TD 21 - AL

Ex 1:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tq $\begin{cases} f(1,0,0) = (0,1) \\ f(1,1,0) = (1,0) \\ f(1,1,1) = (1,1) \end{cases}$

Mq $((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ base de $\mathbb{R}^3$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = \lambda_1 (0,1) + \lambda_2 (1,0) + \lambda_3 (1,1)$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les coordonnées de (x,y,z) dans (x_1, x_2, x_3)

. . . —

Donc f existe et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1) = \begin{pmatrix} y \\ x-y+z \end{pmatrix}$

Donc $\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto (x+2y,\ x+y+z)$

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y = 0 = x+y+z \}$

$= \mathbb{R}(-2, 1, 1)$

$\operatorname{Im} f = f(E)$

$= f(\operatorname{Vect}((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)))$

$= \operatorname{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$

$= \operatorname{Vect}((1,1), (2,1), (0,1))$

$= \mathbb{R}^2$

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $\begin{cases} f(1,2) = (1,1,0) \\ f(2,1) = (0,0,1) \end{cases}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - 2\beta \\ \beta = y - 2(x - 2\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - 3\beta \\ \beta = \frac{-y+2x}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = y - 5x \\ \beta = \frac{-y+2x}{3} \end{cases}$$

Donc $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (y-5x)(1,1,0) + \frac{-y+2x}{3}(0,0,1)$

$$\begin{cases} y - 5x = 0 \\ y - 5x = 0 \\ \frac{-y+2x}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x \\ -y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 5x \\ -3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f = \{(x,y) = (0,0)\}$

$$\mathrm{Im} f(x,y) = \begin{pmatrix} y - 5x \ (1,1,0) \\ \frac{-y+2x}{3} (0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 5x \\ y - 5x \\ \frac{-y+2x}{3} \end{pmatrix}$$

Ex2 :

1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$
$G = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$
$= \{a(1,1,1), a \in \mathbb{R}\}$

Mq $F \cap G = \{(0,0,0)\}$

Soit $h \in F \cap G$

Il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $h(x) = (x+y-z)(1,1,1)$

$$= \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $h(x) = (0,0,0)$

Donc F et G sont complémentaires.

2) $H = \text{Vect}\{(1,0,0)\} = \{a(1,0,0), a \in \mathbb{R}\}$

Soit $h \in F \cap H$

Il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $h(x) = (x+y-z)(1,0,0)$

$$= \begin{pmatrix} x+y-z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc F et H sont complémentaires

Ex 3:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$\mathrm{Ker} f = \{x \in E \quad f(x) = 0\}$

$\mathrm{Ker} f^2 = \{x \in E \quad f^2(x) = 0\} = \{x \in E \quad f(f(x)) = 0\}$

$\forall x \in E \quad f(x) = 0_E \Rightarrow f(f(x)) = f(0_E) \xRightarrow{f \text{ lin}} f(f(x)) = 0_E$

Donc $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

2) $\mathrm{Im} f = \{f(x), x \in E\}$

$\mathrm{Im} f^2 = \{f(f(x)), x \in E\}$

$\subset \mathrm{Im} f$

3) Mq $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$

. Supp $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

Mq $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f \subset \{0\}$

Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$

Il existe $t \in E$: $x = f(t)$ et $f(x) = 0$

On a donc $f(f(t)) = 0$

càd $t \in \mathrm{Ker} f^2$

Donc $t \in \mathrm{Ker} f$

Ainsi $x = f(t) = 0_E$

. Supp $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$

Mq $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

On a déjà $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

Soit $x \in \mathrm{Ker} f^2$

On a $f(f(x)) = 0_E$

càd $f(x) \in \mathrm{Ker} f$

Donc $f(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$

puis $f(x) = 0$ càd $x \in \mathrm{Ker} f$

4) Mq $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \iff \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = E$

. Supp $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$

Mq $E \subset \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$

Soit $x \in E$

On cherche $x_1 \in \mathrm{Ker} f$, $x_2 \in \mathrm{Im} f$ tq $x = x_1 + x_2$

$f(x) = f(x_2)$

$x_2 = f(t)$ avec $t \in E$

Donc $f(x) = f(f(t))$

On a $x = \underbrace{x - f(t)}_{y \in \mathrm{Ker} f} + \underbrace{f(t)}_{\in \mathrm{Im} f}$

