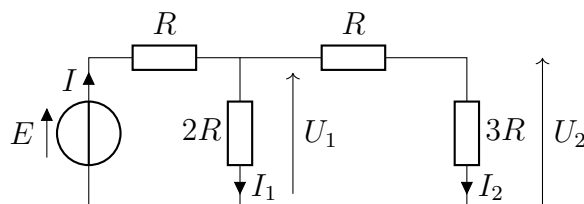


## DS 4 : De la loupe à la machine outil

Les parties de cet examen sont *très largement* indépendantes. On pourra utiliser les résultats intermédiaires donnés dans le texte pour aborder les parties suivantes. Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute application numérique ou commentaire physique est le bienvenu. Les résultats doivent être *encadrés* et tout résultat numérique doit être accompagné de son *unité*. La calculatrice est autorisée, tout objet connecté est interdit.

### Exercice 1 : Des résistances

On étudie le circuit ci-dessous. Les résistances sont alimentées par un générateur idéal de fem  $E$ . Tous les résultats devront être donnés sous la forme la plus simplifiée possible.



1. Exprimer la tension  $U_2$  en fonction de la tension  $E$  et de la résistance  $R$ .
2. Déterminer  $I$ , et en déduire  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $E$  et  $R$ .

### Exercice 2 : La loupe

On observe un petit objet  $AB$  de  $h = 1,0$  mm de haut à l'œil nu placé au punctum proximum situé à  $d_m = 25$  cm de l'œil.

1. Exprimer l'angle  $\theta$  sous lequel est vu l'objet, c'est-à-dire l'angle entre les rayons issus de  $A$  et  $B$ . On placera  $A$  sur l'axe optique de l'œil. Faire l'application numérique.

On observe maintenant le petit objet  $AB$  à travers la loupe, assimilée à une lentille mince convergente de distance focale  $f' = 25$  mm.  $A$  est situé sur l'axe optique de la lentille.

2. Où doit se situer l'objet observé à la loupe pour pouvoir observer son image sans accommoder ? Faire le schéma dans cette configuration (objet, lentille, foyers, rayons).
3. Exprimer l'angle  $\theta'$  sous lequel est vue l'image à travers la loupe, c'est-à-dire l'angle entre les rayons émergents issus de  $B$  et l'axe optique, en fonction de  $h$  et  $f'$ . Faire l'application numérique.

Le grossissement commercial de la loupe est défini par  $G_c = \theta'/\theta$ .

4. Exprimer le grossissement commercial en fonction de  $f'$  et  $d_m$ . Faire l'application numérique. Commenter.

On cherche maintenant à déterminer la distance minimale entre l'objet observé et la lentille permettant de pouvoir accommoder sur l'image. Le punctum proximum est toujours pris à la distance  $d_m = 25$  cm. On suppose que l'œil est placé au foyer principal image de la lentille.

5. Représenter le schéma illustrant l'observation d'un objet donnant une image virtuelle par la lentille convergente.

6. Déterminer la position de l'objet donnant, par la loupe, une image située au punctum proximum.

7. Quel est l'intérêt de cette nouvelle configuration ? On quantifiera la réponse proposée.

On s'intéresse maintenant aux similitudes et différences entre une loupe et un microscope.

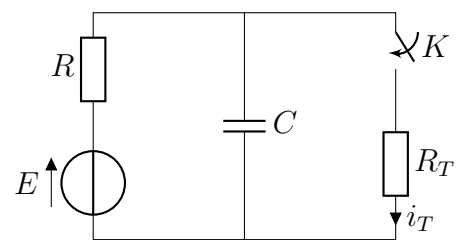
8. Faire le schéma de principe d'un microscope. Est-ce un système afocal ? On justifiera la réponse.

9. Quelle est la différence majeure pour l'œil de l'observateur dans l'utilisation d'une loupe et d'un microscope ?

10. En déduire le rôle de l'objectif et le rôle de l'oculaire du microscope.

### Exercice 3 : Flash électronique

Le fonctionnement d'un flash électronique repose sur la génération d'un éclair dans un tube à décharge. Il s'agit d'un tube de quartz dans lequel on a placé un gaz raréfié, le xénon, entre deux électrodes E1 et E2. Ces deux électrodes sont reliées à un condensateur de capacité  $C$  chargé sous quelques centaines de volts. (Précision : Le condensateur est initialement déchargé, puis quand l'interrupteur est ouvert, on le charge sous une tension de quelques centaines de volts grâce au générateur de fem  $E$  de quelques centaines de volts. Ensuite, dans un second temps, le tube est connecté aux bornes du condensateur).



