Limites

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Topologie dans $\overline{\mathbb{R}}$

1.1 Préambule

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne désignant pas des réels.
On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty$$

$\left(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant\right)$ est alors un ordre total.

1.2 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1.2.1 Définitions

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors A est voisinage de x dans $\overline{\mathbb{R}}$ s'il existe $\varepsilon > 0 / [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset A$ [a]. Ainsi, A est voisinage de $x \in \mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $A \backslash \{\pm\infty\}$ est voisinage de x dans $\mathbb{R}$.
- Si $x = +\infty$, A est un voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\exists M \in \mathbb{R} / [M, +\infty] \subset A$.
- Si $x = -\infty$, A est un voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\exists M \in \mathbb{R} / [-\infty, M] \subset A$.

a. Tout voisinage de x dans $\mathbb{R}$ est *a fortiori* un voisinage de x dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $x \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2.2 Propriétés

(1) Si $A \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$.

(2) Une réunion quelconque de voisinages de x ainsi qu'une intersection finie de voisinages de x est toujours un voisinage de x.

(3) Si $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $x \neq y$, alors $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$ avec $U \cap V = \varnothing$.

Démonstration Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $x \neq y$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$, supposons $x < y$ et posons $\alpha = \dfrac{|y-x|}{4}$. Alors $[-\infty, x+\alpha] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$ et $[y-\alpha, +\infty] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(y)$. De plus, $x+\alpha < y-\alpha$ donc $[-\alpha, x+\alpha] \cup [y-\alpha, +\infty] = \varnothing$.
- Si $x \in \mathbb{R}$ et $y = +\infty$, on prend $U = [-\infty, x+1]$ et $V = [x+2, +\infty]$. Cas analogue pour $x = -\infty$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Si $x = -\infty$ et $y = +\infty$, alors $U = [-\infty, 0]$ et $V =]0, +\infty]$.

1.3 Points adhérents dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\forall V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(x)$, $V \cap D \neq \varnothing$. On notera $\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérents à D dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(D)$$

Remarques
- $+\infty \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ si et seulement si D n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.
- $-\infty \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ si et seulement si D n'est pas minoré dans $\mathbb{R}$.

2 Notion de limite

Dans la suite, D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ [a], et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1 Définitions topologiques

2.1.1 Énoncés

(1) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a et on écrit $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l), \exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset V$$

(2) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(l), \exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset V$$

2.1.2 Remarques, faits

Conséquences de la définition des limites sur les fonctions

(1) Supposons $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a : $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \forall t \in U \cap D, f(t) > 0$.
En effet, si $m \in]0, l[$ alors $[m, +\infty] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in [m, +\infty]$.

(2) Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < l < \beta$. Alors, au voisinage de a, $\alpha \leqslant f(t) \leqslant \beta$.
En effet, $[\alpha, \beta] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$.

Notion de limite Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, supposons $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ avec $l, l' \in \mathbb{R}$. Montrons que $l = l'$.

Supposons que $l \neq l'$, soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$ et $V' \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l')$ avec $V \cap V' = \varnothing$. Alors $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$. De même, $\exists U' \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $f(U' \cap D) \subset V'$. Or $U \cap U' \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ donc $U \cap U' \cap D \neq \varnothing$ et pour $t \in U \cap U' \cap D$, on a $t \in U \cap D$ donc $f(t) \in V$ et $t \in U' \cap D$ donc $f(t) \in V'$, ce qui est impossible.

On définit donc la limite d'une fonction en un point de la façon suivante :

(1) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, s'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, alors l est unique et s'appelle limite de f en a, et se note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

(2) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, s'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, alors l est unique et s'appelle limite de f en a avec les mêmes notations que précédemment.

Limite et convergence des suites On retrouve la notion de limite déjà définie pour les suites. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, prenons $D = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$: alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, $V = [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ tel que $u(U \cap \mathbb{N}) \subset V$. Soit $M > 0$ tel que $[M, +\infty] \subset U$. On prend $n_0 = \mathrm{E}(M) + 1$. Pour $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N} \cap U$ donc $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $[l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ donc $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$. En prenant $U = [n_0, +\infty]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \cap U$, $u_n \in V$.

