3 Intégrales généralisées

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »
Henri Poincaré (1902)

Plan de cours

I Intégration sur un segment (rappels) 2
II Intégration sur un intervalle quelconque 3
III Intégrale impropre d'une fonction à valeurs positives 9
IV Fonctions intégrables 11
V Intégration des relations de comparaison 12
VI Passage à la limite sous l'intégrale 14

♦ Quelques perspectives historiques

La mesure de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface est un problème central et récurrent chez les Grecs. Mesurer, c'est avant tout comparer des longueurs en calculant leurs rapports. Des méthodes d'exhaustion sont mises en place à cette époque et permettent de répondre avec succès à certains problèmes de recherche d'aires au moyen d'encadrements successifs. Ces travaux sont repris et développés plus tard par les Arabes puis par d'autres mathématiciens comme Fermat ou Laplace. On peut dire qu'à ce stade, l'intégration, ou plutôt les techniques de quadrature et de rectification, sont avant tout une affaire de géomètres ! Newton et Leibniz mettent en place, au cours du XVIIe siècle, les fondements du calcul différentiel et intégral à travers l'étude des variations infinitésimales de quantités mathématiques. Ils sont les premiers à faire le lien entre dérivation et intégration. C'est d'ailleurs chez Leibniz que l'on voit apparaître pour la première fois la notation $x = \int \mathrm{d}x$.

Bernhard Riemann

Ces théories ne sont pourtant que des colosses aux pieds d'argile : elles reposent sur des notions mal définies et encore mal comprises comme les nombres ou les fonctions. Mais cela ne nuit guère à l'expansion du calcul infinitésimal au cours des XVIIe et XVIIIe siècles. Les mathématiciens échouent dans un premier temps à définir la véritable nature des infiniment petits qu'ils manipulent mais ils cherchent cependant à s'extraire petit à petit de la géométrie comme base de ce nouveau calcul. Cauchy s'interroge dans son « *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique* » (1823) sur l'existence d'une intégrale avant de s'intéresser à ses diverses propriétés. Il y définit sa propre intégrale dans une version relativement proche de celle étudiée en MPSI. C'est également lui qui propose une première démonstration rigoureuse du théorème fondamental du calcul intégral. Que de chemin parcouru !

Riemann développe sa propre théorie de l'intégration qu'il présente en 1854 pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen. Elle présente l'avantage de s'étendre à toute fonction continue, continue par morceaux et plus généralement à toute fonction dite réglée. Échappe cependant à cette théorie toute une batterie de fonctions (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ par exemple) et la démonstration de certains résultats de convergence s'avère très technique. Les notions de mesure et de tribus voient peu à peu le jour. Les idées novatrices de Lebesgue, présentées au cours de sa thèse en 1902, conduisent à la naissance d'une nouvelle théorie de l'intégration qui porte désormais son nom. Mais l'histoire ne s'arrête pas là... De nouvelles intégrales font tour à tour leur apparition. La recherche est encore active en théorie de l'intégration !

Henri Lebesgue

I | Intégration sur un segment (rappels)

Définition 3.1 : Fonctions continues par morceaux (segment)

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si pour une certaine subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$,

- $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$
- $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}

La subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ est dite adaptée à f.

Exemple

Les fonctions en escalier et les fonctions continues sont continues par morceaux.

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 3.2 : Fonctions continues par morceaux (intervalle quelconque)

Une fonction $f : I\to\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux.

On note en général $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$ ou $\mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I. C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{K}^I$. En revanche, il n'est pas stable par composition comme l'illustre le contre-exemple suivant.

Exemple

Représentation des fonctions f et $g\circ f$ où f et g sont définies par $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$ et $g(x)=1$ si $x>0$, $g(x)=-1$ si $x<0$ et $g(0)=0$.

