

Compléments de cours de physique

15 mai 2013

Sommaire

Thermodynamique	3
Théorie du paramagnétisme de LANGEVIN	3
Refroidissement d'eau tiède par de l'eau chaude	5
Ailette de refroidissement	7
Mise en contact thermique de deux tiges	9
Interprétation microscopique de la loi de FOURIER	11
Équilibre de la troposphère	13
Étude thermodynamique du rayonnement d'équilibre dans une cavité	15
Évaluation de la température terrestre	18
Loi de NEWTON du rayonnement	19
Mécanique	21
Opérateur d'inertie	21
Scarabée sur un plateau	23
Chute d'un règle sur un coin de table	24
Chainette	26
Pendule conique	28
Stabilité d'un satellite double	31
Oscillateur perturbé	33
Ondes et propagation du signal	35
Ligne électrique	35
Effet DOPPLER non-relativiste	39
Électromagnétisme	41
Champ créé par un disque uniformément chargé	41
Polarisabilité	43
Milieux diélectriques	45
Exemple de résolution de l'équation de LAPLACE	47
Résistance de fuite d'un condensateur sphérique	49
Milieux magnétiques	50
Modèle classique du spin	51
Quantité de mouvement du champ	53
Bilan énergétique d'un conducteur ohmique	54
Supraconductivité	55
Diffusion des ondes électromagnétiques	57

Optique	59
Diffraction par un ensemble d'ouvertures identique	59
Largeur spectrale d'une source	61
Dispositifs interférentiels par division du front d'onde	63
Interféromètre de PÉROT et FABRY	67

Théorie du paramagnétisme de LANGEVIN

Comportement paramagnétique Toute substance est susceptible sous l'action d'un champ \vec{B} d'acquérir un moment magnétique \vec{M} . On définit la grandeur locale associée, l'aimantation \vec{M} par la relation $d\vec{M} = \vec{M}d\tau$. En 1895, Pierre CURIE a appliqué un champ \vec{B} à divers matériaux et a mesuré l'aimantation \vec{M} qui en résultait. Il a obtenu dans un grand nombre de cas une relation du type

$$\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{B},$$

où $C > 0$ et T est la température. C'est la loi de CURIE, qui est expérimentale. Les substances qui suivent cette loi sont dites paramagnétiques. C'est le cas de Na(g), O₂(g) ou O₂(l),...

Modèle de LANGEVIN On va essayer de retrouver la loi de CURIE à partir d'une description microscopique et de la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN.

- On considère une substance homogène de n particules élémentaires par unité de volume : $dN = nd\tau$.
- Chaque atome possède un moment magnétique $\vec{\mu}_i$ de norme constante pour tous les atomes : $\|\vec{\mu}_i\| = \mu$.
- Les particules subissent diverses interactions.
 - On néglige l'interaction magnétique entre $\vec{\mu}_i$ et $\vec{\mu}_j$ pour $i \neq j$.
 - Chaque dipôle interagit avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$, et on associe à cette interaction une énergie potentielle $\varepsilon_p = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$. Les $\vec{\mu}_i$ auront donc tendance à s'orienter dans le sens de \vec{B} pour minimiser leur énergie. Si tous les $\vec{\mu}_i$ sont dans le sens de \vec{B} ,

$$d\vec{M} = \sum_{i \in d\tau} \vec{\mu}_i = nd\tau \mu \vec{u}_z \Rightarrow \vec{M} = n\mu \vec{u}_z.$$

- Mais il existe une autre interaction, créée par l'agitation thermique. Les dipôles s'entrechoquent et lors d'un choc, les atomes se réorientent de façon aléatoire. Ainsi, si $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{0}$.

Calcul D'abord les symétries et invariances. On suppose le système infini ou cylindrique, de telle sorte que le problème ainsi que \vec{B} soit invariants par toute rotation autour de (Oz) . Par le principe de CURIE, \vec{M} est aussi invariant par rotation autour de (Oz) donc \vec{M} est colinéaire à \vec{B} . On se place en coordonnées sphériques d'axe principal (Oz) , les $\vec{\mu}_i$ formant un angle θ_i avec \vec{u}_z . Ainsi,

$$\vec{M}d\tau = \sum_{i \in d\tau} \vec{\mu}_i = \left(\sum_{i \in d\tau} \vec{\mu}_i \cdot \vec{u}_z \right) \vec{u}_z = \sum_{i \in d\tau} \mu \cos \theta_i \vec{u}_z.$$

On passe ensuite du discret au continu. On considère les particules de $d\tau$ formant un angle θ_i compris entre θ et $\theta + d\theta$, au nombre de $\delta^2 N$. On a alors

$$\vec{M}d\tau = \int_{\theta=0}^{\pi} \mu \cos \theta \delta^2 N \vec{u}_z. \quad (*)$$

Il s'agit maintenant d'exprimer $\delta^2 N$. On utilise la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN qui nous donne une expression de la forme

$$\delta^2 N = A \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) g(\varepsilon) d\varepsilon,$$

où ε est l'énergie des particules dont le nombre est $\delta^2 N$, et $g(\varepsilon)$ la dégénérescence associée à leur état d'énergie commun. Or ici $\varepsilon = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu \cos \theta B$ et la dégénérescence dépend donc de θ donc on cherche plutôt $g(\varepsilon)d\varepsilon = f(\theta)d\theta$. Or lorsque $T \rightarrow +\infty$, l'exponentielle vaut 1 et tous les dipôles

sont orientés aléatoirement, dans ce cas $\delta^2 N$ est proportionnel à la portion d'espace comprise entre les cônes d'angle au centre θ et $\theta + d\theta$, donc $f(\theta) = 2\pi \sin \theta$. On a donc la nouvelle expression, en faisant rentrer le 2π dans la constante, $\delta^2 N = A \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta$.

On cherche maintenant A grâce à la relation $\int_{\theta=0}^{\pi} \delta^2 N = n d\tau$, d'où

$$A = \frac{n d\tau}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta} \Rightarrow \delta^2 N = n \frac{\exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right)}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta'}{k_B T}\right) \sin \theta' d\theta'} \sin \theta d\theta d\tau.$$

Aimantation En reprenant la formule (*) avec notre expression de $\delta^2 N$, il vient

$$M = n\mu \frac{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta} = n\mu \frac{\int_{-1}^1 \exp(au) u du}{\int_{-1}^1 \exp(au) du},$$

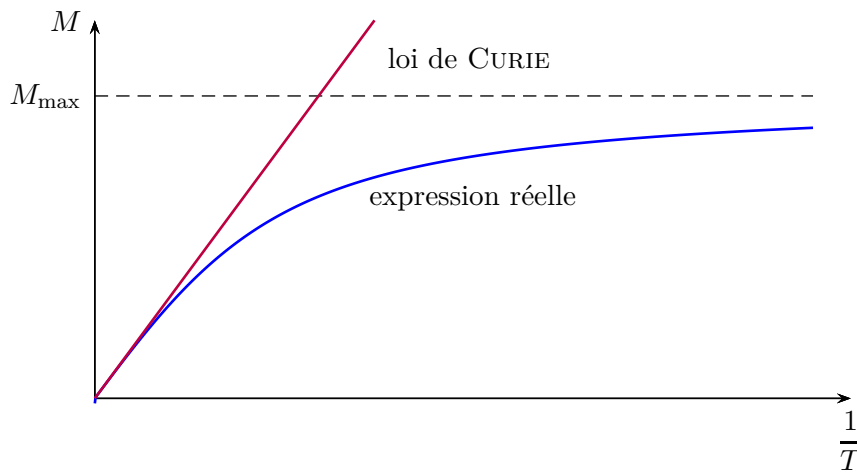
où l'on a posé $u = \cos \theta$ et $a = \frac{\mu B}{k_B T}$. L'intégrale du dénominateur se calcule facilement, elle est égale à $2 \text{sh}(a)/a$. L'intégrale du numérateur est la dérivée par rapport à a du dénominateur en utilisant des résultats des intégrales à paramètres donc on obtient enfin $M = n\mu \left(\coth(a) - \frac{1}{a} \right)$, où \coth est la fonction cotangente hyperbolique.

Discussion

- On peut définir la température critique du système $T_c = \frac{\mu B}{k_B}$. Dans le cas où $a \gg 1$, c'est à dire $k_B T \ll \mu B$, $M \rightarrow n\mu$, ce qui est conforme à notre analyse.
- Dans le cas contraire où $T \gg T_c$, c'est-à-dire $a \ll 1$, il nous faut effectuer un développement asymptotique de \coth en 0, on trouve $a \coth(a) = 1 + \frac{a^2}{3}$ d'où $M \approx \frac{n\mu a}{3}$ et en explicitant a ,

$$\vec{M} = \frac{n\mu^2}{3k_B} \frac{1}{T} \vec{B} = \frac{C}{T} \vec{B}. \text{ On retrouve bien la loi de CURIE avec } C = \frac{n\mu^2}{3k_B}.$$

Ainsi, la loi phénoménologique a été expliquée microscopiquement et la constante de CURIE C est calculable, rattachée à des paramètres microscopiques.



L'expérience confirme aussi que pour des températures très basses, on se rapproche de la limite asymptotique $M_{\max} = n\mu$.

Refroidissement d'eau tiède par de l'eau chaude

On considère 2 récipients de capacités thermiques C contenant tous deux de l'eau. T_0 est la température de l'air ambiant. On veut refroidir l'eau du verre 1 grâce aux seules sources de chaleur du verre 2 et de l'air ambiant.

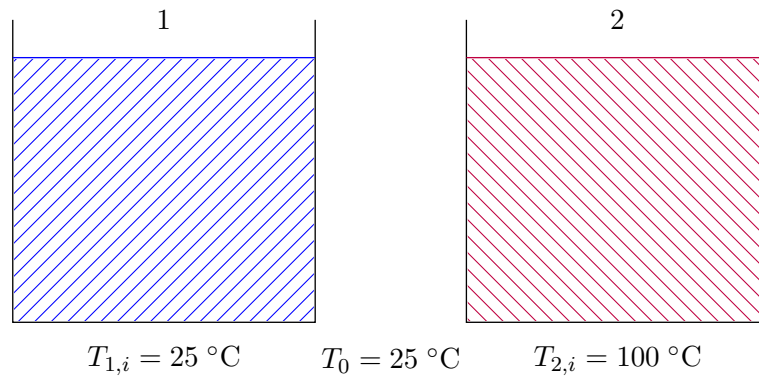
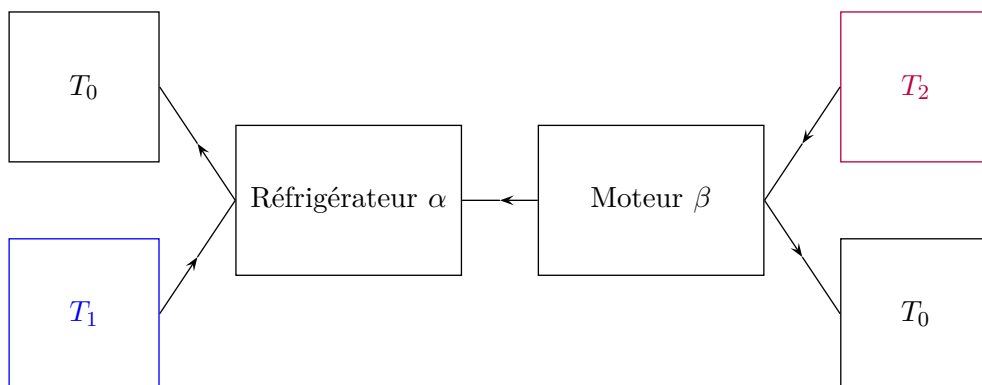


Schéma de principe Il s'agit de pomper de la chaleur du verre 1, chose que l'on fera grâce à un réfrigérateur alimenté en travail par un moteur. Les flèches symbolisent le sens effectif des flux de chaleur ou de travail.



Le moteur et le réfrigérateur ne seront pas exactement des machines dithermes car les sources de chaleur T_1 et T_2 ne sont pas des thermostats. Néanmoins, sur un cycle élémentaire on considèrera un fonctionnement de machine ditherme. On utilisera donc différentiellement les relations sur les machines dithermes.

Relations Pour le réfrigérateur :

$$\delta Q_{1,\alpha} + \delta Q_{0,\alpha} + \delta W_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q_{1,\alpha}}{T_1} + \frac{\delta Q_{0,\alpha}}{T_0} \leq 0,$$

et pour le moteur :

$$\delta Q_{2,\beta} + \delta Q_{0,\beta} + \delta W_\beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta Q_{2,\beta}}{T_2} + \frac{\delta Q_{0,\beta}}{T_0} \leq 0.$$

On a de plus $\delta W_\alpha + \delta W_\beta = 0$ et par application du premier principe aux 2 verres, $\delta Q_{1,\alpha} = -CdT_1$ et $\delta Q_{2,\beta} = -CdT_2$. Le signe moins vient des conventions d'algébrisation des quantités reçues ou données par les systèmes.

Calcul En sommant les deux inégalités, on obtient

$$CdT_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) + CdT_2 \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) \leq 0,$$

que l'on intègre de $t = 0$ à $t \rightarrow +\infty$, en notant $T_{1,f}$ et $T_{2,f}$ les températures atteintes :

$$T_{1,f} - T_{1,i} - T_0 \ln \left(\frac{T_{1,f}}{T_{1,i}} \right) + T_{2,f} - T_{2,i} - T_0 \ln \left(\frac{T_{2,f}}{T_{2,i}} \right) \leq 0.$$

On veut déterminer $T_{1,f}$ minimale, qui est obtenue dans l'hypothèse de fonctionnement réversible du réfrigérateur et du moteur. De plus, $T_{1,f}$ sera atteinte lorsque le moteur cessera de fonctionner, c'est à dire lorsque $T_{2,f} = T_0$. Ainsi $T_{1,\min}$ vérifie l'équation :

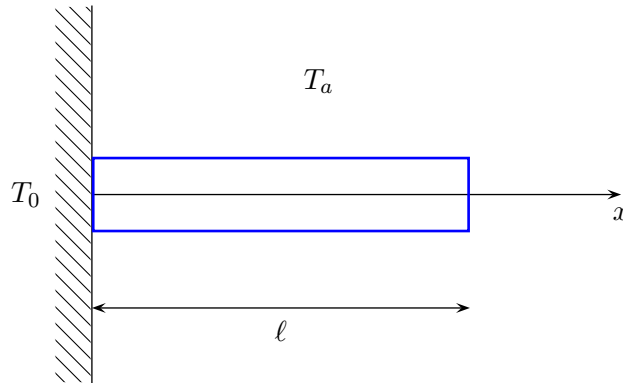
$$T_{1,\min} - T_{1,i} - T_0 \ln \left(\frac{T_{1,\min}}{T_{1,i}} \right) + T_0 - T_{2,i} - T_0 \ln \left(\frac{T_0}{T_{2,i}} \right) = 0.$$

Une résolution numérique donne $T_{1,\min} = 373 \text{ K}$ ou $T_{1,\min} = 234 \text{ K}$. Pourquoi ces deux valeurs ? Parce que le réfrigérateur peut aussi fonctionner comme une pompe à chaleur, et donc augmenter la température du verre 1. Mais la valeur qui nous intéresse est la plus petite, c'est à dire $T_{1,\min} = -39^\circ \text{C}$.

Discussion On peut donc faire des glaçons avec un verre d'eau bouillante ! Mais on ne peut pas savoir directement quelle quantité, car à partir de 0°C le verre 1 restera à cette température jusqu'à ce que toute l'eau se soit transformée en glace. Pour évaluer la quantité de glace formée, il faut refaire le même raisonnement en prenant en compte le changement d'état *via* $\delta Q_{1,\alpha} = L_f dm$.

Ailette de refroidissement

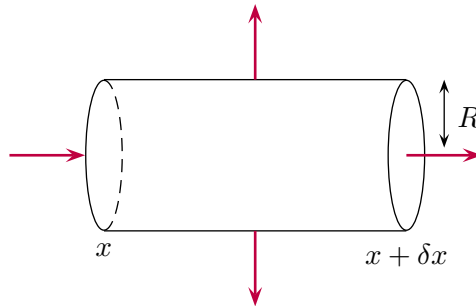
On considère une ailette de refroidissement cylindrique de longueur ℓ et de section $S = \pi R^2$ fixée par un côté à une surface à la température T_0 , et plongée dans l'air à la température T_a . On veut le profil de température le long de l'aillette.



Analyse C'est une ailette de refroidissement car on remplace la surface d'échange thermique qui était un petit disque par toute la surface du cylindre. L'invariance du problème par rotation autour de (Ox) nous donne $T(x)$ uniquement. Ceci n'est pas vrai en toute rigueur à cause des échanges thermiques qui vont de l'axe de l'aillette jusqu'à la périphérie. Néanmoins ce flux de chaleur est négligeable devant celui se propageant le long de (Ox) .

On notera h le coefficient de transfert conducto-convectif entre la surface de l'aillette et l'atmosphère.

Répartition de température On fait un bilan énergétique sur une petite tranche d'aillette comprise entre les abscisses x et $x + \delta x$.



En régime permanent entre t et $t + dt$, $d\delta H = 0$ mais on a aussi en prenant en compte tous les flux de chaleur :

$$d\delta H = j_Q(x)Sdt - j_Q(x + \delta x)Sdt - h(T(x) - T_a)2\pi R\delta x \Rightarrow 0 = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}\pi R^2 - h(T(x) - T_a)2\pi R.$$

On utilise maintenant la loi de FOURIER, $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ donc en posant $\theta = T - T_a$, on a l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}\theta = 0.$$

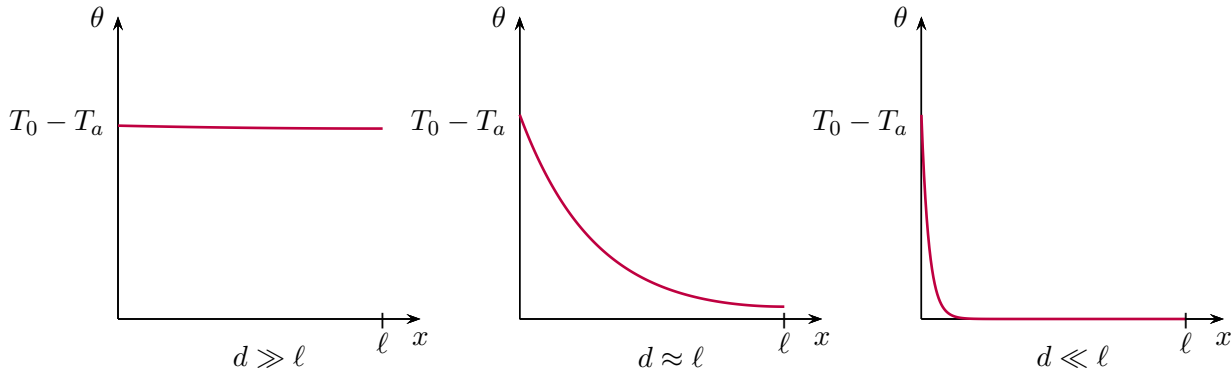
La résolution donne $\theta = \alpha \exp\left(\frac{x}{d}\right) + \beta \exp\left(-\frac{x}{d}\right)$, où l'on a identifié la longueur caractéristique de notre problème $d = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$.

En $x = 0$, $T = T_0$ donc $T_0 - T_a = \alpha + \beta$. Exprimons la continuité du flux de chaleur au bout de la tige :

$$-\lambda \frac{dT}{dx}(x = \ell^-) = j_Q(x = \ell^-) = j_Q(x = \ell^+) = h(T(\ell) - T_a).$$

On dérive cette relation, et le calcul aboutit à l'expression

$$\theta = (T_0 - T_a) \frac{\text{ch}\left(\frac{\ell-x}{d} + \varphi\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{d} + \varphi\right)} \quad \text{où} \quad \text{th}(\varphi) = \frac{hd}{\lambda} = \sqrt{\frac{hR}{2\lambda}}.$$



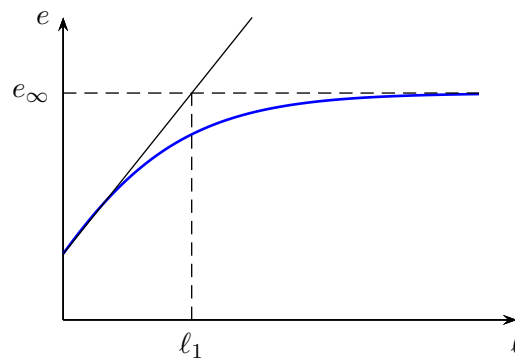
On voit sur ces graphes que pour optimiser l'utilisation de la tige, on a intérêt à choisir $\ell \approx d$.

Efficacité de la tige On compare la puissance évacuée par la tige et la puissance évacuée par un disque de surface S comme s'il n'y avait pas de tige, d'où l'expression

$$e = \frac{-\lambda \frac{dT}{dx}(x=0) \pi R^2}{h(T_0 - T_a) \pi R^2}.$$

En utilisant l'expression de θ , on trouve

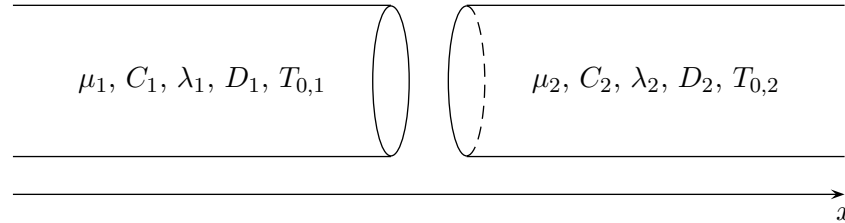
$$e = \frac{\text{th}\left(\frac{\ell}{d} + \varphi\right)}{\text{th}(\varphi)}.$$



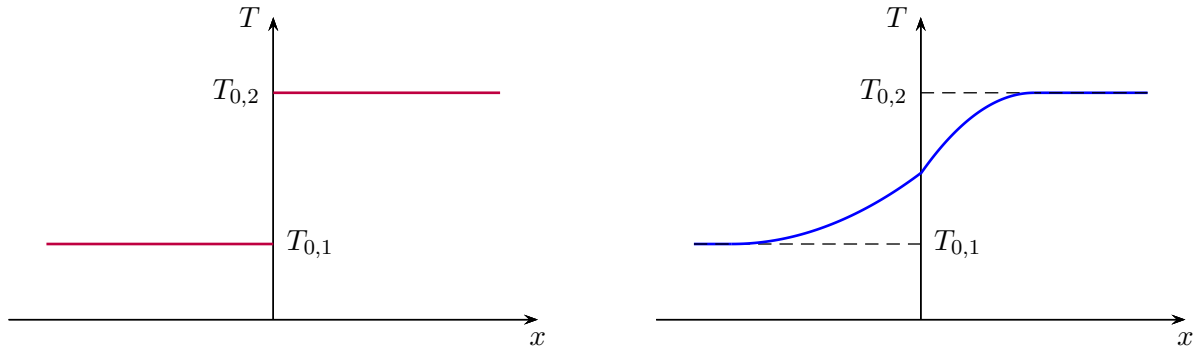
Pour optimiser l'efficacité, il faut prendre ℓ de l'ordre de $2\ell_1$, ce qui affine notre estimation.

Mise en contact thermique de deux tiges

On considère deux tiges semi-infinies d'axe (Ox) que l'on met à $t = 0$ en contact. On suppose les parois latérales des tiges adiabatiques, on veut déterminer le profil de température $T(x, t)$. μ est la masse volumique, C la capacité thermique, λ la conductivité thermique, D le coefficient de diffusion et T la température.



Analyse qualitative Si à gauche on a le graphe de T à $t = 0^-$, alors on peut prévoir une courbe du type de celle de droite pour T à $t > 0$.



Il y a une rupture de pente à $x = 0$ car la continuité de la composante normale du flux de chaleur impose $-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^-) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^+)$ et *a priori* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Variable composée $T(x, t)$ aura donc des expressions analytiques différentes à gauche et à droite. Le seul phénomène qui rentre en jeu ici est celui de la diffusion thermique, donc la température T sera fonction seulement de $x, t, T_{0,1}, T_{0,2}, D$ où D est le coefficient de diffusion du côté que l'on étudie. Or en terme d'homogénéité, $[x] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$, $[D_1] = [D_2] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $[T_{0,1}] = [T_{0,2}] = \text{K}$. Pour obtenir une température, x, t et D interviendront obligatoirement sous la forme

$$u = \frac{x}{\sqrt{Dt}}.$$

u est la variable composée que l'on cherche, on pose $T(x, t) = \tilde{T}(u)$ et on cherchera désormais \tilde{T} . T vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 T = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

$$\text{or } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d\tilde{T}}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{d\tilde{T}}{du} \frac{x}{2t\sqrt{Dt}}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d\tilde{T}}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\tilde{T}}{du} \frac{1}{\sqrt{Dt}} \text{ puis } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2\tilde{T}}{du^2} \frac{1}{Dt} \text{ d'où l'équation}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{x}{t\sqrt{Dt}} \frac{d\tilde{T}}{du} = D \frac{d^2\tilde{T}}{du^2} \frac{1}{Dt} \Rightarrow \frac{d^2\tilde{T}}{du^2} = -\frac{u}{2} \frac{d\tilde{T}}{du}.$$

L'intégration de cette équation différentielle donne

$$\tilde{T}(u) = \int^u \alpha \exp\left(-\frac{u'^2}{4}\right) du' \Rightarrow T(x, t) = \alpha \int_{\beta}^{\frac{x}{\sqrt{Dt}}} \exp\left(-\frac{u'^2}{4}\right) du' + \gamma.$$

Il faut déterminer les deux triplets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. On notera $f(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)$.