[a]. En pratique, D est une réunion finie d'intervalles.

Lien avec la continuité Supposons $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in D$ [a], alors f admet une limite en a si et seulement si f est continue en a. De plus, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- Montrons que si f admet une limite l en a, alors $l = f(a)$. Supposons $l \neq f(a)$, alors $\exists V \in \mathcal{V}(l)$ tel que $f(a) \notin V$. Mais on peut aussi trouver $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset V$, or $a \in U \cap D$ donc $f(a) \subset V$, ce qui est impossible.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset V \\ &\Leftrightarrow f \text{ est continue en } a \end{aligned}$$

2.1.3 Limites à droite et à gauche en un point

On suppose $a \in \mathbb{R}$ et a adhérent à $D_+ = D \cap \left]a, +\infty\right[$ et à $D_- = D \cap \left]-\infty, a\right[$.

Définition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{K}$ [a]. On dit que f admet l pour limite à gauche en a et on écrit $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to a\\x<a}}{\longrightarrow} l$ si $f_{|D_-} : \begin{array}{l} D_- \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto f(t) \end{array}$ admet l pour limite en a. Définition analogue pour la limite à droite.
En cas d'existence, ces limites se notent $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ ou $f(a^-)$ [b]. Même notation pour les limites à droite.

a. Éventuellement $l \in \{\pm\infty\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
b. Néanmoins, cette dernière notation se verra qualifier de « *Bôhf* » par M. Sellès.

Propriétés

- Supposons que f admet une limite l en a et montrons que $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$.
  Soit $\varphi = f_{|D_+}$ et $V \in \mathcal{V}(l)$, alors $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$ d'où, puisque $U \cap D_+ \subset U \cap D$, $\forall t \in U \cap D_+, \varphi(t) = f(t) \in V$ donc $\varphi(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} l$. De même, $\psi(t) = f_{|D_-}(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} l$. Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, alors f n'admet pas de limite en a.
- Supposons à présent que $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$.
  - Si $a \notin D$, montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$. Soit $\varphi = f_{|D_+}$ et $\psi = f_{|D_-}$. Soit $V \subset \mathcal{V}(l)$, alors $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \varphi(U_1 \cap D) \subset V$ et $\exists U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \psi(U_2 \cap D) \subset V$. Or $U = U_1 \cap U_2$ alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et pour tout $t \in U \cap D$, $t \neq a$ car $a \notin D$. De plus, si $t > a$ $t \in U \cap D_+ \Rightarrow f(t) = \varphi(t) \in V$ et si $t < a$, $t \in U \cap D_- \Rightarrow f(t) = \psi(t) \subset V$. Ainsi, $f(U \cap D) \subset V$.
  - Si $a \in D$:
    → Si $l \neq f(a)$, il ne peut pas y avoir de limite en a.
    → Si $l = f(a)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a.

2.2 Définitions epsilonnesques

On supposera à partir de la définition (4) que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pour pouvoir envisager les cas où $l \in \{\pm\infty\}$.

a. Donc $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

(1) $l \in \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

(2) $l \in \mathbb{K}$, $a = +\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall t \in D, t \geqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

(3) $l \in \mathbb{K}$, $a = -\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to +-\infty]{} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 / \forall t \in D, t \leqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

(4) $a \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

(5) $a \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

(6) $a = +\infty$, $l = +\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 / \forall t \in D, t \geqslant A \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

(7) $a = -\infty$, $l = +\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

(8) $a = -\infty$, $l = -\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

$a = +\infty$, $l = -\infty$.
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

