11 Topologie d'un espace vectoriel normé

« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »
René Descartes (1596 – 1650)

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. En l'absence d'ambiguïté, on emploiera la notation $\|\cdot\|$ pour désigner la norme associée à l'un ou l'autre de ces espaces.

I | Notions générales de topologie

Cette introduction à la topologie a pour but de formaliser les concepts plus ou moins intuitifs de voisinage, d'infiniment petit et d'infiniment grand, d'où découleront les notions de limite et de continuité présentées dans le cadre des espaces vectoriels normés. Si ce cadre commode est celui retenu par le programme, tous les concepts abordés dans ce chapitre sont de portée plus générale et peuvent être étendus à des familles plus vastes d'espaces [1].

A – Voisinages, ouverts et fermés

Rappelons que la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\} = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$$

Définition 11.1 : Voisinage, ouvert, fermé

Soient A une partie de E et x un élément de E. On dit que :

- A est un voisinage de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
- A est un ouvert de E si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset A$$

- A est un fermé de E si son complémentaire est un ouvert.

On note parfois $A^c = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E et $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 11.2

(i) $\varnothing$ et E sont des parties ouvertes et fermées de E.

(ii) Les boules ouvertes sont... des ouverts !

(iii) Les boules fermées et les sphères sont des fermés ; en particulier, un singleton est un fermé.

On notera que les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b[$ ne sont ni ouverts, ni fermés. Quels sont les intervalles ouverts et les intervalles fermés de $\mathbb{R}$?

Proposition 11.3 : Stabilité par réunion et intersection

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
- Toute réunion **finie** de fermés est un fermé, toute intersection de fermés est un fermé.

1. espaces métriques et espaces topologiques

Démonstration

On notera que l'assertion sur les fermés est une conséquence directe de la première.

- Soient $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts et $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$ et comme O_{i_0} est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
- Soient $(O_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ouverts et $x \in \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} O_i$. Il existe, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, un réel strictement positif r_i tel que $B(x,r_i) \subset O_i$. On a alors $B(x, \min_{1\leqslant i\leqslant n} r_i) \subset \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} O_i$. ■

Exemples

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] = [0,1[$ n'est pas un fermé et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[=]0,1]$ n'est pas un ouvert.

Exercice 1

Montrer que toute partie finie est fermée et montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Proposition 11.4 : Stabilité par produit fini

Tout produit fini d'ouverts est un ouvert; tout produit fini de fermés est un fermé.

Notons que la définition d'une partie fermée n'est guère commode. On dispose cependant d'une caractérisation extrêmement pratique : pour montrer qu'une partie A est fermée, il suffit de montrer que toute suite convergente de A a sa limite dans A. Bref, A est fermée lorsqu'on ne sort pas de A par passage à la limite!

Théorème 11.5 : Caractérisation séquentielle d'un fermé

A est une partie fermée de E si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

Démonstration

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A et montrons que $E\setminus A$ est ouverte. Faisons pour cela l'hypothèse qu'elle ne l'est pas et choisissons $a \in E\setminus A$ tel que pour tout $r>0$, $B(a,r) \not\subset E\setminus A$. Cela implique l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, de $x_n \in B(a, 1/n) \cap A$. On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A qui converge vers $a \notin A$ puisque $d(x_n,a) < 1/n$. Absurde.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $E\setminus A$ ouverte et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a. Si $a\in E\setminus A$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(a,\varepsilon)\subset E\setminus A$. À partir d'un certain rang, tous les éléments x_n appartiennent à $B(a,\varepsilon)$ donc à $E\setminus A$, ce qui contredit la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $a\in A$. ■

Attention, ce résultat ne signifie pas pour autant que toute suite dans un fermé converge.

Exemples

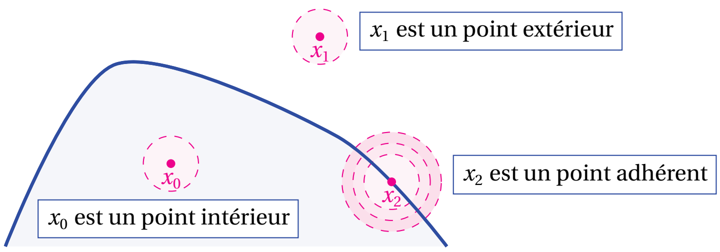
- L'intervalle $[0,1[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.
- $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ est une partie fermée de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{K})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- L'ensemble des polynômes n'est pas un fermé de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

B – Intérieur, adhérence et frontière

Définition 11.6 : Point intérieur, point adhérent

Soient A une partie de E et x un élément de E. On dit que :

- x est un point intérieur à A s'il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset A$ (c'est-à-dire si A est un voisinage de x).
- x est un point adhérent à A si pour tout $r>0$, $B(x,r)\cap A \neq \varnothing$.

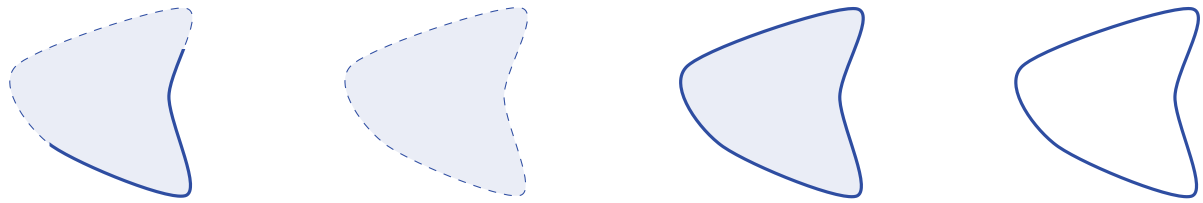


Définition 11.7 : Intérieur, adhérence et frontière

Soit A une partie de E.

- On appelle intérieur de A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- On appelle frontière de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \left(\mathring{A}\right)^{\mathrm{c}}$.