$f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$

Donc $E \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$

Rq: $f(x) = f(f(t)) \iff f(x) - f(f(t)) = 0 \iff f(x - f(t)) = 0 \iff x - f(t) \in \mathrm{Ker} f$

. Supp $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$

Mq $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

On a déjà $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

On a déjà $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$

Soit $y \in \mathrm{Im} f$

Par déf, il existe $x \in E$ $y = f(x)$

Comme $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$, il existe $(x_1, x_2) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tq $x = f(x_1) + x_2$

puis $f(x) = f(f(x_1)) + f(x_2)$ car f lin

$= f^2(x_1)$ car $x_2 \in \mathrm{Ker} f$

Ainsi $y = f^2(x_1) \in \mathrm{Im} f^2$

On appelle homothétie de E toute endo. de E de la forme λId_E

Rq : l'ens des homothéties de E est la droite $\mathbb{K} Id_E$

Ex5 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

f homothétie $\Leftrightarrow \underbrace{\forall x \in E \ (x, f(x)) \text{ liée}}_{*}$

$\boxed{\Rightarrow}$ OK

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\forall x \in F$, $(x, f(x))$ liée

Soit $x \in E$ tq $x \neq 0_E$

Comme (x) libre et $(x, f(x))$ liée, $f(x) \in \text{Vect}(x)$

càd qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tq $f(x) = \lambda_x x$

Supp E possède une base $(e_1, \dots, e_n)$ et f vérifie $*$

Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $f(e_i) = \lambda e_i$

Mq $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$

Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $f(x) = \lambda x$

On a $f(x) = \lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i$

et $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ libre, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i = \lambda$

Ainsi f et λId_E coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$

donc $f = \lambda Id_E$

Retour au cas général :

On a pris $(x_1, x_2) \in (E \setminus \{0\})^2$

Il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tq $f(x_1) = \lambda_1 x_1$
$f(x_2) = \lambda_2 x_2$

Mq $\lambda_1 = \lambda_2$

1er cas : (x_1, x_2) libre

On pose $x = x_1 + x_2 \in E \setminus \{0\}$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $f(x) = \lambda x$

On a $f(x) = \lambda x_1 + x_2$

et $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = \lambda_1 \cdot x_2 + \lambda_2 \cdot x_2$

Comme (x_1, x_2) libre, on en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

2è cas : (x_1, x_2) liée

Il existe alors $\mu \in \mathbb{K}$: $x_2 = \mu x_1$

On a $f(x_2) = \mu f(x_1)$

donc $\lambda_2 \cdot x_2 = (\mu \lambda_1) \cdot x_2$

puis $(\lambda_2 \mu) \cdot x_1 = (\mu \lambda_1) \cdot x$

Comme $x_1 \neq 0_E$ $\lambda_2 \mu = \lambda_1 \mu$

Comme $x_2 \neq 0_E$, $\mu \neq 0_{\mathbb{K}}$

puis $\lambda_2 = \lambda_1$

Ex 4:

1) Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $g \circ f = f \circ g$

Mq $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont stable par g

càd Mq $g(\text{Ker} f) \subset \text{Ker} f$ et $g(\text{Im} f) \subset \text{Im} f$

. Soit $x \in \text{Ker} f$

car $x \in \text{Ker} f$

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$$

car g lin

Donc $g(x) \in \text{Ker} f$

. Soit $y \in \text{Im} f$ Mq $g(y) \in \text{Im} f$

Il existe $x \in E$ tq $y = f(x)$

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x)$$

Donc $g(y) \in \text{Im} f$

2) Mq $f \circ p = p \circ f$ ssi $\text{Ker} p$ et $\text{Im} p$ sont stables par f

D'après ①, on a déjà $\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\text{Ker} p$ et $\text{Im} p$ sont stables par f

