armature 1 est donc :

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U_0}{y_0} \right)^2 \vec{u}_y$$

4. • Système = {plaque n°1}

- Référentiel $\mathfrak{N} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces :

$$\text{Force électrique : } \vec{F}_0 = \vec{F}_{\text{élec}} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U_0}{y_0} \right)^2 \vec{u}_y$$

Force exercée par les deux ressorts :

$\vec{F}_1 = \vec{F}_{\text{ressorts}} = -\frac{k}{2} (y_0 - e) \vec{u}_y - \frac{k}{2} (y_0 - e) \vec{u}_y$ car la longueur du ressort est y_0 et la longueur à vide est e (puisque les deux ressorts sont dans un plan horizontal).

- Théorème de la quantité de mouvement à l'équilibre pour l'armature n°1 : $\vec{0} = \vec{F}_{\text{élec}} + \vec{F}_{\text{ressorts}}$. En projetant sur \vec{u}_x , on a :

$$-k (y_0 - e) - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U_0}{y_0} \right)^2 = 0, \text{ soit } \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2 y_0^2} = k (e - y_0) \text{ et}$$

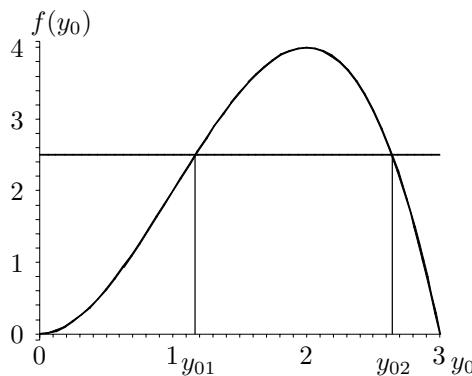
$$U_0^2 = \frac{2 k y_0^2}{\varepsilon_0 S} (e - y_0)$$

On pose $f(y_0) = y_0^2 (e - y_0)$. On a :

$$f'(y_0) = 2y_0(e - y_0) - y_0^2 = y_0(2e - 3y_0)$$

$$f'(y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0 \text{ ou } y_0 = \frac{2e}{3}.$$

La fonction f passe par un maximum pour $y_0 = \frac{2e}{3}$ car $f\left(\frac{2e}{3}\right) > 0$ et $f(0) = 0$.



Remarque : Il ne faut pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



On a alors : $U_{0\max}^2 = \frac{2k\left(\frac{2e}{3}\right)^2}{\varepsilon_0 S} \left(e - \frac{2e}{3}\right) = \frac{2k}{\varepsilon_0 S} \frac{4}{9} e^2 \frac{e}{3}$, soit :

$$U_{0\max}^2 = \frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}$$

Si $U_0 > U_{0\max}$, il n'y a pas de position d'équilibre.

Si $U_0 = U_{0\max}$, il y a une seule position d'équilibre pour $y_0 = \frac{2e}{3}$.

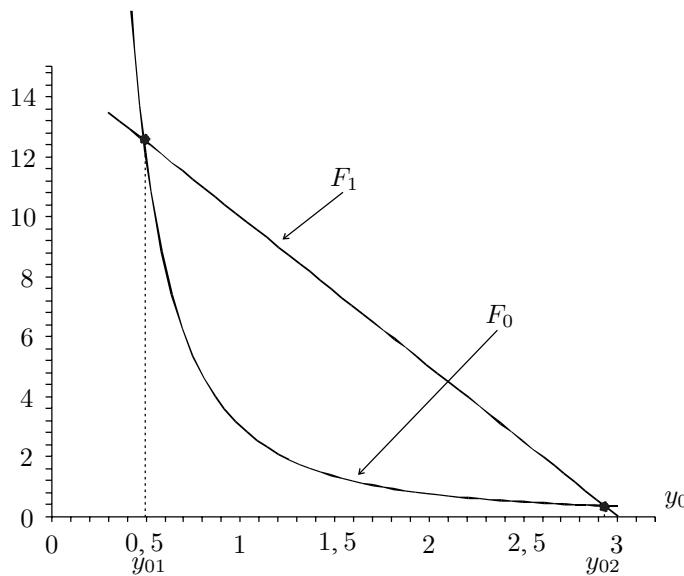
Si $U_0 < U_{0\max}$, il y a deux positions d'équilibre : y_{01} et y_{02} .

Pour étudier la stabilité, on écarte légèrement la plaque 1 de sa position d'équilibre et on regarde si la résultante des forces a tendance à la ramener vers sa position d'équilibre.

Pour pouvoir interpréter graphiquement la stabilité, il faut représenter les normes des forces en fonction de y_0 .

En projection sur \vec{u}_y , la résultante des forces vaut : $F = F_1 - F_0$ avec :

$$F_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U_0}{y_0}\right)^2 \text{ et } F_1 = k(e - y_0)$$



Remarque : Il ne faut pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



Les courbes F_1 et F_0 se coupent en deux points : y_{01} et y_{02} .

- Point n°1 : y_{01} . Si $y_0 > y_{01}$. On a $F_1 > F_0$. La force exercée par le ressort est plus importante que la force électrostatique. Le ressort étant comprimé, F a donc tendance à l'écartier encore plus de sa position d'équilibre. L'équilibre n°1 est donc instable.
- Point n°2 : y_{02} .
Si $y_0 > y_{02}$. On a alors $F_0 > F_1$. La force électrostatique l'emporte devant la force exercée par le ressort. Elle a tendance à le ramener vers sa position d'équilibre.
Si $y_0 < y_{02}$. On a alors $F_0 < F_1$. La force exercée par le ressort l'emporte devant la force électrostatique. Elle a tendance à le ramener vers sa position d'équilibre.
L'équilibre n°2 est donc stable.

Partie 4

Propagation

Plan

7. Propagation	169
7.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting (MP-PT)	169
7.2 : Propagation guidée et relation de dispersion (MP-PT)	174
7.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting (MP-PT)	178
7.4 : Réflexion sur un conducteur parfait (MP-PT)	181
7.5 : Cavité résonante (MP-PT)*	186
7.6 : Rayonnement dipolaire (MP)	191
7.7 : Effet de peau et ARQS (PT)	194
7.8 : Plasma (MP-PT)	200
7.9 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère (MP-PT)	205
7.10 : Polarisation des ondes (MP)	210

Propagation

Exercice 7.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting (MP-PT)

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage suivant l'axe Ox . Le champ électrique est polarisé suivant \vec{u}_y .

1. Établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.
2. Déterminer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
3. Déterminer le flux du champ magnétique à travers un cadre carré de côté $a = 1$ m, formé de N spires et situé dans un plan perpendiculaire à \vec{u}_z pour une fréquence $f = 100$ MHz.
4. Que se passe-t-il si la fréquence vaut $f = 160$ kHz ?

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une OPPM polarisée suivant \vec{u}_y . On verra une méthode systématique pour établir l'équation de propagation. On pourra en déduire la relation de dispersion.

Le calcul du champ magnétique peut se faire avec les opérateurs $\text{rot } \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ ou $\text{rot } \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ puisqu'on a une OPPM. Dans le cas contraire, il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

Attention à bien revenir en grandeurs réelles pour calculer le vecteur de Poynting. On va comparer la longueur d'onde à la dimension a du cadre et remarquer que l'on peut faire un calcul simplifié si la longueur d'onde est très grande devant a .

Cours : Définition d'une onde plane progressive monochromatique

On étudie la propagation du champ électrique suivant l'axe Ox .

L'onde est **plane** si le champ électrique prend des valeurs uniformes pour tout plan perpendiculaire à la direction de propagation (ici direction \vec{u}_x). Le plan perpendiculaire à la direction de propagation est appelé **plan d'onde**.

L'onde est **progressive** si le champ électrique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x(x - ct) \\ E_y(x - ct) \\ E_z(x - ct) \end{vmatrix}$$

On appelle c la célérité de l'onde.

L'onde est progressive, polarisée suivant \vec{u}_y , donc

$$\vec{E} = E(x - ct)\vec{u}_y$$

L'onde est plane, progressive, harmonique et polarisée suivant \vec{u}_y donc le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

Pour une OPPM dans le vide, on va démontrer que

$$\omega = kc$$

En notation complexe, on a : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y$.



1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère : } \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On n'a pas de charges et de courants volumiques.

Cours : Méthode systématique pour écrire l'équation de propagation en électromagnétisme

On calcule le rotationnel du rotationnel du champ électrique ou du champ magnétique. Il faut connaître par coeur la formule :

$$\vec{\operatorname{rot}} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$



On déduit des équations de Maxwell que :

$$\vec{\operatorname{rot}} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

puisque $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$ dans le vide.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

Cours : Méthode pour obtenir la relation de dispersion

Dans l'exercice, le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

Il suffit de reporter le champ électrique dans l'équation de propagation pour en déduire la relation de dispersion.



On a alors :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

On obtient la relation de dispersion d'une OPPM dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Cours : Expression du champ magnétique en fonction du champ électrique

Le champ électrique est de la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$.

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} ; \text{rot } \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \text{div } \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Remarque : On peut utiliser une autre convention dans les autres exercices.

Le champ électrique complexe peut se mettre sous une autre forme :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(-i(\omega t - kx)) \vec{u}_y.$$

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs mais avec des signes différents :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}} ; \text{rot } \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \text{div } \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$



Les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ ne sont utilisables que pour une OPPM avec les coordonnées cartésiennes.

Si on ne peut pas utiliser les opérateurs simplifiés précédents, il faut écrire l'équation de Maxwell-Faraday et en déduire par le calcul du rotationnel le champ magnétique.



On a une OPPM. Le champ magnétique se déduit directement de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -\left(i\omega \underline{\vec{B}}\right)$$

Finalement, on a :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

On a vu que $\omega = kc$. On a également :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y ; \quad \vec{B} = \operatorname{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

On vérifie que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est bien direct.



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes.



Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On a vu que $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. On a donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting sur une période est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x$$

car la moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t - kx)$ vaut $\frac{1}{2}$.

On considère une surface S orthogonale à la direction de propagation. On choisit $\vec{S} = S \vec{u}_x$.

La puissance moyenne qui traverse la surface S est le flux du vecteur de Poynting :

$$P_{moy} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S$$

3. La fréquence de l'onde est $f = 100$ MHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande FM (modulation de fréquence). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est du même ordre de grandeur que a . On ne peut pas supposer que le champ magnétique est uniforme dans le cadre.

On oriente le cadre suivant suivant \vec{u}_z .

Le flux du champ magnétique en notation complexe à travers une spire :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \underline{B} \cdot d\underline{S}$$

On a alors :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) dx dy$$

Il faut intégrer x entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et y entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Comme les variables sont indépendantes, on a le produit de deux intégrales :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} dy \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \left[\frac{\exp(-ikx)}{-ik} \right]_{-a/2}^{a/2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(i\omega t) \left(\exp\left(-ik\frac{a}{2}\right) - \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) \right)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(2i\omega t) \left(2i \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right) = \frac{2E_0 a}{kc} \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Il reste à prendre la partie réelle pour obtenir le flux réel :

$$\varphi = \frac{2E_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

- 4.** La fréquence de l'onde électromagnétique est $f = 160$ kHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande AM (modulation d'amplitude). La longueur d'onde est : $\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{160 \times 10^3} = 1875$ m.

La longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre. Sur une distance de 1 m, le champ magnétique est quasi uniforme et quasiment la même valeur qu'en $x = 0$. On peut alors calculer le flux plus simplement que dans la question précédente.

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = N \left(\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \right) (a^2)$$

On peut effectuer un développement limité de la relation trouvée dans la question précédente puisque

$$\frac{ka}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{2}a = \frac{\pi a}{\lambda} \ll 1$$

On retrouve bien le même résultat :

$$\Phi = \frac{2NE_0a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t) \approx \frac{2NE_0a}{kc} \frac{ka}{2} \cos(\omega t) = N \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) a^2$$

Remarque : Il est important de bien raisonner sur la longueur d'onde. Si la longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre, on peut supposer que le champ magnétique est quasi uniforme au niveau du cadre et le calcul du flux du champ magnétique est beaucoup plus simple.

Exercice 7.2 : Propagation guidée et relation de dispersion (MP-PT)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide suivant \vec{u}_z entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans la vide.

1. Établir l'équation de propagation.

2. On cherche le champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$. Établir la relation de dispersion. Montrer que l'on doit avoir une fréquence supérieure à une fréquence minimale f_{\min} pour avoir propagation de cette onde. Déterminer f_{\min} en fonction de c et d . Quelle est la nature de l'onde ?

Analyse du problème

La méthode systématique pour établir l'équation de propagation est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique. On en déduit une équation différentielle sur $E(x)$. On a des conditions aux limites qui imposent des contraintes sur le champ électrique et qui permettent d'en déduire la relation de dispersion.

Cours : Conducteur parfait

On appelle conducteur parfait un conducteur ohmique dont la conductivité est infinie :

- Le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans le conducteur.

- Il n'y a pas de charges et de courants volumiques dans le conducteur. Par contre, on peut avoir des charges et des courants en surface.
- On utilisera les relations de passage pour le champ électrique et pour le champ magnétique.



1. On calcule le rotationnel du rotationnel en utilisant les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

puisque dans le vide $\text{div} \vec{E} = \vec{0}$.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

2. On cherche le champ électrique en notation complexe de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y.$$

On remplace le champ électrique dans l'équation de propagation et on calcule les différents termes.



Attention au calcul du Laplacien en coordonnées cartésiennes.

Le Laplacien scalaire est :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U$$

Le Laplacien vectoriel est :

$$\Delta \vec{a} = \begin{cases} \Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Cette formule sera souvent utilisée pour la propagation des ondes.

On ne peut pas généraliser cette formule en coordonnées cylindriques et sphériques.



Le Laplacien vectoriel du champ électrique est :

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E}_y &= \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} \\ &= \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz))\end{aligned}$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

On remplace dans l'équation de propagation :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E(x) \exp(i(\omega t - kz))\end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur $E(x)$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$$

Conditions aux limites

On applique les relations de passage au niveau des conducteurs pour $x = 0$ et $x = d$. On doit avoir continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

Première condition pour $x = 0$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = 0$, le champ est suivant \hat{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(0) = 0$$

Deuxième condition pour $x = d$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = d$, le champ est suivant \hat{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(d) = 0$$

Plusieurs cas pour la résolution de l'équation différentielle

Premier cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$

On pose $\Omega^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \Omega^2 = 0$$



Attention à l'écriture de l'équation caractéristique. Il ne faut pas écrire $r^2 - \Omega^2 r = 0$!



On a deux racines réelles : $r_1 = \Omega$ et $r_2 = -\Omega$.

On a des solutions de la forme :

$$E(x) = A \operatorname{ch} \Omega x + B \operatorname{sh} \Omega x$$



Ne pas utiliser cette forme si la distance entre les deux plaques est considérée comme infinie. On utilisera des solutions de la forme :

$$E(x) = A' \exp(\Omega x) + B' \exp(-\Omega x)$$



On doit avoir $E(0) = 0 = A$ et $E(d) = B \operatorname{sh}(\Omega d) = 0$, soit $A = B = 0$. Le champ est toujours nul. On n'a pas de propagation d'onde.

Deuxième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

La seule solution est d'avoir un champ nul.

Troisième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$

On pose $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

$E(x)$ se met alors sous la forme :

$$E(x) = A \cos \Omega x + B \sin \Omega x$$

On a deux conditions aux limites :

- $E(0) = 0$, donc $A = 0$.
- $E(d) = 0$. On doit donc avoir $\Omega d = n\pi$ avec n entier positif.

On a une condition de quantification :

$$\Omega = n \frac{\pi}{d}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Pour avoir $k^2 > 0$, il faut que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Soit : $\frac{4\pi^2 f^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$. La condition est donc :

$$f > n \frac{c}{2d}$$

avec n entier positif.

Le champ électrique est donc :

$$\vec{E} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le champ électrique est une **onde progressive monochromatique polarisée suivant \vec{u}_y** .

L'onde se propage dans la direction \vec{u}_z . Si on considère un plan $z = cte$, le champ électrique n'est pas uniforme car il dépend de x .

Le champ électrique n'est donc pas une onde plane.

La fréquence minimale pour avoir propagation de l'onde est :

$$f_{\min} = \frac{c}{2d}$$

Exercice 7.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting (MP-PT)

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans la vide. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$.

1. Calculer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
2. Représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation. Interprétation physique.

Analyse du problème

Pour calculer le champ magnétique, on ne peut pas utiliser les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ car on n'a pas une OPPM avec les coordonnées cartésiennes. Il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

La relation de dispersion s'obtient en reportant le champ électrique dans l'équation de propagation.

- 
1. On remarque que le champ électrique est nul pour $x = 0$ et $x = d$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $x = 0$ et $x = d$ puisqu'on a un conducteur parfait.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit en notation complexe :

$$\text{rot} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial E_y}{\partial x} & -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Calcul de B_x :

$$\frac{\partial \underline{B}_x}{\partial t} = \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -ikE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$\underline{B}_x = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_x = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Calcul de B_z :

$$\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} = -E_0 \frac{\pi}{d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{B}_z &= -\frac{E_0 \pi}{i \omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz)) \\ &= \frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \exp\left(i\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_z = -\frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \sin(\omega t - kz)$$



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes. Par contre, le calcul du champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday peut se faire en notation complexe ou en notation réelle car les équations de Maxwell sont linéaires.



$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{d\omega}E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t - kz) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu_0\omega}E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \end{vmatrix}$$

puisque $\langle \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$.

La seule composante non nulle du vecteur de Poynting correspond à la direction de propagation de l'onde.

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde.

La puissance moyenne transportée par cette onde est :

$$P_{moy} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \frac{kS}{2\mu_0\omega} E_0^2$$

2. La vitesse de phase est : $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Il faut déterminer la relation de dispersion pour exprimer la vitesse de phase en fonction de ω . Pour cela on reporte le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ dans l'équation de propagation.

Dans le vide, l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On projette sur \vec{u}_y :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{d^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \end{aligned}$$

On a donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$$

Il faut avoir $k^2 > 0$. La pulsation ω doit être supérieure ω_{\min} définie par :

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{d}$$

La vitesse de phase peut se mettre sous la forme :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^2}}$$

La vitesse de groupe est :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)$$

Remarque : On peut calculer plus simplement la vitesse de groupe avec la différentielle de la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$.



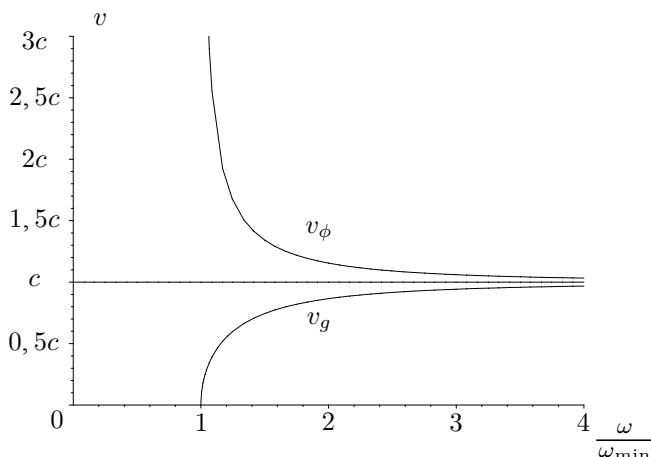
On obtient :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

On en déduit que :

$$v_g v_\phi = c^2$$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_{\min}}$.



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 7.4 : Réflexion sur un conducteur parfait (MP-PT)

Une onde plane monochromatique se propage dans le vide. Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

1. L'onde rencontre en $z = 0$ un plan métallique parfait et l'espace $z > 0$ est occupé par un métal parfait. Montrer qu'il y a une onde réfléchie. On note $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ le champ réfléchi. Établir l'expression de \underline{E}_{r0} .
2. Déterminer le champ magnétique dans la région $z < 0$. De quel type d'ondes s'agit-il ?
3. On place en $z = -\ell$ un second plan métallique identique au premier. En introduisant un entier N préciser les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir entre les deux plans. Qu'implique les relations de passage en $z = 0$ et $z = -\ell$ concernant le champ magnétique ?
4. Quelle est la densité moyenne d'énergie volumique ? Quelle est l'expression de l'énergie électromagnétique moyenne localisée dans un cylindre de section S de longueur ℓ de génératrices parallèles à Oz ?

Analyse du problème

Il s'agit d'un exercice avec la réflexion d'une onde sur un conducteur parfait. On écrit la relation de passage du champ électrique pour montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchie et en déduire ses caractéristiques. On obtient des ondes stationnaires.



1. On remarque que le champ électrique est nul pour $z = 0$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$. On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) = 0$$

Cette condition n'est pas réalisée si $E_0 \neq 0$. On a donc nécessairement une onde réfléchie. Elle se met sous la forme la plus générale : $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$.

La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$. On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) + \underline{E}_{r0} \exp(i\omega't) = 0$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout instant t , on a nécessairement $\omega = \omega'$ et comme la relation de dispersion est $\omega = kc$, alors $k' = k$. L'amplitude de l'onde réfléchie doit vérifier la relation :

$$\underline{E}_{r0} = -E_0$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie est :

$$\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$$

2. Onde incidente :

On a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage dans le vide. Le champ magnétique est donné par la relation :

$$\underline{\vec{B}_i} = \frac{\vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}_i}}{\omega} = \frac{k\vec{u}_i \wedge \underline{\vec{E}_i}}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c}$$

Soit :

$$\underline{\vec{B}_i} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchie :

On peut utiliser le même formalisme pour l'onde réfléchie.

$$\underline{\vec{B}_r} = \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}_r}}{\omega} = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge (-E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x)}{c}$$

Soit :

$$\underline{\vec{B}_r} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$$

Calcul du champ électrique résultant :

$$\begin{aligned}\underline{E} &= E_0 \exp(i(\omega t - kz)) - E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) - \exp(ikz)]\end{aligned}$$

D'où

$$\underline{E} = -2iE_0 \exp(i\omega t) \sin(kz) = 2E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$$

Calcul du champ magnétique résultant :

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) + \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)]\end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{B} = \frac{2E_0}{c} \exp(i\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$$

On obtient une **onde stationnaire**. Elle ne se propage pas car elle est de la forme $f(z)g(t)$.

3. On doit avoir en $z = -\ell$ un champ électrique nul pour vérifier les conditions de passage pour le champ électrique :

$$\vec{E}(-\ell) = \vec{0} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(-k\ell) \vec{u}_x$$

soit $k\ell = N\pi$ avec N entier.

k est le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde. On a :

$$k\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell = N\pi$$

D'où :

$$\lambda = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence est notée f ou ν . Elle est reliée à la longueur d'onde λ par la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence de l'onde doit vérifier la relation :

$$\nu = N \frac{c}{2\ell}$$

avec N entier positif.

Relation de passage pour $z = 0$:

On appelle côté 1 la région $z = 0^+$ et côté 2 la région $z = 0^-$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = 0$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z)$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (-\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Relation de passage pour $z = -\ell$:

$z = -\ell$: On appelle côté 1 la région $z = -\ell^-$ et côté 2 la région $z = -\ell^+$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = -\ell$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1).$$

D'où :

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{u}_z \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y = \frac{-2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{-2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

Interprétation physique

On obtient des courants surfaciques pour $z = 0$ et $z = -\ell$.

L'onde incidente qui arrive sur le métal met en mouvement les électrons qui sont à l'origine d'un champ réfléchi de même pulsation puisque les équations de Maxwell sont linéaires.

Comme le conducteur est parfait, les courants sont surfaciques.

4. Attention : il faut utiliser les notations réelles car on a le produit de grandeurs sinusoïdales. La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)}{2} + \frac{4E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)}{2\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

soit :

$$u_{em} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

La moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\langle u_{em} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \cos^2(kz)$$

Finalement, on obtient :

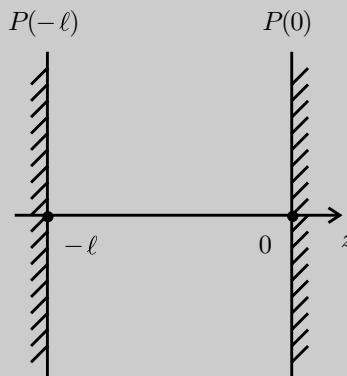
$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

L'énergie électromagnétique moyenne localisée dans le cylindre de section S et de longueur ℓ est :

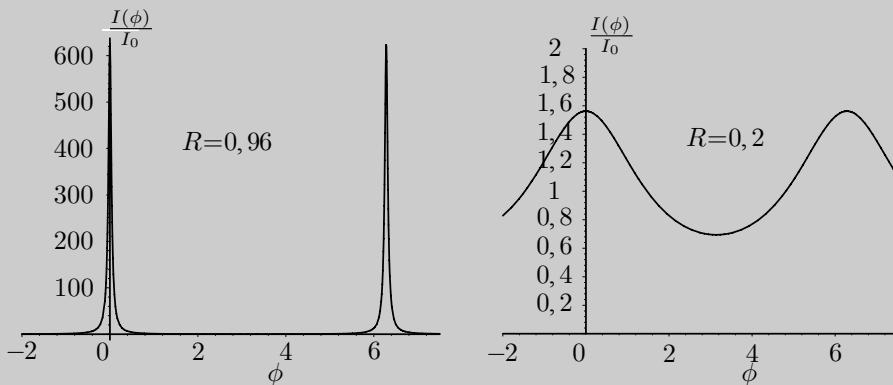
$$\langle U_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 S \ell$$

Exercice 7.5 : Cavité résonante (MP-PT)*

On considère deux plans disposés en $z = 0$ et $z = -\ell$. Un champ électromagnétique peut se propager entre ces deux plans. On appelle r le coefficient de réflexion pour le champ électrique avec $-1 < r < 0$. Un dispositif non représenté crée en $z = -\ell$ à $t = 0$ une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note \vec{E}_1 le champ électrique se propageant dans le sens positif, après avoir subi une réflexion sur $P(0)$ puis une sur $P(-\ell)$. On pose $\phi = 2k\ell$, $R = r^2$ et $I_0 = E_0^2$.



1. Écrire l'expression de \vec{E}_1 à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$.
2. Écrire de même l'expression des champs $\vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$ se propageant dans le sens positif après avoir subi respectivement : 2 réflexions en $P(0)$, 2 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_2 , 3 réflexions en $P(0)$, 3 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_3 , n réflexions en $P(0)$ et n réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_n .
3. On pose $\vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_n$. Exprimer à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$ l'amplitude A de \vec{E} . On pose $I = A \cdot A^*$ et $I_0 = E_0^2$. Exprimer l'intensité I à l'aide de I_0 , R et ϕ . On représente les courbes $\frac{I(\phi)}{I_0}$ pour $R = 0,2$ et pour $R = 0,96$. Calculer le contraste pour les deux courbes ?



4. Déterminer pour $R = 0,96$ les fréquences pouvant se propager avec une intensité non négligeable. Quel est l'intérêt du dispositif ?

Application numérique : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $\ell = 0,30 \text{ m}$; $R = 0,96$.

Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence du coefficient de réflexion sur le champ résultant dans une cavité et montrer que l'on peut avoir des champs électriques avec des amplitudes importantes et retrouver des ondes stationnaires étudiées dans l'exercice précédent.

On a une OPPM qui se propage dans le vide. On a établi dans l'exercice précédent l'équation de propagation et la relation de dispersion : $\omega = kc$.



1. On considère une onde incidente de la forme : $E_0 \exp(i(\omega t - kz))$. Elle arrive en $z = 0$ à l'instant $t = t_1 = \frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_1$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$rE_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + kz\right)\right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > \frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $+kz$ car l'onde se propage suivant $-\vec{u}_z$.



En développant, on a :

$$rE_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{\omega\ell}{c}\right)\right)$$

D'après l'énoncé, on a :

$$\frac{\omega\ell}{c} = \frac{kc}{c}\ell = k\ell = \frac{\phi}{2}$$

L'onde réfléchie peut se mettre sous la forme :

$$rE_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{\phi}{2}\right)\right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_2 = 2\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_2$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$r^2 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{2k\ell}{c}\right) - kz\right)\right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > 2\frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $2\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $-kz$ car l'onde se propage suivant $+\vec{u}_z$.



L'onde peut s'écrire :

$$r^2 E_0 \exp(i(\omega t - kz - \phi))$$

D'après l'énoncé, on pose $R = r^2$.

Le champ électrique $\underline{\vec{E}}_1$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_1 = RE_0 \exp(i(\omega t - kz - \phi)) \vec{u}_x$$

2. Cette onde arrive en $z = 0$ pour $t = t_3 = 3\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_3$:

On a une troisième réflexion en $z = 0$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^3 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{3k\ell}{c}\right) + kz\right)\right)$$

On a donc :

$$r^3 E_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{3\phi}{2}\right)\right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_4 = 4\frac{\ell}{c}$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

Pour $t > t_4$:

On a une quatrième réflexion en $z = -\ell$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^4 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{4k\ell}{c}\right) - kz\right)\right)$$

On a donc :

$$r^4 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi))$$

Le champ électrique $\underline{\vec{E}}_2$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_2 = R^2 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi)) \vec{u}_x$$

On peut généraliser facilement et en déduire le champ électrique $\underline{\vec{E}}_n$, qui peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_n = R^n E_0 \exp(i(\omega t - kz - n\phi)) \vec{u}_x$$

3. Le champ résultant est :

$$\underline{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) [1 + R \exp(-i\phi) + R^2 \exp(-i2\phi) + \dots + R^n \exp(-in\phi) + \dots]$$

On peut mettre le champ électrique sous la forme $\underline{E} = \underline{A} \exp(i(\omega t - kz))$ avec \underline{A} qui correspond à la suite géométrique.

L'amplitude du champ résultant est :

$$\underline{A} = \frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)}$$

puisque $R < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n \rightarrow 0$.

L'intensité est :

$$\begin{aligned} I &= \underline{A} \underline{A}^* = \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)} \right) \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(i\phi)} \right) \\ &= \frac{E_0^2}{1 - R e^{i\phi} - R e^{-i\phi} + R^2} \end{aligned}$$

On obtient :

$$I = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

en posant : $I_0 = E_0^2$.

Le contraste est défini par :



$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$



I_{\max} est obtenu pour $\phi = 0$, soit $I_{\max} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R}$

I_{\min} est obtenu pour $\phi = \pi$, soit $I_{\min} = \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R}$

Calcul de $I_{\max} + I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} + I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} + \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R + 1 + R^2 - 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} + I_{\min} = \frac{2I_0 (1 + R^2)}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Calcul de $I_{\max} - I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} - I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} - \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R - 1 - R^2 + 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{4RI_0}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Le contraste vaut :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

Pour $R = 0,96$: $C = 0,999$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 625$.

Pour $R = 0,2$: $C = 0,38$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 1,56$.

On a un contraste bien meilleur pour $R = 0,96$. On a une résonance très précise.

4. On cherche les fréquences qui peuvent se propager.

Pour avoir une intensité qui ne soit pas négligeable, il faut avoir

$$\phi = 2\pi N = 2k\ell = 2\frac{2\pi}{\lambda}\ell = \frac{4\pi}{cT}\ell = \frac{4\pi\ell}{c}\nu$$

La condition sur la fréquence est :

$$\nu = \frac{c}{2\ell}N$$

Application numérique pour $N = 1$: $\nu = 500$ MHz.

Les fréquences multiples de 500 MHz donnent donc très rapidement des ondes stationnaires d'amplitude non négligeable (voir exercice précédent où on cherche directement la solution sous la forme d'ondes stationnaires).

On a donc une cavité résonante avec amplification du signal d'entrée.

Interprétation qualitative :

- Soit $2\ell = ct'$ avec t' le temps mis à parcourir la zone d'interaction. Si le signal a une période égale à $\frac{2\ell}{c}$, l'onde qui subit deux réflexions est en phase avec l'onde incidente. Le champ résultant sera donc plus grand que le champ de l'onde incidente. Comme le coefficient de réflexion est proche de 1, peu d'énergie est perdue à chaque réflexion. Il faut donc un très grand nombre de réflexions avant d'avoir une amplitude négligeable. On

a vu que l'intensité est 625 fois plus importante que l'intensité de l'onde incidente.

- Si la période du signal est N fois plus petite que $\frac{2\ell}{c}$, ou une fréquence N fois plus grande que $\frac{c}{2\ell}$, on a encore une amplification du signal.
- Par contre, si la fréquence de l'onde incidente est différente de $N\frac{c}{2\ell}$, l'intensité résultante est quasi nulle. On a une amplification très sélective.

Remarque : On peut calculer la largeur à mi-hauteur définie par $I\left(\phi \pm \frac{\Delta\phi}{2}\right) \geq \frac{I_{\max}}{2}$. On peut en déduire la largeur $\Delta\nu$ en fréquence avec la relation $\Delta\nu = \frac{\Delta\phi c}{4\pi\ell}$. Pour avoir une résonance très précise, il faut donc allonger la cavité.



Pour réaliser un laser, on utilise une cavité résonante constituée de deux miroirs.

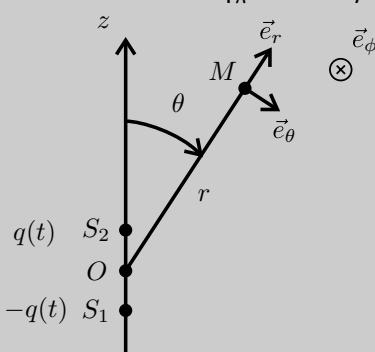
Exercice 7.6 : Rayonnement dipolaire (MP)

On étudie le rayonnement électromagnétique émis par un dipôle électrique constitué des charges $-q(t)$ et $q(t)$, placées dans le vide. On associe à la charge $q(t) = q_0 \cos \omega t$ la notation complexe $\underline{q}(t) = q_0 \exp(j\omega t)$. On modélise les charges du dipôle par deux petites sphères de capacités négligeables, reliées par un fil conducteur de résistance nulle. Les variations de q engendrent un courant variable $i(t)$ entre S_1 et S_2 . On pose $a = S_1 S_2$. Le champ électromagnétique

rayonné par le dipôle oscillant à grande distance est : $\vec{E} = \frac{\mu_0 \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta}{4\pi r}$;

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\phi}{r}.$$

On rappelle que $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.



1. Donner l'expression de l'amplitude p_0 du moment dipolaire électrique $p(t)\vec{e}_z$. Exprimer l'amplitude complexe \underline{i}_0 de l'intensité $\underline{i}(t)$, du courant parcourant le fil conducteur $S_1 S_2$, en fonction de a , ω et p_0 .

2. On appelle λ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique émise. On suppose que $r \gg \lambda \gg a$. Quelle est la nature de l'approximation ? Quelle relation existe-t-il entre \vec{E} et \vec{B} ?

3. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Calculer la puissance moyenne P_m , rayonnée par ce dipôle, à travers une sphère de centre O et de rayon r . On désigne par \Re la résistance de rayonnement telle que : $P_m = \frac{1}{2} \Re i_0^2$. Montrer que $\Re = k \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ où k est une constante que l'on exprimera en fonction de μ_0 et c .

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde émise par un dipôle rayonnant. Pour calculer le vecteur de Poynting, il faut revenir aux notations réelles.



1. Le moment dipolaire est : $\vec{p} = q \overrightarrow{S_1 S_2} = q_0 a \cos(\omega t) \vec{e}_z$
L'amplitude du moment dipolaire est donc :

$$p_0 = q_0 a$$

L'intensité du courant électrique qui parcourt le fil orienté de S_1 vers S_2 est : $i = \frac{dq}{dt}$.

En notation complexe, on a : $\underline{i} = \frac{dq}{dt} = j\omega \underline{q} = j\omega q_0 \exp(j\omega t)$.

L'amplitude complexe de \underline{i} est donc :

$$\underline{i}_0 = j\omega q_0 = j\omega \frac{p_0}{a}$$

2. $r \gg a$: approximation dipolaire. On étudie le champ créé par ce dipôle à grande distance devant ses dimensions.

$\lambda \gg a$: mouvement non relativiste des charges. En effet, la longueur d'onde est reliée à la période de l'onde par : $\lambda = cT$. On a donc $c \gg \frac{a}{T}$. On appelle v une vitesse caractéristique des charges. $c \gg v$ traduit donc un mouvement non relativiste des charges.

La relation entre \vec{E} et \vec{B} est :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

puisque la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ est orthonormée directe.

Remarque : on retrouve localement la structure d'une onde plane progressive monochromatique.



3. Le champ électrique de l'onde émise est :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \sin \theta \vec{e}_\theta}{r} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Le champ magnétique de l'onde émise est :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0^2 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 \mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \sin^2 \theta \vec{e}_r$$



Il faut passer en notations réelles pour calculer le vecteur de Poynting !



La moyenne temporelle de la fonction $\cos^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)$ sur une période vaut $\frac{1}{2}$. On a donc : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 \mu_0 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$

Comme $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$, on a alors : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0^2 \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4 p_0^2}{32\pi^2 r^2 \mu_0 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r$. D'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2r^2 \lambda^4} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

La puissance moyenne P_m , rayonnée par ce dipôle, à travers une sphère de centre O et de rayon r est :

$$P_m = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2r^2 \lambda^4} \sin^2 \theta \vec{e}_r \cdot (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) \vec{e}_r$$

Pour décrire la sphère, on intègre θ entre 0 et π , ϕ entre 0 et 2π .

$$P_m = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2\lambda^4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \right) \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right) = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 p_0^2}{2\lambda^4} \frac{4}{3} 2\pi$$

On a vu que $i_0 = j\omega q_0 = j\omega \frac{p_0}{a}$, soit en module : $i_0 = \omega \frac{p_0}{a} = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{p_0}{a}$.

$$\text{On a alors : } P_m = \frac{\mu_0 \pi^2 c^3 \left(\frac{i_0 a \lambda}{2\pi c}\right)^2}{2\lambda^4} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu_0 \pi c}{3} \frac{a^2}{\lambda^2} \right) i_0^2$$

Le coefficient k vaut : $\frac{2\mu_0 \pi c}{3}$.

Exercice 7.7 : Effet de peau et ARQS (PT)

Une onde électromagnétique se propage dans l'air dans le demi-espace $x < 0$ vers un conducteur métallique de conductivité γ , de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de permittivité ε_0 , occupant le demi-espace $x > 0$. L'onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$ donne naissance à une onde réfléchie $\vec{E}_R = \underline{E}_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_z$ et à une onde transmise $\vec{E}_T = \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$ (k_R est réel alors que \underline{E}_{0R} , \underline{E}_{0T} et \underline{k}_T sont a priori complexes). On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_r \mu_0 \gamma \omega}}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \omega}{\gamma \mu_r}}$.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}; \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}; \mu_r = 102; \gamma = 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$f = 10 \text{ kHz} \text{ et } c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

1. Montrer que $\rho(M, t)$ tend très rapidement vers 0. On considère que $\rho(M, t) = 0$ par la suite.

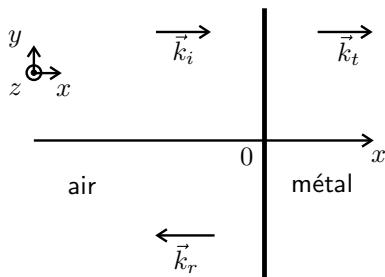
2. Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement dans le métal valent moins de un pour cent des courants de conduction ? On travaillera dans l'ARQS par la suite. Établir la relation de dispersion. Interpréter physiquement la partie réelle et la partie imaginaire de \underline{k}_T . Calculer δ .

