La série harmonique et la constante d'EULER

Pour n naturel non nul , on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) H_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geqslant 1$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et admet ainsi une limite dans $]-\infty, +\infty]$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}$. Ceci est absurde et on en déduit que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty,$$

ou encore, la série harmonique diverge.

2) Equivalent de H_n quand n tend vers $+\infty$

Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que

$$\text{pour } k \geqslant 1,\ \frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \text{ et pour } k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n+1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,dt = 1 + \ln n.$$

Ces inégalités restent vraies pour $n = 1$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

et en particulier

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

d'après le théorème des gendarmes car $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ avec $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$ et $1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

3) Convergence de la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = H_n - \ln n$.

1ère étude. Soit $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$. Par suite, pour $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est donc décroissante.

De plus , d'après 2), pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant H_n - \ln n = u_n \leqslant (1+\ln n) - \ln n = 1,$$

et donc, pour $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1]$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et donc converge vers un certain réel positif noté γ. Enfin, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite, on a $\gamma \in [0,1]$.

la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel de $[0,1]$ noté γ. γ s'appelle la constante d'Euler.

2ème étude. Pour $n \geqslant 1$, on pose aussi $v_n = H_n - \ln(n+1)$. On a

- pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = -(\ln(n+1) - \ln n) = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt \geqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

On en déduit que les suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune à savoir γ, la constante d'Euler. En particulier, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroit vers γ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croit vers γ, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \leqslant \gamma \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

3ème étude. Quand n tend vers $+\infty$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Maintenant, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$. On retrouve ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Comme $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right)$. En résumé

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right).$$

4) Valeurs approchées de γ.

On a vu précédemment que pour $n \geqslant 1$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ avec $u_n - v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par suite,

$$0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \frac{10^{-3}}{2} \Leftarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{10^{-3}}{2} \Leftarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,0005} - 1} \Leftarrow n \geqslant 1999,5\ldots \Leftarrow n \geqslant 2000.$$

Ainsi, la valeur exacte de v_{2000} est une valeur approchée de γ à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ près. Mais alors une valeur approchée α de v_{2000} à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ près de v_{2000} est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près car

$$|\gamma - \alpha| \leqslant |\gamma - v_{2000}| + |v_{2000} - \alpha| \leqslant \frac{10^{-3}}{2} + \frac{10^{-3}}{2} = 10^{-3}.$$

On calcule donc à la machine v_{2000} arrondi à la troisième décimale la plus proche et on obtient

$$\gamma = 0,577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

5) Equivalent de $H_n - \ln n - \gamma$.

Pour $n \geqslant 2$, d'après le calcul fait à la fin de 3),

$$H_n - \ln n - \gamma = \left(1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)\right) - \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Quand k tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} &= -\ln\frac{k-1}{k} - \frac{1}{k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, on a alors

$$H_n - \ln n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc, $H_n - \ln n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ ou encore

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

