Fiche Rappel n° P 1 **Électrocinétique (RP et RT)**

I - Régime Permanent

I -1. Approximation des Régimes Quasi Stationnaires

Le signal électrique se propageant dans le circuit à la vitesse c de la lumière, on peut considérer le phénomène de propagation comme instantané lorsque $\boxed{\tau_p \ll T_s}$, où $\tau_p = \dfrac{L}{c}$ est le temps caractéristique de propagation du signal sur l'ensemble du circuit (de longueur L) et T_s la période de variation temporelle du signal.

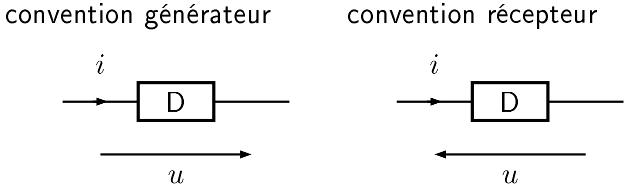
Cette condition s'exprime aussi par $\boxed{L \ll cT_s}$.

Si cette condition est remplie, tout se passe comme si on était en régime permanent (Quasi Stationnaire), même pour des signaux variables.

Ordres de grandeur : si $L = 10\ \mathrm{m}$, on a $\tau_p = 3.10^{-8}\ \mathrm{s}$, alors, même pour une fréquence $f = 1\ \mathrm{MHz}$, l'ARQS est encore valable car $T_s = \dfrac{1}{f} = 10^{-6}\ \mathrm{s} \gg \tau_p$.

I -2. Convention générateur ou récepteur

On utilise deux conventions de représentation de l'intensité i et de la tension u aux bornes d'un dipôle D :



	convention générateur	convention récepteur
Puissance reçue	$\mathscr{P}_r = -ui$	$\mathscr{P}_r = ui$
Puissance fournie	$\mathscr{P}_f = ui$	$\mathscr{P}_f = -ui$

Unités SI :

- La tension u s'exprime en volts (V) ;
- l'intensité i s'exprime en ampères (A) ;
- la puissance $\mathscr{P}$ s'exprime en watt (W) ;
- l'énergie $\mathscr{E}$ s'exprime en joule (J) ou en kWh: $1\ \mathrm{kWh} = 3,6.10^6\ \mathrm{J}$

I -3. Lois de Kirchhoff

Ces lois sont établies en régime permanent et généralisées aux cas où l'approximation des régimes quasi-stationnaires est valide.

Loi des nœuds : (résultant de la conservation de la charge):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k i_k = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{pour un courant arrivant vers N} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{pour un courant s'éloignant de N} \end{cases}}$$

Loi des mailles :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_k = +1 & \text{pour } u_k \text{ orientée dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_k = -1 & \text{pour } u_k \text{ orientée dans le sens inverse} \end{cases}}$$

☞ Exercice 1 : Loi des nœuds en termes de potentiel

I -4. Dipôles usuels - Relation courant/tension

Dipôle	Relation $i-u$	Puissance reçue	Énergie emmagasinée
Résistor	$u = Ri$; $i = Gu$	$\mathscr{P} = Ri^2 = \dfrac{u^2}{R}$	
Bobine	$u_L = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathscr{P} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$	$\mathscr{E}_{mag} = \dfrac{1}{2}Li^2$
Condensateur	$i = C\dfrac{du_C}{dt}$	$\mathscr{P} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right)$	$\mathscr{E}_{elec} = \dfrac{1}{2}Cu_C^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$

Continuité : Le courant circulant dans une bobine et la tension aux bornes d'un condensateur sont continues : $\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-)}$ et $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-)}$.

☞ Exercice 2 : Point de fonctionnement d'un circuit à diode Zener

I -5. Associations de dipôles

Deux dipôles sont dits en série lorsqu'ils sont parcourus par le même courant i. Deux dipôles sont dits en parallèle lorsqu'ils ont la même tension u à leurs bornes.

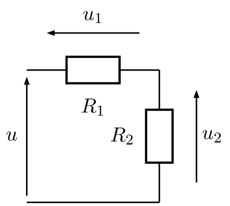
Remarque : il arrive (si, si) que deux dipôles ne soient ni en série, ni en parallèle !

