Suites réelles et complexes

I. Définition et premières propriétés

Définition. *Une suite réelle (resp. complexe) est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*). Une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ n \mapsto u(n)$ *sera notée* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on dira que* u_n *est son terme général.*

Remarque : On s'intéressera aussi à des suites tronquées $(u_n)_{n\geq n_0}$

Définition. *On dit qu'une suite* u *est constante si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.

Définition. *On dit qu'une suite* u *est stationnaire si* $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle* u *est majorée si* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle* u *est minorée si* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle ou complexe* u *est bornée si* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle* u *est croissante si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle* u *est décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.

Définition. *On dit qu'une suite réelle* u *est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque : On dit qu'une propriété $(*)$ est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe un entier n_0 tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ vérifie $(*)$.
Par exemple une suite est stationnaire si, et seulement si, elle est constante à partir d'un certain rang.

Proposition. *(*) Une suite réelle est majorée (resp. minorée) si, et seulement si, elle est majorée (resp. minorée) à partir d'un certain rang*

Proposition. *Une suite réelle ou complexe est bornée si, et seulement si, elle l'est à partir d'un certain rang*

II. Suites convergentes

Définition. *(*)On dit qu'une suite complexe* u *converge vers le complexe* ℓ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Définition. *On dit qu'une suite complexe est convergente s'il existe un complexe* ℓ *tel que* u *converge vers* ℓ*. On dit que la suite est divergente sinon.*

Proposition. *(*) Une suite complexe* u *converge vers le complexe* ℓ *si et seulement si les suites réelles* $\mathrm{Ré}(u) = (\mathrm{Ré}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers* $\mathrm{Ré}(\ell)$ *et* $\mathrm{Im}(\ell)$.

Définition. *(*) Si une suite u converge vers deux complexes ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$. On dit qu'il y a unicité de la limite.*
On note alors $\lim u = \ell$ *ou* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Proposition. *Une suite u converge vers le complexe ℓ si et seulement si la suite $u - \ell$ converge vers* 0.

Proposition. *(*) Si la suite u converge vers ℓ alors la suite $|u|$ converge vers $|\ell|$*

Remarque : Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition. *(*) Une suite convergente est bornée*

Remarque : Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III. Suites réelles de limite $\pm\infty$

Proposition. *On dit qu'une suite réelle u tend vers $+\infty$ si*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$$

On note alors $\lim u = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *ou* $u_n \to +\infty$.

Proposition. *On dit qu'une suite réelle u tend vers $-\infty$ si*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq M$$

On note $\lim u = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ *ou* $u_n \to -\infty$.

Remarque : Une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $\pm\infty$. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Remarque : Une suite réelle u tend vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$$

Proposition. *Une suite réelle u tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $-u$ tend vers $-\infty$.*

Proposition. *(*) Si une suite réelle u tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.*

Remarque : Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition. *(*) Si une suite réelle u tend vers $+\infty$ alors elle est minorée.*

Remarque : Il n'y a pas de réciproque comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Remarque : Il existe des suites non majorées mais minorées ne tendant pas vers $+\infty$.
Par exemple, $(n\,(1 + (-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

IV. Opérations sur les limites

Proposition. *(*) Soit $(u, v) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$ de limites finies respectives ℓ et ℓ' alors la suite $u + v$ converge vers le réel $\ell + \ell'$.*

Proposition. *(*) Soit $(u, v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ tel que u diverge vers $+\infty$ et v soit minorée alors $u + v$ diverge vers $+\infty$.*

Proposition. *Soit $(u, v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ tel que u diverge vers $-\infty$ et v soit majorée alors $u+v$ diverge vers $-\infty$.*

Proposition. *(*) Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ de limites respectives ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors*
— *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$ alors $\lim u + v = +\infty$,*
— *Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$ alors $\lim u + v = -\infty$,*
— *Si $\ell = \ell' = +\infty$ alors $\lim u + v = +\infty$,*
— *Si $\ell = \ell' = -\infty$ alors $\lim u + v = -\infty$.*