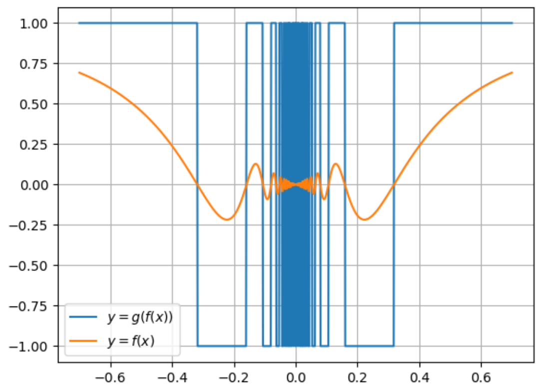
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if x==0:
        return 0
    return np.sin(1/x)*x

def g(x):
    return 1*(x>0)-1*(x<0)

X = np.linspace(-0.7, 0.7, 1000)
Y = [f(x) for x in X]
Y2 = [g(f(x)) for x in X]

plt.plot(X, Y2)
plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.show()
```



Nous ne reviendrons pas ici sur la construction de l'intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux. Les propriétés élémentaires (linéarité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles...) seront rappelées par la suite. Rappelons néanmoins quelques grands résultats du cours de première année.

Théorème 3.3 : Théorème fondamental du calcul intégral

- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I et $a\in I$, $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
- Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
  De plus, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

En revanche, toute fonction continue par morceaux sur un intervalle n'admet pas nécessairement de primitive.

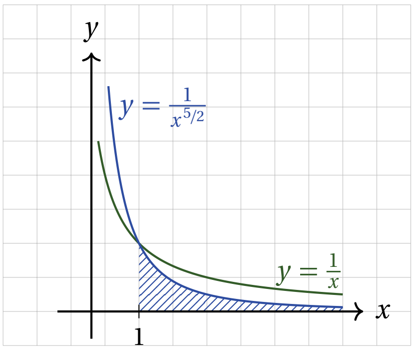
Théorème 3.4 : Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue (par morceaux) sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,alors,

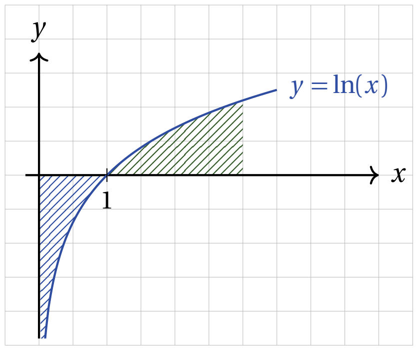
$$\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

II | Intégration sur un intervalle quelconque

Comme le lecteur a pu le constater, l'intégrale de Riemann est intimement liée à la notion d'aire. Ayant toujours pour objectif de « mesurer » l'aire d'un domaine délimité par l'axe des abscisses et une courbe donnée, nous pouvons nous interroger sur la possibilité d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux et ses propriétés au cas d'un intervalle non borné. Bien que le domaine ne soit pas borné, l'aire de ce domaine n'est pas nécessairement infinie, comme on le constate avec le premier des deux exemples suivants.



Fonction bornée sur un intervalle non borné



Fonction non bornée sur un intervalle borné

Quel que soit $a \geqslant 1$,

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|a| \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty \qquad \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/2}} = \left[\frac{x^{-3/2}}{-3/2}\right]_1^a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3a\sqrt{a}} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$

On pourra donc poser $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/2}} = \frac{2}{3}$.

De même, il est possible de donner un sens à l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné. Quel que soit $a \in]0,1]$,

$$\int_a^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)-x]_a^1 = a - a\ln(a) - 1 \xrightarrow[a\to0^+]{} -1$$

On peut ainsi donner un sens géométrique à $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ alors que $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ et poser $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

A – Généralités

Toutes les fonctions considérées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Définition sur un intervalle du type $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 3.5 : Intégrale impropre

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b[,\mathbb{K})$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que l'intégrale impropre converge (en b) et on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres :

- l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$) ;
- l'intégrale de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).

On étend aisément la notion d'intégrale impropre au cas $]a,b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

Lorsqu'on connaît une primitive de f sur I, il suffit de calculer l'intégrale sur un segment puis de passer à la limite pour savoir si l'intégrale converge ou diverge, mais cela ne fonctionne pas toujours. On notera l'analogie avec l'étude des séries $\sum k$, $\sum z^k$.

Proposition 3.6 : Intégrale faussement impropre

Si une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$ est continue (par morceaux) sur $[a,b[$ et prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$ où l'on a noté $\tilde{f}$ le prolongement de f.

On pourra alors qualifier une telle intégrale de « faussement » impropre.

Exemple

> L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge car $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0.

2 – Intégrales de référence

Voici de premiers exemples d'intégrales impropres convergentes. La nature des quatre intégrales suivantes est à connaître sur le bout des doigts ; ces intégrales sont qualifiées d'« intégrales de référence ».

❶ Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$:

L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

❷ Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$:

Le même calcul conduit à la propriété suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

❸ Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$:

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ donc il y a un problème en 0.

Comme $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1 \xrightarrow[x\to0^+]{} -1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

❹ Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha > 0$:

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha}$$

Donc pour $\alpha > 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3 – Définition sur un intervalle du type $]a,b[$

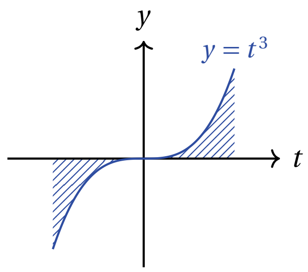
Définition 3.7 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent quel que soit $c \in]a,b[$.

Il s'agit donc justifier l'existence de limites finies $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^c f$ et $\displaystyle\lim_{y\to b^-}\int_c^y f$ pour $c\in]a,b[$ quelconque.

Attention au passage à la limite ! Pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, il ne suffit pas de calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f$.

Exemple



Par imparité de $t \mapsto t^3$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t = 0 \text{ donc } \int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Alors que $\displaystyle\int_0^x t^3\,\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ne converge pour aucune valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$.

B – Propriétés

Par commodité, nous présenterons les propriétés de l'intégrale pour des intervalles de la forme $[a,b[$.

Proposition 3.8 : Linéarité de l'intégrale

Soient $f,g\in\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b[,\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+g)$ converge et :

$$\int_a^b(\lambda f+g) = \lambda\int_a^b f + \int_a^b g$$

Démonstration

Il suffit d'intégrer sur le segment $[a,x]$ avec $x\in[a,b[$ avant de passer à la limite :

$$\int_a^x(\lambda f+g) = \lambda\int_a^x f + \int_a^x g \xrightarrow[x\to b^-]{} \lambda\int_a^b f + \int_a^b g \in\mathbb{R}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+g)$ converge et $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+g) = \lambda\int_a^b f + \int_a^b g$. ■

Il faut d'abord s'assurer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge sinon l'écriture $\displaystyle\int_a^b f$ n'a pas de sens.

Exemple

Justifions la convergence et calculons $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-8t+15}$.

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{t^2-8t+15}$ est continue sur $[6,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{3,5\} \qquad \frac{1}{t^2-8t+15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-3}$$

En intégrant, on obtient alors : $\displaystyle\int_6^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-8t+15} = \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln(3)$.

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-8t+15} = \frac{1}{2}\ln(3)$. Pourtant, $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-5}$ et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-3}$ divergent !

On retiendra que :

- si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ diverge ;
- si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors on ne peut rien dire.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Établir l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$.

Proposition 3.9

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)$ convergent ssi $\displaystyle\int_I f$ converge et alors :

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i\int_I \mathrm{Im}(f)$$

Proposition 3.10 : Relation de Chasles

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux telle que $\int_{]a,b[} f$ converge. Alors, pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Dans le cas d'une fonction positive, pour $a<b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ lorsque l'intégrale converge.

Proposition 3.11

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a,b[$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

$$\int_a^b f = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ est identiquement nulle sur } [a,b[\quad\Longleftrightarrow\quad \forall t\in[a,b[,\quad f(t)=0$$

Attention, ces deux hypothèses sont nécessaires ! L'intégrale d'une fonction continue peut être nulle sans que la fonction soit nulle. De même, l'intégrale d'une fonction positive présentant des discontinuités peut être nulle sans que la fonction soit identiquement nulle.

C – Divergence grossière

D'après le chapitre sur les séries numériques, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De même, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ implique-t-elle que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$? La réponse est NON !

Théorème 3.12 : Divergence grossière à l'infini