Association	Résistors	Bobines	Condensateurs
Série	$R_{eq} = \sum R_i$	$L_{eq} = \sum L_i$	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$
Parallèle	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$	$\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L_i}$	$C_{eq} = \sum C_i$

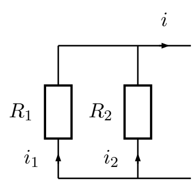
I -6. Diviseur de tension - diviseur de courant

On peut utiliser les propriétés d'association des résistances pour prélever une partie seulement d'une tension ou d'un courant :

Diviseur de tension



Diviseur de courant

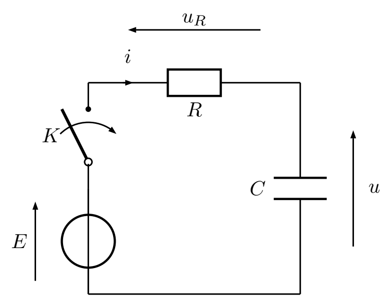


$$u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}u \qquad i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2}i \quad \left(G_1 = \frac{1}{R_1}\right)$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}u \qquad i_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2}i \quad \left(G_2 = \frac{1}{R_2}\right)$$

II - Régime transitoire du premier ordre

II -1. Circuit RC



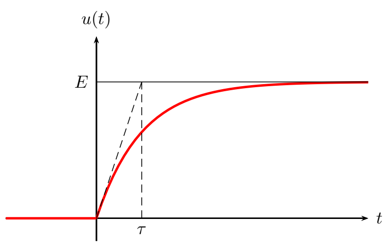
L'équation différentielle du circuit est donnée par la loi des mailles couplées aux relations courant-tension aux bornes des dipôles :

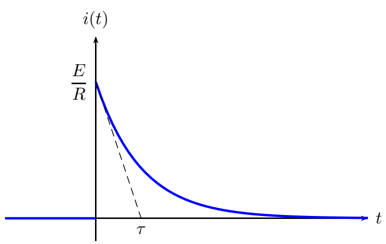
$$\boxed{RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

a) Réponse indicielle

En posant $\boxed{\tau = RC}$ et en supposant $u_C(t=0^-) = 0$ (condensateur initialement déchargé), on observe la réponse indicielle à un échelon de tension (charge du condensateur) :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$





$u_C(t)$ est continue en 0 $\qquad$ $i(t)$ est discontinue en 0

τ caractérise le temps d'établissement du régime permanent. Ce dernier est atteint à 10^{-n} près au bout de $t_n = 2,3n\tau$. On le détermine expérimentalement grâce à la tangente à l'origine ou bien grâce au temps de montée à 63%.

En multipliant la loi des mailles par le courant i, on obtient un bilan de puissance :

$$\boxed{Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) + Ri^2} \text{ soit } \boxed{\mathscr{P}_{gen} = \frac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_{elec}\right) + \mathscr{P}_{Joule}}$$

En intégrant les différents termes de ce bilan entre $t = 0$ et $t \to \infty$ (en pratique, quelques τ suffisent), on obtient un bilan énergétique :

$\mathscr{E}_{gen} = CE^2$, $\mathscr{E}_{elec} = \dfrac{1}{2}CE^2$ et $\mathscr{E}_{Joule} = \dfrac{1}{2}CE^2$ soit :

$$\boxed{\mathscr{E}_{gen} = \mathscr{E}_{elec} + \mathscr{E}_{Joule}}$$

b) Régime libre

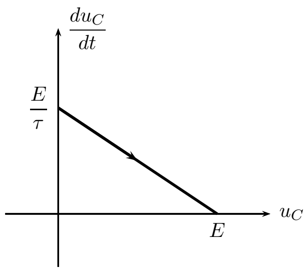
Si on ouvre l'interrupteur K, on observe le régime libre du circuit (décharge du condensateur). L'énergie initialement emmagasiné dans le condensateur est restituée et dissipée par effet Joule.