Démonstrations

(1) $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, $\overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon)$. $a \in \mathbb{R}$ donc $\exists \alpha > 0 / [a-\alpha, a+\alpha] \subset U$ donc si $t \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $|t-a| \leqslant \alpha$ alors $f(t) \subset f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \Leftrightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$, $\exists \varepsilon > 0 / \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \subset V$ donc $\exists \alpha > 0 / \forall t \in D$, $|t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - t| \leqslant \varepsilon$ donc $f(t) \in \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon)$. Posons $U = [a-\alpha, a+\alpha]$, $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(2) $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, $\overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty) / f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon)$. Ainsi, $\exists M > 0 / [M, +\infty] \subset U$ donc si $t \in [M, +\infty]$, $t \geqslant M$ donc $f(t) \in f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \Leftrightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$, alors $\exists \varepsilon > 0 / \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \subset V$ donc $\exists M > 0 / \forall t \in D$, $t \geqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$. Posons $U = [M, +\infty]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(3) $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, $\overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty) / f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon)$. Ainsi, $\exists M > 0 / [-\infty, M] \subset U$ donc si $t \in [-\infty, M]$, $t \leqslant M$ donc $f(t) \in f(U \cap D) \subset \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \Leftrightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$, alors $\exists \varepsilon > 0 / \overline{V}_{\mathbb{K}}(l,\varepsilon) \subset V$ donc $\exists M < 0 / \forall t \in D$, $t \leqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$. Posons $U = [-\infty, M]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ Soit $M > 0$, $[M, +\infty] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset [M, +\infty]$. Ainsi, $\exists \alpha > 0 / [a-\alpha, a+\alpha] \subset U$ donc si $t \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [M, +\infty] \Leftrightarrow t \geqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, alors $\exists M > 0 / [M, +\infty] \subset V$ donc $\exists \alpha > 0 / \forall t \in D$, $|t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow t \geqslant M$. Posons $U = [a-\alpha, a+\alpha]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(5) $\Rightarrow$ Soit $M < 0$, $[-\infty, M] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset [-\infty, M]$. Ainsi, $\exists \alpha > 0 / [a-\alpha, a+\alpha] \subset U$ donc si $t \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [-\infty, M] \Leftrightarrow t \leqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$, alors $\exists M < 0 / [-\infty, M] \subset V$ donc $\exists \alpha > 0 / \forall t \in D$, $|t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow t \leqslant M$. Posons $U = [a-\alpha, a+\alpha]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(6) $\Rightarrow$ Soit $M > 0$, $[M, +\infty] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty) / f(U \cap D) \subset [M, +\infty]$. Ainsi, $\exists A > 0 / [A, +\infty] \subset U$ donc si $t \in [A, +\infty]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [M, +\infty] \Leftrightarrow t \geqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, alors $\exists M > 0 / [M, +\infty] \subset V$ donc $\exists A > 0 / \forall t \in D$, $t \geqslant A \Rightarrow t \geqslant M$. Posons $U = [A, +\infty]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(7) $\Rightarrow$ Soit $M > 0$, $[M, +\infty] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty) / f(U \cap D) \subset [M, +\infty]$. Ainsi, $\exists A < 0 / [-\infty, A] \subset U$ donc si $t \in [-\infty, A]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [M, +\infty] \Leftrightarrow t \geqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, alors $\exists M > 0 / [M, +\infty] \subset V$ donc $\exists A < 0 / \forall t \in D$, $t \leqslant A \Rightarrow t \geqslant M$. Posons $U = [-\infty, A]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(8) $\Rightarrow$ Soit $M < 0$, $[-\infty, M] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty) / f(U \cap D) \subset [-\infty, +M]$. Ainsi, $\exists A < 0 / [-\infty, A] \subset U$ donc si $t \in [-\infty, A]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [-\infty, M] \Leftrightarrow t \leqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$, alors $\exists M < 0 / [-\infty, M] \subset V$ donc $\exists A < 0 / \forall t \in D$, $t \leqslant A \Rightarrow t \leqslant M$. Posons $U = [-\infty, A]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$.

(9) $\Rightarrow$ Soit $M < 0$, $[-\infty, M] \subset \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty) / f(U \cap D) \subset [-\infty, +M]$. Ainsi, $\exists A > 0 / [A, +\infty] \subset U$ donc si $t \in [A, +\infty]$, $f(t) \in f(U \cap D) \subset [-\infty, M] \Leftrightarrow t \leqslant M$.

$\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty)$, alors $\exists M < 0 / [-\infty, M] \subset V$ donc $\exists A > 0 / \forall t \in D$, $t \geqslant A \Rightarrow t \leqslant M$. Posons $U = [A, +\infty]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t) \in V$ d'où $f(U \cap D) \subset V$ [a].

