TD17 – Structures

Ex 1 :

Soit G un ensemble muni d'une loi $*$ associative tel que :

- il existe un élément neutre à droite

  càd $\exists e \in G : \forall g \in G, g * e = g$

- tout élément de G admet un inverse à droite par rapport à g

  càd $\forall g \in G, \exists g' \in G : g * g' = e$

Mq G est un groupe

Soit $g \in G$

Par hyp : il existe $g' \in G$ tq $g * g' = e$ (un inverse g')

Mq $g' * g = e$

$(g' * g)$ a un inverse y à droite tq $(g' * g) * y = e$

$(g' * g) * y = e$

d'où $g * (g' * g) * y = g * e = g$

càd $\big(g * (g' * g)\big) * y = g$

càd $\big(\underbrace{(g * g')}_{e} * g\big) * y = g$

càd $(e * g) * y = g$

donc $(g' * e) * g * y = g' * g$

$g' * g * y = g' * g$

càd $\boxed{e = g' * g}$

→ Mq il existe un élément neutre à gauche

$e * g = (g' * g) * g = g * \underbrace{(g' * g)}_{e} = g * e = g$

Soit $g \in G$

il existe $g' \in G$ tq $g * g' = e$

Mq $g' * g = e$

$g' * g * g' = g' * e = g'$

Il existe $g'' \in G$ tq $g' * g'' = e$

$g' * g * g' * g'' = g' * g''$

$g' * g * e = e$ puis $g' * g = e$

Mq $e * g = g$

Il existe $g' \in G$ tq $g * g' = \underset{= e}{g' * g}$

On a : $e * g = (g * g') * g$

$= g * (g' * g)$

$= g * e$

$= g$

Ex2:

1) Soit G un groupe tel que : $\forall (x,y) \in G^2, (x*y)^2 = x^2 * y^2$

Comme G est un groupe, $*$ est une lci associative

Mq G est abélien càd $*$ est commutative

Soit $(x,y) \in G \times G$ tq $x \neq 0$ et $y \neq 0$

On a : $(x*y)^2 = x^2 * y^2$ et $(y*x)^2 = y^2 * x^2$

Mq $(x*y)^2 = (y*x)^2 = x^2 * y^2 = y^2 * x^2$

$(x*y)^2 = (x*x)*(y*y)$ càd $x*x*y*y = x*y*x*y$
$= (x*y)*(x*y)$

$y*x*y = x*y*y$

$y*x = x*y$

donc G est un groupe abélien

2) Soit $(x,y) \in G^2$

⚠ mettre $*$

$(xy)^2 = xyxy = e$

$xyyx = xy^2x = e$

donc $xyxy = xyyx$

càd $x^2yxy = x^2yyx$

$yxy = yyx$

d'où $y^2xy = y^2yx$

donc $xy = yx$

On a alors : $(xy)^2 = (yx)^2 = e$

donc G est commutatif.

Ex $(\{-1, 1\}, \times)$

Ex 3 : Soit H et K deux sous-groupes de G

$\rightarrow$ Supp $H \subset K$ alors $H \cup K = K$

Or K est un sous-groupe de G

Donc $H \cup K$ est un groupe

De même si $K \subset H$, alors $H \cup K$ est un groupe.

$\rightarrow$ Supp $H \cup K$ est un groupe et $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$

Soit $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$

Comme $H \cup K$ est un groupe de lci $*$, on a $x * y \in H \cup K$

* Si $x * y \in H$ alors x possède un inverse x^{-1} dans H (aussi G)

  donc $x^{-1} * (x * y) \in H$ car H est stable par $*$

  Par associativité de $*$, on a : $(x^{-1} * x) * y \in H$

  donc $y \in H$ Absurde

* De même si $x * y \in K$ alors $x \in K$ Absurde

Donc si $H \cup K$ est un groupe, alors on a $H \subset K$ ou $K \subset H$

Ex3:

1) Pour tout $g \in G$, on pose : $\phi_g : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto gxg^{-1} \end{array}$

Mq ϕ_g un automorphisme de G

Soit $x \in G$

Comme $(G, \cdot)$ un groupe, G est stable par $\cdot$ et tout élément de G possède un inverse.

Donc $g^{-1} \in G$ puis $gxg^{-1} \in G$

① Donc ϕ_g est une application de G dans G

② Mq ϕ_g est un morphisme de groupe

Soit $(x, x') \in G^2$

Mq $\phi_g(x.x') = \phi_g(x) . \phi_g(x')$

$\phi_g(x.x') = gxx'g^{-1}$

et $\phi_g(x) . \phi_g(x') = gxg^{-1} . gx'g^{-1}$

$= gxx'g^{-1}$

$= \phi_g(x.x')$

③ Mq ϕ_g bijectif

Soit $y \in G$ et $x \in G$

$\phi_g(x) = y \iff gxg^{-1} = y$

$\iff g^{-1}gxg^{-1}g = g^{-1}yg$

$\iff exe = g^{-1}yg$

$\iff x = g^{-1}yg$

Ainsi y possède un unique antécédent par ϕ_g qui est $x = g^{-1}yg$

2) $\text{Int}\, G = \{ \phi_g ,\ g \in G \}$

Mq $\text{Int}(G)$ est un sg de $(\text{Aut}(G), \cdot)$

* Par def $\text{Int}(G) \subset \text{Aut}(G)$ car d'après ① pour tout $g \in G$, ϕ_g est un automorphisme de G

