9 Séries entières

« Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe. »

Paul Painlevé (1863 – 1933)

Plan de cours

♦ **Quelques perspectives historiques –** Sous l'impulsion de grandes figures telles que Newton, Mercator ou encore Leibniz, les développements en série des fonctions usuelles font leur apparition dans la seconde moitié du XVIIème siècle. Ils sont souvent obtenus par des méthodes d'intégrations et/ou dérivations successives. Ces techniques de manipulation algébrique qui trouvent leur apogée dans la formule de Taylor relèvent, à ce stade, essentiellement du calcul formel. Euler emploie les développements en série pour rechercher des solutions d'équations différentielles linéaires, comme l'illustre la résolution suivante.

Résolution de l'équation $y'(x)+2xy(x)=0 \quad (\mathscr{E})$
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre est bien entendu une droite vectorielle. Contentons-nous dans un premier temps d'en chercher des solutions simples.

- Pour des raisons de degré, la seule fonction polynomiale convenable est la fonction nulle.
- Recherchons maintenant des solutions de la forme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sans de soucier de la convergence de la série, ni de la possibilité de dériver sa somme terme à terme. En injectant dans l'équation $(\mathscr{E})$, il vient :

$$f'(x)+2xf(x)=0 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1}=0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^n=0$$
$$\iff a_1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}\right]x^n=0$$

S'il est possible d'identifier les coefficients, $a_1=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}=-2a_{n-1}$.

Par récurrence, $a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{(-1)^p}{p!}a_0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Alors, $f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p!}x^{2p}=a_0\mathrm{e}^{-x^2}$ comme attendu.

Cette démarche soulève de nombreuses questions auxquelles nous tenterons de répondre dans ce chapitre :
– À quelle(s) condition(s) sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur $x\in\mathbb{K}$ la série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle ?
– Peut-on dériver la somme d'une telle série ?
– Peut-on « identifier » les coefficients ?
– Toute fonction peut-elle s'écrire comme la somme d'une série de la forme $\sum a_n x^n$?

Niels Abel

Nous marcherons ainsi (modestement) dans les pas d'Abel et de Cauchy. Ces derniers définissent en effet les premiers le rayon de convergence d'une série entière, pour Cauchy dans son *Cours d'Analyse* de 1821 et pour Abel dans son article *Recherches sur la série binomiale* paru en 1826. Ils mènent tous deux une étude systématique de convergence des séries manipulées. Ces travaux s'étendront par la suite aux fonctions complexes dites analytiques, c'est-à-dire développables en série de Taylor au voisinage de tout point, conduisant au développement de l'analyse complexe. Nous ne faisons qu'entr'ouvrir une porte !

I | Séries entières et rayon de convergence

$\mathbb{K}$ désignera dans tout ce chapitre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A – Définition et propriétés

Définition 9.1 : Série entière

Une série entière de la variable réelle ou complexe z est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés coefficients de la série entière.

Il est coutume, pour une série entière, de noter abusivement $\sum a_n z^n$ la série de fonctions idoine.

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie en z_0 lorsque la série $\sum a_n z_0^n$ converge. On l'appelle *fonction somme* ou plus simplement *somme* de la série.

Définition 9.2 : Domaine de convergence

On appelle domaine de convergence l'ensemble de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exemples

- $\sum z^n$ converge (absolument) sur $D(0,1)$ et pour tout $z \in D(0,1)$, $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
- $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge (absolument) sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de convergence des trois séries entières $\sum \dfrac{x^n}{n}$, $\sum x^{n^2}$ et $\sum \dfrac{(\pi x)^n}{n^3+2}$ où $x \in \mathbb{R}$.
La deuxième série entière est qualifiée de lacunaire.

On remarquera qu'un polynôme est un cas très particulier de série entière.

Lemme 9.3 : Lemme d'Abel

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Supposons z_0 non nul et l'existence un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Comme $|z| < |z_0|$, la série de terme général $\left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ converge en tant que série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n z^n$ convergent absolument. ■

Définition 9.4 : Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini par :

$$R = \sup\left\{ r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

D'après le lemme d'Abel, si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc converge).