Autour du tube est enroulé un fil constituant une électrode E3. On peut appliquer entre E1 et E3 une impulsion de tension de plusieurs milliers de volts qui ionise le xénon. Il devient alors conducteur et le condensateur peut se décharger dans le gaz, créant ainsi un éclair lumineux très intense d'une durée très brève.

Le gaz du tube à décharge n'est a priori pas conducteur. Cependant, lorsqu'une très haute tension est appliquée entre deux de ses électrodes, l'ionisation des atomes de xénon qui en

résulte abaisse la résistance du tube qui devient alors équivalent à un conducteur de résistance  $R_T$  dans lequel le condensateur  $C$  peut se décharger.

On utilise le circuit équivalent de la figure ci-contre pour expliquer la formation d'un éclair dans le tube. On considère que la tension  $E$  est une tension continue de 0,30 kV.

### Charge du condensateur

Durant la première phase, l'interrupteur  $K$  est ouvert, et on charge le condensateur initialement déchargé à l'aide du générateur de tension continue  $E$ .

1. Établir proprement l'expression de la tension aux bornes du condensateur durant cette première phase. Que vaut la tension aux bornes du condensateur à la fin du régime transitoire ?

### Génération de l'éclair

Le régime permanent précédent étant atteint pour  $t < t_1$ , on ferme l'interrupteur  $K$  à l'instant  $t = t_1 \gg \tau$ .

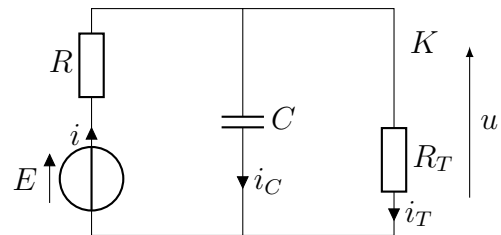
2. Déterminer les expressions  $i_T(t_1^+)$  et  $i_T(\infty)$  de  $i_T$  juste après la fermeture de l'interrupteur et lorsque le nouveau régime permanent est atteint.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $i_T(t)$  pour  $t > t_1$  et la mettre sous la forme :

$$\frac{di_T}{dt} + \frac{i_T}{\tau'} = \frac{E}{RR_TC}$$

Identifier l'expression de  $\tau'$  en fonction de  $R$ ,  $R_T$  et  $C$ .

4. En déduire l'expression complète de  $i_T(t)$  pour  $t > t_1$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $R_T$ ,  $t_1$  et  $\tau'$ .
5. Tracer l'allure de  $i_T(t)$  pour  $t \in [0, t_1]$  et  $t > t_1$  et expliquer la génération d'un éclair lors de la fermeture de l'interrupteur  $K$ .



### Exercice 4 : Étude parasismique d'un gratte-ciel

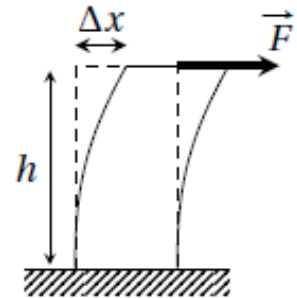
La construction parasismique (ou anti-sismique) regroupe l'étude du comportement des bâtiments et structures sujets à un chargement dynamique du type sismique et la réalisation de bâtiments et infrastructures résistant aux séismes. Les objectifs principaux de la construction parasismique sont de comprendre l'interaction entre les bâtiments ou autres infrastructures de génie civil et le sol ; prévoir les conséquences potentielles des tremblements de terre et, finalement, concevoir et construire des structures résistant aux tremblements de terre, conformément aux normes de construction locales.

