Lemmes de Borel - Cantelli

I

1 :
$\omega \in B \Leftrightarrow \forall n_0, \exists n > n_0 \quad \omega \in A_n$ (c'est à dire ω est dans une infinité de A_n)

$\Leftrightarrow \forall n_0, \quad \omega \in \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n$

$\Leftrightarrow \forall n_0 \quad \omega \in B_{n_0}$

$\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcap_{n_0 > 0} B_{n_0}$

Ainsi $B = \bigcap_{n>0} B_n$ est un événement par intersections et réunions dénombrables

2 :
(a) D'après l'inégalité de Boole, $\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)$

(b) Comme $\sum_{m\geq 0} \mathbb{P}(A_m)$ converge, le (a) assure que $\mathbb{P}(B_m) \xrightarrow[m\infty]{} 0$

Mais par <u>continuité décroissante</u> $\mathbb{P}(B) = \lim_{m\infty} \mathbb{P}(B_m)$

Donc $\mathbb{P}(B) = 0$

3 : Il suffit de dire que $\forall x \in [0,1]$ on a $0 \leq 1-x \leq e^{-x}$ et de faire le produit

4 : $\prod_{k=1}^{n} (1-\mathbb{P}(A_k)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$ (par indépendance)

Ainsi l'inégalité du 3 signifie $\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)}_{=1-\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)} \geq 1 - e^{-\sum_1^n \mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ car $\sum_1^n \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

Par continuité croissante $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1$.

Ceci est aussi valable si l'union commence à l'indice n au lieu de 1 (La divergence de la série a toujours lieu)

Ainsi $\forall n, \quad \mathbb{P}(B_n) = 1$ Puis par intersecti décroissante

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1$$

Lemme de Borel-Cantelli (suite)

5. Si A est un événement de probabilité $p \in]0,1[$ et si $A_n = A$ $\forall n$ alors

$\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et pourtant $B = A$ n'est pas presque sûr.

6. a) Soient $k_1, \dots, k_r$ des entiers distincts

Alors $A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_r} = \{ n \in \mathbb{N}^*, \ p_{k_1} \cdots p_{k_r} \mid n \}$

Donc $\mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_r}) = \dfrac{1}{p_{k_1} \cdots p_{k_r}} = \mathbb{P}(A_{k_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{k_r})$.

b) Comme $\sum \dfrac{1}{p_k}$ diverge la série $\sum \mathbb{P}(A_k)$ diverge et donc selon a)

$\mathbb{P}(B) = 1$. Mais $B = \{ n \ / \ \text{Support premier de } n \text{ est infini} \} = \emptyset$.

Donc $\mathbb{P}(B) = 0$ Contradiction

7. a) Notons, pour $p \leq \left[\frac{n}{k}\right]$, $E_p = [X_{pk+1} = \dots = X_{p(k+1)} = 1]$.

Alors (i) les E_p sont indépendants (par le lemme des coalitions)

(ii) $[L_n < k] \subset \displaystyle\bigcap_{p=0}^{[\frac{n}{k}]-1} \overline{E_p}$ (chaque E_p est inclus dans $L_n \geq k$)

Donc $\mathbb{P}([L_n < k]) \leq \displaystyle\prod_{p=0}^{[\frac{n}{k}]-1} \mathbb{P}(\overline{E_p}) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{[\frac{n}{k}]}$

b) Notons α_n la partie entière de $(1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln 2}$. Pour n assez grand,

on a $\alpha_n + 1 \leq n$ et

$$\mathbb{P}\left(L_n \leq (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln 2}\right) \leq \mathbb{P}(L_n \leq \alpha_n + 1) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_n+1}}\right)^{[\frac{n}{\alpha_n+1}]}$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha_n+1}}\right)^{\left(\frac{n}{\alpha_n+1} - 1\right)} = u_n.$$

on montre que $\sum u_n$ converge :