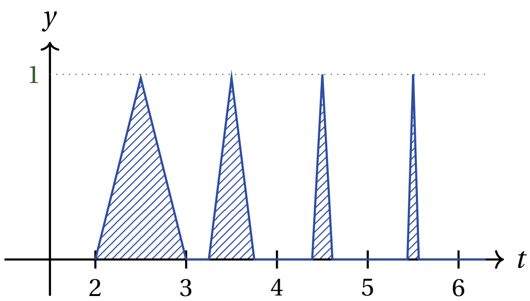
Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas. En effet, l'intégrale peut converger sans que f admette une limite en $+\infty$.

Exemple

Considérons une fonction « triangulaire par morceaux » dont les triangles sont d'aires $1/n^2$, de hauteur 1, centrés sur le milieu du segment $[n, n+1]$.



On définit plus précisément une fonction *positive* f sur $[2,+\infty[$ par morceaux en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $x \in [n, n+1[$,

$$f(x) = \begin{cases} n^2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)+1 \text{ si } x \in \left[n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n^2}, n+\dfrac{1}{2}\right] \\ -n^2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)-1 \text{ si } x \in \left[n+\dfrac{1}{2}, n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n^2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \geqslant 2,\quad \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{\lfloor x\rfloor+1} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Ainsi, bien que f n'admette pas de limite en $+\infty$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

D – Calcul intégral

1 – Intégration par parties

Supposons que $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\forall x \in [a, b[,\quad \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.

Par précaution, on commencera par intégrer entre a et x pour effectuer l'intégration par parties sur un segment avant de passer à la limite.

Exercice 2

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer sa valeur.

2 – Changement de variable

Rappelons le théorème de changement de variable sur un segment vu l'an dernier.

Théorème 3.13 : Changement de variable sur un segment

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

La démonstration repose sur l'égalité $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times f\circ\varphi$ où F est une primitive de f. En effet, en intégrant,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

■

Les choses sont quelque peu différentes lorsque l'on se place sur un intervalle quelconque. La bijectivité de l'application φ est requise !

Théorème 3.14 : Changement de variable sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Démonstration

Sous de telles hypothèses, l'application φ réalise une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$ avec $a = \lim\limits_{x\to\alpha^+} \varphi(x)$ et $b = \lim\limits_{x\to\beta^-} \varphi(x)$. Sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement croissante sur $]a, b[$.

- Supposons $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue et $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$. On se ramène une nouvelle fois à un segment en introduisant $y \in [a, b[$. Il existe $x \in [a, b[$ tel que $y = \varphi(x)$.

$$\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

  Par bijectivité et monotonie, $y \xrightarrow[x\to\beta]{} b$ et $x \xrightarrow[y\to b]{} \beta$. D'où la conclusion.

- Le cas où l'on intègre sur $]a, b[$ se traite au moyen de la relation de Chasles. ■

Dans le cas d'une bijection φ décroissante, la formule s'écrit : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Comme le lecteur l'aura sans doute compris, peu importe la monotonie de φ du moment qu'on prend garde à bien ordonner les bornes des intégrales lors des calculs.

Notons enfin que le résultat reste valable lorsque f est seulement continue par morceaux (hors programme) mais il se révèle plus difficile à établir. Rien ne dit par exemple que $f\circ\varphi\times\varphi'$ est continue par morceaux...

Exercice 3

Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ convergent et calculer leurs valeurs.

Exercice 4

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ comme une intégrale de Wallis.

Exercice 5

Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 3.15

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{|x-a|^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

III | Intégrale impropre d'une fonction à valeurs positives

Si l'on ne peut toujours calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ explicitement, lorsque f est positive, certaines règles permettent d'étudier la nature de l'intégrale. L'étude de $\displaystyle\int_a^b f$ est alors très proche de celle des séries à termes positifs.

Dans toute cette partie, on ne considérera que des fonctions à valeurs réelles positives.

Proposition 3.16

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que : $\quad \forall x \in [a, b[, \quad \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M.$

Démonstration

On pose $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. $\forall x \in [a, b[\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$ donc F est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b^- qui sera finie si et seulement si F est majorée. ■