Exemples

$\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R=1$ et $\sum \frac{(\pi x)^n}{n^3+2}$ a pour rayon de convergence $R=\frac{1}{\pi}$.

Théorème 9.5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z|<R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z|>R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z|=R$ alors on ne peut rien dire.

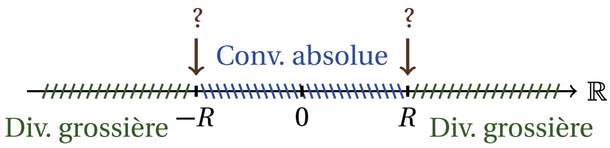
On établit ainsi que $\boxed{R=\sup\{r\geqslant 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}}$

Démonstration

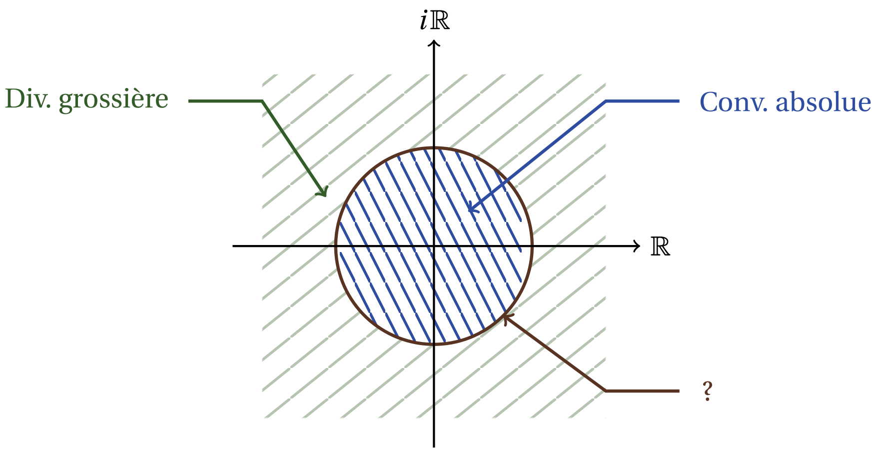
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z\in\mathbb{C}$. Rappelons que par définition,

$$R=\sup\left\{r\geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

- Si $|z|<R$ alors il existe $r\in\mathbb{R}_+$ tel que $|z|<r<R$.
  Comme $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z|>R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc ne converge pas vers 0.
  Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. ■



Le domaine de convergence est dans le cas réel un intervalle du type $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou bien $[-R,R]$.



Le domaine de convergence est dans le cas complexe constitué du disque ouvert de convergence et de points situés sur le cercle d'incertitude.

Définition 9.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $]-R,R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ est appelé disque ouvert de convergence et on appelle parfois cercle de convergence ou encore cercle d'incertitude le cercle $C(0,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=R\}$.

B – Détermination pratique du rayon de convergence

1 – Encadrement du rayon de convergence

Si l'on connaît la nature de $\sum a_n z_0^n$ pour un nombre complexe z_0 donné, on peut en déduire des informations sur le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Proposition 9.7 : Encadrement du rayon de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leqslant R$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $|z_0| \geqslant R$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $|z_0| = R$. (cercle de convergence)

Exemple

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1.

2 – Utilisation de la règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes strictement positifs permet de déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans la plupart des cas rencontrés. Observons les exemples suivants.

Exemple 1

Considérons la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ et posons $u_n = \frac{x^n}{n}$. Pour $x \neq 0$, appliquons la règle de d'Alembert afin d'étudier la convergence absolue de la série.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| = \ell$$

- Si $\ell < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 1$, alors la série converge absolument. Ainsi, $R \geqslant 1$.
- Si $\ell > 1$, c'est-à-dire si $|x| > 1$, alors la série ne converge pas absolument. Ainsi, $R \leqslant 1$.

De manière immédiate, $R = 1$.

