Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

I. Généralités

I.1. Définition

Définition. *On appelle* ***variable aléatoire discrète*** *(en abrégé v.a.d.) sur* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$*, toute application* X *de* Ω *dans un ensemble* E*, vérifiant :*
- *l'ensemble image* $X(\Omega)$ *est au plus dénombrable ;*
- *pour tout* $x \in X(\Omega)$*, l'ensemble* $X^{-1}(\{x\}) = \big\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\big\}$ *est un événement.*

La variable est dite ***réelle*** *si* $E \subset \mathbb{R}$ *; on abrège alors en v.a.r.d.*

L'événement $X^{-1}(\{x\})$ est noté $(X = x)$.

Pour toute partie A de E, l'ensemble $X^{-1}(A)$ est alors la réunion des $X^{-1}(\{x\})$ pour x décrivant $A \cap X(\Omega)$ (qui est au plus dénombrable) ; c'est donc un événement, qui est noté $(X \in A)$.

Proposition I.1 (Fonction d'une variable aléatoire)**.** *Soit* X *une variable aléatoire discrète sur* Ω*, à valeurs dans* E *; soit* f *une fonction de* E *dans un ensemble* F*, définie au moins sur* $X(\Omega)$*. Alors, la fonction* $f \circ X$*, notée en général* $f(X)$*, est une variable aléatoire discrète.*

I.2. Loi d'une variable

Définition. *Soit* X *une variable aléatoire discrète sur* Ω*. On appelle* ***loi*** *de* X*, l'application* $P_X : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \longrightarrow [0,1]$, $A \longmapsto P(X \in A)$*.*

Si deux variables aléatoires X *et* Y*, sur* Ω_1 *et* Ω_2 *respectivement, vérifient* $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2)$ *et* $P_X = P_Y$*, on dit que* X *et* Y ***suivent la même loi****, et on écrit* $X \sim Y$*.*

Proposition I.2. *Si* X *est une variable aléatoire discrète sur* Ω*, alors* P_X *est une probabilité sur l'ensemble* $X(\Omega)$*, muni de la tribu* $\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$*.*

Proposition I.3. *Soit* L *une application définie sur un ensemble* A *au plus dénombrable, à valeurs dans* $[0,1]$*, et telle que* $\sum_{a \in A} L(a) = 1$*. Alors, il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *et une variable aléatoire discrète* X *sur cet espace tels que* $X(\Omega) = A$ *et que* L *soit la loi de* X*.*

On dira dans ce cas que X suit la loi L, et on écrira $X \sim L$.

I.3. Loi conditionnelle

Définition. *Soit* X *une v.a.d. sur* Ω*, et* $A \subset \Omega$ *un événement de probabilité non nulle. On appelle loi de* X *conditionnée à* A*, ou loi de* X *sachant* A*, la loi de* X *définie à partir de la probabilité conditionnelle* P_A*. Autrement dit, c'est l'application* $P_{X|A}$ *définie par : pour toute partie* B *de* $X(\Omega)$*,* $P_{X|A}(B) = P(X \in B|A)$*.*

II. Lois usuelles

II.1. Lois à support fini

Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est de cardinal n, la variable X suit la **loi uniforme** sur A si $\quad P(X = x) = 1/n \quad$ pour tout $x \in A$.

Soit $p \in [0,1]$. La variable X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, si $\quad X(\Omega) = \{0,1\}, \quad P(X = 1) = p \quad$ et $\quad P(X = 0) = 1 - p$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. La variable X suit la **loi binômiale** de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n,p)$, si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

en posant $q = 1 - p$.

II.2. Loi géométrique

Soit $p \in [0,1]$. La variable X suit la **loi géométrique** de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$.

Le nombre $P(X = k)$ s'interprète comme la probabilité d'obtenir le premier succès au rang k dans une suite infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Proposition II.1. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$*. Elle suit une loi géométrique si et seulement si, pour tout* $(N,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$*,* $P(X > N) \neq 0$ *et* $P(X > N + k \,|\, X > N) = P(X > k)$*.*

II.3. Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. La variable X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Proposition II.2. *Soit (p_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que la suite np_n converge vers un nombre λ. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour chaque n, X_n suive la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p_n)$.*

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

III. Vecteurs aléatoires

III.1. Couple de variables

Proposition III.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$, à valeurs dans des ensembles E_1 et E_2 respectivement. Alors, l'application $(X,Y) : \Omega \longrightarrow E_1\times E_2$, $\omega \longmapsto \big(X(\omega),Y(\omega)\big)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$.*