Pour une fonction à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.

Conformément au programme, on s'autorisera alors à écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Comme pour les familles sommables, un calcul montrant que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$ vaut preuve de convergence.

A – Règle de majoration

Théorème 3.17 : Majoration

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

$\displaystyle\int_I g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ converge et alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Supposons que $0 \leqslant f \leqslant g$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par comparaison : $\quad \forall x \in [a, b[, \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{g \text{ positive}} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = M.$

$x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, donc converge. Par passage à la limite, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$ ■

Corollaire 3.18

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors,

$$\int_I f \text{ diverge} \implies \int_I g \text{ diverge.}$$

Exercice 6

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

B – Comparaison séries/intégrales

Théorème 3.19 : Comparaison séries/intégrales

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et f une application continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Corollaire 3.20 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

C – Règles du « petit-o », du « grand-O » et des équivalents

Théorème 3.21 : Règles du petit-o et du grand-O

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux et positives. On suppose $\displaystyle\int_a^b g$ convergente.

- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente ;
- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

Le théorème précédent s'adapte facilement au cas d'un intervalle de la forme $]a, b]$. De plus, comme pour les séries, la condition de positivité peut porter uniquement sur g, $\displaystyle\int_a^b f$ sera alors absolument convergente.

Corollaire 3.22

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Si $f(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (absolument).

Exercice 7

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?

Théorème 3.23 : Équivalents

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Exercice 8

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$?

On prendra soin de vérifier que l'intégrande est de signe constant au voisinage du point considéré.

IV | Fonctions intégrables

A – Convergence absolue

Définition 3.24 : Convergence absolue

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 3.25

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration

- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. Il suffit de constater que $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$.
- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$. On se ramène au cas réel grâce à $0 \leqslant |\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$. ∎

Définition 3.26 : Semi-convergence

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est semi-convergente.

Exemple

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

- $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Il reste à traiter le problème de convergence en $+\infty$.

  Soit $x \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t} = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}$.

  Or $\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}$ converge absolument donc converge.

  D'où la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} |f|$. Remarquons que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  D'où la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$.

- (variante) $\forall t > 1$, $\dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1-\cos(2t)}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

B – Espace des fonctions intégrables

Définition 3.27 : Fonction intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. La fonction f est dite intégrable sur I si elle continue par morceaux sur I et $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Étudier l'intégrabilité de f sur I revient donc à étudier une intégrale classique sur un segment ou bien à étudier la convergence *absolue* d'une intégrale impropre.

En particulier, si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3.28 : Inégalité triangulaire

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction supposée intégrable. Alors,

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Démonstration

L'inégalité a bien un sens d'après le commentaire précédent! Supposons maintenant que $I = [a, b[$ et soit $x \in [a, b[$. Par inégalité triangulaire sur un segment,

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre x vers b^- pour pouvoir conclure. ■