Conditions aux limites On note T_1 la température à gauche et T_2 la température à droite.

– $\forall t, T(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} T_{0,1}$ donc

$$T_{0,1} = \alpha_1 \int_{\beta_1}^{-\infty} f(u) du + \gamma_1 \Rightarrow T_1 - T_{1,0} = \alpha_1 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{D_1 t}}} f(y) dy.$$

– De même, $\forall t, T(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} T_{0,2}$ donc $T_2 - T_{0,2} = \alpha_2 \int_{+\infty}^{\frac{x}{\sqrt{D_2 t}}} f(u) du$.

– La continuité de la température en $x = 0$ s'exprime $T_{0,1} + \alpha_1 \int_{-\infty}^0 f(u) du = T_{0,2} + \alpha_2 \int_{+\infty}^0 f(u) du$.

– La continuité de la composante normale du flux de chaleur en $x = 0$ s'exprime

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^-) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^+) \Rightarrow \lambda_1 \frac{\alpha_1}{\sqrt{D_1 t}} = \lambda_2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{D_2 t}} \Rightarrow \alpha_1 \sqrt{\lambda_1 \mu_1 C_1} = \alpha_2 \sqrt{\lambda_2 \mu_2 C_2},$$

car $D = \frac{\lambda}{\mu C}$. On note $\delta_1 = \sqrt{\lambda_1 \mu_1 C_1}$ et $\delta_2 = \sqrt{\lambda_2 \mu_2 C_2}$, et puisque $\int_0^{+\infty} f(u) du = \int_{-\infty}^0 f(u) du = \sqrt{\pi}$, on obtient

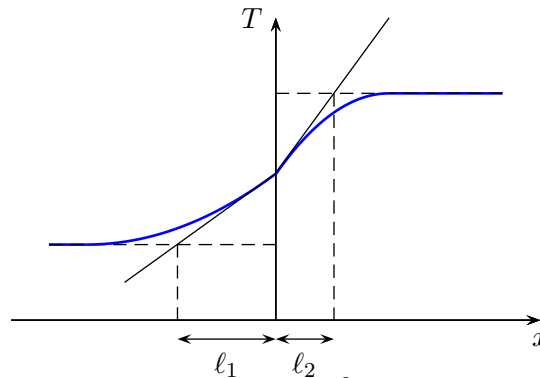
$$\alpha_1 = \frac{T_{0,2} - T_{0,1}}{\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{T_{0,2} - T_{0,1}}{\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}.$$

Discussion Examinons d'abord la température T_c du point de contact :

$$T_c = \frac{\delta_1 T_{0,1} + \delta_2 T_{0,2}}{\delta_1 + \delta_2}.$$

C'est homogène, c'est une relation barycentrique qui bizarrement ne dépend pas de t : le point de contact garde toujours la même température. C'est le rapport entre les δ des matériaux qui détermine l'impression de chaleur : en effet la sensation de chaud ou de froid vient de la température du point de contact entre la peau et la matériaux. Or on a expérimentalement $\delta_{\text{cuivre}} \gg \delta_{\text{peau}} \gg \delta_{\text{arbre}}$. C'est pour cela que le métal est toujours très chaud ou très froid, tandis que l'écorce d'un arbre est presque toujours tiède.

On s'intéresse maintenant aux longueurs caractéristiques de diffusion ℓ_1 et ℓ_2 définies sur le graphe ci-dessous.



On a aussi les relations $\ell_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^-) = T_c - T_{0,1}$ et $\ell_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^+) = T_c - T_{0,2}$. Mais les dérivées par rapport à x ont déjà été exprimées, et finalement on trouve

$$\ell_1 = \sqrt{\pi D_1 t} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \sqrt{\pi D_2 t}.$$

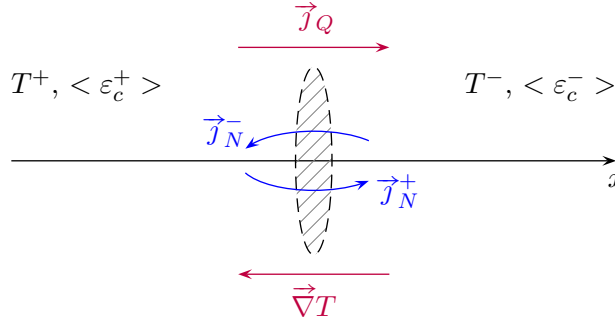
Ces longueurs varient en \sqrt{t} , ce qui est caractéristique de la diffusion et de la propagation aléatoire. On aurait pu prévoir cette variation car ℓ_1 et ℓ_2 ne dépendent que de t et D , et on a $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Interprétation microscopique de la loi de FOURIER

La loi de FOURIER est phénoménologique linéaire. On aimerait néanmoins en proposer une interprétation microscopique afin de relier le coefficient λ à des paramètres microscopiques.

Modèle On travaille avec un gaz parfait pour lequel $T(\vec{r}, t)$ est définie en tout point. On fait l'hypothèse d'un régime permanent et d'un problème unidimensionnel pour avoir $T(x)$ et $\vec{j}_N = \vec{0}$, il n'y a pas de flux global de matière : c'est-à-dire qu'il y a autant de particules qui traversent $\delta\vec{S}$ de la gauche vers la droite que de la droite vers la gauche durant dt .

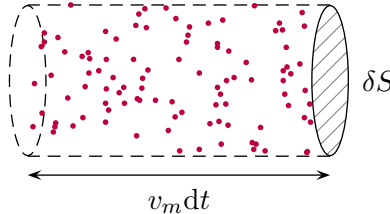
Origine du flux de chaleur On prend une surface élémentaire $\delta\vec{S} = S\vec{u}_x$ entre t et $t + dt$.



S'il y a autant de matière qui passe dans les deux sens, l'énergie qu'elle transporte diffère : les particules chaudes transportent plus d'énergie que les particules froides, d'où l'existence d'un $\vec{j}_Q \neq \vec{0}$.

Loi de FOURIER On note j_N^+ le flux de particule dans le sens de $+\vec{u}_x$, j_N^- le flux suivant $-\vec{u}_x$. $\langle \varepsilon_c^+ \rangle$ et $\langle \varepsilon_c^- \rangle$ sont les énergies cinétiques des particules de gauche et de droite respectivement, et n la densité particulaire du gaz.

On suppose que les particules sont astreintes à se déplacer uniquement suivant les axes du repère de l'espace, soit $1/6$ des particules qui se déplacent suivant $+\vec{u}_x$. Toutes les particules se déplacent à la même vitesse moyenne v_m . On peut donc calculer j_N^+ :



il s'agit de compter les particules contenues dans le cylindre, $\delta^2 N = \frac{1}{6} n v_m \delta S dt$ d'où

$$j_N^+ = \frac{1}{6} n v_m \quad \text{et} \quad j_N^- = -j_N^+ = -\frac{1}{6} n v_m.$$

Pour un gaz parfait, l'énergie cinétique moyenne d'une particule est $\varepsilon_c = \frac{3}{2} k_B T$. Or une particule se thermalise au cours d'un choc, et donc l'énergie cinétique à prendre en compte pour une particule qui traverse δS est celle acquise lors de son dernier choc, effectué à une distance moyenne ℓ . Ainsi on prendra

$$\langle \varepsilon_c^+ \rangle = \frac{3}{2} k_B T(x - \ell) \quad \text{et} \quad \langle \varepsilon_c^- \rangle = \frac{3}{2} k_B T(x + \ell).$$

C'est une approximation grossière, mais ce n'est pas « violemment faux ». Ainsi,

$$\begin{aligned} j_Q &= \langle \varepsilon_c^+ \rangle j_N^+ + \langle \varepsilon_c^- \rangle j_N^- \\ &= \frac{1}{6} n v_m \frac{3}{2} k_B \underbrace{(T(x - \ell) - T(x + \ell))}_{-2\ell \frac{dT}{dx}} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi de FOURIER : $j_Q = -\frac{1}{2}nv_m\ell k_B \frac{dT}{dx}$!

Conductivité thermique Par identification, on peut exprimer λ grâce à des paramètres microscopiques : $\lambda = \frac{1}{2}v_m n k_B \ell$ or, avec σ la section efficace de choc d'une particule et m sa masse,

$$v_m = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{k_B^3 T}{\pi m}}.$$

En effet v_m est la vitesse moyenne et non pas la vitesse quadratique moyenne, d'où le facteur $\frac{8}{\pi}$ au lieu du 3. Notre modèle rustique nous fournit une valeur de λ qui se trouve être la même que celle obtenue avec un modèle plus fin où l'on considère une répartition boltzmannienne des vitesses et des directions réparties continument dans l'espace !

Intéressons nous à λ . Il dépend bien de T , contrairement à l'approximation classique que l'on fait. En effet, λ varie en \sqrt{T} mais la section efficace de choc σ est une fonction décroissance de T . Le physicien SUTHERLAND justifie cela par le fait que lorsque la vitesse des particules augmente, la force attractive qui existe entre deux particules joue moins quand on doit considérer la probabilité d'un choc entre elles. Ainsi λ varie plus fortement en T que \sqrt{T} . On remarque de plus que λ ne dépend pas de P .

Expérimentalement, les gaz de petites molécules conduisent mieux la chaleur. Ceci se retrouve ici à cause de la variation en $\frac{1}{\sigma\sqrt{m}}$. La validité de notre modèle est compromise par le développement limité de $T(x-\ell) - T(x+\ell)$ que l'on a effectué. Il faut donc que $\ell \ll d_T$, distance caractéristique de variation de T .

Prenons quelques valeurs numériques : on prend du krypton Kr pour lequel $R \sim 200$ pm, $M(\text{Kr}) = 80 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On trouve

$$\lambda_{\text{modèle}} = 2,7 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{réel}} = 9,5 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Notre modèle est extrêmement grossier néanmoins il nous donne le bon ordre de grandeur. On s'approche ainsi de la vérité.

Équilibre de la troposphère

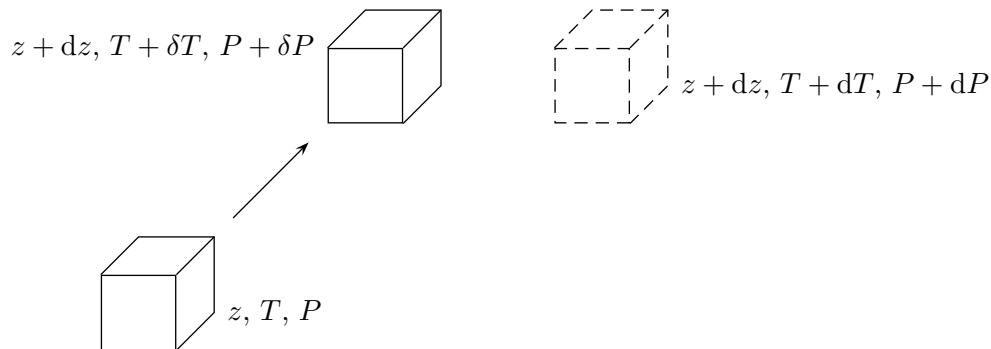
On admet une répartition de température en fonction de l'altitude du type $T(z) = T_0 - az$ où $a \sim 6 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$. On veut étudier l'équilibre et la stabilité de l'atmosphère.

Équilibre Il s'agit de l'équilibre mécanique et pas de l'équilibre thermique. L'équation fondamentale de la statique des fluides s'écrit $dP = -\mu g dz$ et l'équation d'état des gaz parfaits $\mu RT = MP$, $dT = -adz$ donc

$$dP = -\frac{MPg}{RT} \left(-\frac{dT}{a} \right) \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{Mg}{aR} \frac{dT}{T} \Rightarrow PT^{-\frac{Mg}{aR}} = \text{cte.}$$

Si on pose $q = \frac{1}{1 - \frac{aR}{Mg}}$, on a $P^{1-q}T^q = \text{cte}$. Ceci ressemble à un invariant de LAPLACE, mais ici la constante est constante par rapport à z tandis que pour $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cte}$ la constante est constante par rapport à P et T . La ressemblance est donc formelle mais pas physique ; ce sont des relations polytropiques.

Stabilité Cette répartition de température et de pression est-elle mécaniquement stable ? Pour le vérifier, on vérifie si une petite variation des conditions entraîne de petites oscillations autour de la position d'équilibre.



On monte le petit élément de fluide $d\tau$, va-t-il revenir vers le bas ou continuer sa montée ? C'est une question de densités par rapport au petit élément en haut à l'équilibre possédant les propriétés $(z+dz, P+dP, T+dT)$, plus précisément le système est stable si $\mu(T+\delta T, P+\delta P) > \mu(T+dT, P+dP)$.

Il nous faut préciser 3 temps caractéristiques :

- $\tau_{\text{perturbation}}$ le temps qu'il faut à $d\tau$ pour monter ;
- $\tau_{\text{mécanique}}$ la durée de retour à l'équilibre mécanique ;
- $\tau_{\text{thermique}}$ la durée de retour à l'équilibre thermique.

On admet que $\tau_{\text{thermique}} \gg \tau_{\text{perturbation}} \gg \tau_{\text{mécanique}}$. Ceci implique qu'à tout instant, $\delta P = dP$ car le système est à l'équilibre mécanique, que $\delta T \neq dT$ mais que δT correspond à une transformation isentropique, alors que dT correspond à la transformation polytropique régie par les équations de l'équilibre.

La condition de stabilité se réécrit avec un développement limité à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} \delta T + \frac{\partial \mu}{\partial P} \delta P > \frac{\partial \mu}{\partial T} dT + \frac{\partial \mu}{\partial P} dP.$$

Or pour la transformation isentropique, LAPLACE nous donne $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow (1-\gamma)\frac{\delta P}{P} + \gamma\frac{\delta T}{T} = 0$ d'où

$$\delta T = \frac{T}{P} \frac{\gamma-1}{\gamma} \delta P \quad \text{et de même} \quad dT = \frac{T}{P} \frac{q-1}{q} dP.$$

Puisque $\delta P = dP$, on peut simplifier néanmoins $\frac{\partial \mu}{\partial T} < 0$ car à pression constante, le système se dilate quand T augmente. Ainsi la condition d'équilibre est $\frac{\gamma - 1}{\gamma} > \frac{q - 1}{q} \Rightarrow \gamma > q$ car $x \mapsto \frac{x - 1}{x}$ est croissante. En utilisant la relation de MAYER entre γ , c_p et R , il vient

$$a < \frac{Mg}{c_p}.$$

Discussion Numériquement, $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $c_p = \frac{7}{2}R$ donc $\frac{Mg}{c_p} \sim 9,8 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ à comparer à $a \sim 6,0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$.

L'atmosphère est stable si le gradient de température n'est pas trop important. Une atmosphère instable provoque de la convection qui diminue le gradient de température jusqu'à ce que l'atmosphère redevienne stable. Ainsi l'atmosphère est très stable globalement. Ce qui pose problème est un gradient de température décroissant avec l'altitude, un gradient croissant avec l'altitude ne pose pas de problèmes de stabilité.

Dans les liquides, l'instabilité peut être dramatique : un gradient de température trop élevé peut faire exploser un baril de pétrole par exemple.

Étude thermodynamique du rayonnement d'équilibre dans une cavité

On considère une cavité remplie d'un gaz de $N \gg 1$ photons, le tout étant à l'équilibre thermodynamique à la température T .

Pression de radiation On considère un cerceau élémentaire $d\vec{S} = dS\vec{n}$ à l'intérieur de la cavité, et on note p_n la quantité de mouvement normale. On définit la pression P de radiation par

$$P = \vec{j}_{p_n} \cdot \vec{n} = \frac{\delta^2 p_n}{dS dt},$$

où $\delta^2 p_n$ est la quantité de mouvement qui passe à travers dS pendant dt dans les deux sens. Microscopiquement,

$$\delta^2 p_n = \sum p_{n,i}^+ - \sum p_{n,i}^- = 2 \sum p_{n,i}^+ :$$

la première somme correspond à toutes les molécules traversant dS pendant dt dans le sens de $+\vec{n}$ et la deuxième somme porte sur toutes les molécules traversant dS pendant dt dans le sens de $-\vec{n}$. Ces deux sommes de quantité de mouvement sont opposées à cause de l'équilibre de rayonnement.

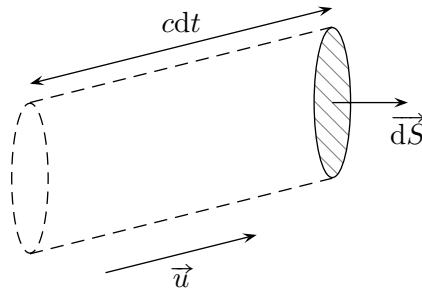
Évaluons $\sum p_{n,i}^+$. Pour une particule, $\vec{p}_i = \frac{h\nu_i}{c} \vec{u}_i$ et si on note θ_i l'angle que forme \vec{u}_i avec \vec{n} ,

$$p_{n,i}^+ = \frac{h\nu_i}{c} \cos \theta_i \Rightarrow 2 \sum \frac{h\nu_i}{c} \cos \theta_i.$$

On effectue maintenant un passage au continu. Soit $\delta^4 N$ le nombre de particules qui traverse dS dans le sens de $+\vec{n}$ entre t et $t + dt$, possédant une fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ et une direction \vec{u} à $d\Omega$ près. On a alors

$$\delta^2 p_n = 2 \int_{\nu=0}^{+\infty} \int_{\vec{u}} \frac{h\nu}{c} \cos \theta \delta^4 N.$$

Exprimons $\delta^4 N$. Soit $f(\nu)d\nu$ la fraction de photons dans toute l'enceinte ayant une fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$. Mais le photon doit en plus être dans le cylindre ci-dessous :



Mais tous ceux qui sont dans le cylindre ne vont pas forcément vers dS ; avec une répartition isotrope des vitesses, il vient donc avec V le volume de la cavité

$$\delta^4 N = N f(\nu) d\nu \frac{c \cos \theta dS dt d\Omega}{V 4\pi}.$$

Or $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ donc si l'on note U l'énergie totale des photons présents dans la cavité,

$$\begin{aligned} \delta^2 p_n &= \frac{2}{V} dS dt \underbrace{\int_{\nu=0}^{+\infty} N h \nu f(\nu) d\nu}_U \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi} \cos^2 \theta 2\pi \sin \theta d\theta}_{1/6} \\ &= \frac{1}{3} \frac{U}{V} dS dt. \end{aligned}$$

Ainsi, $P = \frac{u}{3}$ où u est l'énergie par unité de volume dans le gaz.

Énergie interne U Normalement, $u(T, P)$ mais la relation $P = u/3$ implique une dépendance entre les 3 paramètres u , T et P donc on a en fait $u(T)$. On utilise l'identité de GIBBS qui nous donne, avec $U = Vu$,

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \\ &= \frac{V}{T}du + \frac{u}{T}dV + \frac{1}{3}\frac{u}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \\ &= \frac{V}{T}du + \frac{4}{3}\frac{u}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN, \end{aligned}$$

où μ est le potentiel chimique du gaz de photons et N le nombre de photons dans la cavité. Or d'après le lemme de SCHWARTZ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \frac{V}{T}}{\partial V}\right)_u &= \left(\frac{\partial \frac{4u}{3T}}{\partial u}\right)_V \Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{4}{3}\frac{1}{T} - \frac{4u}{3T^2}\frac{dT}{du} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{3}\frac{u}{T^2}\frac{dT}{du} = \frac{1}{3}\frac{1}{T} \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T}. \end{aligned}$$

En intégrant, on retrouve à une constante près la loi de STEFAN $u = \sigma_B T^4$. Elle est donc une nécessité thermodynamique. De plus,

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4\sigma_B T^3 V.$$

Équation d'état De l'expression de la pression et de la loi de STEFAN on tire

$$P = \frac{1}{3}\sigma_B T^4.$$

C'est une équation d'état indépendante du volume. On peut donc choisir indépendamment P et V , V et T mais pas P et T .

Enthalpie $H = U + PV = 4PV = \frac{4}{3}U$ donc $H = \frac{4}{3}\sigma_B T^4 V$. Il est inutile de définir $C_p = \left(\frac{dH}{dT}\right)_P$ car P et T ne sont pas indépendants.

Potentiel chimique On va montrer que $\mu = 0$. Soit β le gaz de photons de la cavité et α les parois de la cavité, on imagine que α et β sont en équilibre l'un par rapport à l'autre. Alors

$$dU_\alpha = T_\alpha dS_\alpha - \underbrace{P_\alpha dV_\alpha}_0 + \sum_i \underbrace{\mu_{i,\alpha} dn_{i,\alpha}}_0 \quad \text{et} \quad dU_\beta = T_\beta dS_\beta - \underbrace{P_\beta dV_\beta}_0 + \mu_\beta dn_\beta.$$

De plus $dU_\alpha + dU_\beta$ car le système global est isolé et $dS_\alpha + dS_\beta = 0$ car le système est adiabatique à l'équilibre. Ainsi $0 = (T_\alpha - T_\beta)dS_\alpha + \mu_\beta dn_\beta$. Ceci étant valable $\forall dS_\alpha$ et $\forall dn_\beta$, il vient $T_\alpha = T_\beta$ (ce qu'on savait) et $\mu_\beta = 0$.

Ce résultat est lié au fait que le nombre de photons n'est pas fixé.

Entropie On utilise de nouveau l'identité de GIBBS :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \\ &= \frac{V}{T}du + \frac{4}{3}\frac{u}{T}dV \\ &= 4\sigma_B T^2 V dT + \frac{4}{3}\sigma_B T^3 dV \quad \text{car } u = \sigma_B T^4; \end{aligned}$$

d'où en intégrant $S = \frac{4}{3}\sigma_B T^3 V + \text{cte}$. Or d'après le troisième principe de la thermodynamique ou principe de NERNST, $S \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ donc $\text{cte} = 0$.

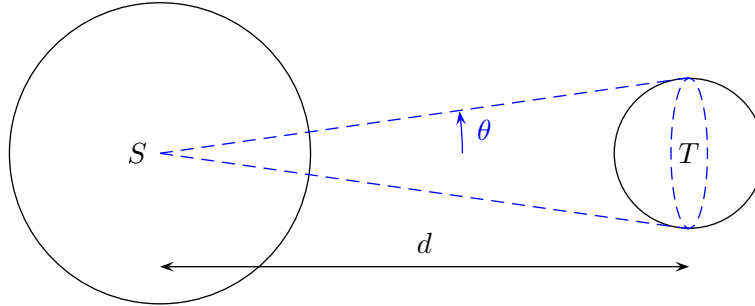
On peut isoler des invariants de LAPLACE : pour une transformation isentropique, $T^3 V = \text{cte}$ donc $P V^{\frac{4}{3}} = \text{cte}$. Ainsi, si l'on considère l'expansion isentropique d'une sphère de rayonnement, le rayon R augmente de telle manière que $T^3 V = \text{cte} \Rightarrow T^3 R^3 = \text{cte} \Rightarrow T R = \text{cte}$.

Rayonnement fossile Dans la théorie du Big Bang, il y a au départ de la matière ionisée et du rayonnement qui interagissent, de telle sorte que le rayonnement est piégé par la matière. Lorsque T a diminué pour atteindre 400 K, soit 380000 ans après le Big Bang, la matière a cessé d'être ionisée et est devenue neutre. Le rayonnement piégé s'est alors échappé et s'est comporté comme une sphère de rayonnement en expansion isentropique. En effet, l'univers étant par construction (!) isolé, le système est adiabatique et le rayonnement est un rayonnement d'équilibre, donc on peut faire l'hypothèse de réversibilité.

Ce rayonnement a été détecté en 1964 par PINZAS et WILSON. Il correspond à une température d'équilibre de 2,72 K soit grâce à la loi de WIEN une longueur d'onde dominante de 1 mm. Ce rayonnement est appelé rayonnement fossile et garde la trace du Big Bang.

Évaluation de la température terrestre

On ne prendra en compte que les échanges thermiques par rayonnement entre le soleil et la Terre qui sont considérés comme des corps noir. R_S et R_T sont les rayons des astres, et T_T et T_S leur température surfacique considérée comme uniforme.



Terre à température uniforme On considère dans un premier temps que $\vec{\nabla}T$ est nul à l'intérieur de la Terre. On se place en régime permanent, $\phi^r = \phi^p - \phi^i = \phi^e - \phi^a$ car la Terre est un corps noir. On écrit la continuité du flux d'énergie à la surface terrestre : $\phi^r = 0$ car $\vec{\nabla}T = \vec{0}$. Or $\phi^p = \sigma T_T^4 4\pi R_T^2$ d'après la loi de STEFAN, et il nous faut évaluer ϕ^i . Si l'on note Ω l'angle solide depuis lequel le soleil voit la Terre, alors $\Omega = dS/d^2$ où dS est la surface de la base du cône en pointillés bleus sur le dessin. Ainsi

$$\phi^i = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2 \frac{\Omega}{4\pi} = \sigma T_S^4 R_S^2 \frac{\pi R_T^2}{d^2}.$$

Finalement, la température de la Terre dans ce modèle est

$$T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{d}}.$$

T_S	R_S	d	T_T
5800 K	700000 km	$1,5 \times 10^8$ km	280 K = 7 °C

La température trouvée est un petit peu froide mais s'approche de la réalité. C'est donc le rayonnement du soleil qui est responsable de l'immense majorité de l'énergie que nous recevons.