Un dessin valant mieux que de longs discours, illustrons ces définitions au moyen des croquis suivants.



ENSEMBLE A INTÉRIEUR DE A ADHÉRENCE DE A FRONTIÈRE DE A

Exercice 2

Préciser l'intérieur, l'adhérence et la frontière d'une boule ouverte (resp. fermée).

L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, quand l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A.

Proposition 11.8 : Caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence

Soit A une partie de E.

- L'intérieur de A est un ouvert de E, c'est même le plus grand des ouverts inclus dans A.
- L'adhérence de A est un fermé de E, c'est même le plus petit des fermés contenant A.
- La frontière de A est un fermé de E.

Démonstration

Notons O la réunion de tous les ouverts inclus dans A (c'est donc bien un ouvert de E). Montrons que $\mathring{A} = O$.

- Soit $x \in \mathring{A}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ donc $B(x, r) \subset O$. Ainsi, $x \in O$.
- Soit $x \in O$. x appartient à un ouvert de A donc appartient à une boule incluse dans A : $x \in \mathring{A}$.

Le raisonnement est analogue pour l'adhérence. La frontière est fermée en tant qu'intersection de deux fermés. ■

On en tire les propriétés fondamentales suivantes :

- $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.
- A est une partie ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.
- A est une partie fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exercice 3

Soit A une partie de E.

(i) Montrer que $\left(\mathring{A}\right)^{\mathrm{c}} = \overline{A^{\mathrm{c}}}$ et $(\mathring{A^{\mathrm{c}}}) = \overline{A}^{\mathrm{c}}$.

(ii) Justifier alors que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathrm{c}}}$ et $E = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A) \cup (\mathring{A^{\mathrm{c}}})$.

La frontière de A est en particulier un fermé de E. C'est aussi la frontière de A^{c}.

Proposition 11.9 : Caractérisation séquentielle des points adhérents

Un point x de E est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Démonstration

Un fermé contenant A doit contenir toutes les limites des suites convergentes de A. Donc :

$$F = \left\{ \lim_{n \to +\infty} x_n \mid (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{converge} \right\} \subset \overline{A}$$

Réciproquement, considérons $a \in \overline{A}$. Pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$. On peut donc construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in B(a, 1/n) \cap A$. Cette suite d'éléments de A converge vers a, donc $a \in F$. ■

On a donc établi :

$$a \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \quad B(a,r) \cap A \neq \varnothing \iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

Cette caractérisation séquentielle permettra de donner un sens à $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour une fonction f définie sur A et $a \in \overline{A}$.

Exemple

Si A est une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$, $\sup(A)$ et $\inf(A)$ appartiennent à $\overline{A}$.

Exercice 4

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $[a,b[$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ en tant que parties de $\mathbb{R}$.

Définition 11.10

Soient A et B deux parties de E.

- On dit que A est dense dans E si $\overline{A} = E$.
- On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.

De façon équivalente, A est dense dans B si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- Tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.
- Pout tout $x \in B$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$

Exemples

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b])$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[a,b]$ est dense dans $\mathscr{C}([a,b])$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Rappelons que si deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes, toute suite convergeant au sens de la première converge au sens de la seconde. En dimension finie, il est donc inutile de préciser la norme choisie. De manière plus générale, deux normes équivalentes définissent sur un espace la même topologie : les parties ouvertes pour l'une sont ouvertes pour l'autre et il en va de même pour les parties fermées.

Exemple (♡)

Montrons que $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Soit $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Construisons une suite de matrices inversibles qui converge vers M. Idée : si M est inversible, une suite constante suffit ; si M ne l'est pas, nous allons « perturber » sa diagonale pour parvenir à nos fins. À cet effet, on pose $M_n = M - \frac{1}{n} I_p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part, de manière évidente, $M_n = M - \frac{1}{n} \cdot I_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.
- D'autre part, les matrices M_n sont toutes inversibles, au moins à partir d'un certain rang. En effet, $\det(M - \lambda I_p)$ s'annule au plus p fois.

Un argument de densité servira à étendre une propriété valable pour les éléments d'un ensemble A à une propriété vérifiée par les éléments de $B = \overline{A}$.

C – Topologie induite

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$. Notons que $\|\cdot\|$ définit une norme sur F et qu'elle confère donc à F le statut d'espace vectoriel normé. On peut alors s'intéresser à la topologie induite sur F. Les boules ouvertes de F (ou *relativement à* F) sont de la forme :

$$B_F(a,r) = \{x \in F \mid \|x - a\| < r\} = B(a,r) \cap F$$

Notons que cette boule du « point de vue » de F n'est, en dehors de quelques cas pathologiques, pas une boule pour E. On peut alors montrer que les ouverts relatifs à F (resp. les fermés relatifs à F) sont l'intersection de F et des ouverts de E (resp. les fermés de E). Ce qui motive la définition qui suit pour une partie cette fois-ci quelconque de E.

Soit X une partie de $A \subset E$. On dit que :

- X est un voisinage de x relatif à A si X est l'intersection de A et d'un voisinage de x dans E.
- X est un ouvert relatif à A si X est l'intersection de A et d'un ouvert de E.
- X est un fermé relatif à A si X est l'intersection de A et d'un fermé de E.

On montre que ce sont respectivement des voisnages/ouverts/fermés pour la topologie induite sur A.

On retiendra l'exemple suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, $[0,\varepsilon[$ est un voisinage de 0 relativement à $\mathbb{R}_+$ mais pas relativement à $\mathbb{R}$.

