Familles de vecteurs

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Familles génératrices

Définition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ est génératrice de E ou qu'elle engendre E lorsque $Vect(x_1, ..., x_r) = E$ i.e. lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \exists(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r)$ est génératrice de E si, et seulement si, l'application $\mathbb{K}^r \to E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ est surjective.

Exercice. *La famille $((1,0,0), (0,1,1), (0,1,1), (1,2,3))$ engendre $\mathbb{R}^3$.*

Exemple. *La famille $\left(X^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$.*

Définition. *Plus généralement, si F est un sev de E et $(x_1, ..., x_r) \in E^r$.*
On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ engendre F si $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r) = F$ i.e. si

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \ x_i \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \ \exists(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r) \in E^r$ engendre donc $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est elle-même génératrice.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_{r+1})$ engendre E, alors la famille $(x_1, ..., x_r)$ engendre E si, et seulement si, $x_{r+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_r)$ engendre E, alors la famille $(y_1, ..., y_s)$ engendre E si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in \mathrm{Vect}(y_1, ..., y_s)$.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_r)$ engendre F_1 un sev de E et si la famille $(y_1, ..., y_s)$ engendre F_2 un sev de E, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ engendre $F_1 + F_2$.*

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre E ou qu'elle est génératrice de E lorsque $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right) = E$ i.e. lorsque*

$$\forall x \in E, \ \exists(\lambda_k)_{k \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \ : x = \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est génératrice si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E, \ (\lambda_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

est surjective.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que la partie A est génératrice si* $\text{Vect}A = E$ *i.e. si tout élément de E est une combinaison linéaire de vecteurs de A*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice alors toute partie de E contenant A est elle-même génératrice.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice et $a \in A$. Alors $A \setminus \{a\}$ est encore génératrice de E si, et seulement si, $a \in \text{Vect}\,(A \setminus \{a\})$.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice alors $B \in \mathcal{P}(E)$ est génératrice si, et seulement si, $A \subset \text{Vect}B$.*

II. Familles libres

Définition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ est libre si, et seulement si, l'application $\mathbb{K}^r \to E,\ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ est injective.*
Si la famille $(x_1, ..., x_r)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée

Proposition. *La famille $(x_1, ..., x_r)$ est libre si*

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

La famille $(x_1, ..., x_r)$ est liée si

$$\exists (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0 \text{ et } \exists i_0 \in [\![1, r]\!] \ : \ \lambda_{i_0} = 0$$

Remarque : Pour montrer qu'une famille $(x_1, ..., x_r)$ est libre, on écrit :
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0$. Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

Proposition. *Si $(x_1, .., x_r)$ est libre alors la famille $(x_1, .., x_{r+1})$ est libre si, et seulement si, $x_{r+1} \notin \text{Vect}(x_1, .., x_r)$*

Exemple. *Une famille d'un vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est non nul.*
Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs sont non colinéaires.
Une famille de trois vecteurs (u, v, w) est libre si, et seulement si, la famille (u, v) est libre et $w \notin \text{Vect}(u, v)$.

Proposition. *$(x_1, .., x_r)$ est liée si, et seulement s'il existe $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $x_{i_0} \in \text{Vect}(x_i)_{i \in [\![1,r]\!] \setminus \{i_0\}}$.*

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

Proposition. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E en somme directe. Si $(x_1, ..., x_r)$ est une famille libre de vecteurs de F_1 et si la famille $(y_1, ..., y_s)$ est une famille libre de vecteurs de F_2, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ est libre.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_r)$ est une famille libre, alors, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, les sev $\text{Vect}(x_1, ..., x_k)$ et $\text{Vect}(x_{k+1}, ..., x_r)$ sont en somme directe.*

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est libre si, et seulement si, l'application*

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (\lambda_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

est injective. Sinon, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Proposition. *Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si toute ses sous-familles finies sont libres i.e.*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad \sum_{k\in I} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)$$

Remarque : Les propriétés précédentes se généralisent à des familles quelconques.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que la partie A est libre si toute sous-famille finie de A est libre. Sinon, on dit que la partie est liée.*

Remarque : Pour montrer qu'une partie A est libre, on écrit :

Soient $(a_1, ..., a_r)$ une famille d'éléments distincts de A et $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k = 0$.

Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ liée alors toute partie de E contenant A est elle-même liée.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ libre alors toute partie de E incluse dans A est elle-même libre.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. La partie A est liée si et seulement si un de ses élément s'écrit comme une combinaison linéaire des autres i.e. si et seulement si*

$$\exists a \in A\ :\ a \in \mathrm{Vect}\,(A \setminus \{a\})$$

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ libre et $x \in E$ alors la partie $A \cup \{x\}$ est libre si et seulement si $x \notin \mathrm{Vect} A$.*

III. Bases

Définition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r)$ est une base si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^r \to E,\ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

est bijective.

Définition. *Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Remarque : la famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est une base si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (\lambda_k)_{k\in I} \mapsto \sum_{k\in I} \lambda_k x_k$$

est bijective.

Proposition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. La famille $(x_1, ..., x_r)$ est une base de E si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists! (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r\ :\ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Pour tout vecteur x, on appelle coordonnées de x dans la base $(x_1, ..., x_r)$ l'unique famille de scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ telle que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$.

Proposition. *Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \ : \ x = \sum_{k\in I} \lambda_k x_k$$

Pour tout vecteur x, on appelle coordonnées de x dans la base $(x_i)_{i\in I}$ l'unique famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{k\in I} \lambda_k x_k$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on note*

$$e_i = (\delta_{k,i})_{k\in[\![1,n]\!]} = (0, ...0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0...0)$$

La famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Proposition. *La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.*

Proposition. *Si $(x_1, .., x_r)$ est une base de E, alors pour tout $x_{r+1} \in E$, la famille $(x_1, .., x_{r+1})$ est liée.*

Proposition. *Si $(x_1, .., x_{r+1})$ est une base de E, alors $(x_1, .., x_r)$ n'est pas génératrice.*

Proposition. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E en somme directe. Si $(x_1, ..., x_r)$ est une base de F_1 et si $(y_1, ..., y_s)$ est une base de F_2, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ est une base de $F_1 \oplus F_2$.*

Corollaire. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E supplémentaires. Si $(x_1, ..., x_r)$ est une base de F_1 et si $(y_1, ..., y_s)$ est une base de F_2, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ est une base de E.*

Proposition. *Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, alors les sev* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_r)$ *et* $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, ..., e_n)$ *sont supplémentaires.*

Remarque : Les propriétés précédentes se généralisent à des familles quelconques.