3. Les champs magnétiques complexes incident, réfléchi et transmis s'écrivent : $\vec{B}_i = a_i \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$, $\vec{B}_r = a_R \underline{E}_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_T = a_T \exp(i\phi_T) \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_y$. Exprimer les coefficients a_i , a_R , a_T et le déphasage ϕ_T en fonction de c , ω et δ .

4. Écrire les relations de passage pour les champs électrique et magnétique dans le plan $x = 0$ et trouver deux relations entre \underline{E}_{0R} , \underline{E}_{0T} , E_0 et α . Montrer que $\alpha \ll 1$. Exprimer $\vec{E}_T(M, t)$ dans le métal.

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un métal de conductivité finie. En écrivant les équations de Maxwell, on trouve l'équation de propagation et la relation de dispersion. Dans une certaine gamme de fréquences, on simplifie la relation de dispersion. On a une onde qui s'atténue très rapidement dans le métal. On met en évidence une profondeur de pénétration dans le métal qui correspond à la partie imaginaire du vecteur d'onde.



1. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$



Attention : la perméabilité vaut μ et non μ_0 .



La loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

L'équation de conservation de la charge est : $\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On a donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$.

L'équation différentielle vérifiée par ρ est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$.

La résolution donne : $\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 8,8 \times 10^{-19}$ s. Au bout de quelques τ on peut considérer que $\rho = 0$. On pourra donc supposer par la suite que le conducteur métallique est globalement neutre.

2. Condition pour être dans l'ARQS

On cherche la condition pour négliger les courants de déplacement, c'est-à-dire à se placer dans le cadre de l'ARQS (approximation des régimes quasi stationnaires). On doit avoir :

$$\left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{\varepsilon_0 2\pi f}{\gamma} \leqslant \frac{1}{100}$$

La condition pour être dans l'ARQS est donc : $f \leqslant \frac{\gamma}{200\pi\varepsilon_0}$, soit :

$$f \leqslant 1,8 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Équation de propagation

La méthode est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

On a donc :

$$-\Delta\vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\gamma\vec{E})$$

On obtient l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On obtient une **équation de diffusion**. Elle est irréversible parce qu'on a une dérivée première par rapport au temps. C'est prévisible puisqu'on a une dissipation d'énergie par effet Joule dans le métal à cause de la conductivité finie.

Remarque : On rencontre plusieurs phénomènes diffusifs en physique : diffusion thermique, diffusion de particules, diffusion de quantité de mouvement au sein des fluides visqueux, effet de peau en électromagnétisme...



Relation de dispersion

La méthode générale pour obtenir la relation de dispersion est de remplacer $\vec{E}_T = \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$ dans l'équation différentielle précédente en utilisant la notation complexe.

$$\Delta\vec{E} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = (-\underline{k}_T^2)\vec{E} = \mu\gamma i\omega\vec{E}$$

On a : $\underline{k}_T^2 = -(\mu\gamma i\omega) = i^2(\mu\gamma i\omega)$.



Il faut penser à écrire : que $-1 = i^2$ pour pouvoir écrire par la suite la racine carree.



On a donc :

$$\underline{k}_T = \pm \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

Comme $\exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$\underline{k}_T = \pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

On a deux solutions : $\underline{k}_{T1} = \frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}$ et $\underline{k}_{T2} = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$.

Solution n°1 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{T1} &= \underline{E}_{0T1} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\right)\end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x < 0$.

Remarque : On a bien un amortissement car x diminue quand l'onde se propage.



Solution n°2 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{T2} &= \underline{E}_{0T2} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)\end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x > 0$.

La seule solution physiquement acceptable est la solution n°2 puisque le métal est illimité et qu'il ne peut donc pas y avoir d'onde réfléchie dans le métal. On a donc :

$$\underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

La partie réelle correspond au terme de propagation.

La partie imaginaire correspond au terme d'amortissement.

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de cette onde dans le milieu :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(\underline{k}_T)} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation. Les différentes ondes ne se propagent pas à la même vitesse. On dit que le milieu est dispersif.

δ est appelé la profondeur de pénétration dans le métal.

Au bout de quelques δ , le champ électrique a une amplitude négligeable dans le métal.

Application numérique :

$$\delta = 50 \text{ } \mu\text{m}$$

3. Dans l'air, l'indice vaut 1. La relation de dispersion s'écrit pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM) : $\omega = kc$. On a : $\vec{k}_i = k \vec{u}_x$ et $\vec{k}_r = -k \vec{u}_x$. Soit :

$$\|\vec{k}_R\| = \|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}\| = k_R = k_i = k$$

On a des OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut donc utiliser les opérateurs : $\vec{\operatorname{rot}} \underline{\vec{E}} = -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$ et $\frac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}}$.



Il faut bien lire l'énoncé, car il existe deux conventions pour l'écriture en complexes !!!



Pour une OPPM, on a : $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega}$. On en déduit les champs magnétiques :

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{k \vec{u}_x \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z}{\omega} = -\frac{kE_0}{\omega} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_R = \frac{-k \vec{u}_x \wedge E_{0R} \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_z}{\omega} = \frac{kE_{0R}}{\omega} \exp(i(\omega t + kx)) \vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{B}}_T = \frac{k_T \vec{u}_x \wedge E_T \exp(i(\omega t - k_T x)) \vec{u}_z}{\omega} = -\frac{k_T E_T}{\omega} \exp(i(\omega t - k_T x)) \vec{u}_y$$

Dans le conducteur, on a : $k_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} = \frac{1}{\delta} \sqrt{2} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)$, d'où

$$-\frac{k_T}{\omega} = \frac{-\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right)$$

On obtient finalement :

$$a_i = \frac{-1}{c}; a_R = \frac{1}{c}; a_T = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta}; \phi_T = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_T \exp(i\phi_T) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-1 + i) = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i)$$



Dans les exercices, il faut bien lire l'énoncé et regarder si on utilise le modèle du conducteur réel, pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant volumique \vec{j} non nul (même s'il ne prend de valeurs significatives que dans une petite épaisseur au voisinage de la surface) ou le modèle du conducteur parfait pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_S .

Ici, la conductivité est finie. On utilisera les relations de passage en $x = 0$ avec $\vec{j}_S = \vec{0}$ et $\sigma = 0$.



4. On écrit les relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique en $x = 0$.

Côté 1 :

$x = 0^+$. Le champ électrique est : $\underline{\underline{E}}_1 = \underline{\underline{E}}_T$

Côté 2 :

$x = 0^-$. Le champ électrique est : $\underline{\underline{E}}_2 = \underline{\underline{E}}_i + \underline{\underline{E}}_R$

On a donc :

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}_2 - \underline{\underline{E}}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \underline{\underline{B}}_2 - \underline{\underline{B}}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} E_0 + \underline{\underline{E}}_{0R} = \underline{\underline{E}}_{0T} \\ \frac{-E_0}{c} + \frac{\underline{\underline{E}}_{0R}}{c} = \frac{1}{\omega \delta} (-1 + i) \underline{\underline{E}}_{0T} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} E_0 + \underline{\underline{E}}_{0R} = \frac{E_{0T}}{c} \\ -E_0 + \underline{\underline{E}}_{0R} = \frac{1}{\omega \delta} (-1 + i) \underline{\underline{E}}_{0T} \end{cases}$$

avec $\frac{c}{\omega \delta} = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{2}{\mu_R \mu_0 \gamma \omega}}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

On a donc : $\frac{c}{\omega \delta} = \sqrt{\frac{\mu_r \gamma}{2 \varepsilon_0 \omega}} = \frac{1}{\alpha}$.

On a $\alpha = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \omega}{\mu_r \gamma}}$.

D'après la question 2) : $\left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \leqslant \frac{1}{100}$,

c'est-à-dire $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}} \leqslant \frac{1}{10}$.

On en déduit que $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\mu_r\gamma}} \leq \frac{1}{10} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}$, soit $\alpha \leq 1,4 \times 10^{-2}$.

Le système à deux équations et deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0R} + E_0 = \frac{\underline{E}_{0T}}{(-1+i)} \\ \underline{E}_{0R} - E_0 = \frac{\alpha}{\alpha} \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, on a :

$$2E_0 = \underline{E}_{0T} \frac{(\alpha + 1 - i)}{\alpha}$$

$$\text{et } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i} \approx \frac{2\alpha}{1 - i} = \frac{2\alpha(1 + i)}{2} = \alpha(1 + i)$$

$$\text{D'où } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$$

$$\text{On a vu que } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}.$$

- Si $\gamma \rightarrow \infty$, on a le modèle du conducteur parfait, l'épaisseur de peau $\delta \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 0$. L'onde ne pénètre pas dans le métal. On a vu dans le cours que l'on a alors des courants en surface. Puisque $\underline{E}_{0T} \rightarrow 0$, alors $\underline{E}_{0R} = -E_0$. Toute l'onde incidente est réfléchie.
- Si γ est finie, on a une onde qui peut pénétrer dans le métal mais elle est atténuée.

$$\underline{E}_{0T} = E_0 \alpha \sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(i(\omega t - \underline{k}_T x)\right) \vec{u}_z$$

$$\text{avec } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

On a donc :

$$\underline{E}_{0T} = E_0 \alpha \sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{ix}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Finalement, on a :

$$\underline{E}_{0T} = E_0 \alpha \sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Exercice 7.8 : Plasma (MP-PT)

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma constitué de N électrons libres par unité de volume de masse m et de N ions positifs par unité de volume de masse M et pratiquement immobiles. Une onde électromagnétique $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ se propage dans ce milieu. On pose

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F.m}^{-1}; e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}; N = 1,22 \times 10^{12} \text{ électrons/m}^3$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}; m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

1. Montrer que l'action du champ magnétique sur un électron est négligeable devant celle du champ électrique. Exprimer les vecteurs courant de conduction \vec{j}_c et courant de déplacement \vec{j}_d en fonction de $\underline{\underline{E}}$, ω , ω_p et ε_0 . Établir l'équation de propagation et la relation de dispersion.
2. Montrer que la fréquence de l'onde doit être supérieure à une fréquence de coupure f_c pour avoir propagation. Calculer f_c . Dans le cas où il y a propagation, représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la fréquence. Exprimer l'indice dans le plasma en fonction de ω et ω_p .

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un plasma. On ne cherche pas comme dans l'exercice précédent sur l'effet de peau à négliger les courants de déplacement. Pour obtenir la relation de dispersion, il faut établir l'équation de propagation avec les équations de Maxwell et ensuite remplacer le champ électrique dans l'équation de propagation.

Pour que l'onde puisse se propager, on verra que la pulsation doit être supérieure à une pulsation de coupure. On verra l'application dans l'exercice sur la traversée de l'interface atmosphère - ionosphère.



1. On écrit le PFD à un électron de masse m dans le référentiel $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

- Le poids est négligeable devant les autres forces.
- On néglige les interactions entre l'électron et les autres particules qui sont parfois modélisées par une force de frottement fluide.

- L'ordre de grandeur du champ magnétique est $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\underline{\underline{E}}\|}{c}$. On a donc

$$\frac{\|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{qv_e E}{qcE} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1. \text{ On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique.}$$

On utilise le régime sinusoïdal forcé. Il faut faire attention à bien lire l'énoncé : $\underline{\underline{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ et non $\underline{\underline{E}} = E_0 \exp(-i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

Le vecteur vitesse est de la même forme : $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = i\omega \vec{v}_e$. On note le complexe i et non j pour ne pas confondre avec le vecteur densité de courant volumique.

Remarque : Il n'y pas de constante d'intégration quand on travaille en régime sinusoïdal forcé.



On a donc $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = im\omega \vec{v}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$, d'où $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{im\omega}$.

Le vecteur densité de courant de conduction volumique s'écrit :

$$\vec{j}_c = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

On a deux types de porteurs de charges mobiles : les ions positifs (notés i) de charge $+e$ et les électrons de charge $-e$.

On a donc : $\vec{j}_c = N(-e\vec{v}_e + e\vec{v}_i)$.

On peut démontrer comme pour les électrons que : $\vec{v}_i = \frac{e\vec{E}}{iM\omega}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \vec{j}_c &= N \left(\frac{e^2}{im\omega_e} + \frac{e^2}{iM\omega} \right) \vec{E} = \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \\ &\approx \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \end{aligned}$$

car d'après l'énoncé $M \gg m$.

On néglige donc l'effet des cations pratiquement immobiles.

On a donc : $\vec{j}_c = \frac{Ne^2}{im\omega} \vec{E} = -i \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0 \omega} \vec{E} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}$ puisque $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.

- Le vecteur densité de courant de conduction volumique vaut donc :

$$\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E} \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}.$$

- Le vecteur densité de courant de déplacement vaut :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Le rapport des deux densités de courant vaut :

$$\frac{\underline{j}_c}{\underline{j}_d} = \frac{\frac{-i\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}}{\frac{i\omega \varepsilon_0}{\omega}} = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d).$$

- \vec{j} dans l'équation de Maxwell-Ampère désigne le courant de conduction, noté \vec{j}_c dans l'exercice.

- \vec{j}_d désigne le courant de déplacement. Il est égal à $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On en déduit d'après la question précédente :

$$\text{rot } \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{j}_c} + \underline{\vec{j}_d} \right) = \mu_0 \left(\frac{-\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \right) \underline{\vec{j}_d} = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) i \omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}}$$

Soit :

$$\text{rot } \underline{\vec{B}} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Pour trouver la relation de dispersion, il suffit de remplacer l'expression du champ électrique dans l'équation de propagation.

$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ car $\text{div } \vec{E} = 0$ avec un plasma globalement neutre.

On a alors :

$$\vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On remplace $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ dans l'équation de propagation écrite en notation complexe pour en déduire la relation de dispersion :

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \left(-\omega^2 \underline{\vec{E}} \right), \text{ d'où :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

2. • Si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$. k est imaginaire pur. On a une onde évanescante. Il n'y a pas de propagation.

• Si $\omega = \omega_p$ alors $k = 0$. Il n'y a pas de propagation.

• Si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et $k > 0$. On a une propagation.

Si $\omega \gg \omega_p$, alors $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ et $k \simeq \frac{\omega}{c}$. Tout se passe comme si on était dans le vide. Le courant de conduction étant nul : $\underline{\vec{j}} \rightarrow 0$. La pulsation est trop

grande. « Les électrons ne peuvent plus suivre » et ne se déplacent quasiment plus.

La pulsation de coupure est donc $\omega_c = \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$. On en déduit la fréquence de coupure :

$$f_c = f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

On étudie les pulsations $\omega > \omega_p$ pour lesquelles il y a propagation d'une onde électromagnétique. On a un filtre passe-haut.

Application numérique :

$$f_c = 9,9 \text{ MHz}$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}}$$

L'indice est défini $v_\phi = \frac{c}{n}$. On en déduit donc :

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

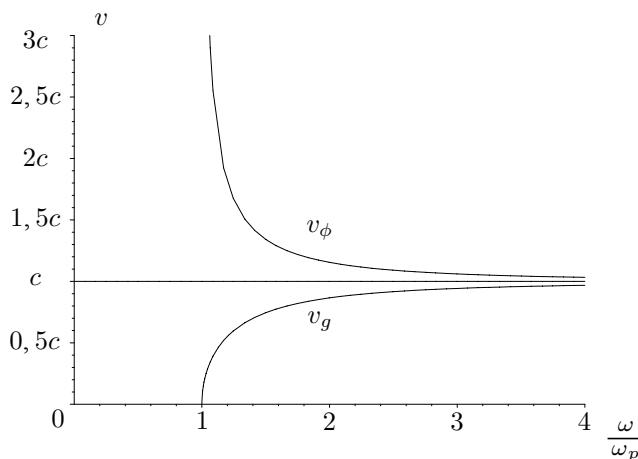
La vitesse de groupe vaut : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Or $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$.

On écrit la différentielle : $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$.

On a donc :

$$v_g v_\phi = c^2$$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_p}$.



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 7.9 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère (MP-PT)

L'ionosphère peut être assimilée à un plasma neutre. On étudie la propagation des ondes radio à l'interface atmosphère – ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région $z > 0$ et l'atmosphère dans la région $z < 0$. Le champ incident est : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchie et l'autre partie est transmise. L'indice de réfraction de l'ionosphère est $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_p = 6,9$ MHz.

- Écrire les relations de passage du champ électrique et du champ magnétique pour $z = 0$. Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance. Quelle est la relation entre R et T ?
- Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_p$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?
- On se place maintenant dans le cas d'une incidence oblique, et on désigne par i l'angle d'incidence. A quelles conditions une onde peut-elle être transmise dans l'ionosphère ?
- Un poste émetteur, au niveau de la mer, émet une onde radio de fréquence 12 MHz vers l'ionosphère, dans une direction faisant l'angle i avec la normale à l'interface. En supposant que l'onde arrive sur l'interface précédente sous forme d'onde plane, calculer l'angle i , à partir duquel l'onde incidente ne traversera plus l'interface.

Analyse du problème

On a étudié dans l'exercice précédent la propagation d'une onde dans un plasma. On s'intéresse à l'interface atmosphère-ionosphère et montrer quelles sont les conditions pour avoir réflexion totale.



1. Onde incidente :

Le champ électrique incident s'écrit : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique incident :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchie :

Le champ électrique réfléchi s'écrit : $\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique réfléchi :

$$\begin{aligned}\vec{B}_r &= \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{u}_z \wedge r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{-r E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y\end{aligned}$$

Onde transmise :

Il ne faut pas oublier l'indice n puisqu'on est dans le plasma.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -i \vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i \omega \vec{B},$$

d'où $\vec{B} = \frac{\vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$ avec $\omega = k_t v = k_t \frac{c}{n}$.

On a vu dans l'exercice sur le plasma que $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, soit

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

Le champ électrique transmis s'écrit : $\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique transmis :

$$\begin{aligned}\vec{B}_t &= n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{\vec{u}_z \wedge t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{n t E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y\end{aligned}$$

Relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique

On n'a pas de densité surfacique de charges et de courants : $\sigma = 0$ et $\vec{j}_S = \vec{0}$.

On écrit les relations de passage en $z = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Côté 1 : $z = 0^-$

Le champ électrique est : $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

Le champ magnétique est : $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$.

Côté 2 : $z = 0^+$

Le champ électrique est : $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$.

Le champ magnétique est : $\vec{B}_2 = \vec{B}_t$.

On a donc pour $z = 0$:

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}_i} + \underline{\vec{E}_r} = \underline{\vec{E}_t} \\ \underline{\vec{B}_i} + \underline{\vec{B}_r} = \underline{\vec{B}_t} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} E_0 + \underline{r}E_0 = \underline{t}E_0 \\ \frac{E_0}{c} - \frac{\underline{r}E_0}{c} = \frac{n\underline{t}E_0}{c} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = n\underline{t} \end{cases}$$

On en déduit que $1 - \underline{r} = n(1 - \underline{r})$,

soit $\underline{r} = \frac{1-n}{1+n}$ et $\underline{t} = 1 + \underline{r} = 1 + \frac{1-n}{1+n} = \frac{2}{1+n}$.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \frac{1-n}{1+n} \\ \underline{t} &= \frac{2}{1+n} \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion en puissance vaut :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne réfl chie}}{\text{puissance moyenne incidente}}$$



Attention : il faut revenir aux notations réelles pour calculer le vecteur de Poynting.



Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \end{aligned}$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\overrightarrow{dS} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{moy,i} = \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde réfléchie :

On pose $r = r \exp(i\phi)$ avec r réel positif.

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_r &= \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} \\ &= \frac{r E_0 \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{-r E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_y \end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{-r^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{r^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\overrightarrow{dS} = -dS \vec{u}_z$ car l'onde se propage dans le sens $(-\vec{u}_z)$.

La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_z) = r^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde transmise :

Dans la suite de l'exercice, t est réel et sera noté t .

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{t E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{nt E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{nt^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\overrightarrow{dS} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_z = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Le coefficient de réflexion en puissance est :

$$R = \frac{P_{moy,r}}{P_{moy,i}} = r^2 = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

Le coefficient de réflexion en amplitude peut être complexe (voir question 2). Il faut calculer le module de \underline{r} pour calculer R .

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{P_{moy,t}}{P_{moy,i}} = nt^2 = n \left(\frac{2}{1+n} \right)^2$$

On calcule la somme $R + T$:

$$R + T = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 + \frac{4n}{(1+n)^2} = \frac{1+n^2 - 2n + 4n}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1$$

On a bien $R + T = 1$. Cette relation traduit la conservation de la puissance : toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie et l'onde transmise.

2. On a vu que $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. L'indice est donc complexe.

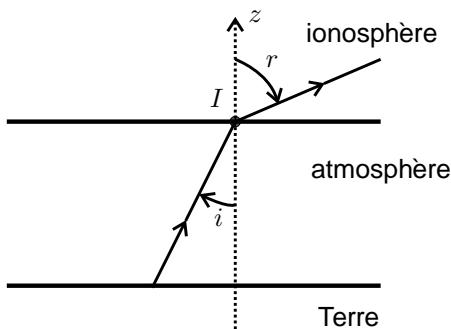
$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = i^2 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)$. On a donc $n = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \pm i X$ en posant $X = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$.

Le coefficient R vaut : $R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \frac{1+X^2}{1+X^2} = 1$. On a donc :

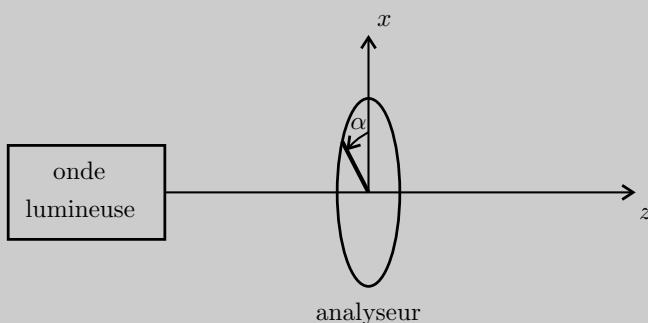
$$R = 1$$

L'interface ionosphère-atmosphère peut être assimilée à une surface parfaitement réfléchissante (miroir plan).

3.

**Premier cas :** $f < f_c$

On a vu qu'il y a toujours réflexion totale.

Deuxième cas : $f > f_c$ On applique les lois de Descartes au point d'incidence I : $\sin i = n \sin r$, d'où $\sin r = \frac{\sin i}{n}$. On a réflexion totale si $\frac{\sin i}{n} > 1$.On pose $\lambda = \text{Arcsin}(n)$.Si $i > \lambda$, on a une réflexion totale.Si $i < \lambda$, une onde de fréquence f peut traverser l'interface.**Remarque :** l'indice n dépend de la fréquence de l'onde. On a dispersion de la lumière.**4. Application numérique :** $\lambda = \text{Arcsin}(n) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}\right) = 42^\circ$ Si l'angle d'incidence est supérieur à 42° , l'onde incidente ne traversera plus l'interface et on aura réflexion totale.**Exercice 7.10 : Polarisation des ondes (MP)**On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle \vec{u} le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u})$.

- 1.** On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0 . Comment est appelée cette loi ?
- 2.** On considère une onde polarisée elliptiquement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α , E_{0x} et E_{0y} .

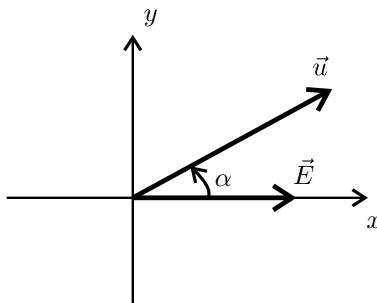
Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence d'un analyseur et d'une lame quart d'onde sur une onde lumineuse incidente.



- 1.** Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} . L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left(\left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right)$$

On a alors :

$$\left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 = (E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha)^2$$

On en déduit la moyenne temporelle : $\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_0 \cos \alpha)^2$.

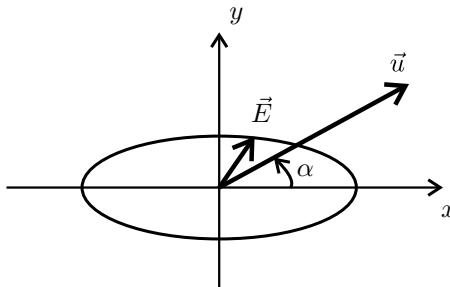
L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} E_0^2 \cos^2 \alpha = \varepsilon_0 \cos^2 \alpha$$

Cette loi est appelée loi de Malus.

2. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_{0x} \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha) \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} .

L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left(\|\vec{E}_{\text{sortie}}\|^2 \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|\vec{E}_{\text{sortie}}\|^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha)^2 + (E_{0x} \sin(\omega t) \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha E_{0x} \sin(\omega t) \sin \alpha \end{aligned}$$

On en déduit la moyenne temporelle :

$$\left\langle \|\vec{E}_{\text{sortie}}\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_{0x} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{0x} \sin \alpha)^2$$

L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$$

Partie 5

Optique ondulatoire

Plan

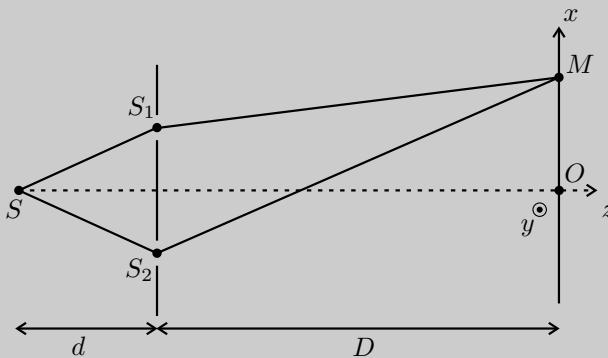
8. Interférences	215
8.1 : Fentes d'Young et largeur de la source (MP-PT)	215
8.2 : Étoiles à l'infini et fentes d'Young (MP-PT)	221
8.3 : Michelson en lame d'air (MP-PT)	224
8.4 : Michelson en coin d'air (MP-PT)	227
8.5 : Michelson et doublet du sodium (MP-PT)	231
8.6 : Michelson et raie à profil rectangulaire (MP-PT)	235
8.7 : Détermination de l'indice de l'air (MP-PT)	238
8.8 : Vélocimétrie laser (MP-PT)	241
8.9 : Miroirs de Fresnel (MP-PT)	244
9. Diffraction	247
9.1 : Diffraction par une fente fine (MP-PT)	247
9.2 : Diffraction par deux fentes fines (MP-PT)	251
9.3 : Diffraction par une fente rectangulaire (MP-PT)	256
9.4 : Translation de la source et de la fente fine (MP-PT)	259
9.5 : Trous d'Young avec lame – Holographie* (MP-PT)	262
9.6 : Diffraction par un réseau (MP-PT)	267

Interférences

Exercice 8.1 : Fentes d'Young et largeur de la source (MP-PT)

On considère deux fentes S_1 et S_2 identiques, distantes de a et très fines. Les distances D et d sont très grandes devant a . L'indice de l'air vaut 1. La source de lumière de longueur d'onde dans le vide λ_0 est placée en S .

1. Comment s'appelle le dispositif ?
2. Démontrer la formule des interférences à deux ondes.
3. Calculer l'éclairement en un point M de l'écran. Que vaut l'interfrange ?
4. On tient compte de la largeur b de la source S . Représenter graphiquement le contraste de la figure d'interférences en fonction de b .



Analyse du problème

Cet exercice traite du montage classique des fentes d'Young avec un objet à distance finie. On étudie l'influence de la largeur de la source sur le contraste. On observe un brouillage de la figure d'interférences avec une source large.

Cours : Une onde monochromatique peut se mettre sous la forme :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \phi(M))$$

La notation complexe s'écrit :

$$\underline{s}(M, t) = A(M) \exp(i(\phi(M) - \omega t))$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}(M) = A(M) \exp(i\phi(M))$$



Attention : on peut rencontrer dans les exercices une autre convention : $\underline{s} = A \exp(i(\omega t - \phi))$ au lieu de $\underline{s} = A \exp(-i(\omega t - \phi))$. L'amplitude complexe s'écrit alors : $\underline{a} = A \exp(-i\phi)$

Cours : L'éclairement est défini : $\varepsilon(M) = K \underline{a}(M) \underline{a}^*(M)$. K est un coefficient de proportionnalité que l'on prend parfois égal à 1 dans certains exercices.

Dans un milieu homogène et isotrope, l'énergie lumineuse se propage de façon rectiligne selon des directions que l'on appelle rayons lumineux.

On rencontre deux dispositifs pour obtenir deux ondes à partir d'une seule onde :

- division du front d'onde : les deux ondes proviennent de rayons lumineux différents issus de la source avec une division géométrique.
- division d'amplitude : les deux ondes proviennent du même rayon lumineux issu de la source dédoublé ultérieurement par une division énergétique.

Le chemin optique entre A et B dans un milieu homogène d'indice n est noté L_{AB} ou $[AB]$. Il est égal à :

$$[AB] = nAB$$

Deux ondes peuvent interférer si elles sont cohérentes, c'est à dire qu'elles doivent avoir la **même pulsation**, provenir de la **même source principale** (division du front d'onde ou division d'amplitude) et du **même train d'onde** (la différence de marche doit être inférieure à la longueur de cohérence).

Dans le cas où les ondes sont incohérentes, on fait la somme de leurs éclairements.

Dans le cas où les ondes sont cohérentes, on fait la somme de leurs amplitudes. L'éclairement est donné par la formule des interférences :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M) + 2\sqrt{\varepsilon_1(M)\varepsilon_2(M)} \cos(\Delta\phi(M))$$

$\Delta\phi$ est le déphasage entre l'onde 2 et l'onde 1. On peut l'exprimer avec la différence de marche au point M :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

L'ordre d'interférence est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

On rencontre très souvent le cas particulier où les deux ondes ont le même éclairement ε_0 . La formule des interférences s'écrit alors :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0(1 + \cos(\Delta\phi(M)))$$



1. C'est un dispositif à division du front d'onde puisque les deux ondes proviennent de rayons lumineux différents issus de la source S avec une division géométrique.

2. Amplitude complexe de l'onde 1 :

Au point M , la vibration de l'onde 1 est : $s_1 = A_1 \cos(\omega t - \phi_1)$.

La vibration complexe est : $s_1 = A_1 \exp(-i(\omega t - \phi_1))$.

L'amplitude complexe est : $a_1 = A_1 \exp(i\phi_1)$.

Amplitude complexe de l'onde 2 :

Au point M , la vibration de l'onde 2 est : $s_2 = A_2 \cos(\omega t - \phi_2)$.

L'amplitude complexe est : $a_2 = A_2 \exp(i\phi_2)$.

Amplitude totale :

Pour des ondes cohérentes, on fait la somme des amplitudes complexes :

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = A_1 \exp(i\phi_1) + A_2 \exp(i\phi_2)$$

L'éclairement est :

$$\varepsilon = K \underline{a} \underline{a}^*$$

$$= K (A_1 \exp(i\phi_1) + A_2 \exp(i\phi_2)) (A_1 \exp(-i\phi_1) + A_2 \exp(-i\phi_2))$$

On a alors :

$$\varepsilon = K (A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \exp(i(\phi_2 - \phi_1)) + A_1 A_2 \exp(-i(\phi_2 - \phi_1)))$$

On pose $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, soit :

$$\varepsilon = KA_1^2 + KA_2^2 + 2KA_1 A_2 \cos(\Delta\phi)$$

Finalement, on obtient :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\Delta\phi)$$

Dans le cas particulier très fréquent où les deux ondes ont le même éclairage ε_0 , on a :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 (1 + \cos(\Delta\phi(M)))$$

3. La différence de marche est :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= [SS_2 M] - [SS_1 M] = n_{\text{air}} ((SS_2 M) - (SS_1 M)) \\ &= (SS_2 M) - (SS_1 M) \end{aligned}$$

puisque l'indice de l'air vaut 1.

Comme $SS_1 = SS_2$, alors $\delta(M) = S_2 M - S_1 M$

$$S_1 \begin{vmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix}; \quad S_2 \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ -D \end{vmatrix}; \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{On a donc : } S_1 M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}}.$$

On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$S_1 M \simeq D \left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right)$$

De même, on obtient :

$$S_2 M = D \sqrt{1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}} = D \left(1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right).$$

La différence de marche est :

$$\delta(M) = \left(D \left(1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right) - D \left(1 + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} \right) \right)$$

Soit :

$$\delta(M) = D \left(\frac{x^2 + \frac{a^2}{4} + ax}{2D^2} \right) - D \left(\frac{x^2 + \frac{a^2}{4} - ax}{2D^2} \right) = \frac{ax}{D}$$

L'ordre d'interférence est :

$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 D}$$



Il faut connaître ce résultat par cœur et être capable de le redémontrer très rapidement.



La formule des interférences à deux ondes donne :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{p}{\lambda_0} \right) \right)$$

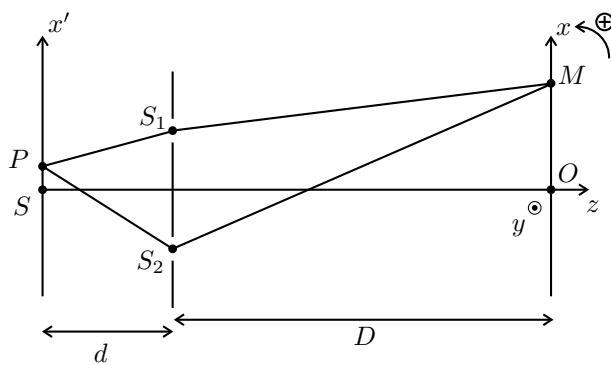
On a donc des franges rectilignes perpendiculaires à Ox car à p fixé, x est fixé.
Pour calculer l'interfrange, on utilise la relation : $p(x+i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x+i) = p(x) - 1$.



On a donc : $\frac{a(x+i)}{\lambda_0 D} = \frac{ax}{\lambda_0 D} + 1$, ce qui donne : $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$

4.





Attention au paramétrage. Il faut prendre l'initiative de définir un point P d'abscisse x' et considérer un élément de longueur dx' centré sur P . On peut alors appliquer la formule des interférences à deux ondes pour dx' .



La différence de marche entre les deux rayons lumineux est :

$$\begin{aligned}\delta &= [PS_2M] - [PS_1M] = (PS_2M) - (PS_1M) \\ &= \{PS_2 - PS_1\} + \{S_2M - S_1M\}\end{aligned}$$

On a vu dans la question précédente que : $S_2M - S_1M \approx \frac{ax}{D}$.

De même, on a : $PS_2 - PS_1 = \frac{ax'}{d}$.

La différence de marche vaut donc :

$$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d}$$

La fente source a une largeur b . Il faut considérer un élément de longueur dx' autour de P . La contribution de l'éclairement dû à dx' au point M est :

$$d\varepsilon(M) = 2A_0 dx' \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right)$$

Il reste à intégrer x' entre $-\frac{b}{2}$ et $\frac{b}{2}$ pour calculer l'éclairement total au point M .

Remarque : on fait la somme des éclairements puisque les différents éléments dx' sont des sources incohérentes.



On a donc :

$$\varepsilon(M) = \int_{x_F - \frac{b}{2}}^{x_F + \frac{b}{2}} 2A_0 dx' \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d} \right) \right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon(M) = 2A_0 b + \left[\frac{2A_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d} \right) \right)}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 d}} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

D'où :

$$\varepsilon(M) =$$

$$2A_0 b + \frac{A_0 \lambda_0 d}{\pi a} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a(\frac{b}{2})}{d} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a(-\frac{b}{2})}{d} \right) \right) \right]$$

$$\text{Or } \sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p - q}{2} \right) \cos \left(\frac{p + q}{2} \right), \text{ d'où :}$$

$$\varepsilon(M) = 2A_0b + \frac{A_0\lambda_0d}{\pi a} 2 \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}\right)\right)$$

$$\text{On pose } \Gamma = \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right)}{\frac{\pi ab}{\lambda_0d}}$$

L'éclairement s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon(M) = 2A_0b \left(1 + \Gamma \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}\right)\right)\right)$$

Si b est très petit, la fonction sinus-cardinal vaut 1. On retrouve la formule classique des interférences de la question 1.

Si on fait varier x , le terme dans le cosinus est un terme variable alors que le terme dans le sinus cardinal est un terme constant.

Le contraste de la figure d'interférences est défini par :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$$

Lorsque x varie, on a : $\varepsilon_{\max} = 2A_0b(1 + |\Gamma|)$ et $\varepsilon_{\min} = 2A_0b(1 - |\Gamma|)$

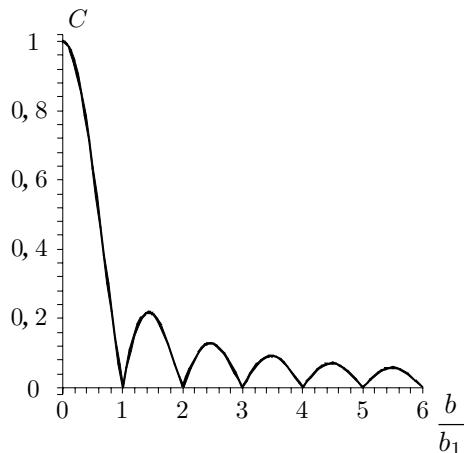
$$\text{D'où : } C = \frac{(1 + |\Gamma|) - (1 - |\Gamma|)}{(1 + |\Gamma|) + (1 - |\Gamma|)} = |\Gamma| = \left|\text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right)\right|$$

Quand le contraste diminue, on a des franges de moins en moins contrastées.

Pour $C = 0$, on ne peut plus faire la différence entre les franges brillantes et les franges sombres.

Le contraste est nul pour $\left|\text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_0d}\right)\right| = 0$, soit $\frac{\pi ab}{\lambda_0d} = n\pi$ avec n entier.

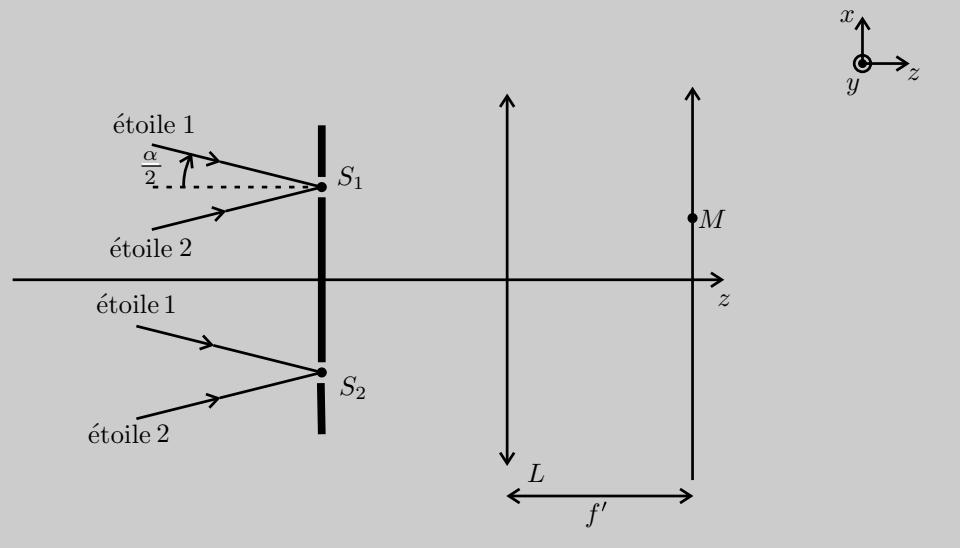
Le premier brouillage a lieu pour pour $n = 1$, soit $b_1 = \frac{\lambda_0d}{a}$. Les autres ont lieu pour $b_n = nb_1$.