II | Continuité dans un espace vectoriel normé

Sauf mention contraire, f désignera une fonction définie sur E et à valeurs dans F, où E et F désignent des espaces vectoriels respectivement munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

A – Limites

Définition 11.11

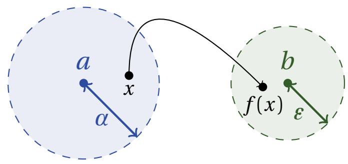
Soit A une partie non vide de E, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. On dira que f a pour limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(x)-b\|_F < \varepsilon$$

On écrira alors $\lim\limits_a f = b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Sans surprise, lorsque la limite existe, elle est unique.
On peut reformuler la définition de la limite à l'aide de boules ou de voisinages :

$$\begin{aligned} b = \lim_{x\to a} f(x) &\iff \left[\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad x \in B(a,\alpha) \implies f(x) \in B(b,\varepsilon)\right] \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad f(B(a,\alpha)) \subset B(b,\varepsilon) \\ &\iff \forall V \in \mathscr{V}(b), \quad \exists U \in \mathscr{V}(a), \quad f(U) \subset V \end{aligned}$$



Laissons de côté la quintessence de la limite exprimée en termes de voisinages pour étendre notre définition de la limite dans le cas d'une limite en l'infini ou d'une limite infinie :

(i) Pour $f : \mathbb{R} \to F$, on dira que f admet une limite $b \in F$ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant M \implies \|f(x)-b\|_F < \varepsilon$$

(ii) Pour $f : A \subset E \to \mathbb{R}$, on dira que f admet comme limite $+\infty$ en $a \in \overline{A}$ si :

$$\forall M' \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant M'$$

(iii) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dira que f admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall M' \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant M \implies f(x) \geqslant M'$$

(iv) Pour $f : A \subset E \to F$ avec A non bornée, on dira que f admet une limite $b \in F$ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad \|x\|_E \geqslant M \implies \|f(x)-b\|_F < \varepsilon$$

On écrira alors $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = b$.

On adapte facilement dans les définitions (i), (ii) et (iii) pour une limite en $-\infty$ ou qui vaudrait $-\infty$, mais que de tracas ! Il suffit en fait d'étendre la notion de voisinage à $+\infty$ pour obtenir une définition unique, la seule qui vaille :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \iff \quad \forall V \in \mathscr{V}(b), \quad \exists U \in \mathscr{V}(a), \quad f(U) \subset V$$

Proposition 11.12 : Caractérisation séquentielle

Soient $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Ce résultat se prolonge dans le cas où $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$. Nous ne détaillerons pas ici les propriétés classiques de la limite (limite d'une combinaison linéaire, limite d'une composée...). Un dernier résultat est néanmoins à connaître, celui de la limite d'une application à valeurs dans un espace produit.

Proposition 11.13

Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ le produit des espace vectoriels normés (F_k, N_k), muni de la norme définie par $N(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} N_k(x)$.
Soient $f : x \in A \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in F$ où $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. f admet une limite en a si et seulement si chaque f_k admet une limite en a. Dans ce cas, $\lim\limits_a f = \left(\lim\limits_a f_1, \ldots, \lim\limits_a f_p\right)$.

B – Continuité

1 – Définition et premières propriétés

On considère toujours une fonction $f : A \subset E \to F$.

Définition 11.14

- f est dite continue en $a \in A$ si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E < \alpha \implies \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

- f est dite continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Les opérations classiques sur les limites nous permettent de montrer que :

- l'ensemble $\mathscr{C}(A,F)$ des fonctions continues sur A est un espace vectoriel.
- l'ensemble $\mathscr{C}(A,\mathbb{K})$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (le produit de deux fonctions continues est en particulier continu).
- si $f : A \to F$ et $g : B \to G$ sont continues avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition 11.15 : Caractérisation séquentielle de la continuité

f est continue en $a \in A$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(a)$$

Ce dernier résultat est utilisé autant dans le cas d'une fonction continue que pour montrer qu'une fonction ne l'est pas.

Exemple

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Proposition 11.16

Soient $f, g : A \to F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie dense de A. Alors $f = g$.

Démonstration

Supposons que f et g sont continues sur A et qu'elles coïncident sur D avec $\overline{D} = A$.
Soit $x \in A$. il existe alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x. Par continuité de f et g,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(x)$$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2 – Applications lipschitziennes

Définition 11.17

L'application $f : E \to F$ est dite lipschitzienne de rapport $K \geqslant 0$ si :

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant K \cdot \|x-y\|_E$$

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la K-lipschitzianité a une interprétation géométrique simple : les pentes des cordes du graphe de f sont majorées (en valeur absolue) par K.

Exemples

- L'application $x \mapsto |x|$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- L'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
- L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 11.18

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dérivable et f' est bornée, alors f est lipschitzienne.

Démonstration

Supposons que $|f'|\leqslant M$. La continuité de f sur $[a,b]$ et la dérivabilité sur $]a,b[$ nous permet d'utiliser le théorème des accroissements finis :

$$\forall x,y\in[a,b],\quad \exists c\in]x,y[,\quad |f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\quad \text{donc}\quad |f(x)-f(y)|\leqslant M\cdot|x-y|$$

Exercice 6

Montrer que la composée de deux applications lipschitziennes est encore une application lipschitzienne.

Proposition 11.19

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration

Supposons $f:E\to F$ K-lipschitzienne. Soit $x_0\in E$.

$$\forall x\in E,\quad \|f(x)-f(x_0)\|\leqslant K\|x-x_0\|$$

Un simple passage à la limite permet de justifier que $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$.

Corollaire 11.20 : (essentiel)

Les deux applications $x\mapsto\|x\|$ et $x\mapsto d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$ sont 1-lipschitziennes donc continues sur E.