Soit $x \in E$

Mq $f \circ p(x) = p \circ f(x)$

Il existe $(x_i, x_k) \in \text{Im} p \times \text{Ker} p$ tq $x = x_i + x_k$

$$f \circ p(x) = f(p(x_i + x_k)) = f(p(x_i)) = f(x_i)$$

$x_k \in \text{Ker} p$

$$p \circ f(x) = p(f(x)) = p(f(x_i)) + p(f(x_k))$$

$x_k \in \text{Ker} p$ et $\text{Ker} p$ stable par f

donc $f(x_k) \in \text{Ker} p$

De même $x_i \in \text{Im} p$ et $\text{Im} p$ stable par f

donc $f(x_i) \in \text{Im} p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$

donc $p(f(x_i)) + p(f(x_k)) = p(f(x_i)) = f(x_i) = f \circ p(x_i)$

donc f et p commutent

Soit $x \in \ker p$

$f \circ p(x) = 0$

$p \circ f(x) = p(\overbrace{f(x)}^{\in \ker p}) = 0$

. Soit $x \in \operatorname{Im} p$

$f \circ p(x) = f(x)$

$p \circ f(x) = p(\overbrace{f(\underbrace{x}_{\substack{\in \operatorname{Im} p \\ = \ker(p - Id)}})}^{\in \operatorname{Im} p}) = f(x)$

Donc $\forall (x_1, x_2) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$

$$f \circ g(x_1 + x_2) = f \circ p(x_1) + f \circ p(x_2)$$
$$= p \circ f(x_1) + p \circ f(x_2)$$
$$= p \circ f(x_1 + x_2)$$
$$= p \circ f(x)$$

Ex 6 :

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $f \circ g = Id$

1) Mq $g \circ f$ est une projection

càd mq $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f$

$g \circ f \circ g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ Id \circ f = g \circ f$

Donc $g \circ f$ est une projection

2). Mq $\ker f = \ker g \circ f$

On a déjà $\ker f \subset \ker g \circ f$

Soit $x \in \ker(g \circ f)$

càd $g \circ f(x) = 0$

donc $g(f(x)) = 0$

donc $f(x) = 0$

donc $g \circ f(x) \in \ker(f)$

donc $\ker f = \ker g \circ f$

. Mq $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, g\circ f$

On a déjà $\mathrm{Im}\, g\circ f \subset \mathrm{Im}\, f$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, g$

Il existe $x \in E$ tq $g(x) = y$

Or $x = f(g(x))$

$y = g(f(g(x)))$

$\quad = g\circ f(g(x))$

donc $y \in \mathrm{Im}\, g\circ f$

3) Mq $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g = E$

→ Mq $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g \subset \{0_E\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g$

On a $f(x) = 0$

Il existe $t \in E$ tq $g(t) = x$

donc $f\circ g(t) = f(x) = 0$

donc $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g$

→ Mq $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g = E$

$g\circ f$ est un projecteur

donc $\mathrm{Ker}(g\circ f) \oplus \mathrm{Im}(g\circ f) = E$

càd $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, g = E$

$\boxed{\text{ou:}}$ $x = \underbrace{x_1}_{\in \mathrm{Ker} f} + \underbrace{x_2}_{\in \mathrm{Im}\, g}$

donc $f(x) = 0$

$f(x_1 + x_2) = 0$

$f(x_1) = -f(x_2)$

$f(x_1) = f(\underbrace{g(t)}_{\in \mathrm{Im}\, g}) = t$

donc $x = x_1 + g(t)$

puis $x_1 = x - g(t)$

$= x - g(f(x))$ $\lrcorner$

On pose $x_1 = x - g\circ f(x)$

$x_2 = g\circ f(x)$

On a : $x = x_1 + x_2$

$x_1 \in \mathrm{Ker} f$ car $f(x_1) = f(x) - f\circ g\circ f(x) = 0$

$x_2 \in \mathrm{Im} f$

5) Mq $\mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Im} f = E$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f$ Mq $x = 0$

$g(x) = 0$

Il existe $t \in E$ tq $x = f(t)$

$g(f(t)) = 0$

$f\circ g(x) = 0$

donc $x = 0$

$\ulcorner$ ... $\lrcorner$

$\boxed{\text{ou:}}$ $f\circ g = Id$

donc g inj et f surj

donc $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ et $\mathrm{Im} f = F$

donc $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

<u>Ex :</u>

$$\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \longmapsto f'$$

$$\psi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \left(x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt\right)$$