Exemple 2

Considérons la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$. Remarquons qu'il s'agit bien d'une série entière. Notons u_n son terme général et étudions pour $x \neq 0$ la convergence absolue de $\sum u_n$ à l'aide de la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{2n}} = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{2} = \ell$$

- Si $\ell < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, alors la série converge absolument. Ainsi, $R \geqslant \sqrt{2}$.
- Si $\ell > 1$ alors la série ne converge pas absolument. Ainsi, $R \leqslant \sqrt{2}$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série vaut $\sqrt{2}$.
Le lecteur aura bien noté que dans ce cas, l'utilisation de la règle de d'Alembert est totalement farfelue : la série étudiée est une série géométrique de raison $x^2/2$...

Lorsque la série n'est pas lacunaire, c'est-à-dire lorsque les coefficients a_n sont tous non nuls à partir d'un certain rang, on peut simplifier la démarche en introduisant $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|x| \quad \text{donc} \quad R = \frac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$$

3 – Comparaison de séries entières

Théorème 9.8 : Règles de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration

On compare la nature des séries à termes positifs $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$.

- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n \geqslant N$, la convergence de $\sum |b_n z^n|$ implique celle de $\sum |a_n z^n|$. Ainsi, $R_b \leqslant R_a$.
- Le raisonnement est identique lorsque $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n)$.
- Enfin, si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ sont de même nature. Ainsi, $R_a = R_b$.

Exercice 2

Préciser le rayon de convergence des séries entières $\sum \sin(n) x^n$ et $\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) x^n$.

4 – Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition 9.9

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Notons respectivement R et R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

- Remarquons que si $(n a_n z^n)$ est bornée, il en va de même pour $(a_n z^n)$. Ainsi, $R' \leqslant R$.
- Introduisons maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Montrons que $|z| < R'$ en considérant un réel r tel que $|z| < r < R$:
$$|n a_n z^n| = \left| a_n r^n \times n \left(\frac{z}{r}\right)^n \right| \leqslant M \times |a_n r^n| \quad \text{car} \quad n \left|\frac{z}{r}\right|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Comme $\sum a_n r^n$ converge absolument, il en va de même pour $\sum n a_n z^n$. Ainsi, $|z| < R'$.

On a bien montré que $R = R'$. ■

On généralise aisément la preuve précédente à tout réel α indépendant de n : les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 3

Quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{n^{2022}}$?

C – Opérations sur les séries entières

Proposition 9.10 : Somme de séries entières et multiplication par un scalaire

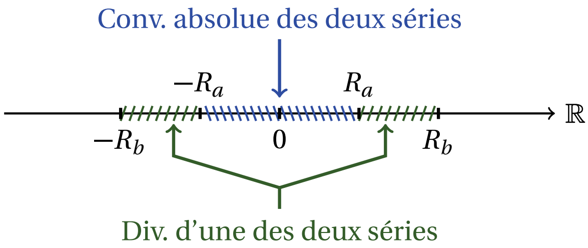
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

(i) $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence R où $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.

(ii) $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a si $\lambda \neq 0$ et $+\infty$ si $\lambda = 0$.

Démonstration

Démontrons seulement le premier point. Illustrons pour cela le résultat.



- Supposons sans perte de généralité que $R_a < R_b$.
  Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum(a_n + b_n)z^n$ converge. Ainsi, $R \geqslant R_a$.
  Si $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge donc $\sum(a_n + b_n)z^n$ diverge. Ainsi, $R \leqslant R_a$.
  Finalement, $R = R_a$.
- Supposons que $R_a = R_b$.
  Pour tout z tel que $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc $\sum(a_n + b_n)z^n$ converge.
  Ainsi, $R \geqslant R_a$. Pour $|z| > R_a = R_b$, les deux séries divergent donc on ne peut rien dire sur la somme. ■

Proposition 9.11 : Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

Alors le produit de Cauchy des deux séries est une série entière de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Démonstration

- Le produit de Cauchy de deux séries entières est bien une série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(a_k z^k\right)\left(b_{n-k} z^{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n$$

- Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. On en déduit, par produit de Cauchy, que la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

  Ceci prouve bien que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. ■

Exemple

Dans le chapitre *Procédés sommatoires discrets*, nous avons vu que par convergence absolue,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$$

Dans ce cas, le rayon de convergence vaut précisément $1 = \min(R_a, R_a)$ mais l'inégalité peut être stricte.