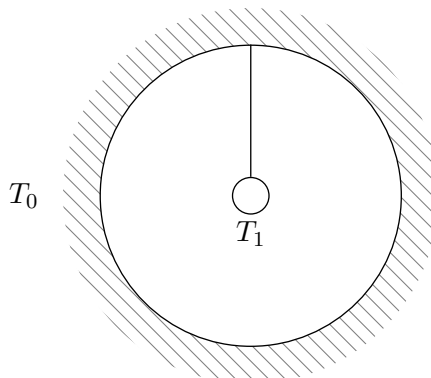
Cas d'un gradient de température Si $\vec{\nabla}T \neq 0$ à l'intérieur de la Terre, la symétrie sphérique nous conduit à $\vec{\nabla}T = \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$. La continuité du flux de chaleur à la surface terrestre s'écrit donc, en notant T'_T la nouvelle température terrestre surfacique

$$\sigma T_T'^4 4\pi R_T^2 - \underbrace{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2 \frac{\Omega}{4\pi}}_{\sigma T_T^4 4\pi R_T^2} = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi R_T^2 \Rightarrow T_T'^4 - T_T^4 = -\frac{\lambda}{\sigma} \frac{dT}{dr}.$$

$\frac{dT}{dr} < 0$ donc $T_T' > T_T$, mais en réalité $T_T' - T_T = 9 \times 10^{-3}$ K. Si la température moyenne à la surface terrestre est 15 °C et non 7 °C, c'est à cause de l'effet de serre et non du gradient de température.

Loi de NEWTON du rayonnement

On considère une petite sphère d'aluminium noire initialement à la température T_1 , que l'on abandonne dans une enceinte à la température T_0 . Comment évolue la température de la petite sphère avec le temps ?



Analyse Au début le système n'est pas à l'équilibre. Mais on s'attend à ce qu'à la fin la sphère se retrouve à T_0 . La sphère est noircie, c'est donc un corps noir. On ne dit rien sur l'enceinte, mais on la considérera comme un corps noir. En fait, cela n'est pas important car si il y a un rayonnement d'équilibre dans la cavité, celui-ci est identique à celui d'un corps noir et ici la perturbation qu'apporte la sphère peut être considérée comme négligeable si le rayon est suffisamment petit.

Transferts radiatifs Pour la sphère, le flux reçu est $\phi^r = \phi^p - \phi^i > 0$ si la petite sphère libère de l'énergie. C'est un corps noir donc $\phi^p = \phi^e = \sigma T^4 s$ où $s = 4\pi R^2$ est la surface de la petite sphère et T sa température. Quelle est la valeur de ϕ^i ? Le flux émis par la paroi est $\sigma T_0^4 S$, et la sphère n'est reçue qu'une fraction déterminée par la géométrie du système : $\phi^i = \sigma T_0^4 S \eta_{\text{géo}}$. Cette astuce n'est valable que pour des volumes convexes, si la sphère était un haricot le raisonnement aurait été plus compliqué.

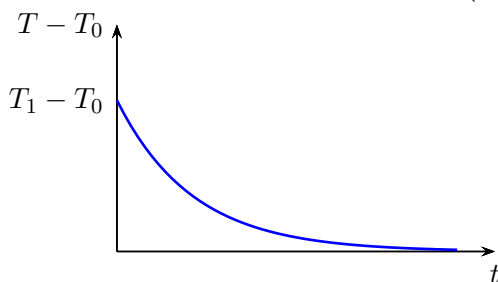
On imagine l'équilibre de rayonnement : $\phi^r = 0$ et $T = T_0$, alors $\phi^p = \phi^i$ et $\eta_{\text{géo}} = s/S$. On a donc en toute généralité l'expression $\phi^r = \sigma(T^4 - T_0^4)s$, mais on fait un développement limité $T^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3(T - T_0)$ ce qui donne

$$\phi^r = 4\sigma s T_0^3 (T - T_0).$$

Cela s'appelle la loi de NEWTON du rayonnement car cela ressemble à la loi de NEWTON pour la conducto-convection. On peut par analogie poser $h = 4\sigma T_0^3$ la conductance de rayonnement.

Bilan énergétique On a fait l'hypothèse que la température de la petite sphère est uniforme, elle se refroidit donc uniformément. Ceci est justifié par le fait que « les transferts radiatifs sont plus lents que les transferts conductifs ». D'après le premier principe appliqué à la petite sphère¹ $dH = mCdT$ or $dH = -\phi^r dt$ (attention au signe). On est mené à l'équation

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{hs}{mc} dt \Rightarrow T - T_0 = (T_1 - T_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{où } \tau = \frac{mc}{hs}.$$



1. Les deux expressions de dH sont égales mais ne sont pas deux parties de la même chose, ce sont deux manières différentes de faire un bilan énergétique.

Cette loi est satisfaisante, conforme à l'analyse. Le temps τ est le temps de relaxation,

$$\tau = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu c}{4\sigma T_0^3 4\pi R \zeta 2} = \frac{\mu c R}{12\sigma T_0^3}.$$

Le temps de relaxation dépend de la taille du système, c'est cohérent. La variation en R provient du rapport entre la surface recevant l'énergie et le volume digérant l'énergie. On fait une application numérique avec les ordres de grandeur suivants :

μ	c	R	T_0	σ	τ
$2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$900 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$	1 cm	273 K	$5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	$1,8 \times 10^3 \text{ s}$

Pour avoir la capacité thermique massique, on sait que la capacité thermique vérifie $mc = 3R$ par la loi de DULONG et PETIT. On trouve un τ de l'ordre de 30 min, ce qui semble raisonnable.

Justification On a admis que la petite sphère est à température uniforme. Ceci est-il justifié ? L'hypothèse revenait à considérer que $\tau \gg \tau_d$ le temps caractéristique de diffusion thermique. Essayons d'avoir un ordre de grandeur de τ_d , pour cela, on part de l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 T$ or $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau_d}$ et $D \vec{\nabla}^2 T \sim D \frac{T}{R^2}$ donc $\tau_d \sim \frac{R^2}{D} = \frac{R^2 \mu c}{\lambda}$ et ceci est très général. Ainsi, l'hypothèse est valable tant que

$$\frac{\mu c R}{12\sigma T_0^3} \gg \frac{R^2 \mu c}{\lambda} \Leftrightarrow R \ll \frac{\lambda}{12\sigma T_0^3}.$$

On prend $\lambda = 200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, et la condition devient $R \ll 15 \text{ m}$. Avec $R = 1 \text{ cm}$, c'est largement vérifié, mais c'est un problème que l'on ne peut traiter par homothétie.

Opérateur d'inertie

Moment d'inertie par rapport à un axe On considère un solide quelconque, un point O et un axe Δ dirigé par le vecteur unitaire \vec{u} passant par O . On veut déterminer le moment d'inertie du solide par rapport à Δ .

Par définition, $J_\Delta = \iiint r^2 dm$ or

$$\begin{aligned} r^2 &= (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u})^2 \quad \text{car } r \text{ est la distance à l'axe;} \\ &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}) \\ &= -\vec{u} \cdot [\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u})] \quad \text{par propriété du produit mixte.} \end{aligned}$$

Donc $J_\Delta = - \iiint dm \vec{u} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}))$. On peut transformer cette expression en utilisant une base cartésienne dans laquelle

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

et donc la distance à l'axe s'exprime

$$\begin{aligned} r^2 &= -\vec{u} \cdot [\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u})] \\ &= -(\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En multipliant par dm et en intégrant, on a une nouvelle expression du moment d'inertie

$$J_\Delta = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} J_{(Ox)} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & J_{(Oy)} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & J_{(Oz)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad P_{xy} = \iiint xy dm,$$

avec des expressions analogues pour les autres termes hors-diagonale de la matrice. Pour calculer J_Δ quelque soit l'axe Δ , il suffit de calculer les 9 termes de la matrice. Les P_{xy} sont appelés produits d'inertie.

Opérateur d'inertie Si l'on note \mathcal{J}_O l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 représenté par la matrice ci-dessus dans la base que nous avons choisie, alors on a l'expression intrinsèque

$$J_\Delta = \vec{u} \cdot \mathcal{J}_O(\vec{u}).$$

Axes principaux d'inertie \mathcal{J}_O est symétrique réel donc, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de vecteurs propres. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une telle base; (Ox) , (Oy) et (Oz) sont appelés axes principaux d'inertie et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{J}_O) = \begin{pmatrix} J_{(Ox)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{(Oy)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{(Oz)} \end{pmatrix}.$$

Comment déterminer les axes principaux d'inertie d'un solide ? Ce sont le plus souvent des axes de symétrie ou des axes naturels pour la description du solide. Par exemple, pour un parallélépipède homogène de centre O et de côtés a , b et c suivants les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , la matrice d'inertie dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est diagonale. En effet, pour le produit d'inertie $P_{xy} = \iiint xy dm$, on découpe l'intégrale sur deux domaines symétriques du parallélépipède situés de part et d'autre du plan (yOz) , et les deux contributions s'annulent car seul le signe de x change. En utilisant le cours de cinétique, on a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{J}_O) = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

Pour un cube, $a = b = c$ donc le moment d'inertie est le même pour tout axe passant par O car \mathcal{J}_O est une homothétie.

Mouvement d'un solide \mathcal{S} ayant un point fixe O Le moment cinétique en O est $\vec{\sigma}(O) = \iiint dm \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}(P)$ or $\vec{v}(P) = \vec{v}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \Omega$ d'après VARIGNON et $\vec{v}(O) = \vec{0}$ donc

$$\vec{\sigma}(O) = - \iiint dm \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega}) = \mathcal{J}_O(\vec{\Omega}),$$

par identification avec les expressions précédentes. L'opérateur d'inertie est donc de plus en plus utile. De même, on peut exprimer l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c &= \iiint \frac{1}{2} dm (\vec{v}(P))^2 \\ &= \iiint \frac{1}{2} dm (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega}) \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega}) \quad \text{par VARIGNON;} \\ &= \frac{1}{2} \iiint dm \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Omega})) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \mathcal{J}_O(\vec{\Omega}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}(O). \end{aligned}$$

Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe Δ On pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ avec $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ donc $\vec{\sigma}(O) = \mathcal{J}_O(\vec{\Omega})$.

Si Δ est axe principal d'inertie, $\vec{\Omega}$ est vecteur propre de \mathcal{J}_O associé à la valeur propre J_Δ et on retrouve la formule classique $\vec{\sigma}(O) = J_\Delta \vec{\Omega}$.

Si Δ n'est pas axe principal d'inertie et que $\vec{\Omega}$ est constant, calculer $\mathcal{J}_O(\vec{\Omega})$ c'est d'abord projeter $\vec{\Omega}$ sur une base de vecteurs attachée au solide, et donc bien que $\vec{\Omega}$ soit constant $\vec{\sigma}(O)$ ne sera pas fixe ; il tournera comme le solide à la vitesse angulaire Ω , effectuant un mouvement de précession. On peut donc prévoir que $\vec{\sigma}(O)$ vérifiera l'équation caractéristique de la précession

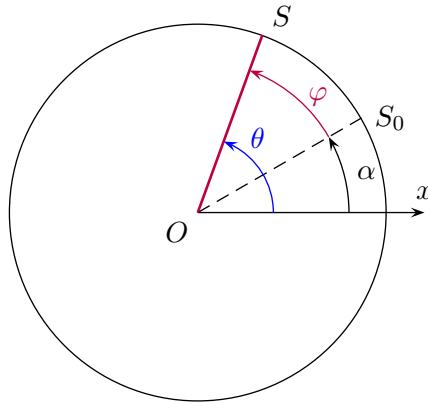
$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}(O).$$

Scarabée sur un plateau

On considère un plateau de masse M , de rayon R qui tourne sans frottements autour d'un axe Δ avec un moment d'inertie J_Δ . Un scarabée dort au bord du plateau, celui-ci étant initialement immobile. Le scarabée se réveille et décide de faire le tour du plateau. De combien le plateau aura-t-il tourné lorsque le scarabée sera revenu à son point de départ ?

Analyse Le plateau tourne car le scarabée avance, le plateau pousse le scarabée vers l'avant en exerçant une action tangentielle. À l'inverse, le scarabée pousse le plateau pour avancer.

Préliminaires On paramètre la position du plateau par α , angle entre l'axe (Ox) et la direction du point de départ S_0 du scarabée, et on paramètre la position du scarabée par l'angle ϕ avec $\phi = 0$ initialement. On pose $\theta = \alpha + \phi$.



Le système a deux degrés de liberté. Cinématiquement, α et ϕ sont indépendants mais on va relier ces grandeurs grâce à la dynamique. Le système que l'on considère est {plateau+scarabée}, le référentiel terrestre est galiléen. Les forces extérieures sont $[\vec{P}_S]$, $[\vec{P}_P]$ et $[\vec{R}]$ la résultante des actions de contact entre l'axe et le plateau.

Le mouvement On applique le TMC par rapport à Δ : $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta$. Or $\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\alpha} + mR\dot{\theta}R$ et $M_\Delta = 0$ car les poids sont parallèles à Δ et $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ car pas de frottements. Ainsi, $\sigma_\Delta = \text{cte}$ et $\text{cte} = 0$ car initialement tout est immobile. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= J_\Delta \dot{\alpha} + mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow (J_\Delta + mR^2) \dot{\alpha} + mR^2 \dot{\phi} = 0 \\ &\Rightarrow \dot{\alpha} = -\frac{mR^2}{J_\Delta + mR^2} \dot{\phi} \\ &\Rightarrow \Delta\alpha = -\frac{2\pi}{1 + \frac{J_\Delta}{mR^2}}. \end{aligned}$$

Discussion C'est homogène, satisfaisant physiquement au niveau du signe et le dénominateur qui ne s'annule pas. De plus, on peut examiner des cas limites :

- si $J_\Delta \gg mR^2$, $\Delta\alpha \ll 2\pi$ et le plateau est très lourd, il ne réagit pratiquement pas ;
- si $J_\Delta \ll mR^2$, $|\Delta\alpha| = 2\pi$ et le scarabée ne bouge pas.

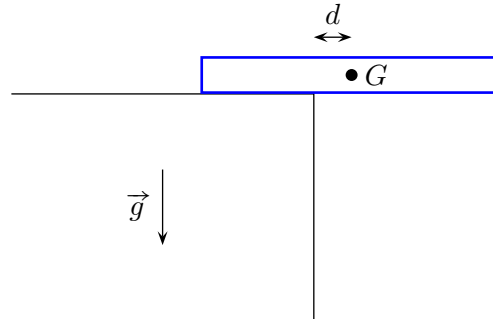
Ce résultat est indépendant de la façon dont le scarabée fait son tour sur le plateau.

Par exemple, si la trajectoire du scarabée est un carré de côté $2a$ centré sur O , alors le lecteur avisé pourra retrouver que

$$\Delta\alpha = -8 \frac{\text{Arccotan} \left(\sqrt{1 + \frac{J_\Delta}{ma^2}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{J_\Delta}{ma^2}}}.$$

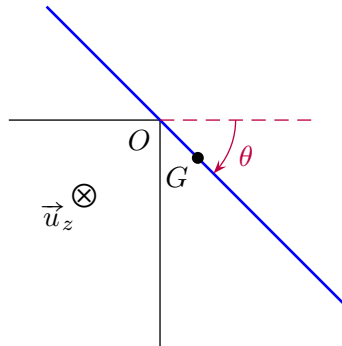
Chute d'un règle sur un coin de table

On abandonne la règle homogène de masse m et de longueur ℓ sans vitesse initiale, son centre de gravité étant décalé d'une distance d par rapport au coin. À partir de quel moment va-t-elle commencer à glisser sur le coin de table ?



Analyse Il y a d'abord une rotation sans glissement autour du coin de la table, et pendant cette phase on aura d'après COULOMB $\|\vec{T}\| \leq f_a \|\vec{N}\|$. Si on paramètre la rotation de la règle par θ , il faut déterminer $\vec{T}(\theta)$ et $\vec{N}(\theta)$ pour trouver l'angle limite θ_ℓ . θ_ℓ dépend de m , ℓ , d , g et f_a . Par analyse dimensionnelle, on montre que m et g ne peuvent pas intervenir et que ℓ et d interviennent sous la forme d/ℓ .

Préliminaires On n'étudiera que la phase de rotation de la règle, et on paramètre de la manière suivante :

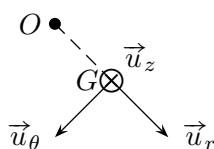


Attention, sur le dessin $\theta > 0$. Le système étudié est la règle, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces extérieures sont $[\vec{P}]$ et $[\vec{R}]$.

Mouvement On applique le TMC par rapport à $\Delta = (O, \vec{u}_z)$: $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta$. Or $\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$ et d'après le théorème de HUYGENS, $J_\Delta = \frac{m\ell^2}{12} + md^2$. De plus le moment du poids est $M_\Delta = +mgd \cos \theta$ (attention au signe) donc

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mgd \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta} = mgd \sin \theta + 0 \quad \text{car } \theta(0) = 0 \text{ donc } \sin(\theta(0)) = 0.$$

Actions de contact D'après le TRD, $m\vec{a}(G) = \vec{R} + \vec{P}$ et on projette en coordonnées cylindriques :



	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z
$m\vec{a}(G)$	$m(-d\dot{\theta}^2)$	$md\ddot{\theta}$	0
\vec{R}	\vec{T}	$-N_\theta$	N_z
\vec{P}	$mg \sin \theta$	$mg \cos \theta$	0

Le tour est joué, on trouve

$$\overline{T} = -mg \sin \theta \left(1 + \frac{2md^2}{J_\Delta} \right) \quad \text{et} \quad N_\theta = mg \cos \theta \left(1 - \frac{md^2}{J_\Delta} \right).$$

Limite de glissement Elle est atteinte pour $|\overline{T}| = f_a N_\theta$ d'où un angle limite

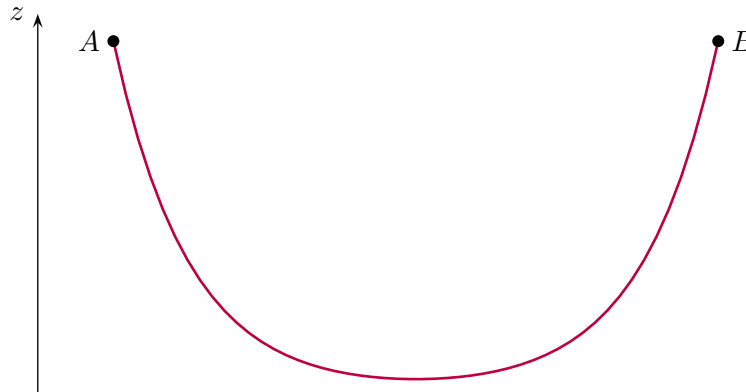
$$\tan \theta_\ell = \frac{f_a}{1 + 36 \frac{d^2}{\ell^2}}.$$

C'est homogène et cela confirme en tout points notre analyse. L'angle limite est extrêmement sensible à la variation du rapport d/l à cause du facteur 36.

★ ★ ★

Chainette

Soit un fil inextensible de masse linéique λ parfaitement flexible et suspendu par ses extrémités dans un champ de pesanteur. Déterminer la forme du fil.



Analyse On a une infinité de degrés de libertés, autant que de points du fil. Ceci suppose d'appliquer le PFD à une petite tranche entre les abscisses curvilignes s et $s + ds$. Le fil est parfaitement flexible donc pas de moment de résistance à la flexion. La seule action est l'action tangentielle, la tension $\vec{T}(s)$ du fil. Pour réaliser en pratique un fil parfaitement flexible, on fabrique une chainette d'où le nom du complément.

Équation de la statique des fils L'application du PFD donne pour un fil parfaitement flexible soumis à une force extérieure $d\vec{F} = -\lambda \vec{g} ds$:

$$\vec{T}(s + ds) - \vec{T}(s) + d\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{T} + d\vec{F} = \vec{0}.$$

Forme du fil En projetant sur les trois axes, on obtient

$$\begin{cases} dT_x = 0 \\ dT_y = 0 \\ dT_z = \lambda g ds \end{cases}.$$

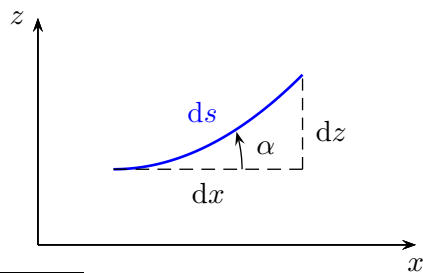
Montrons que le fil est contenu dans un plan vertical. Soit ds un petit élément de fil et \vec{T} la tension qu'il exerce, \vec{T} est colinéaire à la direction du petit élément de fil. On projette une fois de plus \vec{T} sur les trois axes mais cette fois-ci avec 2 angles α et φ : α est l'angle que fait le fil avec sa projection sur le plan (xOy) , et φ l'angle que fait cette projection avec (Ox) . On a alors

$$\begin{cases} T_x = T \cos \alpha \cos \varphi \\ T_y = T \cos \alpha \sin \varphi \\ T_z = T \sin \alpha \end{cases}.$$

Or le PFD nous a montré que T_x et T_y sont des constantes le long du fil donc $\tan \varphi = \text{cte}$ donc $\varphi = \text{cte}$, ce qu'il fallait démontrer. On fait pivoter le repère pour prendre $\varphi = 0$ de manière à avoir les projections suivantes, en posant T_0 la valeur constante de T_x

$$\begin{cases} T_x = T \cos \alpha \\ T_y = 0 \\ T_z = T \sin \alpha = T_0 \tan \alpha \end{cases}.$$

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle $d(T_0 \tan \alpha) = \lambda g ds$.



On a $\tan \alpha = \frac{dz}{dx}$ et $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$ par le théorème de PYTHAGORE. Si on pose $u = \frac{dz}{dx}$, alors

$$\begin{aligned} T_0 \frac{d^2 z}{dx^2} &= \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \Rightarrow T_0 \frac{du}{dx} = \lambda g \sqrt{1 + u^2} \\ &\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda g}{T_0} dx \\ &\Rightarrow u = \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + \psi \right) \quad \text{où } \psi \text{ est la constante d'intégration ;} \\ &\Rightarrow z = \frac{T_0}{\lambda g} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + \psi \right) + K. \end{aligned}$$

La forme de la chainette est un cosinus hyperbolique. Pour déterminer les constantes T_0 , ψ et K , on a trois conditions limites :

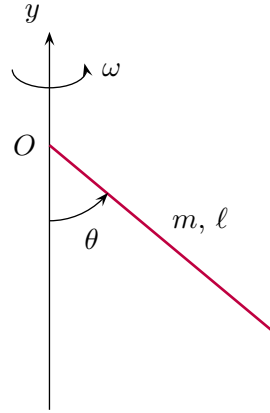
- le fil passe par A donc $x = x_A \Leftrightarrow z = z_A$;
- le fil passe par B donc $x = x_B \Leftrightarrow z = z_B$;
- le fil a une longueur fixée L donc $\int_A^B \sqrt{1 + z'^2} dx = L$.

Commentaires La norme de la tension vérifie $T = \frac{T_0}{\cos \alpha}$ donc la tension est maximale aux points où le fil est vertical, ce qui semble raisonnable. Il existe une autre méthode pour avoir la forme de la chainette. On envisage toutes les formes qu'elle pourrait prendre en passant par A et B puis on choisit celle qui impose une énergie potentielle minimale. C'est la méthode de LAGRANGE.

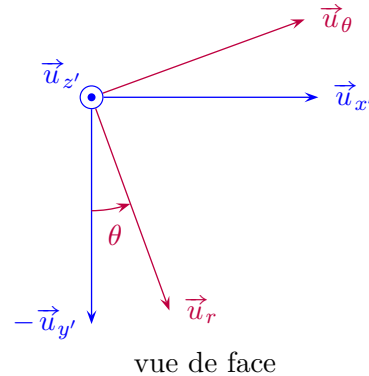
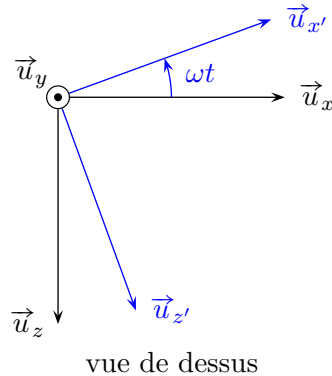
Un problème apparenté est celui d'une chainette attachée par deux points à un axe qui tourne à la vitesse angulaire constante ω . On néglige la pesanteur et on reprend le même calcul avec $d\vec{F} = \lambda ds \omega^2 z \vec{u}_z$ où \vec{u}_z est le vecteur normale à l'axe dirigé du centre vers le point courant du fil.

Pendule conique

On considère une tige homogène de masse m et de longueur ℓ rattachée à un axe tournant à la vitesse angulaire ω par une articulation sans frottements permettant la rotation de la tige par rapport à direction normale à l'axe de rotation. On veut le mouvement de la tige, les positions d'équilibre relatif et leur stabilité.



Analyse Le système possède un seul degré de liberté paramétré par l'angle θ . On appelle \mathcal{R}' le référentiel tournant et \mathcal{R} le référentiel absolu supposé galiléen. On se placera dans \mathcal{R}' pour notre étude, avec $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_y$. Les actions sur la tige sont le poids $[\vec{P}]$, les actions de contact $[\vec{R}]$, les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS $[\vec{F}_{ie}]$ et $[\vec{F}_{ic}]$. Le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_{z'})$ est le repère associé à la tige.



Étude dynamique Pour obtenir l'équation du mouvement, on applique le TMC par rapport à $\Delta = (O, \vec{u}_{z'})$ fixe dans \mathcal{R}' : $J_\Delta \ddot{\theta} = M_\Delta$ or par le théorème de HUYGENS $J_\Delta = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}$.

