Continuité des formes linéaires

1 : $d(x,A)=0 \iff \inf\{\|x-a\|, a\in A\}=0$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A,\ \|x-a\|<\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0\quad B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

$\iff x\in\overline{A}$

2 : $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par f continue

3 :

a) $d(x_0,H)\neq 0$ par **1**.

b) $\|xf(x_0)\| = \|\vec{x}f(x_0)-\vec{0}\| \geq d(\vec{x}f(x_0),H)$ car $0\in H$.

Comme $f[xf(x_0)-x_0f(x)] = f(x_0)f(x)-f(x_0)f(x)=0$

on a $xf(x_0)-x_0f(x)=h\in H$.

Ainsi $\forall h'\in H \quad \|xf(x_0)-h'\| = \|x_0f(x)+\underbrace{(h'-h)}_{\in H}\| \geq d(x_0f(x),H)$

et $\forall h''\in H \quad \|x_0f(x)-h''\| = \|xf(x_0)-(h''-h)\| \geq d(xf(x_0),H)$

En passant à la borne inférieure dans ces deux inégalités il vient

$$d(x_0f(x),H) = d(xf(x_0),H)$$

Enfin $\forall \lambda\neq 0$ et $\forall h\in H$ on a : $\|\lambda y-\vec{h}\| = |\lambda|\,\|\vec{y}-\underbrace{\tfrac{1}{\lambda}\vec{h}}_{\in H}\|$
$\forall y\in E$

Puisque l'application $\vec{h}\to\frac{1}{\lambda}\vec{h}$ est une bijection de H sur lui-même,

on a donc $\operatorname{Inf}\{\|\lambda\vec{y}-\vec{h}\|, h\in H\} = |\lambda| \inf\{\|\vec{y}-\vec{h}'\|, \vec{h}'\in H\}$

c'est à dire que $\quad d(\lambda \vec{y}, H) = |\lambda|\, d(\vec{y}, H)$

en particulier, ici on a :

$$d(f(x)\vec{x_0}, H) = |f(x)|\, d(x_0, H)$$

c) De l'inégalité démontrée au b) on tire, (puisque $d(x_0, H) \neq 0$) :

$$\forall \vec{x}, \qquad |f(x)| \leq \|x\| \cdot k \quad \text{avec} \quad k = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

Ceci prouve, par caractérisation des A.L continues, que <u>f est continue</u> $\square$.