- Bilan de puissance : $0 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right) + Ri^2 = \dfrac{d}{dt}\left(\mathscr{E}_{elec}\right) + \mathscr{P}_{Joule}$

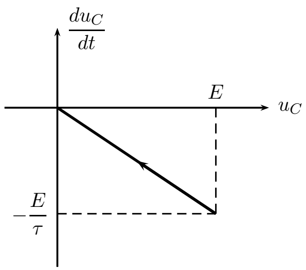
- Bilan énergétique : $0 = \mathscr{E}_{elec} + \mathscr{E}_{Joule}$

II -2. Portraits de phase du circuit RC

Réponse indicielle

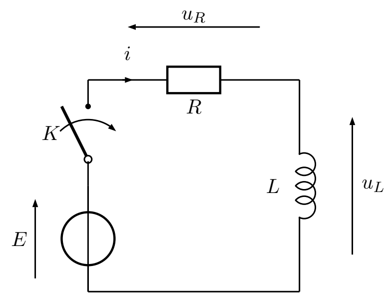


Régime libre



☞ Exercice 3 : Charge d'un condensateur

II -3. Circuit RL

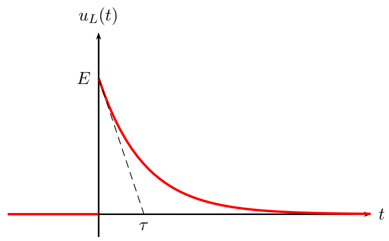


L'équation différentielle du circuit est :

$$\boxed{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}}$$

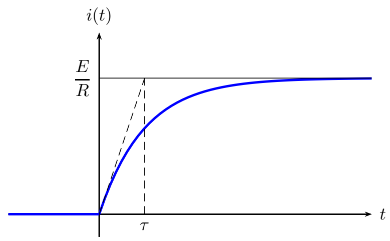
En posant $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$ et en supposant $i_L(t = 0^-) = 0$, on observe la réponse indicielle à un échelon de tension :

$$\boxed{u_L(t) = Ee^{-t/\tau}}$$



$u(t)$ est discontinue en 0

$$\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

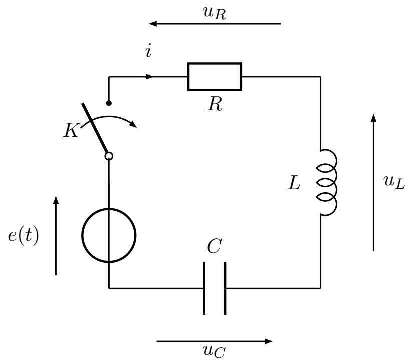


$i_L(t)$ est continue en 0

III - Régime transitoire du deuxième ordre

Ce paragraphe concerne aussi bien les circuits électriques que les systèmes mécaniques amortis.

III -1. Équation différentielle



L'équation différentielle du circuit est :

$$E = RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C$$

ou bien, sous forme canonique

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E}$$

On définit :

- la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, avec $[\omega_0] = T^{-1}$
- le facteur de qualité $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, sans dimension.

Remarque : R caractérise l'amortissement du circuit (pertes par effet Joule), plus R est grand, plus Q est faible.

La solution de l'équation différentielle s'écrit $u_C(t) = u_{CH}(t) + u_{CP}$, où $u_{CH}(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée et $u_{CP} = E$ est la solution particulière caractérisant le régime permanent établi.

III -2. Les 3 régimes transitoires de variation ($u_{CH}(t)$)

Selon les valeurs de Q, l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, associée à l'équation différentielle a différents types de racines, selon le signe du discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$.

a) Régime apériodique $\boxed{Q < 1/2\ ;\ \Delta > 0\ ;\ R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

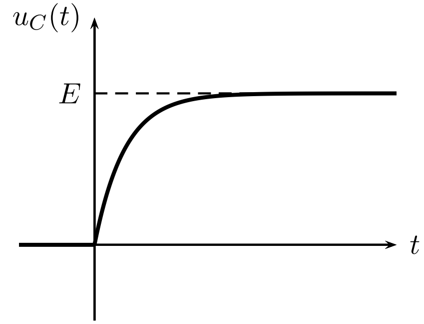
Les racines sont réelles négatives : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$

On a $u_{CH}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, soit

$$u_{CH}(t) = e^{-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}}\left[Ae^{+\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}} + Be^{-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}}\right],$$

où A et B sont à déterminer en appliquant les conditions initiales sur la solution complète $u_C(t) = u_{CH}(t) + u_{CP}$.

L'établissement du régime permanent se fait sans oscillation.



b) Régime critique $\boxed{Q = 1/2\ ;\ \Delta = 0\ ;\ R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

L'équation caractéristique présente une racine double $r_0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}$. Il s'agit du cas limite du régime apériodique. Il est inobservable en pratique.