La variable (X,Y) est appelée un **vecteur aléatoire**. On appelle alors :

- **loi conjointe** de X et Y, la loi de probabilité de la variable (X,Y), autrement dit l'application
  $E_1\times E_2 \longrightarrow [0,1]$, $(x,y)\longmapsto P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$;
- **lois marginales** du vecteur (X,Y), les lois des variables X et Y ;
- **loi de Y conditionnée à $X=x$**, l'application $y\longmapsto P(Y=y\,|\,X=x)$, ce pour tout $x\in X(\Omega)$.

Proposition III.2. *Soit (X,Y) un couple aléatoire discret. Pour tout $y\in Y(\Omega)$, on a*

$$P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(Y=y\,|\,X=x)P(X=x)$$

III.2. Couple de variables indépendantes

Définition. *On dit que deux variables aléatoires sur Ω sont **indépendantes** si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $X=x$ et $Y=y$ sont indépendants, c'est-à-dire*

$$P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=P(X=x)P(Y=y)$$

On écrit alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition III.3. *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors, pour tout $A\subset X(\Omega)$ et tout $B\subset Y(\Omega)$, $P\big((X\in A)\cap(Y\in B)\big)=P(X\in A)P(Y\in B)$.*

Proposition III.4. *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, pour tout couple de fonctions (f,g) pour lequel cela a un sens.*

III.3. Vecteurs aléatoires

Plus généralement, si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$, l'application $\omega\longmapsto\big(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)\big)$ est une variable aléatoire, appelée vecteur aléatoire.

On définit comme dans le cas de deux vecteurs la loi conjointe : $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto P\big((X_1=x_1)\cap\dots\cap(X_n=x_n)\big)$ et les lois marginales des variables X_k.

Définition. *Les variables aléatoires d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour toute partie finie $J\subset I$ et toute famille $(x_j)_{j\in J}$, on a* $P\Big(\bigcap_{j\in J}(X_j=x_j)\Big)=\prod_{j\in J}P(X_j=x_j)$.

Proposition III.5. *Si les variables $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables $f(X_1,\dots,X_p)$ et $g(X_{p+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.*

Proposition III.6. *Si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de lois, il existe un espace probabilisé et une suite (X_n) de variables mutuellement indépendantes sur cet espace tels que $X_n\sim L_n$ pour tout n.*

Définition. *Si les variables de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi L, on dit que la suite est i.i.d. (pour variables Indépendantes et Identiquement Distribuées)*

IV. Espérance

IV.1. Définition

Définition. *Soit X une variable aléatoire discrète.*

- ▷ *Si X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, on appelle **espérance** de X, et on note $E(X)$, le nombre $\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)$, avec les conventions $+\infty\times P(X=+\infty)=0$ si $P(X=+\infty)=0$, et $E(X)=+\infty$ si la famille n'est pas sommable.*
- ▷ *Si X est à valeurs complexes, on dit que X est **d'espérance finie** si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; on appelle alors **espérance** de X, et on note $E(X)$, le nombre $\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)$.*

On écrira $X\in L^1$ pour dire que la variable X est d'espérance finie.

*On dit qu'une variable aléatoire X est **centrée** si $X\in L^1$ et $E(X)=0$.*

Proposition IV.1. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors*

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X\geqslant k)$$

IV.2. Formule de transfert

Proposition IV.2. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors, $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et, dans ce cas,*

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

Corollaire IV.3. *Si Ω est au plus dénombrable, et si Y est une variable aléatoire complexe sur Ω, alors Y est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(Y(\omega)P(\{\omega\})\big)_{\omega\in\Omega}$ est sommable ; et, dans ce cas, $E(Y) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\})$.*

IV.3. Linéarité

Proposition IV.4. *Soient X et Y deux v.a.d. complexes sur un même espace, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Si X et Y sont d'espérance finie, alors $\lambda X+\mu Y$ est d'espérance finie, et $E(\lambda X+\mu Y) = \lambda E(X)+\mu E(Y)$.*

Corollaire IV.5. *Si la variable X est d'espérance finie, alors la variable $X-E(X)$ est centrée.*