Exercice 8.2 : Étoiles à l'infini et fentes d'Young (MP-PT)

On considère deux étoiles à l'infini faisant entre elles un angle α très faible, de même éclairement ϵ_0 . La lumière est diffractée par deux fentes S_1 et S_2 identiques, distantes de a et très fines. Un écran est placé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f' située après les fentes d'Young.

1. Calculer l'éclairement dû à chaque étoile en un point M de l'écran.
2. Déterminer le contraste de la figure d'interférences et en déduire pour quelles valeurs de a on observe un brouillage.



Analyse du problème

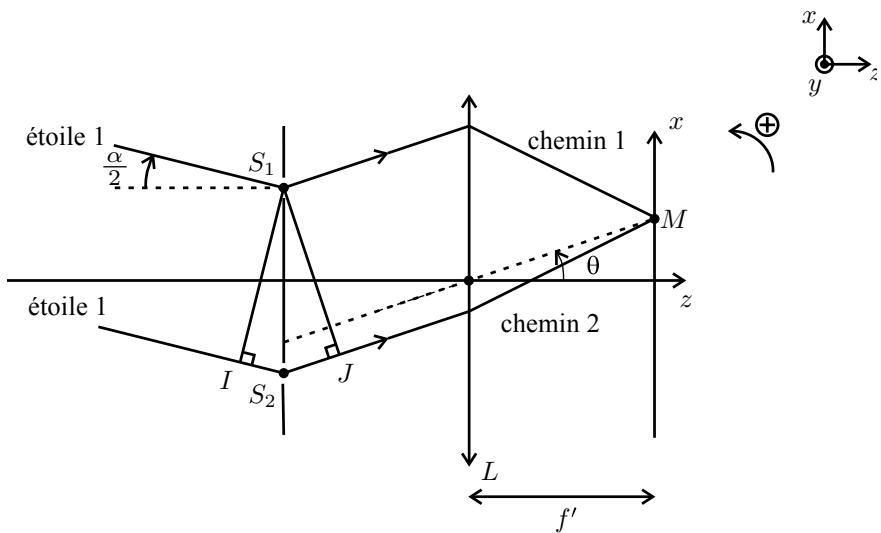
Cet exercice étudie le montage classique des fentes d'Young avec deux étoiles à l'infini. Dans l'exercice précédent, l'écran était placé à grande distance des fentes d'Young alors que dans cet exercice, il est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente.



1. Chaque étoile donne un système d'interférences par le dispositif des fentes d'Young. Comme l'étoile 1 est à l'infini, on peut considérer qu'au voisinage des fentes d'Young, on a une onde plane. $S_1 I$ est un plan d'onde, donc $[obj_{\text{1}} S_1] = [obj_{\text{1}} I]$. D'après le principe de retour inverse de la lumière, $S_1 J$ est aussi un plan d'onde (une lentille ne modifie pas la différence de marche) :

$$[S_1 M] = [JM]$$

D'après l'énoncé, $\alpha \ll 1$. Comme on travaille dans les conditions de Gauss, alors $\theta \ll 1$ et $\tan \theta = \theta = \frac{x}{f'}$.



Attention aux signes : $\alpha < 0$ et $\theta > 0$ sur la figure.



La différence de marche est :

$$\delta = IS_2 + S_2 J = -a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'}$$

$$\text{puisque } \tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \approx -\frac{\alpha}{2} = \frac{IS_2}{S_1 S_2} = \frac{IS_2}{a} \text{ et } \tan(\theta) \approx \theta = \frac{S_2 J}{S_1 S_2} = \frac{S_2 J}{a}$$

L'éclairement au point M dû à l'étoile 1 est :

$$\varepsilon_1(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon_1(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'} \right) \right) \right)$$

On en déduit directement l'éclairement dû à l'étoile 2 en remplaçant α par $-\alpha$:

$$\varepsilon_2(M) = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'} \right) \right) \right)$$

2. Les objets sont incohérents. On fait donc la somme des éclairements :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M)$$

L'éclairement total est :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'} \right) \right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(a \frac{\alpha}{2} + a \frac{x}{f'} \right) \right) \right)$$

On utilise les formules de trigonométrie :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

On a alors :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left(2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon(M) = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \right)$$

On pose :

$$\Gamma = \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)$$

L'éclairement s'écrit :

$$\varepsilon(M) = 4\varepsilon_0 \left(1 + \Gamma \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right) \right)$$

Le contraste est par définition :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$$

Lorsque x varie, le terme $\Gamma = \cos \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)$ est constant alors que le terme $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x}{f'} \right)$ varie de -1 à 1 . On peut donc en déduire les valeurs minimales et maximales de l'éclairement :

$$\varepsilon_{\max} = 4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\min} = 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|).$$

D'où :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \frac{4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) - 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|)}{4\varepsilon_0 (1 + |\Gamma|) + 4\varepsilon_0 (1 - |\Gamma|)} = |\Gamma|$$

On a un brouillage si $C = 0$, soit $\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. On a alors :

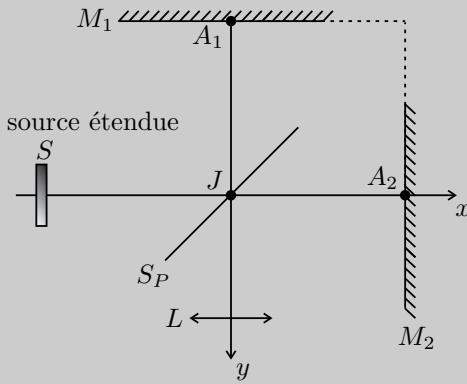
$$a = \frac{\lambda_0}{2\alpha} + k \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

avec k entier.

Exercice 8.3 : Michelson en lame d'air (MP-PT)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances $J A_1$ et $J A_2$ sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . La longueur d'onde de la source vaut $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ dans le vide, de symétrie de révolution autour de l'axe SJ . L'indice de l'air vaut $1,0$. On observe dans le plan focal d'une lentille mince convergente L de distance focale $f' = 1,0 \text{ m}$.

- 1.** Qu'observe-t-on sur l'écran ?
- 2.** On déplace M_2 de $e = 1,1 \text{ mm}$ dans la direction des x positifs. Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles. Comment s'appelle le dispositif ?
- 3.** Où sont localisées les interférences ? Comment les observe-t-on expérimentalement ?
- 4.** Déterminer les rayons des deux premiers anneaux brillants.
- 5.** On place sur le bras $J A_1$ et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre et les rayons des deux premiers anneaux brillants.

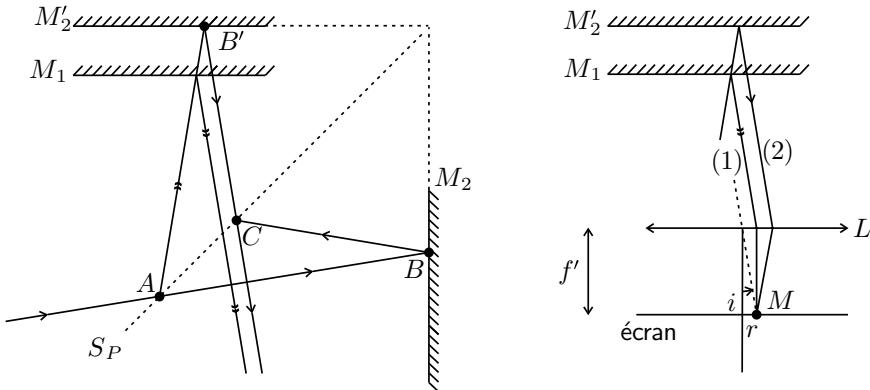
**Analyse du problème**

Cet exercice traite du Michelson en lame d'air. Le schéma équivalent permet de calculer plus simplement la différence de marche et les rayons des premiers anneaux brillants. On rajoute ensuite une lame d'épaisseur e' ce qui revient à remplacer de l'air d'indice $1,0$ par une lame d'indice n .



1. On est au contact optique. La différence de marche est nulle. L'écran est uniformément éclairé. On observe une teinte plate brillante.

2. On utilise le schéma équivalent du Michelson en lame d'air : M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice. Les distances AB et AB' sont égales ainsi que les distances BC et $B'C$.

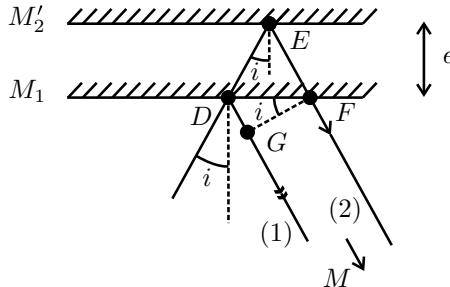


On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en lame d'air.

3. Les rayons (1) et (2) sont parallèles entre eux. Les interférences sont localisées à l'infini pour un Michelson réglé en lame d'air avec une source étendue.

On les observe en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille.

4.



On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre les rayons (2) et (1) arrivant au point M est :

$$\delta = [DEFM] - [DGM]$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan GF serait un plan d'onde et $[GM] = [FM]$. On a alors :

$$\delta = [DEF] - [DG] = 2DE - DG$$

- $\cos i = \frac{e}{DE}$, d'où $2DE = \frac{2e}{\cos i}$.
- $\tan i = \frac{\frac{DF}{e}}{\frac{2}{e}}$. On a donc $DF = 2e \tan i$.

Or $\sin i = \frac{DG}{DF}$, d'où : $DG = DF \sin i = 2e \tan i \sin i$.

Finalement, on a :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \frac{\cos^2 i}{\cos i}$$

Soit :

$$\delta = 2e \cos i$$



Ce résultat est à connaître par cœur. Il faut être capable de le redémontrer très rapidement.



On se place dans les conditions de Gauss. On fait un développement limité à l'ordre 2, soit :

$$\delta = 2e \cos i = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

Au centre de l'écran ($i = 0$), l'ordre vaut : $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 4028,57$.

C'est la valeur maximale de p .

Le rayon r_1 du premier anneau est obtenu pour $p_1 = 4028$.



Le rayon du premier anneau ne s'obtient pas avec $p_1 = 1$!



Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan i = i = \frac{r_1}{f'}$.

Soit $p_1 = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p_0 \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$. On a alors : $\frac{p_1}{p_0} = 1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}$, soit :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)} = 16,8 \text{ mm}$$



Le deuxième anneau est obtenu pour $p_2 = 4027$. On obtient alors :

$$r_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right)} = 27,9 \text{ mm}$$

La différence de marche en M ne dépend que de la distance $F'M$ ce qui montre que les franges d'interférences sont des anneaux centrés sur F' .

5. Sur le chemin du rayon (1), on remplace sur une épaisseur e' de l'air par une lame d'indice n . La nouvelle différence de marche δ' peut s'exprimer en fonction de l'ancienne différence de marche δ sans la lame :

$$\delta' - \delta = -(2ne' - 2e') = -2(n-1)e'$$



Attention au facteur 2, car le rayon (1) passe deux fois dans la lame. Il faut mettre un signe $(-)$ devant $(2ne' - 2e')$ car la différence de marche est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1). L'expression est valable pour des angles i faibles.



Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = p - \frac{2(n-1)e'}{\lambda_0}$$

La variation de l'ordre d'interférence au centre vaut

$$\Delta p = -\frac{2(n-1)e'}{\lambda_0} = -17,8$$

Le nouvel ordre d'interférence au centre vaut : $p'_0 = 4010,76$.

On obtient le rayon du premier anneau avec $p'_1 = 4010$. Soit :

$$r'_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_1}{p'_0} \right)} = 19,5 \text{ mm}$$

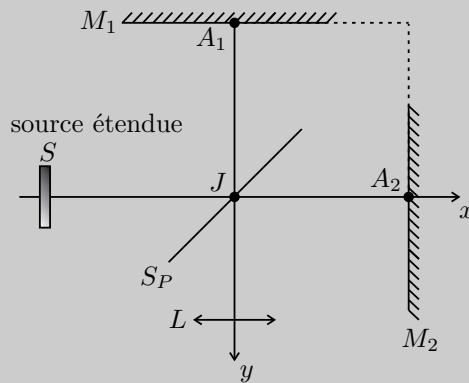
On obtient le rayon du deuxième anneau avec $p'_2 = 4009$. Soit :

$$r'_2 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p'_2}{p'_0} \right)} = 29,7 \text{ mm}$$

Exercice 8.4 : Michelson en coin d'air (MP-PT)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . La longueur d'onde de la source vaut $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$ dans le vide, de symétrie de révolution autour de l'axe SJ . L'indice de l'air vaut $1,0$. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha = 1$ minute d'arc autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

1. Comment s'appelle ce dispositif ? Pour des rayons lumineux en incidence normale par rapport au miroir M_1 , faire apparaître à l'aide du schéma équivalent la position du plan de localisation de la figure d'interférences.
2. Comment faut-il placer la lentille L pour observer les interférences sur un écran ?
3. Caractériser le système de franges et calculer numériquement la valeur de l'interfrange sur l'écran, sachant que le grandissement de la lentille est -4 .
4. On translate le miroir (M_2) d'une distance ℓ dans le sens des $x > 0$. De quelle distance se sont déplacées les franges sur l'écran ?
5. On éclaire le coin d'air en lumière blanche avec $\ell = 0$. On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1 , une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,5117$. Indiquer un moyen de déterminer l'épaisseur e' ou l'indice moyen de la lame.

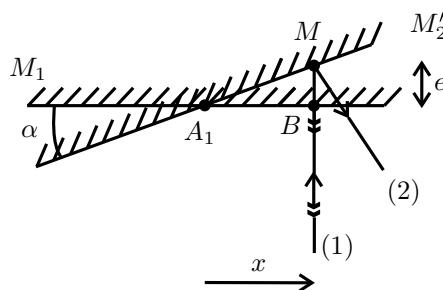


Analyse du problème

Cet exercice traite du Michelson en coin d'air. Le schéma équivalent permet de calculer plus simplement la différence de marche. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs. L'écran n'est pas dans le plan focal image de la lentille mais dans le plan du conjugué du miroir M_1 à travers la lentille.



1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. On se place en incidence normale par rapport au miroir M_1 . Les rayons qui interfèrent se coupent au point M situé sur le miroir M'_2 .

En incidence normale, les interférences sont donc localisées sur le miroir M'_2 . On admet que pour une incidence quasi-normale, les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

2. La lentille L sert à projeter la figure d'interférences sur un écran. L'écran doit être dans le plan contenant l'image du miroir M_1 à travers la lentille L . On appelle M' le conjugué de M à travers la lentille.



Attention, l'écran n'est pas dans le plan focal image de la lentille comme dans le Michelson réglé en lame d'air. L'angle α est très faible. Il est fortement augmenté sur la figure ci-dessus.



3. On pose $x = \overline{A_1 B}$. Comme l'angle α est très faible, on fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1 = \frac{x}{A_1 M}$ et $\tan \alpha = \alpha = \frac{e}{x}$.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 = 2n_{\text{aire}}e = 2e = 2\alpha x$$

car le rayon qui se réfléchit sur (M_2) fait en plus un aller-retour entre les deux miroirs.



Les distances aller-retour entre les deux miroirs sont égales au premier ordre. On peut également définir la différence de marche par $\delta = [SM]_1 - [SM]_2$. Le choix est arbitraire sauf si l'énoncé le précise.



L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0}$$

On a des franges brillantes pour $p = k$ entier relatif, soit :

$$x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Les franges brillantes sont des droites parallèles à l'arête du coin d'air. Pour calculer l'interfrange, on utilise la relation : $p(x + i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x+i) = p(x) - 1$.



On a donc : $\frac{2\alpha(x+i)}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} + 1$, ce qui donne :

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Pour calculer l'interfrange i' sur l'écran, il faut multiplier l'interfrange i par $|\gamma| = 4$:

$$i' = 4i = 3,75 \text{ mm}$$

4. Si on translate le miroir M_2 d'une distance ℓ , la nouvelle différence de marche est :

$$\delta_1 = 2\alpha x + 2\ell$$

Le grandissement de la lentille vaut : $\gamma = -4$. On a alors : $x' = \gamma x$.

Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x'}{\lambda_0 \gamma} + \frac{2\ell}{\lambda_0}$$

L'ordre 0 est obtenu pour $x' = -\frac{\gamma\ell}{\alpha}$ alors qu'il était obtenu pour $x' = 0$ sans translation du miroir M_2 .

Les franges se sont donc déplacées sur l'écran dans le sens des $x > 0$ d'une distance $-\frac{\gamma\ell}{\alpha}$.

5. Sans la lame :

On éclaire le coin d'air en lumière blanche. On repère alors la frange centrale blanche qui est bien contrastée. Les autres franges sont irisées. La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit $x = 0$. En plaçant la lame, ces franges disparaissent.

Avec la lame :

La nouvelle différence de marche vaut : $\delta_2 = \delta - 2(n-1)e'$.



On a un signe $-$ devant $2(n-1)e'$ car la différence de chemin est calculée entre le rayon (2) et le rayon (1).



Le nouvel ordre d'interférence vaut :

$$p_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} - \frac{2(n-1)e'}{\lambda_0}$$

On retrouve la frange centrale pour $p_2 = 0$, soit :

$$x = \frac{(n-1)e'}{\alpha}$$

Sur l'écran, on a :

$$x' = \frac{\gamma(n - 1)e'}{\alpha}$$

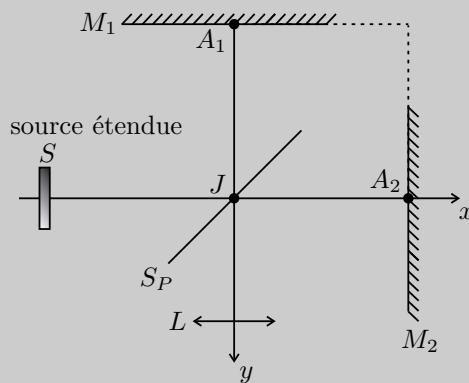
La mesure du déplacement x' permet d'en déduire l'indice moyen n ou l'épaisseur e' .

Exercice 8.5 : Michelson et doublet du sodium (MP-PT)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances $J A_1$ et $J A_2$ sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

La source primaire est une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueurs d'onde dans la vide $\lambda_1 = \lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_2 = \lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}$. On donne : $\lambda_m = 589,3$ nm. On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. L'indice de l'air vaut $1,0$. On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha \ll 1$ autour d'un axe perpendiculaire $J A_1 A_2$ et passant par A_2 .

1. Calculer la différence de marche et caractériser le système de franges.
2. On translate le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges. On constate que les franges disparaissent lorsque le déplacement de M_2 est $d = 0,15$ mm. Expliquer le phénomène.
3. Déterminer l'éclairement dû au doublet au point A_1 et le contraste local de la figure d'interférences défini par $C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}}$. Représenter graphiquement le contraste en fonction de la différence de marche. En déduire $\Delta\lambda$.
4. En déduire $\Delta\lambda$ en raisonnant sur les ordres de chaque système d'interférences au point A_1 .

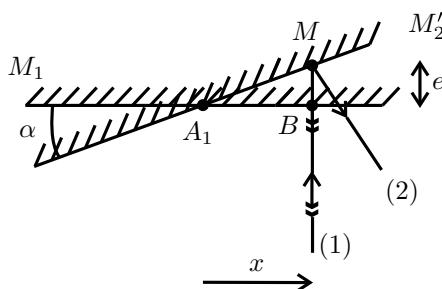


Analyse du problème

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent sur le Michelson en coin d'air. La source n'est plus monochromatique mais contient deux longueurs d'onde. La translation du miroir M_2 permet d'en déduire $\Delta\lambda$. On va voir deux méthodes : calcul de l'éclairement total avec interprétation du contraste local, calcul des ordres pour chaque système d'interférences.



- On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

2. On a la superposition de deux systèmes d'interférences (premier système de longueur d'onde λ_1 et deuxième système de longueur d'onde λ_2). Les ondes émises par les deux longueurs d'onde sont incohérentes : il faut faire la somme des éclairements.

- Le miroir n'est pas translaté. Au point $A_1(x = 0)$, la différence de marche est nulle pour les deux longueurs d'onde. Il y a coïncidence : les franges brillantes de chaque système se superposent.
- À la fin de la translation du miroir, la différence de marche au point A_1 est $2d$. On constate expérimentalement que les franges disparaissent. Il y a anticoïncidence : les franges brillantes d'un système se superposent aux franges sombres de l'autre système. On a un brouillage de la figure.

3. Première méthode : Calcul de l'éclairement total

Lorsqu'on translate le miroir, la différence de marche est $\delta = 2d$ au point A_1 . L'éclairement pour le système 1 est :

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right)$$

L'éclairement pour le système 2 est :

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

L'éclairement total est :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

Soit :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left(2 + 2 \cos \left(2\pi\delta \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2} \right) \right) \cos \left(2\pi\delta \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2} \right) \right) \right)$$

On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. On a alors : $\lambda_1\lambda_2 \approx \lambda_m^2$. D'où :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right) \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right) \right)$$

L'éclairement dépend de la différence de marche δ :

- Le premier terme : $\cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)$ a une grande période égale à $\frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$. C'est donc un terme qui varie lentement.
- Le deuxième terme : $\cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right)$ a une petite période égale à λ_m . C'est donc un terme qui varie rapidement.

On pose :

$$\Gamma = \cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \right)$$

L'éclairement se met sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_{moy} \left(1 + \Gamma \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_m} \right) \right)$$



La définition du contraste local est délicate : on fait varier la différence de marche de quelques λ_m . Le terme lent ne varie quasiment pas alors que le terme rapide varie entre -1 et 1.



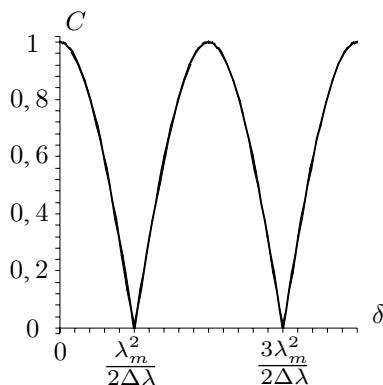
Lorsque δ varie de quelques λ_m , l'éclairement varie entre ε_{\min} et ε_{\max} , c'est-à-dire que le terme rapide vaut -1 ou 1.

On a donc : $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{moy} (1 + |\Gamma|)$ et $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{moy} (1 - |\Gamma|)$.

Le contraste local vaut :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \frac{\varepsilon_{moy} (1 + |\Gamma(\delta)|) - \varepsilon_{moy} (1 - |\Gamma(\delta)|)}{\varepsilon_{moy} (1 + |\Gamma(\delta)|) + \varepsilon_{moy} (1 - |\Gamma(\delta)|)} = |\Gamma(\delta)|$$

Le contraste s'annule pour $\pi \delta \frac{\Delta \lambda}{\lambda_m^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier.



- Lorsque $d = 0$, le contraste vaut 1. On a des franges bien contrastées.
- Lorsque d augmente, le contraste diminue. Les franges sont de moins en moins bien contrastées.
- La première annulation du contraste a lieu pour $k = 0$, soit :

$$\delta = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$$

Application numérique :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{4d} = 0,58 \text{ nm}$$

4. Deuxième méthode : Calcul des ordres pour chaque système d'interférences

Lorsqu'il y a anticoïncidence, $p_1 - p_2 = \frac{1}{2} + k$ avec k un entier relatif.

- Avant le déplacement du miroir, la différence de marche au point A_1 est :
 $\delta = 2\alpha x = 0$
- Après le déplacement du miroir d'une distance d , la différence de marche au point A_1 vaut $2d$.

L'ordre d'interférence pour le système 1 est :

$$p_1 = \frac{2d}{\lambda_1}$$

L'ordre d'interférence pour le système 2 est :

$$p_2 = \frac{2d}{\lambda_2}$$

On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$. On a alors : $\lambda_1\lambda_2 \approx \lambda_m^2$.

On en déduit que :

$$p_1 - p_2 = \frac{2d}{\lambda_1} - \frac{2d}{\lambda_2} = \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda_m^2} = \frac{1}{2} + k$$

Le premier brouillage a lieu pour $k = 0$, soit :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{4d} = 0,58 \text{ nm}$$

Remarque : La deuxième méthode est plus rapide que la première.

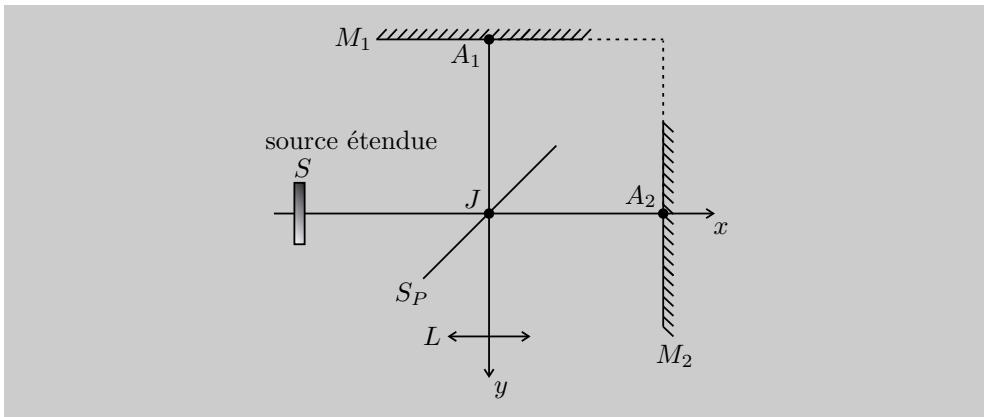
Exercice 8.6 : Michelson et raie à profil rectangulaire (MP-PT)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

La radiation utilisée est la raie rouge du cadmium à profil rectangulaire. On appelle A la densité spectrale de fréquence de l'éclairement. L'éclairement dû à la bande fréquence $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée est $A d\nu$ pour une fréquence comprise entre $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$. ν_0 est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$. L'indice de l'air vaut $1,0$. On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha \ll 1$ autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 .

On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

1. Calculer la différence de marche et caractériser le système de franges.
 2. On translate le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges. Le contraste s'anule la première fois pour $d = 15 \text{ cm}$. Calculer $\Delta\nu$.
 3. Calculer la longueur de cohérence $\frac{c}{\Delta\nu}$ et la durée moyenne d'un train d'onde.
- Conclusion.

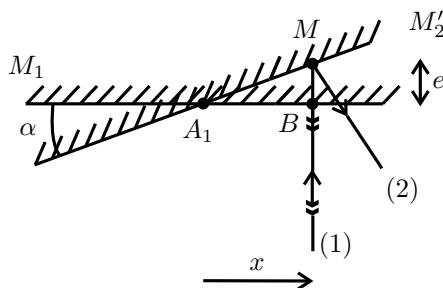


Analyse du problème

On travaille avec un Michelson en coin d'air. La source est à profil rectangulaire. La translation du miroir M_2 permet d'en déduire $\Delta\lambda$ à partir du contraste local. On va démontrer le résultat général suivant : La différence de marche ne doit pas être supérieure à la longueur de cohérence dans les expériences d'interférences.



1. On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2e = 2\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

2. Les ondes émises par les différentes fréquences sont incohérentes. Il faut donc faire la somme des éclairements.

L'éclairement dû à la bande de fréquence $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ vaut $A d\nu$ lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée.

L'éclairement dû à la bande de fréquence $d\nu$ en sortie de l'interféromètre est :

$$d\varepsilon = 2A d\nu \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right)$$

On a donc :

$$\varepsilon = 2A \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right) d\nu = 2A \left[\nu + \frac{\sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right)}{\frac{2\pi\delta}{c}} \right]_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}}$$

D'où :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{2\pi\delta} \left(\sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) \right)$$

On obtient :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu + \frac{2A}{2\pi\delta} \left(2\sin\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c}\nu_0\right) \right)$$

D'où finalement :

$$\varepsilon = 2A\Delta\nu \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c}\nu_0\right) \right)$$

Si on représente l'éclairement en fonction de δ , on a un terme lent :

$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right)$ et un terme rapide : $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{c}\nu_0\right)$.

Lorsque δ varie de quelques λ_m , l'éclairement varie entre ε_{\min} et ε_{\max} , c'est-à-dire que le terme rapide vaut -1 ou 1 .

On a donc : $\varepsilon_{\max} = 2A\Delta\nu \left(1 + \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \right| \right)$

et $\varepsilon_{\min} = 2A\Delta\nu \left(1 - \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \right| \right)$.

Le contraste local est :

$$C = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}} = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \right|$$

C s'annule pour la première fois lorsque $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu = \pi, \text{ d'où :} \quad \delta = 2d = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Si $\delta > 2d$, le contraste est très proche de 0. Expérimentalement, les franges ne réapparaissent plus.

Application numérique :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} = 1,0 \text{ GHz}$$

3. La longueur de cohérence est :

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = 2d = 30 \text{ cm}$$

La durée du train d'onde est :

$$\tau = \frac{L_c}{c} = 1,0 \text{ ns}$$

La longueur de cohérence L_c est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant la durée moyenne τ d'un train d'onde.

La valeur de L_c est assez grande pour cette expérience. L_c peut être beaucoup plus grande pour un laser stabilisé (400 m) alors qu'elle est très faible pour la lumière blanche (0,9 μm).

Application pratique : On n'a plus d'interférences lorsque la différence de marche est supérieure à la longueur de cohérence L_c . Les ondes ne proviennent plus du même train d'onde.

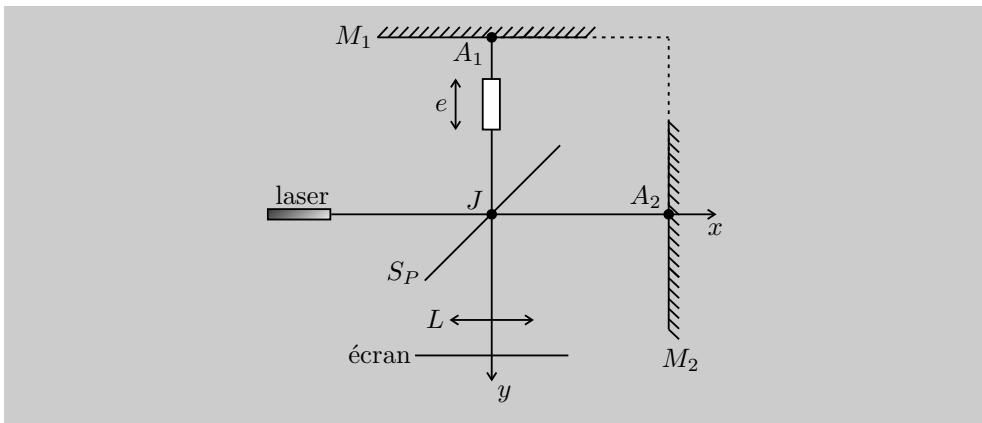
Exercice 8.7 : Détermination de l'indice de l'air (MP-PT)

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 . On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle α autour d'un axe perpendiculaire JA_1A_2 et passant par A_2 . On utilise un laser avec un élargisseur de faisceau. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$. On note n l'indice de l'air et μ sa masse volumique.

L'air supposé parfait suit la loi de Gladstone : $\frac{n - 1}{\mu} = cte$. La pression atmosphérique vaut 1013 hPa. Sur le trajet de l'un des faisceaux, on interpose une cuve à face parallèles d'épaisseur e . Avec une pompe à main, on crée une dépression de 900 hPa. Avec une vis, on fait rentrer progressivement de l'air à température constante. On observe 29 franges qui défilent en un point de l'écran.

1. Calculer la différence de marche sans la cuve et avec la cuve.

2. En déduire l'indice de l'air.



Analyse du problème

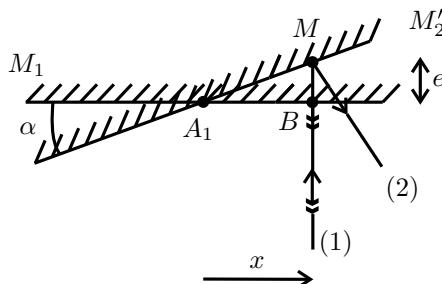
On travaille avec un Michelson en coin d'air. L'indice de l'air ne vaut pas exactement 1 puisque le but de l'exercice est de le déterminer précisément. La différence de marche dépend de l'indice de l'air qui dépend de la pression d'après la loi de Gladstone. On raisonne sur l'ordre d'interférence au début et à la fin de l'expérience pour en déduire la valeur de l'indice de l'air.



1. On note n_{air} l'indice de l'air à pression et température ambiante.
On note n l'indice de l'air à la pression P et à température ambiante.

Sans la cuve :

On travaille avec le schéma équivalent du Michelson en coin d'air d'arête A_1 . M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice.



On a un dispositif à division d'amplitude. Le Michelson est réglé en coin d'air. Les interférences sont localisées au voisinage des miroirs M_1 et M'_2 .

On pose $x = \overline{A_1 B} \approx \overline{A_1 M}$ comme α est petit.

On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

La différence de marche entre le rayon (2) et le rayon (1) est :

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1 \approx 2n_{\text{air}}e = 2n_{\text{air}}\alpha x$$

On observe des franges rectilignes parallèles à l'arête du coin d'air.

Avec la cuve :

Quand on rajoute la lame, le faisceau passe deux fois dans la cuve, la nouvelle différence de marche est :

$$\delta' = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n - n_{\text{air}})e$$



On a bien une différence des deux indices puisqu'on enlève le chemin optique dans l'air (d'indice n) à la pression atmosphérique pour le remplacer par le chemin optique dans l'air (d'indice n_{air}) à la pression P .



2. Soit k le nombre de franges qui défilent au point étudié à l'écran lorsque la pression passe de P_I à P_F .

- La pression initiale P_I vaut $P_I = 1013 \text{ hPa} - 900 \text{ hPa}$ puisqu'on a une dépression de 900 hPa.
- La pression finale P_F vaut $P_F = 1013 \text{ hPa}$.

D'après la loi de Gladstone, l'indice de l'air dépend de la masse volumique :

$$\frac{n - 1}{\mu} = A$$

en notant A la constante.

Pour un gaz parfait, la masse volumique est : $\mu = \frac{PM}{RT}$.

On en déduit que :

$$n = 1 + \alpha P$$

$\alpha = \frac{AM}{RT}$ est un coefficient de proportionnalité.

État initial :

L'indice de l'air dans la cuve est : $n_I = 1 + \alpha P_I$.

La différence de marche est : $\delta'_I = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_I - n_{\text{air}})e$.

L'ordre d'interférence est :

$$p'_I = \frac{\delta'_I}{\lambda_0} = \frac{2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_I - n_{\text{air}})e}{\lambda_0}$$

État final :

L'indice de l'air dans la cuve est : $n_F = n_{\text{air}} = 1 + \alpha P_F$.

La différence de marche est : $\delta'_F = 2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_F - n_{\text{air}})e$.

L'ordre d'interférence est :

$$p'_F = \frac{\delta'_F}{\lambda_0} = \frac{2n_{\text{air}}\alpha x - 2(n_F - n_{\text{air}})e}{\lambda_0}$$

On se place en un point de l'écran et on compte le nombre k de franges qui défilent. On a donc :

$$p'_I - p'_F = k$$

Soit $\frac{2(n_F - n_I)e}{\lambda_0} = k$, d'où $2\alpha(P_F - P_I)e = k\lambda_0$. Or $\alpha = \frac{n_{\text{air}} - 1}{P_F}$.

On a donc $2\frac{n_{\text{air}} - 1}{P_F}(P_F - P_I)e = k\lambda_0$, d'où :

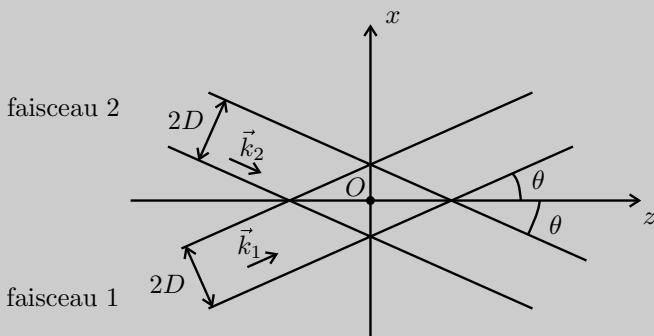
$$n_{\text{air}} = 1 + \frac{kP_F\lambda_0}{2e(P_F - P_I)}$$

Application numérique : $n_{\text{air}} = 1,000295$.

Remarque : Dans les tables, on trouve $n_{\text{air}} = 1,000293$.

Exercice 8.8 : Vélocimétrie laser (MP-PT)

La mesure de la vitesse d'un fluide peut s'effectuer directement par voie optique sans perturbation de l'écoulement. La recombinaison de deux faisceaux 1 et 2 issus d'un même laser crée une figure d'interférences dans un petit domaine de l'espace centré sur le point de mesure. Chaque faisceau est une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,52 \mu\text{m}$. Lorsqu'une particule solide de petites dimensions, entraînée par l'écoulement, traverse cette figure, elle rencontre des zones alternativement brillantes et sombres. Éclairée par cette figure d'interférences, elle réémet par diffusion une onde lumineuse reçue par un détecteur. La différence de marche est nulle au point O . L'indice du milieu vaut $n = 1,33$.



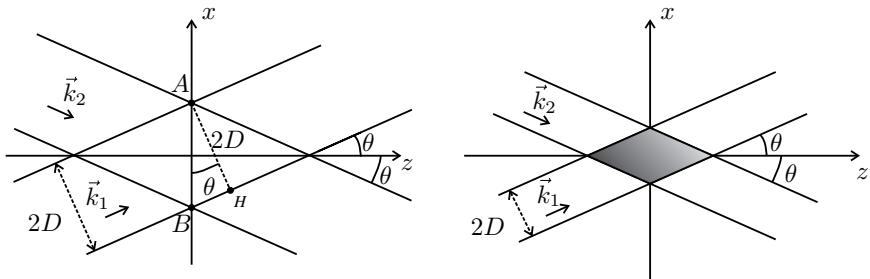
1. Calculer la largeur AB de la figure d'interférences en $z = 0$ sachant que $2D = 1,0 \text{ mm}$ et $\theta = 5^\circ$.
2. Calculer par deux méthodes la différence de marche en un point M de la figure d'interférences. En déduire l'interfrange i et le nombre de franges brillantes contenues dans le champ en $z = 0$.
3. Une particule se déplace à la vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$. Calculer la vitesse de fluide sachant que la période du signal reçu par le détecteur vaut 50 ms.

Analyse du problème

On travaille dans cet exercice avec des ondes planes. Il y a deux méthodes pour calculer la différence de marche. Le plus simple est d'utiliser le formalisme de l'onde plane.



1. Le champ d'interférences est hachuré sur la figure ci-dessous.



En $z = 0$, la largeur AB du champ d'interférences est l'intersection des deux faisceaux, soit :

$$AB = \frac{2D}{\cos \theta} = 1,0 \text{ mm}$$

Calcul de la différence de marche

On a deux méthodes pour calculer la différence de marche en M :

- Méthode 1 : utilisation du formalisme de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM).
- Méthode 2 : détermination géométrique de la différence de marche.

