Familles de vecteurs

Dans tous les exercices E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et r est un entier naturel non nul.

Exercice 1 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_1,...,x_r) \in E^r$.
- Montrer que si $(x_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est libre et si f est injective, alors $(f(x_i))_{i\in[\![1,r]\!]}$ est libre.
- Montrer que si $(x_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ engendre E et si f est surjective, alors $(f(x_i))_{i\in[\![1,r]\!]}$ engendre F.
- Montrer que si $(x_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une base de E et si f est bijective, alors $(f(x_i))_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une base de F.

Exercice 2 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
- Montrer que si $(f(x_i))_{i\in[\![1,r]\!]}$ engendre F, alors f est surjective.
- Montrer que si $(f(x_i))_{i\in[\![1,r]\!]}$ est libre, alors la famille $(x_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est libre.

Exercice 3 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ génératrice de E, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ engendre F.
- Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de E libre, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
- Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toute base $(x_i)_{i\in I}$ de E, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Exercice 4 : Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E alors
- Montrer que f est surjective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice de F,
- Montrer que f est injective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre,
- Montrer que f est bijective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est une base de F,