Proposition. *(*) Le produit d'une suite complexe convergeant vers 0 et d'une suite complexe bornée tend vers 0.*

Proposition. *Soit $u \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ de limite finie ℓ alors pour tout complexe λ, la suite λu converge vers le complexe $\lambda\ell$.*

Proposition. *Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$ de limites finies respectives ℓ et ℓ' alors pour tout couple de complexes (λ,μ), la suite $\lambda u + \mu v$ converge vers le complexe $\lambda\ell + \mu v$.*

Proposition. *(*) Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)^2$ de limites finies respectives ℓ et ℓ' alors la suite uv converge vers le complexe $\ell\ell'$.*

Proposition. *(*) Le produit d'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ et d'une suite réelle minorée par $m > 0$ diverge vers $+\infty$.*

Remarque : Il suffit que la minoration ait lieu à partir d'un certain rang.
Remarque : Il n'y a pas équivalence entre "être minorée par $m > 0$" et "être strictement positive" comme le montre l'exemple de la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition. *(*) Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ de limites respectives ℓ et ℓ' alors*
— *Si $\ell = \ell' = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $\lim uv = +\infty$,*
— *Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $\lim uv = +\infty$,*
— *Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$ alors $\lim uv = -\infty$,*
— *Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$ alors $\lim uv = -\infty$.*

Proposition. *(*) Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et :*

— *si $\lim u = \ell \in \mathbb{C}^*$ alors $\lim \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\ell}$,*
— *si $\lim u = 0$ alors $\lim \left|\dfrac{1}{u}\right| = +\infty$,*
— *si $\lim |u| = +\infty$ alors $\lim \dfrac{1}{u} = 0$.*

V. Limites et inégalités

Proposition. *(*) Passage à la limite dans les inégalités larges*
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente majorée par M alors $\lim u \leq M$
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente minorée par m alors $m \leq \lim u$

Corolaire. *Si u est une suite réelle positive convergente alors sa limite est positive.*

Remarque : Les inégalités strictes ne passent pas à la limite : une suite strictement positive convergente n'a pas forcément une limite strictement positive comme le montre l'exemple de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Corolaire. *Soit u et v deux suites réelles convergentes. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, alors $\lim u \leq \lim v$.*

Proposition. *(*) Si une suite réelle u converge vers ℓ et si $m < \ell$ (resp. $\ell < M$) alors, à partir d'un certain rang, la suite est strictement minorée par m (resp. majorée par M).*

Corolaire. *Si une suite réelle u converge vers $l > 0$ alors la suite u est strictement positive à partir d'un certain rang*

Remarque : Si une suite réelle u converge vers ℓ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < \ell$, alors on a pas forcément l'inégalité $u_n < v_n$ vraie à partir d'un certain rang. Il suffit de prendre $u = v = \left(\dfrac{-1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corolaire. *Soit u et v deux suites réelles convergentes. Si $\lim u < \lim v$ alors à partir d'un certain rang $u < v$.*

VI. Théorème d'existence de limites

Théorème. *d'encadrement (*)*
Soit $(u, v, w) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^3$,

- *si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim v = \lim w = \ell \in \mathbb{R}$ alors la suite u converge vers ℓ.*
- *si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$ et si $\lim v = +\infty$ alors la suite u diverge vers $+\infty$.*
- *si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq w_n$ et si $\lim w = +\infty$ alors la suite u diverge vers $-\infty$.*

Remarque : Ces résultats sont conservés si l'encadrement, la minoration ou la majoration de la suite u est vraie à partir d'un certain rang.