La méthode 1 est plus facile à utiliser quand on a une OPPM puisqu'il suffit de projeter les vecteurs d'onde dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



2. Méthode 1 :

On oriente les angles dans le sens trigonométrique. On a $\theta > 0$. On pose :

$$k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) . Les vecteurs d'onde se mettent sous la forme :

$$\vec{k}_1 = k \begin{vmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix}; \quad \vec{k}_2 = k \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{vmatrix}$$

La phase au point M pour l'onde 1 est :

$$\phi_1(M) = \phi_1(O) + \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM}$$

La phase au point M pour l'onde 2 est :

$$\phi_2(M) = \phi_2(O) + \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM}$$

D'après l'énoncé, $\phi_1(O) = \phi_2(O)$.

Le déphasage en M $\Delta\phi = \phi_1(M) - \phi_2(M)$ entre les ondes 1 et 2 vaut :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n ((x \sin \theta + z \cos \theta) - (-x \sin \theta + z \cos \theta)) = \frac{4\pi n}{\lambda_0} x \sin \theta$$

L'ordre d'interférence vaut :

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2nx \sin \theta}{\lambda_0}$$

L'éclairement en M est :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0(1 + \cos \Delta\phi)$$

On a des franges brillantes pour p entier, soit :

$$p = \frac{2nx}{\lambda_0} \sin \theta = m$$

avec m un entier relatif.

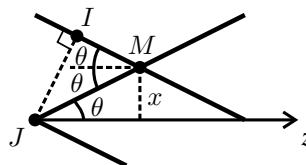
On a des surfaces brillantes perpendiculaires Ox caractérisées par :

$$x_m = m \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta}$$

On en déduit l'interfrange :

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta} = 2,24 \mu\text{m}$$

Méthode 2 :



Au point J , les ondes sont en phase. D'après le théorème de Malus, JI est un plan d'onde. La différence de marche vaut :

$$\delta = [JM] - [IM] = n(JM - IM)$$

$$\text{avec } JM = \frac{x}{\sin \theta} \text{ et } IM = JM \cos 2\theta = \frac{x}{\sin \theta} \cos 2\theta.$$

On a donc $\delta = \frac{nx}{\sin \theta} (1 - \cos 2\theta)$. Or $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$, d'où :

$$\delta = \frac{nx}{\sin \theta} 2 \sin^2 \theta = 2nx \sin \theta$$

L'ordre d'interférence est :

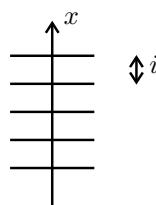
$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2nx}{\lambda_0} \sin \theta$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

D'après la question 1, on a : $x_A = 0,5 \text{ mm}$ et $x_B = -0,5 \text{ mm}$. On en déduit l'ordre d'interférence en A et B : $p_A = \frac{2nx_A}{\lambda_0} \sin \theta = 223,8$ et $p_B = -223,8$.

On a donc 447 franges brillantes contenues dans le champ en $z = 0$.

3. Lorsque la particule se déplace, elle passe successivement sur une frange brillante et une frange sombre. Lorsqu'elle passe sur une frange brillante, le détecteur reçoit la lumière diffusée par la particule qui est éclairée.



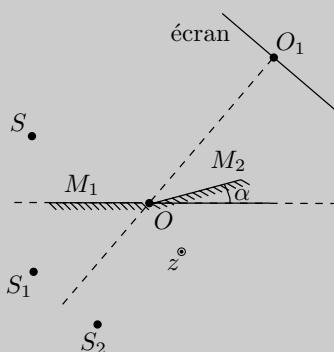
La période T du signal correspond au temps mis par la particule pour passer d'une frange brillante à une autre, c'est-à-dire parcourir la distance i à la vitesse v . On a donc :

$$v = \frac{i}{T} = 45 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 8.9 : Miroirs de Fresnel (MP-PT)

Une source S de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$ éclaire deux miroirs plans d'arête Oz faisant entre eux un angle $\alpha = 0,2^\circ$. On appelle S_1 et S_2 les images de S par les miroirs M_1 et M_2 . L'écran est orthogonal à la bissectrice de $[S_1 S_2]$. La distance SO vaut 15 cm et $OO_1 = 1,5 \text{ m}$. L'indice de l'air vaut 1,0.

1. Calculer la largeur de la figure d'interférences sur l'écran.
2. Calculer l'interfrange i et le nombre de franges brillantes observées sur l'écran.

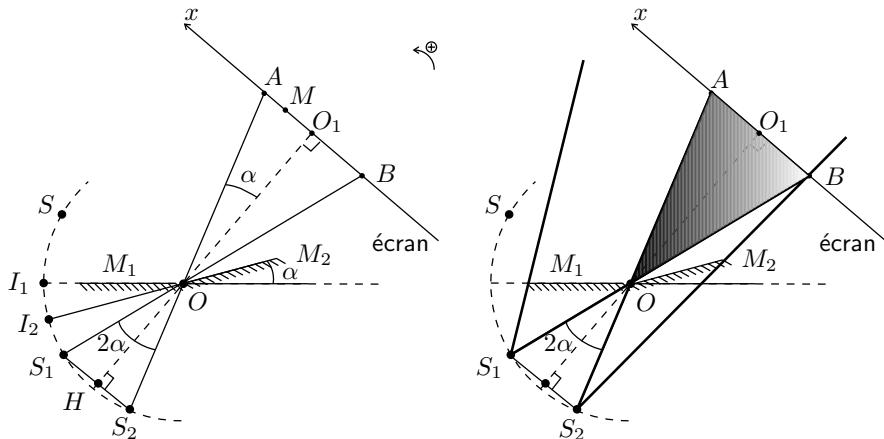


Analyse du problème

On se ramène à l'expérience des trous d'Young en considérant les sources secondaires S_1 et S_2 . Il faut soigner la construction pour calculer correctement les différentes longueurs.



1. On trace le cercle de centre O passant par S . L'angle $(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2})$ vaut 2α . On définit H le milieu de $[S_1S_2]$.



Cours : Pour bien interpréter l'expérience classique des miroirs de Fresnel, il faut se rappeler que l'on trace le cercle de centre O passant par S .

On peut exprimer l'angle $(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2})$ en fonction de α :

$$(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS}) + (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OS_2}) = 2(\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OS}) + 2(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OI_2}) = 2(\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OI_2})$$

On obtient alors :

$$(\overrightarrow{OS_1}, \overrightarrow{OS_2}) = 2\alpha$$



Le champ d'interférences est l'intersection des deux faisceaux issus de S . On peut raisonner avec les sources secondaires. Chaque faisceau semble issu d'une source secondaire.

La largeur AB du champ d'interférences sur l'écran est :

$$AB = 2AO_1 = 2OO_1 \tan \alpha = 10,5 \text{ mm}$$

2. On a deux réflexions sur un miroir qui rajoutent chacune $\frac{\lambda_0}{2}$ (correspondant à un déphasage de π) au chemin optique. Comme on fait la différence des chemins optiques, $\frac{\lambda_0}{2}$ n'apparaîtra pas dans la différence de marche.

On est ramené à l'expérience des trous d'Young. Les deux rayons qui interfèrent en M semblent provenir de S_1 et S_2 . On pose $a = S_1S_2$ et $D = HO_1$. D'après le schéma, on a : $D = HO_1 = HO + OO_1 = OS \cos \alpha + OO_1 = 1,65$ m et $a = S_1S_2 = 2 OS \sin \alpha = 1,05$ mm.

La différence de marche δ pour les fentes d'Young est :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

On en déduit l'ordre d'interférence p :

$$p = \frac{ax}{\lambda_0 D}$$

L'interfrange pour les fentes d'Young est :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} = 0,79 \text{ mm}$$



Voir l'exercice sur les fentes d'Young pour la démonstration de la différence de marche et de l'interfrange.



D'après la question 1, on $x_A = 5,24$ mm et $x_B = -5,24$ mm.

On en déduit l'ordre d'interférence en A et B : $p_A = \frac{ax_A}{\lambda_0 D} = 6,65$ et $p_B = -6,65$.

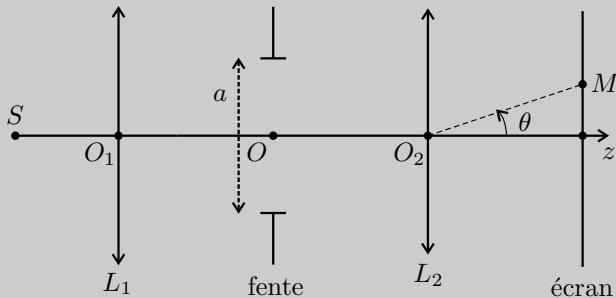
On observe donc 13 franges brillantes sur l'écran.

Diffraction

Exercice 9.1 : Diffraction par une fente fine (MP-PT)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), d'une fente fine de largeur a et de longueur b très grande devant a et d'un écran. On pose $u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0}$.

1. Où faut-il placer la source ponctuelle pour obtenir un faisceau de lumière parallèle à l'axe Oz après la lentille L_1 ? Où faut-il placer l'écran pour avoir une diffraction à l'infini ?
2. Énoncer le principe d'Huygens-Fresnel.
3. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de u et a . Représenter graphiquement l'éclairement en fonction de l'abscisse du point M . Décrire la figure de diffraction et exprimer la largeur de la tache centrale en fonction de λ_0 , f' et a .
4. Comment est modifiée la figure de diffraction si on augmente la largeur de la fente a ? et si on diminue a ?



Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer, c'est-à-dire la diffraction à l'infini. L'écran doit être dans le plan focal image d'une lentille convergente. On utilise le principe de Huygens-Fresnel pour calculer l'amplitude de l'onde diffractée et en déduire l'éclairement en un point de l'écran.



- 1.** Pour avoir un faisceau de lumière parallèle à l'axe optique, la source S doit être placée dans le plan focal objet de la lentille L_1 .

Remarque : La source S et la lentille L_1 forment un collimateur puisqu'on a une image à l'infini.

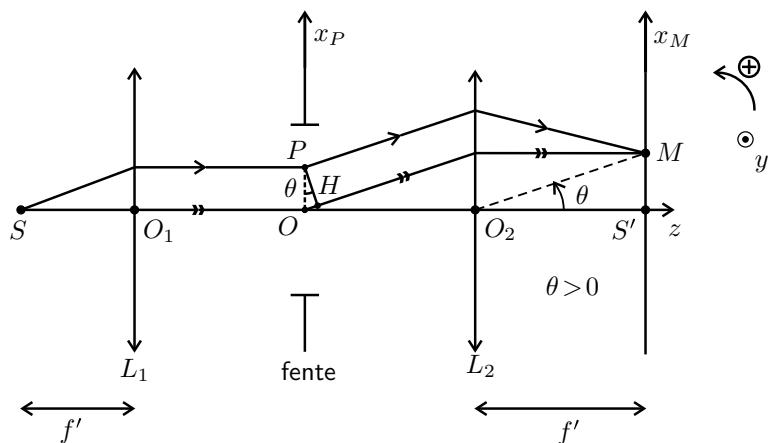


Pour avoir une diffraction à l'infini (ou diffraction de Fraunhofer), l'écran doit être placé dans le plan focal image de la lentille L_2 .

- 2.** Énoncé du principe d'Huygens-Fresnel :

Chaque surface élémentaire dS centrée sur un point de la fente se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à dS . Les sources secondaires sont alors cohérentes.

- 3.** La fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



Il faut accorder un soin tout particulier à la réalisation du schéma. Il y a plusieurs abscisses dans l'exercice : abscisse du point P notée x_P et abscisse du point M notée x_M .

Cours : On utilisera très souvent deux rayons lumineux : un rayon lumineux passant par O (appelé point de référence) et un rayon lumineux passant par un point P quelconque.

Pour placer le point M , on trace un rayon lumineux parallèle aux deux rayons arrivant sur L_2 et passant par O_2 . Ce rayon passant le centre optique n'est pas dévié. Le point M est l'intersection de ce rayon tracé en pointillés avec le plan focal image de L_2 . On l'appelle foyer secondaire image de L_2 correspondant à l'inclinaison θ .

On utilisera souvent le théorème de Malus : les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux.

Cas général : première formule de la diffraction

L'amplitude complexe de l'onde au point M s'écrit :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int_{P \in \text{fente}} \underline{t}(P) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right) dS$$

$\underline{a}(M)$ est l'amplitude de l'onde diffractée.

α est un coefficient de proportionnalité que l'on ne détaillera pas.

$\Phi_O(M)$ est le retard de phase de l'onde passant par les points S , O et M .

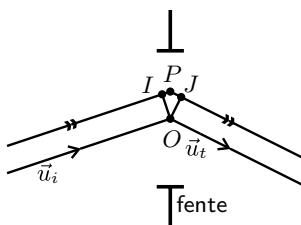
dS est l'élément de surface autour du point P .

δ est la différence de marche entre le chemin optique SPM et le chemin optique SOM .

$\underline{t}(P)$ est la fonction de transparence de la fente. Ici, en tout point de la fente, la transparence vaut 1. La fente est appelée pupille diffractante.

Cas particulier de deux ondes planes : deuxième formule de la diffraction

On rencontre souvent le cas particulier avec deux ondes planes représentées sur le schéma ci-dessous. L'onde incidente a pour direction de propagation \vec{u}_i et l'onde diffractée a pour direction de propagation \vec{u}_t . D'après le théorème de Malus, OI est un plan d'onde. En utilisant le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, OJ est un plan d'onde.



La différence de marche est alors :

$$\delta = -(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}$$

L'amplitude complexe de l'onde au point M s'écrit alors :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int_{P \in \text{fente}} \underline{t}(P) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}\right) dS$$



D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan PH serait un plan d'onde, donc $[PM] = [HM]$.

Le plan PO est un plan d'onde pour l'onde incidente, donc $[SP] = [SO]$.

La différence de marche entre les chemins SPM et SOM est donc :

$$\delta = -[OH] = -n_{\text{air}} OH = -OH = -x_P \sin \theta \approx -x_P \theta$$

Comme on travaille dans les conditions de Gauss : $\tan \theta = \theta = \frac{x_M}{f'}$.

La différence de marche est donc :

$$\delta = -x_P \frac{x_M}{f'}$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int_{P \in \text{fente}} \int \underline{t}(P) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}x_P \sin \theta\right) dS$$

Remarque : On aurait pu appliquer directement la deuxième formule de la diffraction. La première formule est préférable car elle permet de bien visualiser graphiquement la différence de marche.



On pose $dS = b dx_P$. On a alors :

$$\underline{a} = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) b \int_{x_P=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P$$

Il reste à calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{x_P=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P &= \frac{[\exp(-i2\pi u x_P)]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}}{-i2\pi u} \\ &= \frac{a}{a} \frac{\exp(-i\pi ua) - \exp(i\pi ua)}{-i2\pi u} \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{x_P=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi u x_P) dx_P = a \operatorname{sinc}(\pi ua)$$

On pose $\alpha_1 = \alpha \exp(i\Phi_O(M))$. D'où :

$$\underline{a} = \alpha_1 ab \operatorname{sinc}(\pi ua)$$

L'éclairement est :

$$\varepsilon = K \underline{a} \underline{a}^* = K |\alpha_1|^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi ua) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2(\pi ua)$$

On a :

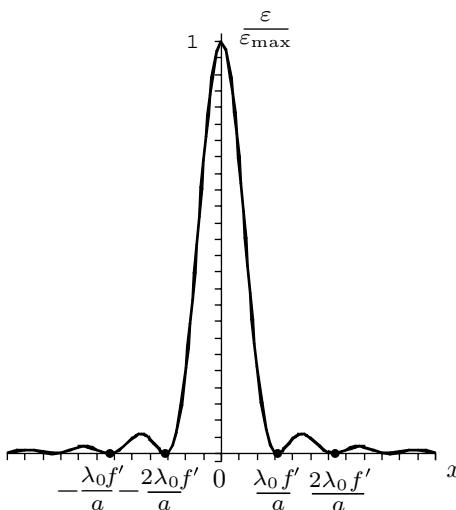
$$u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0} \approx \frac{\theta}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'}$$

Soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi x_M a}{\lambda_0 f'}\right)$$

La fonction sinus cardinal s'annule pour : $\frac{\pi x_M a}{\lambda_0 f'} = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$x_M = n \frac{\lambda_0}{a} f'$$



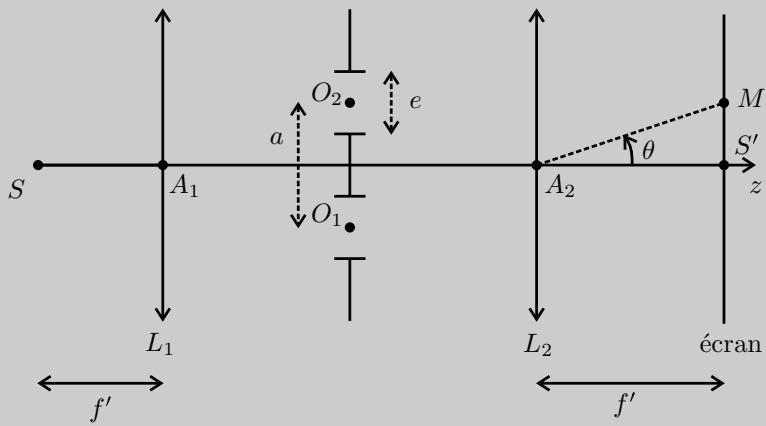
- $x = 0$ correspond au maximum de l'éclairement. La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique S' de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .
 - La largeur de la tache centrale est de largeur $2 \frac{\lambda_0 f'}{a}$.
 - Les taches secondaires sont beaucoup moins lumineuses et de largeur $\frac{\lambda_0 f'}{a}$.
4. Environ 90% de l'énergie lumineuse est concentrée dans la tache centrale. La largeur de la tache centrale est inversement proportionnelle à a . Si a augmente, la largeur de la tache centrale diminue. Si a est très grand devant λ_0 , toute la lumière est sur l'image géométrique S' de la source à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . Il n'y a plus de diffraction. On peut appliquer les résultats de l'optique géométrique.
- Si a est très petit devant λ_0 , la fonction sinus cardinal tend vers 1. On observe un éclairement uniforme.

Exercice 9.2 : Diffraction par deux fentes fines (MP-PT)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), de deux fentes fines (largeur e , longueur b très grande devant e) et d'un écran. Les centres O_1 et O_2 des deux fentes sont distants de a . On pose $u = \frac{\sin \theta}{\lambda_0}$.

1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de u , a et e .
2. Représenter graphiquement l'éclairement en fonction de x sachant que $a = 4e$.

3. Étudier le cas particulier où la largeur e est très petite devant a .



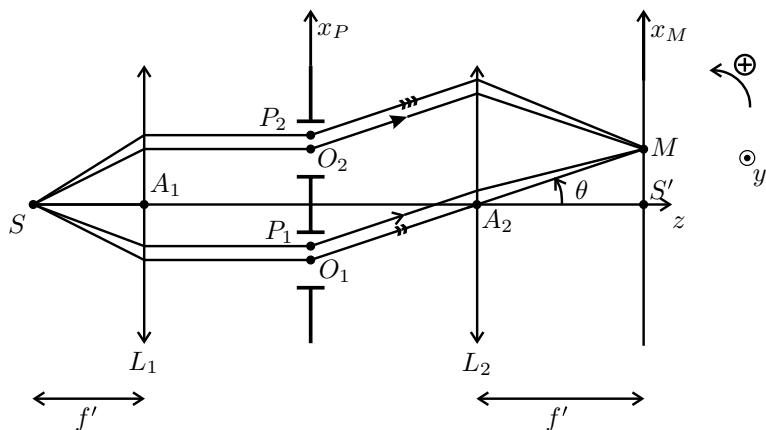
Analyse du problème

On a étudié dans l'exercice précédent la diffraction de Fraunhofer due à une fente. On va reprendre la même technique de calcul pour l'amplitude de l'onde due à la fente 1 et en déduire directement l'amplitude de l'onde due à la fente 2.

On va retrouver le cas limite des fentes d'Young si la largeur e est très petite devant la distance entre les deux fentes.



1. Les fentes sont de longueur très grande suivant Oy . Elles ne diffractent pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



D'après le principe d'Huygens-Fresnel, toutes les ondes émises par les éléments de surface dS des deux fentes sont cohérentes. On peut donc faire la somme de leurs amplitudes.

L'amplitude de l'onde au point M est la somme de l'amplitude au point M due à la fente 1 et l'amplitude au point M due à la fente 2. On a alors :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M)$$



Le schéma est essentiel dans les exercices de diffraction. Il est astucieux de repérer les abscisses des points P_1 et P_2 par rapport à O_1 et O_2 les centres des fentes.

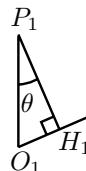


Calcul de l'amplitude due à la fente 1 :

Il faut calculer :

$$\underline{a}_1(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) \int_{P_1 \in \text{fente}1} \int \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_1\right) dS_{P_1}$$

D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan P_1H_1 serait un plan d'onde, donc $[P_1M] = [H_1M]$.



Le plan P_1O_1 est un plan d'onde pour l'onde incidente, donc $[SP_1] = [SO_1]$.

La différence de marche entre les chemins SP_1M et SO_1M est donc :

$$\delta_1 = -[O_1H_1] = -n_{\text{air}}O_1H_1 = -O_1H_1 = -x_{P_1} \sin \theta \approx -x_{P_1} \theta$$

Comme on travaille dans les conditions de Gauss : $\tan \theta = \theta = \frac{x_M}{f'}$.

La différence de marche est donc :

$$\delta_1 = -x_{P_1} \frac{x_M}{f'}$$

L'amplitude complexe est :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) \int_{P_1 \in \text{fente}1} \int \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}x_{P_1} \sin \theta\right) dS_{P_1}$$

On pose $dS_{P_1} = b dx_{P_1}$. On a alors :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) b \int_{x_{P_1}=-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \exp(-i2\pi u x_{P_1}) dx_{P_1}$$

Il reste à calculer l'intégrale :

$$\int_{x_{P_1}=-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \exp(-i2\pi u x_{P_1}) dx_{P_1} = \frac{\left[\exp(-i2\pi u x_{P_1})\right]_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}}}{-i2\pi u}$$

$$= \frac{e}{e} \frac{\exp(-i\pi ue) - \exp(i\pi ue)}{-i2\pi u} = e \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

D'où :

$$\underline{a}_1 = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) b e \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

Calcul de l'amplitude due à la fente 2 :

Il faut calculer :

$$\underline{a}_2(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) \int_{P_2 \in \text{fente} 1} \int \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_2\right) dS_{P_2}$$

On montre de même que :

$$\delta_2 = -x_{P_2} \frac{x_M}{f'}$$

On a alors :

$$\underline{a}_2 = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) b \int_{x_{P_2} = -\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \exp(-i2\pi ux_{P_2}) dx_{P_2}$$

On retrouve la même intégrale et on obtient :

$$\underline{a}_2(M) = \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) b e \operatorname{sinc}(\pi ue)$$

Calcul de l'amplitude totale :

$$\underline{a} = \alpha \exp(i\Phi_{O_1}(M)) b e \operatorname{sinc}(\pi ue) + \alpha \exp(i\Phi_{O_2}(M)) b e \operatorname{sinc}(\pi ue)$$



L'astuce est de mettre en facteur une exponentielle complexe pour faire apparaître une différence de marche dans l'autre terme.



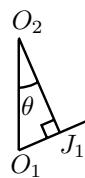
On a alors :

$$\underline{a} = \alpha b e \operatorname{sinc}(\pi ue) \exp(i\Phi_{O_2}(M)) [1 + \exp(i(\Phi_{O_1}(M) - \Phi_{O_2}(M)))]$$

Il reste à calculer $\Delta\Phi = \Phi_{O_1}(M) - \Phi_{O_2}(M)$:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} ([SO_1M] - [SO_2M])$$

On fait apparaître une différence de marche que l'on peut interpréter graphiquement :



$$[SO_1M] - [SO_2M] = [O_1J_1] = a \sin \theta \simeq a\theta = a \frac{x_M}{f'_2}$$

On en déduit :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} a \frac{x_M}{f'} = 2\pi u a$$

D'où :

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_1 \exp(i\Delta\Phi) = \underline{a}_1(M) \exp(i2\pi u a)$$

L'éclairement de la fente 1 est : $\varepsilon_1 = K \underline{a}_1 \underline{a}_1^*$.

L'éclairement de la fente 2 est : $\varepsilon_2 = K \underline{a}_2 \underline{a}_2^*$.

Les deux fentes ont donc le même éclairement au point M :

$$\varepsilon_{\text{fente}} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2(\pi u e)$$

L'amplitude totale est donc :

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_1(1 + \exp(i2\pi u a))$$

L'éclairement est : $\varepsilon = K \underline{a} \underline{a}^*$. D'où :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fente}} (1 + \exp(i2\pi u a)) (1 + \exp(-i2\pi u a))$$

Soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{fente}} 2 (1 + \cos(2\pi u a))$$

On a le produit d'un terme de diffraction et d'un terme d'interférences.

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2(\pi u e) (1 + \cos(2\pi u a))$$

2. L'éclairement peut se mettre aussi sous la forme :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} e\right) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} a\right)\right)$$

La fonction sinus cardinal s'annule pour $\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} e = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$x_M = n \frac{\lambda_0 f'}{e}$$

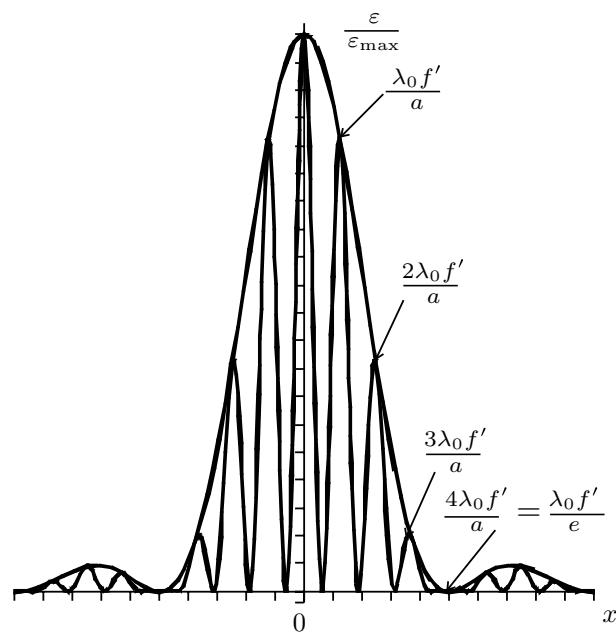
La fonction cosinus est maximale pour $2\pi \frac{1}{\lambda_0} \frac{x_M}{f'} a = m2\pi$ avec m entier, soit :

$$x_M = m \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

Sur l'écran, on observe des franges d'interférences qui sont modulées par le terme de diffraction.

Chaque fente est de largeur e . On retrouve un terme en $1/e$ caractéristique de la diffraction.

La distance entre les deux fentes est a . On retrouve en terme en $1/a$ caractéristique des interférences.



La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

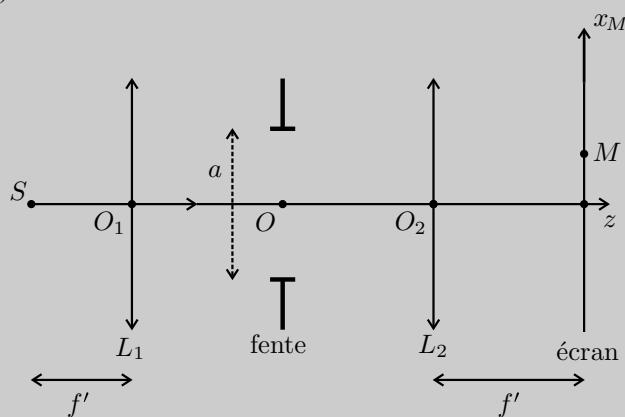
3. Si la largeur e est très faible devant a , alors le terme de diffraction est pratiquement égal à 1.

On retrouve la formule des interférences à deux ondes :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 (1 + \cos(\Delta\Phi))$$

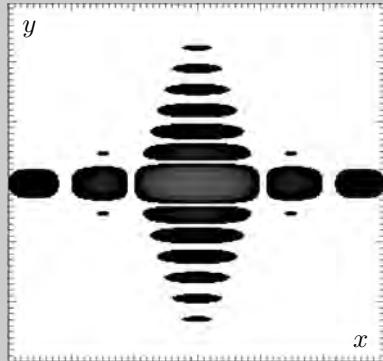
Exercice 9.3 : Diffraction par une fente rectangulaire (MP-PT)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0 placée sur l'axe Oz), d'une fente (de largeur a et de longueur b) et d'un écran.



1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de x_M , y_M , λ_0 , f' , a et b .

2. Interpréter la figure de diffraction (mêmes graduations sur les deux axes) et montrer que $b = \beta a$ avec β un entier que l'on déterminera.



3. Étudier le cas particulier où la longueur b est très grande devant la largeur a .

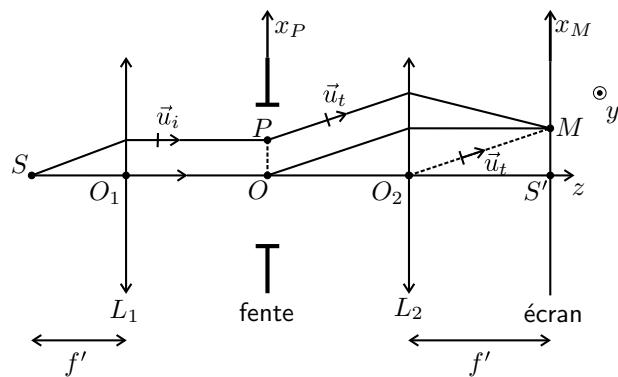
Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer avec une fente rectangulaire. L'analyse de la figure de diffraction permet d'en déduire directement une relation entre a et b .

Si $b \gg a$, on retrouve le cas particulier d'une fente fine.



1. On représente sur la figure les vecteurs unitaires \vec{u}_i et \vec{u}_t correspondant aux ondes planes avant et après la fente rectangulaire.



La figure est en réalité en 3 dimensions. Il faut tenir compte de y_P et y_M dans les calculs. On utilisera donc plutôt la deuxième formule de la diffraction que la première (voir rappels de cours dans l'exercice sur la fente fine).



Le principe d'Huygens-Fresnel permet d'écrire :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \iint_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}\right) dS$$

puisque la fonction de transparence de la fente vaut 1.

On pose $dS = dx_P dy_P$ et $\vec{u}_i = \vec{u}_z$

Le vecteur unitaire \vec{u}_t est : $\vec{u}_t = \frac{\overrightarrow{O_2 M}}{|O_2 M|}$. On travaille dans les conditions de

Gauss, donc $O_2 M \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} x_M \\ \frac{y_M}{f'} \\ 1 \end{vmatrix}$$

L'amplitude complexe s'écrit alors :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \iint_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{x_M x_P}{f'} + \frac{y_M y_P}{f'} \right)\right) dx_P dy_P$$

Les variables x_P et y_P sont indépendantes. On a deux intégrales à calculer I_1 et I_2 :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) I_1 I_2$$

Première intégrale :

$$I_1 = \int_{x_P=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i\frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} x_P\right) dx_P = \left[\frac{\exp\left(-i\frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right)}{\frac{-i2\pi x_M}{\lambda_0 f'}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

On a alors :

$$I_1 = \frac{\exp\left(-i\frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi x_M}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right)}{\frac{-i2\pi x_M}{\lambda_0 f'}} = a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right)$$

Deuxième intégrale :

On a de même :

$$I_2 = b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

Finalement, on a :

$$\underline{a}(M) = \alpha e^{i\Phi_O(M)} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

L'éclairement est : $\varepsilon(M) = K a \underline{a}^*$. Soit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'} a\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'} b\right)$$

L'éclairement est maximum pour $x_M = 0$ et $y_M = 0$.

La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

La première fonction sinus cardinal s'annule pour $\left(\frac{\pi x_M}{\lambda_0 f'}a\right) = m\pi$ avec m entier non nul, soit :

$$x_M = m \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

La deuxième fonction sinus cardinal s'annule pour $\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'}b\right) = n\pi$ avec n entier non nul, soit :

$$y_M = n \frac{\lambda_0 f'}{b}$$

La largeur de la tache centrale suivant x est : $\frac{2\lambda_0 f'}{a}$.

La largeur de la tache centrale suivant y est : $\frac{2\lambda_0 f'}{b}$.

D'après le graphe, la largeur de la tache centrale suivant y est trois fois plus petite que la largeur de la tache centrale suivant x . On a donc :

$$b = 3a$$

Remarque : On peut retrouver ce résultat très rapidement en se rappelant que la largeur de la tache centrale suivant l'axe x est proportionnel à $\frac{1}{a}$ alors que la largeur de la tache centrale suivant l'axe y est proportionnel à $\frac{1}{b}$.



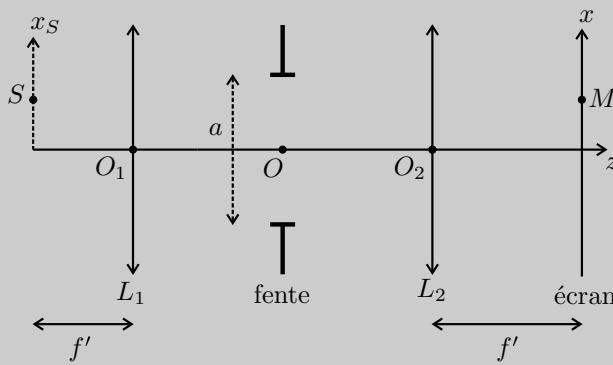
3. Si $b \gg a$, la fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . En effet, la fonction $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi y_M}{\lambda_0 f'}b\right)$ est quasiment nulle si $y_M \neq 0$. Par contre, elle vaut 1 si $y_M = 0$. On retrouve donc le cas particulier étudié dans l'exercice de diffraction par une fente fine.

Exercice 9.4 : Translation de la source et de la fente fine (MP-PT)

On considère un dispositif constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 (de même distance focale f'), d'une source ponctuelle S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ_0), d'une fente fine (de largeur a et de longueur b très grande devant a) et d'un écran. On appelle S' l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2

1. Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran en fonction de x_M , $x_{S'}$, λ_0 , f' et a .

2. Montrer que la figure de diffraction est centrée sur S' .
 3. Comment est modifiée la figure de diffraction si on translate la source S dans le sens des $x > 0$? Et si on translate la fente dans le sens des $x > 0$?

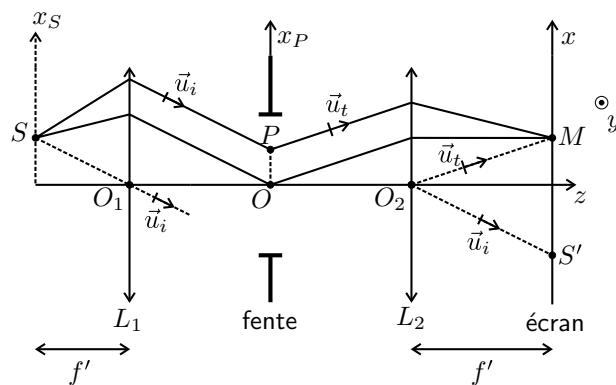


Analyse du problème

On étudie la diffraction de Fraunhofer avec une fente fine. La source n'est pas située sur l'axe optique. On va déterminer l'image S' de la source à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . La figure de diffraction est centrée sur S' .



1. La fente est de longueur très grande suivant Oy . Elle ne diffracte pas suivant Oy . On peut faire un schéma dans le plan Oxz .



Le principe d'Huygens-Fresnel permet d'écrire :

$$\underline{a}(M) = \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u}_t - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}\right) dS$$

puisque la fonction de transparence de la fente vaut 1.
 On pose $dS = b dx_P$.

Le vecteur unitaire \vec{u}_t est : $\vec{u}_t = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M}$. On travaille dans les conditions de Gauss, donc $O_2M \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} x_M \\ \frac{x_M}{f'} \\ \frac{y_M}{f'} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Le vecteur unitaire \vec{u}_i est : $\vec{u}_i = -\frac{\overrightarrow{O_1S}}{O_1S}$. On travaille dans les conditions de Gauss, donc $O_1S \approx f'$. On a donc :

$$\vec{u}_i = \begin{vmatrix} -x_S \\ \frac{-x_S}{f'} \\ \frac{-y_S}{f'} \\ 1 \end{vmatrix}$$

On définit S' l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . On peut écrire \vec{u}_i sous la forme :

$$\vec{u}_i = \begin{vmatrix} x_{S'} \\ \frac{x_{S'}}{f'} \\ \frac{y_{S'}}{f'} \\ 1 \end{vmatrix}$$

On en déduit que $x_{S'} = -x_S$ et $y_{S'} = -y_S$.

L'amplitude complexe s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M) &= \alpha \exp(i\Phi_O(M)) \int \int_{P \in \text{fente}} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{(x_M - x_{S'})x_P}{f'}\right)\right) b dx_P \\ &\quad \int_{x_P=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i\frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} x_P\right) dx_P = \left[\frac{\exp\left(-i\frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} x_P\right)}{\frac{-i2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\exp\left(-i\frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} \frac{a}{2}\right)}{\frac{-i2\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'}} = a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right) \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\underline{a}(M) = \alpha e^{i\Phi_O(M)} ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right)$$

L'éclairement est : $\varepsilon(M) = K \underline{a} \underline{a}^*$. Soit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_{\max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi(x_M - x_{S'})}{\lambda_0 f'} a\right)$$

2. L'éclairement est maximum pour $x_M = x_{S'}$.

La figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source S à travers les deux lentilles L_1 et L_2 .

3. Si on translate la source S dans le sens des $x > 0$, l'image S' se déplace dans le sens des $x < 0$ puisque $x_{S'} = -x_S$. On a donc la même figure de diffraction que dans la question 1 mais elle est centrée sur un autre point puisque le point S' s'est déplacé.

Si on translate la fente dans le sens des $x > 0$, la figure de diffraction n'est pas modifiée.

Exercice 9.5 : Trou d'Young avec lame - Holographie* (MP-PT)

On réalise l'expérience des fentes d'Young sur la figure 1 sans la lame d'indice n . S_1 et S_2 sont deux fentes fines. La source S monochromatique (de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$) est elle aussi une fente fine parallèle à S_1 et S_2 et coïncide avec le foyer objet de la lentille L_1 ; l'écran d'observation se trouve dans le plan focal image de la lentille L_2 de distance focale $f' = 1,0 \text{ m}$. La distance $S_1 S_2$ est égale à $a = 1 \text{ mm}$. L'indice de l'air vaut 1,0.

1. Calculer l'interfrange i sur l'écran. Sur le trajet des rayons issus de S_1 , on place une lame d'épaisseur e et d'indice n . Calculer le déplacement des franges pour $n = 1,5$ et $e = 0,01 \text{ mm}$.

2. La lame précédente est absorbante, de sorte que l'amplitude A_1 des ondes provenant de S_1 est beaucoup plus faible que l'amplitude A_2 des ondes provenant de S_2 . En déduire l'éclairement au point M en faisant un développement limité au 1^{er} ordre en $\frac{A_1}{A_2}$. On appelle $\Delta\phi$ le déphasage entre l'onde passant par S_2 et l'onde passant par S_1 .

3. On remplace l'écran par une plaque photographique. Celle-ci après développement, éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde quelconque transmet en chaque point où elle avait reçu un éclairement ε , une amplitude $\underline{a}_t = \beta\varepsilon^{\frac{-g}{2}}\underline{a}_0$ où β et g sont des constantes caractéristiques de l'émulsion photographique. Calculer en faisant un développement limité au 1^{er} ordre en $\frac{A_1}{A_2}$, l'amplitude \underline{a}_t des ondes transmises par la plaque en fonction de A_1 , A_2 , \underline{a}_0 , β , g , et $\Delta\phi$. Écrire \underline{a}_t comme la somme de trois termes.