IV.4. Autres propriétés

Proposition IV.6 (Positivité)**.** *Si X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, alors $E(X)\geqslant 0$. Si de plus $E(X)=0$, alors $P(X=0)=1$; autrement dit, X est presque sûrement nulle.*

Proposition IV.7 (Croissance)**.** *Si les v.a.r.d. X et Y sont d'espérance finie, et si $X(\omega)\leqslant Y(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$, alors $E(X)\leqslant E(Y)$.*

Proposition IV.8. *Soient X une v.a.d. complexe et Y une v.a.d. réelle sur Ω. Si $Y\in L^1$, et si $|X(\omega)|\leqslant Y(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$, alors $X\in L^1$ et $|E(X)|\leqslant E(Y)$.*

En particulier, si $X\in L^1$, alors $|E(X)|\leqslant E(|X|)$.

Théorème IV.9 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une v.a.r.d. à valeurs **positives**. Alors, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $P(X\geqslant a)\leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.*

Proposition IV.10. *Soient X et Y deux v.a.d. complexes **indépendantes** et d'espérance finie. Alors, XY est d'espérance finie, et $E(XY)=E(X)E(Y)$.*

V. Variance

V.1. Définition

Définition. *Soit X une v.a.r.d. On dit que X admet un moment d'ordre 2, ou que $X\in L^2$, si la variable X^2 est d'espérance finie.*

Proposition V.1. *Si $X\in L^2$, alors $X\in L^1$.*

Proposition V.2. *Si $X\in L^2$, alors la variable centrée $X-E(X)$ est aussi dans L^2, et*

$$E\left[\big(X-E(X)\big)^2\right] = E(X^2)-E(X)^2$$

Définition. *Si $X\in L^2$, le nombre $V(X) = E\left[\big(X-E(X)\big)^2\right]$ est appelé **variance** de X ; le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ est appelé **écart-type** de X.*

V.2. Propriétés

Proposition V.3. *Si $X\in L^2$ et $V(X)=0$, alors X est presque sûrement constante ; autrement dit, il existe une valeur a telle que $P(X=a)=1$.*

Proposition V.4. *Soit $X\in L^2$, et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors, la variable $aX+b$ est dans L^2, et $V(aX+b)=a^2V(X)$.*

Définition. *Une variable $X\in L^2$ est dite **réduite** si $V(X)=1$.*

Si $X\in L^2$, et si $V(X)\neq 0$, alors la variable $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est réduite centrée.

Théorème V.5 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Soit $X\in L^2$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$, $P\big(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.*

V.3. Covariance

Proposition V.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X et Y deux variables de L^2 sur un même espace Ω. Alors, $XY\in L^1$, et $E(XY)^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$.*

Corollaire V.7. *L'ensemble des v.a.r.d. sur Ω admettant un moment d'ordre 2, est un espace vectoriel.*

Définition. *Soient X et Y deux v.a.r.d. sur un même espace Ω, ayant un moment d'ordre 2. Le nombre $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]$ est appelé **covariance** de X et Y.*

Proposition V.8. *Soient X et Y dans L^2 ; alors*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Proposition V.9. *Soient X et Y dans L^2 ; alors*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition V.10. *Soient X et Y dans L^2 ; alors* $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$.

V.4. Loi faible des grands nombres

Théorème V.11. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables réelles, admettant une espérance m et une variance σ^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$; soit $\varepsilon > 0$. Alors :*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$;*
- $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

VI. Fonction génératrice

VI.1. Généralités

Définition. *Soit X une v.a.d. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction*

$$G_X \ : \ t \in \mathbb{C} \longmapsto E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$$

*est appelée **fonction génératrice** de la variable X.*

Proposition VI.1. *Soit X une v.a.d. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, sa fonction génératrice est définie et continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 ; et la donnée de la fonction G_X suffit à définir complètement la loi de la variable X.*

VI.2. Somme de variables indépendantes

Proposition VI.2. *Soient X et Y deux v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, **indépendantes**. Alors, pour tout $t \in D(0,1)$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.*

VI.3. Fonction génératrice et espérance

Proposition VI.3. *Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, X est d'espérance finie si et seulement si la restriction à $\mathbb{R}$ de G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas, $G'_X(1) = E(X)$.*

VII. Caractéristiques des lois usuelles

Nom	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G_X(t)$
Uniforme $n \in \mathbb{N}^*$	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ $p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p_1 = p$ $p_0 = 1-p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
Binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N},\ p \in [0,1]$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ $p \in [0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$