2.3 Définition séquentielle

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ et $l \in \mathbb{K} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall u \in D^{\mathbb{N}} / u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a, f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, et $V \in \mathcal{V}(l)$. Alors $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset V$. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in V$. Pour $n \geqslant n_0$, $f(u_n) \in V$ car $u_n \in U \cap D$.

$\Leftarrow$ Par contraposée, supposons que f ne tend pas vers l en a. Alors

$$\exists V \in \mathcal{V}(l) / \forall U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a), f(U \cap D) \not\subset V \Leftrightarrow \exists t \in U \cap D / f(t) \notin V$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$U_n = \begin{cases} [a - 2^{-n}, a + 2^{-n}] & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty] & \text{si } a = +\infty \\ [-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ donc on peut trouver $t_n \in U_n / f(t_n) \notin V$. Alors $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ mais $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l car $f(t_n) \notin V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Théorèmes généraux

3.1 Opérations

3.1.1 Cas de limites finies

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ admettant des limites $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ en $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha\lambda + \mu$$

[a]. Qu'est ce que ça a une sale gueule dès qu'arrivent les ε !

(2)
$$f(x)\,g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\mu$$

(3)
$$|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\lambda|$$

(4) Si, $\forall x \in D$, $f(x) \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

(5) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors
$$\inf(f(x), g(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \min(\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad \sup(f(x), g(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \max(\lambda, \mu)$$

(6) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{cases} \Re\mathrm{e}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \Re\mathrm{e}(\lambda) \\ \Im\mathrm{m}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \Im\mathrm{m}(\lambda) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \overline{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \overline{\lambda}$$

Démonstrations On utilise la définition séquentielle. Montrons la proposition (2) [a] :

Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a. On a alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$. On sait alors que
$$fg(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\mu \Rightarrow fg(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\mu$$

3.1.2 Cas de limites infinies

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

Hypothèses	Conclusion
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ g \text{ minorée au voisinage de } a \end{cases}$	$f(x) + g(t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ g \text{ minorée par une constante strictement positive au voisinage de } a \end{cases}$	$f(x)\,g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \\ f \text{ à valeur dans } \mathbb{R}_+^* \text{ au voisinage de } a \end{cases}$	$\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

- g minorée au voisinage de a signifie $\exists m \in \mathbb{R}$ et $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tels que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) \geqslant m$. Ceci se produit notamment si g est bornée sur D ou si g admet en a une limite $l > -\infty$ [b].
- g minorée par une constante strictement positive au voisinage de a signifie $\exists m > 0$ et $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tels que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) \geqslant m$. Ceci se produit notamment si g admet une limite strictement positive en a.
- Des énoncés analogues existent pour f tendant vers $-\infty$.

Démonstration de la proposition (2).

Soit $m > 0$ et $U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$, tel que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) > m$. Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, $\exists M > 0$ tel que $[M, +\infty[\subset V$ [c]. Donc $\exists U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_2 \cap D$, $f(t) \in \left[\dfrac{M}{m}, +\infty\right]$. Soit $U = U_1 \cap U_2$, $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t)\,g(t) \geqslant \dfrac{M}{m} m = M$.

a. Si j'ai dans un élan inconsidéré de bonne volonté fait les 9 démonstrations des définitions epsilonnesques de la limite, vous conviendrez que j'ai droit au repos du guerrier. C'est donc avec sincérité que je vous dit bonne chance pour démontrer le reste !

b. Soit $\lambda < l$, alors $[\lambda, +\infty] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $g(U \cap D) \subset V$.

c. C'est à ce moment précis que M. Sellès, profitant d'un léger retard de la prise de notes de ses élèves, lança une magnifique affirmation dont la destin serait d'entrer dans la légende : « *Je suis aussi lymphatique que le nénuphar* ! ».

Remarque Il y a des situations où on ne peut rien affirmer : les formes indéterminées.