4. La plaque ainsi obtenue est éclairée par un faisceau parallèle (figure 2). Ce faisceau est de même longueur d'onde que celle utilisée pour impressionner la plaque $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$. En négligeant le déphasage introduit par la lame, montrer que l'on obtient après la plaque, 3 ondes planes dont 2 sont déphasées par rapport à l'onde incidente.

5. Montrer alors que ces deux ondes vont converger après une lentille L_3 de même distance focale que L_2 , en 2 points S'_1 et S'_2 du plan d'observation placé dans le plan focal image de L_3 . Déterminer la distance d de chacun des points S'_1 et S'_2 à l'axe optique de la lentille L_3 .

figure 1

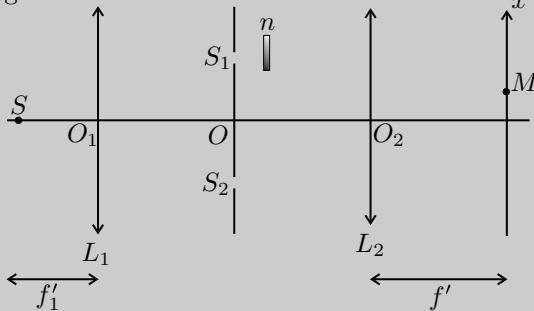
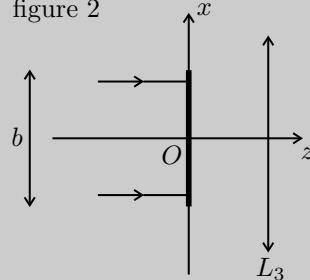


figure 2



Analyse du problème

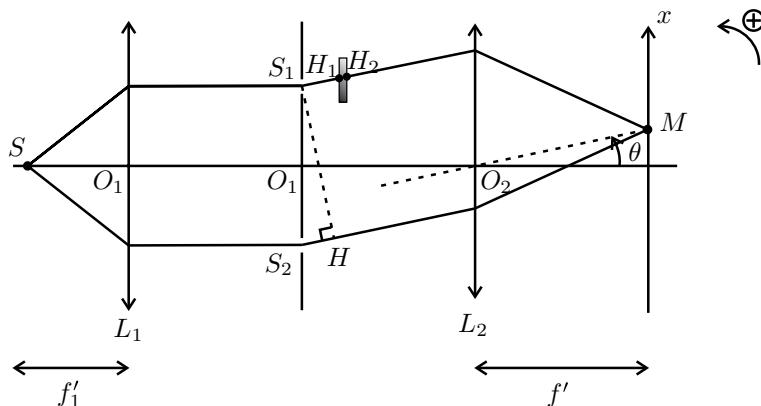
La première question est classique avec le déplacement de la figure d'interférences dû à l'introduction d'une lame.

On remplacer ensuite l'écran par une plaque photographique. On va montrer qu'en éclairant correctement cette plaque photographique, on a une restitution des points S_1 et S_2 .

Il faut bien faire attention au paramétrage et ne pas confondre les abscisses x et x' .



1. On travaille dans les conditions de Gauss : $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f'}$.



Sans la lame :

D'après le théorème de Malus, S_1S_2 est un plan d'onde, donc $[SS_1] = [SS_2]$. D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, S_1H serait un plan d'onde. On a donc : $[S_1M] = [HM]$.

La différence de marche entre SS_2M et SS_1M est :

$$\delta = [SS_2M] - [SS_1M] = S_2H = a \sin \theta = a\theta$$

L'ordre d'interférence au point M est :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'}$$

La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit $x = 0$.

L'interfrange est donné par la formule : $p(x + i) = p(x) + 1$.

Remarque : Si l'ordre d'interférence p est une fonction décroissante de x , on utilisera la relation $p(x + i) = p(x) - 1$



$$\text{On a alors : } \frac{a(x+i)}{\lambda_0 f'} = \frac{ax}{\lambda_0 f'} + 1.$$

On observe des franges rectilignes parallèles à \vec{u}_y d'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{a} = 0,6 \text{ mm}$$

Avec la lame :

La nouvelle différence de marche est :

$$\delta' = \frac{ax}{f'} - (n-1)e$$

puisqu'on enlève le chemin optique dans l'air que l'on remplace par celui dans la lame. On néglige l'inclinaison dans la lame puisqu'on travaille dans les conditions de Gauss avec $\theta \ll 1$.

Le nouvel ordre d'interférence est :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'} - \frac{(n-1)e}{\lambda_0}$$

La frange centrale est obtenue pour $p = 0$, soit :

$$x = \frac{(n-1)ef'}{a} = 5,0 \text{ mm}$$

La frange centrale s'est donc déplacée vers le haut de 5,0 mm.

L'interfrange n'est pas modifié et vaut toujours 0,60 mm.

2. La formule des interférences à deux ondes s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\Delta\phi) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\phi)$$

$$= A_2^2 \left(1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) + \frac{A_1^2}{A_2^2} \right)$$

On fait un développement limité au premier ordre en $\frac{A_1}{A_2}$. On obtient :

$$\varepsilon = A_2^2 \left(1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right)$$

$$\text{avec } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} - (n-1)e \right).$$

3. L'amplitude \underline{a}_t des ondes transmises par la plaque est :

$$\underline{a}_t = \beta \varepsilon^{-\frac{g}{2}} \underline{a}_0 = \beta A_2^{-g} \left(1 + \frac{2A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right)^{-\frac{g}{2}} \underline{a}_0$$

En faisant un développement limité au premier ordre, on a :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \left(1 - \frac{g}{2} \frac{2A_1}{A_2} \cos(\Delta\phi) \right) \underline{a}_0$$

D'où :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \left(1 - g \frac{A_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) - g \frac{A_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \right) \underline{a}_0$$

On obtient finalement :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \underline{a}_0$$

4. Juste derrière la plaque, on obtient la somme de trois ondes :

$$\underline{a}_t = \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(j\Delta\phi) \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \exp(-j\Delta\phi) \underline{a}_0$$

Un point P de la plaque est repéré par son abscisse x . On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{a}_t &= \beta A_2^{-g} \underline{a}_0 - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \underline{a}_0 \exp \left(j \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0} \right) \right) \\ &\quad - \beta A_2^{-g} \frac{gA_1}{A_2} \underline{a}_0 \exp \left(-j \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda_0} \right) \right) \end{aligned}$$

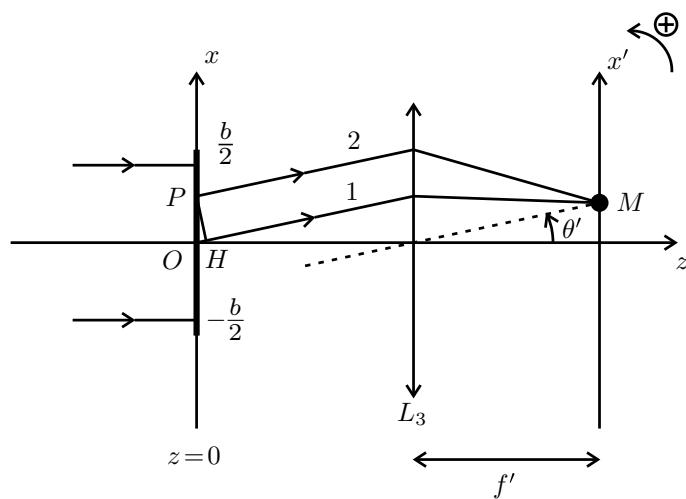
L'amplitude peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{a}_t = \underline{a}_{t0} + \underline{a}_{t1} + \underline{a}_{t2}$$

On a bien la somme de trois ondes planes.

5. La plaque photographique de largeur b et de longueur L très longue située en $z = 0$ transmet en chaque point une amplitude $\underline{a}_t = \underline{a}_{t0} + \underline{a}_{t1} + \underline{a}_{t2}$.

D'après le principe d'Huygens-Fresnel, chaque surface élémentaire dS centrée sur un point de la plaque se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à dS . Les sources secondaires sont alors cohérentes.


Contribution de a_{t1} :

L'amplitude de l'onde émise par l'élément de surface dS est :

$$da_1 = \alpha a_{t1} \exp(j\Phi_0(M)) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right) dS_P$$

Dans les conditions de Gauss, on a : $\tan \theta' \approx \theta' \approx \frac{x'}{f'} \approx \sin \theta'$

La différence de marche est :

$$\delta = [PM] - [OM] = -OH = -x \sin \theta' = -x \theta'$$

On a alors :

$$da_1 = -\alpha \beta a_0 A_2^{\frac{-g}{2}} \frac{g A_1}{A_2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f'} - (n-1)e\right)\right) \dots \\ \dots \exp(j\Phi_0(M)) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\theta'\right) dS$$

Il est inutile de calculer l'amplitude a_1 . On obtient une fonction sinus cardinal qui s'annule pour $\left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) = 0$, soit $\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{x'}{f'}$.

On a donc une figure diffraction centrée sur :

$$x' = a$$

Contribution de a_{t2} :

De même, la contribution de a_{t2} donne une figure de diffraction centrée sur $x' = -a$.

On a bien une restitution de S_1 et S_2 . On retrouve le double de la distance entre S_1 et S_2 . Ces deux points S'_1 et S'_2 sont distants de la distance $2a$ de l'axe optique.

Compléments

On peut détailler l'amplitude \underline{a}_1 . La plaque est de largeur b et de longueur L très grande devant b . Elle ne diffracte pas suivant Oy . Tous les termes indépendants de x sont regroupés dans la constante α_1 . On a alors :

$$\mathrm{d}\underline{a}_1 = \alpha_1 \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) x\right) \mathrm{d}S$$

Il reste à intégrer sur la largeur de la plaque pour calculer \underline{a}_1 :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) x\right) L \mathrm{d}x = \alpha_1 L \left[\frac{\exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right)} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

Soit :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L \left(\frac{\exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right) - \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right)} \right)$$

D'où :

$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L \frac{b}{b} \left(\frac{2j \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) \frac{b}{2}\right)}{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} + \theta'\right)} \right)$$

Finalement, on a :

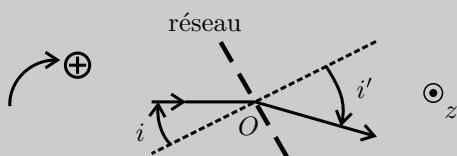
$$\underline{a}_1 = \alpha_1 L b \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{f'} - \theta'\right) b\right)$$

On a bien une figure de diffraction centrée sur :

$$\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{x'}{f'}$$

Exercice 9.6 : Diffraction par un réseau (MP-PT)

On considère un réseau par transmission formé de traits fins, identiques, parallèles, distants de $a = 1 \mu\text{m}$ et de longueur très grande devant a . Le faisceau incident a une direction fixe et de longueur d'onde λ_0 dans le vide. Le réseau peut tourner autour de l'axe Oz . L'indice de l'air vaut 1,0.



- Comment obtenir expérimentalement un faisceau de lumière parallèle ? Comment observer une image à l'infini avec une lentille convergente de distance focale 1,0 m ?

2. Déterminer pour quelles valeurs de l'angle i' , on observe un maximum de lumière à l'ordre k .
3. Pour un ordre k non nul, déterminer la déviation minimale D_m en fonction de k , λ_0 et a .
4. La source S est une lampe à vapeur de sodium. On étudie le spectre à l'ordre 2. Calculer la distance qui sépare les deux raies jaune sur l'écran (longueurs d'onde dans le vide $\lambda_{01} = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_{02} = 589,6 \text{ nm}$) en se plaçant au minimum de déviation pour λ_{01} .

Analyse du problème

Comme dans tous les exercices de diffraction, il faut soigner la figure. Les angles sont orientés algébriquement dans le sens des aiguilles d'une montre. La source doit être dans le plan focal objet d'une lentille convergente pour avoir un faisceau de lumière parallèle. Pour observer une image à l'infini, il faut placer l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

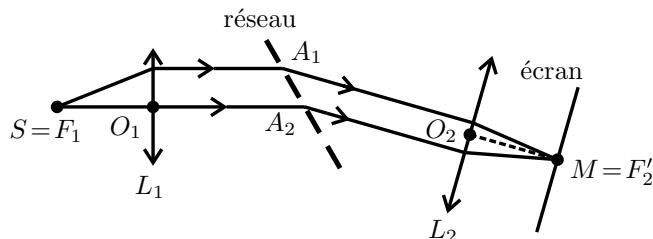
Il est inutile de calculer l'amplitude de l'onde diffractée pour trouver la formule des réseaux. Comme on a un très grand nombre de fentes, il faut que toutes les ondes qui interfèrent soient en phase pour obtenir un éclairement maximum.



1. La source S est placée au foyer objet de la lentille convergente L_1 . On obtient alors un faisceau de lumière parallèle.

Remarque : on a réalisé un collimateur.

Pour visualiser une image à l'infini, on place l'écran dans le plan focal image de la lentille convergente L_2 .



2. La différence de marche entre les rayons 1 et 2 est :

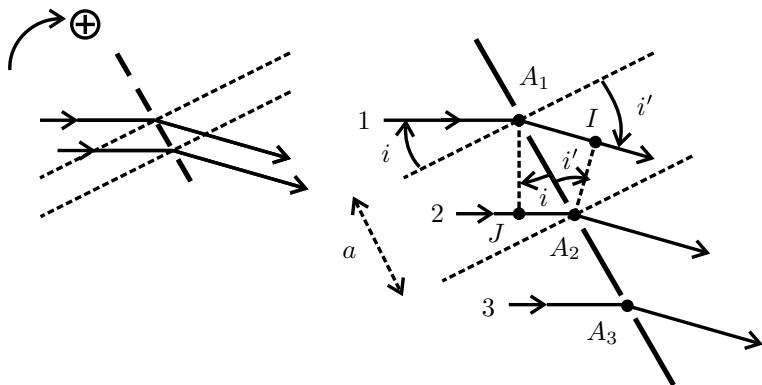
$$\delta = [SA_1M] - [SA_2M]$$

D'après le théorème de Malus, le plan A_1J est un plan d'onde, donc $[SA_1] = [SJ]$.

D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, le plan IA_2 est un plan d'onde, donc $[IM] = [A_2M]$.

La différence de marche est alors égale à :

$$\delta = [A_1I] - [JA_2] = n_{\text{air}}(A_1I - JA_2) = A_1I - JA_2$$



Or $A_1 I = a \sin i'$ et $J A_2 = a \sin i$. On en déduit que :

$$\delta = a \sin i' - a \sin i$$

On observe un maximum de lumière si les ondes diffractées par deux traits consécutifs du réseau sont en phase (déphasage multiple de 2π ou différence de marche multiple de λ_0). On doit donc avoir :

$$\delta = k\lambda_0$$

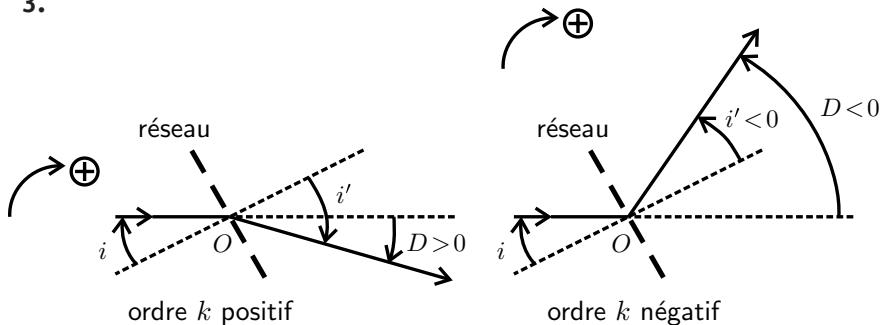
avec k entier.

La formule des réseaux par transmission est donc :

$$\sin i' = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$$

k est l'ordre du réseau.

3.



Ordre k positif :

La déviation du faisceau lumineux est : $D = i' - i$.

On a donc deux relations pour le réseau :

$$\left| \begin{array}{l} \sin i' = \sin i + k \frac{\lambda_0}{a} \\ D = i' - i \end{array} \right.$$

Pour déterminer le minimum de déviation, on calcule la différentielle de ces deux relations :

$$\begin{aligned} \cos i' di' &= \cos i di \\ 0 &= di' - di \end{aligned}$$

D'où $\cos i' = \cos i$. On a donc deux possibilités : $i' = i$ ou $i' = -i$.

La première possibilité correspond à l'ordre 0 et la déviation est toujours nulle. On exclut donc ce cas.

La deuxième possibilité correspond à $i' = -i$, soit : $\sin i' = -\sin i + k \frac{\lambda_0}{a}$.

On a donc : $2 \sin i' = k \frac{\lambda_0}{a}$.

La déviation vaut alors : $D_m = i' - i = 2i'$. Soit :

$$\sin \frac{D_m}{2} = \frac{k \lambda_0}{2a}$$

Ordre k négatif :

La déviation du faisceau lumineux est : $D = i' - i$. On a les mêmes relations que précédemment.

4. On se place au minimum de déviation à l'ordre 2 pour la longueur d'onde λ_{01} .

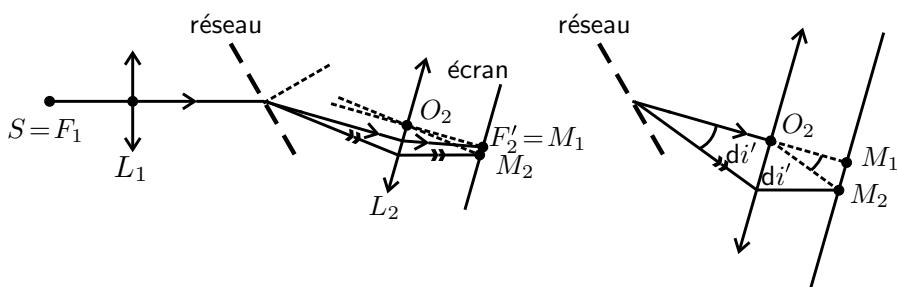
On a donc $i'_1 = -i_1$. La formule des réseaux à l'ordre 2 est :

$$\sin i'_1 = \sin i_1 + 2 \frac{\lambda_{01}}{a}, \text{ soit } 2 \sin i'_1 = 2 \frac{\lambda_{01}}{a}.$$

On en déduit l'angle $i'_1 = 36,1^\circ$.

Pour l'ordre 2, les rayons de longueur d'onde λ_{01} convergent au point M_1 et les rayons de longueur d'onde λ_{02} convergent au point M_2 .

On fait un zoom sur la lentille 2 en augmentant fortement les angles.



Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, on utilise le calcul différentiel pour déterminer la position du point M_2 par rapport au point M_1 . L'angle d'incidence i est fixé. Lorsque la longueur d'onde varie, on a une variation de l'angle i' .



La formule des réseaux à l'ordre 2 est :

$$\sin i' = \sin i + 2 \frac{\lambda_0}{a}$$

La différentielle s'écrit :

$$\cos i' di' = 2 \frac{d\lambda_0}{a}$$

On en déduit que :

$$di' = 2 \frac{d\lambda_0}{a \cos i'}$$

Le triangle $O_2M_1M_2$ est rectangle en M_1 avec $O_2M_1 = f'_2 = 1$ m.

Comme $d\lambda_0 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$ est très faible, alors :

$$\tan di' \approx di' \approx \frac{M_1 M_2}{f'_2} \text{ et } \cos i' \approx \cos i'_1$$

Soit :

$$M_1 M_2 = 2 f'_2 \frac{\lambda_{02} - \lambda_{01}}{a \cos i'_1} = 1,5 \text{ mm}$$

Remarque : On trouve le même résultat si le point M_1 n'est pas confondu avec le foyer image de la lentille L_2 . Dans tous les cas, les points M_1 et M_2 sont dans le plan focal image de la lentille L_2 .

Partie 6

Thermodynamique

Plan

10. Diffusion thermique	275
10.1 : Ailette de refroidissement (MP-PT)	275
10.2 : Simple et double vitrage (MP-PT)	280
10.3 : Fil parcouru par un courant (MP-PT)	283
10.4 : Résistance thermique entre deux sphères (MP-PT)	285
10.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux (MP-PT)	288
10.6 : Chauffage d'une pièce (MP-PT)	291
10.7 : Effet de cave (MP-PT)	293
10.8 : Echangeur thermique (PT)	296
10.9 : Échangeur thermique à contre courant* (PT)	299
11. Rayonnement d'équilibre thermique	302
11.1 : Cube dans un four (MP)	302
11.2 : Feuille d'aluminium entre deux parois planes (MP)	304
12. Thermodynamique industrielle	307
12.1 : Étude de la détente dans une turbine à gaz (PT)	307
12.2 : Compresseur réel à piston avec espace mort (PT)	313
12.3 : Compresseur à deux étages (PT)	316
12.4 : Pompe à chaleur avec pseudo source (PT)	319
12.5 : Écoulement d'un gaz parfait dans une canalisation (PT)	322
12.6 : Turboréacteur (PT)	327
12.7 : Cycle de Rankine (PT)	331
12.8 : Cycles avec surchauffe et resurchauffe (PT)	335
12.9 : Cycle industriel de réfrigération (PT)	340

Diffusion thermique

Exercice 10.1 : Ailette de refroidissement (MP-PT)

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5 \text{ mm}$, de longueur L . En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330 \text{ K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300 \text{ K}$. On appelle $\lambda = 400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conductoconvectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On

$$\text{pose } \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}.$$

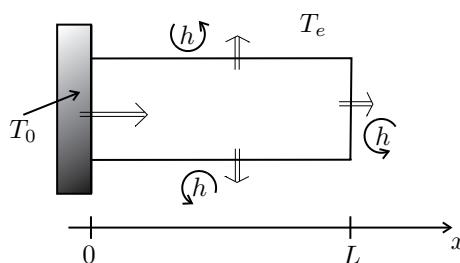
1. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie. Déterminer numériquement le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.
2. On remplace la tige précédente par une tige de longueur $L = 20 \text{ cm}$. Déterminer numériquement $T(x)$. Calculer $T(L)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'une ailette de refroidissement utilisée par exemple pour refroidir un microprocesseur. Il faut être capable d'effectuer un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur dx pour obtenir l'équation différentielle en $T(x)$. On utilisera la continuité de la température ou du flux thermique pour déterminer les constantes d'intégration.



1.



Comme $a \ll L$ (le rayon du tube est très petit devant la longueur), on peut considérer que la température ne dépend que de x .

Cours : Premier principe de la thermodynamique

Il faut prendre l'initiative d'effectuer un bilan thermique sur un volume élémentaire de section $S = \pi a^2$ compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt .

La transformation est isobare puisque le système est en contact avec l'air qui maintient une pression constante. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

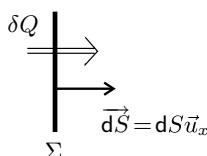
$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- dH est la variation d'enthalpie du système entre t et $t + dt$. Dans l'exercice, elle est nulle puisqu'on est en régime stationnaire (on dit aussi régime permanent).
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici : $\delta W' = 0$
- δQ est le transfert thermique algébriquement reçu pendant dt .

On divise souvent le premier principe de la thermodynamique par dt pour faire apparaître des puissances thermiques.

Puissance thermique par conduction traversant une surface Σ

Soit une surface Σ orientée suivant \vec{u}_x .



Le transfert thermique δQ qui traverse la surface Σ pendant dt est :

$$\delta Q = \Phi dt = P_{tR} dt$$

Φ est la **puissance thermique** par conduction qui traverse Σ . On l'appelle également **flux thermique**. Le terme puissance thermique est préférable puisqu'il fait référence à l'unité du flux thermique (le Watt).

On peut l'écrire avec le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} . On a alors :

$$\delta Q = \Phi dt = \iint_{M \in \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \overrightarrow{dS} dt$$

On projette sur \vec{u}_x . Le transfert thermique qui traverse S pendant dt dans le sens \vec{u}_x est :

$$\delta Q = \iint_{M \in \Sigma} j_{th} dS dt$$

Loi de Fourier

La loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

λ est la conductivité thermique du milieu (en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Elle est toujours positive. Le signe $-$ vient du fait que le transfert thermique se fait spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

Conditions aux limites

On n'a pas de discontinuité de la température à l'interface solide-solide ou solide-fluide immobile car le transfert thermique est de même nature (transfert thermique conductif). Le contact est supposé parfait.

On utilise très souvent la continuité du flux thermique au niveau des interfaces. Les interfaces ne peuvent pas accumuler d'énergie car l'épaisseur est infiniment petite.

On a une discontinuité de la température à l'interface solide-fluide en mouvement. On note T_P la température de la paroi solide et T_F la température de fluide en mouvement. On utilise souvent la loi de Newton :

$$\delta Q = hS(T_P - T_F)dt$$

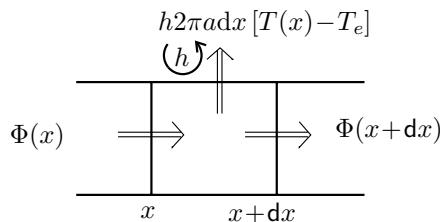


Il faut faire très attention aux signes. Comme le transfert thermique se fait du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. δQ est donc orienté algébriquement de la paroi vers le fluide.

Cours : h est appelé coefficient de transfert conducto-convectif ou coefficient d'échange entre le solide et le fluide (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$). Tout se passe comme si on avait une discontinuité de la température au niveau de la paroi. On fait l'approximation qu'une petite épaisseur d'air est quasiment au repos sur une très faible épaisseur appelée couche limite thermique.



On fait un bilan thermique sur une tranche comprise entre x et $x + dx$:



$\Phi(x)$ est la puissance thermique qui rentre en x .

$\Phi(x + dx)$ est la puissance thermique qui sort en $x + dx$.

$h2\pi adx [T(x) - T_e]$ est la puissance thermique qui sort à travers la surface latérale $2\pi adx$



Si $T(x) > T_e$, le transfert thermique est positif et effectivement dirigé vers l'extérieur. C'est bien une puissance thermique effectivement perdue.



La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique sur une tranche s'écrit en régime stationnaire :

$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt - h2\pi adx [T(x) - T_e]dt$$

On a donc :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - h2\pi adx [T(x) - T_e] = 0$$

La loi de Fourier est : $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$.

La puissance thermique $\Phi(x)$ qui traverse la surface πa^2 orientée suivant \vec{u}_x est :

$$\Phi(x) = j_{\text{th}} \pi a^2 = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi}{dx} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e] &= \lambda \pi a^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e] \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_e$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. Soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$$

- Solution générale de l'équation homogène.

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$, soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$.

La solution générale est donc : $T_{SG} = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

- Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

$$T_{SP} = T_e$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Il faut deux conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.
- La température doit rester finie si $x \rightarrow \infty$. On a donc $A = 0$.

La constante d'intégration B est : $B = T_0 - T_e$. On obtient :

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Numériquement, on a :

$$T(x) = 300 + 30 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

2. On a toujours :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

La distance caractéristique vaut $\delta = 28,9$ cm. La longueur de la tige vaut 20 cm. On ne peut plus considérer comme dans la question précédente que la longueur est très grande devant la distance caractéristique. On n'a donc plus les mêmes conditions aux limites.

Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.

La deuxième condition aux limites est plus délicate à trouver. On a une discontinuité de la température à cause du flux conducto convectif en $x = L$.

Il faut raisonner sur la **continuité du flux thermique** en $x = L$.



La continuité du flux thermique en $x = L$ permet d'obtenir la deuxième équation :

$$j_{\text{th}}(L)\pi a^2 = h\pi a^2 [T(L) - T_e]$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h [T(L) - T_e]$$

Comme $\frac{dT}{dx} = \frac{A}{\delta} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{B}{\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, on a :

$$\frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

On a un système à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} T_0 = T_e + A + B \\ \frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right) \end{cases}$$

La résolution numérique donne : $A = 5,92$ et $B = 24,08$.

On a donc :

$$T(x) = 300 + 5,92 \exp\left(\frac{x}{0,289}\right) + 24,08 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

Pour $x = L$, la température est égale à 324 K.

Remarque : Si la longueur de la tige est supérieure à 3, alors on peut considérer que la tige est de longueur quasi-infinie. On retrouve alors la résolution plus simple de la question 1.

Exercice 10.2 : Simple et double vitrage (MP-PT)

On considère une pièce à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$. La température extérieure est $T_e = 5^\circ\text{C}$. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1,15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3 mm. On suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers les autres parois de la pièce. On se place en régime stationnaire.

1. Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.
2. On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{\text{air}} = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

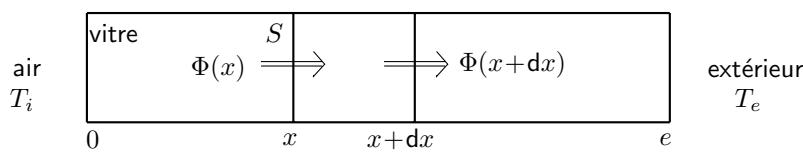
Analyse du problème

En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique en l'absence de production de chaleur. On pourra alors utiliser la notion de résistance thermique et travailler sur un schéma thermique équivalent. En appliquant le diviseur de tension, on pourra déterminer les différentes températures.

L'énoncé ne donne pas le coefficient de transfert conducto-convectif entre la vitre et l'air. On néglige donc la discontinuité de température aux interfaces vitre-air.



1. On appelle S la surface de la vitre. Le transfert thermique se fait suivant l'axe Ox dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.



Cours : La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit sur une tranche en régime stationnaire :

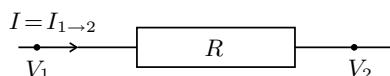
$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt$$

On a donc conservation du flux thermique :

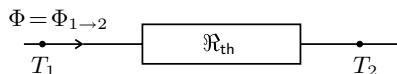
$$\Phi(x) = \Phi(x + dx) = cte$$

On note Φ le flux à travers les différentes sections de la vitre.

La loi d'Ohm s'écrit en convention récepteur : $V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}$. R est toujours positif.



La résistance thermique est définie par analogie : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.



Interprétation physique : Si $T_1 > T_2$, le transfert thermique se fait des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

Analogie avec l'électrocinétique :

$$\begin{aligned} T &\rightarrow V \\ \mathfrak{R}_{\text{th}} &\rightarrow R \\ \Phi &= P_{\text{th}} \rightarrow I \end{aligned}$$

Le flux à travers une surface S à l'abscisse x est :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

On sépare les variables et on intègre entre $x = 0$ et $x = e$.

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx, \text{ d'où } T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda S} e.$$

$$\text{On obtient : } T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \Phi.$$

La résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

Remarque :

On peut la retrouver par analogie avec l'électricité. La résistance d'un fil conducteur de conductivité γ , de section S et de longueur L est :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

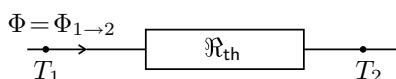
Dans de nombreux exercices, on fera le schéma thermique équivalent.



On est en régime stationnaire. Il n'y a pas de création de chaleur dans la vitre. On a donc conservation du flux thermique.

La résistance thermique est définie par analogie avec l'électricité :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}.$$



En coordonnées cartésiennes, la résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S} = 7,24 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

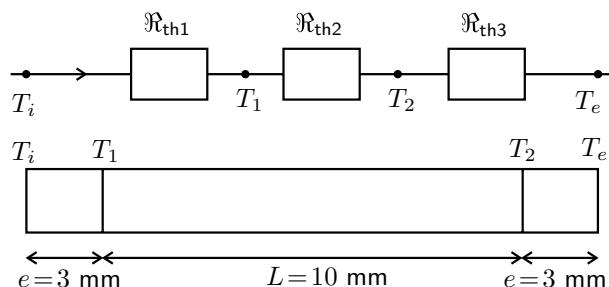
La surface S vaut : $S = 0,6 \times 0,6 = 0,36 \text{ m}^2$.

On en déduit le flux thermique sortant pour le simple vitrage :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{\text{th}}} = 2070 \text{ W}$$

2. On se place toujours en régime stationnaire. Il n'y a pas de terme de création. On a conservation du flux thermique à travers les différentes sections du double vitrage.

On peut donc utiliser le schéma électrique suivant avec des résistances thermiques en série.



Les résistances thermiques sont :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}1} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{th}2} = \frac{L}{\lambda_{\text{air}} S} = 1,11 \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{th}3} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

La résistance thermique équivalente est :

$$\mathfrak{R}_{\text{theq}} = \mathfrak{R}_{\text{th}1} + \mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}_{\text{th}3} = 1,13 \text{ K.W}^{-1}$$

On en déduit le flux thermique sortant :

$$\Phi_2 = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{\text{th}1} + \mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}_{\text{th}3}} = 13,3 \text{ W}$$

On a un flux thermique sortant 155 fois plus faible que dans la question 1. D'où l'intérêt du double vitrage pour l'isolation thermique.

On peut calculer les différentes températures en utilisant le diviseur de tension :

$$T_1 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{\text{th}1}}{\mathfrak{R}_{\text{theq}}} (T_e - T_i)$$



Il ne faut pas écrire T_1 au lieu de $T_1 - T_i$. Il faut considérer une tension et non un potentiel pour appliquer le diviseur de tension.



De même, on a :

$$T_2 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{\text{th}1} + \mathfrak{R}_{\text{th}2}}{\mathfrak{R}_{\text{theq}}} (T_e - T_i)$$

L'application numérique donne : $T_1 = 19,9^\circ\text{C}$ et $T_2 = 5,1^\circ\text{C}$.

Exercice 10.3 : Fil parcouru par un courant (MP-PT)

On considère un fil cylindrique de conductivité électrique γ , de conductivité thermique λ , de rayon a et de longueur L . On suppose que $T(0) = T(L) = T_0$. Le fil est parcouru par un courant électrique d'intensité constante I . On néglige les pertes thermiques à travers la surface latérale. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer la température $T(x)$ dans le fil.
2. Pour quelle abscisse la température passe-t-elle par un maximum ?
3. Ce résultat était-il prévisible par une analyse physique ?

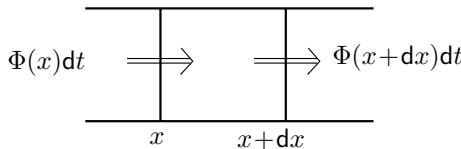
Analyse du problème

En régime stationnaire, on n'a pas continuité du flux thermique car le fil reçoit de la puissance du circuit électrique. Il faut faire attention aux signes lors de l'écriture du premier principe de la thermodynamique.

Une analyse des symétrie du problème permet de prévoir qualitativement où la température est maximale dans le fil.



1. On considère une tranche de section $S = \pi a^2$ comprise entre x et $x + dx$ pendant dt . La résistance de longueur dx et de section S est : $dR = \frac{dx}{\gamma S}$.



Pour une transformation isobare, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici le système reçoit un travail électrique. En convention récepteur, le travail reçu est : $\delta W_{\text{elec}} = dRI^2 dt = \frac{dx}{\gamma S} I^2 dt$.

- δQ est le transfert algébriquement reçu. Il vaut :

$$\Phi(x)dt - \Phi(x+dx)dt = -\frac{d\Phi}{dx}dxdt$$



Attention aux erreurs de signe pour le travail électrique reçu. Il faut bien mettre un signe + devant $dR I^2 dt$ car c'est bien une énergie reçue par le système de la part du circuit électrique. Cette énergie reçue est également appelée énergie dissipée par effet Joule.



La loi de Fourier est :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Le flux thermique ou la puissance thermique à travers la section S d'abscisse x est :

$$\Phi = j_{\text{th}}S = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On obtient donc pour le premier principe :

$$-\frac{d\Phi}{dx}dxdt + \frac{dx}{\gamma S}I^2dt = 0 = \lambda \pi a^2 \frac{d^2T}{dx^2}dxdt + \frac{dx}{\gamma \pi a^2}I^2dt$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4}$$

On intègre une première fois :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4}x + A$$

Une deuxième intégration permet d'écrire :

$$T = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = B \\ T(L) = T_0 = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L^2}{2} + AL + B \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} B = T_0 \\ A = \frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L}{2} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$T(x) = \frac{I^2}{2\lambda \gamma \pi^2 a^4} (-x^2 + Lx) + T_0$$

2. On calcule la dérivée de T par rapport à x pour déterminer où la température passe par un maximum :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{I^2}{2\lambda\gamma\pi^2a^4} (-2x + L)$$

La dérivée est nulle pour $x = \frac{L}{2}$.

La température est donc maximale au milieu du fil.

3. Chaque élément de longueur dx du fil reçoit la même énergie électrique.

Les températures sont égales aux deux extrémités. Le plan $x = \frac{L}{2}$ est un plan de symétrie pour la température. La température est donc croissante entre $x = 0$ et $x = \frac{L}{2}$ puis décroissante entre $x = \frac{L}{2}$ et L .

On peut donc prévoir qualitativement que la température est maximale au milieu du fil.

Exercice 10.4 : Résistance thermique entre deux sphères (MP-PT)

On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères de centre O , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ , R_1 et R_2 . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.

2. En utilisant la résistance thermique entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.

Analyse du problème

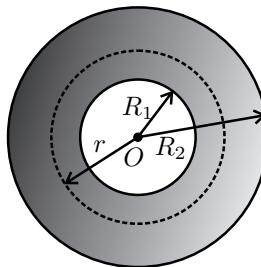
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux sphères.



1. On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et ϕ . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}} \vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des sphères de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les sphères de rayon r et $r + dr$ pendant une durée dt :

$$4\pi r^2 dr \mu c_p (T(t+dt) - T(t)) = 4\pi r^2 dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ = \Phi(r) dt - \Phi(r+dr) dt$$

En régime stationnaire $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r+dr) = cte = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers une sphère de rayon r (r compris entre R_1 et R_2).

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} = \frac{e}{4\pi\lambda R_1 R_2} \simeq \frac{e}{4\pi\lambda R_1^2}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 4\pi R_1^2$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$ est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 4\pi r^2}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différentes sphères de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{Adr}{r^2}$. L'intégration donne :

$$T = -\frac{A}{r} + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{A}{R_1} + B \\ T_2 = -\frac{A}{R_2} + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$ et $B = T_1 + \frac{A}{R_1}$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = -\frac{A}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \lambda 4\pi$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Exercice 10.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux (MP-PT)

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois cylindriques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire. On néglige les effets de bord.

- Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique entre deux cylindres de hauteur H en fonction de λ , R_1 , R_2 et H . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.
- En utilisant la résistance thermique entre un cylindre de rayon r et un cylindre de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .

Analyse du problème

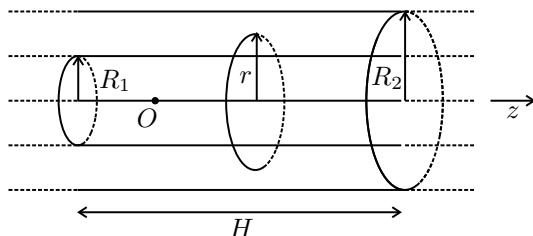
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux cylindres.



- On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et translation d'axe Oz . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}} \vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des cylindres de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les cylindres de rayon r et $r+dr$, de hauteur H pendant une durée dt :

$$\begin{aligned} 2\pi r H dr \mu c_p (T(t+dt) - T(t)) &= 2\pi r H dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \Phi(r) dt - \Phi(r+dr) dt \end{aligned}$$

En régime stationnaire, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r+dr) = cte = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers un cylindre de rayon r (r compris entre R_1 et R_2) et de hauteur H .

