TD22 - AL

Ex 1:

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$

Mq tout endomorphisme $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b\bar{z}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

Supp qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tq $f : z \mapsto az + b\bar{z}$

$$\begin{cases} f(1) = a + b & L_1 \\ f(i) = ai + ib & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) - if(i) = 2a & L_1 - iL_2 \\ f(1) + if(i) = 2b & L_1 + iL_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2} \end{cases}$$

Synthèse: On pose

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2} \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$

Mq $f(z) = az + b\bar{z}$

Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = x + iy$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= f(x) + f(iy) \\ &= xf(1) + yf(i) \end{aligned}$$

De plus
$$\begin{aligned} az + b\bar{z} &= \frac{f(1) - if(i)}{2}(x+iy) + \frac{f(1)+if(i)}{2}(x-iy) \\ &= \frac{f(1)}{2}x + \frac{f(i)}{2}y + \frac{f(1)}{2}x + \frac{f(i)}{2}y \\ &= xf(1) + yf(i) \end{aligned}$$

Réciproquement :

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto az + b\bar{z} \end{array}$

Mq f est $\mathbb{R}$ linéaire

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda z + z') = a\ (\lambda z + z') + b\ (\overline{\lambda z + z'})$$

$$\overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} a(\lambda z + z') + b\ (\lambda \bar{z} + \bar{z}')$$

$$= \lambda(az + b\bar{z}) + (az' + b\bar{z}')$$

$$= \lambda f(z) + f(z')$$

CCL : $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b\bar{z} \end{array},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

2) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b\bar{z} \end{array}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tq f bijective

On a : $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

f bij $\iff (f(1), f(i))$ base de $\mathbb{C}$

$\iff (a+b,\ ai - ib)$ base de $\mathbb{C}$

$\iff \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_a + y_b \\ x_a - x_b \end{pmatrix}$ non colinéaires

$\iff (x_a + x_b)(x_a - x_b) - (y_a + y_b)(-y_a + y_b) \neq 0$

$\iff x_a^2 - x_b^2 + y_a^2 - y_b^2 \neq 0$

$\iff |a^2| - |b|^2 \neq 0$

$\iff |a| \neq |b|$

Ex 2:

- Soit $x \in f(\ker(g\circ f))$

Par hyp il existe $t \in \ker(g\circ f)$ tq $x = f(t)$

donc $x \in \operatorname{Im} f$

$g(x) = g(f(t)) = g\circ f(t) = 0$

Donc $x \in \ker g$

Donc $f(\ker(g\circ f)) \subset \ker g \cap \operatorname{Im} f$

- Soit $x \in \ker g \cap \operatorname{Im} f$

Mq $\ker g \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker(g\circ f))$

Par hyp: $\begin{cases} g(y) = 0 \\ \text{il existe } x \in E \text{ tq } f(x) = y \end{cases}$

On a: $g(f(x)) = 0$

$g\circ f(x) = 0$

donc $x \in \ker(g\circ f)$

Donc $y \in f(\ker(g\circ f))$

Donc $\ker g \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker(g\circ f))$

Donc $\ker g \cap \operatorname{Im} f = f(\ker(g\circ f))$

Ex 3:

1) $f^{-1}(F) = \{x \in E,\ f(x) \in F'\}$

$f(f^{-1}(F')) \subset F' \cap \operatorname{Im} f$

Soit $y \in F' \cap \operatorname{Im} f$

Mq $y \in f(f^{-1}(F'))$

Par def: il existe $x \in E$ tq $y = f(x)$

Comme $y \in F'$ $f(x) \in F'$, alors $x \in f^{-1}(F')$

donc $y \in f(f^{-1}(F'))$

CCl: $f(f^{-1}(F')) = F' \cap \operatorname{Im} f$

. Soit $x \in E$

$x \in f^{-1}(f(B)) \iff f(x) \in f(B)$ $\qquad f(B) = \{ f(b),\ b \in B \}$

$\iff \exists\, b \in B$ tq $f(x) = f(b)$ / f lin

$\iff \exists\, b \in B \quad x - b \in \operatorname{Ker} f$

$\iff x \in B + \operatorname{Ker} f$

Ex4:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 - 4f + 3Id_E = 0$

Mq $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$

. Mq $\operatorname{Ker}(f - Id_E) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id_E) \subset \{0\}$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - Id_E) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$

$$\begin{cases} (f - Id_E)(x) = f(x) - x) = 0 \\ (f - 3Id_E)(x) = f(x) - 3x = 0 \end{cases}$$

$f(x) - x = f(x) - 3x$

$2x = 0$

donc $x = 0$

donc $\operatorname{Ker}(f - Id_E) \cap \operatorname{Ker}(f - 3Id_E) = \{0\}$

Donc $\operatorname{Ker}(f - Id_E) + \operatorname{Ker}(f - 3Id_E) = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$