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, on ne peut rien affirmer sur $f(x)+g(x)$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$; on ne peut rien dire de général sur $f(x)\,g(x)$.
- Dans ces situations, il faut lever l'indétermination. Par exemple, *quid* de $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$? On a , $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

3.1.3 Composition des limites

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a\in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ tel que $f(D)\subset\Delta$ et $g:\Delta\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose que :

(1) f admet une limite $b\in\overline{\mathbb{R}}$ (donc $b\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Delta)$).

(2) g admet en b une limite $l\in\overline{\mathbb{R}}$.

Alors

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = l$$

Démonstration

- Soit $V\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(b)$ et montrons que $V\cap\Delta\neq\varnothing$. $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ donc $\exists U\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $f(U\cap D)\subset V$. Mais $f(U\cap D)\subset f(D)\subset\Delta$ donc $f(U\cap D)\subset V\cap\Delta$ et $U\cap D\neq\varnothing$ donc $f(U\cap D)\neq\varnothing$.
- Supposons que $g(y)\xrightarrow[y\to b]{} l$, soit $W\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$ donc $\exists V\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(b)$, $g(V\cap\Delta)\subset W$. V est voisinage de b et $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$ donc $\exists U\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $f(U\cap D)\subset V$. Pour $t\in U\cap D$, $f(t)\in V\cap\Delta$ donc $g\circ f(t)\in W$.

Exemple *Quid* de $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$? Pour $x>0$,

$$x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

On a $\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\ln(1+u)}{u}\xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc, par composition,

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

3.1.4 Prolongement par continuité

Soit $f : D\longrightarrow\mathbb{K}$ et $a\in\mathbb{R}\backslash D$ tel que $a\in\mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.
On suppose que f admet en a une limite finie $l\in\mathbb{K}$. Si on pose, pour $x\in D\cup\{a\}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in D\\ l & \text{si } x=a\end{cases}$$

On a $\tilde{f}$ est continue en a et $f=\tilde{f}_{|D}$. $\tilde{f}$ est un prolongement de f en a.

3.2 Limites usuelles

3.2.1 Fonctions polynômiales

Soient P,Q des fonctions polynômiales non constantes. On a alors avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$:

$$P(t) = \alpha t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k t^k \quad \text{et} \quad Q(t) = \beta t^m + \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k t^k$$

De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = t^n \left(\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{t^{n-k}} \right)$. Or $t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit et récurrence, $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $t^l \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $\frac{1}{t^l} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par somme,

$$\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{t^{n-k}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Donc par produit, $P(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sgn}(\alpha) \infty$. De même, $Q(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sgn}(\beta) \infty$.

En particulier, Q est non nulle pour t assez grand donc $\frac{P}{Q}$ est bien définie. On a, pour tout t assez grand,

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = t^{n-m} \underbrace{\left(\frac{\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{t^{n-k}}}{\beta + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k}{t^{m-k}}} \right)}_{\longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}}$$

- Si $m = n$, $\frac{P(t)}{Q(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{\beta}$.
- Si $n > m$, $\frac{P(t)}{Q(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \infty$.
- Si $n < m$, $\frac{P(t)}{Q(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2.2 Liste de limites usuelles

$$\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad \frac{\tan t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\sinh t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \frac{\cosh t-1}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad \frac{\tanh t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \frac{\ln u}{u-1} \underset{u\to 1}{\longrightarrow} 1 \qquad \frac{\mathrm{e}^t-1}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$t\mathrm{e}^t \underset{t\to -\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad t\ln t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \alpha>0, \frac{t^\alpha}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\forall \alpha>0, \frac{|\ln t|}{t^\alpha} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $f,g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $f(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$ et g bornée au voisinage de a, alors $f(t)\,g(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration On utilise la définition séquentielle.

Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a. Alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $g(u_n)$ est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant |M|$. D'après les théorèmes généraux sur la convergence des suites, $f(u_n)\,g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4 Théorèmes spécifiques aux fonctions réelles

4.1 Théorèmes utilisant l'ordre

4.1.1 Conservations des inégalités larges par passage à la limite

Soient $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$. On suppose :

(1) f et g admettent en a des limites $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) f est plus petite que g au voisinage de a : $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \forall t \in U \cap D, f(t) \leqslant g(t)$.

Alors $\lambda \leqslant \mu$.

