Rappels d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; et E, F,…sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

I. Familles libres, familles génératrices

I.1. Structure d'espace vectoriel

Définition. *Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un ensemble, $+$ une loi de composition interne sur E, et $\cdot$ une loi externe sur E de domaine $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E, qui à chaque couple (λ, u) associe un élément de E noté $\lambda \cdot u$. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*

- *$(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :*
  - *la loi $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;*
  - *la loi $+$ a un élément neutre, noté 0_E : $\forall x \in E \quad 0_E + x = x + 0_E = x$;*
  - *chaque élément de E admet un symétrique (son opposé) : $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = y + x = 0_E$;*
  - *la loi $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y = y + x$.*
- *$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$ et $\lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$;*
- *$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$;*
- *$\forall x \in E \quad 1_{\mathbb{K}}.x = x$.*

Définition. *Avec les notations précédentes, soit de plus $\times$ une loi de composition interne sur E. On dit que $(E, +, \cdot, \times)$ est une* ***algèbre*** *sur $\mathbb{K}$ si :*

- *$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;*
- *$(E, +, \times)$ est un anneau ; on notera 1_E le neutre de $\times$.*
- *$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (a, b) \in E^2 \quad (\lambda \cdot a) \times b = \lambda \cdot (a \times b) = a \times (\lambda \cdot b)$ et $(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$.*

I.2. Combinaisons linéaires

Définition. *Soit I un ensemble d'indices, et $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de nombres indexée par I. L'ensemble des indices $i \in I$ vérifiant $\lambda_i \neq 0$ est appelé le* ***support*** *de la famille. On dit donc que la famille est* ***à support fini*** *si son support $S = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini, c'est-à-dire si elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.*

L'ensemble des familles d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini est noté $\mathbb{K}^{(I)}$.

Définition. *Soit $U = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de U, toute écriture de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est à support fini.*

Si le support de cette famille est inclus dans $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, la notation $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ représente alors le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{j_k} u_{j_k}$.

I.3. Familles libres

Définition. *Soit $U = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est* ***liée****, s'il existe une famille à support fini $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que*

- *$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$;*
- *l'un au moins des nombres λ_k n'est pas nul.*

La relation $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$ est alors appelée une relation de ***dépendance linéaire*** *entre les vecteurs de la famille.*

La famille est dite ***libre*** *si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si la seule famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ vérifiant $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$ est la famille nulle.*

Proposition I.1. *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des* ***autres*** *vecteurs de la famille.*

Proposition I.2. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre ; toute sur-famille d'une famille liée est liée.*

Proposition I.3. *Une famille est libre si et seulement si toutes ses sous-familles* ***finies*** *sont libres.*

I.4. Bases

Définition. *Soit $U = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est* ***génératrice*** *si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de U.*

On dit que c'est une ***base*** *si elle est génératrice et libre.*

Proposition I.4. *Une famille de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une manière et d'une seule comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.*

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et si $x \in E$, l'unique famille $(x_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ vérifiant $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ est appelée famille des **coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

Proposition I.5. *Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et si $j \in I$, l'application e_j^* qui, à chaque vecteur $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, associe sa coordonnée x_j suivant e_j, est une forme linéaire sur E.*

I.5. Dimension finie

Définition. *On dit que E est* ***de dimension finie*** *s'il admet une famille génératrice finie.*

Théorème I.6. *Si E est de dimension finie, alors il admet des bases ; ces bases sont toutes finies et de même cardinal.*

Ce cardinal est appelé la **dimension** de E et noté $\dim E$.

Théorème I.7. *Si E est de dimension finie, et si $\dim E = n$, alors :*

- *les familles libres de vecteurs de E sont finies, de cardinal inférieur ou égal à n, et toute famille libre de cardinal n est une base ;*
- *les familles génératrices finies de vecteurs de E sont de cardinal supérieur ou égal à n, et toute famille génératrice de cardinal n est une base.*

Proposition I.8. *Si E est de dimension finie, alors*

- *toute famille libre de E peut être complétée en une base ;*
- *de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.*

II. Sous-espaces

II.1. Généralités

Définition. *Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E qui est munie d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par les restrictions des lois $+$ et $.$ à F.*

Théorème II.1. *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux propriétés :*

- *$F \neq \emptyset$ (en particulier, 0_E appartient à tout sous-espace) ;*
- *F est stable par combinaisons linéaires : si $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda x + \mu y \in F$.*

Proposition II.2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille (éventuellement infinie) de sous-espaces de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est aussi un sous-espace de E.*

