Devoir à rendre le 13/01/2021

L'objectif de ce devoir est d'établir la formule de Stirling qui sera désormais considérée comme faisant partie du cours :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Première étape : Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

1. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$.
2. On considère la suite $u = \left(\ln\left(\frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}\right)\right)_{n\geq 2}$.
   Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire que la suite u est croissante à partir d'un certain rang.
4. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0 pour la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$.
5. On considère la suite $v = \left(u_n + \frac{1}{12n} + \frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 2}$.
   Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
6. En déduire que v est décroissante à partir d'un certain rang.
7. En déduire l'existence d'une constante C strictement positive telle que :

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Deuxième étape : détermination de la constante C

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour tout entier n, montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

   Que peut-on en déduire sur les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$
3. Prouver que pour tout entier n, on a $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge
5. Prouver que $I_n \sim I_{n+1}$
6. Montrer que pour tout entier n, $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
7. Déterminer un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. En déduire que $C = \sqrt{2\pi}$