L'inégalité triangulaire sur un segment découle elle-même d'un passage à la limite dans l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{|b-a|}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right|$$

Proposition 3.29

L'ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel [1].

Démonstration

Montrons pour cela que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$.

- La fonction nulle est bien intégrable sur I.
- Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall t \in I, \quad 0 \leqslant |\lambda f(t) + g(t)| \leqslant |\lambda| \cdot |f(t)| + |g(t)|$$

Comme $\displaystyle\int_I |f|$ et $\displaystyle\int_I |g|$ convergent absolument, il en va de même pour $|\lambda f + g|$ par comparaison. ■

V | Intégration des relations de comparaison

Les théorèmes qui suivent sont l'analogue des sommations de relations de comparaison étudiées dans le chapitre consacré aux séries numériques.

1. $L^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ est même un espace vectoriel normé une fois muni de $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f|$. C'est faux pour $L^1(I,\mathbb{K})$.

Théorème 3.30 : Cas des fonctions intégrables

Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g supposée positive et intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que lorsque g est intégrable sur $[a,b[$,

$$\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} 0$$

Démontrons seulement le troisième point, l'intégrabilité de f étant par ailleurs déjà acquise.
Il existe $M\in\mathbb{R}$ et $a'>0$ tels que pour tout $t\in]a',b[$, $|f(t)|\leqslant M\cdot g(t)$. Pour tout $x>a'$,

$$\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Les deux autres points se démontrent de façon similaire. ■

Théorème 3.31 : Cas des fonctions non intégrables

Soient f,g continue par morceaux sur $[a,b[$ et g supposée positive et non intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que lorsque g est positive et n'est pas intégrable sur $[a,b[$,

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$$

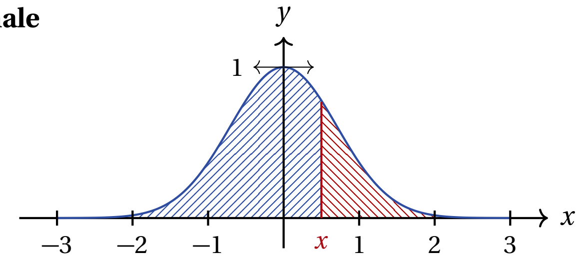
En effet, dans le cas contraire, G étant croissante, elle admettrait une limite finie. g serait intégrable, absurde !
Prouvons comme dans le cas précédent uniquement le dernier point. Supposons donc que $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$.
Il existe $M\in\mathbb{R}$ et $a'>0$ tels que pour tout $t\in]a',b[$, $|f(t)|\leqslant M\cdot g(t)$. Pour tout $x>a'$,

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{a'} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{a'}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a'} |f(t)|\,\mathrm{d}t + M\int_{a'}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a ainsi $\displaystyle\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \underbrace{\int_a^{a'} \big(|f(t)| - M g(t)\big)\,\mathrm{d}t}_{\text{cste}\,/\,x} + M\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, il existe $a''>0$ tel que pour tout $x>a''$, $\displaystyle\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M\int_{a'}^x g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Exemple – Développement asymptotique lié à la loi normale



On rappelle que $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1$. Montrons que :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right)$$

Commençons par obtenir un équivalent de l'intégrale. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[x, y]$, les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient :

$$\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{-1}{2t}\cdot\left(-2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2t}\cdot \mathrm{e}^{-t^2}\right]_{t=x}^{t=y} - \int_x^y \frac{1}{2t^2}\cdot \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, par croissances comparées,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nous tenons notre équivalent! En effet, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ dont le théorème de sommation des relations de comparaison s'applique et,

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{=} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

On a ainsi prouvé que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

On laisse aux lecteurs le soin de compléter pour obtenir un développement asymptotique plus poussé.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Montrer que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

VI | Passage à la limite sous l'intégrale

L'objectif de cette partie est de se doter d'outils efficaces pour répondre positivement, sous certaines conditions, aux grands problèmes d'interversion limite/intégrale et somme/intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

A – De l'insuffisance de la convergence simple

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 3.32 : Convergence simple