Démonstration Supposons au contraire que $\lambda > \mu$. Soit $\nu \in]\mu,\lambda[$, alors $]-\infty,\nu[\in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ donc $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / g(U_1 \cap D) \subset]-\infty,\nu[$. De même, $]\nu,+\infty[\in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(\lambda)$ donc $\exists U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U_2 \cap D) \subset]\nu,+\infty[$.

Or si $t \in U \cap U_1 \cap U_2 \cap D\,(\neq \varnothing)$, $f(t) \leqslant g(t)$ et $f(t) > \nu > g(t)$, ce qui est impossible.

4.1.2 Théorème de comparaison

Soient $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$, on suppose que $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \forall t \in U \cap D$, $f(t) \leqslant g(t)$.

- Si $g(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
- Si $f(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration Voir note *a* page 7.

4.1.3 Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$. On suppose :
(1) $\exists U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \forall t \in U \cap D$, $f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t)$.
(2) $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} l$ et $h(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} l$.
Alors $g(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} l$.

Démonstration Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $[l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$. $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} l$ donc $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U \cap D) \subset [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. De même, $h(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} l$ donc $\exists U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / f(U_2 \cap D) \subset [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Soit $O = U \cap U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\forall t \in O \cap D$,

$$l - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t) \leqslant l + \varepsilon$$

Ainsi, $g(t) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$ donc $g(O \cap D) \subset V$.

Corollaire Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$. On suppose que au voisinage de a, $|f(t) - l| \leqslant g(t)$, et $g(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$. Alors $f(t)$ tend vers l en a.

4.2 Fonctions monotones

4.2.1 Théorème 1 : majoration et limite

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.
(1) Si f est majorée, alors f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en b avec $l = \sup f(]a, b])$.
(2) Si f n'est pas majorée, alors $f(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

(1) Supposons f majorée, soit $l = \sup f([a, b[)$ et montrons que $f(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} l$. Soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(l)$, $\exists \varepsilon > 0 / [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$ donc $l - \varepsilon$ ne majore pas f donc $\exists c \in [a, b[/ f(c) > l - \varepsilon$. Soit $U = [c, +\infty[$, $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(b)$ et $\forall t \in U \cap [a, b[= [c, b[$, on a $l \geqslant f(t)$ car $l = \sup f$ et $f(t) \geqslant f(c)$ car $t > c$ donc

$$l \geqslant f(t) \geqslant f(c) > l - \varepsilon$$

Ainsi, $f(t) \in]l - \varepsilon, l] \subset [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset V$.

(2) Supposons que f n'est pas majorée. Montrons que $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} +\infty$, soit $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, alors $\exists M \in \mathbb{R} / [M, +\infty[\subset V$. f n'est pas majorée donc $\exists c \in]a, b] / f(c) > M$. Soit $U = [c, +\infty] \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(b)$ et pour $t \in U \cap]a, b] = [c, b[$, $f(t) \geqslant f(c) > M \Rightarrow f(t) \in V$.

Corollaire 1 Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante.

(1) Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\limits_{[a,b[} f$.

(2) Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} -\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le théorème 1 à $-f$.

Corollaire 2 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante.

(1) Si f est minorée, f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{]a,b]} f$.

(2) Si f n'est pas minorée, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le corollaire 1 à $g : \begin{array}{l} [-b, -a[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$.

Corollaire 3 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante.

(1) Si f est majorée, alors f admet en a une limite finie.

(2) Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le corollaire 2 à $-f$, ou bien appliquer le théorème à $g : \begin{array}{l}]-b, -a] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$.

4.2.2 Théorème 2 : inégalités des limites

> Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Soit $x_0 \in \operatorname{Int}(I)$, alors f admet en x_0 des limites à gauche et à droite finies $f\left(x_0^-\right)$ et $f\left(x_0^+\right)$. On a de plus
>
> $$f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right)$$
>
> f est continue en x_0 si et seulement si $f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right)$.

Un énoncé analogue existe pour les fonctions décroissantes.