Pour cela :

$$n^2 u_n = \exp\left[2\ln(n) + \left(\frac{n}{\alpha_n+1} - 1\right)\ln\left[1-\frac{1}{2^{\alpha_n+1}}\right]\right]$$

et : $\frac{n}{q_n+1} - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{1-\varepsilon}\,\frac{n}{\ln(n)}$

ainsi que : $\ln\left[1-\frac{1}{2^{\alpha_n+1}}\right] \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2^{\alpha_n+1}} \leq -\frac{1}{2\times 2^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln 2}}} = -\frac{1}{2}\, n^{\varepsilon-1}$

en reportant dans le calcul précédent :

$$2\ln(n) + \left(\frac{n}{\alpha_n+1}-1\right)\ln\left(1-\frac{1}{2^{\alpha_n+1}}\right) \overset{APCR}{<} 2\ln(n) + \frac{\ln 2}{(1-\varepsilon)} \times -\frac{1}{4}\, n^{\varepsilon-1} \times \frac{n}{\ln n}$$

ce majorant équivaut à $-\frac{1}{4}\frac{\ln 2}{1-\varepsilon}\, n^{\varepsilon}$ donc tend vers $-\infty$; Ainsi

$n^2 u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$

Il suffit alors d'appliquer à la famille des $(A_{n,\varepsilon})$ le lemme de Borel-Cantelli.

c) Soit $F_p = [X_p = X_{p+1} = \dots = X_{p+k-1} = 1]$

Alors $[L_n \geq k] \subset \bigcup_{p=1}^{n-k+1} F_p$ donc $\mathbb{P}(L_n \geq k) \leq \sum_{p=1}^{n-k+1} \mathbb{P}(F_p) = \frac{n-k+1}{2^k} \leq \frac{n}{2^k}$.

d) $\mathbb{P}(E_j) \leq \dfrac{\Phi(j)}{2^{(1+\frac{\varepsilon}{2})\frac{\ln\Phi(j)}{\ln 2}}} = \dfrac{\Phi(j)}{\Phi(j)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = \Phi(j)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \underset{j\,\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^2}$.

Donc $\underline{\sum \mathbb{P}(E_j) < \infty}$ Par le lemme de Borel Cantelli, si l'on note

$E = \overline{\lim_j} E_j$ alors $\boxed{\mathbb{P}(E) = 0}$

e) Il suffit de dire que $\dfrac{\ln \Phi(j)}{\ln \Phi(j-1)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1$

f) Soit j_n l'entier (unique) tel que $\Phi(j_n - 1) \leq n < \Phi(j_n)$

Comme $j_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après c) $\exists n_0 / \forall n > n_0$ $(1+\frac{\varepsilon}{2})\ln\Phi(j_n) \leq (1+\varepsilon)\ln\Phi(j_n - 1)$

Alors $\forall n > n_0$ on a :

$B_n^\varepsilon \subset \left[L_{\Phi_{j_n}} \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\ln(n)}{\ln 2} \right]$

$\subset \left[L_{\Phi_{j_n}} \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\ln \Phi(j_n - 1)}{\ln 2} \right] \subset \left[L_{\Phi_{j_n}} > (1+\frac{\varepsilon}{2})\dfrac{\ln \Phi_{j_n}}{\ln 2} \right] = E_{j_n}$

Par suite

$\forall m \geq n_0$ $\bigcup_{n\geq m} B_m^\varepsilon \subset \bigcup_{j\geq j_m} E_j$, et comme $j_m \to +\infty$ et que l'on fait une intersection décroissante Il vient : $\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n\geq m} B_n^\varepsilon\right) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j\geq m} E_j\right) = E$

Ainsi $\mathbb{P}(\overline{\lim} B_n^\varepsilon) \leq \mathbb{P}(E) = 0$.

g) Déjà $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \overline{A_n^{1/k} \cup B_n^{1/k}}\right)$ est bien un événement.

De plus $\forall \varepsilon$ $\mathbb{P}\left[\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{n\geq m} \overline{A_n^\varepsilon \cup B_n^\varepsilon}\right)\right] = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\lim}\, A_n^\varepsilon \cup B_n^\varepsilon\right) = 1$ par b) et f)

Donc C est presque sûr comme intersection dénombrable d'événements p.s

Enfin $C = \left[\dfrac{L_n \times \ln 2}{\ln n} \to 1\right]$ Ainsi $\boxed{\text{presque sûrement } L_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln 2}}$