

## TD11 - Suites

Ex 1:

1) Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Mq u cv ssi u cst

. Si u cst alors u cv

. Supp u cv Mq u cst

Soit l la limite de u

Mq u est cst à l c'ad  $\forall n \in \mathbb{N} u_n = l$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  Mq  $u_n = l$

Par hyp, il existe  $T \in \mathbb{N}^*$  tq u soit T-périodique.

Ainsi  $\forall q \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \underbrace{u_{n+kT}}_{k \rightarrow +\infty} l$

D'où  $u_n = l$

[on] Supp u non cst Mq u diverge

Il existe  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  tq  $u_{n_1} \neq u_{n_2}$

Les suites  $(u_{n_1+nt})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n_2+nt})_{n \in \mathbb{N}}$  (où T est une période de u) sont extraites de u et resp cst à  $u_{n_1}$  et  $u_{n_2}$

Comme  $u_{n_1} \neq u_{n_2}$ , u diverge (car elles possèdent deux suites extraites convergeant vers des limites ≠)

Rq: Soit u une suite périodique

c'ad  $\exists T \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} u_{n+T} = u_n$

Posons  $P = \{ T \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \in \mathbb{N} u_{n+T} = u_n \}$  l'ens des périodes de u

P est non vide car u est périodique

Comme P est une partie de  $\mathbb{N}$ , elle possède un minimum  $T_0$ .

$$M_q \quad P = \{kT_0, k \in \mathbb{N}^*\}$$

$\supset$  par récurrence simple

$\subset$  Soit  $T$  une période de  $u$

Càd  $T \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+T}$$

Il existe  $q \in \mathbb{N}$  et  $r \in [0; T_0 - 1]$  tq  $T = qT_0 + r$

$$M_q \quad r = 0$$

$u$  est alors  $r$ -périodique car  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+r} = u_{n+qT_0+r} = u_{n+T} = u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+r} = u_{n+qT_0+r} = u_{n+r} = u_n$$

Or  $r < T_0$  donc  $r \in \mathbb{P}$

puis  $r = 0$  et  $T = qT_0$

2) Soit  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

$M_q \quad u \text{ CV} \Leftrightarrow u \text{ stationnaire}$

$\Leftarrow$  OK

$\Rightarrow$  Supp  $u$  cv

Soit  $l$  sa limite

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{4}$

Par def: il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| \leq \frac{1}{4}$

On a:

$$\forall n \geq n_0 \quad \begin{cases} |u_n - l| \leq \frac{1}{4} \\ |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc:  $\forall n \geq n_0 \quad |u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - l) - (u_n - l)| \leq |u_n - l| + |u_{n+1} - l|$

$$\forall n \geq n_0 \quad \underbrace{|u_{n+1} - u_n|}_{\in \mathbb{Z}} \leq 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

donc  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n$

3) a) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tq  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Etudions la cv de  $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$

Par hyp, il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tq  $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$  c'ad  $\theta = \frac{p\pi}{q}$

La suite  $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  est alors  $2q$ -périodique car:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin((n+2q)\theta) = \sin\left((n+2q)\frac{p}{q}\pi\right) = \sin\left(\frac{np}{q}\pi + 2\pi\right) = \sin(n\theta)$$

Donc  $\mu = (\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  cv ssi  $\mu$  est cst

$$\text{ssi } \forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(n\theta) = 0$$

$$\text{ssi } \forall n \in \mathbb{N} \quad \sin\left(n\frac{p}{q}\pi\right) = 0$$

$$\text{ssi } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{np}{q} \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\frac{p}{q}\pi \in \mathbb{Z}$$

Si  $\theta \in \pi\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Supp  $\mu = (\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  cv

Mq  $\underbrace{(\sin(2n\theta))_{n \in \mathbb{N}}}_{\nu}$  et  $\underbrace{(\cos(2n\theta))_{n \in \mathbb{N}}}_{\omega}$  cv

$\nu$  est extrait de  $\mu$

Comme  $\mu$  est supposée cv,  $\nu$  cv vers la même limite que  $\mu$

$$\cos(2n\theta) = \sin(2n\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(\left(2 + \frac{\pi}{2\theta}\right)\theta\right)$$

$$\cos(2n\theta) = \underbrace{1 - 2\sin^2(n\theta)}_{1-2e^1} \quad \swarrow$$

c) Analyse:

Supp  $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  cv et notons  $\ell$  sa limite

On a déjà  $(\cos(2n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sin(2n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  cv vers  $(e^{2in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{2i(n+\ell)\theta} = \underbrace{e^{2in\theta}}_e \underbrace{e^{2i\ell\theta}}_e \underbrace{e^{2i\theta}}_{e^{2i\theta}}$$

$$l(1 - e^{2i\theta}) =$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |e^{2i\theta}| = 1$$

$$\text{donc } |l| = 1$$

$$\text{puis } l \neq 0 \text{ et } e^{2i\theta} = 1$$

$$\text{cad } 2\theta = 0 [2\pi]$$

$$\text{cad } \theta = 0 [\pi]$$

Synthèse:

Si  $\theta \equiv 0 [\pi]$  alors  $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  est cst à 0

Ex 2:

Dém ①:

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

donc  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq u_n$

Donc  $u \downarrow$  APR

Comme  $u$  est minorée par 0 elle cv

Notons  $L$  sa limite  $\forall q \quad L = 0$

Si  $L \neq 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{L}{L} = 1 \neq l$

Donc  $L = 0$

Dém 2:

Soit  $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

Comme  $\frac{1+l}{2} > l$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0$

Par def, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon$

donc  $\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon = \frac{1+l}{2}$

Comme  $u > 0$

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq \frac{1+l}{2} u_n$

Par récurrence, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

$$\text{Donc } \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq u_n \leq \underbrace{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \downarrow \\ 0 \text{ car } 0 \leq \frac{1+\ell}{2} \leq 1}}$$

Par encadrement  $\lim u = 0$

Supposons  $u > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$

Mq  $\lim u = +\infty$

D'après 1 et 2 à adapter

Dém 3:

Posons  $v = \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$v > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\ell} \neq 0 < 1$

D'après 1,  $\lim v = 0$

donc  $\lim \frac{1}{|v|} = +\infty$  càd  $\lim \frac{1}{v} = +\infty$

D'où  $\lim u = +\infty$

Ex:

.  $u = (n+1)_{n \in \mathbb{N}}$

On a  $u > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

et  $u \in V$

.  $v = (1)_{n \in \mathbb{N}}$

On a  $v > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$  et  $v \in CN$

Ex 3:

Supposons que  $(\mu_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\mu_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_3$  respectivement.

Mais  $\mu_n$  converge vers  $\ell$ .

Or  $\ell_1 = \ell_2$ .

$(\mu_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(\mu_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $(\mu_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Donc elle converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_3$ .

Donc  $\ell_1 = \ell_3$ .

$(\mu_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(\mu_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $(\mu_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Donc elle converge vers  $\ell_2$  et  $\ell_3$ .

Donc  $\ell_1 = \ell_2$ .

Ex 4:

$$5) \left(1+n^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} \ln(1+n^{\frac{1}{n}})}_{\rightarrow 0}\right) \rightarrow e^0 = 1$$

6)  $n$  n'a l'importe

$$7) \sqrt{n^2+an+b} - n = \frac{n^2+an-bn^2}{\sqrt{n^2+an+b} + n} = \frac{n}{\underbrace{\sqrt{n^2+an+b} + n}_{\sim 2n}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

8) Disjonction de cas.

$$9) \sin(\pi\sqrt{n^2+an+b}) = \sin(\underbrace{\pi n}_{?} + \pi\sqrt{n^2+an+b} - \pi n)$$

$$= (-1)^n \sin(\underbrace{\pi(\sqrt{n^2+an+b} - n)}_{vn} \xrightarrow{vn} \sin \frac{\pi a}{2})$$

$$vn = \sqrt{n^2+an+b} - n = \frac{n^2+an+b-n^2}{\sqrt{n^2+an+b} + n} \sim an \text{ si } a \neq 0$$

$$\text{Par ailleurs } \lim_{n \rightarrow +\infty} vn = \frac{a}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

Donc  $u_n$  CV  $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi a}{2} \in 0[\pi] \Leftrightarrow a \in \{0\}$   $\Leftrightarrow a \in 2\mathbb{Z}$

$$10) \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+h}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} \sim \frac{1}{n}$$

Ex 5:

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$

W/P

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k!} \right) - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{(n+1)nn! + nn! - (n+1)_n(n+1)!}{(n+1)_n(n+1)! \times nn!} \quad \div n! \\ &= \frac{n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

Donc  $v_n$

$$v_n - w_n = \frac{1}{nn!} \rightarrow 0$$

$v_n$  et  $w_n$  sont des suites adjacentes.