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Prouver la convergence simple d'une suite de fonctions revient donc à montrer la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire point par point. On parle pour cette raison de *convergence ponctuelle*. La limite f ainsi obtenue est qualifiée de *limite simple*.

Exercice 10

Étudier la convergence simple et représenter graphiquement les suites de fonctions suivantes :

$$a_n : x \mapsto x^n \text{ sur } [0,1]\,; \quad b_n : x \mapsto \arctan(nx) \text{ sur } \mathbb{R}\,; \quad c_n : x \mapsto \min(n, \mathrm{e}^x) \text{ sur } \mathbb{R}_+\,;$$

$$d_n : x \mapsto \frac{nx}{1+nx} \text{ sur } \mathbb{R}_+\,; \quad e_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

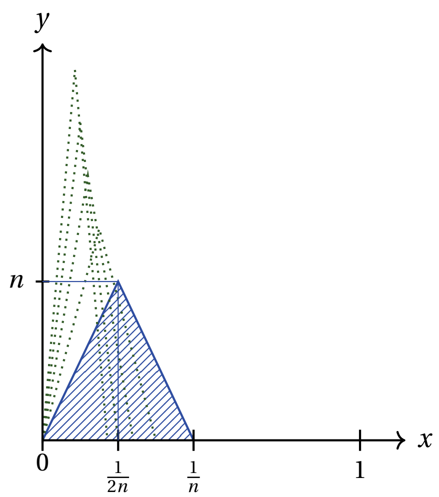
Quelles sont, parmi les propriétés suivantes, celles qui semblent être conservées par passage à la limite : (stricte) monotonie, continuité, dérivabilité, parité, périodicité, caractère borné ?

Certains des exemples précédents prouvent qu'en l'absence d'hypothèses plus contraignantes, la convergence simple ne suffira pas à assurer la régularité de la limite. Nous ne serons pas plus chanceux du côté de l'interversion limite-intégrale.

Exemples

Comparons dans les exemples suivants $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

- $f_n(x) = x^n$ et $I = [0,1]$. (f_n) converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$.
  Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
- $f_n(x) = (1-x)^n \sin(x)$ et $I = [0,1]$. (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
  $|(1-x)^n \sin(x)| \leqslant (1-x)^n$, d'où $\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
- $f_n(x) = nx^n$ et $I = [0,1[$. (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$.
  Pourtant, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
- $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ et $I = \mathbb{R}_+$. (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
  Pourtant, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
- Il ne faudrait pas espérer que l'interversion soit davantage possible dans le cas où I serait un segment. Construisons une suite de « chapeaux pointus » d'aire constante sur $I = [0,1]$.



Posons pour cela $f(x) = 2n^2 x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $f(x) = 2n(1-nx)$ si $x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ et $f(x) = 0$ si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

Très clairement, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

De plus, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x > \frac{1}{n}$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. On aurait pu se contenter d'écrire $|f_n| \leqslant n \cdot \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}$.

Concluons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Mais à tout problème, sa ou ses solutions ! Avant d'apporter des premiers éléments de réponse issus de la théorie d'intégration de Lebesgue [2], adaptons la définition précédente aux séries de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On peut alors définir la série de terme général f_n :

- On appelle somme partielle au rang n la fonction $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$.
- On appelle série de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum f_n$.

Définition 3.33 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. En cas de convergence, on appelle *fonction somme* la fonction S définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$.

Exercice 11

Étudier la convergence simple des séries de fonctions de variable réelle $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

B – Théorème de convergence dominée

Très économe en hypothèses, le puissant théorème de convergence dominée permet de passer à la limite sous l'intégrale à la seule condition que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit *dominée* par une fonction intégrable φ, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$. Le théorème de convergence dominée est l'un des résultats phares de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Mais, et c'est là la contrepartie, sa démonstration est difficilement accessible sans dérouler la théorie sous-jacente. Pour cette raison, la preuve est hors programme.

Théorème 3.34 : Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
- La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f.
- Il existe une fonction φ positive et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Les deux premières hypothèses du théorème ne visent qu'à donner un sens aux intégrales $\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$, intégrales au sens de Riemann. Elles sont d'autant plus anecdotiques qu'elles disparaissent de la théorie de Lebesgue pour laisser place à des hypothèses plus souples.

