Devoir du 10/10/2020

Exercice 1 : Pour tout complexe z distinct de $2i$, on pose $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2\mathrm{i}}$

1. Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6\mathrm{i}$.
2. En déduire l'ensemble des d'antécédents de $1 + \mathrm{i}$ par f.
3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Discuter suivant les valeurs de z_0 le nombre d'antécédents de z_0 par f.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer $f(\mathbb{C}),\ f(\mathbb{C}^*),\ f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C}),\ f^{-1}(\mathbb{C}^*),\ f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application.

1. On suppose que f est injective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. On suppose que f est surjective et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
3. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + (f \circ f)(n) = 2n$.
   Prouver que f est injective puis que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite involutive si $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az + b\bar{z}$.
   (a) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = 0$.
   (b) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = z$.
   (c) Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ soit involutive.
2. On considère dans cette partie, la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}\,\bar{z}$.
   Dans le plan usuel $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point M quelconque.
   On note z son affixe et l'on considère le point M' d'affixe $z' = g(z)$.
   On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.
   (a) La fonction g est-elle involutive ?
   (b) Prouver que Δ est une droite dont on donnera l'équation et un vecteur directeur que l'on notera $\vec{w}$.
   (c) Démontrer que, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{w}$.
   (d) Soit I le milieu du segment $[MM']$. Prouver que $I \in \Delta$.
   (e) Par quelle transformation géométrique simple, le point M' se déduit-il du point M ?

Exercice 5

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Prouver que
$$\left(\exists u \in \mathbb{C},\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = \lambda_k u\right) \Longleftrightarrow \left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right).$$
3. Soient $n \in \mathbb{N}$. On se place dans un repère orthonormé direct et on considère des points $M_1, \ldots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, \ldots, z_n$ non nulles.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.
   (a) Donner, en le justifiant rapidement, pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$ quelconque, un exemple de n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.
   (b) Soit z un complexe. On pose $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k)$
   Prouver que $\varphi(z) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ puis que $|\varphi(z)| = -\varphi(z)$.
   (c) Prouver que $\forall z \in \mathbb{C},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$.
   (d) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MM_k = \sum_{k=1}^{n} OM_k$