Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

1. Polynôme caractéristique

On considère l'équation différentielle d'ordre n :

$$(E) \ : \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \iff y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$$

dans laquelle y est la fonction inconnue, et les a_k des nombres complexes fixés.

Les solutions de (E) sur un intervalle I sont *a priori* des fonctions de classe C^n sur I ; cela dit, si f est solution sur I et de classe C^{n+k}, où $k \geqslant 0$, alors les fonctions f, f', ..., $f^{(n-1)}$ sont respectivement de classe C^{n+k}, C^{n+k-1},..., C^{k+1}, donc sont toutes de classe C^{k+1} sur I. Puisque $f^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)}$ la fonction $f^{(n)}$ est aussi de classe C^{k+1}, et donc f est de classe C^{n+k+1}. Par récurrence, f est donc de classe C^∞.

Pour chercher les solutions sur I, on peut donc travailler dans l'espace $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ des fonctions de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$. L'intérêt est que l'application de dérivation $D : f \longmapsto f'$ est alors un endomorphisme de E.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, on a alors $D^k(f) = f^{(k)}$. L'équation (E) peut donc se réécrire

$$D^n(y) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k(y) = \big[D^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\big](y) = 0$$

L'ensemble des solutions est donc $\operatorname{Ker} P(D)$ où P est le polynôme $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. C'est ce polynôme qu'on appellera polynôme caractéristique de l'équation (E).

2. Décomposition de l'espace des solutions

Notons S l'ensemble des solutions sur I de l'équation (E). Puisque $S = \operatorname{Ker} P(D)$, S est déjà un sous-espace vectoriel de E.

D'autre part, décomposons P en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{r_k}$ où les λ_k sont les racines complexes de P, deux à deux distinctes, et, pour tout k, r_k est la multiplicité de λ_k dans P.

Les λ_k étant supposés deux à deux distincts, les $(X - \lambda_k)^{r_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le lemme des noyaux, qui donne

$$S = \bigoplus_{k=1}^{q} \operatorname{Ker}[(X - \lambda_k)^{r_k}](D) = \bigoplus_{k=1}^{q} \operatorname{Ker}(D - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{r_k}$$

3. Étude de $\mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$

3.1. Le cas $\lambda = 0$

Le noyau cherché est dans ce cas le noyau de D^r, c'est à dire l'ensemble des fonctions f vérifiant $f^{(r)} = 0$. Il s'agit évidemment des fonctions polynômes de degré au plus $r - 1$.

Cet espace est isomorphe à $\mathbb{C}_{r-1}[X]$; il est donc de dimension r, et admet pour base la famille des fonctions $t \longmapsto t^k$ où $k \in [\![0, r-1]\!]$.

3.2. Le cas général

Notons g la fonction $t \longmapsto e^{-\lambda t}$ qui appartient évidemment à E. Notons Φ l'application de E dans E qui, à une fonction f de E, associe la fonction $fg : t \longmapsto f(t)e^{-\lambda t}$.

L'application Φ est clairement linéaire ; elle est d'autre part bijective, sa réciproque étant l'application qui, à $f \in E$, associe la fonction $f/g : t \longmapsto f(t)e^{\lambda t}$.

On a $g' = -\lambda g$. Si $f \in E$, on peut donc décomposer le calcul de $[D - \lambda \mathrm{Id}_E](f) = f' - \lambda f$ sous la forme suivante :

- on multiplie d'abord f par g : on obtient $\Phi(f) : t \longmapsto e^{-\lambda t} f(t)$;
- on dérive la fonction obtenue : on obtient $D(\Phi(f)) : t \longmapsto e^{-\lambda t}\big(f'(t) - \lambda f(t)\big)$;
- on divise enfin par g : on obtient $\Phi^{-1}(D(\Phi(f))) : t \longmapsto f'(t) - \lambda f(t)$.

Ceci étant vrai pour tout $f \in E$, on a donc $D - \lambda \mathrm{Id}_E = \Phi^{-1} \circ D \circ \Phi$.