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \overrightarrow{dS} = j_{\text{th}} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \frac{dr}{r}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux cylindres :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_1 + e}{R_1} \right) = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right) = \frac{e}{\lambda 2\pi R_1 H}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 2\pi R_1 H$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre un cylindre de rayon r (hauteur H) et un cylindre de rayon $r+dr$ (hauteur H) est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 2\pi r H}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différents cylindres de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{Adr}{r}$. L'intégration donne :

$$T = A \ln r + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = A \ln R_1 + B \\ T_2 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ et $B = T_1 - A \ln R_1$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{\text{th}} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H = -\frac{A}{r} 2\pi r H = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \lambda 2\pi H$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Exercice 10.6 : Chauffage d'une pièce (MP-PT)

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^\circ \text{C}$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $\mathfrak{R}_{\text{th1}} = 10,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $\mathfrak{R}_{\text{th2}} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10^\circ \text{C}$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P .

Analyse du problème

On étudie la puissance thermique nécessaire pour maintenir constante la température d'une pièce. Comme on se place en régime stationnaire sans terme de création, on pourra utiliser l'association série et parallèle des résistances thermiques. Il faut faire attention aux signes lors de l'orientation des différentes puissances thermiques.



1. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à la pièce pendant une durée dt . En régime stationnaire, on a :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$.

$\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici $\delta W' = 0$.

En divisant par dt , on a :

$$0 = P_{\text{total reçu}}$$

$P_{\text{total reçu}}$ est la puissance thermique algébriquement reçue par la pièce.

Il y a trois puissances thermiques algébriquement reçues par la pièce :

$$P_{\text{total reçu}} = P + P_1 + P_2$$

- P est la puissance thermique apportée par le chauffage (par exemple un radiateur électrique).
- $P_1 = \frac{T_e - T_i}{R_{\text{th1}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les 4 murs et le sol.
- $P_2 = \frac{T_e - T_i}{R_{\text{th2}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les tuiles et le plafond.



Dans l'écriture du premier principe, les puissances sont algébriquement reçues par le système. Il faut donc écrire $T_e - T_i$ et non $T_i - T_e$ car $\frac{T_e - T_i}{R_{\text{th1}}}$ est une puissance algébriquement orientée de l'extérieur vers l'intérieur.
Ici $T_e < T_i$, donc $P_1 < 0$. C'est donc en fait une puissance effectivement fournie à l'extérieur.



On en déduit que :

$$P = - \left(\frac{T_e - T_i}{R_{\text{th1}}} + \frac{T_e - T_i}{R_{\text{th2}}} \right)$$

D'où

$$P = 6000 \text{ W}$$

Remarque : Les deux résistances thermiques sont en parallèle. La résistance thermique est définie par :

$$\frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th1}}} + \frac{1}{R_{\text{th2}}}$$

La puissance algébriquement reçue de l'extérieur est $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}}}$. Le premier principe s'écrit alors :

$$0 = P + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}}}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.



2. On souhaite avoir la même température avec une puissance thermique $P' = 3000 \text{ W}$. On appelle $\mathfrak{R}'_{\text{th}2}$ la résistance thermique de la plaque de matériau isolant que l'on rajoute entre le plafond et les tuiles. En régime stationnaire, la résistance thermique du plafond, de la plaque de matériau et des tuiles est alors : $\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}$.

Remarque : Les deux résistances sont bien en série car on se place en régime stationnaire sans terme de création. On a conservation du flux thermique (ou de la puissance thermique) à travers les différentes sections du plafond, du matériau isolant et des tuiles.



Le bilan thermique s'écrit alors :

$$P' = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} \right)$$

On a alors :

$$P' = (T_i - T_e) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}2} + \mathfrak{R}'_{\text{th}2}} = \frac{P'}{T_i - T_e} - \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}1}} = \frac{P' \mathfrak{R}_{\text{th}1} - (T_i - T_e)}{(T_i - T_e) \mathfrak{R}_{\text{th}1}}$$

On obtient finalement :

$$\mathfrak{R}'_{\text{th}2} = \frac{(T_i - T_e) \mathfrak{R}_{\text{th}1}}{P' \mathfrak{R}_{\text{th}1} - (T_i - T_e)} - \mathfrak{R}_{\text{th}2}$$

Application numérique : $\mathfrak{R}'_{\text{th}2} = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$.

Exercice 10.7 : Effet de cave (MP-PT)

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est : $T(0) = T_0 + a \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. Pour le sol, on note $\mu = 3,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique, $c = 515 \text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ la capacité thermique massique et $\lambda = 1,2 \text{ W.K}^{-1}.m^{-1}$ la conductivité thermique. On pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}.$$

1. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$.

Déterminer $\underline{f}(x)$. En déduire $T(x,t)$.

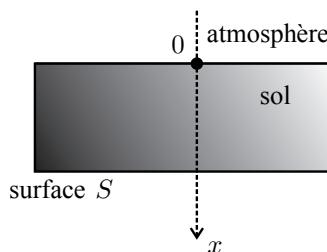
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15°C autour d'une température moyenne de 3°C en hiver.

Analyse du problème

On étudie les répercussions dans le sol des variations de température de l'atmosphère. Il faut savoir établir l'équation de la diffusion à une dimension en écrivant le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi.



1.



On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume de section S , compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

$$\mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

On en déduit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En notation complexe, on a :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors : $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t}$

avec $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t)$ et $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t) = \frac{\mu c}{\lambda} \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} j \omega \underline{f}(x) = 0$$

D'après l'énoncé, on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$. On obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{2j}{\delta^2} = 0$, soit :

$$r^2 = \frac{2j}{\delta^2}$$



Il faut savoir que $j = \exp(j \frac{\pi}{2})$, donc $\sqrt{j} = \exp(j \frac{\pi}{4}) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.



On en déduit :

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

On obtient alors :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} \exp\left(\frac{-(1+j)x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{(1+j)x}{\delta}\right)$$

La température complexe est :

$$\underline{T} = T_0 + \left(\underline{A} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{-jx}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{jx}{\delta}\right) \right) \exp(j\omega t)$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration complexes avec les conditions aux limites :

- Le sol a une profondeur infinie. Comme la température doit rester finie, on a nécessairement $\underline{B} = 0$.
- Pour $x = 0$, on a : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. D'où $\underline{A} = a$.

On obtient alors :

$$\underline{T} = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

On revient aux grandeurs réelles. Soit :

$$T(x, t) = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

2. Application numérique : $\delta = 14,6 \text{ cm}$. Pour $x = 50 \text{ cm}$, on a :

$$T(x,t) = 3 + 0,49 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

On a donc des variations très faibles de la température à une profondeur de 50 cm. Le sol n'est plus gelé à cette profondeur. C'est l'effet de cave.

On retrouve une profondeur caractéristique comme dans l'exercice sur l'effet de peau. Au delà de quelques δ , les variations de température sont négligeables.

Exercice 10.8 : Échangeur thermique (PT)

On considère un tube métallique cylindrique de longueur L , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , de conductivité thermique λ . À l'intérieur de ce tube, la température d'un fluide est $T(x)$. À l'extérieur, la température est maintenue constante à T_0 . Les échanges thermiques à l'interface fluide/paroi intérieure (respectivement paroi extérieure/air) sont modélisés par la loi de Newton avec le coefficient d'échange h_1 (respectivement h_2). On supposera que les échanges thermiques se font uniquement suivant \vec{u}_r (vecteur unitaire radial). Tous les régimes de transferts thermiques sont supposés stationnaires.

On donne : $\lambda = 2,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $h_1 = 5,3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$; $h_2 = 2,5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$; $R_1 = 30 \text{ cm}$; $R_2 = 40 \text{ cm}$; $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

1. Déterminer la conductance thermique linéique g_{th} de canalisation entre le fluide intérieur et l'air extérieur.

2. L'intérieur du tube cylindrique est parcouru par un fluide dont la température d'entrée est T_e , la température de sortie T_s , la capacité thermique massique $c = 5\,750 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, le débit massique constant $D_m = 0,015 \text{ kg.s}^{-1}$. On fixe la température d'entrée à $T_e = 322^\circ\text{C}$ et la température de sortie à $T_s = 284^\circ\text{C}$. Déterminer la longueur du tube.

Analyse du problème

Tous les régimes de transferts thermiques sont supposés stationnaires et il n'y a pas de production de chaleur : on peut donc utiliser les résistances thermiques.

On applique le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert à une entrée et une sortie en régime permanent. On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration. On en déduit alors la longueur du tube.



1. D'après l'exercice sur la résistance thermique entre deux cylindres, la résistance thermique du tube pour la longueur dx vaut :

$$\mathfrak{R}_{th2} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda dx}$$

Cours : La surface de la paroi intérieure pour une longueur dx est : $S_{\text{int}} = 2\pi R_1 dx$. On note les températures dans le fluide (pour $r = R_1$) et dans le tube (pour $r = R_1$) respectivement $T_{R_1^-}$ et $T_{R_1^+}$. Le flux conducto-convectif (ou puissance thermique) à travers cette surface orientée du fluide vers la paroi est :

$$\Phi = h S_{\text{int}} \left(T_{R_1^-} - T_{R_1^+} \right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{T_{R_1^-} - T_{R_1^+}}{\Phi} = \frac{1}{h S_{\text{int}}}$$



La résistance thermique de la paroi intérieure est :

$$\mathfrak{R}_{th1} = \frac{1}{h_1 2\pi R_1 dx}$$

La surface de la paroi intérieure est : $2\pi R_2 dx$. La résistance thermique de la paroi extérieure est :

$$\mathfrak{R}_{th3} = \frac{1}{h_2 2\pi R_2 dx}$$

En régime stationnaire sans terme de création, les trois résistances thermiques sont en série, donc :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}_{th3}$$

La conductance thermique est :

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1} + \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{2\pi\lambda} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2}} dx$$

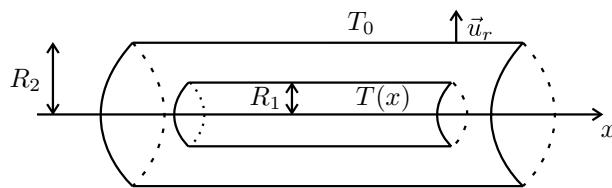
La conductance linéique est donc :

$$g_{\text{th}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1} + \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{2\pi\lambda} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2}}$$

2. On considère une tranche de fluide entre x et $x + dx$. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour un système ouvert en régime permanent :

$$D_m (h_s - h_e) = P_{\text{th}}$$

où h_e et h_s sont respectivement, les enthalpies massiques du fluide en entrée et sortie du volume compris entre x et $x + dx$, P_{th} désignant la puissance thermique reçue.



La puissance thermique reçue par le fluide est :

$$P_{\text{th}} = \frac{T_0 - T(x)}{R_{\text{th}}} = (T_0 - T(x)) g_{\text{th}} dx$$

D'où :

$$D_m (h_s - h_e) = g_{\text{th}} (T_0 - T(x)) dx$$

Ce qui entre est en x et ce qui sort en $x + dx$. On a alors :

$$D_m (h(x + dx) - h(x)) = D_m c (T(x + dx) - T(x)) = D_m c \frac{dT}{dx} dx$$

Remarque : Comme on a des tables thermodynamiques incomplètes, on fait l'approximation pour un fluide : $dh = cdT$, soit $h = cT + cte$. D'où

$$h(x + dx) - h(x) = c(T(x + dx) - T(x))$$



Soit :

$$D_m c \frac{dT}{dx} dx = -g_{\text{th}} (T(x) - T_0) dx$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{g_{\text{th}}}{D_m c} T = \frac{g_{\text{th}}}{D_m c} T_0$$

La résolution donne :

$$T = A \exp\left(-\frac{g_{\text{th}}x}{D_m c}\right) + T_0$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration :

Pour $x = 0$, $T = T_e$. Soit : $T_e = A + T_0$. On a donc :

$$T = (T_e - T_0) \exp\left(-\frac{g_{\text{th}}x}{D_m c_1}\right) + T_0$$

Pour $x = L$, on doit avoir :

$$T(L) = T_s = (T_e - T_0) \exp\left(\frac{-g_{\text{th}}L}{D_m c}\right) + T_0$$

Soit :

$$\frac{T_s - T_0}{T_e - T_0} = \exp\left(\frac{-g_{\text{th}}L}{D_m c}\right)$$

On en déduit :

$$L = -\frac{D_m c}{g_{\text{th}}} \ln\left(\frac{T_s - T_0}{T_e - T_0}\right) = 3,2 \text{ m}$$

Exercice 10.9 : Échangeur thermique à contre courant* (PT)

On considère un tube métallique cylindrique de longueur L , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , de conductivité thermique λ . Les échanges thermiques à l'interface fluide/paroi intérieure (respectivement paroi extérieure/air) sont modélisés par la loi de Newton avec le coefficient d'échange h_i (respectivement h_e). On supposera que les échanges thermiques se font uniquement suivant \vec{u}_r (vecteur unitaire radial). Tous les régimes de transferts thermiques sont supposés stationnaires. On donne : $\lambda = 2,5 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $h_i = 5,3 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $h_e = 2,5 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $R_1 = 30 \text{ cm}$; $R_2 = 40 \text{ cm}$; $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

1. Déterminer la conductance thermique linéique du système conducto-convectif en R_1 et R_2 , et diffusif entre les deux.

2. On réalise un échangeur thermique à contre courant : un fluide 1 (chaud) circule à l'intérieur du tube cylindrique de rayon R_1 , un autre fluide 2 (froid) circule à l'extérieur du tube cylindrique de rayon R_2 en sens inverse échangeant de la chaleur. Le fluide 1 est caractérisé par la température d'entrée T_{1e} , la température de sortie T_{1s} , le débit massique D_{m1} et la capacité thermique massique c_1 . Le fluide 2 est caractérisé par la température d'entrée T_{2e} , la température de sortie T_{2s} , le débit massique D_{m2} et la capacité thermique massique c_2 . On appelle $T_1(x)$ (respectivement $T_2(x)$) la température du fluide 1 (respectivement fluide 2) à l'abscisse x . Écrire le système d'équations différentielles reliant $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

3. Calculer la longueur L de l'échangeur thermique.

On donne : $c_1 = c_2 = 4180 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $D_{m1} = 0,03 \text{ kg.s}^{-1}$; $D_{m2} = 0,2 \text{ kg.s}^{-1}$; $T_{1e} = 350 \text{ K}$; $T_{1s} = 290 \text{ K}$; $T_{2e} = 280 \text{ K}$; $T_{2s} = 339 \text{ K}$.

Analyse du problème

Tous les régimes de transferts thermiques sont supposés stationnaires et il n'y a pas de production de chaleur : on peut donc utiliser les résistances thermiques.

On applique le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert à une entrée et une sortie en régime permanent. La difficulté est de l'appliquer pour le fluide à contre courant.



1. On a étudié le même système dans l'exercice précédent. La conductance thermique pour l'élément de longueur dx est :

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2}} dx$$

La conductance linéique est donc :

$$g_{\text{th}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2}}$$

2. On considère une tranche de fluide entre x et $x + dx$. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour un système ouvert en régime permanent :

$$D_m (h_s - h_e) = P_{\text{th}}$$

où h_e et h_s sont respectivement, les enthalpies massiques du fluide en entrée et sortie du volume compris entre x et $x + dx$, P_{th} désignant la puissance thermique reçue.

Fluide 1 :

À l'intérieur du tube cylindrique.

$$D_{m1} (h_s - h_e) = g_{\text{th}} (T_2(x) - T_1(x)) dx$$

Ce qui entre est en x et ce qui sort en $x + dx$. On a alors :

$$D_{m1} (h_1(x + dx) - h_1(x)) = D_{m1} \frac{dh_1}{dx} dx = D_{m1} c_1 \frac{dT_1}{dx} dx$$

Soit :

$$D_{m1} c_1 \frac{dT_1}{dx} dx = g_{\text{th}} (T_2(x) - T_1(x)) dx$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{g_{\text{th}}}{D_{m1} c_1} T_1(x) = \frac{g_{\text{th}}}{D_{m1} c_1} T_2(x)$$

Fluide 2 :

On a un fluide à contre courant. Ce qui entre est en $x + dx$ et ce qui sort en x . On obtient :

$$D_{m2} (h_2(x) - h_2(x + dx)) = -D_{m2} \frac{dh_2}{dx} dx = -D_{m2} c_2 \frac{dT_2}{dx} dx$$

Soit :

$$-D_{m2}c_2 \frac{dT_2}{dx} dx = g_{\text{th}}(T_1(x) - T_2(x)) dx$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dT_2}{dx} - \frac{g_{\text{th}}}{D_{m2}c_2} T_2(x) = -\frac{g_{\text{th}}}{D_{m2}c_2} T_1(x)$$

Remarque : Il ne faut pas être surpris d'avoir un signe $-$ dans l'équation homogène car le fluide 2 se déplace dans le sens des x décroissants.



On fait la différence des deux équations différentielles :

$$\frac{d(T_1 - T_2)}{dx} + (T_1 - T_2) \left(\frac{g_{\text{th}}}{D_{m1}c_1} - \frac{g_{\text{th}}}{D_{m2}c_2} \right) = 0$$

On pose :

$$\frac{1}{L_c} = \frac{g_{\text{th}}}{D_{m1}c_1} - \frac{g_{\text{th}}}{D_{m2}c_2}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d(T_1 - T_2)}{dx} + \frac{(T_1 - T_2)}{L_c} = 0$$

La résolution donne :

$$T_1 - T_2 = A \exp\left(-\frac{x}{L_c}\right)$$

3. Pour $x = 0$, on a : $T_{1e} - T_{2s} = A$.

Pour $x = L$, on a : $T_{1s} - T_{2e} = A \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$.

D'où :

$$\frac{T_{1s} - T_{2e}}{T_{1e} - T_{2s}} = \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$$

On obtient finalement :

$$L = -L_c \ln \left(\frac{T_{1s} - T_{2e}}{T_{1e} - T_{2s}} \right) = 3,90 \text{ m}$$

Rayonnement d'équilibre thermique

Exercice 11.1 : Cube dans un four (MP)

On place à l'intérieur d'un four un cube de côté a , de capacité thermique mas-
sique c et de masse m . Le four est maintenu à la température T_1 . Le solide est ini-
tialement à la température T_0 . Le four et le solide sont assimilés à des corps noirs.
On suppose que la température est uniforme à l'intérieur du parallélépipède et
que $\frac{T_0 - T_1}{T_1} \ll 1$.

1. Quelle est la condition sur les températures pour ne tenir compte que des trans-
ferts thermiques radiatifs ?
2. Déterminer l'évolution temporelle de la température T du parallélépipède.

Analyse du problème

Comme tous les solides sont assimilés à des corps noirs, on peut appliquer la loi de Stéfan. Le premier principe de la thermodynamique permet d'obtenir l'équation dif-
férentielle en T . Il faut faire le bilan des flux surfaciques pour en déduire le trans-
fert thermique algébriquement reçu par le système.



1. Il faut avoir des températures élevées pour ne tenir compte que des trans-
ferts thermiques radiatifs puisque le flux surfacique émis par un corps en
équilibre thermodynamique est σT^4 .

2. On appelle S la surface totale du cube : $S = 6a^2$. On appelle T la tem-
pérature du cube. Pendant dt , la température varie de dT . On peut utiliser
la loi de Stéfan puisque le cube est en équilibre thermodynamique à la tem-
pérature T .

On écrit le premier principe de la thermodynamique au cube entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

- La variation d'énergie interne vaut : $dU = mc dT$.
- Il n'y a pas de travail : $\delta W = 0$.

- Le flux surfacique émis par le cube considéré comme un corps noir est d'après la loi de Stéfan σT^4 . Le flux thermique émis par le four considéré lui aussi comme un corps noir est σT_1^4 . On en déduit le flux surfacique radiatif (orienté du corps noir vers l'extérieur) à la surface du cube (comportant 6 faces de surface totale $S = 6a^2$) :

$$\phi^{\text{rad}} = \sigma T^4 - \sigma T_1^4$$

Le transfert thermique algébriquement reçu par le cube est :

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\phi^{\text{rad}} S \, dt = -(\sigma T^4 - \sigma T_1^4) S \, dt$$

On en déduit l'équation différentielle en T :

$$mc \frac{dT}{dt} = -(\sigma T^4 - \sigma T_1^4) S$$

D'après l'énoncé, on suppose que T est proche de T_1 . On pose $x = T - T_1$.

$$\text{On a : } T^4 - T_1^4 = (T_1 + x)^4 - T_1^4 = T_1^4 \left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4 - T_1^4.$$

On fait un développement limité au premier ordre. On obtient :

$$T_1^4 \left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4 - T_1^4 \approx T_1^4 \left(1 + 4 \frac{x}{T_1}\right) - T_1^4 = 4T_1^3 x = 4T_1^3 (T - T_1)$$

L'équation différentielle s'écrit : $mc \frac{dT}{dt} = -\sigma 4T_1^3 (T - T_1) S$, soit :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\sigma 4T_1^3 S}{mc} T = \frac{\sigma 4T_1^3 S}{mc} T_1$$

On définit la constante de temps : $\tau = \frac{mc}{\sigma 4T_1^3 S}$.

On peut écrire l'équation différentielle avec la forme canonique :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_1}{\tau}$$

La résolution donne : $T = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_1$.

À $t = 0$, $T = T_0 = A + T_1$. On en déduit que $A = T_0 - T_1$, soit :

$$T = (T_0 - T_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_1$$

Exercice 11.2 : Feuille d'aluminium entre deux parois planes (MP)

Deux parois planes, parallèles, de grandes surfaces, dont les températures sont celles de deux sources aux températures T_1 et T_2 constantes, définissent une enceinte vide, à l'intérieur de laquelle on dispose parallèlement aux parois un écran fait d'une feuille d'aluminium d'épaisseur e . Cet écran, de capacité thermique massique c , de masse volumique μ , de température initiale T_0 , sépare l'enceinte en deux parties. Tous les solides sont considérés comme des corps noirs. On suppose que les températures T_1 et T_2 sont proches de T_0 .

1. Faire le bilan des flux surfaciques émis par les différentes surfaces.
2. Déterminer la température T de l'écran en fonction du temps.

Analyse du problème

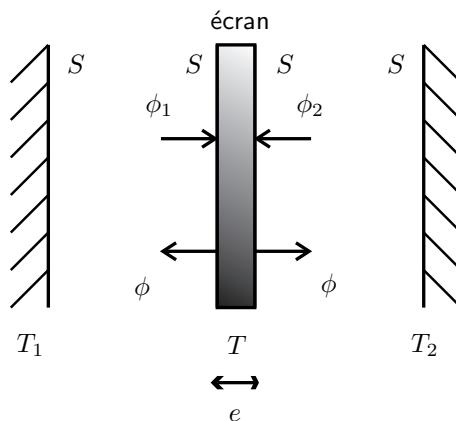
Comme tous les solides sont assimilés à des corps noirs, on peut appliquer aux 4 surfaces la loi de Stéfan. Il reste à appliquer le premier principe de la thermodynamique pour déterminer l'équation différentielle en T .



1. Il y a quatre flux surfaciques émis par les différentes surfaces qui sont considérées comme des corps noirs :

- flux surfacique émis par la paroi 1 à la température T_1 considérée comme un corps noir : $\phi_1 = \sigma T_1^4$
- flux surfacique émis par la surface de la feuille d'aluminium (à la température T) qui se situe en face de la paroi 1 : $\phi = \sigma T^4$
- flux surfacique émis par la paroi 2 à la température T_2 considérée comme un corps noir : $\phi_2 = \sigma T_2^4$
- flux surfacique émis par la surface de la feuille d'aluminium (à la température T) qui se situe en face de la paroi 2 : $\phi = \sigma T^4$

On appelle S les surfaces des 4 parois planes.



2. On applique le premier principe de la thermodynamique à la feuille d'aluminium entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

- La variation d'énergie interne vaut : $dU = mcdT = (\mu Se) cdT$.
- Il n'y a pas de travail : $\delta W = 0$.
- Le transfert thermique algébriquement reçu par l'écran est :

$$\delta Q = (\phi_1 - \phi) Sdt + (\phi_2 - \phi) Sdt$$

Il reste à simplifier $\phi_1 - \phi = \sigma(T_1^4 - T^4)$ et $\phi_2 - \phi = \sigma(T_2^4 - T^4)$.
On pose $x = T - T_1$.

$$T_1^4 - T^4 = T_1^4 - (T_1 + x)^4 = T_1^4 - T_1^4 \left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4$$

D'après l'énoncé, on suppose que T est très proche de T_1 .

On fait un développement limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} T_1^4 - T_1^4 \left(1 + \frac{x}{T_1}\right)^4 &\approx T_1^4 - T_1^4 \left(1 + 4\frac{x}{T_1}\right) = -4T_1^3 x \\ &= -4T_1^3 (T - T_1) \end{aligned}$$

On donc :

$$\phi_1 - \phi = -\sigma 4T_1^3 (T - T_1)$$

On obtient de même :

$$\phi_2 - \phi = -\sigma 4T_2^3 (T - T_2)$$

Le premier principe s'écrit alors :

$$(\mu Se) cdT = -4\sigma T_1^3 (T - T_1) Sdt - 4\sigma T_2^3 (T - T_2) Sdt$$

Comme T_1 est voisin de T_2 , on a :

$$(\mu Se) cdT = -4\sigma T_1^3 (T - T_1) Sdt - 4\sigma T_1^3 (T - T_2) Sdt$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{8\sigma T_1^3}{\mu ce} T = \frac{4\sigma T_1^3}{\mu ce} (T_1 + T_2)$$

On définit la constante de temps :

$$\tau = \frac{\mu c e}{8\sigma T_1^3}$$

Le régime permanent est :

$$T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

On peut écrire l'équation différentielle avec la forme canonique :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

La température est :

$$T = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_\infty$$

À $t = 0$, $T = T_0 = A + T_\infty$. On en déduit que $A = T_0 - T_\infty$, soit :

$$T = (T_0 - T_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_\infty$$

Thermodynamique industrielle

Exercice 12.1 : Etude de la détente dans une turbine à gaz

Les gaz de combustion détendus par une turbine à gaz sont assimilés à un gaz parfait de constante massique $r = 288 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et de rapport des capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1,34$.

Ces gaz de combustion ont été produits à une pression $p_1 = 8,00 \text{ bar}$ et une température $T_1 = 1100 \text{ K}$, qui sont les conditions à l'entrée de la turbine.

La turbine est parfaitement calorifugée et opère une détente des gaz de combustion, avec production d'un travail extérieur cédé aux aubages mobiles de la machine. Ce travail est appelé travail indiqué de la turbine. On négligera les énergies cinétiques et les énergies potentielles de pesanteur, ainsi que leurs variations, dans toute l'étude demandée. À l'échappement de la turbine, on mesure une pression $p_2 = 1,00 \text{ bar}$ et une température $T_2 = 800 \text{ K}$.

1. Calculer le travail indiqué massique cédé par les gaz de combustion à la partie mobile de la turbine.
2. On veut obtenir une puissance indiquée $P_i = 10,0 \text{ MW}$. Quel doit être le débit massique de gaz traversant la turbine ?
3. Calculer la variation d'entropie massique $s_2 - s_1$ des gaz à la traversée de la turbine.
4. Représenter schématiquement l'allure de l'évolution sur un diagramme entropique (T, s). En admettant que l'évolution $1 \rightarrow 2$ est représentée par un segment de droite, calculer l'aire du trapèze délimité par le segment $1 - 2$ et sa projection sur l'axe des entropies. Donner une interprétation physique de cette aire. Que représente-t-elle dans le fonctionnement de la turbine ?
5. Pour représenter l'évolution réelle des gaz de combustion dans la turbine, on utilise une loi approchée polytropique de forme $pv^k = cte$ coïncidant aux états 1 et 2 avec la transformation réelle. Calculer l'exposant k de cette polytropique.
6. Le travail cédé à la traversée de la turbine par toutes les forces de pression (amont, aval et intérieures) est appelé travail de transvasement. Calculer le travail de transvasement polytropique pour l'unité de masse de gaz traversant la machine (et évoluant selon la loi polytropique). Comparer avec la question 1 et interpréter la différence des travaux calculés dans ces deux questions.

Analyse du problème

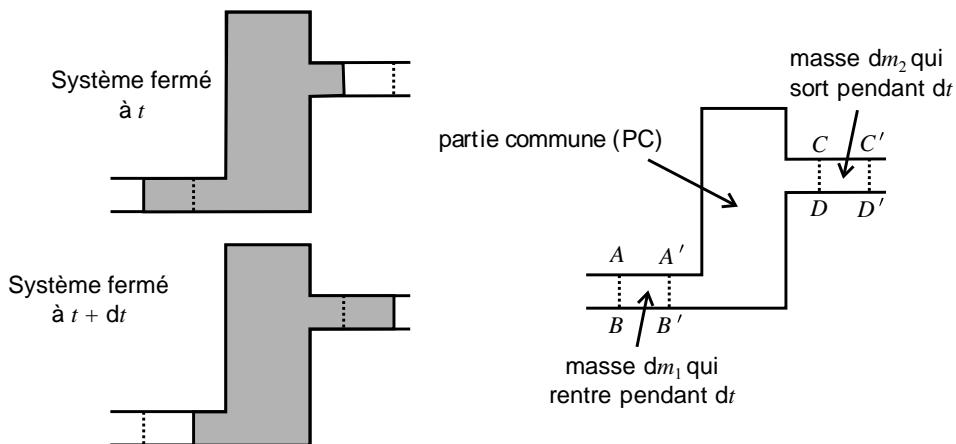
On modélise une transformation réelle par une polytropique réversible. La représentation graphique permet de visualiser le transfert thermique massique dû à l'irréversibilité. On vérifie les principes de base de la thermodynamique, en particulier le fait que le travail dépende du chemin suivi.

Cours : On considère un fluide qui s'écoule de l'état 1 (p_1, v_1, T_1) à l'état 2 (p_2, v_2, T_2).

Comment se ramener à un système fermé ?

Si on considère le système $A'B'CD$ (appelé partie commune (PC) ou volume de contrôle) avec une frontière fixe, on a un système ouvert (échange de matière). On ne peut pas appliquer le premier principe de la thermodynamique. On se ramène à un système fermé de la façon suivante :

- système fermé (Σ) à t : partie commune (PC) + masse dm_1 (de volume dV_1) qui rentre pendant dt .
- système fermé à $t+dt$: partie commune (PC) + masse dm_2 (de volume dV_2) qui sort pendant dt .



Régime permanent :

On dit aussi que le régime est stationnaire ou indépendant du temps. Toutes les fonctions d'état du système ouvert sont les mêmes à t et à $t+dt$:

$$U_{\text{PC}}(t) = U_{\text{PC}}(t+dt) \quad ; \quad E_{m(\text{PC})}(t) = E_{m(\text{PC})}(t+dt) \quad ; \quad S_{\text{PC}}(t) = S_{\text{PC}}(t+dt) \quad \text{et} \\ M_{\text{PC}}(t) = M_{\text{PC}}(t+dt).$$

Conservation du débit massique :

Le masse du système fermé est la même à t et à $t+dt$ (définition d'un système fermé). On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} M_{\Sigma}(t) = M_{\text{PC}}(t) + dm_1 \\ M_{\Sigma}(t+dt) = M_{\text{PC}}(t+dt) + dm_2 \end{array} \right.$$

Comme $M_{\Sigma}(t) = M_{\Sigma}(t+dt)$, on en déduit que $dm_1 = dm_2 = dm$ et $\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$.

On définit le débit massique par $D_m = \frac{dm}{dt}$ avec dm = masse qui traverse une section S pendant dt . On a conservation du débit massique :

$$D_{m1} = D_{m2}$$

Expression du 1^{er} principe :

Le premier principe pour le système fermé (Σ) s'écrit :

$$dU + dE_m = \delta W_{\text{extérieur}} + \delta Q_{\text{extérieur}}$$

- La variation d'énergie interne est : $dU = U(t+dt) - U(t)$, soit :

$$dU = \{U_{\text{PC}}(t+dt) + dm u_2\} - \{U_{\text{PC}}(t) + dm u_1\} = dm(u_2 - u_1)$$

- La variation d'énergie mécanique est nulle d'après l'énoncé.
- Le transfert thermique algébriquement reçu de l'extérieur (échangé avec l'extérieur) à travers toute la frontière du système ouvert est :

$$\delta Q_{\text{extérieur}} = q_e dm$$

- Le travail des forces extérieures ne dérivant pas d'une énergie potentielle (compris dans dE_m) est :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{pression amont}} + \delta W_{\text{pression aval}} + \delta W_i$$

Le travail des forces de pression amont est :

$$\delta W_{\text{pression amont}} = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{dl}_1 = +p_1 S_1 dl_1 = +p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm$$

$\delta W_{\text{pression amont}}$ est positif car la force est motrice (le volume de la masse qui rentre est exprimé avec le volume massique v_1). On peut imaginer qu'un piston pousse du côté 1 pour faire rentrer la masse dm_1 .

Le travail des forces de pression aval est :

$$\delta W_{\text{pression aval}} = \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{dl}_2 = -p_2 S_2 dl_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm$$

$\delta W_{\text{pression aval}}$ est négatif car la force est résistante.

Le travail reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine est appelé travail indiqué :

$$\delta W_i = w_i dm$$

En simplifiant par dm , le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$(u_2 - u_1) = q_e + p_1 v_1 - p_2 v_2 + w_i$$

On pose $h_2 = u_2 + p_2 v_2$ et $h_1 = u_1 + p_1 v_1$. On obtient :

$$h_2 - h_1 + e_{p2} - e_{p1} + \frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{2}c_1^2 = w_i + q_e$$

En grandeurs massiques, le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}} = h_2 - h_1 = w_i + q_e$$

Tout se passe comme si une masse dm était « transvasée » de l'état 1 à l'état 2. On dit qu'on a une machine avec transvasement puisqu'un fluide s'écoule en passant de l'état 1 à l'état 2. w_i est appelé le travail indiqué massique = travail reçu par unité de masse de fluide de la part des parties mobiles de la machine. Pour un compresseur : $w_i > 0$ et pour une turbine : $w_i < 0$.

q_e est le transfert thermique massique reçu de l'extérieur à travers toute la frontière du système ouvert. On a toujours $de_p = 0$ et $de_c = 0$ en thermodynamique industrielle sauf en sortie de tuyère.



- On a un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q_e$$

On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle. La transformation est adiabatique. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors :

$$\Delta h = w_i$$

Pour un gaz parfait, on a :

$$dh = c_p dT = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} dT$$

En intégrant, on obtient :

$$w_i = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = -340,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- La puissance indiquée est :

$$P_i = \frac{dm |w_i|}{dt} = D_m |w_i|$$

On en déduit :

$$D_m = \frac{P_i}{|w_i|} = 29,37 \text{ kg.s}^{-1}$$

- On travaille avec les variables p, T :

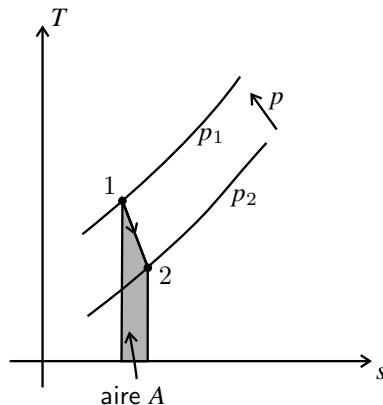
$$dh = c_p dT = T ds + v dp$$

On en déduit que : $ds = \frac{c_p dT}{T} - r \frac{dp}{p}$ car $pv = rT$ pour un gaz parfait. On a donc :

$$s_2 - s_1 = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 237,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

4. La transformation réelle est irréversible. On ne connaît pas les états intermédiaires.

On modélise la transformation réelle par une transformation fictive réversible entre le même état initial 1 (p_1, T_1) et le même état final 2 (p_2, T_2).



Les 4 équations fondamentales de la thermodynamique s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta h = w_{if} + q_{ef} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ w_{t\ rev} = \int_1^2 vdp \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} \delta q_{ef} = Tds \\ w_{if} = w_{t\ rev} \end{array} \right.$$

D'où :

$$q_f = q_{ef} = \int_1^2 Tds = \text{aire } A$$

On en déduit immédiatement l'interprétation graphique de $q_f = q_{ef}$ qui est le transfert thermique massique dû à l'irréversibilité. D'après le programme de PT, on linéarise pour calculer les aires. On a un trapèze :

$$q_f = q_{ef} = \int_1^2 Tds = \text{aire } A = (s_2 - s_1) \frac{T_1 + T_2}{2} = 225,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

5. On connaît l'état initial 1 (T_1, p_1) et l'état final (T_2, p_2). On modélise la transformation réelle par une transformation réversible polytropique d'indice k avec un gaz parfait. Pour calculer k , il suffit d'écrire la relation $T^k p^{1-k} = cte$

pour l'état 1 et pour l'état 2.

$$\text{On a alors : } k \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + (1 - k) \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 0.$$

On obtient finalement :

$$k = \frac{\ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) + \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)} = 1,18$$

On trouve bien $k < \gamma$ pour une détente, alors que pour une compression on a $k > \gamma$.

6. La transformation fictive réversible considérée est ici une polytropique réversible d'indice k avec un gaz parfait. Le travail de transvasement massique vaut :

$$w_{t \text{ poly}} = w_{tk} = \int_1^2 v dp$$

On peut appliquer les relations : $p v^k = cte$, soit :

$$p^{\frac{1}{k}} v = cte = A = p_1^{\frac{1}{k}} v_1 = p_2^{\frac{1}{k}} v_2$$

On a alors $v = A p^{-\frac{1}{k}}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} w_{tk} &= \int_1^2 v dp = A p^{\frac{-1}{k}} dp = \frac{A}{\frac{-1}{k} + 1} \left[p^{\frac{-1}{k} + 1} \right]_1^2 \\ &= \frac{Ak}{k - 1} \left(p_2^{\frac{-1}{k} + 1} - p_1^{\frac{-1}{k} + 1} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$w_{tk} = \frac{k}{k - 1} \left(p_2^{\frac{-1}{k} + 1} p_2^{\frac{1}{k}} v_2 - p_1^{\frac{-1}{k} + 1} p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \right)$$

Finalement, on a :

$$w_{tk} = \frac{k}{k - 1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{kr}{k - 1} (T_2 - T_1) = -566,4 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

En comparant les équations des questions 1 et 4, on a $w_i = w_{if} + q_{ef}$.

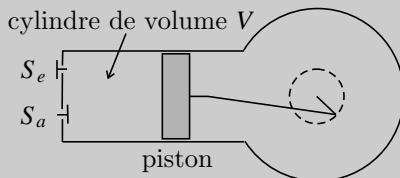
On a vu que $w_{if} = w_{t \text{ rev}}$. Cette relation peut s'écrire $w_{ik} = w_{tk}$ puisque la transformation réversible est une polytropique. On obtient finalement :

$$w_i = w_{ik} + q_{e \text{ poly}}$$

Le travail dépend du chemin suivi : on a deux valeurs différentes pour la transformation réelle irréversible et la transformation réversible polytropique.

Exercice 12.2 : Compresseur réel à piston avec espace mort (PT)

On étudie la compression de l'air dans un compresseur à piston. S_a et S_e désignent respectivement les soupapes d'admission et d'échappement.