Étudions les différents moments :

- $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ car pas de frottements sur l'axe ;
- $M_\Delta(\vec{P}) = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta$;
- pour calculer $M_\Delta(\vec{F}_{ie})$, on découpe la tige en parties élémentaires ¹,

$$d\vec{F}_{ie} = m \frac{dr}{\ell} \times \omega^2 \times r \sin \theta \vec{u}_{x'} \Rightarrow dM_\Delta(\vec{F}_{ie}) = \frac{m}{\ell} \omega^2 r \sin \theta r \cos \theta dr \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}_{ie}) = \frac{m\ell^2}{3} \sin \theta \cos \theta \omega^2 ;$$

- pour une partie élémentaire de la tige, la force de CORIOLIS associée est

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{ic} &= -2dm\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2dm\omega \vec{u}_y \wedge r\dot{\theta} \vec{u}_\theta, \end{aligned}$$

1. Ici, on calcule bien un moment élémentaire pour chaque partie de la tige et on somme ces moments. Si on avait sommé d'abord les forces, il aurait été difficile de dire en quel point le glisseur \vec{F}_{ie} s'applique : ici c'est manifestement aux 2/3 de la longueur et pas à la moitié.

or $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_\theta // \vec{u}_{z'}$ donc $M_\Delta(\vec{F}_{ic}) = 0$.

On peut donc avoir l'équation du mouvement :

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + \frac{m\ell^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \omega_c^2\right) \quad \text{où} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}.$$

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ donc on a deux cas :

- si $\sin\theta = 0$, deux position d'équilibre $\theta_{e,1} = 0$ et $\theta_{e,2} = \pi$;
- si $\sin\theta \neq 0$ et si $\omega > \omega_c$, on a une troisième position d'équilibre $\theta_{e,3} = \text{Arccos}\left(\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right) = \theta_0$.

C'est à cause de cette dernière position d'équilibre que le dispositif s'appelle le pendule conique. Étudions maintenant la stabilité. On écrit $\theta = \theta_e + \alpha$ avec $\alpha \ll 1$, l'équation différentielle devient

$$\ddot{\alpha} = (\sin\theta_e + \alpha\cos\theta_e)\left(\omega^2\cos\theta_e - \omega^2\alpha\sin\theta_e - \omega_c^2\right) = \alpha\left[\omega^2(2\cos^2\theta_e - 1) - \omega_c^2\cos\theta_e\right] = K\alpha.$$

Le système est stable si et seulement si $K < 0$.

- Si $\omega < \omega_c$:
 - pour $\theta_{e,1} = 0$, $K = \omega^2 - \omega_c^2 < 0$ donc le système est stable ;
 - pour $\theta_{e,2} = \pi$, $K = \omega^2 + \omega_c^2 > 0$ donc le système est instable.
- Si $\omega > \omega_c$:
 - pour $\theta_{e,1} = 0$, $K = \omega^2 - \omega_c^2 > 0$ donc la position basse est devenue instable ;
 - pour $\theta_{e,2} = \pi$, on a toujours $K > 0$;
 - pour $\theta_{e,3} = \theta_0$, $K = \frac{\omega_c^4 - \omega^4}{\omega^2}$ donc la position du pendule conique est stable.
- Si $\omega = \omega_c$:
 - pour $\theta_{e,2} = \pi$, $K > 0$ cette position est toujours instable.
 - pour $\theta_{e,2} = \theta_{e,3} = 0$, $K = 0$ et au premier ordre, $\ddot{\alpha} = 0$. Il faut pousser le développement limité, on trouve dans ce cas $\ddot{\alpha} = -\frac{\omega_c^2}{2}\alpha^3$ donc la position est stable.

En effet, pour le dernier cas, l'accélération est opposée à l'élongation donc on aura des oscillations autour de la position d'équilibre mais ce ne seront pas des oscillations harmoniques, à cause de l'exposant 3.

Étude énergétique On recommence l'exercice avec des méthodes énergétiques. Le système est-il conservatif ?

- $[\vec{P}]$ dérive d'une énergie potentielle $E_{pp} = -m\frac{\ell}{2}\cos\theta + \text{cte}$.
- Calculons le travail élémentaire de $[\vec{F}_{ie}]$:

$$\begin{aligned}\delta W(\vec{F}_{ie}) &= M_\Delta(\vec{F}_{ie})d\theta \\ &= \frac{m\ell^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= -d\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\cos^2\theta\right).\end{aligned}$$

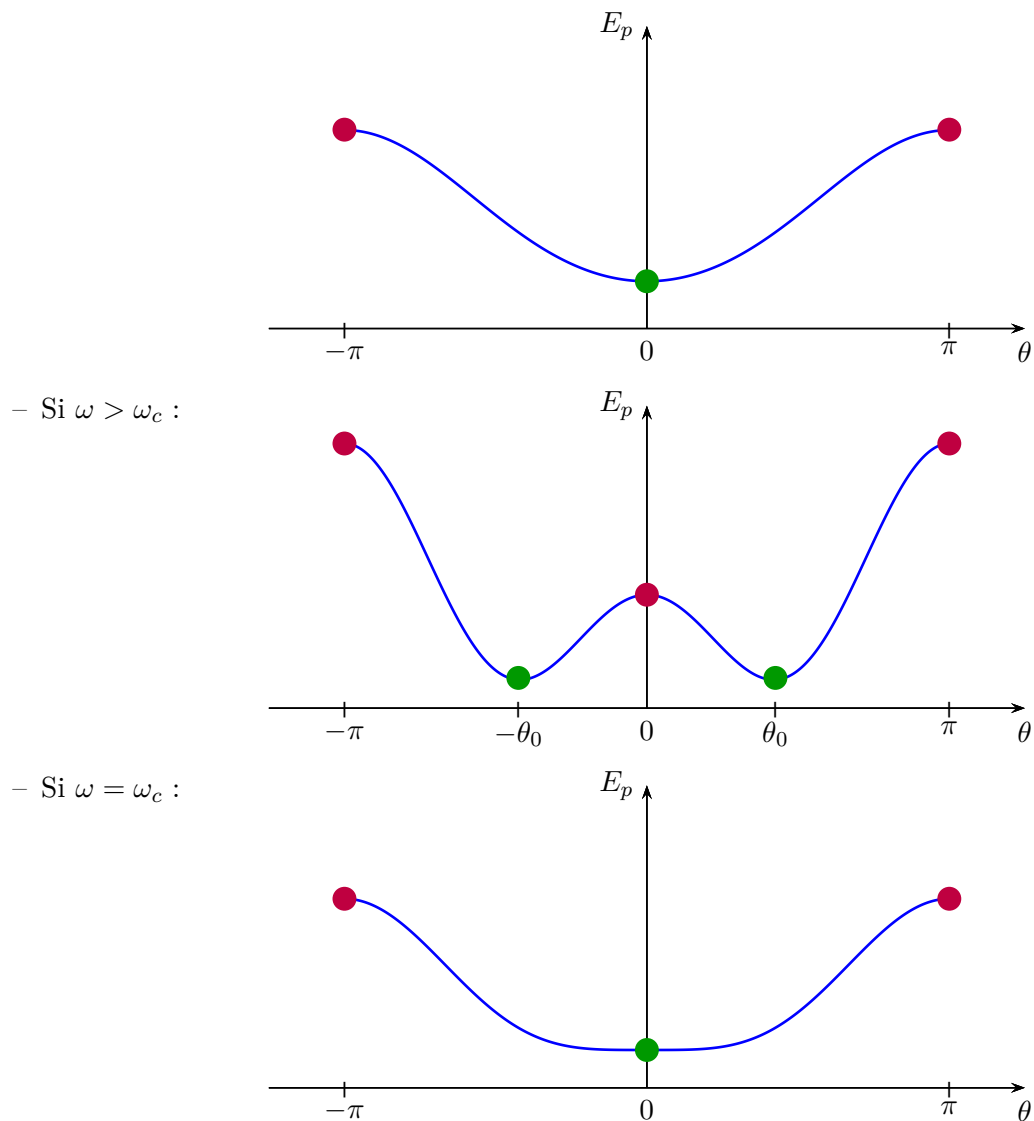
- $[\vec{R}]$ et $[\vec{F}_{ic}]$ ne dérivent pas d'une énergie potentielle mais ne travaillent pas ici.

Ainsi, dans le référentiel \mathcal{R}' , le système est conservatif et on peut lui associer l'énergie potentielle

$$E_p = J_\Delta\cos\theta\left(\frac{1}{2}\omega^2\cos\theta - \omega_c^2\right) + \text{cte}.$$

Néanmoins, le système n'est pas conservatif dans \mathcal{R} car la réaction de l'axe travaille. On reprend l'étude des positions d'équilibre et de la stabilité grâce au graphe de E_p . Les points rouges sont des positions d'équilibre instables, les points verts des positions d'équilibre stable.

- Si $\omega < \omega_c$



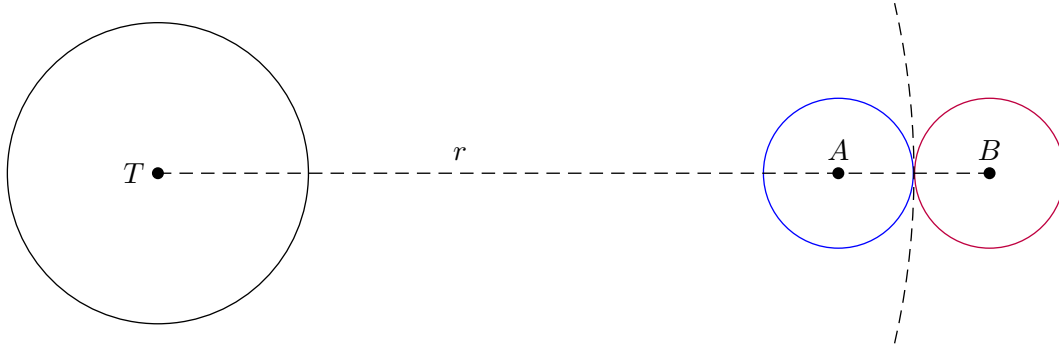
Dans le dernier cas, on voit que le minimum n'est pas parabolique mais clairement plus plat, en θ^4 . C'est une position d'équilibre très sensible aux perturbations, un point critique du système.

L'animation ci-dessous (lisible par Adobe Reader¹) représente l'évolution du graphe de E_p pour ω allant de valeurs très inférieures à ω_c à des valeurs très supérieures à ω_c . On peut noter le phénomène de coalescence des deux minimums symétriques et du maximum en 0 qui fusionnent pour $\omega = \omega_c$.

1. Si l'animation ne se lance pas n'affichez qu'une page à la fois.

Stabilité d'un satellite double

On considère un satellite constitué de 2 sphères S_A et S_B de centres A et B , de rayon R_s et de masse m en orbite à la distance r de la Terre de centre T , de masse M et de rayon R_T . On admet qu'à tout instant T , A et B sont alignés et quel la seule force qui s'exerce sur les satellites est la gravitation. On cherche une condition sur r pour que le satellite tienne en équilibre.



Analyse La condition de contact porte sur N_A et N_B , composantes normales de la réaction respectivement de B sur A et de A sur B . Si on appelle \vec{u}_r le vecteur unitaire qui dirige \overrightarrow{TA} , et que l'on suppose que N_A et N_B sont des projections sur \vec{u}_r , alors il faut $N_A < 0$ et $N_B > 0$. Dans le référentiel tournant \mathcal{R}' du satellite, celui-ci est à l'équilibre.

Mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} On applique le TRD à l'ensemble $\{S_A + S_B\}$ dans \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} 2m\vec{a}(G) &= \left(-\frac{GmM}{(r-R_S)^2} - \frac{GmM}{(r+R_S)^2} \right) \vec{u}_r \\ &= -\frac{GmM}{r^2} \left(1 + \frac{2R_S}{r} + \left(1 - \frac{2R_S}{r} \right) \right) \vec{u}_r \quad \text{car } \frac{R_S}{r} \ll 1; \\ &= -\frac{2GmM}{r^2} \vec{u}_r. \end{aligned}$$

Puisque $\vec{a}(G) = -\omega^2 r \vec{u}_r$, on retrouve la troisième loi de KEPLER $\omega^2 r^3 = GM$.

Action de contact Par le théorème des actions réciproques, $N_A = -N_B$ donc on s'intéresse à A . On applique le TRD en projection sur \vec{u}_r à S_A dans \mathcal{R}' en admettant que S_A est en équilibre dans \mathcal{R}' :

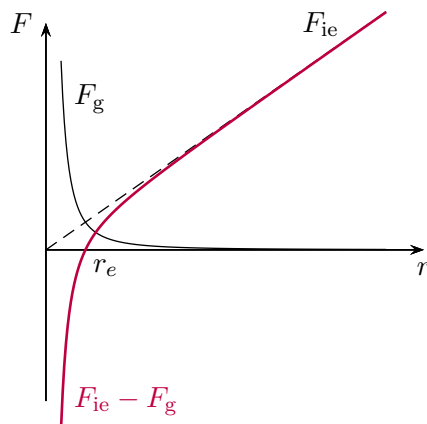
$$\begin{aligned} 0 = -N_A - \frac{GMm}{(r-R_S)^2} + \frac{Gm^2}{4R_S^2} + m\omega^2(r-R_S) &\Rightarrow N_A \approx \frac{Gm^2}{4R_S^2} + \underbrace{m\omega^2 r}_{\frac{GmM}{r^2}} \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) - \frac{GmM}{r^2} \left(1 + \frac{2R_S}{r} \right) \\ &\Rightarrow N_A = \frac{Gm^2}{4R_S^2} - \frac{3GmMR_S}{r^3}. \end{aligned}$$

Limite de ROCHE La condition $N_A > 0$ se traduit donc par

$$r^3 > 12 \frac{M}{m} R_S^3 \Leftrightarrow r > R_S \sqrt[3]{\frac{12M}{m}};$$

et si l'on considère que la masse volumique du satellite est celle de la Terre, la condition donne la limite de ROCHE $r > R_T \sqrt[3]{12}$ soit $r > 14600$ km.

Discussion \mathcal{R}' tourne à la vitesse angulaire ω telle que $\omega^2 r^3 = GM$, et au niveau du satellite il y a compensation entre les forces d'inerties d'entraînement et l'attraction de la Terre, qui sont de signe opposés. Néanmoins l'une est croissante avec r et l'autre décroissante avec r , donc cette position d'équilibre est instable car une perturbation ferait quitter à ce satellite son orbite. En voici l'explication :



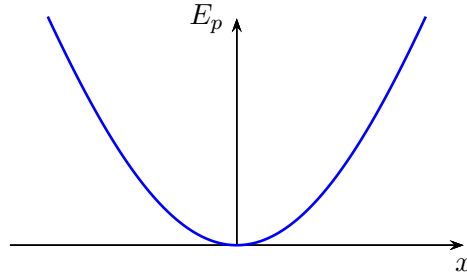
On rappelle qu'en projection sur \vec{r}_u , $2ma(G) = F_{ie} - F_g$ où $F_g > 0$. Si $r < r_e$, $F_{ie} - F_g < 0$ donc r va décroître. De même, si $r > r_e$, r croît donc $r = r_e$ est bien une position d'équilibre instable.

La résultante $F_{ie} - F_g$ est le terme de marée, et le problème que l'on a résolu peut être posée de la manière suivante : à quelle condition l'attraction gravitationnelle entre les deux satellites compense-t-elle le terme de marée ?

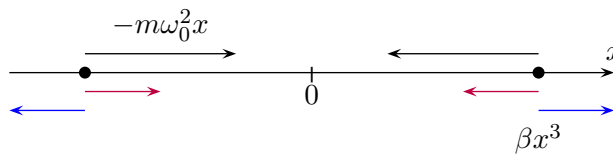
Oscillateur perturbé

On considère une masse ponctuelle de masse m astreindre à se mouvoir le long d'un axe (Ox) et soumise à une force $\vec{F} = m(-\omega_0^2 x + \beta x^3) \vec{u}_x$ et on considèrera des mouvements pour lesquels $\beta x^3 \ll \omega_0^2 x$, c'est à dire des oscillations autour de la position d'équilibre.

Analyse \vec{F} dérive d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{4}m\beta x^4$. L'hypothèse de petites oscillations fait que c'est le terme en x^2 qui domine.



Le système est toujours conservatif par rapport à un oscillateur harmonique, E_p est toujours paire mais les oscillations ne seront plus harmoniques. Voici un diagramme qui représente les différentes forces, en bleu pour $\beta > 0$ et en rouge pour $\beta < 0$:



Équation du mouvement L'application du PFD donne l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \beta x^3.$$

C'est une équation non linéaire du second ordre, qu'on ne peut résoudre analytiquement de premier abord. Dans l'optique de l'étude des oscillations, on va chercher une solution périodique quasi-sinusoidale avec une pulsation légèrement différente de ω_0 . On pose donc

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \quad \text{avec } x_0(t) = a \cos(\omega t + \varphi),$$

le tout tel que $\omega - \omega_0 = \delta\omega \ll \omega_0$, et $x_1(t) \ll a$. x_1 est la correction au terme sinusoidal. Cette approximation n'est pas « violemment fautive », on veut ajuster les paramètres $\delta\omega$ et x_1 , a et φ étant déterminés par les conditions initiales. On prend même $\varphi = 0$ par un choix judicieux de l'origine des temps. On injecte l'expression de x choisie dans l'équation différentielle, ce qui donne avec x_0 solution de l'équation harmonique :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0 x_1 = \beta(x_0 + x_1)^3 + (\omega^2 - \omega_0^2)x_0.$$

On linéarise cette équation en faisant des développements limités au premier ordre en $\frac{\delta\omega}{\omega_0} \ll 1$, $\frac{x_1}{a} \ll 1$ et $\beta a^2 \ll 1$:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta x_0^3 + 2\omega_0 \delta\omega x_0.$$

On remplace maintenant x_0 par son expression et on linéarise \cos^3 :

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left(\frac{3\beta a^3}{4} + \omega_0 \delta\omega a \right) \cos(\omega t) + \frac{\beta a^3}{4} \cos(3\omega t).$$

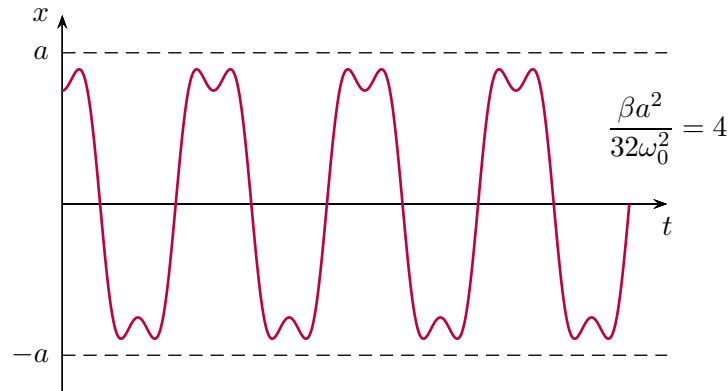
Voilà l'équation d'un oscillateur harmonique soumis à des oscillations forcées, chose que l'on sait résoudre. L'excitation en $\cos(\omega t)$ va provoquer une résonance, ce que l'on a pas envisagé pour notre

étude de petites oscillations, d'où la nullité du coefficient du $\cos(\omega t)$ ce qui nous permet de trouver notre premier paramètre :

$$\delta\omega = -\frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\beta a^2}{\omega_0^2} \right)$$

On cherche ensuite x_1 sous la forme $\underline{x}_1 = \underline{X}_1 \exp(3i\omega t)$, et l'équation différentielle nous donne $\underline{X}_1 = -\frac{\beta a^3}{32\omega_0^2}$ d'où enfin

$$x(t) = a \cos(\omega t) - \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\omega t).$$



Commentaires ω dépend de a qui est l'amplitude donc les oscillations ne sont pas isochrones. On voit ici la manifestation d'un phénomène général : l'harmonique 3ω apparaît à cause du terme x^3 .

Cette étude théorique n'est pas complètement inutile : prenons le cas du pendule pesant, régi par l'équation différentielle

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta \approx -mg\ell \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right),$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 3 de \sin qui est une bonne approximation. On identifie $\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{J_{\Delta}}$ et $\beta = \frac{\omega_0^2}{6}$, notre étude nous donne avec $a = \theta_m$,

$$\delta\omega = -\frac{3}{8} \frac{\beta a^3}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\theta_m^2}{16}.$$

Or la période T vérifie $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donc en différenciant logarithmiquement $\frac{dT}{T} = -\frac{d\omega}{\omega}$. En assimilant les différentielles à de petits écarts, il vient

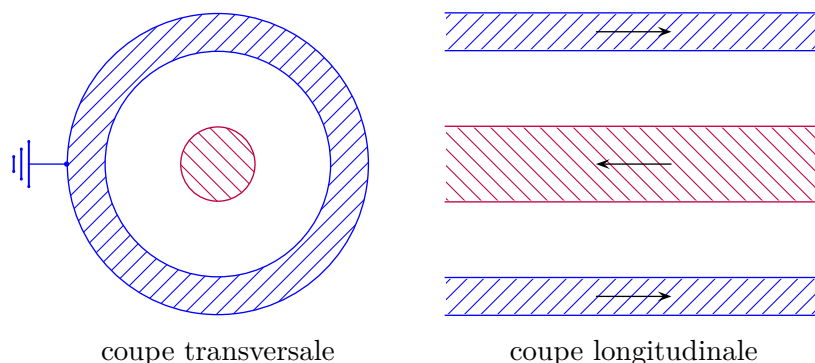
$$\frac{\delta T}{T_0} = +\frac{\theta_m^2}{16} \Rightarrow T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right).$$

C'est la formule de BORDAS. Si on veut un écart entre T et T_0 de moins de 1%, il faut $\theta_m < 23^\circ$. Ainsi le pendule pesant est quasi-harmonique jusqu'à 23° d'amplitude.

On aurait pu faire la même étude avec un terme correctif γx^2 . Dans ce cas-là, l'énergie potentielle n'aurait pas été paire, et les oscillations décalées par rapport à la position $x = 0$. L'harmonique 2ω apparaît dans ce cas.

Ligne électrique

On considère un câble coaxial formé de deux fils de cuivre dans lesquels deux courants circulent en sens inverse, séparés par un isolant :

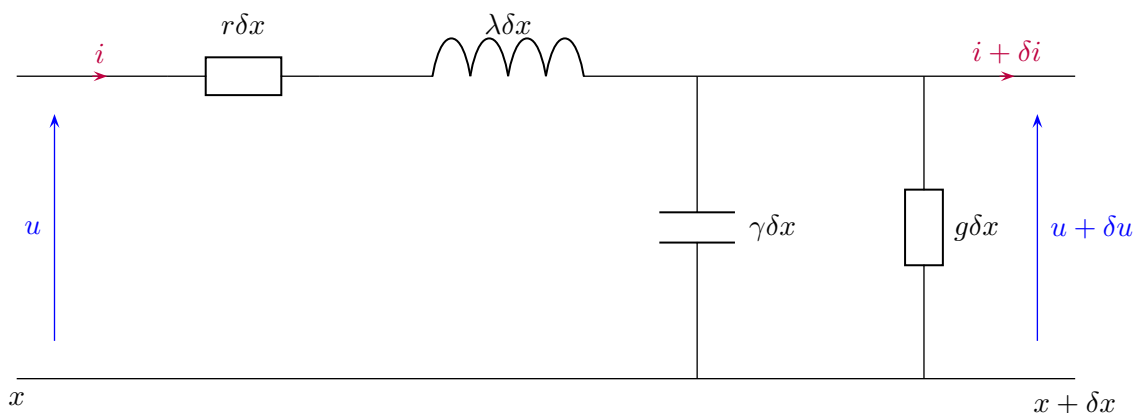


Modélisation La ligne considérée comme infinie possède 4 caractéristiques :

- une résistance des conducteurs, qui tend vers 0 dans le cas idéal ;
- une conductance de l'isolant, qui tend vers 0 dans le cas idéal ;
- une inductance propre ;
- une capacité.

La ligne étant dirigée par (Ox) , on cherche les équations régissant $u(x, t)$ et $i(x, t)$: on ne néglige pas les phénomènes de propagation comme usuellement en électrocinétique.

On modélise un tronçon de câble compris entre les abscisses x et $x + \delta x$ de la manière suivante :



Cette modélisation en constantes réparties prend en compte tous les effets que l'on veut étudier. De plus les associations en série ou en parallèles sont faites pour tenir compte du fait qu'une ligne deux fois plus grande est deux fois plus résistante, conductante et inductante et capacitive. On rappelle que l'association en parallèles de deux condensateurs identiques est équivalente à un condensateur de capacité double, et que la conductance est l'inverse de la résistance.

Équation d'onde On écrit la loi des mailles :

$$-\delta u = r\delta x i + \lambda\delta x \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x} = ri + \lambda \frac{\partial i}{\partial t},$$

puis la loi des nœuds :

$$-\delta i = (u + \delta u)g\delta x + \gamma\delta x \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = ug + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{au premier ordre.}$$

On change les signes dans les 2 équations et on dérive la première pour obtenir les deux équations de propagations, dites des téléphonistes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rgu + (r\gamma + \lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rgi + (r\gamma + \lambda g) \frac{\partial i}{\partial t} + \lambda\gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

C'est une équation linéaire, qui n'est pas invariante par le changement $dt \leftarrow -dt$ donc qui traduit un phénomène irréversible. La cause d'irréversibilité est l'effet JOULE. Dans une ligne parfaite, $r = 0$ et $g = 0$ et l'équation devient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, c'est l'équation d'onde classique avec une célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}$.