Démonstration

- Soit $a \in I$ avec $a < x_0$, $g : \begin{array}{l} [a, x_0[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \end{array}$. g est croissante et majorée car $\forall t < x_0$, $f(t) \leqslant f(x_0)$ donc g admet une limite finie l^- en x_0. De plus, comme $f(x_0)$ majore g, $l^- = \sup g \leqslant f(x_0)$. Ainsi, f admet en x_0 une limite à gauche finie et $f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0)$.
- De même, f admet en x_0 une limite à droite finie et $f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right)$.
- $\Rightarrow$ Si f est continue en x_0, on sait que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ donc $f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right)$.

  $\Leftarrow$ Si $f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right)$, alors

  $$f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right) \Rightarrow f(x_0) = f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right)$$

  Ainsi, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc f est continue.

Remarques

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Si a est l'extrémité gauche réelle de I, qui est du type $[a, b)$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b > a$, alors f admet en a une limite finie à droite et $f(a) \leqslant f(a^+)$. f est continue en a si et seulement si $f(a^+) = f(a)$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ est l'extrémité réelle droite de I, I est donc du type $(b, a]$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b < a$, alors f admet en a une limite finie à gauche. f est continue en a si et seulement si $f(a^-) = f(a)$.

4.2.3 Théorème 3 : continuité et intervalles

> Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone. Alors f est continue si et seulement si $J = f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

$\Rightarrow$ Ce résultat est une application directe du théorème des valeurs intermédiaires.

$\Leftarrow$ On suppose par exemple f croissante, et on procède par contraposée : supposons que f n'est pas continue, et montrons que J ne peut pas être un intervalle. f n'est pas continue sur I donc il existe $x_0 \in I$ tel que f n'est pas continue en x_0.

– Si $x_0 \in \operatorname{Int} I$, on sait que d'après le théorème 2, f admet en x_0 des limites finies à droite et à gauche et, de plus :
$$f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0)^+$$
f n'est pas continue en x_0 donc $f\left(x_0^-\right) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f\left(x_0^+\right)$.
  - 5)($f\left(x_0^-\right) < f(x_0)$, soit $x \in I$, si $x < x_0$, alors $f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0^-\right)$. Si $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Ainsi $f\left(x_0^-\right), f(x_0) \in J$ mais $\left]f\left(x_0^-\right), f(x_0)\right[\not\subset I$ donc I n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}$, ce n'est pas un intervalle.
  - Si $f(x_0) < f\left(x_0^+\right)$, soit $x \in I$, si $x > x_0$, alors $f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0^+\right)$. Si $x \leqslant x_0$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ainsi $f\left(x_0^+\right), f(x_0) \in J$ mais $\left]f(x_0), f\left(x_0^+\right)\right[\not\subset I$ donc I n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}$, ce n'est pas un intervalle.

– Si x_0 est une extrémité réelle de I, alors on applique la remarque concernant le théorème 2 et on déduit par un raisonnement analogue que J ne peut être un intervalle.

4.2.4 Théorème 4 : forme des ensembles d'arrivée

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante.
(1) Si I est de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.
(2) Si I est de la forme $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$, alors $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$.
(3) Si I est de la forme $]a, b]$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)\right]$.
(4) Si I est de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$, alors $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$.

Des énoncés analogues existent dans le cas où f est strictement décroissante.

Démonstration

(1) – Soit $t \in [a, b]$, f est croissante donc $f(a) \leqslant f(t) \leqslant f(b)$ donc $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.
– On sait que $f([a, b])$ est un intervalle donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

(2) – Supposons que f est majorée. On sait alors que f admet en b une limite finie $l = \sup\limits_{[a,b[} f$. Montrons que $\forall t \in [a, b[$, on a $f(t) < l$.
  - Soit $t \in [a, b[$ et $s \in]t, b[$, $f(t) < f(s) \leqslant l$. De plus $\forall t \in [a, b[$, $f(t) \geqslant f(a)$ et $f(a) \leqslant f(t) < l$. Ainsi, $f([a, b[) \subset [f(a), l[$.
  - Soit $y \in [f(a), l[$, $y < l$ donc y ne majore pas f donc $\exists t \in [a, b[/ f(t) > y$. $f(b), f(t) \in f([a, b[)$ et on sait que $f([a, b[)$ est un intervalle donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $[f(t), f(b)] \subset f([a, b[)$ d'où $y \in f([a, b[)$.