Définition. *Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une partie B de A est appelée une* ***sous-algèbre*** *de A si, munie des restrictions des lois, c'est une algèbre, dont le neutre de la multiplication est 1_A.*

Proposition II.3. *Avec les notations précédentes, B est une sous-algèbre de A si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de A, stable par $\times$, et contenant 1_A.*

II.2. Sous-espaces engendré

Définition. *Si A est une partie de E, on appelle sous-espace engendré par A l'intersection des sous-espaces qui contiennent A ; on le note $\operatorname{Vect} A$.*

Proposition II.4. *Soit $A \subset E$. Alors*

i. $\operatorname{Vect} A$ *est un sous-espace vectoriel de E et contient A ;*

ii. *si F est un sous-espace de E et si $A \subset F$, alors $\operatorname{Vect} A \subset F$;*

iii. $\operatorname{Vect} A$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A.*

Les propriétés **i.** et **ii.** caractérisent en fait $\operatorname{Vect} A$: si G est un sous-espace de E qui contient A, et si G est inclus dans tous les sous-espaces contenant A, alors $G = \operatorname{Vect} A$.

II.3. Sous-espaces en dimension finie

Théorème II.5. *Soit E un espace de dimension finie, et F un sous-espace de E. Alors :*

- *F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$;*
- *si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.*

Définition. *On appelle* ***rang*** *d'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs, et on note $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n)$, la dimension du sous-espace engendré par cette famille.*

Ce rang est majoré par le cardinal n de la famille, et vaut n si et seulement si la famille est libre.

III. Sommes de sous-espaces

III.1. Généralités

Définition. *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. On appelle somme de ces sous-espaces, l'ensemble F constitué des vecteurs x pouvant s'écrire sous la forme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, où $x_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.*

On note $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \sum_{k=1}^{p} F_k$.

Proposition III.1. *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. Alors, $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est le sous-espace engendré par $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$. En particulier,*

- *pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i \subset \sum_{k=1}^{p} F_k$;*
- *si G est un sous-espace de E qui contient tous les F_k, alors G contient $\sum_{k=1}^{p} F_k$.*

III.2. Sommes directes

Définition. *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est* ***directe*** *si chaque vecteur x de la somme s'écrit d'une seule manière sous la forme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, où $x_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.*

Si la somme est directe, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Théorème III.2. *Soient F_1 et F_2* ***deux*** *sous-espaces de E. La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

Théorème III.3. *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E. Leur somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe si et seulement si la seule décomposition de 0_E sous la forme $0_E = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, où $x_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, est la décomposition dans laquelle tous les vecteurs x_k sont nuls ; c'est-à-dire si et seulement si on a unicité de la décomposition du vecteur nul suivant les F_k.*

III.3. Sous-espaces supplémentaires

Définition. *On dit que deux sous-espaces F et G sont* ***supplémentaires*** *dans E si $E = F \oplus G$.*

Proposition III.4. *Soient E un espace de dimension finie.*

- *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, si $p \in [\![1, n]\!]$, et si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, alors $E = F \oplus G$.*
- *Si $E = F \oplus G$, si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F et $(v_1, \ldots, v_q)$ une base de G, alors $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est une base de E.*

Théorème III.5. *Dans un espace de dimension finie, tout sous-espace admet un supplémentaire.*

Proposition III.6. *Soit $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul ; soit $n = \deg P_0$. Alors, l'ensemble $P_0\mathbb{K}[X] = \{P_0 A \ ; \ A \in \mathbb{K}[X]\}$ des multiples de P_0, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et $\mathbb{K}[X] = P_0\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$.*

III.4. Dimension d'une somme

Théorème III.7. *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces de dimension finie de E, alors $F_1 + F_2$ est de dimension finie, et $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.*

En particulier, la somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

Théorème III.8. *Si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie de E, alors leur somme est de dimension finie, et $\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) \leqslant \sum_{k=1}^{p} (\dim F_k)$.*

De plus, on a égalité si et seulement si la somme est directe.

IV. Applications linéaires

IV.1. Généralités

Définition. *Si E et F sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, une application f de E dans F est dite* ***linéaire*** *si $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.*

Si $F = E$, on dit que f est un **endomorphisme** ; un **isomorphisme** (d'espaces vectoriels) est une application linéaire bijective, un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Proposition IV.1. *Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.*

Une composée d'applications linéaires est linéaires.

La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Proposition IV.2. *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.*

L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E, muni des lois $+$ et $\circ$, est un anneau.