Théorème. *de la limite monotone (*)*
Toute suite réelle monotone possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Plus précisément,

- *si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée alors u diverge vers $+\infty$,*
- *si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors u converge vers $\mathrm{Sup}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$,*
- *si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée alors u diverge vers $-\infty$,*
- *si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors u converge vers $\mathrm{Inf}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Remarque : Si u est une suite croissante à partir d'un rang n_0 et majorée, alors elle converge vers $\mathrm{Sup}\{u_n,\ n \geq n_0\}$,

Définition. *On dit que les suites réelles u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante, $lim(u - v) = 0$ et $u \leq v$.*

Remarque : Si u et v vérifient u est croissante, v est décroissante, $\lim(u - v) = 0$, alors $u \leq v$.

Théorème. *des suites adjacentes (*)*
Si deux suites réelles u et v sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

VII. Suites extraites

Définition. *Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $\left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On dit que ϕ est une extractrice.*

Proposition. *Si la suite v est extraite de la suite u et si la suite w est extraite de la suite v alors la suite w est extraite de la suite u.*

Proposition. *Si u est majorée (resp. minorée ou bornée), alors toute suite extraite de u l'est aussi.*

Proposition. *Si u est croissante (resp. décroissante), alors toute suite extraite de u l'est aussi.*

Proposition. *Si u est strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors toute suite extraite de u l'est aussi.*

Proposition. *Soit ϕ une extractrice alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(n) \geq n$.*

Proposition. *(*) Une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Remarque : Ce résultat est souvent utilisé pour montrer la divergence d'une suite.

Théorème. *(*) Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite alors la suite u converge.*

Remarque : Il s'agit même d'une équivalence

Théorème. *de Bolzano-Weierstrass réel (admis) :*
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème. *de Bolzano-Weierstrass complexe (*) :*
De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

VIII. Traduction séquentielle de certaines propriétés

Définition. *Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense si pour tout couple de réels (a,b) tel que $a < b$, il existe $d \in D$ tel que $a < d < b$.*

Proposition. *(*) Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, tout réel est limite d'une suite d'éléments de D.*

Corolaire. *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses.*

Proposition. *(*) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On a $s = SupA \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \leq s \\ \exists u \in A^{\mathbb{N}} : \lim u = s \end{cases}$*

IX. Suites particulières

1. Suites arithmético-géométrique

Définition. *On dit que la suite u est arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.*

Proposition. *Si u est une suite arithmétique de raison r, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$ et*

$$\forall (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = (n_2 - n_1 + 1)\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2}$$

Proposition. *Si u est une suite arithmétique réelle de raison r alors*

- *si $r > 0$ alors la suite u est strictement croissante et $\lim u = +\infty$,*
- *si $r < 0$ alors la suite u est strictement décroissante et $\lim u = -\infty$,*
- *si $r = 0$ alors la suite u est constante à u_0.*

Proposition. *(*) Si u est une suite arithmétique complexe alors elle converge si et seulement si elle est constante.*

Définition. *On dit que la suite u est une suite géometrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.*

Proposition. *si u est une suite géometrique de raison q, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$ et*

$$\forall (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \begin{cases} (n_2 - n_1 + 1)u_{n_1} & \text{si } q = 1 \\ u_{n_1}\dfrac{1 - q^{n_2 - n_1 + 1}}{1 - q} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition. *(*) Soit u une suite géometrique réelle non constante à zéro (i.e. $u_0 \neq 0$) de raison q*

- *si $q \leq -1$ alors la suite u est divergente et n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$,*
- *si $q \in]-1,1[$ alors la suite u converge vers zéro,*
- *si $q = 1$ alors la suite u est constante à u_0.*
- *Si $q > 1$ alors*
  - *Si $u_0 > 0$ alors la suite u est strictement croissante et $\lim u = +\infty$*
  - *Si $u_0 < 0$ alors la suite u est strictement décroissante et $\lim u = -\infty$*

Proposition. *(*) Soit u une suite géométrique complexe de raison q non constante à zéro*
- *si $|q| < 1$ alors la suite u converge vers zéro,*
- *si $|q| > 1$ alors la suite u diverge et $\lim |u| = +\infty$,*
- *si $q = 1$ alors la suite u est constante à u_0.*
- *si $|q| = 1$ et $q \neq 1$ alors la suite u est divergente.*