Exercice 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$. Notons f la fonction somme associée.

Déterminer une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^k$ en fonction de $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

II | Régularité de la somme d'une série entière

A – Continuité de la somme d'une série entière

1 – Cas général

Théorème 9.12 : Convergence normale d'une série entière

Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Démonstration

Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Soit r un réel vérifiant $0 < r < R$.

$$\forall z \in D_f(0,r), \quad |a_n z^n| \leqslant a_n r^n$$

Comme $\sum a_n r^n$ converge, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D_f(0,r)$. ■

Attention, il n'y a, en règle générale, pas convergence normale sur le disque ouvert de convergence. Par exemple, la série de fonctions $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$. Mais la propriété démontrée suffit à assurer la continuité de $z \mapsto \sum a_n z^n$ sur $D_f(0,r)$ pour tout $r < R$ donc sur le domaine ouvert de convergence.

Corollaire 9.13 : Continuité sur le disque ouvert de convergence

La somme d'une série entière réelle est continue sur le disque ouvert de convergence.

Exemples

$f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $]-1,1[$ et exp est continue sur $\mathbb{C}$.

Pour certaines séries entières, la convergence normale assure la continuité au-delà du seul disque ouvert de convergence, comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 5

Montrer que la somme de la série $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1,1]$ ou, au choix, sur $D_f(0,1)$.

2 – Cas spécifique de la variable réelle

Par la suite, nous ne considérerons que des séries entières de la variable réelle. Rappelons que la fonction somme est alors définie sur $]-R,R[$, $]-R,R]$, $[-R,R[$ ou $[-R,R]$. Si le théorème précédent garantit la continuité de la somme sur $]-R,R[$, il ne dit rien de l'éventuelle continuité en R et en $-R$ en cas de convergence.

Remarquons que si la série $\sum a_n R^n$ converge absolument, $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-R,R]$ puisque :

$$\forall x \in [-R,R], \quad |a_n x^n| \leqslant |a_n| R^n$$

Dans ce cas, la somme est continue sur $[-R,R]$. Le résultat reste vrai même en cas de semi-convergence comme l'exprime le théorème de convergence radiale d'Abel (dont la preuve est hors programme).

Théorème 9.14 : Théorème de convergence radiale d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge.

Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Démonstration

Quitte à procéder à un changement de variable, on peut se contenter de montrer le résultat pour une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.

Supposons donc que $\sum a_n$ converge et montrons que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

- Soient $x \in [0, 1[$ et $p \in \mathbb{N}$. En notant R_n le reste de la série $\sum a_n$ au rang n,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} a_n x^n - \sum_{n=1}^{p} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n(x^n-1) = \sum_{n=1}^{p}(R_{n-1}-R_n)(x^n-1) = \sum_{n=0}^{p-1} R_n(x^{n+1}-1) - \sum_{n=1}^{p} R_n(x^n-1)\\ = (x-1)\sum_{n=0}^{p} R_n x^n + (1-x^p)R_p\end{aligned}$$

  En faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $f(x) - S = (x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

- Soient maintenant $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1[$. Comme $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|R_p| < \varepsilon$. Ainsi,

$$|f(x)-S| < (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}|R_n|x^n < (1-x)\sum_{n=0}^{p-1}|R_n|x^n + (1-x)\varepsilon\sum_{n=p}^{+\infty} x^n < (1-x)\sum_{n=0}^{p-1}|R_n|x^n + \varepsilon$$

  De plus, $(1-x)\sum_{n=0}^{p-1}|R_n|x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\delta, 1]$, $(1-x)\sum_{n=0}^{p-1}|R_n|x^n < \varepsilon$.
  Ainsi, pour tout $x \in]1-\delta, 1]$, $|f(x) - S| < 2\varepsilon$. ∎

L'argument précédent étant valable pour $x = -R$, on obtient le précieux corollaire suivant, valable uniquement pour les séries entières de la variable réelle.