Démonstration

Ces deux applications sont définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On doit donc prouver que pour tous $x,y\in E$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\|x-y\|$$

- La lipschitzianité de la norme découle de l'inégalité triangulaire étendue :

$$\forall x,y\in E,\quad \big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x-y\|$$

- Soit A une partie non vide de E. $d(\cdot,A)$ est bien définie puisque pour $x\in E$, $\{\|x-a\|, a\in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0). Soient $x,y\in E$.

$$\forall a\in A,\quad d(x,A)\leqslant\|x-a\|\leqslant\|x-y\|+\|y-a\|$$

$\|y-a\|\geqslant d(x,A)-\|x-y\|$ pour tout $a\in A$, donc par passage à la borne inf, $d(y,A)\geqslant d(x,A)-\|x-y\|$.
On a ainsi établi $d(x,A)-d(y,A)\leqslant\|x-y\|$. Les rôles de x et y étant symétriques, $\big|d(x,A)-d(y,A)\big|\leqslant\|x-y\|$.

Par composition, si f est continue, $\|f\|$ est continue. Pour une norme différente, le résultat n'est plus garanti !

3 – Applications uniformément continues

Définition 11.21

On dit que $f:A\subset E\to F$ est uniformément continue sur A si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\alpha>0,\quad \forall x,y\in A,\quad \|x-y\|_E<\alpha\implies\|f(x)-f(y)\|_F<\varepsilon$$

Cette propriété est bien entendu plus forte que la continuité.

Exemple

Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

En résumé,

$$\boxed{f\text{ lipschitzienne}}\implies\boxed{f\text{ uniformément continue}}\implies\boxed{f\text{ continue}}$$

4 – Caractérisations topologiques de la continuité

Rappelons que si X désigne une partie de F et $f : E \to F$, par définition :

$$f^{-1}(X) = \{x \in E \mid f(x) \in X\} \subset E$$

L'image réciproque de X par f, car c'est son nom, est l'ensemble des antécédents des éléments de X par f.[2]
On notera que $A \subset f^{-1}(X)$ si et seulement si $f(A) \subset X$.

Théorème 11.22 : Image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue

Une application de E dans F est continue si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
- L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

Démonstration

On considère l'application $f : E \to F$.

- On suppose f continue. Soit X un ouvert de F. Montrons que $f^{-1}(X)$ est un ouvert de E.
  Considérons $x \in f^{-1}(X)$. Comme $f(x) \in X$ et X est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset X$.
  Par continuité de f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(B(x, \alpha)) \subset B(f(x), r) \subset X$. Ainsi, $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(X)$.
- On suppose que l'image réciproque de tout ouvert par f est un ouvert. Montrons que f est continue.
  Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de F donc son image réciproque (qui contient x) également.
  Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $f(B(x, \alpha)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. f est bien continue !
- La version « fermés » du théorème découle de l'égalité $\left(f^{-1}(X)\right)^c = f^{-1}(X^c)$ pour une partie X quelconque. ■

Ce résultat est un formidable outil[3] pour montrer qu'une partie est ouverte/fermée. Par exemple, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue,

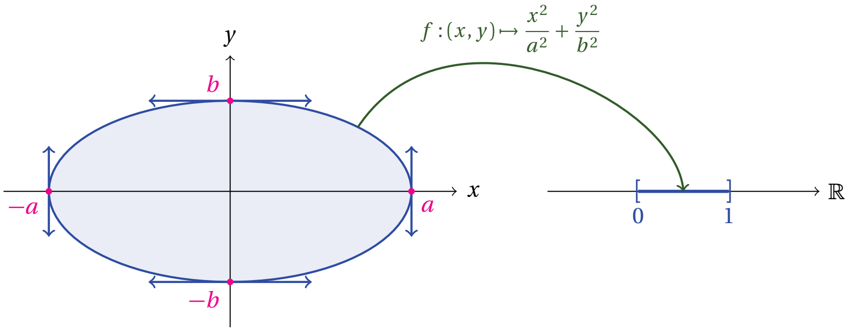
$$\{x \in E, f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \text{ est ouvert ;}$$

$$\{x \in E, f(x) \geqslant 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+) \text{ est fermé ;} \quad \{x \in E, f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \text{ est fermé.}$$

Pour montrer qu'une partie décrite avec des inégalités strictes est ouverte (ou décrite par des inégalités larges est fermée), on introduira une fonction adaptée pour décrire la partie étudiée comme image réciproque et conclure facilement.

Exemples

- Le demi-plan d'inéquation $ax + by > 0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la droite d'équation $ax + by = 0$ un fermé.
- L'intérieur de l'ellipse d'inéquation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 1 \text{ et } -2 < y < 2\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.



Prenons garde en revanche aux implications abusives. Par exemple, l'image d'un fermé par une application continue n'est pas nécessairement fermée... On pourra méditer l'exemple du fermé $[0, +\infty[$ dont l'image par la fonction continue arctan est $[0, \pi/2[$.

2. n'y voyons en aucun cas un quelconque signe de bijectivité de f.
3. c'est bien plus que cela puisque c'est LA définition de la continuité d'une application dans un espace topologique.

C – Continuité d'une application linéaire, norme d'opérateur

Les applications linéaires auront un statut particulier dans ce chapitre car plus que pour toute autre application, on dispose d'un critère simple de continuité. Il repose sur le fait que la continuité d'une application linéaire se ramène par linéarité (on n'invente rien!) à sa continuité en 0. En effet, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x_0 \in E$,

$$u(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} u(x_0) \iff u(x-x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} u(0)=0$$

Théorème 11.23 : Critère de continuité d'une application linéaire

L'application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue si, et seulement s'il existe $C>0$ tel que,

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $u \in \mathscr{L}(E,F)$ continue.
Soit $\varepsilon>0$. La continuité en 0 nous garantit l'existence de $\alpha>0$ tel que : $\|x\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|u(x)\| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \neq 0_E$. Le vecteur $\dfrac{\alpha x}{\|x\|}$ est de norme inférieure ou égale à α donc :

$$\left\| u\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{\alpha\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \varepsilon, \quad \text{soit,} \quad \|u(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot\|x\|$$

Le résultat est encore valable pour $x=0_E$. On retrouve bien l'inégalité attendue, avec $C=\dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$ et soit $x_0 \in E$.

$$\|u(x)-u(x_0)\| = \|u(x-x_0)\| \leqslant C\|x-x_0\|$$

Il suffit alors de faire tendre x vers x_0 : on a bien $u(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} u(x_0)$, d'où la continuité en x_0. ■

On peut reformuler ce théorème de bien des manières. Pour qu'une application linéaire soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit lipschitzienne, qu'elle soit uniformément continue, qu'elle soit bornée sur la boule unité... Mais quand il s'agira d'étudier la continuité d'une application linéaire, il suffira, hors scénario exotique,

- d'invoquer un argument de dimension : nous verrons qu'en dimension finie, toute application linéaire est continue.
- de majorer $\|u(x)\|$ afin de trouver C tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$ et justifier ainsi la continuité.
- d'exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u(x_n)\| > n\|x_n\|$ et justifier ainsi la non-continuité.