On a $u_{CH}(t) = (A + Bt)e^{r_0 t} = (A + Bt)e^{-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}}$.

c) Régime pseudo-périodique $\boxed{Q > 1/2\ ;\ \Delta < 0\ ;\ R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

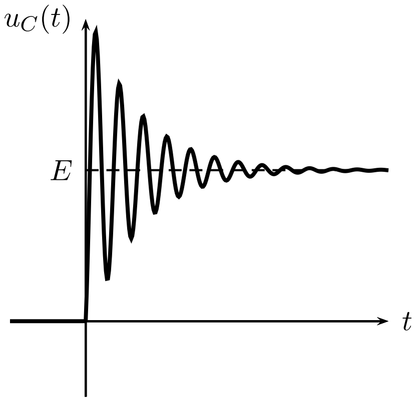
Les racines sont complexes conjuguées : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$.

On définit la pseudo-pulsation Ω par $\Omega = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$.

On a $u_{CH}(t) = e^{-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$.

On définit le décrément logarithmique, qui caractérise l'amortissement des pseudo-oscillations par

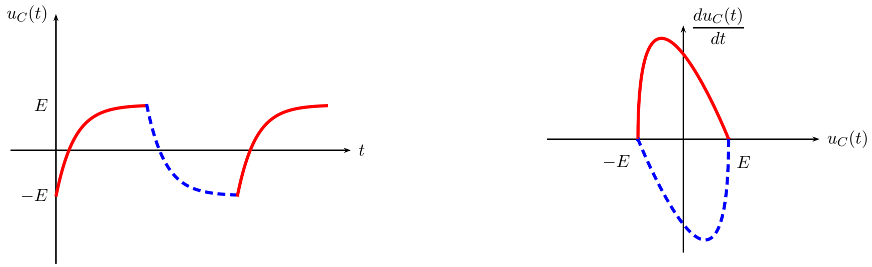
$$\delta \triangleq \frac{1}{n}\ln\frac{u(t)-u(\infty)}{u(t+nT)-u(\infty)}$$



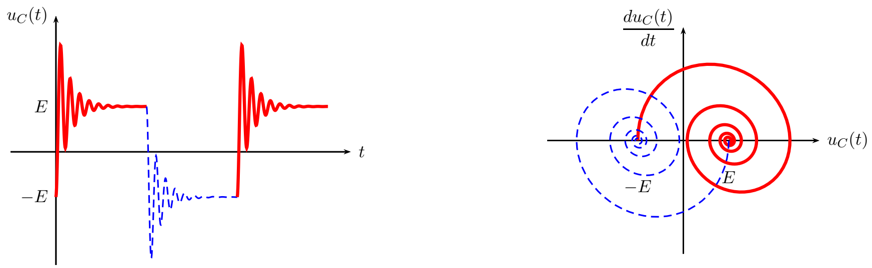
☞ Exercice 4 : Décrément logarithmique

III -3. Portrait de phase

En régime apériodique, pour une tension créneau appliquée au circuit, on obtient le portrait de phase suivant :



En régime pseudo-périodique, on obtient le portrait de phase suivant :



III -4. Bilan énergétique

En multipliant la loi des mailles par $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, on obtient un bilan de puissance :

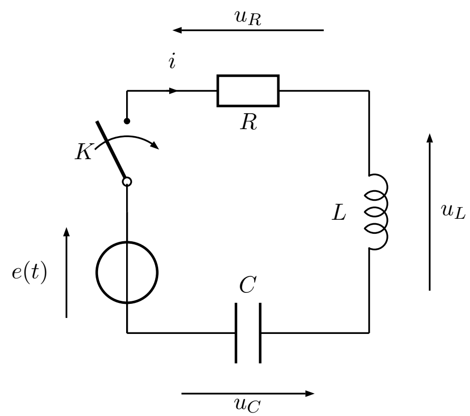
$$e = u_R + u_L + u_C$$
$$ei = Ri^2 + i\times L\frac{di}{dt} + u_C\times C\frac{du_C}{dt}$$

