Devoir à rendre le 8/02/2021

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $(G,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ alors

- soit G est dense (i.e. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exists z\in G : x<z<y$)
- soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a>0$.

Soit $(G,+)$ un sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à 0. On considère

$$G^+ = G\cap \mathbb{R}^{+*}$$

1. Montrer que G^+ admet une borne inférieure appartenant à $\mathbb{R}^+$ notée a.
2. Montrer que si $a>0$ alors $a\in G$ puis que $G=a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $a=0$ alors G est dense.
4. Application : soient a et b deux réels non nuls.
   (a) Montrer que $G_{a,b}=\{an+bm,\ (n,m)\in\mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$
   (b) Prouver que si $G_{a,b}$ n'est pas dense alors a/b est rationnel.
   (c) Conclure.

Exercice 2 : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

I Calcul de l'intégrale $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$:

On considère pour cela la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. Calculez $f(0)$.
2. Soit $x\geq 0$. Montrer que $\dfrac{\pi}{4}e^{-2x}\leq f(x)\leq \dfrac{\pi}{4}e^{-x}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
5. Soit $u\in\mathbb{R}$. Montrer que $0\leq e^u-1-u\leq \dfrac{1}{2}e^{|u|}u^2$.
6. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in[-1,1]$. En déduire que
$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right|\leq \frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}$$
7. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f' sous forme d'intégrale.
8. Prouver que la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x^2)+\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
9. En déduire l'existence et la valeur de I.
10. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

II Étude de la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$:

1. Montrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera G sa réciproque.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$.
5. Soit $y\in]0,1[$. Exprimer $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$.
6. Tracer le graphe de F et G.
7. Soit $x<0$. Montrer que $\forall u\in]-\infty,x]$, on a $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)h'(u)\leq e^{-u^2/2}\leq h'(u)$ où $h:\mathbb{R}^{-*}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -\dfrac{1}{x}e^{-x^2/2}$.
8. En déduire que, pour tout $x<0$, on a
$$-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\leq F(x)\leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$$
9. En déduire un équivalent de F en $-\infty$ puis de $1-F$ en $+\infty$.
10. Trouver un équivalent de $\ln F$ en $-\infty$.
11. Donnez un équivalent de G en 0 et en 1.