À ces possibilités s'ajoutent des arguments de compacité (voir section suivante).

Exemple

$\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie donc Tr est continue.
$\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \mathrm{Tr}^{-1}(\{0\})$, l'hyperplan des matrices de traces nulles, est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De manière générale, tout noyau d'application linéaire en dimension finie est fermé.

Exemple

La forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ définie sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ est continue – ou non – en fonction de la norme choisie.

- Elle est continue si on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ de $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \quad |u(f)| = |f(1)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

- Elle n'est pas continue si on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ de $\|\cdot\|_1$. On considère pour cela la suite de fonctions $f_n : x \mapsto (n+1)x^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 (n+1)x^n \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad |u(f_n)| = n+1 \quad \text{donc on ne peut avoir} \quad |u(f_n)| \leqslant C\|f_n\|_1$$

Rajoutons que pour cette même norme, la forme linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est bien, elle, continue.

La caractérisation de la continuité d'une application linéaire s'étend facilement aux applications multilinéaires.

Théorème 11.24 : Critère de continuité d'une application multilinéaire

L'application multilinéaire u de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est continue si, et seulement s'il existe $C>0$ tel que,

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\cdot\|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}$$

Exemple

Tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur un espace vectoriel E une application continue puisqu'elle est bilinéaire et qu'elle satisfait de plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E, \quad \left|\langle x, y\rangle\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

Fermons cette parenthèse pour revenir aux applications linéaires. On note en général $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$ et même un sous-espace vectoriel normé, quitte à le munir d'une norme dite d'opérateur. Cette dernière « se fabrique » au moyen d'une norme sur E et d'une norme sur F : c'est le plus petit réel positif C tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$, c'est-à-dire le réel :

$$|||\, u \,||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Observons de suite que par linéarité de u et homogénéité de $\|\cdot\|_F$, $|||\, u \,||| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{x \neq 0_E} \left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \sup\limits_{\|y\|_E = 1} \|u(y)\|_F$.

Il suffit donc de déterminer une telle borne supérieure non pas sur $E \setminus \{0_E\}$ mais sur $\mathscr{S}(0,1)$.

Théorème / Définition 11.25 : Norme d'opérateur (ou norme subordonnée)

Pour tout $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$, on pose $|||\, u \,||| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$. L'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, appelée norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On la note parfois $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$, voire $\|\cdot\|$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Démonstration

- Le critère de continuité d'une application linéaire nous assure de l'existence de $|||\, u \,|||$ pour tout $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$.
- $|||\cdot|||$ est de plus une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$. L'application est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En outre,
  - Si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $|||\, u \,||| = 0$ alors $u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$. En effet, $u(0_E) = 0_F$ et :
  $$\forall x \neq 0_E, \quad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0 \quad \text{donc} \quad u(x) = 0_F$$
  - Si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $|||\lambda u||| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|\lambda u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \cdot \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \cdot |||\, u \,|||$.
  - Soient $u, v \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$,
  $$\|(u+v)(x)\|_F \leqslant \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leqslant |||\, u \,||| \cdot \|x\|_E + |||\, v \,||| \cdot \|x\|_E$$
  Pour tout $x \neq 0_E$, $\dfrac{\|(u+v)(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |||\, u \,||| + |||\, v \,|||$. Par passage à la borne supérieure, $|||\, u+v \,||| \leqslant |||\, u \,||| + |||\, v \,|||$. ■

Exercice 7

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathscr{L}_c(E)$. Montrer que $|||\, f \,||| \geqslant |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

Comment déterminer une norme d'opérateur ? En pratique, on majorera $\|u(x)\|$ pour trouver une inégalité de la forme $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. S'il y a égalité pour un vecteur x_0 donné, elle sera optimale. En dimension finie, nous nous assurerons qu'un tel vecteur x_0 existe toujours.

Exemple

Nous avons vu que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$, définie sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni de la norme $|\cdot|$, est continue. En outre,

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K}), \quad |u(f)| = |f(1)| \leqslant \|f\|_\infty = \boxed{1} \times \|f\|_\infty$$

Cette inégalité est une égalité pour f constante égale à 1. Ainsi, $|||\, u \,||| = 1$.

Exercice 8

Déterminer la norme d'opérateur de l'application Tr pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme définie par $\|M\| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$.

De façon immédiate, $|||\mathrm{id}_E||| = 1$. La norme $|||\cdot|||$ est de plus sous-multiplicative.

Proposition 11.26 : Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur

Pour tous $u, v \in \mathscr{L}_c(E)$, $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \cdot |||v|||$.

Démonstration

Pour tout vecteur x unitaire, $\|u(v(x))\| \leqslant |||u||| \cdot \|v(x)\| \leqslant |||u||| \cdot |||v||| \cdot \|x\| = |||u||| \cdot |||v|||$.
On conclut par passage à la borne supérieure. ■

La sous-multiplicativité de la norme d'opérateur se traduit par la continuité de l'application bilinéaire $(u, v) \mapsto u \circ v$.