– Supposons que f n'est pas majorée, on sait que $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$. Montrons que $f([a, b[) = [f(a), +\infty[$.
  - $\forall t \in [a, b[$, $f(a) \leqslant f(t)$ car f est croissante, donc $f([a, b[) \subset [f(a), +\infty[$.
  - Soit $y \in [f(a), +\infty[$. f n'est pas majorée donc $\exists t \in [a, b[$ tel que $f(t) > y$. Ainsi, $f(t) \in [f(a), y] \subset f([a, b[)$d'après le théorème des valeurs intermédiaires car $f(a), f(t) \in f([a, b[)$ et $f([a, b[)$ est un intervalle.

(3) – Supposons que f est minorée. On sait alors que f admet en a une limite finie $l = \inf\limits_{]a,b]} f$. $\forall t \in]a, b]$, on a $f(t) > l$.
  - Soit $t \in]a, b]$ et $s \in]a, t[$, $l \leqslant f(s) < f(t)$. De plus $\forall t \in]a, b]$, $f(t) \leqslant f(b)$ et $l < f(t) \leqslant f(b)$. Ainsi, $f(]a, b]) \subset]l, f(b)]$.
  - Soit $y \in]l, f(b)]$, $y > l$ donc y ne minore pas f donc $\exists t \in]a, b] / f(t) > y$. $f(b), f(t) \in f(]a, b])$ et on sait que $f(]a, b])$ est un intervalle donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $[f(t), f(b)] \subset f(]a, b])$ d'où $y \in f(]a, b])$.

- Supposons que f n'est pas minorée, on que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$. Montrons que $f(]a,b]) =]-\infty, f(b)]$.
  - $\forall t \in]a,b]$, $f(t) \leqslant f(b)$ car f est croissante, donc $f(]a,b]) \subset]-\infty, f(b)]$.
  - Soit $y \in]-\infty, f(b)]$. f n'est pas minorée donc $\exists t \in]a,b]$ tel que $f(t) < y$. Ainsi, $y \in [f(t), f(b)] \subset f(]a,b])$d'après le théorème des valeurs intermédiaires. car $f(t), f(b) \in f(]a,b])$ et $f(]a,b])$ est un intervalle.

(4) La démonstration de ce résultat se fait en envisageant les 4 cas où a et b sont tour à tour finis ou infinis. Comme absolument rien ne change dans le raisonnement, je vous laisse le soin de concevoir cette démonstration !

4.2.5 Théorème 5 dit de la bijection

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$, et

$$\tilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ t \mapsto f(t) \end{array} \quad \text{est bijective}$$

De plus, J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J, strictement monotone de même monotonie que f.

Démonstration f est strictement monotone donc injective donc $\tilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ t \mapsto f(t) \end{array}$ est surjective donc bijective de I dans J.

- f est continue strictement monotone sur un intervalle non trivial donc, d'après le théorème 4, J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.
- Supposons f strictement croissante, soient $u, v \in J$ avec $u < v$, $\tilde{f}^{-1}$ est injective donc $\tilde{f}^{-1}(u) \neq \tilde{f}^{-1}(v)$. Si jamais $\tilde{f}^{-1}(u) > \tilde{f}^{-1}(v)$, f étant strictement croissante,$f\left(f^{-1}(u)\right) > f\left(f^{-1}(v)\right)$, soit $u > v$ ce qui est impossible. Donc $\tilde{f}^{-1}$ est strictement croissante comme f.
- $\tilde{f}^{-1}$ est monotone sur l'intervalle J et $\tilde{f}^{-1}(J) = I$ est un intervalle. D'après le théorème 3, $\tilde{f}^{-1}$ est automatiquement continue.

Application : existence de la racine n-ième Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{array}$ est continue et strictement croissante. Or $f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}_+$. f induit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\exists! t \in \mathbb{R}_+ / t^n = x$. Ce réel t se note $\sqrt[n]{x}$. Le théorème de la bijection nous dit que $x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ est continue, bijective et strictement croissante et $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= g(\mathbb{R}_+) = \left[\sqrt[n]{0}, \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x}\right[$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.