$\psi\circ\varphi(\sin) = \sin - \sin(1)$

Ex 7:

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$

1) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g\circ f$

2) $\operatorname{Im} g\circ f \subset \operatorname{Im} g$

3) a) $\boxed{\Rightarrow}$ Supp $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \operatorname{Ker} f$

Mq $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

. Soit $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$
$g(x) = 0$
Il existe $t \in E$ tq $f(t) = x$
$g(x) = g(f(t)) = g\circ f(t) = 0$
donc $t \in \operatorname{Ker} g\circ f$

Or $\operatorname{Ker} g\circ f = \operatorname{Ker} f$

donc $t \in \operatorname{Ker} f$
donc $f(t) = 0 = x$
donc $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

On a déjà $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$

Mq $\operatorname{Ker}(g\circ f) \subset \operatorname{Ker} f$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$

càd $g\circ f(x) = 0$

puis $g(f(x)) = 0$

$f(x) \in \operatorname{Ker} g$

Or $f(x) \in \operatorname{Im} f$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$

donc $f(x) = 0$

donc $x \in \operatorname{Ker} f$

donc $\operatorname{Ker} g\circ f \subset \operatorname{Ker} f$

donc $\operatorname{Ker} g\circ f = \operatorname{Ker} f$

b) Supp $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, g\circ f$

Mq $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, g$

Soit $x \in E$

$x = \underbrace{x_1}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{x_2}_{\in \mathrm{Ker}\, g}$

$g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1)$

$g(x) = g(f(t))$ t antécédent de $g(x)$ par $g\circ f$

$g(x) \in \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, g\circ f$

Soit t un antécédent de $g(x)$ par $g\circ f$

On pose $\begin{cases} x_1 = f(t) \\ x_2 = x - f(t) \end{cases}$

Mq $\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ x_1 \in \mathrm{Im} f \\ x_2 \in \mathrm{Ker}\, g \end{cases}$ car $g(x_2) = g(x) - g(f(t))$

Par déf de t : $g(f(t)) = g(x)$

donc $g(x_2) = 0$

$x_2 \in \mathrm{Ker}\, g$

. Mq $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, g\circ f$

Supp $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker}\, g$

On a déjà $\mathrm{Im}\, g\circ f \subset \mathrm{Im}\, g$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, g$ Mq $y \in \mathrm{Im}\, g\circ f$

Par déf, il existe $x \in E$ tq $g(x) = y$

Par hyp, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im} f \times \mathrm{Ker}\, g$ tq $x = x_1 + x_2$

$g(x_1 + x_2) = y$

$g(x_1) + g(\underbrace{x_2}_{\in \mathrm{Ker}\, g}) = y$

$y = g(x_1)$

donc il existe $t \in E$ tq $f(x_1) = y$

donc $g(f(t)) = y$

donc $g \circ f(t) = y$

puis $y \in \operatorname{Im} g \circ f$

Ex8:

1) $(Id - p) \in \mathcal{L}(E)$ important à mentionner AL ⚠

Mq $(Id-p) \circ (Id-p) = Id - p$

$$(Id-p) \circ (Id-p) = Id \circ Id - Id \circ p - p \circ Id + p \circ p$$
$$= Id - p - p + p$$
$$= Id - p$$

2) Supp $p+q$ un projecteur de E

Mq $p \circ q = q \circ p = 0$ càd

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q$$
$$= p + q + p \circ q + q \circ p$$

donc $p \circ q + q \circ p = 0$ composé par p

d'où $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$

$2 p \circ q \circ p = 0$

$p \circ q \circ p = 0$

Ainsi $p \circ q = 0$

puis $q \circ p = 0$

enfin $p \circ q = q \circ p = 0$

$\rightarrow$ Supp $p \circ q = q \circ p = 0$

Mq $p+q$ est un projecteur de E

$$(p+q)\circ(p+q) = p\circ p + p\circ q + q\circ p + q \circ q$$

$$= p + q + \underbrace{p\circ q + q\circ p}_{=0}$$

$$= p+q$$

donc $p+q$ est un projecteur de E

Mq $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$

Rq : On a déjà $\operatorname{Ker}(f+g) \supset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$ Mq $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$