On a : $V_A > V_e$ et $V_C < V_e$. La compression est réalisée dans un compresseur alternatif simple effet. On note V_e le volume balayé par le piston en passant du point mort extérieur (le plus éloigné de l'axe du vilebrequin) au point mort intérieur et εV_e le volume intérieur du cylindre quand le piston est au point mort extérieur (volume de l'espace mort).

On se propose de représenter l'évolution du gaz dans un diagramme de Watt portant en ordonnées la pression et en abscisse le volume V de gaz contenu à l'intérieur du cylindre. On désigne par A le point figuratif de cette évolution en fin d'aspiration à la pression p_1 , quand le piston est au point mort intérieur, et par C le point figuratif en fin de refoulement, à la pression p_2 , quand le piston est au point mort extérieur. L'évolution du gaz parfait dans le cylindre est schématisée de la manière suivante :

- phase de compression isentropique AB en vase clos ;
- phase de refoulement BC à pression p_2 et à température T_2 constantes ;
- phase de détente isentropique CD du gaz contenu dans l'espace mort ;
- phase d'aspiration DA à pression p_1 et à température T_1 constantes.

1. Représenter l'allure du diagramme de Watt $ABCD$. Exprimer les volumes aux quatre points A, B, C, D en fonction de $V_e, \varepsilon, \frac{p_2}{p_1}$ et γ . Exprimer le rapport

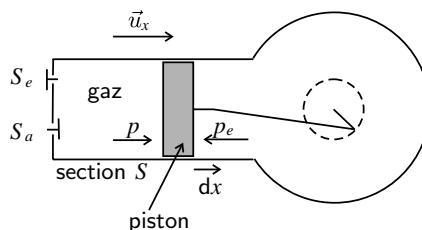
$\frac{V_A - V_D}{V_e}$ en fonction de $\varepsilon, \frac{p_2}{p_1}$ et γ . Étudier l'évolution de ce rapport lorsque $\frac{p_2}{p_1}$ augmente. Conclusion.

2. On se place maintenant dans le cas suivant : $p_1 = 1 \text{ bar}$; $T_1 = 293 \text{ K}$; $p_2 = 10 \text{ bar}$; $V_e = 0,02 \text{ m}^3$; $\varepsilon = 0,05$; $\gamma = 1,4$; $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer les volumes V_A, V_B, V_C et V_D puis les travaux fournis au gaz par le piston pendant les évolutions AB, BC, CD et DA en précisant bien leurs signes. Calculer le travail pour un aller et retour du piston. Calculer le travail massique. Le compresseur tourne à 600 tours par minute. Calculer son débit massique. Calculer la puissance fournie au gaz.

Analyse du problème

On étudie un compresseur réel à piston. Comme la masse de gaz est variable au cours de la transformation, on utilise le diagramme de Watt représentant la pression en fonction du volume du gaz contenu dans le cylindre. Le travail élémentaire des forces de pression est $\delta W = -pdV$. Il reste à intégrer pour calculer le travail au cours des différentes évolutions.

Cours : Calcul du travail élémentaire des forces de pression pour un compresseur



Bilan des forces qui s'exercent sur le piston :

- forces de pression exercées par le gaz : $\vec{F}_{\text{gaz}} = p S \vec{u}_x$
- forces de pression extérieure : $\vec{F} = -p_e S \vec{u}_x$

Comme le piston est de masse négligeable, la résultante des forces qui s'exercent sur celui-ci est nulle. On en déduit que $p_e = p$.

Les forces de pression extérieure sont donc égales à : $\vec{F} = -p S \vec{u}_x$. Le travail élémentaire des forces de pression extérieure correspondant à un déplacement $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$ du piston pendant dt s'écrit : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -p S \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = -p S dx$.

Le travail élémentaire des forces de pression extérieure est :

$$\delta W = -pdV$$

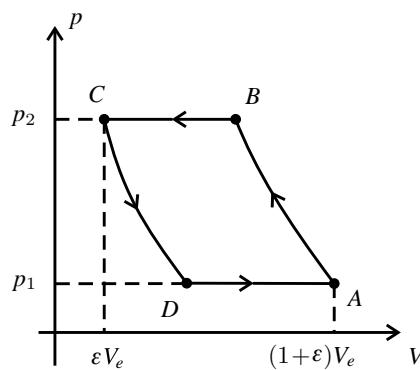
dV est la variation du volume pendant dt .

Interprétation physique du signe de δW :

- $\delta W < 0$ pour l'admission (force résistante)
- $\delta W > 0$ pour l'échappement (force motrice)



1. L'allure du diagramme de Watt est la suivante :



Pour un compresseur à piston, V désigne le volume du gaz contenu à l'intérieur du cylindre. Le système considéré est la machine et non le gaz car la masse de gaz est variable.

Le point A est le point mort intérieur de volume $V_A = V_e (1 + \varepsilon)$.

La transformation AB est isentropique pour un gaz parfait. Les lois de Laplace s'écrivent :

$$p_1 V_A^\gamma = p_2 V_B^\gamma$$

On a donc :

$$V_B = V_A \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_e (1 + \varepsilon) \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

D'après l'énoncé : $V_C = \varepsilon V_e$. On peut écrire les lois de Laplace pour la transformation CD : $p_2 V_C^\gamma = p_1 V_D^\gamma$, d'où :

$$V_D = \varepsilon V_e \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Le rapport $\frac{V_A - V_D}{V_e}$ vaut :

$$\frac{V_A - V_D}{V_e} = \frac{V_A}{V_e} - \frac{V_D}{V_e} = 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon V_e \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{V_e}$$

On en déduit :

$$\frac{V_A - V_D}{V_e} = 1 + \varepsilon - \varepsilon \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Ce rapport représente le remplissage par rapport au volume balayé par le piston.

Si le taux de compression $\frac{p_2}{p_1}$ augmente, le taux de remplissage diminue. On ne dépasse pas en pratique $\frac{p_2}{p_1} = 10$: la masse qui recircule dans le compresseur est trop grande, baisse de pression lors de la phase de refoulement BC que l'on peut modéliser par une détente de Joule-Thomson, défaut d'étanchéité des soupapes.

2. Les volumes sont : $V_A = 21,0 \text{ L}$; $V_B = 4,05 \text{ L}$; $V_A = 1,00 \text{ L}$; $V_D = 5,18 \text{ L}$.

Les travaux reçus par le gaz valent :

- $W_{DA} = -p_1(V_A - V_D) = -1,58 \text{ kJ} < 0$: la force exercée par le piston est résistante.
- $W_{AB} = -\int_A^B p dV = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{\gamma - 1} = 4,89 \text{ kJ} > 0$: on a une compression.
- $W_{BC} = -p_2(V_C - V_B) = 3,05 \text{ kJ} > 0$: phase de refoulement. La force exercée par le piston est motrice.
- $W_{CD} = -\int_C^D p dV = \frac{p_D V_D - p_C V_C}{\gamma - 1} = -1,21 \text{ kJ} < 0$: on a une détente.

Le travail reçu au cours du cycle est : $W_{cycle} = 5,15 \text{ kJ} > 0$. Le système est globalement récepteur. Il doit recevoir un travail pour faire passer la pression du fluide de p_1 à p_2 avec $p_2 > p_1$.

La masse d'air aspirée à chaque cycle est $m_A - m_D$ avec $m_A = \frac{V_A}{v_A}$
 $= \frac{V_A p_A}{r T_1} = 24,9 \text{ g}$ et $m_D = \frac{V_D}{v_D} = \frac{V_D p_D}{r T_1} = 6,16 \text{ g}$. On en déduit :

$$w = \frac{W_{cycle}}{(m_A - m_D)} = 274 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le compresseur tourne à 600 tours par minute, soit 10 tours (ou 10 cycles) par seconde. La durée d'un cycle vaut $t_{cycle} = 0,1 \text{ s}$.

Le débit massique vaut :

$$D_m = \frac{m_A - m_D}{t_{cycle}} = 0,188 \text{ kg.s}^{-1}$$

La puissance fournie au gaz vaut :

$$P = D_m w = 51,5 \text{ kW}$$

Exercice 12.3 : Compresseur à deux étages (PT)

On envisage de réaliser une compression de 1 à 10 bar en deux étages séparés par un réfrigérant. Chaque étage est constitué d'un compresseur adiabatique réversible. L'étage basse-pression comprime le gaz parfait depuis l'état 1 ($p_1 = 1 \text{ bar}, T_1 = 293 \text{ K}$) jusqu'à un état 2 (p_2, T_2) ; le gaz est alors refroidi à pression constante jusqu'à l'état 3 ($p_3 = p_2, T_3 = 293 \text{ K}$) et comprimé dans l'étage haute-pression jusqu'à l'état 4 ($p_4 = 10 \text{ bar}$). On donne : $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\gamma = 1,4$.

1. Exprimer le travail massique total de compression en fonction de $\gamma, r, T_1, \frac{p_2}{p_1}$ et $\frac{p_4}{p_2}$.
2. Déterminer la pression intermédiaire p_3 qui conduit au travail minimal.
3. Calculer le travail fourni par l'ensemble des deux parties mobiles du compresseur à un kilogramme de gaz transvasé.
4. Comparer au travail fourni par un compresseur constitué d'un seul étage.

Analyse du problème

On étudie un compresseur à deux étages. On va chercher la condition pour avoir un travail minimal. L'énoncé ne précise pas le type de compresseur : compresseur à piston ou turbocompresseur. Sans indication de l'énoncé, on raisonnera sur un turbocompresseur mais dans les deux cas, le travail à fournir au compresseur est le même.

Cours : On considère un système ouvert en régime permanent d'écoulement à une entrée et une sortie. On néglige les variations d'énergie mécanique.

Dans le cas d'une transformation **réversible**, les 4 relations fondamentales en thermodynamique industrielle s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} dh = \delta w_i + \delta q_e \\ dh = T ds + v dp \\ ds = \frac{\delta q_e}{T} \\ \delta w_t = v dp \end{array} \right.$$

On en déduit que $\delta w_t = v dp = \delta w_i$.

Le travail de transvasement massique w_t pour une transformation réversible est :

$$w_t = w_i = \int_1^2 v dp$$

Pour un compresseur : $w_t > 0$. Le travail de transvasement correspond au travail que l'on doit fournir au compresseur réversible pour faire passer 1 kg de fluide de la pression p_1 (état 1) à la pression p_2 (état 2).

Si la compression est adiabatique et réversible, alors : $w_t = w_i = \Delta h$.



1. On a trois transformations :

$$\left| \begin{array}{l} \text{État 1} \rightarrow \text{État 2} \rightarrow \text{État 3} \\ T_1, p_1 \rightarrow T_2, p_2 \rightarrow T_3, p_3 = p_2 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{État 4} \\ T_4, p_4 \end{array} \right.$$

Pour un compresseur calorifugé, le premier principe s'écrit pour un système ouvert en régime permanent, à une entrée et une sortie :

$$\Delta h = w_i$$

Pour un gaz parfait, on a :

$$dh = c_p dT = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} dT$$

La transformation $1 \rightarrow 2$ est adiabatique et réversible, donc :

$$w_{t1 \rightarrow 2} = w_{i1 \rightarrow 2} = \Delta h = c_p(T_2 - T_1) = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

On a donc pour les deux compressions adiabatiques réversibles ($1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$) :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_4 - T_3) + \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

La transformation $1 \rightarrow 2$ est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace : $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, d'où :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

De même pour la transformation $3 \rightarrow 4$ on a :

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Comme $p_3 = p_2$ et $T_3 = T_1$, on obtient :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \left(T_1 \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1 \right) + \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \left(T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1 \right)$$

On obtient finalement :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 2 \right)$$

2. On pose $f(x) = \left(\frac{x}{p_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ et $g(x) = \left(\frac{p_1}{x} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. On a alors :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_1 (f(x) + g(x) - 2)$$

Pour avoir w_t minimum, il faut avoir $\frac{dw_t}{dx} = 0$, soit $\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = 0$.

Or $f(x)g(x) = cte$, donc $f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = 0$. Comme $\frac{dg}{dx} = -\frac{df}{dx}$, on en déduit que $f = g$.

On doit donc avoir $\left(\frac{x}{p_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{x}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, d'où $x^2 = p_1 p_4$. On obtient finalement :

$$p_2 = \sqrt{p_1 p_4} = 3,16 \text{ bar}$$

3. $w_t = 229 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} > 0$. C'est cohérent puisqu'on a un compresseur.

4. $\left| \begin{array}{l} \text{État 1} \\ T_1, p_1 = 1 \text{ bar} \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{État 2'} \\ T'_2, p'_2 = 10 \text{ bar} \end{array} \right.$

Avec un seul étage, on a :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T'_2 - T_1)$$

La transformation $1 \rightarrow 2'$ est isentropique avec un gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace : $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T'_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, d'où $T'_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

On obtient alors :

$$w_t = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_1 \left(\left(\frac{p_1}{p'_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) = 274 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On a donc intérêt en pratique à utiliser une compression en plusieurs étages. Le travail à fournir au compresseur est moins important avec deux étages qu'avec un étage.

Remarque : Le refroidissement est obtenu en pratique par un échangeur thermique. On ne le compte pas dans le coût.

Exercice 12.4 : Pompe à chaleur avec pseudo source (PT)

Une pompe à chaleur fonctionne entre l'air de la pièce de température $T_p(t)$ à un instant t et de capacité thermique $C = 125,8 \times 10^3 \text{ J.K}^{-1}$ et l'atmosphère à la température $T_{ext} = 275 \text{ K}$. À $t = 0$, $T_p(0) = T_{ext} = 275 \text{ K}$. On souhaite amener la pièce à la température $T_f = 298 \text{ K}$. La pièce est supposée parfaitement isolée. La pression vaut $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Données : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma = 1,4$.

1. Préciser le sens des échanges énergétiques de la pompe à chaleur. On se place en régime permanent. La pompe à chaleur reçoit le travail électrique W . La température de la pièce vaut $T_{\text{pièce}} = 298 \text{ K}$ et la température de l'air extérieur vaut : $T_{\text{ext}} = 275 \text{ K}$. Calculer l'efficacité de la pompe à chaleur en supposant le cycle réversible.

2. On tient maintenant compte de la capacité thermique finie de l'air de la pièce. On considérera un cycle élémentaire réversible de durée dt . Calculer la durée Δt de chauffage de la pièce pour l'amener de la température $T_P(0) = T_{\text{ext}} = 275 \text{ K}$ à la température finale de $T_f = 298 \text{ K}$ sachant que la puissance électrique reçue vaut $P = 500 \text{ W}$. Comparer à la durée Δt_2 si la pièce avait été chauffée par une résistance de puissance 500 W.

3. On suppose maintenant le fonctionnement de la pompe à chaleur irréversible et on appelle S_c l'entropie créée par irréversibilité lors de la nouvelle durée du chauffage $\Delta t'$ de la valeur $T_p(0) = T_{\text{ext}} = 275 \text{ K}$ à 298 K. Exprimer S_c en fonction de $\Delta t'$, Δt , P_u et T_{ext} .

Analyse du problème

On raisonne sur une pseudo source de chaleur puisque la température de la pièce varie. On ne peut pas appliquer le deuxième principe de la thermodynamique entre l'état initial et l'état final. Par contre sur une durée dt infinitésimale, on peut appliquer le deuxième principe au fluide frigorigène et ainsi obtenir une équation différentielle.



1. La pompe à chaleur est notée PAC par la suite. On considère un système fermé (Σ) décrivant un cycle entre deux sources de chaleur : T_p (température de la source chaude) et T_{ext} (température de la source froide). La source chaude est la pièce à chauffer. La source froide est l'atmosphère. On a : $W > 0$, $Q_F > 0$ et $Q_C < 0$.

Le système (Σ) reçoit un travail W qui lui permet :

- de prélever de la chaleur à la source froide ($T_F = T_{\text{ext}}$),
- de céder de la chaleur à la source chaude ($T_C = T_p$).

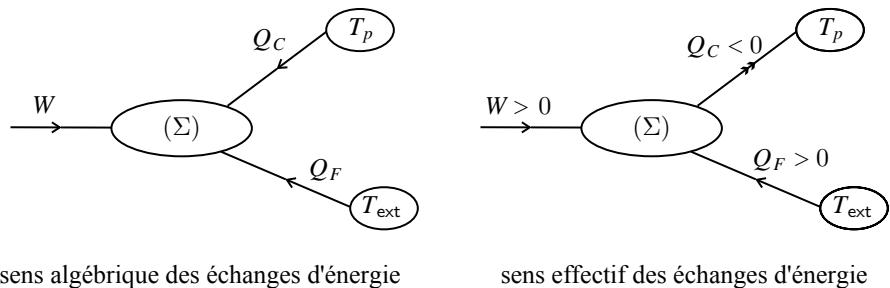
L'efficacité est définie par :

$$\epsilon = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{|Q_C|}{W}$$

Le premier et le deuxième principe de la thermodynamique pour le système fermé (fluide frigorigène) décrivant une évolution cyclique ditherme réversible s'écrivent :

$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad (\text{eq.1})$$

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0 \quad (\text{eq.2})$$



Pour trouver l'efficacité, il faut éliminer Q_F . L'équation 1 donne :

$$Q_F = -W - Q_C.$$

En réinjectant dans l'équation 2, on a $\frac{-W - Q_C}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$, soit

$$-Q_C \left(\frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C} \right) = \frac{W}{T_F}. \text{ On obtient : } \frac{-Q_C}{W} = \frac{T_C}{T_C - T_F}, \text{ d'où :}$$

$$e = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 13$$

2. On raisonne sur un cycle élémentaire réversible de durée dt .

- 1^{er} principe appliqué à la pièce :

$$dU_{\text{pièce}} = C dT_p = \delta Q_{\text{reçu}} = -\delta Q_{\text{fourni}} = -\delta Q_{\text{pièce} \rightarrow \text{fluide de la PAC}}$$

$$\text{On a donc : } \delta Q_C = \delta Q_{\text{pièce} \rightarrow \text{fluide de la PAC}} = -C dT_p$$

- 1^{er} principe appliqué au fluide frigorigène sur un cycle :

$$0 = \delta W + \delta Q_C + \delta Q_F, \text{ d'où}$$

$$P dt - C dT_p + \delta Q_{\text{atm} \rightarrow \text{fluide}} = 0$$

- $\delta S_e = \frac{\delta Q_C}{T_p} + \frac{\delta Q_F}{T_{\text{ext}}}$ car pendant dt , la température T_p ne varie quasiment pas.

$$\text{Or } \delta Q_F = \delta Q_{\text{atm} \rightarrow \text{fluide}} = -P dt + C dT_p. \text{ On en déduit :}$$

$$\delta S_e = -C \frac{dT_p}{T_p} + C \frac{dT_p}{T_{\text{ext}}} - \frac{P dt}{T_{\text{ext}}}$$

- 2^e principe appliqué au fluide frigorigène sur un cycle :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c = \delta S_e \text{ car la transformation est réversible.}$$

On obtient alors :

$$dT_p \left(\frac{1}{T_{\text{ext}}} - \frac{1}{T_p} \right) = \frac{P dt}{C T_{\text{ext}}}$$

En intégrant cette équation différentielle entre $T_p(0) = T_{\text{ext}}$ et T_f , on a :

$$\frac{T_f - T_{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}} - \ln \frac{T_f}{T_{\text{ext}}} = \frac{P \Delta t}{C T_{\text{ext}}}$$

Application numérique :

$$\Delta t = 229 \text{ s} = 3 \text{ min } 49 \text{ s}$$

On applique le premier principe de la thermodynamique à la résistance de capacité thermique négligeable : $0 = \delta W + \delta Q_C = \delta W - C dT_p$. D'où :

$$W = C \Delta T_p = C (T_f - T_{\text{ext}}) = P \Delta t_2$$

Application numérique : $\Delta t_2 = 5787 \text{ s} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$

3. On applique le 2^e principe au fluide frigorigène sur un cycle :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c$$

$$\text{L'entropie créée est : } \delta S_c = -\delta S_e = C \frac{dT_P}{T_p} - C \frac{dT_P}{T_{\text{ext}}} + \frac{P dt}{T_{\text{ext}}}.$$

On intègre entre $T_p(0) = T_{\text{ext}}$ et T_f :

$$S_c = C \ln \frac{T_f}{T_{\text{ext}}} - C \frac{T_f - T_{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}} + \frac{P \Delta t'}{T_{\text{ext}}}$$

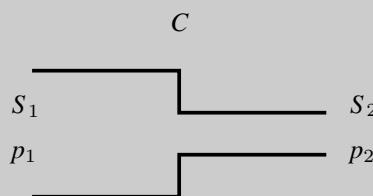
$$\text{On a vu que } C \frac{T_f - T_{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}} - C \ln \frac{T_f}{T_{\text{ext}}} = \frac{P \Delta t}{T_{\text{ext}}}.$$

$$\text{On en déduit que : } S_c = \frac{P}{T_{\text{ext}}} (\Delta t' - \Delta t). \text{ Comme } S_c > 0, \text{ on a bien}$$

$\Delta t' > \Delta t$. La durée de chauffage est plus grande pour une PAC irréversible que pour une PAC réversible.

Exercice 12.5 : Écoulement d'un gaz parfait dans une canalisation (PT)

On considère un gaz parfait qui s'écoule à partir d'un récipient de grand volume (état 1) jusqu'à l'atmosphère par un ajutage C . La pression du gaz est mesurée à une distance grande de C pour qu'elle puisse être considérée comme uniforme et constante dans toute la section S_1 . En première approximation, la vitesse du fluide dans cette section S_1 peut être négligée. Le régime est supposé permanent. On donne : $p_1 = 2,00 \text{ bar}$; $p_2 = 1,00 \text{ bar}$; $T_1 = 293 \text{ K}$; $c_p = 1005 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\gamma = 1,40$; $S_2 = 100 \text{ cm}^2$.



1. L'écoulement est isentropique. Calculer la variation d'enthalpie massique entre les sections S_1 et S_2 . Calculer la vitesse théorique du gaz c_2 dans la section S_2 en négligeant la vitesse du fluide dans la section S_1 . Calculer le débit massique du gaz dans l'état 2.

2. En réalité l'écoulement est adiabatique irréversible (existence de frottements) et la température mesurée dans l'état 2 (sortie de l'écoulement) est $T'_2 = 243\text{ K}$, en déduire la vitesse c'_2 de sortie. Pendant son écoulement l'air subit une variation continue de son état que l'on peut assimiler à une évolution polytropique soit $pv^k = A$. Calculer k .

3. Calculer le travail de transvasement massique pour la polytropique, la variation d'entropie massique dans la transformation réelle et la quantité de chaleur massique dissipée par frottement (ou quantité de chaleur massique fictive). Représenter graphiquement l'évolution dans un diagramme (T,s). Calculer la quantité de chaleur massique dissipée par frottement par une autre méthode.

Analyse du problème

Comme on a un gaz parfait avec une transformation isentropique, on peut appliquer les lois de Laplace pour calculer la température T_2 .

Dans le cas général, une transformation isentropique n'est pas nécessairement adiabatique réversible. Par contre, dans tous les problèmes en thermodynamique industrielle, une transformation isentropique sera considérée comme adiabatique réversible.

Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie permet de calculer la vitesse des gaz en sortie. La transformation réelle est adiabatique irréversible. On modélise souvent la transformation réelle par une transformation polytropique d'indice k .



1. On a une transformation isentropique pour un gaz parfait. On peut donc appliquer les lois de Laplace : $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, d'où :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 240,4\text{ K}$$

La variation d'enthalpie massique pour un gaz parfait vaut :

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = -52,9\text{ kJ.kg}^{-1}$$

On applique le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent :

$$\Delta h + \left(\frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{2}c_1^2 \right) = w_i + q_e$$

On néglige la vitesse dans l'état 1. $w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine. $q_e = 0$ car la transformation est adiabatique. On a donc :

$$\Delta h + \left(\frac{1}{2} c_2^2 \right) = 0$$

On a vu que $\Delta h = c_p (T_2 - T_1)$. On obtient alors : $c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} c_2^2 = 0$, soit :

$$c_2 = \sqrt{2c_p (T_1 - T_2)} = 325 \text{ m.s}^{-1}$$

Le débit massique vaut : $D_{m2} = \rho_2 S_2 c_2$. Or $p_2 v_2 = r T_2$, donc $\rho_2 = \frac{1}{v_2} = \frac{p_2}{r T_2}$.

Comme $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$, on a :

$$r = \frac{c_p (\gamma - 1)}{\gamma} = 287 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On obtient finalement :

$$D_{m2} = \frac{p_2}{r T_2} S_2 c_2 = 4,71 \text{ kg.s}^{-1}$$

2. Calcul de la vitesse de sortie :

On applique le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent. Pour la transformation réelle, on a :

$$\Delta h + \left(\frac{1}{2} c'_2^2 - \frac{1}{2} c_1^2 \right) = w_i + q_e$$

On néglige la vitesse dans l'état 1. $w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine. $q_e = 0$ car la transformation est adiabatique. On a donc :

$$\Delta h + \left(\frac{1}{2} c'_2^2 \right) = 0$$

Pour un gaz parfait, on a : $\Delta h = c_p (T'_2 - T_1)$. On a alors : $c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} c'_2^2 = 0$. D'où

$$c'_2 = \sqrt{2c_p (T_1 - T'_2)} = 317 \text{ m.s}^{-1}$$

Calcul de k :

On connaît l'état initial 1 (T_1, p_1) et l'état final (T'_2, p_2). On modélise la transformation réelle irréversible par une transformation réversible polytropique d'indice k avec un gaz parfait. Pour calculer k , il suffit d'écrire la relation $T^k p^{1-k} = cte$ pour l'état 1 et pour l'état 2. On a alors : $k \ln \left(\frac{T'_2}{T_1} \right) + (1 - k) \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 0$. On obtient finalement :

$$k = \frac{\ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T'_2} \right) + \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)} = 1,37$$

On trouve $k < \gamma$, c'est normal puisqu'on a une détente.

Remarque : pour une compression, on a $k > \gamma$.

**3. Calcul du travail de transvasement massique sur la polytropique :**

La transformation fictive réversible considérée est ici une polytropique réversible d'indice k avec un gaz parfait. Le travail de transvasement massique vaut :

$$w_{t\text{ poly}} = w_{tk} = \int_1^2 v dp$$

On peut appliquer les relations : $pv^k = cte$, soit : $p^{\frac{1}{k}}v = cte = A = p_1^{\frac{1}{k}}v_1 = p_2^{\frac{1}{k}}v_2$. On en déduit que :

$$v = Ap^{-\frac{1}{k}}$$

Le travail de transvasement massique sur la polytropique est :

$$\begin{aligned} w_{tk} &= \int_1^2 v dp = Ap^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{A}{\frac{-1}{k} + 1} \left[p^{\frac{-1}{k}+1} \right]_1^2 \\ &= \frac{Ak}{k-1} \left(p_2^{\frac{-1}{k}+1} - p_1^{\frac{-1}{k}+1} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$w_{tk} = \frac{k}{k-1} \left(p_2^{\frac{-1}{k}+1} p_2^{\frac{1}{k}} v_2 - p_1^{\frac{-1}{k}+1} p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \right)$$

On en déduit finalement que :

$$w_{tk} = \frac{k}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{kr}{k-1} (T_2 - T_1) = -53,2 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Calcul de la variation d'entropie massique :

On travaille avec les variables p, T :

$$dh = c_p dT = T ds + v dp$$

On a alors : $ds = \frac{c_p dT}{T} - r \frac{dp}{p}$ car $pv = RT$ pour un gaz parfait. On a donc :

$$s'_2 - s_1 = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T'_2}{T_1} \right) - r \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 11,0 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

Calcul de la quantité de chaleur massique dissipée par frottement :

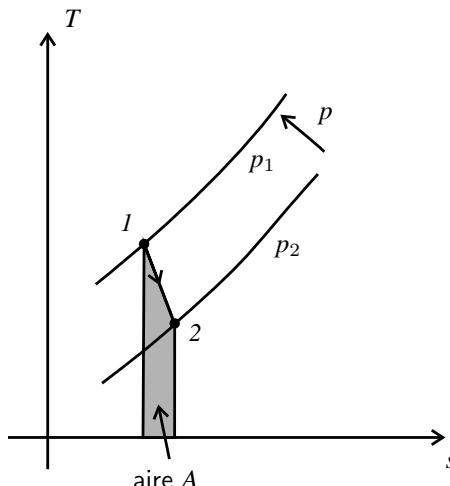
Les 4 équations fondamentales de la thermodynamique s'écrivent pour la transformation fictive réversible polytropique :

$$\begin{cases} \Delta h = w_{i \text{ rev}} + q_{e \text{ rev}} \\ dh = T ds + v dp \\ ds = \frac{\delta q_{e \text{ rev}}}{T} \\ w_{t \text{ rev}} = \int_1^2 v dp \end{cases}$$

On a donc : $\begin{cases} \delta q_{e \text{ rev}} = T ds \\ w_{i \text{ rev}} = w_{t \text{ rev}} \end{cases}$, soit :

$$q_f = q_{e \text{ rev}} = \int_1^2 T ds = \text{aire } A$$

On en déduit immédiatement l'interprétation graphique de $q_f = q_{e \text{ rev}}$ qui est donc le transfert thermique massique dû à l'irréversibilité. D'après le programme de PT, on linéarise pour calculer les aires.



On a un trapèze :

$$q_f = q_{e\text{ rev}} = \int_1^2 T \, ds = \text{aire} A = (s_2 - s_1) \frac{T_1 + T'_2}{2} = 2,94 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Calcul de q_f par une deuxième méthode :

On a $\Delta h = w_{i\text{ rev}} + q_{e\text{ rev}}$. Or $w_{i\text{ rev}} = w_{t\text{ rev}}$. On en déduit une deuxième méthode de calcul de $q_f = q_{e\text{ rev}}$:

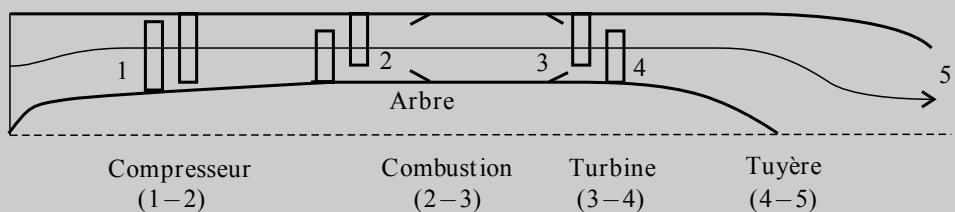
$$q_{e\text{ rev}} = \Delta h - w_{t\text{ rev}} = c_p (T_2 - T_1) - w_{t\text{ rev}} = 2,95 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Ces deux valeurs sont tout à fait cohérentes. La petite différence s'explique par la linéarisation pour calculer les aires dans le diagramme (T, s).

Remarque : On voit sur cet exemple que la linéarisation est une très bonne approximation de la polytropique.

Exercice 12.6 : Turboréacteur (PT)

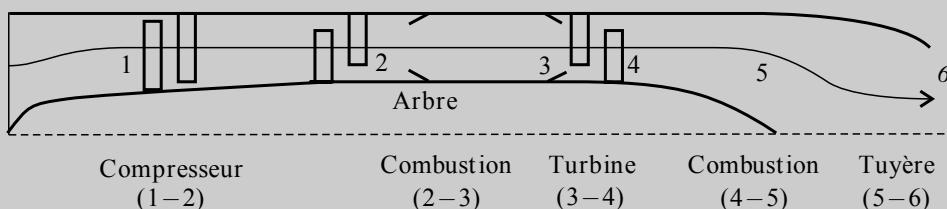
Un compresseur axial aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température ($T_3 = 1250 \text{ K}$). Après détente partielle dans la turbine axiale, l'air est envoyé dans la tuyère où la détente s'effectue jusqu'à la pression ambiante ($P_5 = 1,00 \text{ bar}$). Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puissance mécanique que lui fournit l'écoulement. On rappelle que $P_2 = P_3$. On donne le taux de compression du compresseur : $\frac{P_2}{P_1} = 6,15$.



L'air est assimilé à un gaz parfait. On donne $c_p = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1,40$. L'énergie cinétique sera négligée, sauf à la sortie de la tuyère. Le débit massique d'air aspiré par le turboréacteur vaut $D_M = 50,00 \text{ kg.s}^{-1}$. Le compresseur aspire l'air ambiant défini par sa pression $P_1 = 1,00 \text{ bar}$ et sa température $T_1 = 288 \text{ K}$. Les évolutions à l'intérieur des turbomachines (compresseurs et turbines) et des tuyères sont supposées adiabatiques, réversibles. On négligera les pertes de charge de l'air à l'intérieur des chambres de combustion : les évolutions y sont isobares. On définit le rendement thermique du turboréacteur (noté

η_{th}) comme étant le rapport entre l'énergie cinétique massique reçue par l'air, notée e_c , et la (ou la somme des) quantité(s) de chaleur massique(s) fournie(s) par la (ou les) chambre(s) de combustion, notée $q_{\text{combustion}}$.

1. Calculer la température T_2 (sortie du compresseur), le travail indiqué massique de compression, la température T_4 , la pression P_4 à la sortie de la turbine, la température T_5 et la vitesse c_5 à la sortie de la tuyère.
2. Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la combustion, notée $q_{2-3} = q_{\text{combustion}}$. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th} de ce turboréacteur.



La configuration est identique à la précédente mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette seconde combustion, l'air est à nouveau chauffé jusqu'à la température de 1930 K ($T_5 = 1930$ K). La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante ($P_6 = 1,00$ bar).

Comme précédemment la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique et la température de fin de première combustion aussi ($T_3 = 1250$ K). On rappelle que $P_2 = P_3$ et que $P_4 = P_5$.

3. Calculer T_2, T_4, P_4, T_6 à la sortie de la tuyère et la vitesse c_6 à la sortie de cette tuyère.

4. Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la seconde combustion, notée q_{4-5} . En déduire la quantité de chaleur massique fournie globalement à l'air, notée $q_{\text{combustion}} = q_{2-3} + q_{4-5}$. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th} , de ce turboréacteur. Comparer les paramètres des deux turboréacteurs étudiés et conclure.

Analyse du problème

On retrouve les éléments classiques en thermodynamique industrielle : compresseur, turbine, chambre de combustion. Pour chaque élément, on applique le premier principe de la thermodynamique en régime permanent pour un système ouvert à une entrée et une sortie. Comme le compresseur est entraîné par la turbine, le travail fourni par la turbine est récupéré entièrement par le compresseur.



1. La compression est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut donc appliquer les lois de Laplace pour la transformation $1 \rightarrow 2$:
 $T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. On a donc :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 484 \text{ K}$$

On applique au compresseur le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert en régime permanent : $\Delta h = w_i = c_p (T_2 - T_1)$.

$q_e = 0$ car la transformation est adiabatique et $\Delta h = c_p (T_2 - T_1)$ car on a un gaz parfait.

On a donc :

$$w_i = c_p (T_2 - T_1) = 196 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le compresseur est entraîné par la turbine. Le travail fourni par la turbine est récupéré par le compresseur : $|w_{34}| = w_{12}$.

Comme $w_{34} < 0$, on a $w_{12} + w_{34} = 0 = c_p (T_2 - T_1) + (T_4 - T_3) = 0$, d'où :

$$T_4 = T_3 - T_2 + T_1 = 1054 \text{ K}$$

La transformation $3 \rightarrow 4$ est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace : $T_3 P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, donc :

$$P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 3,39 \text{ bar}$$

La transformation $4 \rightarrow 5$ est adiabatique, réversible, gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace pour la transformation $4 \rightarrow 5$:

$T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_5 P_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. On a donc :

$$T_5 = T_4 \left(\frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 744 \text{ K}$$

On applique à la tuyère le premier principe pour un système ouvert en régime permanent : $h_5 - h_4 + \frac{1}{2}c_5^2 = 0$ car on néglige toutes les vitesses sauf celle en sortie de la tuyère. On a donc :

$$c_5 = \sqrt{2(h_4 - h_5)} = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 787 \text{ m.s}^{-1}$$

2. On applique à la chambre de combustion le premier principe pour un système ouvert en régime permanent :

$$h_3 - h_2 = q_{23} = q_{\text{combustion}} = c_p (T_3 - T_2) = 766 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine. On a donc :

$$e_c = \frac{1}{2} c_5^2 = 310 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le rendement thermique vaut :

$$\eta_{th} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{\frac{1}{2} c_5^2}{q_{23}} = 40,4 \%$$

3. On retrouve les mêmes résultats que dans la question 1 : $T_2 = 484 \text{ K}$; $T_4 = 1054 \text{ K}$ et $p_4 = 3,39 \text{ bar}$.

La transformation $5 \rightarrow 6$ est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace pour la transformation $5 \rightarrow 6$:

$$T_5 P_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_6 P_6^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

On a donc :

$$T_6 = T_5 \left(\frac{P_5}{P_6} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1362 \text{ K}$$

On applique à la tuyère le premier principe pour un système ouvert en régime permanent : $h_6 - h_5 + \frac{1}{2} c_6^2 = 0$ car on néglige toutes les vitesses sauf celle en sortie de la tuyère. On a donc :

$$c_6 = \sqrt{2(h_5 - h_6)} = \sqrt{2c_p(T_5 - T_6)} = 1066 \text{ m.s}^{-1}$$

4. On applique à la chambre de combustion le premier principe pour un système ouvert en régime permanent :

$$h_5 - h_4 = q_{45} = c_p (T_5 - T_4) = 876 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine.

On en déduit que :

$$q_{\text{combustion}} = q_{23} + q_{45} = 1642 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

L'énergie cinétique massique est :

$$e_c = \frac{1}{2} c_6^2 = 568 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

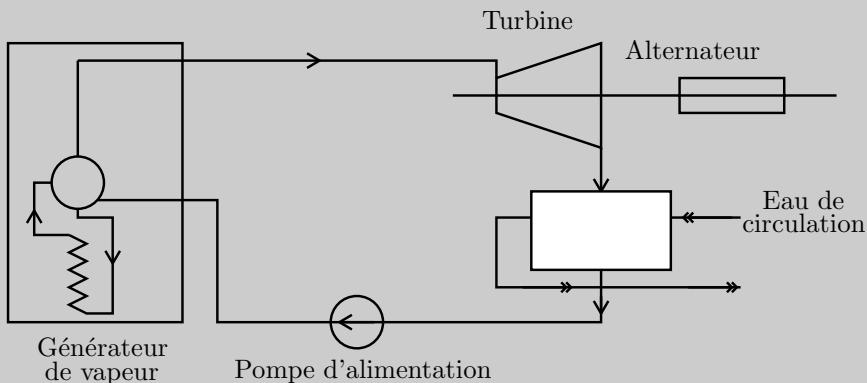
Le rendement thermique vaut :

$$\eta_{th} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{e_c}{q_{\text{combustion}}} = 34,6\%$$

Le turboréacteur de la 2^e partie a un moins bon rendement que celui de la 1^e partie. On récupère moins d'énergie cinétique pour un coût identique.

Exercice 12.7 : Cycle de Rankine (PT)

On envisage le cycle suivant de l'eau : la pompe d'alimentation porte l'eau liquide juste saturante (état 0) de la basse pression P_3 du condenseur à la pression P_2 du générateur de vapeur (GV) de façon isentropique (état 1). L'eau liquide comprimée entre ensuite dans le générateur de vapeur, où elle est chauffée de façon isobare (jusqu'à la température T_2 du changement d'état (état 1')), puis totalement vaporisée (état 2). La vapeur saturante sèche produite subit ensuite une détente dans une turbine calorifugée et réversible. Le fluide pénètre ensuite dans le condenseur pour y être totalement condensé (état 0). On donne : $T_1 = 30^\circ\text{C}$; $T_2 = 300^\circ\text{C}$. On supposera l'eau liquide incompressible et on négligera le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. On se place en régime permanent.



