Séries de fonctions

Dans tout le chapitre, E et F sont deux espaces vectoriels normés **de dimension finie**.

I. Suites de fonctions dans les e.v.n.

I.1. Modes de convergence

Définition. *Soit $A \subset E$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. On dit que la suite (f_n)* ***converge simplement*** *vers $f : A \longrightarrow F$ si, pour tout vecteur $x \in A$, la suite de vecteurs $\big(f_n(x)\big)$ converge dans F vers le vecteur $f(x)$.*

Définition. *Sous les mêmes hypothèses, on dit que la suite (f_n)* ***converge uniformément*** *sur A vers la fonction f si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in A \quad \big\|f(x) - f_n(x)\big\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème I.1. *Avec les notations précédentes, la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur A si et seulement si*
- *les fonctions $f - f_n$ sont bornées à partir d'un certain rang ;*
- *la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ a pour limite 0.*

Théorème I.2. *Avec les mêmes notations, la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur A si et seulement s'il existe une suite réelle (a_n) et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*
- $\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in A \quad \big\|f(x) - f_n(x)\big\| \leqslant a_n$;
- *la suite (a_n) a pour limite 0.*

I.2. Propriétés

Théorème I.3. *Avec les notations précédentes, soit $a_0 \in A$. On suppose que*
- *la suite de fonctions (f_n) converge vers f uniformément sur A ;*
- *chaque fonction f_n est continue en a_0 (respectivement sur A).*

Alors, f est continue en a_0 (respectivement sur A).

Théorème I.4. *Avec toujours les mêmes notations, on suppose que :*
- *la suite (f_n) converge vers f uniformément sur A ;*
- *a est un point adhérent à A ;*
- *chaque fonction f_n admet une limite b_n en a.*

Alors la suite (b_n) admet une limite b, et f a pour limite b en a.

On suppose désormais les fonctions f_n et f définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.

Théorème I.5. *Soit $a \in I$. On suppose que :*
- *la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment inclus dans I ;*
- *chaque fonction f_n est continue sur I.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$. Alors, la suite (F_n) converge vers la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$, et la convergence est uniforme sur les segments de I.

En particulier, si $[a,b] \subset I$, alors la suite $(I_n) = \big(\int_a^b f_n(t)\,dt\big)$ a pour limite $I = \int_a^b f(t)\,dt$.

Théorème I.6. *On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est de classe C^1 sur I ;*
- *la suite (f_n) converge vers f simplement sur I ;*
- *la suite (f_n') converge vers une fonction g, uniformément sur tout segment inclus dans I.*

Alors, f est de classe C^1 sur I, $g = f'$, et la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

II. Modes de convergence des séries de fonctions

Dans ce paragraphe, (f_n) est une suite de fonctions de $A \subset E$ dans F.

II.1. Convergence simple, convergence absolue

Pour tout n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$; S_n est la **somme partielle** de rang n de la série de fonctions $\sum f_k$.

Définition. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* ***converge simplement*** *sur A si la suite (S_n) associée converge simplement sur A. La fonction S, limite simple de la suite (S_n), est alors appelée* ***somme*** *de la série $\sum f_n$, et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.*

En supposant toujours que la série converge simplement, on pose pour tout n $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. La fonction R_n est appelée ***reste*** *de rang n de la série $\sum f_n$; la suite (R_n) converge simplement vers la fonction nulle.*

Définition. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* ***converge absolument*** *sur A si, pour tout $x \in A$, la série* ***réelle*** *$\sum \big\|f_n(x)\big\|$ converge.*

Proposition II.1. *La convergence absolue entraîne la convergence simple.*

II.2. Convergence uniforme

Définition. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$* ***converge uniformément*** *sur A si la suite de fonctions (S_n) associée converge uniformément sur A.*

Proposition II.2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si sont vérifiées les deux conditions :*
- *la série $\sum f_n$ converge simplement sur A ;*
- *la suite des restes (R_n) converge* ***uniformément*** *sur A vers la fonction nulle.*

Théorème II.3. *Avec les mêmes notations, soit $a_0 \in A$. On suppose que*
- *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A ;*
- *chaque fonction f_n est continue en a_0 (respectivement sur A).*

Alors, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a_0 (respectivement sur A).

Théorème II.4. *Avec les notations précédentes, on suppose que :*
- *la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A ;*
- *a est un point adhérent à A ;*
- *chaque fonction f_n admet une limite b_n en a.*

Alors, la série $\sum b_n$ converge, et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a pour limite $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ en a.

II.3. Convergence normale

Définition. *On dit que la série $\sum f_n$* ***converge normalement*** *sur A s'il existe un rang n_0 tel que :*
- *les fonctions f_n sont toutes bornées sur A à partir du rang n_0 ;*
- *la série $\sum_{n \geqslant n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.*

Théorème II.5. *Avec les notations précédentes, la série $\sum f_n$ converge normalement sur A si et seulement s'il existe un rang n_0 et une suite réelle (a_n) vérifiant :*
- *$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x)\| \leqslant a_n$;*
- *la série $\sum a_n$ converge.*

Théorème II.6. *Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors elle converge absolument et uniformément sur A.*

III. Intégration et dérivation

Les fonctions étudiées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.

III.1. Intégration

Théorème III.1. *Soit $a \in I$. On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est continue sur I;*
- *la série $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque segment inclus dans I.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$. Alors, la série $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, et, pour tout $x \in I$, $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x) = \int_a^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right] dt$.

III.2. Dérivation

Théorème III.2. *On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est de classe C^1 sur I ;*
- *la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, de somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$;*
- *la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.*

Alors, S est de classe C^1 sur I, $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$, et la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur tout segment inclus dans I.

Théorème III.3. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est de classe C^p sur I ;*
- *pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I, de somme $g_k = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$;*
- *la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, de somme g_p.*

Alors, en posant $S = g_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, S est de classe C^p sur I, et $g_k = S^{(k)}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

III.3. Intégration sur un intervalle quelconque

Théorème III.4 (Cas positif). *Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*
- *$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad f_n(t) \geqslant 0$;*
- *chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et sa somme S est continue par morceaux sur I.*

Alors, la série $\sum \int_I f_n(t)\,dt$ converge si et seulement si S est intégrable sur I, et dans ce cas $$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Théorème III.5. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et sa somme S est continue par morceaux sur I ;*
- *la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,dt$ converge.*

Alors, la fonction S est intégrable sur I et $$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Remarque : on a de plus $\int_I |S(t)|\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,dt$.