DM 9 - Correction

Exercice 1 : Mouvement d'un proton dans un cyclotron

1) Système : proton

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Force : $\vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ $(\vec{E} = \vec{0})$.

On a alors, par application du TPC :

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F_L}) = \vec{F_L} \cdot \vec{v} = 0$, on en déduit que la norme de la vitesse est constante, le mouvement est uniforme.

2) cf annexe, $\vec{B} = +B\,\vec{u_z}$.

3) PFD : $m\vec{a} = \vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$,

le mouvement se fait dans le plan (xOy) car $\dot{v}_z = 0$ et $v_z(0) = 0$. On a alors, en projetant sur (Ox) et (Oy) :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = e v_y B \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -e v_x B \end{cases}, \quad \boxed{\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c B \\ \dot{v}_y = -\omega_c B \end{cases}}$$

4) Pour résoudre cette équation différentielle, on peut poser :

$$u = v_x + i v_y.$$

Cela permet de transformer l'équation différentielle :

$$\dot{u} + i\omega_c u = 0.$$

On a donc une solution sous la forme :

$$u(t) = A\exp(-i\omega_c t),\ A \in \mathbb{R}.$$

or, $u(0) = v_1 = v_x + i v_y$, $A = v_1$.

d'où
$$\begin{cases} v_x(t) = v_1 \cos(\omega_c t) \\ v_y(t) = -v_1 \sin(\omega_c t). \end{cases}$$

On en déduit alors que, en intégrant :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_1}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + C_1 \\ y(t) = \dfrac{v_1}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + C_2 \end{cases}}.$$

Ce sont les équations paramétriques d'un cercle de rayon $\dfrac{v_1}{\omega_c}$.

5) Lors du $n^{\text{ième}}$ tour, on parcourt la distance :

$$\boxed{d = \frac{2\pi R_n}{2} = \pi \frac{v_n}{\omega_c}}.$$

6) On a alors

$$v_n = \frac{\pi R_n}{\Delta t} = \frac{d}{\Delta t} = \omega_c R_n,$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{eB}}$$

7) Pour que le proton ($q>0$) soit accéléré, il

faut que $\vec{E}$ soit dans le même sens que $\vec{v}$.
On doit avoir
→ $U > 0$ pour aller de A_0 à A
→ $U < 0$ pour aller de B à C.

8) Inverse.

9) On a $T = 2\Delta t$, $\boxed{f = \frac{eB}{2\pi . m}}$.

Exercice 2 : Etude des frottements dans une scie circulaire

1) $\omega_1 = \frac{2\pi \times 640}{60} = 67 \text{ rad.s}^{-1}$

2) et $v = R\,\omega_1 = 20 \text{ m.s}^{-1}$.

On cherche la fréquence pour 30 m.s^{-1} :

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \frac{v_2}{R}, \quad f_2 = \frac{v_2}{2\pi R} = 16 \text{ Hz}.$$

3) On a une accélération angulaire constante : $\dot{\omega} = cte$. En intégrant.

$$\omega(\Delta t) = \omega_0 + \dot{\omega}\Delta t,$$

d'où $\dot{\omega} = -\frac{\omega_0}{\Delta t} = -11,2 \text{ rad.s}^{-2}$ pour $\Delta t = 6\text{s}$

et $|\dot{\omega}| = +11,2 \text{ rad.s}^{-2}$.

4) On intègre une nouvelle fois :

$$\theta(\Delta t) = \frac{\dot{\omega}\Delta t^2}{2} + \omega_0 \Delta t, \quad \theta(t=0) = 0.$$

et $\theta(\Delta t = 6\text{s}) = 201 \text{ rad}$, soit 32 tours.

5) On modélise le disque par un cylindre de diamètre 60cm, de masse 4 kg.

$$J = \frac{1}{2} m R^2 = 0,18 \text{ kg.m}^2.$$

6) On peut utiliser une approche énergétique, avec A le moment initial, où on a rotation à ω_1 et B, l'instant final B, à l'arrêt.

On a alors : $E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\Gamma)$

or, $W_{A\to B}(\Gamma) = \int_{A\to B} \mathcal{P}(\Gamma)\, dt$

$$= \int_{A\to B} -\alpha J \dot\theta \, dt$$

$$= -\alpha J \int_{\theta=0}^{\theta(6s)} d\theta$$

et $E_c(B) - E_c(A) = -\frac{1}{2} J \omega_1^2$, alors :

$$\alpha = \frac{\omega_1^2}{2\,\theta(6s)} = 11,2 \text{ SI}.$$

7) Si α n'est pas fonction de ω, le calcul ci-dessus reste valable. Ainsi, il est possible d'effectuer plusieurs essais (ω_1 différents) et de voir si le nombre de tours effectué évolue comme :

$$N = f(\omega_1^2)$$

car, en posant N le nombre de tours,

$$\alpha = \frac{\omega_1^2}{2 \cdot 2\pi N}, \qquad N = \frac{1}{4\pi\alpha}\,\omega_1^2.$$