Suites et séries de fonctions

Feuille d'exercices #08

Partie A – Suites de fonctions

Exercice 1 — Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \text{ sur } [0,1]\,;\ g_n(x) = x^n(1-x)^n \text{ sur } [0,1]\,;\ h_n(x) = \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 2 — Soient $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 — Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
2. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Qu'en déduire ?

Exercice 4 — On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - f_n(x)$. Montrer que $\|\delta_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}n}$ puis conclure.
   On cherchera à majorer $\delta_n(x_0)$ où x_0 vérifie $\delta_n'(x_0) = 0$.
3. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\gamma$.

Exercice 5 — Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions α-lipschitzienne sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 6 — Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in I,\quad |u_n(x)| \leqslant a_n$$

où a_n est le terme général d'une série supposée convergente.

Montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k(x))$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

Exercice 7 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad \varphi_n(t) = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n^2t^2}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 — *Second théorème de Dini*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f. Soit enfin, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la subdivision du segment $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in \{0,\dots,p\},\quad a_k = a + k\cdot\frac{b-a}{p}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a_{k+1}) - f(a_k) \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $k \in \{0,\dots,p-1\}$.
2. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$.
3. *Application* – Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers exp sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Partie B – Séries de fonctions

Exercice 9 — Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ des séries de termes généraux :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}$$

Exercice 10 — Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\ ; \quad u_n(x) = \frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\ ; \quad u_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\ ; \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x \geqslant 0)$$

Exercice 11 — Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de terme général $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Calculer sa somme.

Exercice 12 — Soient $\alpha > 0$ et $u_n(x)$ défini sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = n^2 x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple et normale de $\sum u_n$ sur $[0,+\infty[$.
2. En cas de convergence, quel est le domaine de continuité de la somme ?
3. Étudier la somme au voisinage de 0.

Exercice 13 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.
On pose alors $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$. Montrer que :

- $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
- $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n}$ converge.
- $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 14 — Pour $\alpha > 1$ et $x > 0$, on pose :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Déterminer la limite ζ en $+\infty$ et trouver un équivalent en 1^+.
2. Montrer que la fonction η est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver pour $x > 1$ une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$.
4. Retrouver un équivalent en 1^+ de $\zeta(x)$.

Exercice 15 — On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et établir sa continuité.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$? convergence uniforme ?

Exercice 16 — On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité de f.
3. Trouver un équivalent de f au voisinage de 1^+.

Exercice 17 — Soit $a > 0$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner un équivalent en 0 et $+\infty$ de f.

Exercice 18 — Soit, pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(x+n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est définie, continue et à valeurs positives.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser ses variations.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 19 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ et $D = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tous $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.
2. Prouver la convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ pour tout $x \in D$.
3. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,2\pi[$.

Exercice 20 — Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto x \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Justifier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $f : x \mapsto -\ln(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

   (i) $\forall x > 0,\quad f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ (ii) $f(1) = 0$ (iii) f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercice 21 — On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.
2. Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire un développement de $\arcsin(x)$.

Exercice 22 — Justifier l'égalité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$$

Exercice 23 — On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi_x : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{ikt}$.

   a) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$.

   b) Calculer de deux façons différentes $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_x(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

   c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

Partie C – Approximation uniforme

Exercice 24 — *Lemme de Riemann-Lebesgue*

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 25 — *Approximation simultanée*

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer qu'alors, pour tout $x_0 \in [a,b]$:

$$\|f-g\|_\infty \leqslant |f(x_0) - g(x_0)| + (b-a)\|f' - g'\|_\infty$$

2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que la suite $\left(P_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f'.

Exercice 26 — *Approximation polynomiale de la racine carrée*
On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale et préciser le degré de P_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \geqslant 0,\quad P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right)$$

3. Montrer que tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, en croissant, vers une fonction f à préciser.
5. Prouver que la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.