Relation de dispersion On passe en transformée de FOURIER avec la convention $\exp(jkx - \omega t)$:

$$k^2 = \lambda\gamma\omega^2 + j\omega(r\gamma + \lambda g) - rg \Rightarrow k = \alpha(\omega) + i\beta(\omega) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \lambda\gamma\omega^2 - rg \\ 2\alpha\beta = \omega(r\gamma + \lambda g) \end{cases}.$$

On déduit de ce système α et β , on a alors $u(t) = U_m \exp(-\beta(\omega)x) e^{j(\alpha(\omega)x - \omega t)}$.

Étudions la propagation de u le long d'une ligne de longueur L . Entre le début et la fin de la ligne il existe un déphasage $\Delta\varphi = \alpha(\omega)L$. Pour pouvoir négliger ce déphasage, puisque la vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha(\omega)}$, il faut que $\Delta\varphi \ll 2\pi$ ce qui donne $L \ll \frac{v_\varphi}{\nu}$. Or $v_\varphi \sim 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, prenons plusieurs cas :

- si $\nu = 50 \text{ Hz}$, la condition est $L \ll 2000 \text{ km}$, l'approximation des régimes quasi-stationnaires en basse fréquence est donc largement vérifiée dans le cadre d'un TP, mais moins si on considère un câble sous-marin transatlantique ;
- si $\nu = 1 \text{ GHz}$, il faut $L \ll 10 \text{ cm}$ donc avec un générateur hautes fréquences, il y a un retard non-négligeable même en TP.

Concernant l'atténuation, on peut définir la distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\beta(\omega)}$.

Distorsion d'un signal Les différentes composantes de FOURIER d'un signal ne se propagent pas de la même façon et ne sont pas atténuées de la même façon, ce qui est problématique si l'on veut transmettre un signal. Ainsi on veut que δ et v_φ ne dépendent pas de ω . On reprend donc les équations portant sur α et β et on remplace α par ω/v_φ et β par $1/\delta$:

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{v_\varphi^2} - \frac{1}{\delta^2} = \lambda\gamma\omega^2 - rg & (1) \\ 2\frac{\omega}{v_\varphi} \frac{1}{\delta} = \omega(r\gamma + \lambda g) & (2) \end{cases},$$

(1) peut être vérifiée en prenant $\frac{1}{v_\varphi^2} = \lambda\gamma$ et $\frac{1}{\delta^2} = rg$, et l'équation (2) nous donne

$$4\lambda\gamma rg = (r\gamma + \lambda g)^2 \Rightarrow 0 = (r\gamma - \lambda g)^2 \Rightarrow r\gamma = \lambda g.$$

C'est la condition de HEAVISIDE, et si elle est vérifiée le signal ne subira pas de distorsion.

Propagation, réflexion, transmission sur une ligne idéale Si $r = g = 0$, la propagation est régie par l'équation d'onde classique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{donc} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}.$$

Calculons l'impédance de la ligne, c'est-à-dire le rapport $\underline{U}/\underline{I}$ en régime sinusoïdal. On prend donc une onde progressive $u(x, t) = \underline{U}e^{j(kx - \omega t)}$ et $i(x, t) = \underline{I}e^{j(kx - \omega t)}$, on tire par exemple d'une des deux équations encore couplées sur u et i que

$$jk\underline{U} = j\lambda\omega\underline{I} \Rightarrow \underline{U} = \lambda\frac{\omega}{k}\underline{I},$$

or $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}$ pour une onde progressive d'où $\underline{U} = Z_c \underline{I}$ avec $Z_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$. C'est l'impédance de la ligne, répartie continuellement dans le milieu. $Z_c \in \mathbf{R}_+^*$ donc tension et intensité sont en phase.

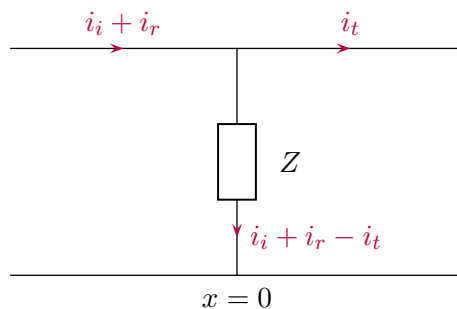
Pour une onde régressive, on aura $k \leftarrow -k$ donc $\underline{U} = -Z_c \underline{I}$ donc si l'on change l'orientation, u et i passent en opposition de phase. Pour les câbles coaxiaux en TP, $Z_c \approx 50 \Omega$.

Étudions la réflexion et la transmission sur un obstacle. On place une impédance Z à $x = 0$ entre les deux fils du câble coaxial. Une partie du signal incident est transmis, l'autre est réfléchi par l'obstacle. On prend les conventions suivantes :

- l'onde incidente est $u_i = \underline{U}_i e^{j(kx - \omega t)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$;
- l'onde réfléchi est $u_r = \underline{U}_r e^{j(-kx - \omega t)}$ car c'est une onde régressive ;
- l'onde transmise est $u_t = \underline{U}_t e^{j(kx - \omega t)}$.

On suppose u_i connue, on veut u_r et u_t . La continuité de la tension en $x = 0$ nous donne $\forall t$,

$$u(0^-, t) = u(0^+, t) \Rightarrow \underline{U}_i + \underline{U}_r = \underline{U}_t.$$



La loi d'OHM dans l'impédance nous donne $u(x=0) = Z(i_i + i_r - i_t)$ et pour $u(x=0)$ on peut prendre $u(x=0^+)$ ou $u(x=0^-)$ puisque ces deux quantités sont égales. D'où

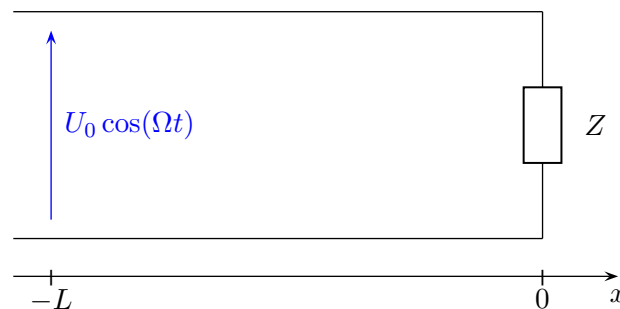
$$\underline{U}_t = Z(\underline{I}_i + \underline{I}_r - \underline{I}_t) = \frac{Z}{Z_c}(\underline{U}_i - \underline{U}_r - \underline{U}_t) \quad \text{car } u_r \text{ est régressive.}$$

On déduit de ces deux équations les deux coefficients de transmission et de réflexion :

$$r = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_i} = \frac{-Z_c}{2Z + Z_c} \quad \text{et} \quad t = \frac{\underline{U}_t}{\underline{U}_i} = \frac{2Z}{2Z + Z_c}.$$

Ces coefficients dépendent donc des caractéristiques de la ligne et de l'obstacle. Ainsi les ondes transmises et réfléchies sont des nécessités physiques au vu des relations de passage en $x = 0$ que l'on a écrites. Une onde uniquement progressive ne peut se rencontrer que dans un milieu continu et infini.

Ondes sur une ligne finie Quelle est la forme des ondes sur une ligne finie idéale ? C'est un problème type cavité, on aura donc des modes propres, etc...



On modélise le signal qui circule dans la ligne par la somme d'une onde progressive et d'une onde régressive. On prend $u_+ = \underline{U}_+ e^{j(kx - \omega t)}$ et $u_- = \underline{U}_- e^{j(-kx - \omega t)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}$.

Examinons les conditions aux limites :

- en $x = -L$, la tension est imposée $U_0 \cos(\Omega t)$ donc $\forall t$, $u_+(-L, t) + u_-(-L, t) = U_0 e^{j\Omega t}$ donc $\omega = \Omega$ et $\underline{U}_+ \exp -jkL + \underline{U}_- e^{jkL} = U_0$;
- en $x = 0$, la loi d'OHM donne $u(0, t) = Zi(0, t) \forall t$ donc

$$\underline{U}_+ + \underline{U}_- = Z(\underline{I}_+ + \underline{I}_-) = \frac{Z}{Z_c}(\underline{U}_+ - \underline{U}_-) \Rightarrow \underline{U}_+(Z - Z_c) = \underline{U}_-(Z + Z_c).$$

On peut tirer \underline{U}_+ et \underline{U}_- de ces deux équations :

$$\underline{U}_+ = \frac{U_0(Z + Z_c)}{2(Z \cos(kL) - jZ_c \sin(kL))} \quad \text{et} \quad \underline{U}_- = \frac{U_0(Z - Z_c)}{2(Z \cos(kL) - jZ_c \sin(kL))}.$$

On peut examiner deux cas particuliers :

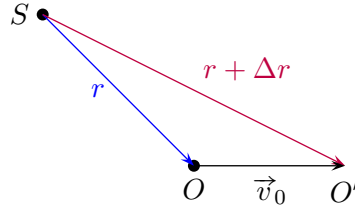
- si $Z = 0$, on a mis un fil en bout de ligne et on trouve $u = -U_0 \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{-j\omega t}$, c'est une onde stationnaire sinusoïdale avec un ventre en $x = -L$ et un nœud en $x = 0$;
- si $Z \rightarrow +\infty$, on a coupé la ligne au bout et on trouve $u = U_0 \frac{\cos(kx)}{\cos(kL)} e^{j\omega t}$, c'est aussi une onde stationnaire mais les ventres et les nœuds sont inversés;
- si $Z = Z_c$, $\underline{U}_- = 0$ et $\underline{U}_+ = U_0 e^{jkL}$ donc $u = U_0 e^{j((L+x)k - \omega t)}$ et il n'y a pas d'onde réfléchie.

Dans le dernier cas, on trouve une onde progressive qui se comporte comme si la ligne était infinie. C'est le phénomène d'adaptation d'impédance, et l'oscilloscope doit avoir une résistance du même ordre que l'impédance du câble qui le relie au circuit pour éviter des ondes réfléchies parasites.

Effet DOPPLER non-relativiste

On considère une onde et son milieu de propagation homogène et isotrope immobile et associé à un référentiel \mathcal{R} . Une source S émet une onde monochromatique de pulsation ω_S : $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_S t))$. Si la source ou l'observateur O se déplacent, la pulsation reçue par O n'est pas ω_S : c'est l'effet DOPPLER. On suppose que les ondes se déplacent avec une vitesse $v_\varphi = c$.

Source immobile S est fixe dans \mathcal{R} , O se déplace à une vitesse \vec{v}_0 . On note \vec{u}_r le vecteur unitaire qui dirige \vec{SO} .

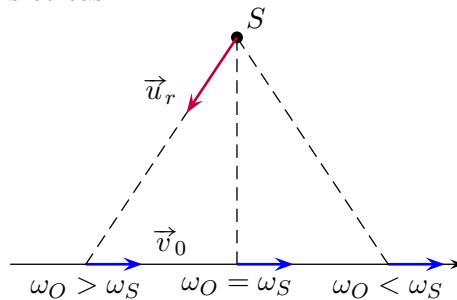


On peut procéder de la manière suivante pour déterminer le décalage de fréquence, en discrétisant le problème. Si la source émet un pic à t_s , il sera reçu par O à $t_O = t_s + \frac{r}{c}$. En notant T_S la période du signal émis par S , si S émet un pic à $t_s + T_S$, il sera reçu à $t_O + T_O = t_s + T_S + \frac{r + \Delta r}{c}$. D'où $T_O = T_S + \frac{\Delta r}{c}$ or $\Delta r = \vec{u}_r \cdot \vec{v}_0 T_O$ donc, puisque $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

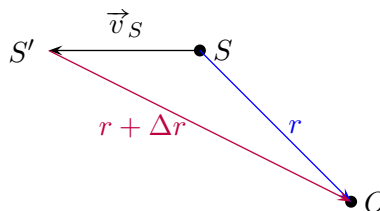
$$\omega_O = \omega_S \left(1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_0}{c} \right).$$

On peut retrouver ce résultat avec une deuxième méthode plus constructive. On se place dans le référentiel \mathcal{R} , le signal qui se propage est de la forme $s(\vec{r}, t) = f(\vec{r})e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ avec $\vec{k} = k\vec{u}_r$, $k = \frac{\omega}{c}$ et $c = v_\varphi$. Dans \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} lié à O , on a un autre signal $s'(\vec{r}', t)$. Or par le principe d'invariance galiléenne, la grandeur physique s est conservée par changement de référentiel galiléen donc $s(\vec{r}, t) = s'(\vec{r}, t)$. De plus, la composition des vitesses donne $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$. Enfin, $s'(\vec{r}', t) = f(\vec{r}) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}' + \vec{k} \cdot \vec{v}_0 t - \omega t))$ et par identification, $\omega_O = \omega_S - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$. Ainsi l'effet DOPPLER traduit l'invariance de la phase par changement de référentiel.

On a donc l'effet suivant dans ce cas :



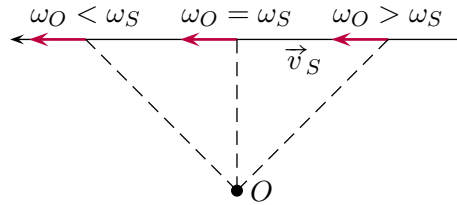
Observateur immobile On reprend la première méthode du cas précédent, le vecteur \vec{u}_r ne change pas.



Ici $\Delta r = -\vec{u}_r \cdot \vec{v}_S T_S$ et $T_0 = T_S + \frac{\Delta r}{c}$ donc

$$\omega_0 = \omega_S \left(1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_S}{c} \right)^{-1}.$$

Malgré ce passage à l'inverse, cette formule est logique. En voici les effets :



Les deux formules sont dissymétriques. Cette dissymétrie est introduite par le milieu de propagation : la source ou l'observateur ont des mouvements par rapport à ce milieu. Néanmoins si $v_0 \ll c$ et $v_s \ll c$, un développement limité à l'ordre 1 rétablit la symétrie entre les deux formules, qui est ce que nous observons usuellement.

Ce raisonnement n'est pas valable pour tous les types d'ondes, mais uniquement celles qui se propagent dans un milieu matériel. Pour les ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide, il faut prendre en compte des effets de la théorie de la relativité d'EINSTEIN. Néanmoins les formules trouvées ici sont valables au premier ordre en v/c pour les ondes électromagnétiques.

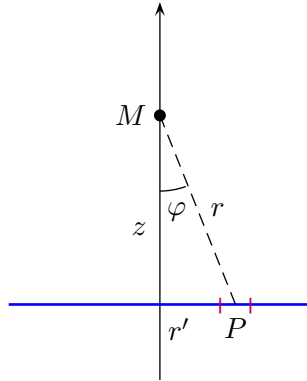
Si S et O se déplacent par rapport au milieu de propagation, alors

$$\omega_O = \omega_S \frac{1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_O}{c}}{1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_S}{c}}.$$

Champ créé par un disque uniformément chargé

On veut calculer le champ créé par un disque de rayon R et de centre O uniformément chargé en surface avec une densité σ . On note \vec{u}_z un vecteur unitaire normal au disque.

Champ sur l'axe Tout plan contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$. De plus, il est clair que E est fonction impaire de z . On calculera directement le champ électrostatique. Pour cela, on considère un point M d'altitude $z > 0$ sur l'axe et une couronne du disque dont les points sont compris entre les rayons r' et $r' + dr'$.

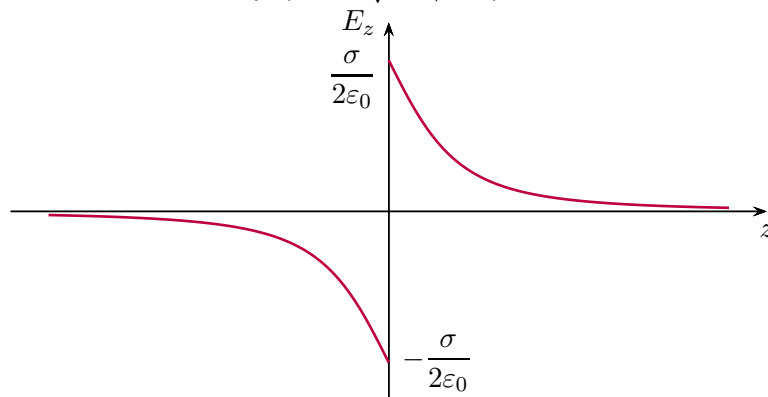


La composante de \vec{E} créée par la portion de couronne située entre les angles θ et $\theta + d\theta$ centrée sur P crée une composante de champ $d^2\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d^2S}{r^2} \vec{u}$ où \vec{u} unitaire dirige \overrightarrow{PM} . On somme ces contributions sur toute la couronne en ne gardant que les contributions sur \vec{u}_z , car les autres s'annulent à cause des symétries du problème : $dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \cos \varphi$ or $z = r \cos \varphi$ donc

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \iint \frac{\cos^3 \varphi}{z^2} dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 z^2} \int \cos^3 \varphi 2\pi r' dr' \quad \text{or } r' = z \tan \varphi ; \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} 2\pi [-\cos \varphi]_0^\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est l'angle au bord du disque ;} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon} (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de PYTHAGORE, on aboutit à l'expression :

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$



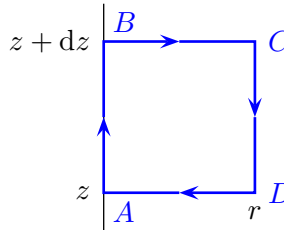
Lorsque l'on s'éloigne de l'axe, $E_z \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, comme si le disque était une charge ponctuelle.

Champ au voisinage de l'axe On étudie au premier ordre le champ électrique au voisinage de l'axe. On choisit les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) . Le problème est invariant par toute rotation autour de (Oz) donc $V(r, z)$ donc $\vec{E} = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_z(r, z)\vec{u}_z$. Avec un développement limité à l'ordre 1, on écrit

$$E_r(r, z) = \underbrace{E_r(0, z)}_0 + r \frac{\partial E_r}{\partial z}(0, z) = r\alpha(z) \quad \text{et} \quad E_z(r, z) = \underbrace{E_z(0, z)}_{\text{connu}} + r \frac{\partial E_z}{\partial r}(0, z) = E_z(0, z) + r\beta(z).$$

On va utiliser les équations locales du champ. Mais comme on ne connaît pas la divergence ou le rotationnel en coordonnées cylindriques, on va utiliser la circulation et le flux.

Exprimons la circulation de \vec{E} sur le trajet $ABCD$:



$$0 = E_z(0, z)dz + \alpha(z + dz) \int_0^r r' dr' - (E_z(0, z + dz) + \beta r) dz - \alpha(z) \int_0^r r' dr'.$$

Les termes en r^2 sont du deuxième ordre, et au premier ordre $E_z(0, z + dz)dz = E_z(0, z)dz$ donc il ne reste plus que $0 = \beta r dz$ donc $\beta = 0$. La composante longitudinale de \vec{E} est la même que sur l'axe.

Intéressons-nous au flux de \vec{E} à travers un cylindre de rayon r centré sur (Oz) et de hauteur dz . D'après le théorème de GAUSS, puisqu'il n'y a pas de charges,

$$0 = E_z(0, z + dz)\pi r^2 - E_z(0, z)\pi r^2 + E_r(r, z)2\pi r dz \Rightarrow E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z).$$

Ainsi, $\alpha(z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z)$.

La connaissance du champ sur l'axe permet de déterminer au premier ordre le champ au voisinage de l'axe. De plus $\frac{\partial E_z}{\partial z} < 0$ donc $\alpha(z) > 0$. Le calcul qui précède est beaucoup plus général que la situation d'un disque uniformément chargé, il fonctionne pour tout problème à symétrie cylindrique. On aurait pu utiliser les équations locales $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$, à condition d'avoir les expressions du rotationnel et de la divergence en cylindriques. Au deuxième ordre, on peut montrer que

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z) \quad \text{et} \quad E_z(r, z) = E_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(0, z).$$

Polarisabilité

Polarisabilité atomique On prend l'exemple d'un atome d'hydrogène, modélisé par un proton de charge $+e$ en O et un électron de charge $-e$ en M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. En l'absence de champ \vec{E} , H est un petit dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}(t) = -e\vec{r}(t)$. Or le temps caractéristique de mouvement de l'électron autour du noyau est $\tau \sim 10^{-16}$ s donc pour un temps d'observation $\theta \gg \tau$, on raisonne sur $\langle \vec{p} \rangle$ au lieu de prendre la valeur instantanée. Et il se trouve que $\langle \vec{p} \rangle_\theta = \vec{0}$. Dans toute la suite, on moyennera toujours les valeurs sur un temps d'observation raisonnable.

En présence d'un champ \vec{E} , l'électron subit une force $\vec{F} = -e\vec{E}$. donc l'orbite de l'électron se trouve décalée dans la direction de $-\vec{E}$ et sa position moyenne n'est plus confondue avec O : on pose donc un moment dipolaire pour l'atome d'hydrogène $\vec{p} = \alpha\vec{E}$ au premier ordre avec $\alpha > 0$. α est la polarisabilité de l'atome d'hydrogène, elle quantifie l'influence des actions extérieures sur la trajectoire circulaire de l'électron. On généralise ceci pour tous les types d'atomes.

C'est une loi phénoménologique linéaire, on posera parfois $\vec{p} = \alpha'\epsilon_0\vec{E}$ pour simplifier les expressions par la suite. On note aussi expérimentalement que la polarisabilité augmente avec le nombre d'électrons autour du noyau. En effet, plus il y a d'électrons, plus les couches externes seront éloignées du noyau et donc plus sensibles à l'influence d'un champ \vec{E} extérieur.

Polarisabilité moléculaire Pour des molécules du type H_2 , I_2 , etc. constituées du même atome en plusieurs exemplaires, chacun des atomes ayant la même électronégativité, en l'absence de champ \vec{E} , $\vec{p} = \vec{0}$ et en général $\vec{p} = \alpha\vec{E}$.

Pour des molécules polaires comme HCl , l'un des atomes est clairement plus électronégatif que l'autre et attire les électrons de son côté ce qui crée un moment dipolaire structural et permanent. Ainsi, on aura $\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha\vec{E}$. Une molécule est donc caractérisée par deux paramètres indépendants :

- un moment dipolaire permanent \vec{p}_0 lié à la différence d'électronégativité des différents atomes qui constituent la molécule ;
- un coefficient de polarisabilité α lié aux distances aux noyaux des différents électrons de la molécule.

Modèle de l'électron élastiquement lié On admet que la force qu'exerce le noyau sur l'électron est $\vec{F} = -k\vec{r}$, comme une force de rappel élastique. Il s'exerce aussi une force de frottement de type visqueux $\vec{F}_f = -f\dot{\vec{r}}$ qui amortit le mouvement de l'électron.

Si $\vec{E} = \vec{0}$, on applique le PFD qui donne $m\ddot{\vec{r}} = -f\dot{\vec{r}} - k\vec{r}$, c'est un mouvement elliptique amorti et à l'équilibre $\vec{r} = \vec{0}$.

Si $\vec{E} \neq 0$, alors le PFD s'exprime

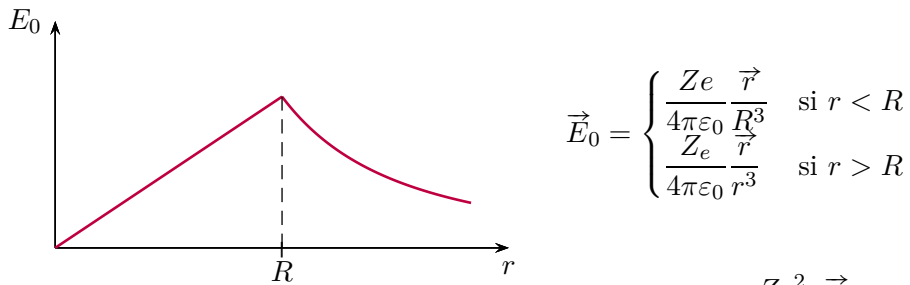
$$m\ddot{\vec{r}} + f\dot{\vec{r}} + k\vec{r} = -e\vec{E}.$$

À l'équilibre, $\vec{r} = -\frac{e}{k}\vec{r}_{eq}$ et dans ces conditions, un moment dipolaire apparaît $\vec{p} = -Ze\vec{r}_{eq}$ donc

$$\vec{p} = \frac{Ze^2}{k}\vec{E} \Rightarrow \alpha = \frac{Ze^2}{k}.$$

Ce modèle explique le phénomène de polarisation mais n'est pas très satisfaisant. Historiquement, plusieurs modèles ont été établis pour décrire l'atome.

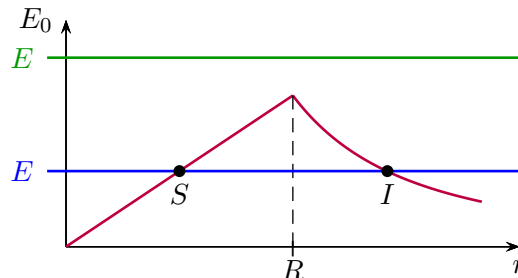
Modèle de THOMSON (1902) Il mesure le rayon de l'atome à environ 1 \AA , c'est lui qui a étudié en premier l'électron. Il modélise le noyau par une boule chargée volumiquement uniformément de rayon 1 \AA et de charge totale Ze donc laquelle se déplacent les électrons. Le champ \vec{E}_0 créé par le noyau est donc, par le théorème de GAUSS,



La force sur l'électron qui se trouve à l'intérieur de la boule est $\vec{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3}$, c'est bien une force de rappel. On peut calculer la polarisabilité dans ce modèle, c'est $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$. Elle est proportionnelle au volume de l'atome, ce qui explique une partie des résultats expérimentaux. Si on place l'atome dans un champ extérieur, le PFD donne l'équation

$$m\ddot{\vec{r}} = -f\dot{\vec{r}} - e\vec{E}_0 - e\vec{E},$$

et à l'équilibre $\vec{E} = \vec{E}_0$ car l'électron s'est placé dans la direction de $-\vec{E}$.