Une récurrence immédiate fournit alors $(D - \lambda \mathrm{Id}_E)^k = \Phi^{-1} \circ D^k \circ \Phi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; donc, pour toute fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{Id}_E)^r &\iff \Phi^{-1}\big(D^r\big(\Phi(f)\big)\big) = 0 \\ &\iff D^r\big(\Phi(f)\big) = 0 \end{aligned}$$

puisque Φ^{-1} est un isomorphisme. La relation $D^r\big(\Phi(f)\big) = 0$ équivaut à dire que $\Phi(f)$ est une fonction polynôme de degré au plus $r - 1$; les éléments de $\mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$ sont donc les fonctions de la forme $t \longmapsto Q(t)e^{\lambda t}$ où Q est un polynôme de degré au plus $r - 1$.

Encore une fois, cet espace est clairement isomorphe à $\mathbb{C}_{r-1}[X]$; il est donc de dimension r, et les fonctions de la forme $t \longmapsto t^k e^{\lambda t}$ où $r \in [\![0, r-1]\!]$, en forment une base.

4. Bilan

Puisque $S = \bigoplus_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(D - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{r_k}$, ce qui précède montre que :

- S est de dimension finie, et $\dim S = \sum_{k=1}^{q} r_k = n$ où n est le degré de P, qui est aussi l'ordre de l'équation (E) ;
- on obtient une base de S en concaténant les bases des $\mathrm{Ker}(D - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{r_k}$ trouvées précédemment. Autrement dit, les fonctions solutions sont les combinaisons linéaires des fonctions $t \longmapsto t^i e^{\lambda_k t}$ où λ_k est une racine du polynôme caractéristique, et i est un entier naturel strictement inférieur à l'ordre r_k de la racine λ_k.

5. Exemples

5.1. $y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0$

L'équation est d'ordre 3, on sait donc que l'espace des solutions sera de dimension 3. Polynôme caractéristique : $X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X-2)(X-i)(X+i)$; on a trois racines simples, une base de l'espace des solutions est donc formée par les trois fonctions $t \longmapsto e^{2t}$, $t \longmapsto e^{it}$ et $t \longmapsto e^{-it}$. Autrement dit, les solutions (à valeurs complexes) sont les fonctions de la forme $t \longmapsto ae^{2t} + be^{it} + ce^{-it}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

Ici, l'équation est à coefficients réels ; il est donc naturel de s'intéresser aux solutions à valeurs réelles de l'équation. On montre qu'on obtient toutes ces solutions en prenant :

- des coefficient réels pour les termes correspondant aux racines réelles du polynôme : ici, on prendra donc $a \in \mathbb{R}$;
- des coefficients deux à deux conjugués pour les termes correspondant à des racines non réelles cojuguées l'une de l'autre : ici, on prendra donc $c = \overline{b}$.

On obtient alors comme solutions réelles les fonctions de la forme $t \longmapsto ae^{2t} + \beta \cos t + \gamma \sin t$ où $(a,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

De même, si les trois racines du polynôme caractéristique avaient été par exemple 2, $3+4i$ et $3-4i$, les solutions à valeurs réelles auraient été les fonctions de la forme $t \longmapsto ae^{2t} + \beta e^{3t}\cos(4t) + \gamma e^{3t}\sin(4t)$ où $(a,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

5.2. $y^{(3)} - 15y'' + 75y' - 125y = 0$

Polynôme caractéristique : $X^3 - 15X^2 + 75X - 125 = (X-5)^3$. On a une racine triple 5, une base de l'espace des solutions est donc constituée des 3 fonctions $t \longmapsto e^{5t}$, $t \longmapsto te^{5t}$ et $t \longmapsto t^2e^{5t}$. Autrement dit, les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $t \longmapsto (at^2 + bt + c)e^{5t}$ où l'on prendra ici $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour avoir toutes les solutions à valeurs complexes, et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour n'avoir que les solutions à valeurs réelles.

5.3. $y^{(3)} - 7y'' + 15y' - 9y = 0$

Polynôme caractéristique : $X^3 - 7X^2 + 15X - 9 = (X-1)(X-3)^2$. On a une racine simple, 1, et une racine double, 3 ; une base de l'espace des solutions est donc constituée des 3 fonctions $t \longmapsto e^t$, $t \longmapsto e^{3t}$ et $t \longmapsto te^{3t}$. Autrement dit, les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $t \longmapsto ae^t + (bt+c)e^{3t}$ où l'on prendra ici $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour avoir toutes les solutions à valeurs complexes, et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour n'avoir que les solutions à valeurs réelles.