TD 11 : Dynamique du point

1 Bond sur la Lune

Dans l'album de Tintin, « On a marché sur la Lune », le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur Terre : c'est le sujet de cet exercice. On assimile le mouvement du Capitaine Haddock à celui de son centre de gravité M de masse m. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_l l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune. En l'absence d'atmosphère, on peut considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

1.a. Définir le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

1.b. Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.

1.c. Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.

1.d. En utilisant les questions précédentes, établir les équations du mouvement.

2. Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de v_0, α et g_l.

3. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur la Terre. Quelle sera la distance horizontale parcourue par le sauteur sur la Lune, si elle est de $d = 1{,}50\,\text{m}$ sur la Terre ?

2 Oscillations d'une masse suspendue à un ressort

On s'intéresse au mouvement d'un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l'objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l'étudier.

On idéalise le comportement du ressort en l'assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l'objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.

1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \ ,$$

où ω_0 et x_{eq} sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.

2. Que représente la position M_{eq} d'abscisse $x = x_{eq}$?

3. Pour résoudre l'équation du mouvement, on déplace l'origine du repère en M_{eq}.

3.a. Montrer que cela revient à faire le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$.

3.b. En déduire que l'on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.

3.c. Résoudre en tenant compte des conditions initiales.

3.d. Représenter l'évolution temporelle de l'abscisse x.

3.e. Tracer le portrait de phase correspondant à la situation, en précisant le point de départ de la trajectoire.

3 Partie immergée de l'iceberg

On considère un iceberg de volume total V, avec V_I son volume immergé, $\rho_g = 0{,}92 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ la masse volumique de la glace et $\rho_l = 1{,}02 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ celle de l'eau salée.

1. Établir les expressions de la poussée d'Archimède et de la force de pesanteur qui s'applique sur l'iceberg.

2. Déterminer la proportion volumique de glace immergée. Conclure.

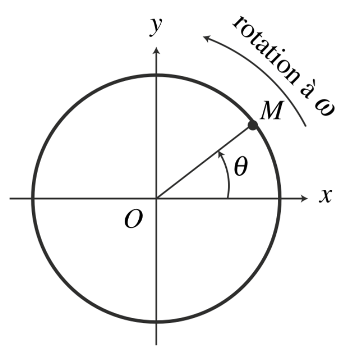
4 Chaussette séchant dans un sèche-linge

Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases :

— dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme ;

— dans une deuxième phase, elle retombe en chute libre.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.



On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25\,\mathrm{cm}$ tournant à $50\,\mathrm{tour} \cdot \mathrm{min}^{-1}$. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse m. On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé aux parois du tambour. Pour les applications numériques, on considère $g = 9{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1. Déterminer l'accélération de la chaussette.

2. En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.

3. Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.

4. Que se passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ?

5 Quelques tirs de basket-ball

On étudie les tirs de basket-ball de manière simplifiée. On suppose que le joueur est face au panneau à une distance D de ce dernier. Le cercle du panier est situé à une hauteur $H = 3{,}05\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol et on assimilera dans un premier temps le cercle à un point situé sur le panneau. De même, le ballon sera considéré comme ponctuel. On néglige les frottements fluides de l'air. Le joueur tire d'une hauteur $h = 2{,}00\,\mathrm{m}$ au-dessus du sol en imposant une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

1. Établir l'équation du mouvement du ballon lors du tir.

2. En déduire les équations horaires de ce mouvement.

3. Déterminer l'équation de la trajectoire du ballon.

4. On suppose que le module de la vitesse initiale est fixé. Donner l'équation à vérifier par l'angle α pour que le panier soit marqué. On la mettra sous la forme d'une équation du second degré en $\tan\alpha$.

5. Montrer que cette équation n'admet des solutions que si le module v_0 de la vitesse initiale vérifie une inéquation du second degré en v_0^2.

6. En déduire l'existence d'une valeur minimale de v_0 pour que le panier soit marqué.

7. Faire l'application numérique pour un lancer franc (la distance D vaut alors $4{,}60\,\mathrm{m}$) puis pour un panier à trois points (la distance D vaut alors $6{,}25\,\mathrm{m}$ selon les règles de la Fédération Internationale de Basket-Ball).

8. Si la condition précédente est vérifiée, donner l'expression de $\tan\alpha$ et en déduire qu'il existe deux angles possibles pour marquer le panier.

9. Donner les valeurs numériques des angles α permettant de marquer un lancer franc en supposant que $v_0 = 10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

10. Dans la suite, on suppose que l'angle de tir est fixé. Déterminer l'expression de la vitesse initiale v_0 à imposer pour marquer le panier.

11. Faire l'application numérique pour un lancer franc et un angle de tir $\alpha = 70°$.

12. On s'intéresse maintenant à l'influence de la dimension du ballon et du cercle du panier. Le rayon du ballon est de $17{,}8\,\mathrm{cm}$ et le diamètre du cercle mesure $45{,}0\,\mathrm{cm}$. On note x la distance du centre du ballon au panneau à hauteur du cercle du panier. Donner l'intervalle des valeurs de x permettant de marquer le panier.