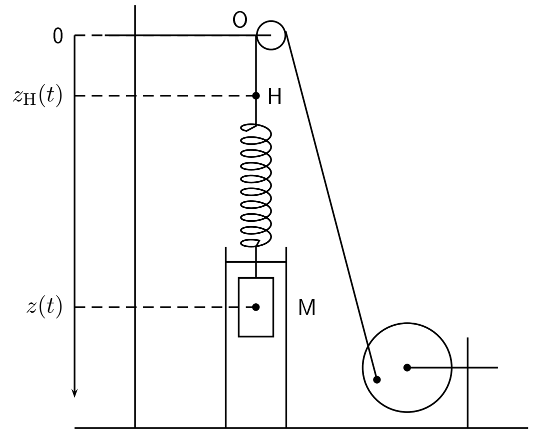
Ou encore $\boxed{\mathscr{P}_{gen} = \mathscr{P}_{joule} + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2 + \dfrac{1}{2}Cu_C^2\right)}$

La puissance fournie par le générateur est utilisée pour faire varier l'énergie stockée dans la bobine et le condensateur, le reste étant dissipé par effet Joule.

IV - Analogie électromécanique

On peut dresser un parallèle entre un système mécanique amorti et un circuit électrique du deuxième ordre. Les équations différentielles sont similaires, les solutions également.





	Électrocinétique	Mécanique
Paramètre	charge $q = Cu_C$	déplacement z
Dérivée	courant $i = \dfrac{dq}{dt}$	vitesse $v = \dfrac{dz}{dt}$
Énergie	magnétique $\mathscr{E}_{mag} = \dfrac{1}{2}Li^2$	cinétique $\mathscr{E}_{cin} = \dfrac{1}{2}mv^2$
Énergie	électrique $\mathscr{E}_{elec} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$	potentielle $\mathscr{E}_{pot} = \dfrac{1}{2}kz^2$
Amortissement	effet Joule $u = Ri$	frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$
Puissance dissipée	$\mathscr{P}_J = Ri^2$	$\mathscr{P} = -\alpha v^2$
Éq différentielle	$\ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{1}{L}e(t)$	$\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}(z - z_e) = \dfrac{k}{m}z_H$
Pulsation propre	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
Facteur de qualité	$Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$	$Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}$

Correspondance des grandeurs :

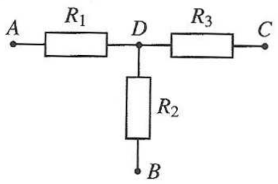
Électrocinétique	q	i	L	$\dfrac{1}{C}$	R
Mécanique	z	v	m	k	α

☞ Exercice 5 : Oscillateur à deux ressorts

Exercices

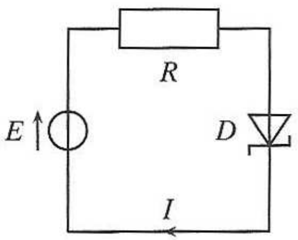
1 - Loi des nœuds en terme de potentiel

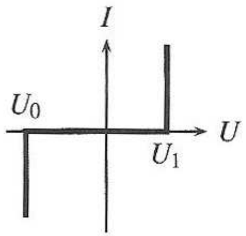
En partant de la loi des nœuds et de la loi d'Ohm, exprimer le potentiel V_D du noeud D en fonction des potentiels V_A, V_B, V_C des nœuds respectifs A, B et C.



2 - Point de fonctionnement d'un circuit à diode Zener

Un générateur idéal de tension de f.é.m. $E > 0$ et branché en série avec une résistance R et une diode Zener D dont la caractéristique courant tension $I(U)$ est donnée dans la figure ci-dessous (à droite).



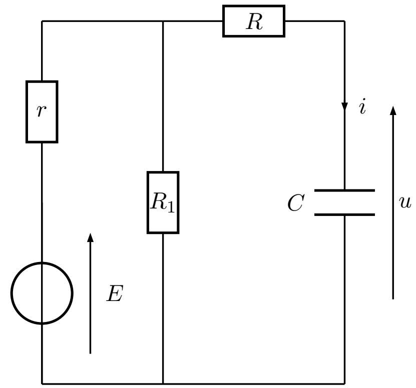


1. Déterminer le point de fonctionnement du montage, c'est-à-dire l'intensité du courant et la tension aux bornes de la diode.

2. Même question si on retourne la diode.

3 - Charge d'un condensateur

On considère le circuit ci-contre. À $t = 0$, on met le circuit sous tension par l'intermédiaire du générateur antérieurement éteint, le condensateur C étant déchargé.