Si $E < E_{0,\max} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^3}$, deux positions d'équilibre, S est stable et I est instable. Mais si $E > E_{0,\max}$, l'électron est arraché à l'atome et envoyé à l'infini, on retrouve ici une explication du potentiel d'ionisation, qui est tout à fait expliqué par le modèle de THOMSON.

Néanmoins en 1911, l'expérience de RUTHERFORD dément la vision de l'atome par THOMSON, en montrant la structure lacunaire de l'atome : le noyau a un rayon de 10^{-15} m.

Modèle de BOHR (1913) Son modèle rencontre un vif succès à l'époque de la disgrâce de THOMSON. On considère que les électrons ont des orbites circulaires autour du noyau, c'est un modèle planétaire. Mais les moments cinétiques sur les orbites sont quantifiés : $\sigma(O) = mrv = n\hbar$, $n \in \mathbf{N}^*$. La force d'interaction entre les électrons et le noyau est coulombienne. Si on plonge les électrons dans un champ \vec{E} , la trajectoire s'ovalise et la position moyenne de l'électron est effectivement décalée. C'est donc l'électron moyen qui est élastiquement lié dans ce modèle, et finalement notre modèle initial de l'électron élastiquement lié est une vision simplifiée du modèle de BOHR, il nous sera utile dans bien des situations.

Milieux diélectriques

Polarisation diélectrique En physique, diélectrique est synonyme d'isolant. Dans un matériaux diélectrique, les électrons ne sont pas librement mobiles, ils sont liés à un noyau. Dans ces conditions, en accord avec le complément précédent, si on plonge le diélectrique dans un champ \vec{E} extérieur, la position moyenne des électrons est un peu déportée du noyau et il apparait des petits moments dipolaires \vec{p}_i . Dans un volume élémentaire $d\tau$, le moment dipolaire résultat est alors $d\vec{p} = \sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i$

que l'on peut mettre sous la forme $\vec{p} = \vec{P}d\tau$ où \vec{P} est le moment dipolaire par unité de volume que l'on appelle aussi vecteur polarisation. Dans le cadre de notre étude statique, $\vec{P}(\vec{r})$.

Dans un conducteur, les électrons sont de deux sortes : il y a les électrons liés que l'on a déjà décrit mais aussi des électrons libres qui passent d'un atome à l'autre en restant sur les couches électroniques externes. Dans le cas du cuivre, $Z = 29$ et par atome on compte 27 électrons de valence et 2 électrons libres. Sous l'action d'un champ \vec{E} , on a une petite polarisation des électrons de valence mais qui est totalement négligeable devant la courant des électrons libres. C'est pour cela que l'on négligera l'effet diélectrique dans un conducteur.

Potentiel crée par un diélectrique polarisé Il s'agit de calculer V et \vec{E} créés par l'ensemble des petits dipôles électrostatiques du matériaux en un point M . On a l'expression théorique

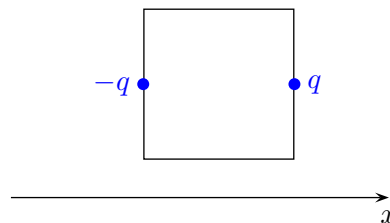
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \vec{P} d\tau \cdot \frac{\vec{r}}{r^3},$$

or $\vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ par la formule du gradient d'un produit, d'où

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oint \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau \right) \quad \text{par GREEN-OSTROGRADSKI.} \end{aligned}$$

On a donc deux termes pour $V(M)$: l'un correspond à une répartition surfacique de charges, et l'autre à une répartition volumique de charges. Par identification, on pose donc $\sigma_{\text{lié}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ et $\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Essayons de trouver une interprétation physique pour ce résultat.

Prenons un cas simple, où l'on a un problème unidimensionnel selon l'axe (Ox) , et donc $\vec{P} = P\vec{u}_x$. On considère un cube de matériaux d'arête δa qui possède un moment dipolaire $\delta\vec{p} = \vec{P}(\delta a)^3$. On modélise ce cube par un dipôle électrostatique de charge q telle que $q = P(\delta a)^3$:



Si P est uniforme, alors les charges sur les côtés des cubes s'annulent avec les cubes voisins, sauf à la surface des matériaux. Le matériaux est donc volumiquement neutre et à la surface on a une charge surfacique $\sigma = \pm \frac{q}{(\delta a)^2} = \pm P$, ce qui est conforme avec notre calcul.

Si P n'est pas uniforme, à la jonction entre le cube d'abscisse x de charge $q = P(x)(\delta a)^2$ et le cube d'abscisse $x + \delta a$ de charge $q' = P(x + \delta a)(\delta a)^2$, il y a une charge volumique qui apparait, elle est égale à

$$\rho = \frac{q - q'}{(\delta a)^3} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}.$$

Remplacer les moments dipolaires par des charges surfaciques et volumiques est plus intéressant.

Équations locales du champ On est en électrostatique donc $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$, et l'équation de MAXWELL-GAUSS se met sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liée}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\varepsilon_0}.$$

Diélectriques linéaires homogènes isotropes Ce milieu est linéaire donc \vec{P} est relié \vec{E} par une relation $\vec{P} = \varepsilon_0 \widetilde{\chi}_e(\vec{E})$ où $\widetilde{\chi}_e \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. $\widetilde{\chi}_e$ est la susceptibilité électrique. Le milieu est homogène donc $\widetilde{\chi}_e$ ne dépend pas du point considéré. Le milieu est isotrope donc \vec{P} est nécessairement colinéaire à \vec{E} puisqu'il n'y a pas d'autres directions privilégiées. Ainsi $\widetilde{\chi}_e = \chi_e \text{Id}_{\mathbf{R}^3}$ et $\chi_e \in \mathbf{R}$, enfin $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$.

Ainsi l'équation de MAXWELL-GAUSS devient

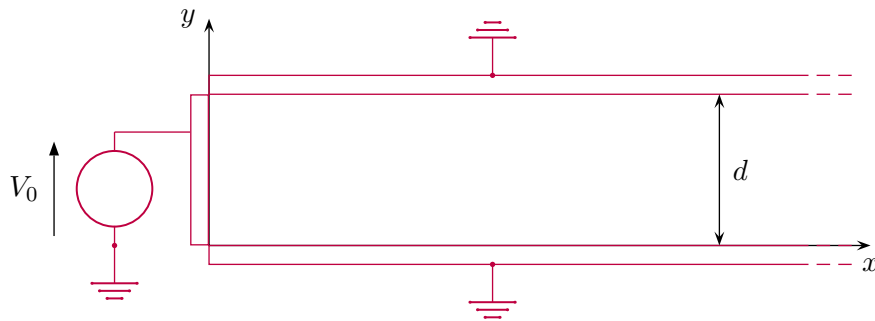
$$(1 + \chi_e) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

où l'on a posé $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ sans dimension. ε_0 est la permittivité électrique du vide, ε_r est la permittivité relative du milieu et $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ est la permittivité absolue du milieu. C'est un résultat très puissant puisqu'il permet d'ignorer l'influence des charges liées.

Par exemple, pour l'eau à 25 °C, $\varepsilon_r = 78$. Cela diminue d'autant la force d'interaction coulombienne entre les différents atomes d'une molécules, et c'est pour cela que l'eau favorise la dissolution des corps.

Exemple de résolution de l'équation de LAPLACE

On considère la disposition de matériaux conducteurs ci-dessous. On veut déterminer le potentiel dans la zone centrale.



Mise en équation On considère un problème bidimensionnel où $V(x, y)$. L'équation de LAPLACE s'écrit

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Les conditions limites sont :

- $V(x, 0) = 0 \quad \forall x \geq 0$;
- $V(x, d) = 0 \quad \forall x \geq 0$;
- $V(0, y) = 0 \quad \forall y \in [0, d]$;
- $V(+\infty, y)$ est fini $\forall y \in [0, d]$.

Séparation des variables On cherche $V(x, y)$ sous la forme $V(x, y) = X(x)Y(y)$ et l'équation de LAPLACE devient $X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. x et y sont des variables indépendantes donc chacun des termes est constant égal à λ .

Détermination de X et Y L'équation différentielle que vérifie Y est $Y'' + \lambda Y = 0$.

Si $\lambda < 0$, $\lambda = -k^2$ donc $Y = Ae^{-ky} + Be^{ky}$. Les conditions limites $Y(0) = Y(d) = 0$ donnent $A = -B$ et $-A \operatorname{sh}(kd) = 0$ donc $A = B = 0$.

Si $\lambda > 0$, $\lambda = k^2$ donc $Y = A \sin(ky) + B \cos(ky)$ et les conditions limites imposent une discrétisation des valeurs de k :

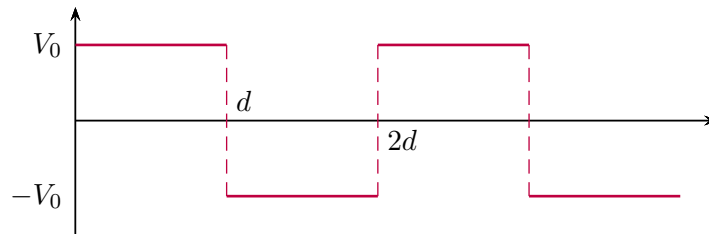
$$Y(y) = A \sin\left(\frac{\pi n y}{d}\right) \quad \text{avec } n \in \mathbf{N}^*.$$

Pour déterminer X , on se place dans le cas où $\lambda > 0$ et alors $X(x) = C \exp\left(-\frac{\pi n x}{d}\right)$.

Détermination de V Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a donc

$$V_n(x, y) = A \exp\left(\frac{\pi n x}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{d}\right).$$

Or les conditions limites pour V_n imposent $V_0 = A \sin(\pi n y/d) \quad \forall y \in [0, d]$ ce qui n'est pas possible. Mais $n \in \mathbf{N}^*$ peut varier et, l'équation de LAPLACE étant linéaire, on peut essayer une combinaison linéaire des V_n : on pose donc $V = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} A_n V_n$, et la condition initiale devient $V_0 = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} A_n \sin\left(\frac{\pi n y}{d}\right) \quad \forall y \in [0, d]$. Pour trouver les A_n , il suffit de décomposer en série de FOURIER la fonction suivante :

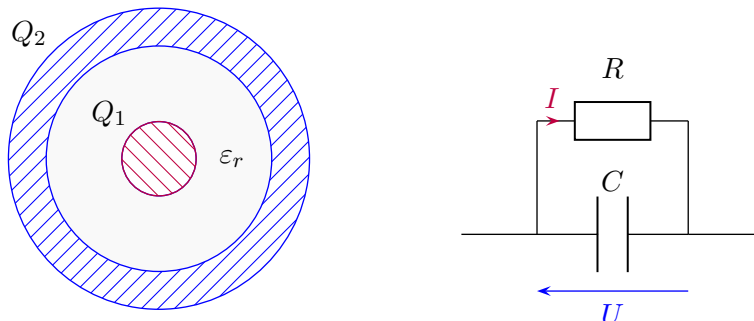


Finalement, puisque DIRICHLET assure l'unicité de la solution,

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{d}y\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)\pi}{d}x\right).$$

Résistance de fuite d'un condensateur sphérique

Initialement les deux armatures du condensateur portent les charges $Q_{1,0}$ et $Q_{2,0}$. On met entre les armatures un diélectrique de permittivité ε_r . Il y aura une conductivité électrique du milieu inter-armatures et les charges vont pouvoir se déplacer. On modélise cela par la mise en parallèle d'un condensateur et d'une résistance. On note $U = V_2 - V_1$.



Expression Concernant la stratégie de résolution, il nous faut relier I et U par \vec{E} : la circulation de \vec{E} est reliée à U , et par la loi d'OHM $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on peut déterminer I .

Les invariances et symétries nous donnent $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_r$. \vec{E} n'est pas un champ électrostatique, néanmoins on peut lui appliquer le théorème de GAUSS qui découle de l'équation de MAXWELL-GAUSS toujours valable. À l'intérieur du condensateur, en remplaçant ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$,

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \vec{u}_r.$$

On admet qu'en régime variable, on peut appliquer le ε_r du régime permanent. Ceci impose des variations lentes dans le cadre d'une approximation quasi-statique. Concernant la tension,

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_1(t)}{C}.$$

En effet, la capacité de ce condensateur sphérique est $C = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$. Pour l'intensité, on part de la définition avec Σ une sphère de rayon $R_1 < r < R_2$:

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sigma \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma Q_1(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \text{d'après GAUSS.}$$

La résistance de fuite est donc

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{6C} \Rightarrow RC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{6}.$$

Commentaires Le résultat est indépendant des rayons R_2 et R_1 , et c'est même beaucoup plus général car il ne dépend pas de la forme du condensateur. RC est le temps caractéristique de la décharge spontanée du condensateur, ainsi cette décharge ne dépend que de la nature du matériaux diélectrique entre les armatures.

Milieux magnétiques

Aimantation Comme définie pour la théorie du paramagnétisme de LANGEVIN, l'aimantation d'un matériau est la grandeur locale telle que le moment dipolaire d'un élément de volume $d\tau$ d'un matériau soit $d\vec{M} = \vec{M}d\tau$.

Champ \vec{B} créé par la matière aimantée On calcule le champ \vec{B} magnétostatique engendré par un ensemble de petits dipôles magnétiques élémentaires à partir du potentiel vecteur \vec{A} :

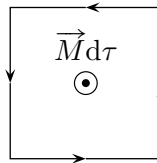
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau.$$

Or $\vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{M} \wedge \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \wedge \vec{M} - \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{M}}{r}$ par la formule du rotationnel d'un produit, d'où

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iiint \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau - \iiint \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{M}}{r} d\tau \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} dS \quad \text{par un avatar de GREEN-OSTROGRADSKI.} \end{aligned}$$

On identifie à l'instar du complément sur les milieux diélectriques une densité volumique de courant $\vec{j}_{\text{lié}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$ et une densité surfacique de courant $\vec{j}_{S,\text{lié}} = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

Interprétons physiquement ce résultat. Soit un milieu aimanté unidimensionnel dans lequel $\vec{M} = M\vec{u}_z$. On prend une tranche de ce milieu comprise entre les abscisses z et $z + dz$, que l'on découpe en petits cubes que l'on assimile à des boucles de courant :



Si \vec{M} est uniforme, les contributions de courant des petits cubes placés côte à côte s'annulent et il ne reste que les courants surfaciques ; ce qui confirme le calcul. Le physicien AMPÈRE s'est le premier intéressé à cela : y a-t-il vraiment de micro-courants qui circulent dans la matière aimantée ? On sait maintenant que ce sont les électrons qui, en tournant autour du noyaux, créent un courant. Mais en plus de cela, il y a le magnétisme de spin (voir complément suivant).

Équations locales du champ Comme pour les milieux diélectriques, on peut réécrire les équations locales. On aura toujours $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ mais MAXWELL-AMPÈRE devient $\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu \vec{j}_{\text{libre}}$.

Cas des milieux linéaires homogènes isotropes Le milieu est linéaire donc $\vec{M} = \widetilde{\alpha_m}(\vec{B})$ où $\widetilde{\alpha_m} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. Il est homogène donc $\widetilde{\alpha_m}$ ne dépend pas du point considéré. Le milieu est isotrope donc $\widetilde{\alpha_m} = \alpha_m \text{Id}_{\mathbf{R}^3}$ et MAXWELL-AMPÈRE devient

$$(1 - \alpha_m \mu_0) \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{j}_{\text{libre}} \quad \text{où} \quad \mu_r = \frac{1}{1 - \mu_0 \alpha_m}$$

Malheureusement, les aimants ordinaires ne sont pas linéaires homogènes isotropes donc cette identité sera beaucoup moins utile que son *alter ego* électrostatique.

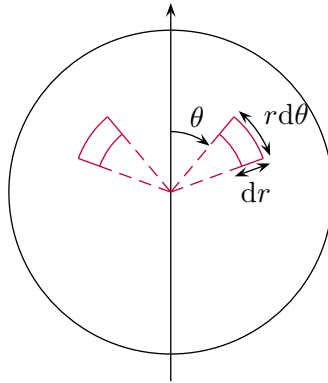
Modèle classique du spin

Mouvement de spin Le magnétisme orbital ne suffit pas à expliquer le comportement de la matière : les charges doivent avoir aussi un mouvement de rotation sur elle-mêmes. Soit une particule sphérique de masse m , de rayon R , de centre O et de charge q tournant autour de l'axe $(O, \vec{\omega})$ à la vitesse angulaire ω .

Moment cinétique de spin C'est d'après les formules de mécanique classique :

$$\vec{\sigma}(O) = J_{\Delta} \vec{\omega} = \frac{2}{5} m R^2 \vec{\omega}.$$

Moment magnétique de spin Les charges portées par la particule sont en mouvement de rotation, créant ainsi autant de petites boucles de courant de convection. On travaille en coordonnées sphériques d'axe $(O, \vec{\omega})$, pour un élément de surface à l'intérieur de la sphère $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_{\varphi}$, l'intensité qui traverse cette surface est $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho v \vec{u}_{\varphi} \cdot d\vec{S}$.



Or $v = r \sin \theta \omega$ donc $dI = \rho r \sin \theta \omega r dr d\theta$. En faisant décrire un tour à θ , cela crée une petite boucle de courant qui s'appuie sur la surface $\pi(r \sin \theta)^2 \vec{u}_z$ s'où un moment magnétique élémentaire

$$d\vec{M} = \pi r^2 \sin^2 \theta \rho r \sin \theta \omega r dr d\theta \vec{u}_z \Rightarrow \vec{M} = \pi \rho \omega \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{\frac{4}{3}} \vec{u}_z.$$

Puisque $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ avec une charge uniformément répartie, $\vec{M} = \frac{1}{5} q \vec{\omega} R^2$.

Rapport gyromagnétique On remarque que $\vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{\sigma}(O)$ donc on définit le rapport gyromagnétique $\gamma = \frac{q}{2m}$.

Précession de LARMOR On applique le TMC par rapport à O à la charge en mouvement dans un champ \vec{B} uniforme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B} = \gamma \sigma \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\sigma}.$$

La particule possède un mouvement de précession à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}$.

Commentaires C'est un modèle assez utile mais malheureusement complètement faux. Le spin est en effet un phénomène essentiellement quantique : les neutrons non-chargés possèdent quand même un moment de spin, ce qui est un problème pour notre vision classique des choses. Le moment cinétique de spin est en fait quantifié :

- pour les fermions, $\sigma = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar$ avec $n \in \mathbf{N}$, ce sont des spins demi entiers que possèdent les protons, électrons et neutrons pour lesquels $n = 0$;
- pour les bosons, $\sigma = n\hbar$ et pour le photon $n = 1$.

Néanmoins, pour l'électron, on a toujours un rapport gyromagnétique défini par

$$\vec{\mathcal{M}} = g \frac{q}{2m} \vec{\sigma},$$

où g est le facteur de LANDÉ environ égal à 2.

On a donc le spin du noyau. Mais chaque électron possède un moment cinétique de spin et un moment cinétique orbital d'où deux autres moments et au global,

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{spin,noyau}} \oplus \vec{\mathcal{M}}_{\text{spin,électron}} \oplus \vec{\mathcal{M}}_{\text{spin,orbital}},$$

où \oplus est l'addition quantique, plus compliquée que l'addition classique. La résonance magnétique nucléaire est liée au spin du noyau, tandis que la résonance paramagnétique électronique est liée au spin des électrons.

Quantité de mouvement du champ

On sait que dans tout élément de volume est stocké de l'énergie électromagnétique. Mais pour être cohérente, il faut aussi que soit stockée une quantité de mouvement $d\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$, comme on le verra par la suite.

Dualité onde-corpuscule On peut considérer le rayonnement soit comme une onde électromagnétique soit comme un flux de photons.

On considérera une onde électromagnétique plane que l'on supposera grâce à la transformation de FOURIER progressive sinusoïdale : $\vec{E} = \Re(\vec{E}_e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$ et $\vec{B} = \Re(\vec{B}_e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})$, les caractéristiques du champs sont \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} et ω .

Pour le flux de photons, ceux-ci ont une masse nulle, une vitesse $\vec{v} = c\vec{u}_x$ dans le vide. Ils possèdent une énergie ε , une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c}\vec{u}_x$ et sont au nombre de n par unité de volume.

Aspect énergétique En vision ondulatoire, la densité d'énergie électromagnétique est $u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$, et le vecteur de POYNTING est $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$.

En vision corpusculaire, $u_{em} = n\varepsilon$ et $\vec{\Pi} = n\varepsilon c\vec{u}_x$. En effet, la quantité d'énergie passant par $dS\vec{u}_x$ pendant dt est la quantité d'énergie présente dans le cylindre de base dS et de génératrice cdt .

La quantité de mouvement En vision corpusculaire, toutes les photons possèdent une quantité de mouvement \vec{p} donc dans un élément de volume $d\tau$, la quantité de mouvement stockée est $d\vec{p} = nd\tau \frac{\varepsilon}{c}\vec{u}_x$ donc

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = n \frac{\varepsilon}{c} \vec{u}_x = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}.$$

Il faut donc que cette formule coïncide avec la vision ondulatoire, donc $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{c^2\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ or $\frac{1}{c^2\mu_0} = \varepsilon_0$ donc $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ comme annoncé.

Ainsi, lorsque l'on appliquera la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé, il faudra prendre en compte la quantité de mouvement électromagnétique et plus de la quantité de mouvement mécanique. Imaginons qu'un astronaute égare sa lampe torche dans l'espace, et que celle-ci s'allume brusquement. Alors celle-ci part en arrière, à cause de la quantité de mouvement qui s'échappe avec la lumière qu'elle projette. Un deuxième exemple est la voile solaire, qui nous permettrait de voyager dans l'espace en consommant beaucoup moins de carburant.

Moment cinétique Pour un élément de volume $d\tau$ situé en M , $d\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{p}$ donc $\frac{d\vec{\sigma}(O)}{d\tau} = \overrightarrow{OM} \wedge (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$. Ainsi le champ magnétique a aussi un moment cinétique associé, qu'il faut prendre en compte dans les bilans mécaniques.

Bilan énergétique d'un conducteur ohmique

Principe Comment s'effectuent les transferts d'énergie dus à l'effet Joule ? L'air se réchauffe car les molécules d'air arrivent sur le conducteur et en repartent avec une vitesse en moyenne plus importante. Les ions du réseau du conducteur ont donc un mouvement d'agitation thermique important. D'où provient-il ? Des électrons qui se choquent aux ions du réseau après avoir été accélérés par le champ (\vec{E}, \vec{B}) . Les électrons dans le réseau se comportent comme une bille de flipper dans la zone des champignons ou bumpers. Mais de quelle façon l'énergie électromagnétique est-elle transférée aux électrons ?

On considère un cylindre de conducteur d'axe (Oz) et de rayon a parcouru par une intensité parallèle à \vec{u}_z et de norme $I = \pi a^2 j$. $P = - \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ est la puissance électromagnétique qui entre dans le cylindre.

Vecteur de POYNTING Il nous faut le champ électromagnétique. On calcule \vec{B} avec le théorème d'AMPÈRE :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi q^2} r \vec{u}_\theta & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta & \text{si } r = a^+ \end{cases}.$$

Pour $r < a$, la loi d'OHM s'applique et $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ donc $\vec{E} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \vec{u}_z$. Pour $r = a^+$, la composante tangentielle de \vec{E} est continue donc

$$\vec{E} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \vec{u}_z + E_r \vec{u}_r.$$

Ainsi, on peut calculer le vecteur de POYNTING

$$\vec{\Pi} = \begin{cases} -\frac{I^2}{2\pi^2 q^4 \sigma} r \vec{u} & \text{si } r < a \\ -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \vec{u}_r + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} E_r \vec{u}_z & \text{si } r = a^+ \end{cases}.$$

Puissance électromagnétique entrante On applique la formule $P = - \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ avec un cylindre de hauteur h , Π est tangent aux disques en haut et en bas :

$$P = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} 2\pi a h = \frac{1}{\sigma} \frac{h}{\pi a^2} I^2 = R I^2,$$

on l'on reconnaît $R = \frac{1}{\sigma} \frac{h}{\pi a^2}$ la résistance de l'élément cylindrique que l'on considère. Ainsi, l'énergie électromagnétique entre dans le conducteur par la paroi, le générateur crée un champ (\vec{E}, \vec{B}) dans l'espace tel que $\vec{\Pi}$ soit dirigé de l'extérieur du fil vers l'intérieur.

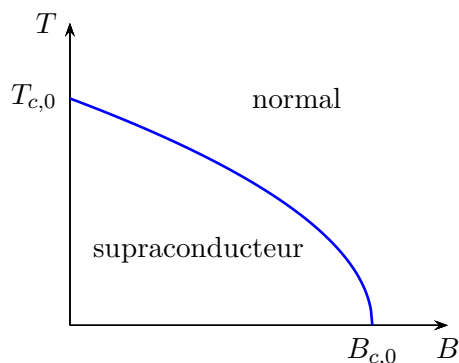
Supraconductivité

Propriétés des supraconducteurs Leur caractéristique principale est une résistivité nulle pour une température $T < T_c$ inférieure à une température critique. Cette propriété a été mise en évidence par KAMMERLING ONNES sur le mercure, pour lequel $T_c = 4,15$ K. À l'heure actuelle, on arrive à trouver des matériaux pour lesquels $T_c \sim -100$ °C, température facile à obtenir avec de l'azote liquide pour lequel la température d'ébullition de -196 °C.