L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

Définition. *Si A et B sont deux algèbres sur le même corps $\mathbb{K}$, une application f de A dans B est appelée* ***morphisme d'algèbre*** *si elle est linéaire et vérifie $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$ pour tout $(a, b) \in A^2$, et $f(1_A) = 1_B$.*

IV.2. Image et noyau

Proposition IV.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Si E_1 est un sous-espace de E, alors son image $f(E_1) = \{f(x) \ ; \ x \in E_1\}$ est un sous-espace de F.

Si F_1 est un sous-espace de F, alors son ensemble image réciproque $f^{-1}(F_1) = \{x \in E \mid f(x) \in F_1\}$ est un sous-espace de E.

Définition. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle* ***image*** *de f, notée $\mathrm{Im}\, f$, l'ensemble $f(E)$; c'est un sous-espace de F.*

On appelle ***noyau*** *de f l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$; on le note $\mathrm{Ker}\, f$, et c'est un sous-espace de E.*

Proposition IV.4. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{f(e_i) \ ; \ i \in I\}$.*

Théorème IV.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.*

IV.3. Projections et symétries

On suppose connus deux sous-espaces F et G de E tels que $E = F \oplus G$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe alors un seul couple (y, z) vérifiant $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in G$.

Définition. *L'application p (resp^t q) qui, à chaque vecteur x, associe sa composante y suivant F (resp^t sa composante z suivant G) est appelée projection sur F de direction G (resp^t projection sur G de direction F).*

Proposition IV.6. *Les applications p et q sont des endomorphismes de E. Elles vérifient :*
- $G = \operatorname{Ker} p$;
- $F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \,|\, p(x) = x\}$;
- $p + q = \mathrm{Id}_E$;
- $p^2 = p \circ p = p$ *et* $p \circ q = q \circ p = 0$.

Théorème IV.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = f$, alors*
- *les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E ;*
- *f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ de direction $\operatorname{Ker} f$.*

Définition. *Si $E = F \oplus G$, si p est la projection sur F de direction G (resp^t q est la projection sur G de direction F), on appelle symétrie par rapport à F de direction G l'application $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2q$.*

Proposition IV.8. *L'application s est un automorphisme de E. Elle vérifie :*
- $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \,|\, s(x) = x\}$;
- $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$;
- $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Théorème IV.9. *Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors*
- *les sous-espaces $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires ;*
- *s est la symétrie par rapport à F de direction G.*

IV.4. Définition par l'image d'une base

Théorème IV.10. *Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, et si $(y_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $\quad f(e_i) = y_i \quad$ pour tout $i \in I$. De plus :*
- *f est injective si et seulement si $(y_i)_{i \in I}$ est libre ;*
- *f est surjective si et seulement si $(y_i)_{i \in I}$ est génératrice ;*
- *f est bijective si et seulement si $(y_i)_{i \in I}$ est une base.*

Théorème IV.11. *Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, et si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, f_k est une application linéaire de E_k dans F, alors il existe une et une seule application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $\quad f\big|_{E_k} = f_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.*

V. Applications linéaires en dimension finie

V.1. Isomorphismes

Théorème V.1. *Soit E un espace de dimension finie et F un espace quelconque. Alors, il existe un isomorphisme de E dans F si et seulement si F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.*

Théorème V.2. *Soient E et F deux espaces de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les cinq propriétés :*

- **i.** *f est injective ;*
- **ii.** *f est surjective ;*
- **iii.** *f est bijective ;*
- **iv.** *f est inversible à gauche, c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$;*
- **v.** *f est inversible à droite, c'est-à-dire il existe $h \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.*

V.2. Formule du rang

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces quelconques. Si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, on dit que f est **de rang fini**, et la dimension de $\operatorname{Im} f$ est appelée **rang** de f.*

Théorème V.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces quelconques. Si $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire G, alors f réalise un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.*

Théorème V.4. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est de dimension finie et F est un espace quelconque. Alors, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$.*

Proposition V.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
- *si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, et $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$;*
- *si F est de dimension finie, alors f est de rang fini, et $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$.*

VI. Matrices

VI.1. Généralités

Définition. *Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une matrice à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.*

Proposition VI.1. *$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $p \times q$.*

Pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, soit E_{ij} la matrice ayant un coefficient 1 en position (i,j) et des zéros partout ailleurs. La famille des E_{ij}, quand (i,j) décrit $[\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, forme une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, appelée base canonique.

Proposition VI.2. *Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$: $\quad \forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,p]\!]^4 \quad E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$.*

VI.2. Produit

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice produit AB est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par $\quad c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad$ pour tout couple (i,j). Ce produit est

- associatif : $A(BC) = (AB)C$ au sens où, si l'un des produits est défini, alors l'autre l'est aussi, et a la même valeur ;
- bilinéaire : $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit définit une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition VI.3. *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de l'addition et du produit matriciel, est un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$; le neutre de la multiplication est la matrice $I_n = (\delta_{ij})$ définie par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon.*

Une matrice A **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** ou **régulière** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$; il existe alors une seule telle matrice B, qui est notée A^{-1}.