On a : $(p+q)(x) = 0$

donc $p(x) + q(x) = 0$

$p\circ p(x) + p \circ q(x) = 0$

donc $p(x) = 0$

de même pour $q(x) = 0$

Mq $\operatorname{Im} p+q = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$

Rq : $\underbrace{\operatorname{Im}(f+g)}_{=\{f(x)+g(x),\ x\in E\}} \subset \underbrace{\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g}_{=\{f(a)+g(b),\ (a,b)\in E^2\}}$

Soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} g$

Par déf : il existe $(a,b) \in (a,b) \in E^2$ tq $x = p(a) + q(b)$

$p\circ q(x) = x$

$$(p\circ q)(x) = (p+q)(p(a)+q(b)) = p(p(a)+q(b)) + q(p(a)+q(b)) = p(a) + q(b) = x$$

donc $x \in \operatorname{Im}(p+q)$

3) Supp qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tq $p \circ q = \lambda q \circ p$

Mq $p \circ q = q \circ p = 0$ $(**)$

car $p \in \mathcal{L}(E)$

On a : $p \circ q = (p \circ \lambda q) \circ p = \lambda p \circ q \circ p$ $(*)$

$p \circ q \circ p = \lambda p \circ q \circ p$

$\underbrace{(1-\lambda)}_{\neq 0} p \circ q \circ p = 0$

donc $p \circ q \circ p = 0$

puis $p \circ q = 0$ grâce à $(*)$

puis $\lambda q \circ p = 0$ $(**)$

$\lambda \neq 0$ donc $q \circ p = 0$

Ex 9 :

Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $h \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\phi \in \mathcal{L}(H,E)$

1). Supp $\mathrm{Ker}(f \circ \phi) \subset \mathrm{Ker}(g \circ \phi)$

Mq $\mathrm{Im}\,\phi \cap \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Im}\,\phi \cap \mathrm{Ker}\, g$

Soit $x \in \mathrm{Im}\,\phi \cap \mathrm{Ker} f$

càd $\begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{il existe } t \in E \text{ tq } \phi(t) = x \end{cases}$

donc $f(\phi(t)) = 0$

$f \circ \phi(t) = 0$

càd $t \in \mathrm{Ker}\, f \circ \phi$

donc $t \in \mathrm{Ker}\, g \circ \phi$

Donc $g \circ \phi(t) = 0$

càd $x \in \mathrm{Im}\,\phi \cap \mathrm{Ker}\, g$

. Supp $\operatorname{Im} \phi \cap \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} \phi \cap \operatorname{Ker} g$

Mq $\operatorname{Im}(h \circ f) \subset \operatorname{Im}(h \circ g)$

Soit $y \in \operatorname{Im}(h \circ f)$

Par hyp : il existe $x_1 \in E$ tq $y = h \circ f(x_1)$

Donc $f(x_1) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$

donc $f(x_1) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$

Il existe $x_2 \in E$ et $z \in \operatorname{Ker} h$ tq $f(x_1) = g(x_2) + z$

$$\begin{aligned} y &= h\big(f(x_2) + z\big) \\ &= h(f(x_2)) + \underbrace{h(z)}_{=0} \\ &= h(f(x_2)) \end{aligned}$$

Rq : $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} h$

Donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} h$

$\iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} h$

. Supp $\operatorname{Im} h \circ f \subset \operatorname{Im} h \circ g$

Mq $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} h$

Soit $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} h$

càd il existe $t \in E$ et $z \in \operatorname{Ker} h$ tq $x = f(t) + z$

$h(x) = h(f(t)) + 0$

D'où $h(x) \in \operatorname{Im} h \circ f$

càd $h(x) \in \operatorname{Im} h \circ g$

Donc il existe $s \in E$ tq $h(x) = h \circ g(s) = h(g(s))$

Donc $h(x - g(s)) = 0$

càd $x - g(s) \in \operatorname{Ker} h$

donc $x = \underbrace{g(s)}_{\in \operatorname{Im} g} + \underbrace{x - g(s)}_{\in \operatorname{Ker} h}$

Donc $x \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} h$