L'autre propriété des supraconducteurs est l'effet MEISSNER, qui en-dessous d'une température critique impose un champ \vec{B} nul à l'intérieur du supraconducteur. Les lignes de champ \vec{B} entourent alors le matériau. Cette situation ressemble à un problème de mécanique des fluides, plus précisément un écoulement de fluide autour d'une boule solide. Dans ce cas l'analogue de \vec{B} est \vec{v} . À quoi est dû ce phénomène ? Par induction, des courants prennent naissance à la surface du matériau, qui crée un champ \vec{B}_1 tel que la superposition de \vec{B}_1 avec le champ extérieur soit nulle dans tout le volume du conducteur. Néanmoins, à l'extérieur, la discontinuité tangentielle de \vec{B} est égale à $\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}$.

Bien que satisfaisante, cette explication n'est pas physique car la modélisation surfacique n'existe pas en réalité. En fait, \vec{B} pénètre dans la boule sur une épaisseur de 10^{-8} m : la modélisation surfacique constitue donc une bonne approximation. L'effet MEISSNER n'est pas une conséquence de la conductivité infinie, c'est un effet indépendant.

On considérera maintenant uniquement le champ \vec{B}_0 extérieur. Expérimentalement, on constate que si l'on augmente \vec{B} inconsiderablement, le champ pénètre à l'intérieur du matériau. Ainsi, le caractère supraconducteur dépend de T et de \vec{B}_0 et plus précisément la limite est donnée par $T_c = T_{c,0} \sqrt{1 - \frac{B}{B_{c,0}}}$.



Il existe deux types de supraconducteurs. Tous les métaux sauf le niobium Nb ($Z = 41$) sont des supraconducteurs de première espèce, qui possèdent les propriétés que l'on vient de décrire. Ceci est ennuyeux pour les machines utilisant le champ magnétique, on veut éviter que le métal ne perde ses propriétés supraconductrices au cours du fonctionnement.

Pour les supraconducteurs de deuxième espèce, il existe un domaine de champ \vec{B} élevé dans lequel la conductivité est infinie et le matériau expulse pratiquement tout le champ \vec{B} . C'est très intéressant puisque le matériau supraconducteur peut supporter des champs \vec{B} élevés. Les alliages et les oxydes sont des supraconducteurs de deuxième espèce.

Conduction Dans un conducteur ordinaire, le porteur de charges est l'électron de spin $s = \hbar/2$, c'est un fermion. À l'intérieur d'un supraconducteur, les porteurs de charges sont des paires d'électrons ; les paires de COOPER. Une paire de COOPER est un ensemble de 2 électrons qui se déplacent de conserve, l'un a un spin \uparrow (up) et l'autre un spin \downarrow (down). Ainsi, le spin global est nul et la paire de COOPER se comporte comme un boson, qui ne subissent pas le principe d'exclusion de PAULI. Néanmoins la distance entre les deux électrons de la paire est de l'ordre de $1 \mu\text{m}$, ce qui est énorme à l'échelle atomique. Les deux électrons sont couplés par le biais de la déformation du réseau des ions du matériau. COOPER a reçu le prix NOBEL en 1956 pour cette découverte, puis une seconde fois avec BARDEEN et SCHRIEFER en 1971 pour la théorie BSC.

Applications Le principal avantage des supraconducteurs est l'absence d'effet JOULE, qui permet de faire circuler une intensité très élevée sans pertes énergétiques. C'est pour cela qu'EDF est en pointe pour la recherche sur les supraconducteurs.

On peut même faire léviter des objets avec un supraconducteur. soit une spire de matériaux supraconducteur au travers de laquelle on fait descendre un aimant permanent. La variation du flux de \vec{B} à travers la spire va induire une intensité puis un champ \vec{B} qui va agir sur l'aimant *via* les forces de LAPLACE. D'après la loi de modération de LENTZ, la force magnétique résultante va être dirigée vers le haut. SI on applique la loi d'OHM généralisée à la spire, $Ri = e = -\frac{d\phi}{dt}$ d'après le théorème de FARADAY. En séparant flux propre et flux extérieur,

$$Ri + L\frac{di}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}.$$

Si la spire est normale, $\phi_{\text{ext}} = 0$ implique que $i \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ avec une constante de temps L/R . Mais si la spire est supraconductrice, $-\frac{d\phi}{dt} = 0$ donc $\phi = \text{cte}$ donc $Li + \phi_{\text{ext}} = \text{cte}$, le courant ne s'annule jamais et la force induite non plus : l'aimant lévite au dessus de la spire supraconductrice !

★ ★ ★

Diffusion des ondes électromagnétiques

On rappelle l'équation de la chaleur qui traduit la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 T.$$

Ici, la diffusion étudiée est la diffusion par une particule d'une onde électromagnétique incidente en un rayonnement qui se propage dans toutes les directions.

Interaction matière/rayonnement L'onde incidente est une onde plane progressive sinusoïdale. La matière est constituée d'atomes et molécules indépendantes telles que les noyaux sont fixes et les électrons mobiles. Les forces auxquelles sont soumis les électrons sont, avec $\vec{\rho}$ la distance au noyau et \vec{r} la position du noyau :

- une force de rappel liée au modèle de l'électron élastiquement lié $-m\omega_0^2 \vec{\rho}$;
- une force de freinage de rayonnement $-f \dot{\vec{\rho}} = -m\gamma \dot{\vec{\rho}}$;
- la force de LORENTZ $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \approx -e\vec{E}(\vec{r} + \vec{\rho}, t) \approx -e\vec{E}(\vec{r}, t)$.

La matière est donc globalement neutre. Pour obtenir les mouvement des électrons, on applique le PFD :

$$m \ddot{\vec{\rho}} = -m\omega_0^2 \vec{\rho} - m\gamma \dot{\vec{\rho}} - e\vec{E} \Rightarrow \ddot{\vec{\rho}} + \gamma \dot{\vec{\rho}} + \omega_0^2 \vec{\rho} = -\frac{e}{m} \vec{E}.$$

En passant en complexes avec la convention $\frac{d}{dt} \leftrightarrow -i\omega$,

$$\underline{\vec{\rho}} = \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\gamma} \underline{\vec{E}}.$$

On a un phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0$, à cause du modèle de l'électron élastiquement lié. Si l'on est loin de la résonance, $\omega\gamma \ll \omega^2 - \omega_0^2$ et

$$\underline{\vec{\rho}} = \frac{e}{m(\omega - \omega_0^2)} \underline{\vec{E}}.$$

\vec{E} est une onde plane progressive sinusoïdale donc son mouvement est la combinaison de deux oscillateurs harmoniques orthogonaux, donc $\vec{\rho}$ aussi. Ainsi la molécule excitée par le champ \vec{E} se comporte comme deux petits dipôles oscillants qui produisent un champ de rayonnement. Ce champ ne diffuse pas l'énergie de manière isotropique mais au maximum dans le plan orthogonal à son mouvement. Le terme $-m\gamma \dot{\vec{\rho}}$ est fondamental dans notre modèle, puisqu'il modélise les transferts d'énergie.

Puissance rayonnée D'après la formule de LARMOR, $\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 a^2$ et il nous faut $a^2 = \langle \ddot{\vec{\rho}} \cdot \ddot{\vec{\rho}} \rangle = \omega^4 \langle \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} \rangle$ car on est en régime sinusoïdal. De plus $a^2 = \frac{1}{2} \omega^4 \underline{\vec{\rho}} \cdot \underline{\vec{\rho}}^*$. Ainsi,

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 c^2 \frac{e^4}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*.$$

Or l'intensité incidente du rayonnement est $I_i = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_x \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot \vec{u}_x \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$. D'où enfin

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0^2}{6\pi} \frac{e^4}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} I_i.$$

\mathcal{P} est une puissance, I_i est une puissance surfacique donc le préfacteur est homogène à une surface, c'est la surface efficace de diffusion σ . Il est donc équivalent de considérer le problème où un rayonnement d'intensité I_i arrive sur une surface σ par laquelle il est totalement absorbé.

Diffusion de RAYLEIGH Lorsque $\omega^2 \ll \omega_0^2$, l'expression se simplifie et on obtient la formule de RAYLEIGH :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0^2}{6\pi} \frac{e^4}{m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 I_i.$$

On peut montrer que le visible correspond à $\omega < \omega_0/4$, et pour de telles valeurs on a bien $\omega_0 \ll \omega_0^2$ donc la formule de RAYLEIGH s'applique. C'est une diffusion élastique, la matière reçoit de la lumière à la pulsation ω et c'est la même pulsation ω qui est rayonnée. De plus, c'est une diffusion anisotrope à cause de l'anisotropie du champ de rayonnement.

La lumière diffusée est partiellement polarisée, la polarisation est fonction de la direction par laquelle on observe le rayonnement. La variation en ω^4 est très importante, ainsi si la pulsation de la lumière bleue est 2 fois plus importante que la pulsation de la lumière rouge, le rapport entre les puissances diffusées sera de 16 ! Ainsi les atomes de l'air diffusent largement la lumière bleue dans toutes les directions alors que la lumière rouge traverse les couches de l'atmosphère. Cela explique pourquoi le ciel est bleu à midi et rouge lorsque le soleil se couche.

Diffraction par un ensemble d'ouvertures identique

Cas général Soit un plan diaphragmant possédant une origine O_1 et une transmittance $t_1(\overrightarrow{O_1P})$. On reproduit cette transmittance à l'identique mais centrées sur des origines différentes, en faisant une translation. La transmittance globale est donc

$$t(\overrightarrow{OP}) = \sum_{m=1}^N t_1(\overrightarrow{O_mP}).$$

Quelle est l'amplitude diffractée dans les conditions de FRAUHOFFER ? On utilise pour la savoir la formule du même nom :

$$\begin{aligned} \underline{A}(\vec{k}) &= K \iint t(\overrightarrow{OP}) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OP}} d^2r \\ &= \sum_{m=1}^N K \iint t_1(\overrightarrow{O_mP}) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OP}} d^2r \\ &= \sum_{m=1}^N K e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OO_m}} \iint t_1(\overrightarrow{O_mP}) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{O_mP}} d^2r \\ &= \left(\iint t_1(\overrightarrow{O_1P}) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{O_1P}} d^2r \right) K \sum_{m=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OO_m}} \\ &= \underline{A}_1(\vec{k}) \sum_{m=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OO_m}} \end{aligned}$$

Comme on intègre sur tout le plan, on peut en effet changer d'origine dans l'intégrale. Deux facteurs apparaissent dans cette expression : le facteur de forme $f(\vec{k}) = \underline{A}_1(\vec{k})$ et un facteur de structure $s(\vec{k}) = \sum_{m=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OO_m}}$. Au lieu d'utiliser la formule de FRAUHOFFER, on aurait pu utiliser le fait que l'amplitude diffractée est la transformée de FOURIER de la transmittance, et que le produit de convolution devient produit simple dans le domaine de FOURIER :

$$t(\vec{r}) = t_1(\vec{r}) \otimes \left(\sum_{m=1}^N \delta(\vec{r} - \overrightarrow{OO_m}) \right) \Rightarrow \underline{A}(\vec{k}) = \underbrace{\tilde{t}_1(\vec{k})}_{\underline{A}_1(\vec{k})} \times \sum_{m=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OO_m}},$$

car tout le monde sait que la transformée d'un DIRAC est une exponentielle imaginaire. L'intensité est $I = f f^* s s^* = F S$ où F est un facteur qui ne dépend que de la forme du motif que l'on répète, et S de la manière dont ce motif est répété.

Répartition régulière On suppose que $t(\vec{r})$ possède une double périodicité spatiale selon deux vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 , et que le motif est répété N_1 fois le long de \vec{a}_1 et N_2 fois le long de \vec{a}_2 .

C'est le principe des réseaux. Mais il se produit le même phénomène de diffraction avec un rideau semi-transparent maillé, ou des cristaux. Les cristallographes sont capables de reconnaître la structure d'un cristal grâce à sa figure de diffraction. C'est grâce à la diffraction que l'on a pu connaître la structure de l'ADN.

Répartition aléatoire On suppose qu'il y a $N \gg 1$ ouvertures aléatoirement réparties sur le plan diffractant. Pour réaliser cette situation, on peut disperser de la poudre de lycopode (champignon) sur une plaque de verre. Les spores du lycopode sont en effet remarquablement régulières et présentent toutes environ le même rayon. D'après le théorème de BABINET, cette situation est équivalente à une plaque opaque dans laquelle on aurait percé des ouvertures aux emplacement des spores de lycopode.

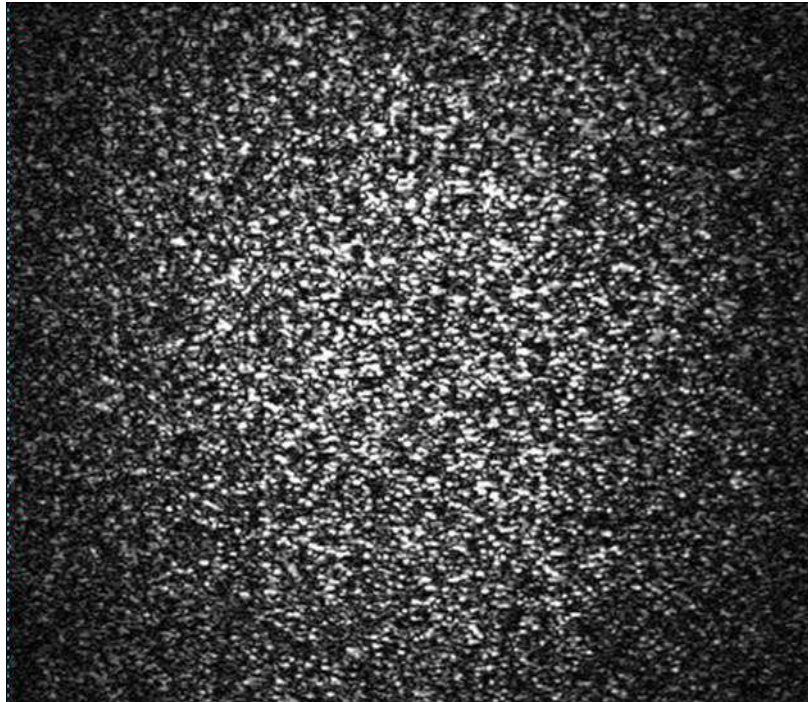
Le facteur de forme correspondant à cette figure de diffraction est la tâche d'Airy, mais ce qui nous intéresse c'est le facteur de structure. Celui-ci est, par la formule précédent,

$$S = \left(\sum_m \exp(-i \vec{k} \cdot \overrightarrow{O\vec{O}_m}) \right) \left(\sum_p \exp(+i \vec{k} \cdot \overrightarrow{O\vec{O}_p}) \right) = N + 2 \sum_{m < p} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{O_p \vec{O}_m}).$$

Comme la répartition est aléatoire, le cosinus prend des valeurs aléatoires donc la somme des cosinus est nulle et $I = NF$? En réalité, ce raisonnement est faux.

Considérons le problème de la marche aléatoire le long d'un axe (Ox). Le marcheur fait N pas au hasard donc $x_n \in \llbracket -N, N \rrbracket$. Mais il y a une très faible probabilité pour que $x_N = N$ ou $x_N = -N$. Ainsi, $\langle x_N \rangle = 0$ mais $\langle x_N^2 \rangle = N$ donc $\sqrt{\langle x_N^2 \rangle} = \sqrt{N}$. Un ivrogne qui a fait 10000 pas au hasard se retrouve en moyenne à 100 pas de son point de départ. C'est un raisonnement caractéristique de la diffusion.

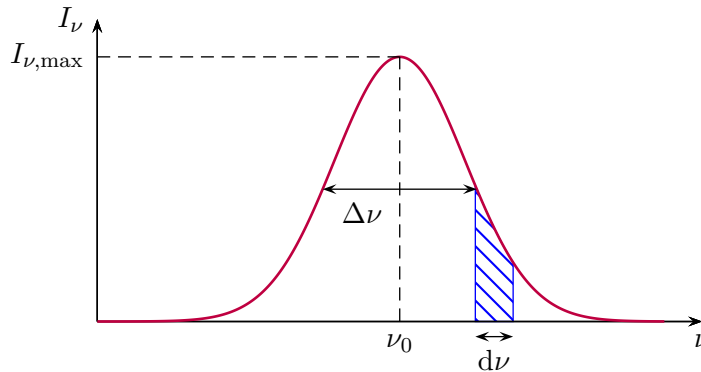
Néanmoins le problème reste entier, il nous faut évaluer $\sum_{m < p} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{O_p \vec{O}_m})$. On considèrera que chaque cosinus vaut ± 1 , et il y a N^2 termes, on est donc ramenés au problème de la marche aléatoire. Ainsi la somme des cosinus vaudra en valeur absolue moyenne $\sqrt{N^2} = N$, on ne peut pas la négliger devant l'autre N dans la somme qui fait S . La somme des cosinus est donc un facteur aléatoire non-négligeable qui provient de la répartition aléatoire des lycopodes. L'intensité observée sur un écran sera donc une tache d'Airy modulée localement très fortement par le facteur de structure qui est localement aléatoire mais parfaitement déterminé par la répartition des lycopodes. Puisque la somme de cosinus comporte N^2 termes, dès que \vec{k} varie très faiblement, la valeur de la somme peut varier du tout au tout. Voir l'image ci-dessous.



Largeur spectrale d'une source

On s'intéresse à la répartition spectrale de la lumière envoyée par une source quasi-monochromatique. Celle-ci est centrée sur une fréquence ν_0 et est étalée sur $\Delta\nu$.

Distribution d'intensité spectrale I est la puissance surfacique du rayonnement envoyé par la source, mais on s'intéresse à la fraction d'intensité produite par une onde dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$: $dI = I_\nu(\nu)d\nu$. I_ν est l'intensité spectrale.



Pour une source absolument monochromatique, $I_\nu = I_0\delta(\nu - \nu_0)$ mais cela n'existe pas en réalité. dI est l'aire hachurée en bleu, et si I_0 est l'intensité totale délivrée par la source, alors

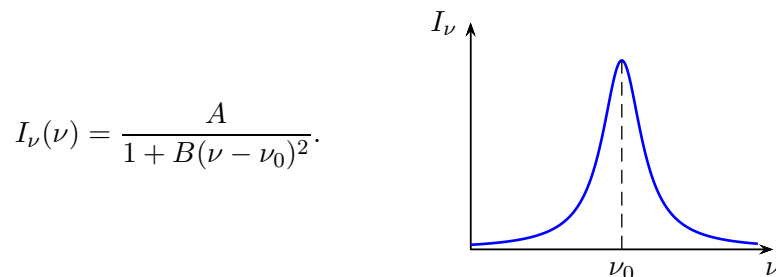
$$I_0 = \int dI = \int I_\nu(\nu)d\nu \approx \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} I_\nu(\nu)d\nu.$$

La monochromaticité de la source est bien sûr inversement proportionnelle à $\Delta\nu$, mais il faut aussi tenir compte de ν_0 : un écart de 10 Hz est énorme si $\nu_0 \sim 1$ Hz mais pas si $\nu_0 \sim 10^6$ Hz. Ainsi on définit l'indicateur de monochromaticité de la source, sa finesse, par

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}.$$

Pour pouvoir résoudre le profil spectral, c'est-à-dire étudier I_ν , il faut que notre détecteur ait une résolution $\Delta\nu_d < \Delta\nu$. On aurait aussi pu analyser en pulsation ou en longueur d'onde : $dI = I_\omega(\omega)d\omega$ ou $dI = I_\lambda(\lambda)d\lambda$.

Origine de la largeur spectrale On a d'abord une largeur naturelle liée au temps de désexcitation fini des atomes de la source lumineuse. Le temps de cohérence τ_n naturel du rayonnement est fini, et à cause des principes de l'analyse spectrale $\Delta\nu_n \sim 1/\tau_n$. Pour $P = 1$ bar, $\Delta\nu_n \sim 10^8$ Hz et cela diminue fortement avec la pression. Lorsque l'origine de la largeur spectrale est majoritairement naturelle, la distribution d'intensité spectrale est dite lorentzienne, de la forme

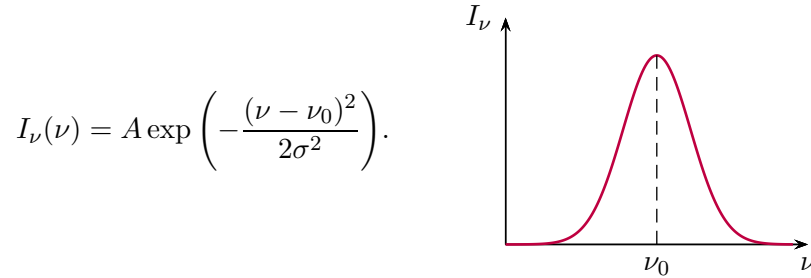


La courbe est symétrique par rapport à ν_0 . On identifie $A = I_{\nu,\max}$ et B est liée à $\Delta\nu_n$, plus précisément, $B = 4/(\Delta\nu)^2 = 4\tau_n^2$.

Mais il existe une deuxième source de largeur spectrale. L'effet DOPPLER, déjà évoqué page 39. Si l'atome de la source se déplace à la vitesse \vec{v} et que v_x est la composante de \vec{v} sur l'axe atome-observateur, alors la fréquence perçue par l'observateur est

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_x}{c} \right) \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\nu_0 v_x}{c}.$$

À cause de l'agitation thermique, \vec{v} varie beaucoup d'un atome à un autre et même si tous les atomes de la source émettent à ν_0 , le rayonnement reçu est étalé à cause de l'effet DOPPLER. Lorsque c'est cette cause de largeur qui est prépondérante, la distribution d'intensité spectrale est gaussienne, de la forme



La courbe est aussi symétrique par rapport à ν_0 , très similaire à la lorentzienne. On identifie $A = I_{\nu, \max}$, et $\sigma = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, σ est lié à l'agitation thermique. En effet, la probabilité que v_x soit dans l'intervalle $[v_x, v_x + dv_x]$ est, avec la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN,

$$d\mathcal{P} = \alpha \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m v_x^2}{k_B T}\right).$$

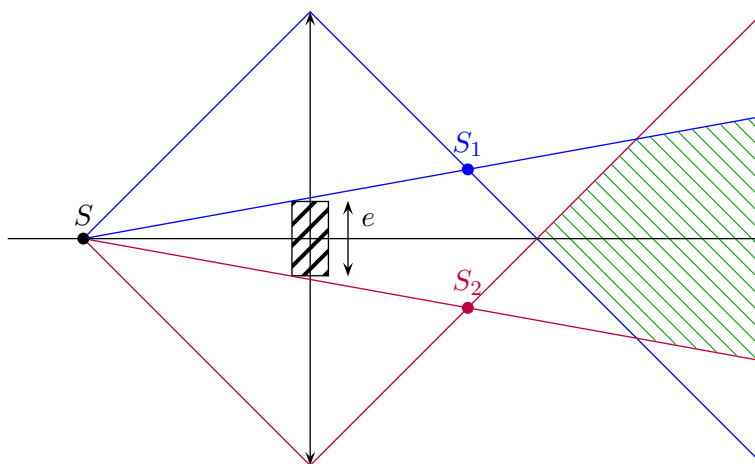
La largeur spectrale due à l'effet DOPPLER est $\Delta\nu_D = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{2 \ln 2 \frac{k_B T}{m}}$, elle est sensible à la température et à la pression. Pour $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$, $T = 500 \text{ K}$, $\Delta\nu_D = 2 \times 10^9 \text{ Hz}$.

Pour avoir en général la largeur de la répartition spectrale, les deux phénomènes s'influencent mutuellement et la situation est compliquée. Néanmoins, dans des conditions usuelles pour une source lumineuse, $\Delta\nu_D \gg \Delta\nu_n$ donc $\Delta\nu_{\text{tot}} \approx \Delta\nu_D$. Mais si P est plus élevée et T plus faible, cette tendance peut s'inverser.

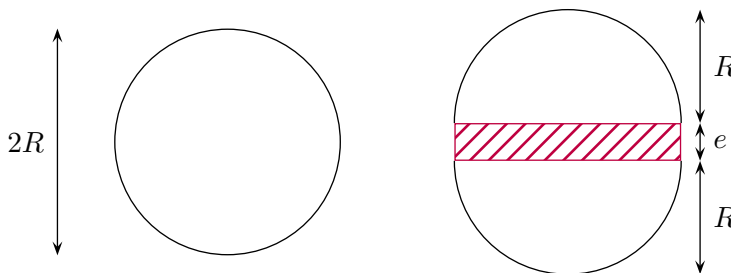
Dispositifs interférentiels par division du front d'onde

Principe On listera ici plusieurs dispositifs interférentiels par division du front d'onde, qui fonctionnent sur le principe des fentes d'YOUNG : une source ponctuelle S envoie de la lumière monochromatique de longueur d'onde λ dans un dispositif optique qui crée deux sources fictives S_1 et S_2 distantes de a , et on mesure l'intensité sur un écran situé à la distance D de S_1 et S_2 . Si on note I_1 et I_2 les intensités produites par les deux sources fictives, et $I(y)$ l'intensité sur l'écran, alors $I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$ où $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{D} + \varphi_0$ et l'interfrange est $i = \frac{\lambda D}{2}$. Les dispositifs qui suivent ont pour but de pallier aux inconvénients des fentes d'YOUNG, notamment la très faible luminosité qui sort des fentes.