Exemple (intégrale de Wallis)

Prouvons que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Posons pour cela $f_n(t) = \sin^n(t)$.

La suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction continue par morceaux f, définie par $f(t) = 0$ si $t \neq \frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

De plus, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)| \leqslant 1$ et $t \longmapsto 1$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}t = 0$. Essayez de démontrer ce résultat sans convergence dominée !

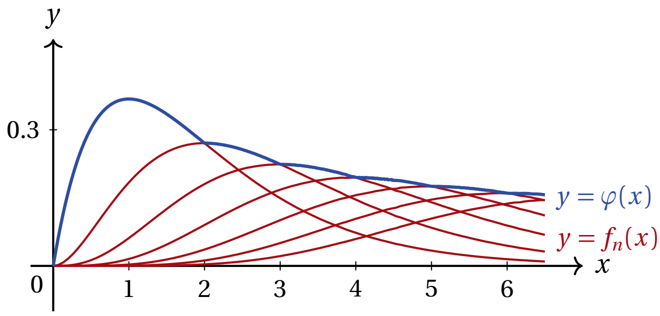
2. des résultats de nature différente seront présentés dans un chapitre ultérieur mais ne s'appliqueront que sur des segments.

Exemple – Cas symptomatique

La suite de fonctions $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \dfrac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Le théorème de convergence dominée ne peut s'appliquer car un rapide calcul montre que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Il n'est en effet pas possible de dominer les fonctions f_n par une fonction intégrable, comme le suggère le graphe ci-dessous. Ce phénomène est qualifié de *bosse glissante*.



Domination impossible de $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \dfrac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 12

Établir la convergence de la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

Exercice 13

Établir la convergence de la suite définie par $v_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide de l'équivalent $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Du théorème de convergence dominée découle une version continue dont nous tirerons essentiellement profit dans un chapitre ultérieur consacré à l'étude des intégrales à paramètre.

Théorème 3.35 : Convergence dominée (cas continu)

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, la famille étant indexée par un intervalle J. Soit également λ_0 un point adhérent à J. On suppose que :

- Pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} f(x)$ où f est une fonction continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall \lambda \in J, \quad |f_\lambda| \leqslant \varphi$$

Alors, les fonctions f_λ et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

Par caractérisation séquentielle de la limite, $\lambda_0 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \lambda_n$ où $\lambda_n \in J$. On applique alors la version discrète du théorème de convergence dominée à $g_n = f_{\lambda_n}$. ■

Exercice 14

> Trouver la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (en évitant le marteau-pilon !).

Exercice 15

> Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

C – Théorème d'intégration terme à terme

La linéarité de l'intégrale nous garantit que sous réserve d'intégrabilité des fonctions f_k sur I,

$$\sum_{k=0}^{n}\int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

En revanche, il n'est pas possible de passer à la limite sans précaution supplémentaire. En effet, même en cas de convergence de la série de fonctions, rien n'assure l'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, ni la légitimité de l'interversion.

Fort heureusement, le théorème de convergence dominée s'adapte aux séries de fonctions pour donner naissance au théorème d'intégration terme à terme. Tout comme pour son congénère, on admettra le résultat.

Théorème 3.36 : Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

On prendra soin de ne pas oublier le module ! En revanche, lorsque f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il sera – toujours – possible d'écrire directement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x \qquad \text{(égalité valable dans } [0,+\infty])$$

L'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est même dans ce cas équivalente à la condition $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n < +\infty$.

Exemple

> Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ en remarquant que pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\frac{\ln(t)}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(t)t^n$.
>
> La continuité de $f_n : t \mapsto -\ln(t)t^n$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est assurée sur $]0,1[$ et, par positivité de f_n,
>
> $$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(t)t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} -\int_0^1 \ln(t)t^n\,\mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$
>
> Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16

Montrer que $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ et exprimer l'intégrale à l'aide d'une série.

Si l'on échoue à appliquer le théorème d'intégration terme à terme, on essaiera d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonctions.

Exercice 17

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n a+1}$.