# Matrices orthogonales et isométries

## I. Matrices orthogonales

### 1. Définitions et premières propiétés

**Définition.** *Une matrice* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *est dite orthogonale si* ${}^tMM = I_n$
*On note* $O_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices de* $M_n(\mathbb{R})$ *orthogonales.*

**Proposition.** *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$*, on a :*

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} M \in GL_n(\mathbb{R}) \\ M^{-1} = {}^tM \end{cases} \iff {}^tM \in O_n(\mathbb{R})$$

**Proposition.** *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$*. La matrice* $M$ *est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une bon pour le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

**Corollaire.** *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$*. La matrice* $M$ *est orthogonale si, et seulement si, ses lignes forment une bon pour le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

**Proposition.** *Les matrices de* $O_2(\mathbb{R})$ *sont les matrices de la forme*

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad ou \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad avec \quad \theta \in \mathbb{R}$$

**Proposition.** *L'ensemble* $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$*.*

**Proposition.** *Si* $M \in O_n(\mathbb{R})$*, alors* $\det M = \pm 1$.

**Définition.** *Une matrice* $M \in O_n(\mathbb{R})$ *est dite positive si* $\det M = 1$ *et négative sinon*
*On note* $SO_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices de* $M_n(\mathbb{R})$ *orthogonales positives.*

**Proposition.** *L'ensemble* $SO_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $O_n(\mathbb{R})$*.*

**Corollaire.** *Pour tout* $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$*, on a* $R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta')$*.*
*Ainsi,* $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ *est un groupe commutatif.*

### 2. Matrices orthogonales et bases orthonormales

Dans la suite $E$ désigne un espace euclidein de dimension $n$.

**Théorème.** *Soient* $\mathcal{B}$ *une bon de* $E$ *et* $\mathcal{B}'$ *une base de* $E$*.*
*La base* $\mathcal{B}'$ *est orthonormale si, et seulement si, la matrice de passage* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est orthogonale.*

**Proposition.** *Soient* $\mathcal{B}$ *une bon directe de* $E$ *et* $\mathcal{B}'$ *une base de* $E$*.*
*La base* $\mathcal{B}'$ *est orthonormale directe si, et seulement si, la matrice de passage* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est orthogonale positive.*

**Corollaire.** *Soient* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ *deux bases orthonormales de* $E$ *et* $P$ *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{B}'$*.*
*Les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *ont la même orientation si, et seulement si,* $\det P = 1$

**Proposition.** *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ deux bases orthonormales directes de $E$, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.*

**Définition.** *Soit $E$ euclidien de dimension $n$.*
*Le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe est appelée le produit mixte.*
*Le produit mixte de vecteurs $x_1$, ..., $x_n$ est noté $Det(x_1, ..., x_n)$ ou $[x_1, ..., x_n]$.*

**Proposition.** *Soit $E$ euclidien de dimension $n$, $f \in (E)$ et $(x_1, ..., x_n)$.*
*On a $[f(x_1), ..., f(x_n)] = \det f \times [x_1, ..., x_n]$*

## II. Isométries

**Définition.** *On appelle isométrie vectorielle de $E$ tout endomorphisme de $E$ qui conserve la norme, i.e. vérifiant*

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

*L'ensemble des isométries de $E$ est noté $O(E)$*

**Proposition.** *Tout isométrie vectorielle est un automorphisme.*

**Proposition.** *L'ensemble $(O(E), \circ)$ est un groupe appelé groupe orthogonal.*

**Proposition.** *Un endomorphisme de $E$ est une isométrie si, et seulement, s'il conserve le produit scalaire i.e. si, et seulement si,*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

**Corollaire.** *L'image de deux vecteurs orthogonaux par une isométrie vectorielle est deux vecteurs orthogonaux.*
*Une isométrie vectorielle est aussi appelée un automorphisme orthogonal.*

**Définition.** *On appelle symétrie orthogonale toute symétrie par rapport à un sev $F$ parallèlement à son orthogonal $F^{\perp}$.*

**Proposition.** *Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.*

**Théorème.** *Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\mathcal{B}$ une bon de $E$. Il y a équivalence entre :*
- *$f$ est une isométrie,*
- *$f$ transforme toute bon en une bon,*
- *$f$ transforme $\mathcal{B}$ en une bon.*

**Théorème.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une bon de $E$. On a :*

$$f \in O(E) \Longleftrightarrow Mat_{\mathcal{B}} f \in O_n(\mathbb{R}).$$

**Corollaire.** *Les isométries de $\mathbb{R}^2$ sont les rotations et les symétries par rapport à une droite.*

**Proposition.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe et $r$ l'endomorphisme de $E$ tel que $Mat_{\mathcal{B}} f = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.*
*Alors, dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}'$, $Mat_{\mathcal{B}'} f = R(\theta)$.*
*L'endomorphisme $f$ est appelé la rotation d'angle $\theta$.*

**Proposition.** *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, alors il existe une unique rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$.*
*Son angle est appelé angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et noté $(\vec{u}, \vec{v})$. Il est unique modulo $2\pi$.*

**Définition.** *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. On appelle angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $(\vec{u}, \vec{v})$, l'angle entre les vecteurs $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.*