On dit alors que $|||\cdot|||$ définit une *norme d'algèbre* sur $(\mathscr{L}_c(E), +, \circ, \cdot)$.

Cette propriété assure en particulier la continuité de toute application de la forme $u \mapsto u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et donc plus généralement de toute application polynomiale $u \mapsto P(u)$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}_c(E)$. Notons qu'en dimension finie, un tel argument est inutile : toute application multilinéaire est continue. C'est en particulier le cas du produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$.

Donnons pour finir quelques exemples de normes matricielles construites comme normes subordonnées. En identifiant $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$, il suffit de choisir une norme sur $\mathbb{K}^n$ en tant qu'espace de départ et une norme sur $\mathbb{K}^n$ (éventuellement différente) en tant qu'espace d'arrivée. On peut par exemple définir :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A|||_{p,q} = \sup_{\|X\|_p = 1} \|AX\|_q \quad \text{où on rappelle que} \quad \|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

On montre que les normes définies par $|||A||| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $|||A||| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$ sont des normes subordonnées.

Attention cependant, toutes les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ précédemment rencontrées ne sont pas des normes subordonnées :

- la norme euclidienne définie par $\|A\| = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^\top A)}$ est sous-multiplicative mais $\|I_n\| = \sqrt{n} \neq 1$.
- la norme définie par $\|A\| = \sup\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$ n'est tout simplement pas sous-multiplicative.

III | Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Rappelons qu'on appelle :

– suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
– valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite de sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ. La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. En revanche, posséder une seule valeur d'adhérence ne garantit par pour une suite sa convergence.

A – Définition et premières propriétés

A désignera par la suite une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Définition 11.27 : Partie compacte

A est dite compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans A.

Toute suite d'un compact admet donc au moins une valeur d'adhérence.

Exemples

- D'après le principe des tiroirs, toute partie finie est compacte. Essayez de ranger votre collection (infinie) de billes dans p tiroirs !
- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (version MPSI), les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts. Attention, ce ne sont pas les seules parties compactes de $\mathbb{R}$.

Théorème 11.28

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration

Supposons que A est une partie compacte de E.

- A est fermée. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers $\ell \in E$. Par compacité de A, il existe une sous-suite qui converge dans A, mais aussi nécessairement vers ℓ. Donc, $\ell \in A$.
- A est bornée. Supposons qu'elle ne le soit pas. On pourrait alors construire pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ tel que $\|x_n\| > n$. On ne peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente puisque $\|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geqslant n$ ce qui montre que la suite extraite n'est même pas *a minima* bornée. ■

Nous verrons plus tard, avec un peu de travail, que la réciproque est vraie en dimension finie. Contentons-nous pour l'instant d'un contre-exemple en dimension infinie.

Exemple

On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Ce sup est un max car la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. On considère la sphère unité de E, c'est-à-dire $\mathscr{S}(\tilde{0},1) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \|P\| = 1\}$. C'est bien entendu un fermé borné de E. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{S}(\tilde{0},1)$ qui ne peut pourtant pas admettre de sous-suite convergente puisque pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, $\|P_n - P_m\| = 1 \geqslant 1$.

Les parties compactes d'un compact sont les parties fermées de ce compact. En d'autres termes :

Proposition 11.29

Soit $X \subset A$ où A est une partie compacte de E. Alors, X est compacte si et seulement si X est fermée.

Exercice 9

Montrer que $[a,b] \times [c,d]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, un produit de compacts est... un compact !

Proposition 11.30

Le produit fini de compacts d'espaces normés est compact (pour la norme produit).

Démonstration

Il suffit d'adapter la preuve de l'exercice précédent pour deux parties compactes puis de généraliser par récurrence. ■

B – Compacité et continuité

Théorème 11.31

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Démonstration

Soient A une partie compacte de E et $f : E \to F$ continue. Montrer que $f(A)$ est une partie compacte de F. Considérons une suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in N}$ de $f(A)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du compact A admet une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in A$. Par continuité de f, la sous-suite $\big(f(u_{\varphi(n)})\big)_{n\in N}$ converge vers $f(\ell) \in f(A)$. ■

On en déduit un fameux corollaire, la généralisation de notre « toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ». Ce résultat permettra de prouver efficacement l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

Corollaire 11.32 : Théorème des bornes atteintes

Si f est une application continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

Si $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ est continue et A compact, $f(A)$ est un compact donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Du caractère borné, on tire l'existence de $\inf_{x\in A} f(x)$ et de $\sup_{x\in A} f(x)$. Du caractère fermé, on tire l'appartenance de ces bornes inf/sup à l'adhérence de $f(A)$ donc à $f(A)$ lui-même. Ainsi, $\inf_{x\in A} f(x) = \min_{x\in A} f(x)$ et $\sup_{x\in A} f(x) = \max_{x\in A} f(x)$. ■

Rappelons que si $E=\mathbb{R}$ et A est un intervalle ouvert, $f(A)$ n'a aucune raison d'être bornée ou fermée. Ex. : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$.
Le théorème des bornes atteintes s'applique couramment à une fonction f continue sur un compact A pour montrer qu'une norme est atteinte : $\sup_{x\in A}\|f(x)\| = \max_{x\in A}\|f(x)\| = \|f(x_0)\|$. Pratique, pour la boule unité en dimension finie !

Théorème 11.33 : Théorème de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

On se contente de reconditionner la démonstration de MPSI, valable sur un segment.

Démonstration

Nous allons raisonner par l'absurde. Soit $f : A\subset E \to F$ continue avec A une partie compacte de E. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur A, c'est-à-dire que pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x, y \in A, \quad \|x-y\| < \alpha \quad \text{et} \quad \|f(x)-f(y)\| \geqslant \varepsilon$$

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in A$ tels que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n)-f(y_n)\| \geqslant \varepsilon$.
- On peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (du compact A) une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers mettons $\ell \in A$.
$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{n}$ donc $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ.
- $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \geqslant \varepsilon$ mais par continuité, $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(\ell)-f(\ell)\| = 0$, absurde ! ■

IV | Espaces vectoriels normés de dimension finie

A – Équivalence des normes

Théorème 11.34 : Équivalence des normes en dimension finie

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

La démonstration qui suit n'est pas exigible.

