ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ÉCOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2016 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - C - (ULRC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

⋆ ⋆ ⋆

On note

— $\mathbb{R}_N[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré $\leqslant N$,

— $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels,

— I_n son élément unité,

— exp l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

— $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction f, pour $k \geqslant 1$, lorsque I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est k-fois dérivable sur I ; par convention $f^{(0)} = f$,

— $C^m([0,R], \mathbb{R})$, pour $m \geqslant 1$, l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0,T]$, de classe C^m sur l'intervalle ouvert $]0,T[$, admettant des dérivées à droite en 0, et à gauche en T, jusqu'à l'ordre m et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur $[0,T]$ pour $k = 1, ..., m$,

— $C^\infty([0,T], \mathbb{R}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m([0,T], \mathbb{R})$,

— $\binom{n}{k}$ les coefficients binômiaux : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, ..., n\}$.

Les relations entre les 5 parties sont :

$$1 \Rightarrow 2 \qquad 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5.$$

Ainsi, la partie 1 est utile pour résoudre la partie 2 mais les parties $(3,4,5)$ sont indépendantes des parties $(1,2)$, etc.

1 Équation différentielle scalaire

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$, $a_0, ..., a_{n-1}, c_0, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Proposition 1 *Il existe $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ tel que la solution f du système*

$$(\Sigma) : \begin{cases} f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 f(t) = u(t), & \forall t \in [0,T], \\ f^{(k)}(0) = c_k \text{ pour } k = 0, ..., n-1, \end{cases}$$

vérifie $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$.

1. Justifier, pour tout $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$, l'existence et l'unicité de $f \in C^n([0,T], \mathbb{R})$ vérifiant (Σ).
2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\left| \begin{array}{llll} L : & \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ & P & \mapsto & \left(P(0), ..., P^{(n-1)}(0), P(T), ..., P^{(n-1)}(T)\right) \end{array} \right. .$$

3. Montrer qu'il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = c_k$ et $f^{(k)}(T) = 0$ pour $k = 0, ..., n-1$.
4. Montrer la Proposition 1.
5. La fonction u évoquée dans la Proposition 1 est-elle unique ?

2 Système différentiel

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Le but de cette partie est de montrer l'équivalence entre les énoncés suivants.

- (E_1) : $\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- (E_2) : Pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ tel que la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + u(t)\,b, \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{2,1}$$

  vérifie $y(T) = 0$.

1. Justifier, pour tout $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ et tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, l'existence et l'unicité de $y \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ vérifiant (2.1).
2. Exprimer $y(T)$ en fonction de A, b, u et y^0. En déduire une reformulation de l'égalité $y(T) = 0$ de la forme $y^0 = \Phi(A, b, u)$.
3. Montrer que, pour tout $k \geqslant n$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.
4. Le but de cette question est de démontrer $(E_2) \Rightarrow (E_1)$. On suppose que $\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right)$ **n'est pas** une base de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier l'existence de $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\left\langle z, A^k b\right\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Que dire de $\langle z, \exp(At)\,b\rangle$ pour $t \in \mathbb{R}$?
   (c) Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left\langle z, y^0\right\rangle \neq 0$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ pour laquelle la solution de (2.1) vérifie $y(T) = 0$.
   (d) Conclure.

   Juqu'à la fin de la partie 2, notre but est de démontrer $(E_1) \Rightarrow (E_2)$. On suppose donc que (E_1) est vérifié. On note $a_0, ..., a_{n-1}$ les coefficients du polynôme caractéristique de A :

$$\det(XI_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

   et on définit une famille $(v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par récurrence descendante, de la façon suivante

$$\begin{cases} v_n := b \\ v_k := Av_{k+1} + a_k v_n \text{ pour } k = n-1,\ n-2, ..., 1. \end{cases}$$

5. Exprimer v_k en fonction de A et b pour $k = 1, ..., n$.
6. Montrer que $A^j b \in \operatorname{Vect}\{v_1, ..., v_n\}$ pour $j = 0, ..., n-1$. En déduire que $(v_1, ..., v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
7. Montrer que $Av_1 = -a_0 v_n$.
8. En déduire l'existence de $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\widetilde{A} := U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } U^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Soit $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^0([0,T], \mathbb{R})$ et y la solution de (2.1).
   (a) Quel problème de Cauchy la fonction

$$\left| \begin{array}{llll} F : & [0,T] & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & U^{-1}y(t) \end{array} \right.$$

   résout-elle ?
   (b) Notons $f(t)$ la première composante de $F(t)$. Quel problème de Cauchy la fonction f résout-elle ?
10. Conclure.