Définition. *On dit que la suite u est une suite arithmético-géométrique si*

$$\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque : Dans ce cas, si $a \neq 1$, alors la suite $u - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.
Ainsi, en posant $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ et

$$\forall (n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 \leq n_2 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = (u_{n_1} - \ell)\frac{1-q^{n_2-n_1+1}}{1-q} + (n_2 - n_1 + 1)\ell$$

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre deux à coefficients constants

Définition. *On dit que la suite u vérifie une relation linaire d'ordre deux à coefficients constants si $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$*

Proposition. *Une telle suite est entièrement déterminée par u_0 et u_1*

Proposition. *Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ alors l'ensemble des suites réelles (respectivement complexes) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est stable par combinaison linéaire.*

Théorème. *(*) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.*
On introduit le polynôme associé $P = X^2 - aX - b$
- *Si le polynôme P a deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$, r_1 et r_2, alors*

$$S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- *Si le polynôme P a une racine double dans $\mathbb{C}$, r_0, alors*

$$S_{\mathbb{C}}^{a,b} = \{\left(\lambda r_0^n + \mu n r_0^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

Théorème. *(*) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.*
On introduit le polynôme associé $P = X^2 - aX - b$
- *Si le polynôme P a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, r_1 et r_2, alors*

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- *Si le polynôme P a une racine double dans $\mathbb{R}$, r_0, alors*

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{\left(\lambda r_0^n + \mu n r_0^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- *Si le polynôme P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, alors il admet dans $\mathbb{C}$ deux racines conjuguées, $\rho e^{\pm i\theta}$, et*

$$S_{\mathbb{R}}^{a,b} = \{(\rho^n\,(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\rho^n A \cos(n\theta + \phi))_{n \in \mathbb{N}}\,,\ (A,\phi) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit D une partie de $\mathbb{C}$ et f une fonction de D dans D alors pour tout $d \in D$, on peut définir de façon unique une suite u par $(\bigstar) \begin{cases} u_0 = d \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
On dit que la suite u est définie par récurrence.

Proposition. *(*) Soit D une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de D dans D et $d \in D$. On considère la suite u définie par $\bigstar$.*
Si f est croissante sur D alors
- *u est croissante si $u_0 \leq u_1$*
- *u est décroissante si $u_0 \geq u_1$*

Si f est décroissante sur D alors
- *si $u_0 \leq u_2$, la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
- *si $u_0 \geq u_2$, la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

Proposition. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de D dans D et $d \in D$. On considère la suite u définie par $\bigstar$. Si la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.*

X. Relations de comparaison

1. Suites dominées

Définition. *Soit v une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0.*
On dit qu'une suite u est dominée par la suite v si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée i.e. si

$$\exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$

On note $u = O(v)$.

Proposition. $u = O(1) \iff$ *u est bornée*

Proposition. *Si $u = O(v)$ et $\lim v = 0$ alors $\lim u = 0$.*

Proposition. *Transitivité : $u = O(v)$ et $v = O(w) \implies u = O(w)$*

Proposition. *Combinaison linéaire :*

$$u = O(w) \text{ et } v = O(w) \implies \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \lambda u + \mu v = O(w)$$

Proposition. *Produit : $u = O(w)$ et $v = O(t) \implies uv = O(wt)$*

Proposition. *Quotient : Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang alors $u = O(v) \iff \dfrac{1}{v} = O\left(\dfrac{1}{u}\right)$*

Proposition. *(*) Puissance positive :*
Soit u et v deux suites strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $u = O(v) \iff u^\alpha = O(v^\alpha)$

Proposition. *(*) Comparaison logarithmique : Soient u et v deux suites strictement positives telles qu'il existe un rang n_0 vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u = O(v)$.*

Proposition. *(*) Soit u une suite strictement positive telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors*

- *si* $\ell < 1$ *alors* $\lim u = 0$*,*
- *si* $\ell > 1$ *alors* $\lim u = +\infty$*,*
- *si* $\ell = 1$ *alors on ne peut pas conclure.*

2. Suites négligeables

Définition. *Soit v une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit que la suite u est négligeable devant la suite v si la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ *tend vers zéro i.e. si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon.$$

On note $u = o(v)$.