Les tremblements de terre représentent des sources très énergétiques (un gros séisme libère une énergie qui peut être 2 ordres de grandeur au-delà de celle des plus importantes explosions nucléaires) et les mouvements associés aux ondes élastiques se propageant dans le manteau peuvent être mesurés à la surface. Les plus gros tremblements de Terre excitent un spectre très large de vibrations allant de  $3,0 \cdot 10^{-4}$  Hz à 20 Hz. Dans cette gamme de fréquence, on distingue classiquement les ondes longue-période, de fréquence inférieure à 0,1 Hz, et les ondes courte-période, de fréquence supérieure à 1 Hz.

De part leur très grande taille, les gratte-ciels sont des bâtiments particulièrement sensibles aux séismes et une étude dynamique de leurs propriétés est nécessaire. Nous allons appuyer notre étude sur le Burj Khalifa, situé à Dubaï aux Émirats arabes unis, qui est depuis 2009 la plus haute tour du monde, avec ces 830 mètres. Sa structure est basée sur un ensemble de poutres en acier représentant une masse totale de  $m \approx 4000$  tonnes sur une hauteur maximale de  $h \approx 800$  mètres.

### Modélisation simple de l'élasticité du bâtiment

On considère un gratte-ciel de hauteur  $h$  et on souhaite étudier le déplacement horizontal de son sommet, repéré par son abscisse  $x(t)$ . La mécanique des milieux continus nous aide à modéliser simplement le comportement d'une poutre verticale de section  $S$  et de hauteur  $h$ , soumise à une force tangentielle horizontale  $F$ . D'après cette théorie, la force tangentielle appliquée par la relation  $F$  est proportionnelle au déplacement  $\Delta x$  du sommet de la poutre par rapport à sa position d'équilibre. On caractérise la poutre par le module de cisaillement, noté  $G$ , qui vaut, pour l'acier,  $G_{\text{acier}} = 1 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

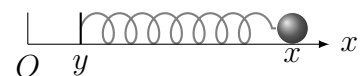


**1.** En considérant que l'intégralité de la masse d'acier qui constitue la tour est utilisée pour réaliser une unique poutre parallélépipédique de hauteur  $h$ , donner l'expression puis calculer la valeur numérique de la section  $S$  en fonction de la masse  $m$  d'acier, de la masse volumique  $\rho = 8000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  de l'acier et de la hauteur  $h$ .

**2.** La force tangentielle précédente peut être vue comme une force de rappel élastique. Établir par analyse dimensionnelle l'expression de la constante de raideur  $k$  équivalente en fonction de  $G$ ,  $h$  et  $S$ . Effectuer l'application numérique.

On modélise le sommet du gratte-ciel par un point matériel de masse  $m \approx 4000$  tonnes, repéré par son abscisse  $x$  sur un axe horizontal, et la force de cisaillement par une force de rappel élastique  $\vec{F}_{\text{el}}$  associée à un ressort de raideur  $k = 8 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide nulle.

Pour modéliser le tremblement de terre, on considère que le point d'attache du ressort n'est pas fixe et se déplace sinusoïdalement sur l'axe horizontal. Sa position est repérée par l'abscisse  $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$ . On prendra typiquement  $y_0 = 1 \text{ cm}$ .



Le poids, bien que non négligeable, est compensé par la réaction du sol et les deux forces

n'interviennent pas dans la direction horizontale.

**3.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la position  $x(t)$ . On la mettra sous forme canonique en introduisant une pulsation caractéristique  $\omega_0$  en fonction de  $k$  et  $m$  et on calculera la valeur numérique.

Pour trouver la solution particulière de cette équation, on se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ .

**4.** À l'aide de l'équation différentielle, établir l'expression de l'amplitude complexe de  $\underline{x}(t)$  sous la forme

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 y_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

**5.** En déduire l'expression  $x_0(\omega)$  de l'amplitude réelle des oscillations du sommet du gratte-ciel. Étudier ses limites à basse et haute fréquence ainsi qu'au voisinage de  $\omega_0$  puis tracer son allure en fonction de  $\omega$ .