1. Déterminer $i(0^+)$ et $i(\infty)$ par des considérations simples.

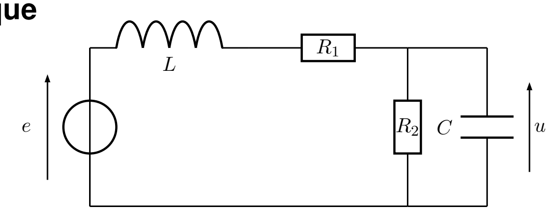
2. Déterminer $i(t)$.

3. Calculer la constante de temps τ pour $C = 10\ \mu\mathrm{F}$, $R_1 = 6\ \mathrm{k}\Omega$, $r = 100\ \Omega$ et $R = 4\ \mathrm{k}\Omega$.

   La comparer à la valeur qu'elle aurait si R_1 était infinie et r nulle.

4 - Décrément logarithmique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ dans le circuit ci-contre.



1. Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque la valeur de $e(t)$ est E, en dessinant un schéma équivalent en régime permanent.

2. Démontrer que

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u(\infty).$$

   On exprimera λ et ω_0 en fonction de L, R_1, R_2 et C.

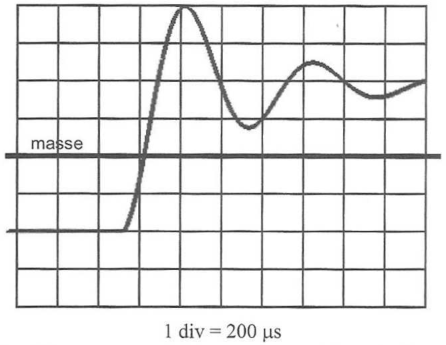
3. Définir et tracer un échelon de tension. Expliquer comment on le réalise expérimentalement.

4. On observe sur un oscilloscope la courbe $u(t)$ suivante.

(a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.

(b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique défini par

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t + nT) - u(\infty)} \right).$$



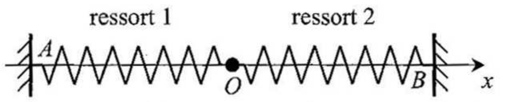
5. Exprimer la forme mathématique de $u(t)$ en fonction de λ, ω_0, $u(\infty)$ et t. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.

6. Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ. Relier λ au facteur de qualité Q.

7. Sachant que $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 5\ k\Omega$, $L = 100\ mH$, déterminer la valeur numérique de C.

5 - Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq}, et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe (Ox). On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale de la position $x_0 \neq 0$.

1. Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

(a) Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.

(b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.

(c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

2. En fait, il existe des frottements entre le mobile et la tige. On modélise ce frottement visqueux linéaire par une force $\vec{F} = -\mu\vec{v}$, où μ est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse du mobile.

(a) Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est la solution. On posera $h = \frac{\mu}{m}$.

(b) Montrer que lorsque $\mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement est oscillatoire amorti. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales, et exprimer la pseudo-période en fonction de ω_0 et h.

3. Tracer l'allure des deux trajectoires de phase suivies par cet oscillateur, dans le plan de phase défini par $(x, \dot{x})$, en l'absence de frottement, puis en présence de frottement.

Éléments de réponse

1. $V_D = \dfrac{\dfrac{V_A}{R_1} + \dfrac{V_B}{R_2} + \dfrac{V_C}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$.

2. $\left(U = U_1, I = \dfrac{E - U_1}{R}\right)$ si $E > U_1$ et $(U = E, I = I_0)$ si $E < U_1$.

3. $i(t) = \dfrac{ER_1}{r(R+R_1) + RR_1} e^{-\frac{t}{\tau}}$; $\tau = 41 \text{ ms}$

4. (1) $u(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$.

(2) $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \left(\dfrac{1}{R_2 C} + \dfrac{R_1}{L}\right) \dfrac{du}{dt} + \dfrac{R_1 + R_2}{R_2 LC} u = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} e\right)$.

(3) $T = 620\ \mu s$; $\delta = 1,4 = \lambda T$; $\lambda = 2,2.10^3\ s^{-1}$;

$C = \dfrac{1}{R_2(2\lambda - \frac{R_1}{L})} = 100\ nF$.

5. (1) $\ddot{x} + \dfrac{2k}{m} x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$; $T_0 = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{2k}}$; $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$.

(2) $\ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; régime pseudo-périodique si $h < 2\omega_0$;

$x(t) = x_0 \exp\left(-\dfrac{ht}{2}\right) \left[\cos \Omega t + \dfrac{h}{2\Omega} \sin \Omega t\right]$.