Proposition. *Si la suite u est négligeable devant la suite v alors la suite u est dominée par v.*

Proposition. $u = o(1) \iff \lim u = 0$

Proposition. *Transitivité :* $u = o(v)$ *et* $v = o(w) \implies u = o(w)$

Proposition. *Combinaison linéaire :*$u = o(v)$ *et* $v = o(w) \implies \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \lambda u + \mu v = o(w)$

Proposition. *Produit : si* $u = O(w)$ *et* $v = o(t)$*, alors* $uv = o(wt)$

Proposition. *Quotient : Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang alors* $u = o(v) \iff \dfrac{1}{v} = o\left(\dfrac{1}{u}\right)$

Proposition. *Puissance positive : Soit u et v deux suites strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ alors*

$$u = o(v) \iff u^\alpha = o(v^\alpha)$$

Proposition. *Croissances comparées :*

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\quad |\ln n|^\beta = o(n^\alpha) \qquad \textit{et} \qquad \forall(\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}^{+*}\times]1,\infty[,\quad n^\alpha = o(\lambda^n)$$

Proposition. *(*) Pour tout complexe λ, $\lambda^n = o(n!)$.*

Proposition. *(*)* $n! = o(n^n)$

3. Suites équivalentes

Définition. *Soit v une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang n_0. On dit qu'une suite u est équivalente à la suite v si la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ *tend vers 1. On note $u \sim v$*

Proposition. *Soit u et v deux suites alors $u \sim v$ si et seulement si $u = v + o(v)$.*

Proposition. *(*) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non nulles à partir d'un certain rang.*

Proposition. *Si les suites u et v sont équivalentes alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.*

Proposition. *Soit u, v deux suites et $\ell \in \mathbb{C}\cup\pm\infty$ alors* $u \sim v$ *et* $\lim u = \ell \quad\Rightarrow\quad \lim v = \ell$

Proposition. *Soit u une suite et $\ell \in \mathbb{C}^*$ alors* $u \sim \ell \iff \lim u = \ell$

Remarque : Si l'on obtient $u \sim 0$ c'est surement que l'on a fait une erreur comme sommer ou soustraire des équivalents.
Remarque : Ne jamais sommer des équivalents. Quand on veut sommer il faut repasser par des o.

Proposition. *Produit : Soit u_1, v_1, u_2 et v_2 quatre suites alors*

$$u_1 \sim v_1 \text{ et } u_2 \sim v_2 \implies u_1 u_2 \sim v_1 v_2$$

Proposition. *Inverse : Soit u et v deux suites ne s'annulant pas alors*

$$u \sim v \iff 1/u \sim 1/v$$

Proposition. *Puissance Soit u et v deux suites strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors*

$$u \sim v \iff u^\alpha \sim v^\alpha$$

Proposition. *Si $u \sim w$ et si $v = o(w)$ alors $u + v \sim w$.*

Remarque : Écrire $u \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ n'apporte pas plus d'informations que d'écrire $u \sim \frac{1}{n}$

Proposition. *Si $\lim u = \ell$, si f est dérivable en ℓ et si $f'(\ell) \neq 0$, alors*

$$f(u_n) - f(\ell) \sim f'(\ell)\,(u_n - \ell)\,.$$

Proposition. *Si la suite u tend vers zéro alors $\sin u_n \sim u_n$, $\tan u_n \sim u_n$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.*

Proposition. *Si la suite u tend vers zéro alors $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.*