Pour des matrices **carrées** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les identités $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}B^k$ et $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{p} A^{p-k}B^k$ sont vraies **si** A **et** B **commutent**, c'est-à-dire si $AB = BA$.

VI.3. Transposition

Définition. *Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice transposée de A est la matrice $A^\top = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple (i,j).*

Proposition VI.4. *La transposition a les propriétés suivantes :*

- *si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $\quad (A^\top)^\top = A$;*
- *si $(A,B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\quad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$;*
- *si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $\quad (AB)^\top = B^\top A^\top$;*
- *si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $A^\top$ l'est aussi, et $\quad (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

VI.4. Opérations par blocs

Si les matrices A et B sont décomposées en blocs, et à condition que les dimensions des blocs correspondent, on peut effectuer les opérations usuelles comme si ces blocs étaient des nombres :

- $\lambda \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_1 + \mu B_1 & \lambda A_2 + \mu B_2 \\ \lambda A_3 + \mu B_3 & \lambda A_4 + \mu B_4 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$.

VII. Matrices et applications linéaires

VII.1. Généralités

Soient E et F deux espaces de dimension finie, munis respectivement d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et d'une base $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_q)$.

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on notera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée pour tout j des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$; autrement dit,*

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j}u_i$$

Proposition VII.1. *Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

Théorème VII.2. *L'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.*

Proposition VII.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$; soit $x \in E$, et X la colonne des coordonnées de X dans $\mathcal{B}$. Alors, AX est la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$.*

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. L'ensemble des colonnes $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $AX = 0$ est appelé le* ***noyau*** *de A, noté $\operatorname{Ker} A$; l'ensemble décrit par les colonnes AX, quand X décrit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, est appelé* ***image*** *de A, et noté $\operatorname{Im} A$.*

Proposition VII.4. *Soit G un troisième espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{D}$; soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Théorème VII.5. *L'application $f \longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.*

VII.2. Changement de base

Définition. *Soit E un espace de dimension finie, muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. On appelle* ***matrice de passage*** *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice carrée $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathcal{B}$; autrement dit,*

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Proposition VII.6. *Si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, alors P est inversible ; et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Proposition VII.7. *Si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, si X est la colonne des coordonnées d'un vecteur x dans $\mathcal{B}$, et X' la colonne des coordonnées du même vecteur dans $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$ et donc $X' = P^{-1}X$.*

Proposition VII.8. *On suppose que*

- *P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de l'espace E ;*
- *Q est la matrice de passage d'une base $\mathcal{C}$ à une base $\mathcal{C}'$ de l'espace F ;*
- *l'application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ a pour matrice A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et pour matrice A' dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.*

Alors, $A' = Q^{-1}AP$.

Si f est un endomorphisme de E, on prend en général $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$, d'où $Q = P$; la formule devient donc $A' = P^{-1}AP$.

Définition. *On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.*

On dit que deux matrices ***carrées*** *A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont* ***semblables*** *s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition VII.9. *Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles ont le même déterminant.*

VII.3. Rang des matrices

Définition. *On appelle* ***rang*** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ le rang de la famille de ses colonnes dans l'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.*

Proposition VII.10. *Le rang d'une matrice est le rang de toutes les applications linéaires qu'elle représente.*

Proposition VII.11. *On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant, à gauche ou à droite, par une matrice carrée inversible.*

Proposition VII.12. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $J_{p,q,r} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ qui se décompose en blocs sous la forme $J_{p,q,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Théorème VII.13. *Deux matrices de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Théorème VII.14. $\forall M \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) \quad \operatorname{rg}(M^\top) = \operatorname{rg} M$.

Proposition VII.15. *Le rang d'une matrice A est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.*

VII.4. Trace

Définition. *Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice* ***carrée****, on appelle* ***trace*** *de A, et on note $\operatorname{tr} A$, le nombre $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, somme des coefficients de sa diagonale principale.*

Proposition VII.16. *L'application trace : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \operatorname{tr} A$ est linéaire.*

Proposition VII.17. *Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB)$.*

Le résultat reste vrai si $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$.

Théorème VII.18. *Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles ont la même trace.*

Définition. *Si f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la trace de la matrice de f dans une base donnée ne dépend pas de la base choisie ; cette trace est appelée* ***trace*** *de f, et notée $\operatorname{tr} f$.*