Démonstration

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de dimension finie et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit une nouvelle norme sur E en posant, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $N_\infty(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Nous allons justifier l'équivalence des normes $\|\cdot\|$ et N_∞.

- **Étape 1** – On montre que $\|\cdot\|$ est une application continue de (E, N_∞) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ en justifiant sa lipschitzianité.
En effet, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_\infty(x)\cdot\|e_i\|$$

Ainsi, $\|x\| \leqslant M \cdot N_\infty(x)$ en posant $M = \sum_{i=1}^{n}\|e_i\|$. On tient le bon bout puisque par inégalité triangulaire étendue,

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant M \cdot N_\infty(x-y)$$

- **Étape 2** – On établit que la sphère unité $\mathscr{S}$ de (E, N_∞) est compacte.
  (a) Commençons par justifier que la sphère unité $\mathscr{S}'$ de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ où $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ pour $x = (x_1,\dots,x_n)$ est elle-même compacte. En effet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (version MPSI), le segment $[-1,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, tout comme le disque unité fermé $D_f(0,1)$ est un compact de $\mathbb{C}$. Par produit, $[-1,1]^n$ (cas réel) et $D_f(0,1)^n$ (cas complexe) sont des compacts de $\mathbb{K}^n$.
  $\mathscr{S}'$ étant une partie fermée incluse dans l'un de ces deux compacts, $\mathscr{S}'$ est compacte.
  (b) Entre $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$, il n'y a pas de grandes différences. Plus précisément, $\varphi(\mathscr{S}') = \mathscr{S}$ où :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (E, N_\infty) \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}\right.$$

  φ établit un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et E et c'est surtout une application continue car $N_\infty(\varphi(x)) = \|x\|_\infty$.

$\mathscr{S}$ est ainsi l'image d'un compact par une application continue : c'est un compact.

- **Étape 3** – On prouve enfin que $\|\cdot\|$ et N_∞ sont équivalentes.
  La sphère unité $\mathscr{S}$ étant compacte, l'application continue $\|\cdot\|$ est ainsi bornée sur $\mathscr{S}$ et atteint ses bornes. Comme elle est de plus à valeurs positives, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :
  $$\forall y \in E, \quad N_\infty(y) = 1 \implies \alpha \leqslant \|y\| \leqslant \beta$$
  Soit $x \in E$ non nul. $\dfrac{x}{N_\infty(x)}$ étant unitaire au sens de N_∞, $\alpha \leqslant \left\|\dfrac{x}{N_\infty(x)}\right\| \leqslant \beta$, soit $\alpha N_\infty(x) \leqslant \|x\| \leqslant \beta N_\infty(x)$.
  L'encadrement étant encore valable pour $x = 0_E$, on a montré l'équivalence des normes $\|\cdot\|$ et N_∞.
- **Étape 4** – On savoure notre victoire puisque toutes les normes sur E sont équivalentes à N_∞ donc équivalentes entre elles par transitivité. ■

Il s'en suit l'invariance, en dimension finie, des ouverts, fermés, voisinages...

B – Compacité des fermés bornés

Comme nous l'avons établi, un compact est fermé et borné. En dimension finie, la réciproque est vraie : les parties compactes sont exactement les fermés bornés de l'espace.

Théorème 11.35 : Caractérisation des parties compactes en dimension finie

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Tout repose sur le fait que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base ; on peut donc ainsi se ramener à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Démonstration

Soient A une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|)$, supposé de dimension finie, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
Nous appuyant sur la démonstration du théorème précédent, introduisons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E.
Par équivalence des normes, A est fermée et bornée au sens de la norme N_∞ définie par $N_\infty(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} |x_k|$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n = \sum_{k=1}^{p} x_n^{(k)} e_k$$
Les suites de coordonnées $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées pour la norme N_∞ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^{(k)}| \leqslant N_\infty(x_n)$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Elles admettent dont toutes une sous-suite convergente. Il en va donc de même pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Trois conséquences immédiates (et importantes) :

- En dimension finie, la boule unité fermée et la sphère unité sont compactes.
- Toute application continue sur un fermé borné en dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend à tout espace vectoriel de dimension finie.

On en déduit le plus anecdotique (pour nous) résultat :

Corollaire 11.36

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

C – Continuité d'une application linéaire

Théorème 11.37

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Autrement dit, si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}_c(E,F)$ sont confondus.

Démonstration

Une application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C \cdot \|x\|_E$. Supposons E de dimension finie et notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et N_∞ la norme définie par $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

- Comme $\|\cdot\|_E$ et N_∞ sont équivalentes, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha\|\cdot\|_E \leqslant N_\infty \leqslant \beta\|\cdot\|_E$.
- Soit $x \in E$.

$$\|u(x)\|_F = \left\|\sum_{k=1}^n x_k u(e_k)\right\|_F \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|u(e_k)\|_F \leqslant \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|_F \cdot N_\infty(x) \leqslant \beta \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|_F\right)}_{=C} \|x\|_E$$

D'où la continuité de l'application linéaire u. ■

En dimension finie, la sphère unité étant compacte, nous disposons du corollaire immédiat suivant : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \max\limits_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \|u(x_0)\|_F$ pour un certain x_0 unitaire.

Exemple

Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, la forme linéaire Tr est continue. L'hyperplan $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \mathrm{Tr}^{-1}(\{0\})$ des matrices de trace nulle est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Mais plus généralement...