1. Représenter le diagramme (T,s) pour l'équilibre liquide-vapeur. Montrer que les points 0 et 1 sont confondus et placer les différents points sur le diagramme.
2. On suppose que la capacité thermique massique de l'eau liquide c_l est constante. On note $l_v(T)$ la chaleur latente massique de vaporisation à la température T . Exprimer puis calculer l'efficacité η en fonction de T_1 , T_2 , c_l et $l_v(T_2)$. Données : $c_l = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $l_v(T_2) = 1404 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.
3. Calculer l'efficacité d'un moteur décrivant un cycle de Carnot entre les températures T_1 et T_2 . Comparer les deux efficacités. Pourquoi le cycle de Rankine est plus avantageux d'un point de vue pratique ?

Analyse du problème

Cet exercice décrit le cycle de base de production d'électricité. Pour chaque transformation, on appliquera le premier principe de la thermodynamique en régime permanent d'écoulement. Il faut bien repérer les deux isobares de l'exercice et les représenter dans diagramme (T,s).



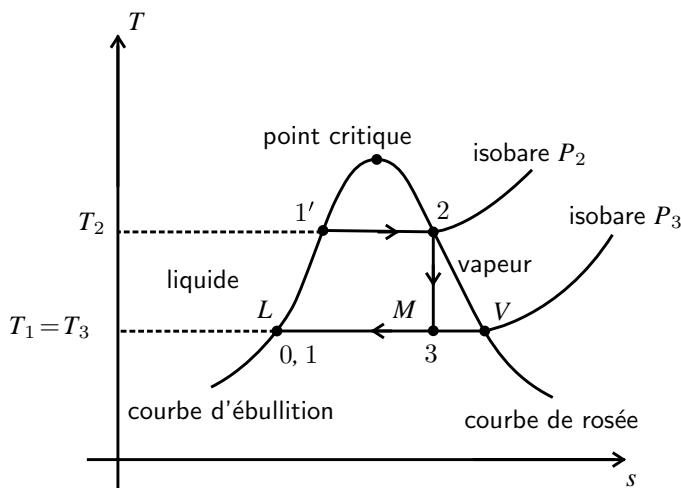
- La transformation $0 \rightarrow 1$ est isentropique, ($ds = 0$). L'eau liquide étant supposée incompressible ($v = cte$), on a donc :

$$du = Tds - pdv = 0$$

Pour un liquide incompressible $du = cdT$, on en déduit que les points 0 et 1 sont confondus. L'isobare $1 \rightarrow 1'$ pour le liquide est très proche de la courbe d'ébullition pour le diagramme (T,s).

Le point 3 est à la verticale du point 2 et sur l'isobare p_3 car la transformation $2 \rightarrow 3$ est isentropique.

On obtient le diagramme (T,s) suivant :



- L'efficacité est :

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{-w_{\text{turbine}}}{q_{\text{GV}}}$$

Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie s'écrit : $w_{\text{turbine}} = h_3 - h_2$ car la turbine est calorifugée.

Remarque : En fait

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{-w_{\text{cycle}}}{q_{\text{GV}}}$$

Il faut calculer le travail total reçu algébriquement au cours du cycle ($w_{\text{cycle}} < 0$). La somme de tous les travaux des forces de pression amont et aval se compensent deux à deux, il reste donc à faire la somme de tous les travaux indiqués massiques : $w_{\text{cycle}} = w_{it} + w_{ic}$. Comme les points 0 et 1 sont confondus, on néglige le travail à fournir au compresseur devant les autres variations d'enthalpie : $w_{\text{cycle}} \approx w_{it}$. On retrouve bien : $\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{-w_{it}}{q_{\text{GV}}}$



Pour la transformation $1 \rightarrow 2$ (GV), on a :

$$q_{\text{GV}} = h_2 - h_1$$

Le premier principe de la thermodynamique pour le condenseur s'écrit :

$$q_{\text{condenseur}} = h_0 - h_3$$

Comme $h_0 = h_1$ (les points 0 et 1 sont confondus), on a : $q_{\text{condenseur}} = h_1 - h_3$.

Calcul de q_{GV} :

$$q_{\text{GV}} = h_2 - h_1$$

avec $h_2 = h_0 + c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)$ et $h_1 = h_0$ d'après l'énoncé. On a donc :

$$q_{\text{GV}} = c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)$$

Calcul de $-w_{it}$

On applique le premier principe de la thermodynamique pour la transformation $2 \rightarrow 3$:

$$w_{it} = h_3 - h_2$$

avec $h_2 = h_0 + c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)$ et $h_3 = h_0 + x_v l_v(T_2)$.

On a donc :

$$-w_{it} = c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2) - x_v l_v(T_1)$$

Calcul de x_v :

La transformation $2 \rightarrow 3$ est isentropique. On a :

$$s_3 - s_2 = 0$$

avec $s_2 = s_0 + c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{l_v(T_2)}{T_2}$ et $s_3 = s_0 + \frac{x_v l_v(T_1)}{T_1}$.

On donc : $\frac{x_v l_v(T_1)}{T_1} = c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{l_v(T_2)}{T_2}$, soit :

$$x_v = \frac{T_1}{l_v(T_1)} \left(c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{l_v(T_2)}{T_2} \right)$$

Calcul de l'efficacité :

$$\eta = \frac{-w_{it}}{q_{GV}} = \frac{c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2) - x_v l_v(T_1)}{c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)}$$

On a alors :

$$\eta = \frac{c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2) - \left(\frac{T_1}{l_v(T_1)} \left(c_l \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{l_v(T_2)}{T_2} \right) \right) l_v(T_1)}{c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)}$$

On en déduit finalement que :

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \left(c_l \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{l_v(T_2)}{T_2} \right)}{c_l(T_2 - T_1) + l_v(T_2)}$$

Application numérique : $\eta = 38,8\%$



Attention aux unités. T doit être exprimé en Kelvin.

3. Soit une machine cyclique ditherme réversible (appelée machine de Carnot) recevant algébriquement W, Q_1 et Q_2 au cours d'un cycle. On applique le premier et le deuxième principe de la thermodynamique au système fermé sur un cycle :

$$\begin{cases} W + Q_1 + Q_2 = 0 \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \end{cases}$$

L'efficacité vaut : $\eta = \frac{-W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$. On en déduit que l'efficacité de la machine de Carnot :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 47,1\%$$

On a bien $38,8\% < 47,1\%$ car le cycle de Rankine est irréversible. Le chauffage isobare du liquide est irréversible. Le cycle de Rankine est plus avantageux en pratique car la compression de l'eau liquide se fait dans une pompe alors que le cycle de Carnot nécessite un compresseur encombrant pour la vapeur humide.

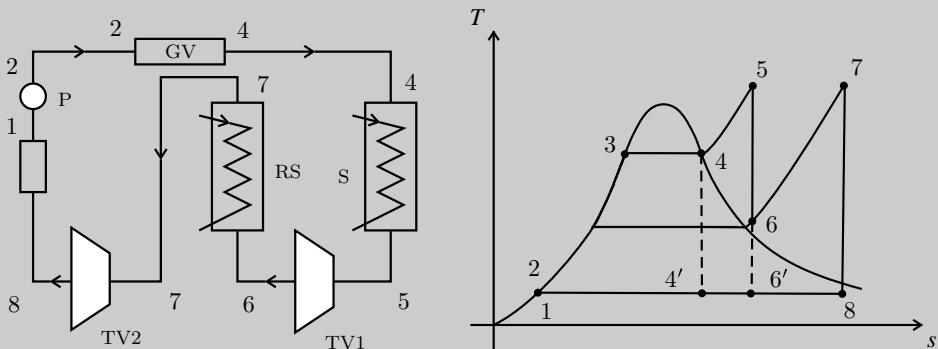
La vapeur est saturante à la fin de la détente. Il y a donc des conditions difficiles pour les parties mobiles de la machine à cause de la corrosion. On peut envisager des améliorations avec une surchauffe isobare de la vapeur après le générateur de vapeur.

Le cycle de Rankine malgré les inconvénients d'un mélange humide est utilisé dans la marine : propulsion des sous-marins nucléaires, porte-avion

Charles de Gaulle. Une contrainte importante est d'avoir une chaufferie la plus fiable et la plus compacte possible. Par contre, la turbine est très sensible à la corrosion.

Exercice 12.8 : Cycles avec surchauffe et resurchauffe (PT)

On étudie trois cycles moteur à vapeur d'eau (C_1 : cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 4' \rightarrow 1$, C_2 : cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 6' \rightarrow 1$ et C_3 : cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 1$) représentés dans le diagramme entropique.



Description du cycle C_3 :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique et réversible dans la pompe P ;
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$: échauffement et vaporisation isobares dans le générateur de vapeur GV ; au point 4, la vapeur est saturante sèche ;
- $4 \rightarrow 5$: échauffement isobare dans le surchauffeur S par échange thermique avec un fluide auxiliaire maintenu à la température 600°C , de façon que $t_5 = 600^\circ\text{C}$;
- $5 \rightarrow 6$: détente adiabatique réversible dans la turbine TV1 ;
- $6 \rightarrow 7$: échauffement isobare dans le resurchauffeur RS par échange thermique avec le même fluide auxiliaire : donc $T_7 = T_5$;
- $7 \rightarrow 8$: détente adiabatique et réversible dans la turbine TV2 ;
- $8 \rightarrow 1$: condensation isobare dans le condenseur CD ;

Le cycle C_2 serait réalisé en détendant une seule fois le fluide (sans resurchauffe) et le cycle C_1 en détendant directement la vapeur saturée sèche. Tous les transferts de fluide dans les conduites de liaison sont supposés isothermes et isobares. Les pressions des changements de phase sont : $P_3 = P_4 = 100$ bar, $P_1 = P_8 = P'_4 = P'_6 = 0,1$ bar, et la pression dans le resurchauffeur vaut : $P_6 = P_7 = 30$ bar. On utilisera le diagramme enthalpique donné en fin d'énoncé. On donne les caractéristiques de l'eau liquide : $v = 10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$, et $c_l = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

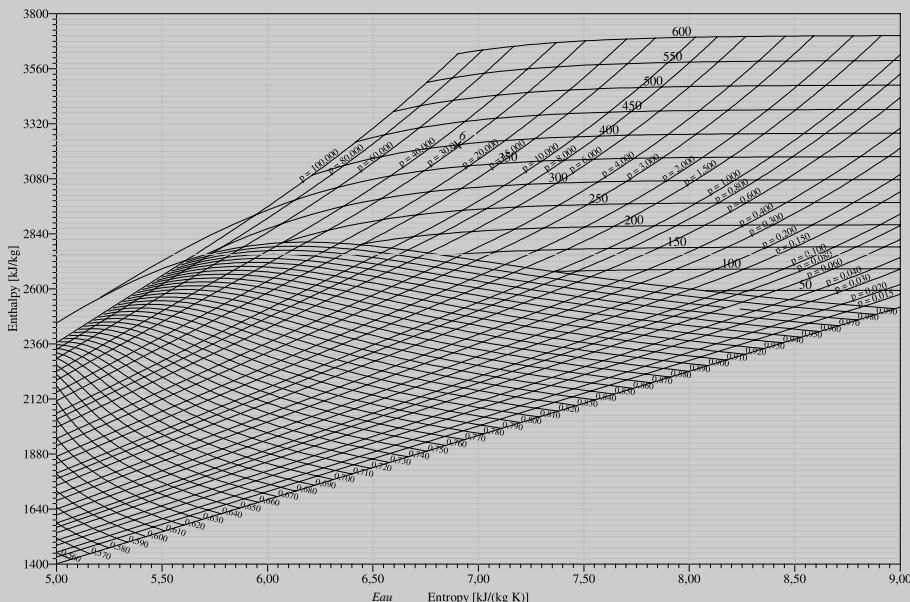
1. Justifier l'allure du cycle C_1 dans le diagramme entropique, et expliquer notamment pourquoi les points 1 et 2 sont confondus. On prendra par la suite

$h_1 = h_2$. Placer le maximum de points sur le diagramme de Mollier joint. Quelles sont les températures des changements de phase ? Le cycle est-il réversible ?

2. Donner, par lecture directe sur le diagramme, les titres en vapeur x en fin de détente dans chacun des trois cycles. En déduire la diminution de l'humidité relative (masse d'eau liquide par kilogramme de fluide) dans les turbines, due à la surchauffe (détente du cycle C2 comparée à celle du cycle C1), et celle due à la surchauffe et à la resurchauffe (détente du cycle C3 comparée à celle du cycle C1).

3. Calculer les quantités de chaleur massiques échangées par le fluide avec le milieu extérieur pour les trois cycles.

4. Calculer le rendement thermodynamique théorique du cycle.



La pression p est exprimée en bar et la température en °C.

Analyse du problème

Cet exercice utilise le diagramme de Mollier avec une lecture graphique des enthalpies massiques. Le théorème des moments permet de donner une relation entre le titre massique en vapeur et les enthalpies massiques sur un palier d'équilibre liquide-vapeur.



- La transformation $1 \rightarrow 2$ est isentropique. L'eau liquide étant quasi incompressible, l'identité thermodynamique s'écrit : $du = Tds - pdv = 0$. Pour le liquide incompressible, on fait l'approximation que $h \approx u$. On a donc $dh \approx du = cdT \approx 0$: les points 1 et 2 sont quasiment confondus.

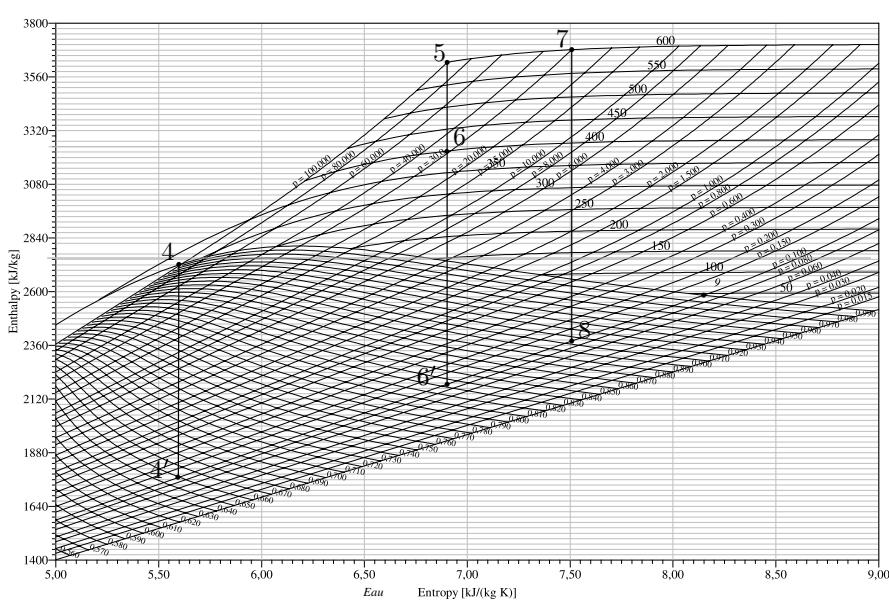
Le modèle du fluide incompressible est le suivant :

- Le volume massique v du liquide est constant.
- L'énergie interne massique u ne dépend que de la température T : $u = u(T)$.

L'enthalpie massique est $h = u + pv$. On fait très souvent l'approximation que $pv \ll u$, soit $h \approx u$. On a alors : $dh \approx du = c dT$ avec $c_V \approx c_P \approx c$.

Ce modèle est utilisé dans la plupart des exercices. Cependant, on peut être amené à calculer plus précisément la variation d'enthalpie. Pour la compression isentropique, on a : $du = Tds - pdv = 0$. La variation d'énergie interne massique est donc nulle. L'identité thermodynamique s'écrit : $dh = Tds + vdp$. Pour la compression isentropique, on a : $dh = vdp$. On suppose le volume massique constant, on a alors : $\Delta h = v(P_2 - P_1)$. Application numérique : $\Delta h = 10^{-3}(100 \times 10^5 - 0,1 \times 10^5) = 10 \text{ kJ.kg}^{-1}$. On verra que les autres variations d'enthalpie massique de l'exercice sont de l'ordre de grandeur de 1500 kJ.kg^{-1} . On peut donc négliger la variation d'enthalpie massique du compresseur, ce qui revient à écrire $dh \approx du$ pour le liquide incompressible.

On remarque également que les isobares sont quasiment confondues avec la courbe d'ébullition dans le diagramme de Mollier. Lors d'une compression isentropique, on se déplace sur une verticale puisque la pression augmente. Mais comme les isobares sont très proches, les points 1 et 2 sont quasiment confondus.



Les températures des changements de phase sont : $T_3 = T_4 = 310^\circ\text{C} = 583 \text{ K}$ et $T_1 = T'_4 = T'_6 = 45^\circ\text{C} = 318 \text{ K}$.

Le cycle n'est pas réversible à cause de l'irréversibilité thermique. On a un transfert thermique entre une source de chaleur à 600 °C et un fluide à une température différente qui évolue entre T_2 et 600 °C.

2. Cycle 1 : x_1 = titre massique en vapeur au point 4' = 0,662, x_{l1} = titre massique en liquide au même point = 1 - 0,662 = 0,338.

Cycle 2 : x_2 = titre massique en vapeur au point 6' = 0,835, x_{l2} = titre massique en liquide au même point = 1 - 0,835 = 0,165.

Cycle 3 : x_3 = titre massique en vapeur au point 8 = 0,912, x_{l3} = titre massique en liquide au même point = 1 - 0,912 = 0,088.

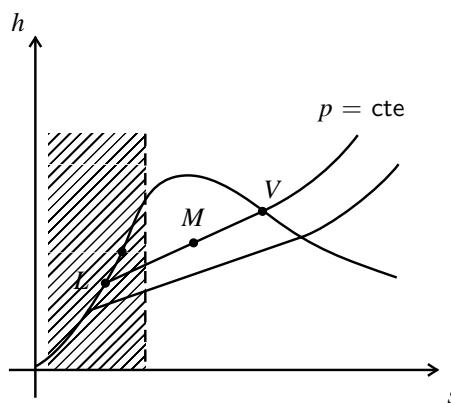
L'humidité relative passe de 0,338 kilogramme d'eau par kilogramme de fluide à 0,165 kilogramme d'eau par kilogramme de fluide, ce qui représente une diminution de 51 % avec la surchauffe et à 0,088 kilogramme d'eau par kilogramme de fluide avec la resurchauffe (la diminution est maintenant de 47 %).

3. Enthalpies massiques des différents points :

Graphiquement, on lit $h_4 = 2720 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_5 = 3628 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_6 = 3220 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_7 = 3682 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_8 = 2380 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_9 = 2580 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h'_6 = 2190 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h'_4 = 1780 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_9 = 2582 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Utilisation du théorème des moments

Pour calculer h_1 , on utilise le théorème des moments sur le palier de pression à 0,1 bar : $x_V = \frac{LM}{LV}$ en prenant par exemple : $M = 4'$, $V = \text{point 9}$ et $L = \text{point 1}$.



Il suffit d'écrire le théorème des moments : $x_V = \frac{h - h_L}{h_V - h_L} = \frac{LM}{LV}$.

On en déduit que : $h - h_L = x_V (h_V - h_L)$, d'où $h_L (1 - x_V) = h - x_V h_V$. Finalement, on obtient :

$$h_1 = \frac{h - x_V h_V}{1 - x_V} = \frac{1780 - 0,662 \times 2582}{1 - 0,662} = 209,2 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

D'après l'énoncé : $h_2 = h_1$.

Pour calculer h_3 , on utilise de même le théorème des moments sur le palier de pression à 100 bar. Sur le graphe, on prend un point intermédiaire M avec $x_V = 0,730$ et $h = 2364 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

$$h_3 = \frac{h_I - x_{VI} h_4}{1 - x_{VI}} = \frac{2364 - 0,730 \times 2720}{1 - 0,730} = 1401 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Calcul des transferts thermiques massiques :

Cycle 1 : Le transfert thermique massique reçu de la source chaude est :

$$q_C = h_4 - h_2 = 2511 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le transfert thermique massique reçu de la source froide est :

$$q_F = h_1 - h_4 = -1571 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Cycle 2 : Le transfert thermique massique reçu de la source chaude est :

$$q_C = h_5 - h_2 = 3419 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le transfert thermique massique reçu de la source froide est :

$$q_F = h_1 - h'_6 = -1981 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Cycle 3 : Le transfert thermique massique reçu de la source chaude est :

$$q_C = (h_5 - h_2) + (h_7 - h_6) = 3881 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le transfert thermique massique reçu de la source froide est :

$$q_F = h_1 - h_8 = -2171 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4. L'efficacité est définie par $e = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{|w_{it}|}{q_C}$.

Remarque : En fait

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{-w_{\text{cycle}}}{q_{\text{GV}}}$$

Il faut calculer le travail total reçu algébriquement au cours du cycle ($w_{\text{cycle}} < 0$). La somme de tous les travaux des forces de pression amont et aval se compensent deux à deux, il reste donc à faire la somme de tous les travaux indiqués massiques : $w_{\text{cycle}} = w_{it} + w_{ic}$. Comme les points 0 et 1 sont confondus, on néglige le travail à fournir au compresseur devant les autres variations d'enthalpie : $w_{\text{cycle}} \approx w_{it}$. On retrouve bien : $\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{-w_{it}}{q_{\text{GV}}}$.



Le premier principe pour un cycle complet donne : $0 = q_C + w_{it} + q_F$ d'où :

$$e = \frac{-w_{it}}{q_C} = \frac{q_C + q_F}{q_C} = 1 + \frac{q_F}{q_C}$$

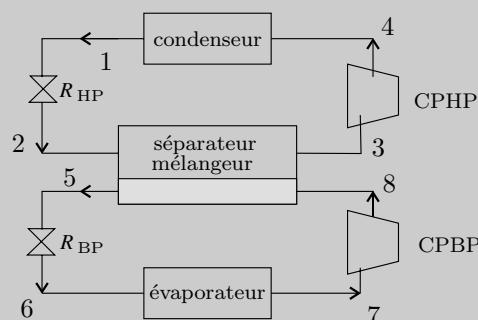
Cycle 1 : $e = 0,374$;

Cycle 2 : $e = 0,421$;

Cycle 3 : $e = 0,441$.

On récupère un peu moins de travail au niveau de la turbine mais par contre le fluide (partiellement détenu la turbine) qui est encore chaud est prélevé pour échauffer un fluide froid avant de l'envoyer dans le générateur de vapeur. Le soutirage permet d'augmenter de façon significative l'efficacité du cycle.

Exercice 12.9 : Cycle industriel de réfrigération (PT)



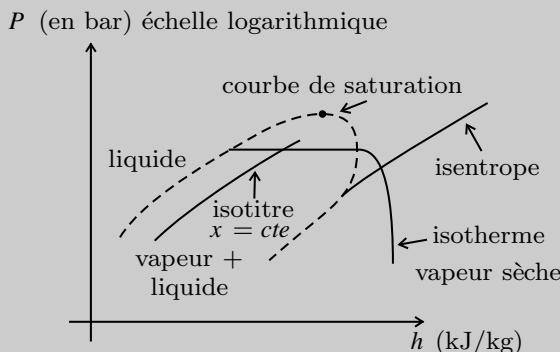
Le condenseur et l'évaporateur sont des échangeurs permettant respectivement la condensation et l'évaporation totale du fluide qui les traverse ; dans les états 1 et 7, le fluide est respectivement à l'état de liquide saturant et de vapeur saturante sèche. Ces échangeurs sont calorifugés. Les évolutions du fluide y sont supposées réversibles. R_{HP} et R_{BP} sont des robinets de laminage, respectivement haute et basse pression, qui assurent, sans partie mobile, des détentes supposées adiabatiques :

- Le fluide pénètre dans R_{HP} sous une haute pression égale à P_1 (état 1) et en ressort sous une pression intermédiaire P_2 (état 2).
- Le fluide pénètre dans R_{BP} , sous la pression intermédiaire égale à P_5 (état 5) et en ressort sous une basse pression P_6 (état 6). CPHP et CPBP sont des compresseurs, respectivement haute et basse pression, qui assurent des compressions également supposées adiabatiques et réversibles du fluide à l'état gazeux.
- Le fluide pénètre dans CPHP sous une pression intermédiaire P_3 (état 3) et en ressort sous la haute pression P_4 (état 4).
- Le fluide pénètre dans CPBP sous basse pression P_7 (état 7) et en ressort sous la pression intermédiaire P_8 (état 8).

À la sortie de R_{HP} (état 2), et à la sortie de CPBP (état 8), le fluide pénètre dans le mélangeur-séparateur (MS) et ressort à l'état de vapeur sèche saturante (état 3) vers CPHP et à l'état de liquide saturant (état 5) vers R_{BP} . L'échangeur MS est parfaitement calorifugé, dépourvu de partie mobile, et les évolutions du fluide y sont supposées réversibles.

Données : $P_1 = 15$ bar, $P_2 = P_8 = 4,0$ bar, $P_6 = 1,5$ bar. Débit du cycle basse pression : $D_{BP} = 1,5 \text{ kg.s}^{-1}$. Puissance thermique de réfrigération $P = 240$ kW (reçue par le fluide au niveau de l'évaporateur).

- Montrer que les transformations dans le condenseur, l'évaporateur et le mélangeur sont isobares.
- Étude du diagramme des frigoristes : $P(h)$



L'abscisse est l'enthalpie massique h du fluide étudié, exprimée en kJ.kg^{-1} , avec une échelle linéaire. L'ordonnée est la pression P , exprimée en bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), avec une échelle logarithmique.

Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? On justifiera précisément la réponse fournie. Trouver l'équation d'une isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme étudié ; y a-t-il accord avec les isothermes du diagramme réel du fluide Forane 502, représenté en annexe ?

3. Étude du cycle haute pression (1 → 2 → 3 → 4).

Le fluide frigorigène étudié ici est le Forane 502. Tracer le cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme fourni en annexe. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 1, 2, 3 et 4 par lecture directe sur ce diagramme ainsi complété. Retrouver le titre massique en vapeur x du fluide dans l'état 2.

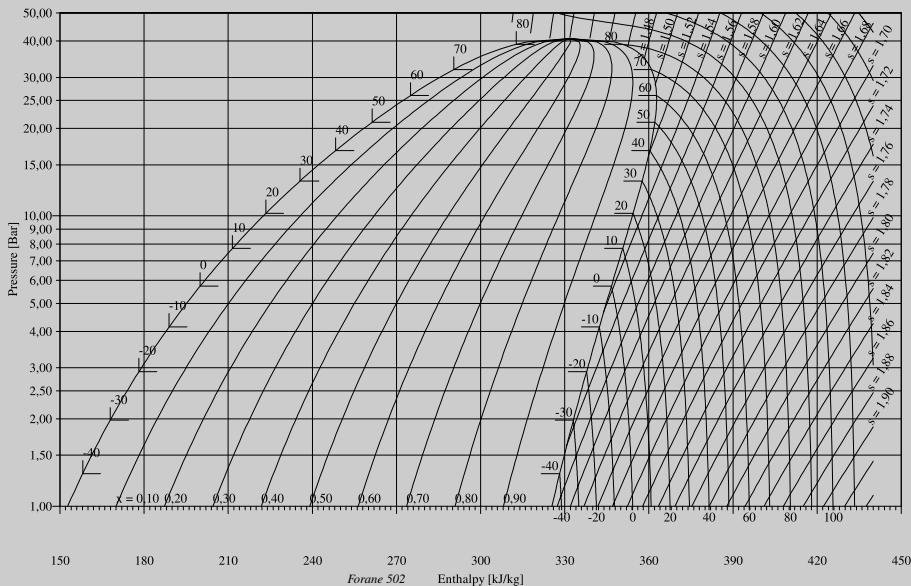
4. Étude du cycle basse pression (5 → 6 → 7 → 8).

Tracer le cycle 5, 6, 7, 8 sur le diagramme fourni en annexe. Déterminer les valeurs de P, T, x et h pour les états 5 et 6 du fluide. Faire de même pour le fluide dans l'état 7 ; en déduire les valeurs pour l'état 8. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 5, 6, 7 et 8. À l'aide d'un bilan énergétique justifié au niveau du mélangeur-séparateur, déterminer la valeur du débit massique D_{HP} du fluide qui décrit le cycle haute pression.

5. Bilan énergétique

Calculer la puissance mécanique échangée dans CPHP et CPBP. Calculer la puissance thermique échangée dans l'évaporateur et dans le condenseur. Calculer le COP (coefficient de performance) de l'installation frigorifique étudiée. Calculer le COP du cycle réfrigérant idéal de Carnot ayant mêmes températures de source froide et de source chaude. En déduire le rendement du cycle étudié par rapport

au cycle de Carnot : $\eta = \frac{\text{COP}}{\text{COP}_{\text{Carnot}}}$. Commenter.



Analyse du problème

Cet exercice utilise le diagramme des frigoristes très utilisé pour des cycles de réfrigération. Le théorème des moments permet de donner une relation entre le titre massique en vapeur et les enthalpies massiques sur un palier d'équilibre liquide-vapeur. On utilisera le principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts en régime permanent à plusieurs entrées et plusieurs sorties.



1. Une transformation réversible est nécessairement isobare : en effet, une irréversibilité mécanique (forces de viscosité par exemple) entraîne une baisse de pression.
2. Pour une isotherme, la température est imposée, donc une isotherme est représentée par un segment de droite horizontal. Mais à l'intérieur de la courbe de saturation, il y a équilibre liquide-vapeur donc la variance est égale à 1. Si la température est imposée, la pression est fixée : les isobares sont confondues avec les isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation. D'après la deuxième loi de Joule, l'enthalpie d'un gaz parfait n'est fonction que de la température donc sur une isotherme h est constante. Les isothermes pour un gaz parfait sont donc des droites verticales dans le domaine où le fluide est gazeux, ce qui est en accord avec la figure fournie.
3. Tracé du cycle : voir figure à la fin du corrigé.

	1	2	3	4
h (kJ.kg $^{-1}$)	245	245	343	366
p (bar)	15	4	4	15
T (°C)	36	-11	-11	44
x	0	0,36	1	vapeur sèche

Les grandeurs en gras dans le tableau ci-dessus sont données par l'énoncé, les autres sont lues sur le diagramme.

On utilise le théorème des moments pour calculer le titre massique en vapeur :

$$x = \frac{LM}{LV} = \frac{h_2 - h_L(-10^\circ\text{C})}{h_V(-10^\circ\text{C}) - h_L(-10^\circ\text{C})}$$

avec $h_2 = h_1 = 245 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_L(-10^\circ\text{C}) = 188 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_V(-10^\circ\text{C}) = h_3 = 343 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

On en déduit que : $x = \frac{245 - 188}{343 - 188} = 0,37$. C'est tout à fait cohérent avec la lecture sur le diagramme.

4.

	5	6	7	8
h (kJ.kg $^{-1}$)	188	188	328	347
p (bar)	4	1,5	1,5	4
T (°C)	-11	-37	-37	-5
x	0	0,16	1	vapeur sèche

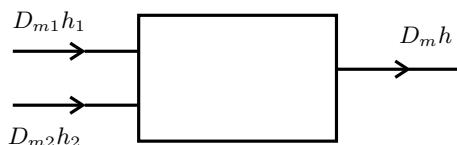
Comme dans le tableau précédent, les grandeurs en gras dans le tableau ci-dessus sont données par l'énoncé, les autres sont lues sur le diagramme.

Cours : Le premier principe pour un système en écoulement permanent à deux entrées et une sortie s'écrit :

$$-D_{m1}h_1 - D_{m2}h_2 + D_m h = P_i + P_{th} \quad (1)$$

Il faut retenir le signe (-) pour les entrées et le signe (+) pour les sorties.

Sur les schémas, les débits massiques et les enthalpies massiques seront souvent représentés pour permettre d'appliquer facilement la relation :



Très souvent dans les applications industrielles, $P_i = 0$ et $P_{th} = 0$.



Le mélangeur est calorifugé. Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent à plusieurs entrées et sorties s'écrit :

$$-D_{HP}h_2 + D_{HP}h_3 - D_{BP}h_8 + D_{BP}h_5 = 0.$$

$$\text{D'où : } D_{HP} = \frac{D_{BP}(h_8 - h_5)}{h_3 - h_2} = 2,43 \text{ kg.s}^{-1}.$$

Compresseur HP : $P_{\text{méca CP HP}} = D_{HP}(h_4 - h_3) = 55,9 \text{ kW}$.

Compresseur BP : $P_{\text{méca CP BP}} = D_{BP}(h_8 - h_7) = 28,5 \text{ kW}$.

On en déduit la puissance mécanique reçue par les deux compresseurs :

$$P_{\text{méca CP HP+BP}} = 84,4 \text{ kW}$$

La puissance thermique algébriquement reçue par l'évaporateur est :

$$P_{\text{th,évaporateur}} = D_{BP}(h_7 - h_6) = 210 \text{ kW}$$

La puissance thermique algébriquement reçue par le condenseur est :

$$P_{\text{th,condenseur}} = D_{HP}(h_1 - h_4) = -294 \text{ kW}$$

On a bien une valeur négative puisqu'on a un changement d'état vapeur → liquide.

$$\text{COP} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{P_{\text{th,évaporateur}}}{P_{\text{méca CP HP+BP}}} = \frac{210}{84,4} = 2,49$$

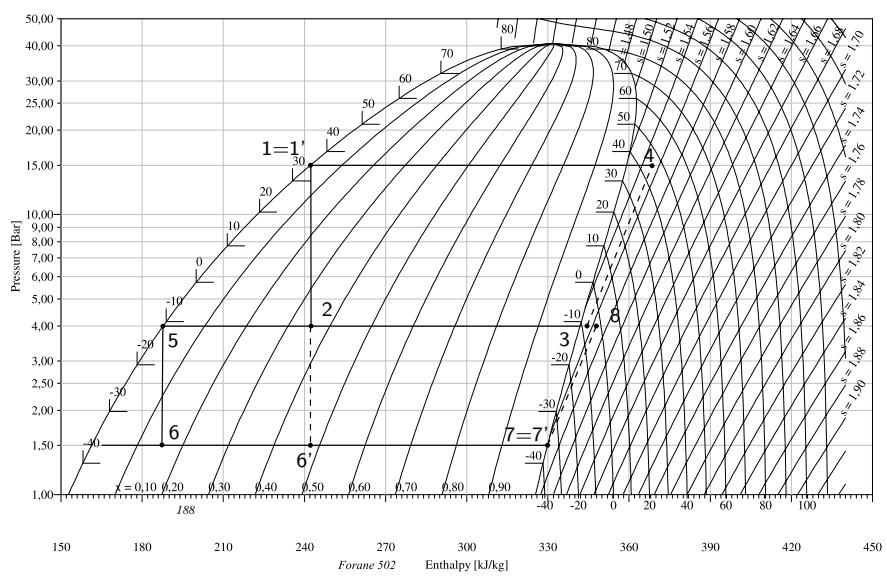
5. $\text{COP}_{\text{Carnot}} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 3,23$ avec $T_F = -37 + 273 \text{ K}$ et $T_C = 36 + 273 \text{ K}$.

Il faut choisir les températures de T_C et T_F de façon à obtenir le plus grand COP pour la machine de Carnot. Cela revient à prendre T_F le plus grand et T_C le plus petit. Nous en déduisons le rendement du cycle :

$\eta = \frac{\text{COP}}{\text{COP}_{\text{Carnot}}} = \frac{2,49}{3,23} = 77\%$. C'est normal d'avoir un rendement inférieur à 1. Le cycle réel n'est pas un cycle de Carnot. Le laminage n'est pas réversible. Le transfert thermique isobare ($4 \rightarrow 1' \rightarrow 1$) nécessite une infinité de sources de chaleur pour être réversible : la machine n'est pas ditherme.



Attention à ne pas confondre les courbes isochores (non utilisées dans l'exercice) et les courbes isentropes, de pentes plus importantes.



Index

A

amplificateur
opérationnel 49
opérationnel idéal en régime linéaire 50
anticoïncidence 234
approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) 105

B

bornes homologues 140

C

câble coaxial 89
chaleur massique dissipée par frottement 326
coefficients de mutuelle inductance 139
compresseur à piston 313
condensateur
cylindrique 156
plan 159, 160
sphérique 152
condition de non basculement 27
conditions de Gauss 263
conducteur
à l'équilibre 145
parfait 174, 182
contraste 220
local 233, 237
corps noir 303, 304
couplage électromécanique parfait 114, 118

courants de Foucault 101

D

décomposition en série de Fourier 64, 67
diagramme
de Bode 63, 67
de Mollier 336
de Watt 314
des frigoristes 341
entropique 332
différence de marche 217, 241, 268
diffraction
de Fraunhofer 247, 248, 257, 260
par un réseau 267

E

échangeur thermique 296, 299
effet de peau 194
efficacité 332
énergie
électrostatique 147, 148
magnétique 134
équation
de la chaleur 294
de Laplace 90
de propagation 174, 196, 203
équations de Maxwell 170

F

fentes d'Young 215
flux du champ magnétique 124

- formule
- de la diffraction 249
 - de Varignon 7
 - des interférences 216, 264
- H - I**
- haut-parleur 119
- inductance propre 134, 139
- induction
- de Lorentz 109
 - de Neumann 110
- interfrange 262
- L**
- Laplacien
- scalaire 175
 - vectoriel 175
- liaison pivot parfaite 3
- loi(s)
- de Coulomb pour le frottement de glissement 23
 - de Faraday 109, 110, 128
 - de Fourier 276, 284
 - de Laplace 319, 323, 329
 - de Lenz 108, 113, 118, 128
 - de Newton 277
 - de Stéfan 302, 304
 - des noeuds en termes de potentiels 50
- M**
- machine de Carnot 334
- Michelson
- en coin d'air 227, 236
 - en lame d'air 224
- milieu dispersif 205
- minimum de déviation 270
- moteur asynchrone 123
- O**
- onde
- plane progressive monochromatique 169, 182
- stationnaire 183
- ordre d'interférence 216, 218, 226, 229
- P**
- pendule pesant 3
- pince ampèremétrique 135
- plasma 200, 201
- polarisation des ondes 210
- premier principe pour un système ouvert en régime permanent 309
- principe
- d'Huygens-Fresnel 248
 - de Huygens-Fresnel 247
 - de retour inverse de la lumière 221, 263
 - du retour inverse de la lumière 225
- puissance thermique 276, 291
- R**
- rayonnement dipolaire 191
- référentiel barycentrique 39
- relation
- de dispersion 169, 171, 174, 196, 203
 - de passage 184
- résistance thermique 280, 281, 285, 288, 289, 296
- ressort 11, 14
- roulement sans glissement 29
- S**
- schéma
- équivalent du Michelson 228
 - thermique équivalent 280
- stabilité de l'équilibre 160
- T**
- terme
- d'amortissement 197
 - de propagation 197
- théorème
- d'Ampère 94, 139
 - de Gauss 75, 77, 149

de Koenig 19, 32
de Malus 225, 248, 263
de Millman 50, 51
transformateur 139
transformation polytropique 311
travail de transvasement 317

rotation 16, 30, 36
vitesse
de glissement 24
de groupe 178, 204
de phase 178, 204

V

vecteur
de Poynting 169, 172, 178, 192