Devoir du 07/11/2020

Exercice 1 : On considère A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ dont on notera a, b et c les affixes respectives.

1. Prouver que : $M(z) \in (AB) \iff \left(\bar{a} - \bar{b}\right) z + (b-a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0$.
2. Exprimer $\bar{a}$ en fonction de a. En déduire que : $M(z) \in (AB) \iff z + ab\bar{z} = a + b$.
3. Soit D un point de $\mathcal{C}$ distinct de C. Prouver que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $ab + cd = 0$.
4. On note $\mathcal{H}_C$ la hauteur du triangle ABC issue de C. On note $D(d)$ le point d'intersection de $\mathcal{H}_C$ et $\mathcal{C}$ distinct de C. Exprimer d en fonction de a, b et c.
5. En déduire que : $M(z) \in \mathcal{H}_C \iff z - ab\bar{z} = c - ab/c$.
6. En déduire que les hauteurs du triangles ABC sont concourantes et déterminer l'affixe de l'orthocentre H du triangle ABC en fonction de a, b et c.

Exercice 2 : Soient E un ensemble et A une partie de E.
On note A^+ l'ensemble $\{X \in \mathcal{P}(E),\ A \subset X\}$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de E qui contiennent A. On considère l'application : $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times A^+ \\ X \mapsto (X \cap A, X \cup A) \end{cases}$
Prouver que Φ est bijective. et expliciter son application réciproque Φ^{-1}.

Exercice 3 : On considère la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f et simplifier l'expression de sa dérivée.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$ puis tracer le graphe de f.
4. Simplifier, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N$.

Exercice 4 : On considère la fonction $f \,:\, x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition noté $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Quelle propriété possède le graphe Γ_f de f ?
3. Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée aux points de dérivation.
4. En déduire l'expression de f à l'aide d'une fonction usuelle f_0.
5. Tracer le graphe de f_0 et celui de f.
6. Soit $\theta \in]0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi[$. Simplifier $f(\cos\theta)$ et retrouver le lien entre f et f_0.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{R}$ une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{R}$ est rectangulaire si :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \quad [(x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (x', y') \in \mathcal{R}] \Longrightarrow [(x, y') \in \mathcal{R} \text{ et } (x', y) \in \mathcal{R}].$$

1. Prouver que $\mathcal{R}$ est un ensemble rectangulaire si, et seulement s'il existe deux parties de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, telles que $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
2. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ un ensemble rectangulaire non vide.
   On définit sur $\mathcal{R}$ la relation $\sim$ par :
   $$\forall (x, y) \in \mathcal{R},\ \forall (x', y') \in \mathcal{R}, \quad (x, y) \sim (x', y') \iff x = x' \text{ ou } y = y'.$$
   Prouver que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est de cardinal égal à 1.
3. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ un ensemble rectangulaire non vide.
   On définit sur $\mathcal{R}$ la relation $\lesssim$ par :
   $$\forall (x, y) \in \mathcal{R},\ \forall (x', y') \in \mathcal{R}, \quad (x, y) \lesssim (x', y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$
   Montrer que la relation $\lesssim$ est une relation d'ordre. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'agisse d'une relation d'ordre totale.

Exercice 6 : Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A une partie de E telle que la restriction de f à A, $f_{|A} : A \to F$, $x \mapsto f(x)$ soit injective.
On dit que A est maximale s'il n'existe pas de partie B de E contenant strictement A telle que la restriction de f à B soit injective.
Prouver que A est maximale si, et seulement si, $f(A) = f(E)$.