. Mq $E \subset \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$

Soit $x \in E$

$x = x_1 + x_2$

$(f - Id_E)(x) = (f - Id_E)(x_1 + x_2) = (f - Id_E)(x_2) = 2x_2$

$(f - 3Id_E)(x) = (f - 3Id_E)(x_1 + x_2) = (f - 3Id_E)(x_1) = -2x_1$

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}(f - 3Id_E)(x) \\ x_2 = \frac{1}{2}(f - Id_E)(x) \end{cases}$$

Mq $\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E) \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3Id_E) \\ x_1 + x_2 = x \end{cases}$

$$\cdot\ (f - Id_E)(x_1) = (f - Id_E)\left(-\frac{1}{2}(f - 3Id_E)(x)\right)$$
$$= (f - Id_E)\left(-\frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2}x\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(f^2(x) - 4f(x) + 3x\right)$$
$$= 0$$

$$f(x_1) - x_1 = f(x) - f(x_2) - x + x_2$$
$$= f(x) - x - 2x_2$$
$$= 0$$

donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$

$$\cdot\ (f - 3Id_E)(x) = (f - 3Id_E)\left(\frac{1}{2}(f - Id_E)(x)\right)$$
$$= (f - 3Id_E)\left(\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f^2(x) - 4f(x) + 3x\right)$$
$$= 0$$

donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$

$$\cdot\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\left(-(f - 3Id_E)(x) + (f - Id_E)(x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-f(x) + 3x + f(x) - x\right)$$
$$= x$$

Donc $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$

2) Soient F et G tq $F \oplus G$

Mq il existe un unique endomorphisme g de E tq $F = \mathrm{Ker}(g - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(g - 3Id_E)$

Mettre en relation avec symétrie / projection

Ex 6 :

1) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ⊛

Mq $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{K}}$

$\lambda_0 Id_E + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$

On compose par f

$\lambda_0 f + \lambda_1 f^2 + \dots + \cancel{\lambda_{n-1} f^n} = 0$

On compose ⊛ par f^{n-1} permet de tuer tout le monde sauf le 1er

On obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{n-1+k} = 0$ (I)

Or $f^n = 0$

donc $f^{n+1} = 0$ ...

donc $\forall p \geq n \quad f^p = 0$

Ainsi on a : $\underbrace{\lambda_0}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{f^{n-1}}_{\in \mathcal{L}(E)} = 0$

Or $f^{n-1} \neq 0$

donc $\lambda_0 = 0$

On a donc $\lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$

On compose par f^{n-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$

et ainsi de suite

Rédaction 1: Récurrence finie et fort

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $H(k)$: "$\lambda_k = 0$"

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

I: ici (I)

H: Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tq $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Mq $\lambda_{k+1} = 0$

On a (*) $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i f^k = 0$

donc $\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i = 0$

On compose par $f^{\overbrace{n-k-2}^{\in \mathbb{N}}}$ pour obtenir $\lambda_{k+1} f^{n-1} = 0$

puis $\lambda_{k+1} = 0$

Rédaction 2:

Supp par l'absurde qu'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lambda_{k_0} \neq 0$

Considérons : $P = \mathrm{Min}\{\underbrace{k \in [\![0, n-1]\!] \quad \lambda_k \neq 0}_{\text{partie finie non vide}}\}$

(*) devient $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^k = 0$

On compose par f^{n-1-p} pour obtenir $\lambda_p f^{n-1} = 0$

puis $\lambda_p = 0$ ABSURDE

Ccl: $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\lambda_k = 0$

2) $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe $x_0 \in E$ tq $f^{n-1}(x_0) \neq 0$

Mq $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ libre

A Finir comme $\boxed{Q1}$

Ex 7 :

1) On pose $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) : f \circ g = g \circ f\}$

Mq $\mathcal{C}(f)$ est un $\mathbb{K}$ev

Mq $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ 自己做

Rq : $Id_E \in \mathcal{C}(f)$

$f \in \mathcal{C}(f)$

$f^2 \in \mathcal{C}(f)$

$\forall k \in \mathbb{N} \ f^k \in \mathcal{C}(f)$

$P(f) \in \mathcal{C}(f)$

$\overset{\shortparallel}{\sum_{k=0}^{d} a_k f^k}$

3) On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tq $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Mq $\forall g \in \mathcal{C}(f)$, $\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ $\quad g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$

S'il $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

On a : $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

Les a_k sont donc les coordonnées de $g(x_0)$ dans $\mathcal{B}$

Comme $\mathcal{B}$ est la base de E et $g(x_0) \in E$, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$

tq $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

Mq $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$

$g \circ f^p = f^p \circ g$

On a : $g(f^p(x_0)) = f^p(g(x_0)) = f^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right)$

$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)\left(f^p(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+1/k+p}(x_0)$

Comme f^p est linéaire, $f^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+p}(x_0)$

Donc g et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur une base

donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$