13. Quelle équation doit vérifier x ? On pourra la laisser sous la forme d'une équation du second degré en $(D + x)$.

14. En déduire la condition que doivent vérifier v_0, α, g, H et h pour que cette équation ait des solutions.

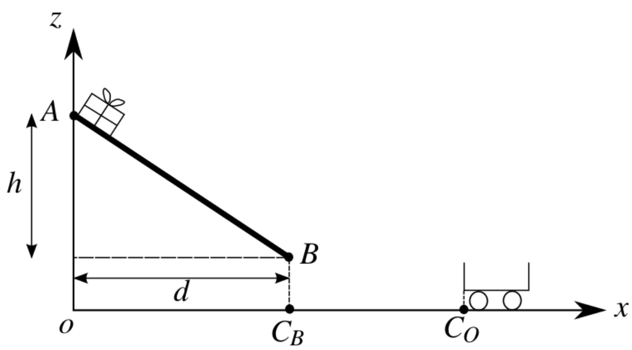
15. En déduire les valeurs d'angle de tir possibles en supposant la vitesse initiale v_0 fixée. On fera l'application numérique pour $v_0 = 10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

16. Établir l'existence d'une valeur minimale de v_0 à angle de tir fixé. On fera l'application numérique pour $\alpha = 70°$.

17. Cette condition étant vérifiée, donner l'expression de x.

6 Toboggan

Une personne participant à un jeu télévisé doit laisser glisser un paquet sur un toboggan, à partir du point A de manière à ce qu'il soit réceptionné, au point B par un chariot se déplaçant le long de l'axe (Ox). On néglige les frottements de l'air. Le toboggan exerce sur le paquet non seulement une réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ mais aussi une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_t}$ (frottement solide) telle que $\|\overrightarrow{R_t}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\|$ avec $f = 0{,}5$.



Le chariot part du point C_O à l'instant $t = 0$, vers la gauche avec une vitesse $v_c = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Arrivé en C_B, il s'arrête pendant un intervalle de temps $\delta t = 1\,\mathrm{s}$. La hauteur du toboggan est $h = 4\,\mathrm{m}$, la distance d est égale à h et $C_OC_B = 2\,\mathrm{m}$. La masse du paquet est $m = 10\,\mathrm{kg}$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. On pose $X = AP$ où P est la position du paquet à l'instant t. Déterminer $X(t)$. En déduire le temps mis par le paquet pour arriver en B.

2. À quel instant le joueur doit-il lâcher le paquet, sans vitesse initiale, pour qu'il tombe dans le chariot ?

7 Jeux aquatiques

Un baigneur (masse $m = 80\,\mathrm{kg}$) saute d'un plongeoir situé à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$ au-dessus de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur (on prendra $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) durant la chute. On note (Oz), l'axe vertical descendant, O étant le point de saut.

1. Déterminer la vitesse v_e d'entrée dans l'eau ainsi que le temps de chute t_c. Application numérique.

2. Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. Il subit en plus de la pesanteur :
— une force de frottement $\vec{f}_f = -k\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse et $k = 250\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) ;
— la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{m}{d_h}\vec{g}$ ($d_h = 0{,}9$ la densité du corps humain).

2.a. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse en projection sur (Oz), notée v_z. On posera $\tau = m/k$.

2.b. Intégrer cette équation en prenant comme nouvelle origine des temps $t = t_c$.

2.c. Déterminer la vitesse limite v_L (prise positive) en fonction de m, k, g et d_h. Application numérique.

2.d. Exprimer la vitesse v_z en fonction de v_e, $|v_L|$ et t. Déterminer à quel instant t_1 le baigneur commence à remonter.

2.e. En prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine de l'axe (Oz), exprimer $z(t)$. En déduire la profondeur maximale pouvant être atteinte.

2.f. En fait, il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de $1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour qu'il puisse se repousser avec ses pieds sans risque : à quel instant t_2 atteint-il cette vitesse et quelle est la profondeur minimale du bassin ?

3. Le même baigneur décide maintenant d'effectuer un plongeon. On suppose qu'il entre dans l'eau avec un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et une vitesse $v_0 = 8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Les forces qui s'exercent sur lui sont les mêmes que précédemment mais le coefficient k est divisé par deux en raison d'une meilleure pénétration dans l'eau.

On repère le mouvement par les axes (Ox) (axe horizontal de même sens que $\vec{v}_0$) et (Oz) (vertical descendant comme précédemment) ; le point O est le point de pénétration dans l'eau.

3.a. Déterminer les projections des équations du mouvement sur Ox et Oz.

3.b. En déduire les composantes de la vitesse dans l'eau en fonction du temps. Existe-t-il une vitesse limite ?

3.c. Le plongeur peut-il atteindre le fond de la piscine situé à $4\,\mathrm{m}$?

8 Atterrissage en catastrophe d'un avion

Un avion de chasse de masse $m = 9\,\mathrm{t}$ en panne de freins atterrit à une vitesse $v_a = 241\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre $D = 3\,\mathrm{m}$ déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol. On néglige les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute qui s'écrit $T = C_x\rho S v^2/2$ avec v la vitesse de l'avion, S la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse, C_x le coefficient de traînée supposé constant et égal à 1,5, $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3$ la masse volumique de l'air.

1. On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.

1.a. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse v de l'avion.

1.b. En déduire l'expression de v en fonction de la date t. On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.

1.c. Montrer que la force de trainée n'est pas suffisante pour stopper complètement l'avion.

2. Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de $d = 1400\,\mathrm{m}$. Déterminer la vitesse atteinte par l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance. Faites l'application numérique.