Corollaire 9.15

La somme d'une série entière de la variable *réelle* est continue sur l'intervalle de convergence.

B – Dérivabilité de la somme d'une série entière de la variable réelle

On ne manipule là encore que des séries entières de la variable réelle, la $\mathbb{C}$-dérivabilité ne figurant pas au programme.

Théorème 9.16 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R. On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$, $\sum n a_n x^{n-1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

- Ce théorème nous permet de calculer très facilement la dérivée de la somme d'une série entière.
- On sait que f est au moins dérivable sur $]-R, R[$ mais on ne peut rien dire en R ou en $-R$ même si f y est définie (et dès lors continue d'après le commentaire précédent) !

Démonstration

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Soit r un réel vérifiant $0 < r < R$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$. De plus, si $n \geqslant 1$, pour tout $x \in [-r, r]$, $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge simplement sur $[-r, r]$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R donc converge uniformément sur $[-r, r]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Cette propriété s'étend donc sur $]-R, R[$ et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

■

Corollaire 9.17

La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exemple

Calculons la somme de $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$. Notons pour cela f la somme de la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Par dérivation terme à terme, $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$ a même rayon de convergence et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x f'(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 6

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

(i) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \dbinom{n+p}{n} x^p$.

(ii) Au moyen de la fonction auxiliaire $t \mapsto \dfrac{1}{(1-tz)^{n+1}}$, étendre le résultat au cas complexe.

C – Intégrabilité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème 9.18 : Intégration terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R.

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme et F une primitive de f.

$\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration

$\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence. On applique le théorème d'intégration terme à terme relatif aux séries de fonctions grâce à la convergence uniforme sur tout segment $[-r, r] \subset]-R, R[$. ■

Ne pas oublier la constante d'intégration !

Exemple

Calculons la somme de $\sum \dfrac{x^n}{n}$ pour $x \in [-1,1[$.

- Notons pour cela f la somme de la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1.
  Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.
  Par intégration terme à terme, pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = -\ln(1-x) = -\ln(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.
  Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
- D'après le théorème de convergence radiale, f est continue sur $[-1,1[$ donc $f(-1) = \lim_{x \to -1^+} -\ln(1-x) = -\ln(2)$. Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 8

Calculer de même, pour tout $x \in [-1,1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

III | Développements en série entière

A – Généralités

Définition 9.19 : Fonction développable en série entière

Une application est dite développable en série entière au voisinage de 0 sur $]-r,r[$ (ou sur $D(0,r)$) s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{ou} \qquad \forall z \in D(0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Quelles propriétés doit vérifier une fonction pour être développable en série entière au voisinage de 0 ?

Théorème 9.20 : Condition nécessaire dans le cas réel

Si f admet un développement en série entière sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. Son développement en série entière est de plus unique et donné par sa série de Taylor :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Démonstration

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ découle du théorème de dérivation terme à terme.
- De plus, $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$, …, $f^{(n)}(0) = n! a_n$. ∎

Exercice 9

Montrer que si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

La réciproque du théorème est fausse : toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas développable en série entière.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$. Conclure.

INDICATION : *On pourra montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.*

Corollaire 9.21 : Unicité du développement en série entière

Soit $r>0$ quelconque. Si pour tout $x\in]-r,r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n$.

Ajoutons les propriétés suivantes qui peuvent s'avérer utiles :

- Si f est paire, f' est impaire.
- Si f est (im)paire, son développement en série entière ne contiendra que des puissances (im)paires.