**6.** Étant donné les fréquences contenues dans un séisme, que risque-t-il de se produire ?

### Prise en compte de la dissipation d'énergie par les poutres

Le modèle précédent manque de raffinement puisqu'il ne tient pas compte de la quantité énorme d'énergie dissipée par les interactions métalliques lors de la flexion d'une poutre. Pour modéliser cette dissipation d'énergie, on ajoute au modèle précédent une force de frottement qui s'oppose à la vitesse  $\vec{F} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$ , avec  $\lambda = 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**7.** En tenant compte de la force de frottements, établir la nouvelle équation du mouvement vérifiée par  $x(t)$ . On la mettra sous forme canonique en introduisant, en plus de la pulsation caractéristique, un facteur de qualité  $Q$  que l'on exprimera en fonction de  $\lambda$ ,  $k$  et  $m$ .

On se place à nouveau en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ .

**8.** Montrer que l'amplitude complexe des oscillations s'exprime comme

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

**9.** Déterminer les limites de  $\underline{x}_0(\omega)$  à basses et hautes fréquences. En déduire les valeurs de l'amplitude réelle  $x_0$  et du déphasage  $\varphi$  à basse et haute fréquences. Que signifie « basse fréquence » et « haute fréquence » ?

**10.** Montrer que l'amplitude admet un maximum lorsque  $Q > \sqrt{2}/2$ . Établir l'expression de la pulsation  $\omega_r$  à laquelle cette résonance intervient.

**11.** Tracer l'allure de  $x_0(\omega)$  lorsque  $Q = 2$  et  $Q = 0,5$ .

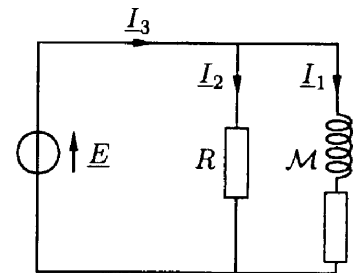
On se place dans le cas où la résonance existe et on suppose que l'amplitude  $x_0(\omega_r)$  à la résonance est peu différente de l'amplitude à la pulsation caractéristique  $x_0(\omega_0)$ .

**12.** Établir l'expression de l'amplitude  $x_0(\omega_0)$  en fonction de  $y_0$  et  $Q$ .

**13.** Quelle valeur minimale du coefficient de frottement  $\lambda$  permet de s'assurer que l'amplitude des vibrations du sommet ne dépasse pas 10 cm (pour une amplitude du tremblement de terre de 1 cm) ? Quelle valeur permet d'annuler la résonance ?

### Exercice 5 : Description d'une machine outil

On propose la description simplifiée suivante pour une machine outil. Un générateur de tension idéal délivrant une force électromotrice sinusoïdale de 380 V efficaces et de fréquence 50 Hz alimente un circuit constitué par une lampe à incandescence de résistance  $R = 38 \Omega$  connectée en parallèle à un moteur  $\mathcal{M}$  que l'on peut schématiser par une bobine et un résistor associés en série.



On désigne respectivement par  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  les déphasages des courants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  par rapport à la tension  $E$  et par  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  les valeurs efficaces respectives de ces courants.

**1.** Exprimer  $I_3$  en fonction de  $I_1$  et  $I_2$ . On pourra, si besoin, introduire dans l'expression un des déphasages sus-cités.

**2.** On mesure  $I_1 = 6 \text{ A}$  et  $I_3 = 15 \text{ A}$ . Calculer la puissance moyenne  $\mathcal{P}_M$ , sur une période, absorbée par le moteur.

**3.** Calculer la puissance moyenne  $\mathcal{P}_g$ , sur une période, fournie par le générateur.

Le facteur de puissance est une caractéristique d'un récepteur électrique qui rend compte de son efficacité pour consommer de la puissance lorsqu'il est traversé par un courant. Il est toujours compris entre 0 et 1. Plus cette valeur est grande, plus la puissance électrique est consommée aux moments où la tension est élevée, appelant donc un courant moins important que si ce facteur de puissance était petit.

**4.** Calculer le facteur de puissance  $\cos \varphi_3$  de la machine.

**5.** On désire modifier le facteur de puissance de l'installation. Pour cela, on branche un condensateur aux bornes du moteur. Calculer la valeur de sa capacité  $C$  pour que le nouveau facteur de puissance de l'installation  $\cos \varphi'_3$  soit égal à l'unité.

**6.** Conclure sur l'importance de la présence de ce condensateur dans la machine outil. Pour qui est-ce important ?