Donc  $v_n$  et  $w_n$  CV la m<sup>e</sup> limite

$$2) u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left( \left[ e^t (1-t)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 e^t \times (n+1) (1-t)^n dt \right)$$

O  
 $t \mapsto e^t$   
 $t \mapsto (1-t)^n$   
 $e \in \mathcal{C}([0; 1])$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + u_n$$

$$u_n = u_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - w_n$$

$$w_0 = e - 1$$

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k!}$$

$$3) \forall t \in [0; 1] \quad 0 \leq (1-t)^n e^t \leq e^t$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e^t dt \leq e$$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$$

Par encadrement,  $\lim u_n = 0$

Donc  $\lim v = \lim w = e$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

4)  $\forall q \in \mathbb{Q}$

Supp par l'absurde qu'il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tq  $e = \frac{p}{q}$

On a:  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum$$



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 0 \\ = (a+b)^2 \geq 0$$

Ex 6:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geq b_n$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Or  $a_n \geq b_n$

donc  $b_n - a_n \leq 0$

donc  $a_{n+1} - a_n \leq 0$

donc  $a \searrow$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_{n+1}} - b_n$$

et comme  $a_n \geq b_n$

$$a_n b_n \geq b_n^2$$

d'où  $\sqrt{a_n b_n} - b_n \geq 0$

donc  $b \nearrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_1 \leq b_n \leq a_n \leq a_1$$

Donc  $b$  est majorée par  $a_1$  et croissante

donc  $b$  cv

Donc  $a$  est minorée par  $b_1$  et décroissante

donc  $a$  cv

$$\text{On prend } \lim_{n \rightarrow \infty} a = l_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b = l_2$$

$$M_q \quad l_1 = l_2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \longrightarrow \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$\downarrow$   
 $l_1$

$$\text{Donc par unicité de la limite } l_1 = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$\text{cad : } 2l_1 = l_1 + l_2$$

$$\text{d'où : } l_1 = l_2$$

C'est la moyenne arithmético-géométrique

---

Ex 7:

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  cv de limite  $l$

$$v = \left( \underbrace{\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}}_{\text{moyenne des } n+1 \text{ premiers termes de } u} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

moyenne des  $n+1$  premiers termes de  $u$

$M_q v$  cv vers  $l$

cad  $M_q \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |v_n - l| \leq \epsilon$

Soit  $\epsilon > 0$

Comme  $\lim u = l$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| \leq \epsilon$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n - l = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} - l = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0} - \overbrace{(l + \dots + l)}^{x(n+1)}}{n+1} = \frac{(u_0 - l) + (u_1 - l) + \dots + (u_{n_0} - l)}{n+1}$$

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - l|$$

Soit  $n \geq n_0$

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n |u_k - l| \\ \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n \epsilon$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \frac{n-n_0+1}{n+1} \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \varepsilon$$

$$\hat{\lim}_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0 \quad R_n$$

il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_1 \quad R_n \leq \varepsilon$

Donc  $n \geq \max(n_0, n_1)$ ,  $|v_n - l| \leq 2\varepsilon$

Ainsi  $\lim v = l$

Récip: faux ex  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

2) Soit  $u \in \mathbb{R}^N$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$\text{M}\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$$

cad  $\text{M} \forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad v_n > M$

Soit  $M \in \mathbb{R}$

Comme  $\lim u = +\infty$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq M$

Soit  $n \geq n_0$

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{u_{n_0} + \dots + u_n}{n+1}$$

$$v_n \geq \frac{u_0 + \dots + u_{n_0-1}}{n+1} + M \underbrace{\frac{n-n_0+1}{n+1}}_{\rightarrow 1}$$