* $Id_G = \phi_g \in \text{Int}(G)$

Soit $(g, g') \in G^2$ et $x \in G$

$$\begin{aligned}
\phi_g \circ \phi_{g'}(x) &= \phi_g(\phi_{g'}(x)) \\
&= \phi_g(g' x g'^{-1}) \\
&= g g' x g'^{-1} g^{-1} \\
&= g g' x (g' g)^{-1} \\
&= \phi_{gg'}(x)
\end{aligned}$$

donc $\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'}$ et $gg' \in G$

$\phi_{gg'} \in \text{Int}(G)$

donc $\phi_g \phi_{g'} \in \text{Int}(G)$

Soit $g \in G$ Mq $(\phi_g)^{-1} \in \text{Int}(G)$

Soit $x \in G$

$$\begin{aligned}
(\phi_g)^{-1}(x) &= g^{-1} x g \quad \text{d'après ①} \\
&= g^{-1} x (g^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Donc $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$

Ccl : $\text{Int}(G)$ est un sg de $\text{Aut}(G)$

Ex6:

Soit G non vide et $*$ une lci associative

$\forall (a,b) \in G^2 \ \exists (x,y) \in G^2 : \begin{cases} a * x = b \\ y * a = b \end{cases}$

Comme $G \neq \emptyset$, il existe $(x,g) \in G^2$ tq $\begin{cases} g * x = g \\ y * g = g \end{cases}$

Mq $\forall a \in G \ \begin{cases} a * x = a \\ y * a = a \end{cases}$

Soit $a \in G$

Comme $(a,g) \in G^2$, il existe $A \in G$ tq $a = A * g$

D'où $a * x = (A * g) * x = A * (g * x) = A * g = a$

De même $\forall a \in G \ \ y * a = a$

En particulier : $y * x = x = y$

Ainsi $\forall a \in G \ \ a * x = x * a = a$

Soit $a \in G$

Comme $x \in G$, il existe $(b,c) \in G^2$ tq $\begin{cases} a * b = x \\ c * a = x \end{cases}$

On a : $c * a * b = c * (a * b) = c * x = c$

$\quad\quad || $

$(c * a) * b = x * b = b$

Donc $c = b$, a possède donc un inverse

Ex 7:

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B \subset A$

Mq B est un sous-anneau de A $\Leftrightarrow \begin{cases} -1_A \in B & ① \\ \forall (a,b) \in B \begin{cases} a+b \in B \\ ab \in B \end{cases} & ② \end{cases}$

Supp B un sous-anneaux de A
Mq ① et ②

On a déjà par def d'un sous-anneaux

On a ②

De plus : $1_A = 1_B \in B$

et comme B stable par $-$, $-1_A \in B$

→ Supp ① et ②

Mq B est un sous-anneau de A

On a déjà $B \subset A$
B stable par + et ×

Mq B stable par + et ×

Soit $b \in B$ Mq $-b \in B$

On a : $-1_A \times b \in B$ car $-1_A \in B$

Or $-1_A \times b = -(1_A \times b)$
$= -b$

En particulier $1_A = -(-1_A) \in B$

Ex 8:

1) Mq $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$

$\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$

Mq $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Pour $a = 1$ et $b = 0$, $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Q}^4$ tq $\quad x = a_1 + b_1\sqrt{2}$
$y = a_2 + b_2\sqrt{2}$

$$x - y = \underbrace{a_1 - a_2}_{\in \mathbb{Q}} + \sqrt{2}\,(\underbrace{b_1 - b_2}_{\in \mathbb{Q}})$$

$$xy = a_1a_2 + 2b_1b_2 + \sqrt{2}\,(b_1a_2 + b_2a_1)$$

Donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est stable par $+$, $-$ et $\times$

Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$

Mq $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ $x = a + b\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{b}{a^2 - 2b^2}}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

⚠ $a - b\sqrt{2} \neq 0$

Supp par l'absurde $a - b\sqrt{2} = 0$ alors

→ Soit $b = 0$ puis $a = 0$ et $x = 0$ ce qui est exclu

→ Soit $b \neq 0$ puis $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux

Donc $a - b\sqrt{2} \neq 0$

2) Mq $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$

$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$

$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{R}$

Donc $\mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}] \subset \mathbb{R}$

$1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ avec $a = 1$ et $(b,c,d) = (0,0,0)$

→ stabilité par $+$, $-$ et $\times$

On fait $x - y = \dots \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

$x \times y = \dots \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

→ Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}] \setminus \{0\}$

Mq $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

Par hyp $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2})}$$

$$= \frac{a + b\sqrt{2} - \sqrt{3}(c + d\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}))^2} \leftarrow \text{Mq} \neq 0$$

Supp $a + b\sqrt{2} - \sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) = 0$

→ Soit $c + d\sqrt{2} = 0$ alors $a + b\sqrt{2} = 0$

Soit $b = 0$ alors $a = 0$ puis $x = 0$ Absurde

Soit $b \neq 0$ alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ Absurde

donc $\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) \neq 0$

puis $\sqrt{3} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

donc il existe $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$ tq $\sqrt{3} = A + B\sqrt{2}$

donc $3 = \underbrace{A^2}_{\in \mathbb{Q}} + 2\sqrt{2}AB + \underbrace{2B^2}_{\in \mathbb{Q}}$

donc $2\sqrt{2}AB \in \mathbb{Q}$

Si $AB \neq 0$ Absurde

Si $AB = 0$, soit $A = 0$ et $B\sqrt{2} = 0$ Absurde

soit $B = 0$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ Absurde

Donc $a+b\sqrt{2}-\sqrt{3}(c-d\sqrt{2})\neq 0$

Donc $\frac{1}{x} = \underbrace{\alpha+\sqrt{3}\beta}_{\in \mathbb{Q}[\sqrt{2};\sqrt{3}]}$ $\alpha =$