Les bilentilles de BILLET Il s'agit de placer devant S une lentille convergente dont on a rendu opaque la partie centrale.



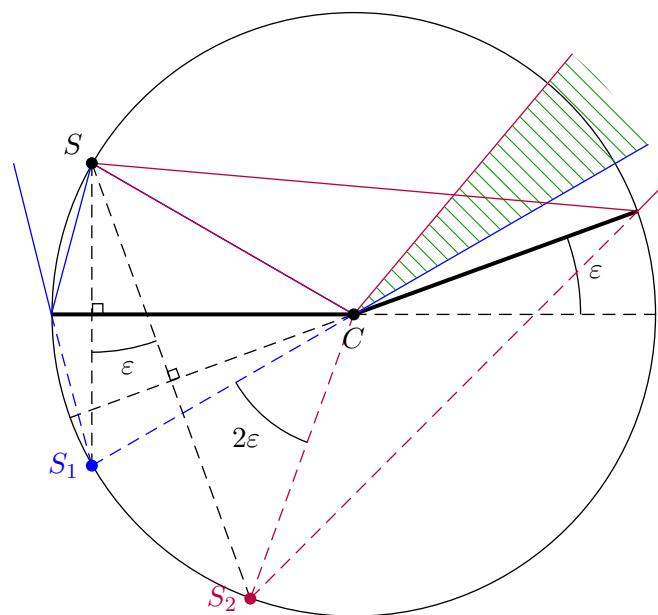
Le rayon lumineux qui passe par le centre d'une bilentille n'est pas dévié. En effet, on réalise en pratique une bilentille à partir d'une lentille sphérique que l'on découpe selon le procédé suivant (la courbure de la lentille est exagérée) :



S_1 et S_2 sont les images de S par chacune des deux moitiés de la bilentille. S_1 et S_2 sont situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe optique à cause de l'aplanétisme des lentilles minces. Par symétrie, S_1 et S_2 sont cohérentes et en phase.

Les interférences ne sont pas localisées, on peut les observer dans toute la zone hachurée en vert. Le cache entre les deux moitiés de la bilentille sert à éviter de nuire au contraste. Le contraste est d'ailleurs bon car les deux sources envoient de la lumière avec la même intensité. Les franges seront plus lumineuses que le trou d'YOUNG car on se sert d'une bonne partie de la lumière diffusée par S . La frange centrale $y = 0$ est lumineuse par symétrie ; les deux ondes issues des deux sources y arrivent en phase.

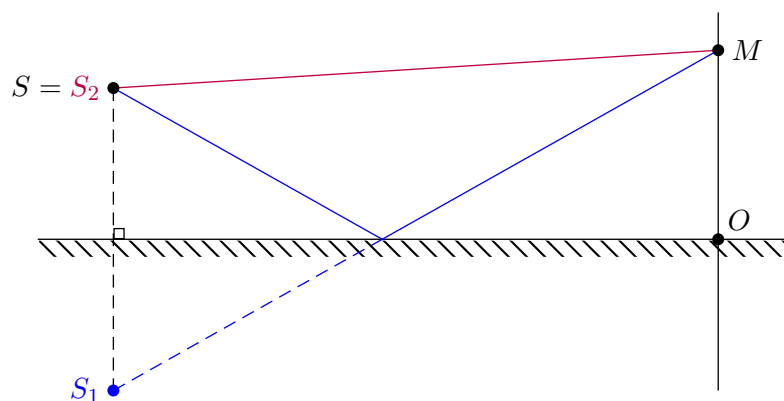
Les miroirs de FRESNEL Dans un cercle de rayon R , on place un miroir en deux parties dont l'une est inclinée de l'angle $\varepsilon \ll 1$ par rapport au prolongement du diamètre, et une source S .



Les rayons en bleu sont ceux réfléchis par la moitié de gauche du miroir, ceux en rouge par la moitié droite inclinée. S_1 et S_2 sont les images de S par ces deux miroirs. La difficulté de l'exercice est ici de retrouver la distance entre S_1 et S_2 . Sur la figure, on retrouve le ε à gauche grâce aux deux angles droits, puis on utilise le théorème de l'angle au centre pour montrer que $\widehat{S_1CS_2} = 2\varepsilon$. Ensuite, puisque $\varepsilon \ll 1$, $S_1S_2 \approx 2\varepsilon R$ car la corde se confond avec l'arc de cercle.

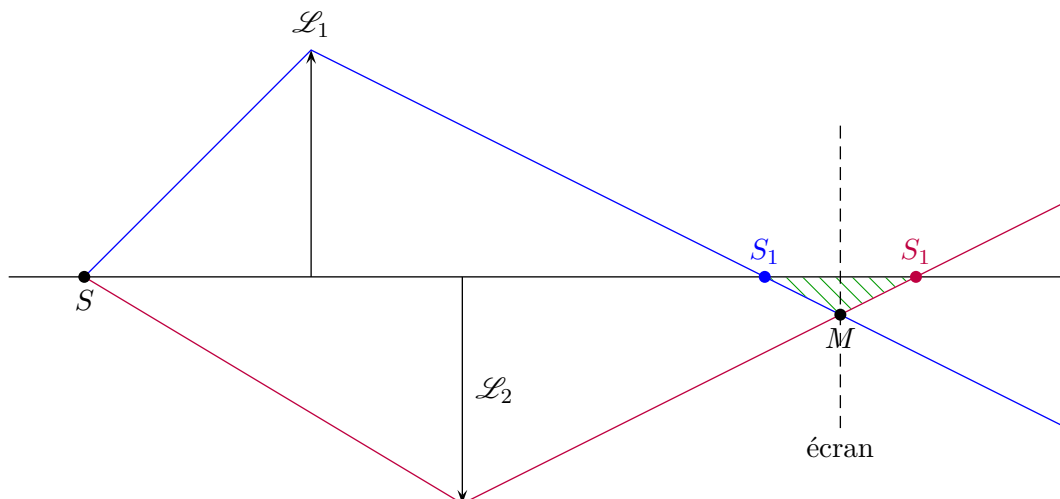
Le champ d'interférences est en vert. Les franges sont très lumineuses, le contraste bon car l'intensité diffusée par les deux sources est la même. Par symétrie, la frange centrale est brillante.

Le miroir de LLOYD Voici le dispositif :



On place un miroir plan perpendiculairement à l'écran, S_2 est la source elle-même et S_1 est l'image de S par le miroir. Géométriquement, $OS_1 = OS_2$ donc la frange centrale en O devrait être brillante. Néanmoins, on constate expérimentalement qu'elle est sombre. Ceci est dû au déphasage de π occasionné par la réflexion sur le miroir ; le miroir de LLOYD est la preuve expérimentale de ce déphasage.

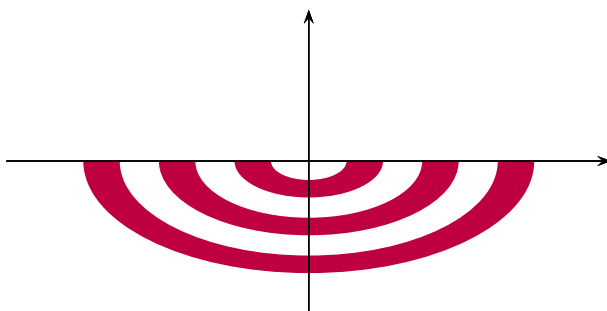
Bilenteille de MESLIN Au lieu de séparer verticalement les deux moitiés de la bilenteille comme dans le cas de BILLET, on les sépare horizontalement.



Le champ d'interférence est la zone en vert. En réalité, c'est un demi-double cône, que l'on retrouve en faisant faire un demi-tour au triangle vert autour de l'axe optique. Déterminons la forme des franges. La différence de marche est

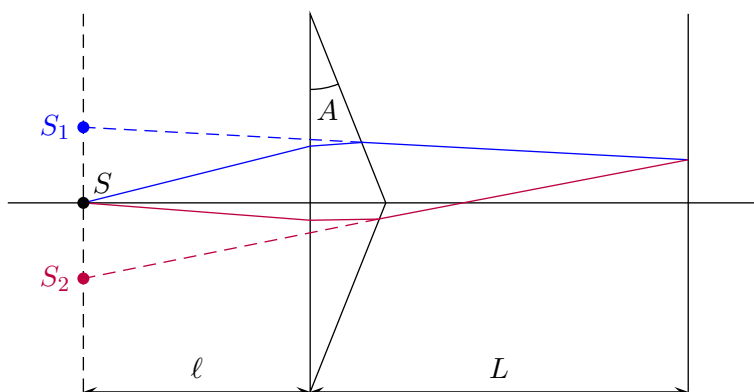
$$\delta = L_2 - L_1 = L_{S \rightarrow S_2} + L_{S_2 \rightarrow M} - (L_{S \rightarrow S_1} - L_{M \rightarrow S_1}) = \underbrace{L_{S \rightarrow S_2} + L_{S \rightarrow S_1}}_{\text{cte}} + n(S_2M + S_1M).$$

Les franges sont les lieux équiphasés donc équi- δ , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $S_1M + S_2M = \text{cte}$: c'est donc une ellipse, comme intersection d'un ellipsoïde avec un plan perpendiculaire à $[S_1S_2]$.

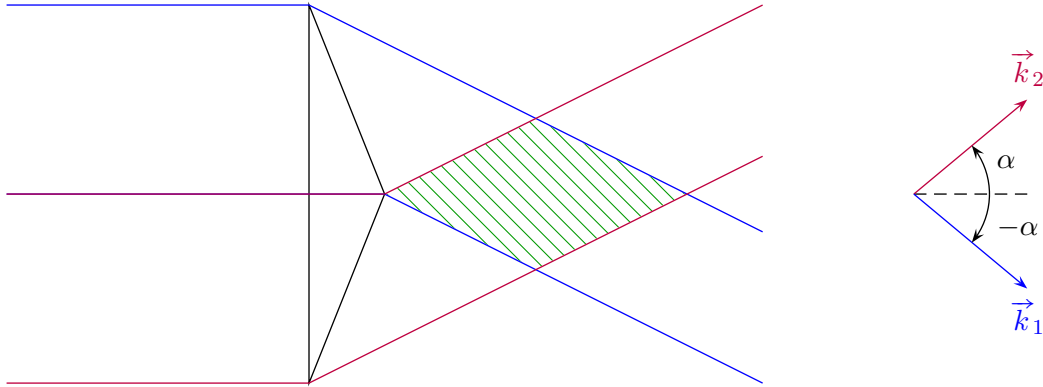


La frange centrale est-elle claire ou sombre ? Les rayons passant par l'axe optique en haut ou en bas traversent la même épaisseur de verre dans les lentilles donc ils sont normalement en phase. Mais expérimentalement, on constate que la frange centrale est sombre. C'est à cause du déphasage de GOUY. En effet, lorsqu'une onde sphérique passe par son pôle, elle subit un déphasage de π . L'onde bleue passe par son pôle avant d'arriver en M mais pas l'onde rouge ; les deux rayons autour de l'axe optique sont donc quand même déphasés de π .

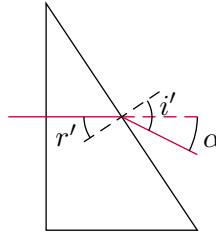
Le biprisme de FRESNEL On considère le dispositif suivant, le biprisme étant d'indice n , $A \ll 1$:



Chaque moitié du biprisme est approximativement stigmatique et S est conjuguée avec 2 sources fictives S_1 et S_2 qui sont quasiment dans le même plan transversal de S . On peut montrer que $S_1 S_2 = 2\ell(n-1)A$, et en notant $D = \ell + L$ on peut utiliser toutes les formules concernant les trous d'YOUNG. Voici ce qui se passe avec une source à l'infini :



Quelle est la valeur de α ? Que donne dans la zone verte la superposition de deux ondes planes de vecteurs \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ? Pour calculer α , on fait un peu de géométrie :



Ici $r' = A$, $\alpha = i' - r'$ et d'après la troisième loi de DESCARTES, puisque $A \ll 1$, $i' = nr'$ donc $\alpha = (n-1)A$.

On place un écran plan Π perpendiculairement à l'axe optique dans la zone en vert et on observe des franges d'interférences. Les ondes étant planes, on supposera donc que le problème est invariant par toute translation de Π le long de l'axe optique. Déterminons l'interfrange i : M et M' sur l'écran sont distants d'une interfrange si

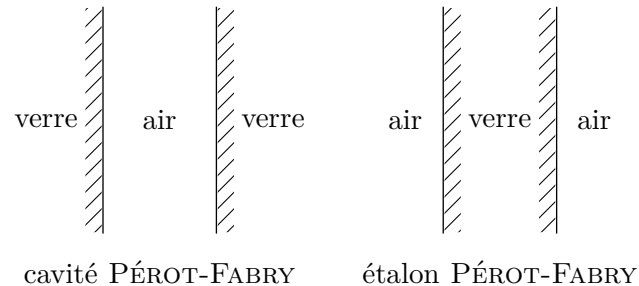
$$\begin{aligned} \varphi(M) - \varphi(M') &= \pm 2\pi \Rightarrow \varphi_2(M') - \varphi_1(M') = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) \pm 2\pi \\ &\Rightarrow \varphi_2(M') - \varphi_2(M) = \varphi_1(M') - \varphi_1(M) \pm 2\pi \\ &\Rightarrow \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{MM'} = \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{MM'} \pm 2\pi i \\ &\Rightarrow (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \overrightarrow{MM'} = \pm 2\pi. \end{aligned}$$

Or $\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \sin \alpha \vec{u}_y$ où \vec{u}_y est unitaire dirigé du bas vers le haut dans le plan de la feuille. De plus $\overrightarrow{MM'} = i \vec{u}_y$ donc on trouve

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

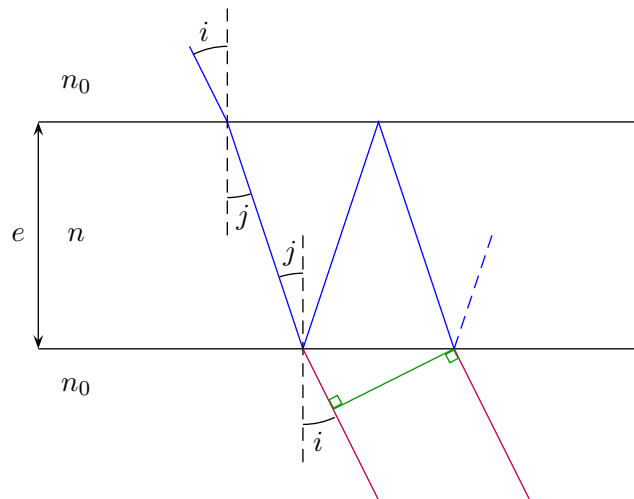
Interféromètre de PÉROT et FABRY

Description Le dispositif est une lame d'air entre deux plaques de verre semi-argentées ou une lame de verre semi-argentée dans l'air.



Les lames semi-argentées ont un fort coefficient de réflexion et à chaque fois que la lumière frappe à l'interface seule une faible partie est transmise; c'est donc un interféromètre à ondes multiples. On peut observer la lumière réfléchie ou transmise, néanmoins pour optimiser le contraste on regarde la lumière transmise. La cavité PÉROT-FABRY est utilisée dans les lasers.

Amplitude de l'onde résultante La différence de marche géométrique a déjà été calculée dans le cours de M. MASSIAS, c'est $\delta = 2ne \cos j$.



On note \underline{A}_0 l'amplitude incidente, \underline{A}_n l'amplitude de la n -ième l'onde transmise pour $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors avec les relations de passage $\underline{A}_1 = \underline{A}_0 t_1 t_2 e^{i\alpha}$ où $\alpha = ne \sin j$, $\underline{A}_2 = \underline{A}_0 t_1 t_2 e^{i\alpha} r^2 e^{i\varphi}$ où $\varphi = 2\pi\delta/\lambda_0$, puis $\underline{A}_3 = \underline{A}_2 r^2 e^{i\varphi}$ et c'est une progression géométrique. En notant $T = t_1 t_2$ et $R = r^2$, il vient en sommant les amplitudes

$$\underline{A} = \underline{A}_0 e^{ine \sin j} \frac{T}{1 - R e^{i2ne \cos j}}.$$

Intensité transmise On multiplie l'amplitude par son conjugué pour obtenir l'intensité transmise :

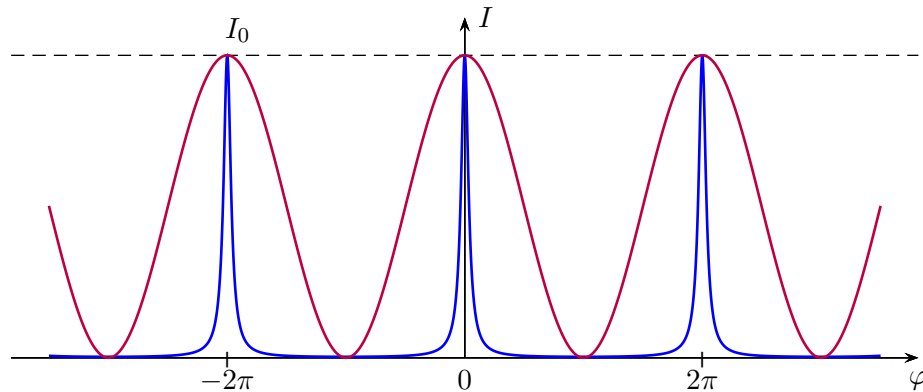
$$\begin{aligned} I &= \underline{A} \underline{A}^* \\ &= I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \quad \text{or } T = 1 - R; \\ &= \frac{I_0 (1 - R^2)}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} \\ &= \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

En posant $M = \frac{4R}{(1-R)^2}$, on a

$$I = \frac{I_0}{1 + M \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

C'est la fonction AIRY. Ce résultat est l'équivalent en interférences à ondes multiples de la formule $I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$. De manière anecdotique, les fonctions d'AIRY sont les solutions de l'équation différentielle $y'' - xy = 0$. L'intensité transmise est quant à elle, par conservation de l'énergie, $I_r = I_0 - I_t$.

Étudions la fonction d'AIRY. Elle est 2π -périodique, $I = I_0$ lorsque $\varphi \in 2\pi\mathbf{Z}$. Le coefficient $M \gg 1$ généralement car $R \approx 1$. En effet, si $r = 0,95$, $R = 0,90$ et $M = 300$. Les variations de la fonction (en bleu) sont brutales.



Calculons la largeur du pic à mi-hauteur, en linéarisant le sinus car visiblement $\delta\varphi \ll 1$:

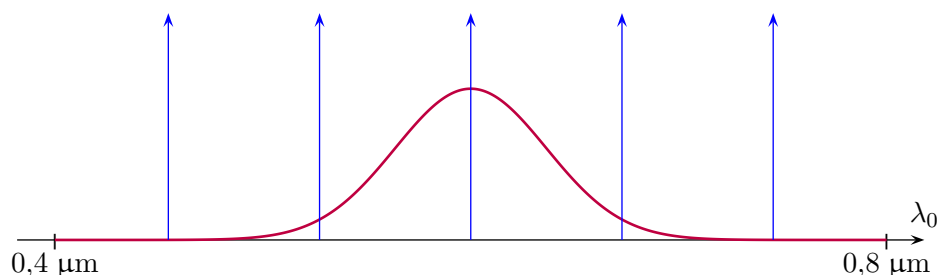
$$I = \frac{I_0}{2} \text{ à } \varphi = \pm \frac{\delta\varphi}{2} \Rightarrow M + \left(\frac{\delta\varphi}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

La courbe en rouge est celle de l'intensité pour les interférences à deux ondes, $I = 4I_0 \cos^2(\varphi/2)$. Les variations sont molles comparées à celles de la fonction d'AIRY, qui est pratiquement un peigne de DIRAC.

Les franges sont localisées à l'infini, ce sont donc des franges d'égale inclinaison. À cause de la fonction d'AIRY, les franges sont très fines, au contraire de celle obtenues avec un michelson par exemple. Les franges sont certes plus fines mais très lumineuses.

Filtre interférentiels L'interféromètre de PÉROT et FABRY peut servir à filtrer une lumière polychromatique. Les longueurs d'onde transmises sont les λ tels que $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On se place en incidence normale, $i = 0$ donc $j = 0$ et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne$ d'où $\lambda_k = \frac{2ne}{k}$. Tous les λ_k seront transmis intégralement à la sortie du filtre tandis que les autres longueurs d'onde seront réfléchies.

Si on veut sélectionner une seule longueur d'onde, on peut diminuer e afin d'obtenir une seule longueur d'onde sélectionnée dans le domaine du visible mais ce n'est pas très important. La bonne méthode consiste à prendre un filtre passe-bande bon marché (en rouge) qui dégrossit le signal puis appliquer le PÉROT et FABRY pour un réglage fin (en bleu).



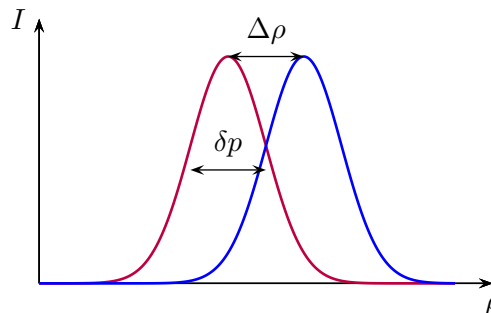
Déterminons la bande passante et le facteur de qualité du PÉROT-FABRY comme filtre de longueurs d'onde. En différenciant logarithmiquement la relation entre φ et λ_0 ,

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{4}{2k\pi\sqrt{M}} = \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow Q = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda_0} = \frac{k\pi\sqrt{M}}{2}.$$

On veut $Q \gg 1$ donc pour cela, il est logique d'augmenter M . Néanmoins à cause de la racine carrée, cette tâche est ardue : pour $M = 300$, $Q = 30$ seulement. Une deuxième solution est d'essayer d'augmenter k . On sait que $2k\pi = 2ne/\lambda_0$ or $e \sim 1$ cm donc $K \sim 10^4$ sans difficulté. Même si augmenter e fait diminuer M , la racine fait que concernant Q , il est préférable de l'augmenter.

Spectromètre à haute résolution On veut analyser pour une lumière polychromatique la répartition de l'intensité en fréquence $I_\nu(\nu)$. Les spectromètres à prisme et à réseau déjà étudiés dans le cours de M. MASSIAS permettent de réaliser cette opération. En lumière monochromatique les franges transmises par l'interféromètre de PÉROT et FABRY sont très fines et lumineuses. En lumière bichromatique, on aura deux systèmes de franges décalés les uns par rapport aux autres.

On s'intéresse au pouvoir de résolution du spectromètre, c'est à dire le coefficient $\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda$ maximal tel que l'on puisse distinguer grâce au spectroscopie les raies des longueurs d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$. On observe les franges paramétrées par la longueur ρ sur un écran après le passage par une lentille convergente de focale f . On rappelle que $\varphi = 2ne \cos j \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $n \sin j = n_0 \sin i$ et $\rho = f \tan i \approx fi$ si $i \ll 1$. Pour déterminer jusqu'à quel point on peut considérer deux raies comme différenciables l'une de l'autre, on va utiliser le critère de RAYLEIGH. Dans la suite on ne se soucie pas des signes des quantités différentielles.



La largeur δp d'une raie est liée à la fonction d'AIRY. On sait que $\delta\varphi = 4/\sqrt{M}$, on différencie logarithmiquement à l'aide de l'expression de φ ci-dessus :

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = -\tan j \delta j = -\frac{n_0}{n} \tan i \delta i \approx -\frac{n_0}{n} \frac{\rho \delta p}{f^2} \Rightarrow \delta p = \frac{2}{k\pi\sqrt{M}} \frac{n_0}{n} \frac{f^2}{\rho}.$$

On trouve donc Δp en fonction de k . Pour relier $\Delta\rho$ et $\Delta\lambda_0$, on différencie logarithmiquement la relation entre φ , j et λ_0 à φ constant et à λ_0 qui varie :

$$0 = -\tan j \delta j - \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{n_0}{n} \tan i \delta i \approx \frac{n_0}{n} \frac{\rho \Delta\rho}{f^2}.$$

Le critère de RAYLEIGH stipule que l'on peut distinguer une raie de l'autre si $\Delta\rho > \delta p$, ce qui se traduit par

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} > \frac{2}{k\pi\sqrt{M}} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{k\pi\sqrt{M}}{2} = Q.$$

Il se trouve que Q et \mathcal{R} sont les mêmes, l'interféromètre de PÉROT et FABRY est aussi efficace en tant que spectromètre que comme filtre. On propose maintenant spontanément à l'examineur une application numérique avec des ordres de grandeurs judicieusement choisis.

R	e	$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$	K	\mathcal{R}	$\Delta\lambda$
0,9	1 cm	500 nm	4×10^4	$1,2 \times 10^6$	0,4 pm

Le spectromètre est incroyablement précis, capable de ramener à notre échelle des longueurs de l'ordre du centième du rayon atomique. Avec un spectromètre à réseau, $\mathcal{R} = kN \sim 10^3$ est beaucoup moins élevé. Pour atteindre une précision comparable, il faudrait un réseau de 600 000 traits, ce qui est techniquement très ardu à réaliser. On peut utiliser le spectromètre PÉROT-FABRY pour distinguer la raie double du sodium : $5\,589,0\text{ nm} \leftrightarrow 5\,589,6\text{ nm}$, $\Delta\lambda \sim 600\text{ pm}$.

En fait, le PÉROT-FABRY est tellement précis qu'il permet d'analyser la répartition en intensité d'une seule raie, par exemple pour confirmer une répartition gaussienne ou lorentzienne du spectre (voir le complément page 61).

★ ★ ★