Limites, équivalents et suites

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique.

1. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors elle est constante.
2. Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
3. Que dire si f est monotone sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Soit $f : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$
En quels points la fonction f admet-elle une limite ?

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble de définition, un équivalent et la limite en zéro des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{\tan x}}$.
2. $\ln(1+e^x)$
3. $\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi(1+x)}{2}\right)}{x-\sqrt{x^2+2x}}$
4. $\dfrac{\tan^2 x}{1+\dfrac{1}{x^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x}}$
6. $\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}$
7. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 4 : Déterminer la limite en $1/2$ de $(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.

Exercice 5 :
Déterminer la limite éventuelle en 1 de

1. $\dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)\tan(2\pi x)}$.
2. $\dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{3x-1}}$

Exercice 6 : On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^3$.

1. Montrer que la suite u est positive et croissante.
2. En déduire la limite de u.
3. Soit $v = \left(\dfrac{\ln u_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Montrer que pour tout entier n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n^2}\right)$. En déduire la monotonie de la suite v.
   (b) Prouver que pour tout couple d'entiers (n,k),
   $$v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{3^{n+k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)$$
   puis que pour tout couple d'entiers (n,p), $v_{n+p+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2\times 3^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n^2}\right)$
   (c) En déduire que la suite v converge. On notera ℓ sa limite.
4. Prouver que pour tout entier n, $\dfrac{e^{\ell 3^n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u_n^2}}} \leq u_n \leq e^{\ell 3^n}$.
5. En déduire un équivalent de u_n.