$w_n$

$$\lim w_n = M$$

donc il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq n_1 \quad w_n \geq M-1$

Ainsi  $\forall n \geq \max(n_0, n_1) \quad v_n \geq M-1$

Donc  $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad v_n \geq M-1$

D'où  $\lim v = +\infty$

Rq:  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad u_n \geq M$

P(M)

On a montré  $\forall M \in \mathbb{R} \quad P(M-1)$

Comme  $\{M-1, M \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

donc  $\forall M \in \mathbb{R} \quad P(M)$

3) Soit  $v$  une suite str positive ayant une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\text{Mg } \sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

$$= (v_1 v_2 \dots v_n)^{\frac{1}{n}}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \ln \left( \sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} \right) &= \frac{1}{n} \ln (v_1 v_2 \dots v_n) \\ &= \frac{1}{n} \left( \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(v_k) \end{aligned}$$

$$\text{Or } v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$$

. Si  $\ell = +\infty$  alors  $\ln(v_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$

. Si  $\ell \in \mathbb{R}^+$  alors  $\ln(v_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell)$

. Si  $\ell = 0$  alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(v_k) = -\infty$

D'après les questions précédentes

$$\lim \ln \left( \sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ -\infty & \text{si } \ell = 0 \\ \ln(\ell) & \text{si } \ell \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ 0 & \text{si } \ell = 0 \\ \ell & \text{si } \ell \in \mathbb{R}^{*+} \end{cases} \\ &= \ell \end{aligned}$$

4) Soit  $u \in \mathbb{C}^N$  tq  $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{C}$

$$\text{Mq } \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

D'après 1), comme  $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = l$   
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} (u_{n+1} - u_0) = l$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{n+1} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} = l$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$$

5) Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^N$  tq  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\text{Mq } \sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

D'après 3 appliquée à  $(\frac{v_{n+1}}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{v_{k+1}}{v_k}} = l$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{v_{n+1}}{v_1}} = l$$

$$\text{cad } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_1}\right)\right) = l$$

$$\text{cad } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1}) - \frac{1}{n} \ln(v_1)\right) = l$$

$$\text{cad } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1})\right)}{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_1)\right)} = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_n)\right) = l$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1})\right) = l$$

$$\exp\left(\frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1})\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1}) + \frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1}) - \frac{1}{n} \ln(v_{n+1})\right)$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1})\right)}_{\ln(l)} \times \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow 1} \quad \begin{array}{l} \text{l disjonction de cas} \\ \text{comme précédemment} \end{array}$$

Rappel:

Soit  $\mu = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\mu$  diverge

Vérifions qu'elle cv en moyenne

. Si  $n$  est impair  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mu_k = 0$

. Si  $n$  est pair  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mu_k = \frac{1}{n+1}$

Si l'on pose  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mu_k$

On a:  $\begin{cases} v_{2n} \rightarrow 0 \\ v_{2n+1} \rightarrow 0 \end{cases}$

donc  $\lim v = 0$

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  monotone et  $\underbrace{\frac{v_1+v_2+\dots+v_n}{n+1}}_{w_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Mq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

✓ perdu car on aboutira

Supp  $v \downarrow$

Mq  $v$  minorée et donc d'après le théorème de la limite monotone, elle cv.

Mq  $\ell$  est un minorant de  $v$  c'est à dire  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \ell$

Mq  $w \downarrow$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{v_1+v_2+\dots+v_n+v_{n+1}}{n+1} - \frac{v_1+v_2+\dots+v_n}{n} \\ &= \frac{(v_1+v_2+\dots+v_n+v_{n+1})n - (v_1+v_2+\dots+v_n)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-(v_1+v_2+\dots+v_n) + nv_{n+1}}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

]

Comme  $v$  est minorée, elle possède une limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$

D'après 1 et 2,  $w$  la moyenne des termes de  $v$  a une limite finie  $\ell' \in \mathbb{R}$

On  $w$  tend aussi vers  $\ell$  d'après l'unicité de la limite  $\ell' = \ell$       Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