Théorème 11.38

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Démonstration

Soient un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers $\ell \in \overline{F}$. Montrons que la limite en question appartient nécessairement à F. On considère à nouveau une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F, ce qui nous permet écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{k=1}^p x_n^{(k)} e_k \quad (*)$$

Chaque suite $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme image de la suite (x_n) par la forme linéaire $\varphi_k : x \mapsto x_k$ continue (F étant de dimension finie). Notons ℓ_k les limites respectives de ces suites. Par passage à la limite dans $(*)$, $\ell = \sum\limits_{k=1}^p \ell_k e_k \in F$. ■

Exemples

- $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie. Autrement dit, toute limite de suites de matrices symétriques est une matrice symétrique.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est quant à lui pas un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Non pas parce que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (l'argument ne suffirait pas) mais plus simplement parce que $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

D – Continuité des applications polynomiales et multilinéaires

Définition 11.39 : Polynômes

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle :

- *monôme* défini sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute application de la forme $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.
- *fonction polynomiale* définie sur E toute combinaison linéaire de monômes.

Remarquons que le choix de la base importe peu : un changement de base montre qu'une application polynomiale suivant une base reste polynomiale suivant une autre.

En notant π_k la forme linéaire qui associe au vecteur x sa coordonnée suivant e_k (c'est-à-dire l'application $x \mapsto x_k$), on peut écrire tout monôme sous la forme $\pi_1^{\alpha_1} \times \cdots \times \pi_n^{\alpha_n}$. En dimension finie, ces formes linéaires π_k – qu'on appelle *applications coordonnées* – sont nécessaires continues. D'où le résultat suivant, par produit de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 11.40

Toute application polynomiale définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

Généralisons désormais le théorème de continuité des applications linéaires en dimension finie (démonstration admise).

Théorème 11.41 : Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés tous supposés de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Toute application multilinéaire définie sur $E_1 \times \dots \times E_n$ et à valeurs dans F est continue.

Exemples (♡)

- $M \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \mapsto \det(u)$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}(E)$ un ouvert dense de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 11

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12

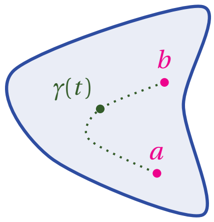
Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est une application continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et en déduire que pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

V | Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Définition 11.42 : Connexité par arcs

Soient A une partie de E non vide et $a, b \in A$.

- On appelle chemin continu (ou arc) joignant les points a et b toute application $\gamma : [0,1] \to A$ continue et vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- On dit que $a \mathscr{R} b$ s'il existe un chemin continu de A joignant a et b.
- A est dite connexe par arcs si pour tous $a, b \in A$, il existe un chemin continu dans A joignant a et b.



L'existence d'un chemin continu entre a et b revient à joindre les deux points à l'aide d'un stylo sans lever le crayon. Notons qu'on pourra remplacer le segment $[0,1]$ par n'importe quel autre segment de $\mathbb{R}$.

Proposition 11.43

$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

Démonstration

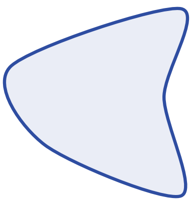
On montrer que la relation binaire $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité :* a est relié avec lui-même par le chemin continu $\gamma : t \mapsto a$.
- *Symétrie :* S'il existe un chemin continu γ joignant a et b, $t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin continu joignant b et a.
- *Transitivité :* S'il existe un chemin continu γ_1 (resp. γ_2) joignant a et b (respectivement b et c), alors l'application $\gamma : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) \text{ si } t \leqslant 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } t \geqslant 1/2 \end{cases}$ est un chemin continu (à vérfier!) joignant a et c. ■

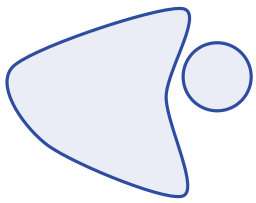
Définition 11.44

On appelle composantes connexes de la partie A les classes d'équivalence de A relativement à la relation $\mathscr{R}$.

Autrement dit, deux points de A sont dans une même composante connexe s'il sont reliés par un chemin continu. A sera connexe par arcs si elle possède une seule composante connexe : la partie est d'un seul tenant !



PARTIE CONNEXE PAR ARCS



PARTIE NON CONNEXE PAR ARCS

On dispose d'exemples très simples de parties connexes par arcs.

Exemples

- Les parties convexes de E sont connexes par arcs. Il suffit de considérer pour une partie convexe $\mathscr{C}$ donnée un chemin rectiligne (continu) joignant $a, b \in \mathscr{C}$: $\quad \forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = (1-t)a + tb \in \mathscr{C}$.
- Les parties étoilées de E sont connexes par arcs. Ce sont les parties $\mathscr{E}$ pour lesquelles il existe $x \in \mathscr{E}$ tel que pour tout $y \in \mathscr{E}$, $[x, y] \subset \mathscr{E}$.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.

Proposition 11.45

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration

Soient $x, y \in A$, où A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, et $\gamma : [0,1] \to A$ un chemin continu les reliant. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version réelle), l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. $\gamma([0,1])$ est donc un intervalle de A qui contient x et y. Le segment $[x, y]$ est donc inclus dans A.
A est donc convexe, c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. ■

Dans $\mathbb{R}$, intervalles, parties connexes par arcs et parties convexes sont donc confondus. C'est faux en général.

Exercice 13

Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2, une sphère est connexe par arcs et qu'une boule privée de son centre est connexe par arcs.

Un résultat pratique pour montrer qu'une partie est connexe par arcs : l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Théorème 11.46

Soient $f : E \to F$ une application continue et A une partie connexe par arcs de E. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Corollaire 11.47 : Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires

Soient A une partie connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(A)$ est un intervalle.

Comme dans le cas purement réel, on utilise souvent ce résultat pour justifier que f s'annule sur A en trouvant $x, y \in A$ tels que $f(x) \cdot f(y) \leqslant 0$.