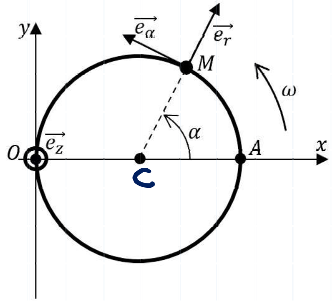
Oscillations en référentiel tournant

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon R, est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre $\mathfrak{R}_T$ supposé galiléen.
A partir de $t = 0$, on fait tourner cet anneau dans $\mathfrak{R}_T$, à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. A $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$) et sa vitesse dans $\mathfrak{R}_T$ est encore nulle.
On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre.



1) Le référentiel $\mathfrak{R}$ lié à l'anneau est-il galiléen ? Faire le bilan des forces s'appliquant sur M et donner leurs composantes dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha}, \vec{e_z})$.
2) A l'aide d'un principe fondamental de la dynamique, obtenir l'équation différentielle vérifiée par α.
3) Déterminer les positions d'équilibre de M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que leur stabilité.
4) On suppose maintenant qu'on est dans le cadre des petites oscillations. Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
5) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin\alpha$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.
6) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans $\mathfrak{R}$ en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}$ et des paramètres du système.
7) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle du mouvement.

1) $\mathcal{R}$ est en rotation dans $\mathcal{R}_T$, il n'est donc pas galiléen.
Référentiel : $\mathcal{R}$ non galiléen
Système : $\{M\}$
Bilan des forces : * le poids $\boxed{\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}}$
* la réaction normale $\boxed{\vec{R} = R_r\vec{e_r} + R_z\vec{e_z}}$
* la force d'inertie d'entraînement :
$\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$
$= m\omega^2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM})$
$$\boxed{\vec{f_{ie}} = m\omega^2 r(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{e_\alpha} + \vec{e_r})}$$
* la force d'inertie de Coriolis $\vec{f_{ic}} = -m\vec{a_c}$
$\vec{f_{ic}} = -2m\omega\vec{e_z} \wedge r\dot{\alpha}\,\vec{e_\alpha}$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{f_{ic}} = 2m\omega r\dot{\alpha}\,\vec{e_r}}$$

2) Principe fondamental de la dynamique : $\vec{a} = -r\dot{\alpha}^2\vec{e_r} + r\ddot{\alpha}\vec{e_\alpha}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}} \qquad \begin{cases} R_r + m\omega^2 r(\cos\alpha + 1) + 2m\omega r\dot{\alpha} = -mr\dot{\alpha}^2 \\ -m\omega^2 r\sin\alpha = mr\ddot{\alpha} \\ -mg + R_z = 0 \end{cases}$$

Equation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2\sin\alpha = 0}$

3) Positions d'équilibre : $\ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = \pi}$$

Etude de la stabilité :

* $\alpha_1 = 0$ On écarte légèrement de cette position $\alpha = \varepsilon \ll 1$
$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0$ oscillateur harmonique
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{équilibre stable}}$

* $\alpha_2 = \pi$ $\alpha = \pi + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \pi$ $\sin(\pi + \varepsilon) \sim -\sin\varepsilon$
$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \omega^2\varepsilon = 0$, solution divergente
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{équilibre instable}}$

4) Petites oscillations $\sin\alpha \sim \alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$

$\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ CI $\alpha(0) = 0 = A$

$\vec{v}(M/\mathcal{R}_T, t=0) = \vec{0} = \vec{v_e}(M,0) + \vec{v}(M/\mathcal{R},0) = 2r\omega\,\vec{e_y} + \vec{v}(M/\mathcal{R},0)$

$\dot{\alpha}(t) = B\omega\cos(\omega t)$ $\vec{v}(M/\mathcal{R},0) = r\dot{\alpha}(0)\vec{e_\alpha}_{\alpha=0} = B r\omega\,\vec{e_y}$
$\Rightarrow B = -2$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha(t) = -2\sin(\omega t)}$$

5) $\alpha \in [-2\text{ rad} ; 2\text{ rad}]$ On n'est donc pas dans le cadre des petites oscillations. $\Rightarrow |\sin\alpha| < |\alpha|$ lorsque α augmente $\Rightarrow |\ddot{\alpha}| = \omega^2|\sin\alpha| < \omega^2|\alpha|$
$\Rightarrow$ l'accélération est plus faible que dans l'approximation linéaire $\Rightarrow$ l'amplitude des oscillations est plus faible que celle calculée précédemment.

6) * <u>Energie potentielle de pesanteur</u> $E_{pp} = cte = 0$

* <u>Energie potentielle d'inertie d'entraînement :</u>

$$\delta W(\vec{f}_{ie}) = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2 \vec{OM} \cdot d\vec{OM} = -d\left(-\frac{1}{2} m\omega^2 OM^2\right)$$

$$E_{pie} = -\frac{1}{2} m\omega^2 OM^2 + cte = -\frac{1}{2} m\omega^2 \left(OC^2 + CM^2 + 2\vec{OC}\cdot\vec{OM}\right) + cte$$

$$= -\frac{1}{2} m\omega^2 \left(r^2 + r^2 + 2r^2 \cos\alpha\right) + cte$$

Choix $E_{pie}(\pi) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\boxed{E_{pie} = -m\omega^2 r^2 (1 + \cos\alpha)}$$

* <u>Energie cinétique :</u> $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\alpha}^2}$

7) <u>Théorème de l'énergie mécanique :</u>

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}^{nc}) = 0$$

$$\Rightarrow -\cancel{m}\omega^2 \cancel{r^2}(-\sin\alpha)\cancel{\dot{\alpha}} + \cancel{m}\cancel{r^2}\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} = 0$$

Equation du mouvement : $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0}$