B – Développements en série entière usuels

1 – Série exponentielle et fonctions trigonométriques

Rappelons la précieuse inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 9.22 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in[a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant M$. Alors,

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n\right|\leqslant M\cdot\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette inégalité nous avait permis (cf. chapitre *Procédés sommatoires discrets*) de montrer que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est donc $+\infty$, ce que la règle de d'Alembert nous permet de retrouver facilement. Une telle approche nous permet d'obtenir les développements en série entière des fonctions cosinus et sinus, ainsi que de leurs cousines cosinus et sinus hyperboliques. Mais il y a plus simple ! En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\cos(x)=\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^nx^n}{2\cdot n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^nx^n}{2\cdot n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2\cdot n!}\cdot i^nx^n=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{i^{2p}x^{2p}}{(2p)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^px^{2p}}{(2p)!}$$

On trouve de même, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\mathrm{ch}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{sh}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Rappelons enfin que grâce à un produit de Cauchy, on retrouve que pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{z'}$.

2 – Logarithme

Pour tout $x\in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$. Donc par intégration terme à terme,

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \ln(1-x)=\ln(1)-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\quad\text{et}\quad\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

L'égalité s'étend à respectivement $[-1,1[$ et $]-1,1]$ au moyen du théorème de convergence radiale d'Abel.

3 – Arctangente

De même, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. Donc par intégration terme à terme,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan(x) = \arctan(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Grâce au théorème de convergence radiale, l'égalité est valable sur $]-1,1]$ mais notons surtout que le développement en série entière n'est pas valable sur $\mathbb{R}$, bien que arctan soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 – Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminons son développement en série entière. Pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

f est donc solution de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$. C'est même l'unique solution de l'équation vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ par unicité au problème de Cauchy.

Soit y une solution de l'équation développable en série entière. Alors, $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

En injectant dans l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k - \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k - \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} [(k+1)a_{k+1} - (\alpha - k) a_k] x^k = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = \dfrac{\alpha - k}{k+1} \cdot a_k$.
Une simple récurrence conduit à :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot a_0$$

Pour $a_0 = 1$, y est solution de l'équation et vérifie $y(0) = 1$. Par unicité de la solution, $y = f$. Ainsi,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k$$

Reste à trouver le rayon de convergence de la série entière, en observant que tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang si et seulement si α est un entier naturel.

- Supposons d'abord que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
  Appliquons la règle de d'Alembert : $\left| \dfrac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \left| \dfrac{\alpha - k}{k+1} \right| \cdot |x| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |x|$. Donc $R = 1$.
- En revanche, si $\alpha \in \mathbb{N}$ (mettons $\alpha = n$), les a_k sont tous nuls à partir du rang $n+1$. Donc $R = +\infty$ et on retrouve la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

5 – Synthèse

Voici la liste des développements usuels à connaître par cœur :

$R=1$	$D(0,1)$	$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$
$R=+\infty$	$\mathbb{C}$	$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\mathrm{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$; $\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=1$	$]-1,1]$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$; $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
$R=1$	$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$

C – Méthodes pratiques pour obtenir un développement en série entière

❶ Utilisation des développements usuels et des opérations sur les séries entières (somme et produit).

Exemple

Déterminons le développement en série entière de $f : x \longmapsto x\ln(1-x)+2\mathrm{e}^x$.

$f(x)=2+2x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{2}{n!}\right)x^n.$

On remarquera que l'ensemble des fonctions réelle développables en série entière sur un intervalle I est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

❷ Dérivation et intégration terme à terme.

Exemple

$x \longmapsto \ln(1-x)$.

❸ Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exemple

$x \longmapsto \exp(x)$.

❹ Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $a\in\mathbb{C}^*$.

$$\forall x\in]-a,a[,\quad \frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{-1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\ ;\quad \frac{1}{(x-a)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x-a}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a^{n+1}}x^{n-1}$$

Exemple

Déterminons le développement en série entière de $x\longmapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

$\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n.$

❺ Utilisation d'une équation différentielle.

Exemple

Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Déterminons son développement en série entière.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $y' = 1 - xy$. En cherchant une solution sous forme de série entière, on trouve une relation liant les coefficients a_n de la série :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1}(n+1) + a_{n-1} = 0 \text{ et } a_1 = 1$$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy, en prenant $a_0 = 0$, on trouve $a_{2n} = 0$ et :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?