Corrigé Mines-Ponts 2001 Math I

Préliminaires

a. $x \in \ker f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$

Donc $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ pour tout naturel k.

b. Notons $HR(k)$ la propriété : $\ker f^k = \ker f^{k+1}$.

$HR(p)$ est vraie par hypothèse.

Si $HR(k)$ alors on dispose des équivalences :

$x \in \ker f^{k+2} \Leftrightarrow f(x) \in ker f^{k+1} \Leftrightarrow f(x) \in ker f^k \Leftrightarrow x \in ker f^{k+1}$ qui entrainent $HR(k+1)$.

Ainsi par récurrence, $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ pour tout $k \geq p$.

$d_k = \dim \ker f^k$ est une suite croissante majorée (par n) d'entiers naturels donc elle est constante à partir d'un certain rang p.

Elle est strictement croissante jusqu'à ce rang par contraposition du résultat précédent donc :

$$\forall k \leq p, \quad k \leq d_k \leq n.$$

Ainsi $p \leq d_p \leq n$ et en particulier $d_n = d_{n+1}$ donc $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ par inclusion et égalité des dimensions.

c. Si $u^q = 0$ alors la limite de $(d_k)_k$ est n donc $d_n = n$ soit $u^n = 0$

Partie I

I-1 ***a.*** g commute avec D_n - donc avec D_n^{p+1} - car $D_n = g^2 - \lambda Id$ est un polynôme en g.

Alors $\ker D_n^{p+1}$ est stable par g (résultat de cours).

Les polynômes tels que leur dérivé $(p+1)$ème soit nul sont les polynômes de degré inférieur ou égal à p donc $E_p = \ker D^{p+1}$.

E_p étant stable par D et g, les endomorphismes induits g_p et D_p vérifient la même relation.

b. De même que précédemment puisque D est un polynôme en g et $E_n = \ker D^{n+1}$.

c. **i/**

• F est de dimension finie $(n+1)$ donc engendré par une famille finie $\mathcal{F}$ de polynômes. Etant finie, $\mathcal{F}$ est incluse dans un sous espace E_q donc $F \subset E_q$. Dans ce cas $D^{q+1}F = \{0\}$ donc l'endomorphisme induit de D_F est nilpotent.

D_F est un endomorphisme nilpotent en dimension $n+1$ donc $D_F^{n+1} = 0$ (préliminaire question c)

Alors $D^{n+1}(F) = \{0\}$ donc F est inclus dans E_n et par l'égalité de leur dimension : $F = E_n$.

• Soit maintenant F un sous espace de dimension infinie. Alors F n'est inclus dans aucun E_n donc pour tout entier n, il existe un polynôme P dans F de degré $m \geq n$. Si de plus F est D-stable, F contient $P, D(P), \ldots, D^m(P)$, famille engendrant E_m car échelonnée sur les degrés. Ainsi F contient tous les E_n donc $F = E$.

• En conclusion, les sous espaces stables par D sont $E, \{0\}$ et les E_n.

ii/

Puisque D est un polynôme en g, tout sous espace G stable par g est stable par D.

Réciproquement, si G est stable par D alors (c.i/) G est égal à $E, \{0\}$ ou à E_n donc G est stable par g d'après la question I.1.a)

I-2 ***a.*** $\dim E_0 = 1$ et $D_0 = 0$.
La relation $g^2 = \lambda Id + D_0$ se traduit matriciellement par $\gamma^2 = \lambda$ ce qui impose $\lambda \geq 0$.

b. L'une ou l'autre des existences de g entraine (d'après I.1.a) l'existence de g_0 dans les conditions I-2.a) donc $\lambda \geq 0$. D'où le résultat par contraposition.

I-3 ***a.*** $f^n \neq 0$ donc il existe y tel que $f^n(y) \neq 0$. Montrons que $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \ldots, y)$ est libre : si $a_n f^n(y) + \cdots + a_0 y = 0$ alors en composant par f^{n-k} et compte tenu de $f^p = 0$ pour $p > n$, il vient $a_k f^n(y) + \cdots + a_0 f^{n-k}(y) = 0$. Comme $f^n(y) \neq 0$, on déduit pour k variant de 0 à n successivement $a_0 = 0, a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. B est libre.
Ayant $n+1$ éléments, B est une base de V et

$$Mat_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{bmatrix} = A_0.$$

b. Puisque $D_n^{n+1} = 0$ et $D_n^n(X^n) = n! \neq 0$, l'existence de B_n est assurée.
Dans cette base, la matrice de $\lambda Id + D_n$ est $A_0 + \lambda I_n$ soit A_λ.

I-4 ***a.*** Avec les notations précédentes, $h(y)$ se décompose sur la base B_2 en :

$$h(y) = ay + bD_2(y) + cD_2^2(y).$$

Si de plus h et D_2 commutent alors h et D_2^k commutent également et pour $k = 0, 1, 2$:
$h(D_2^k(y)) = D_2^k(h(y)) = aD_2^k(y) + bD_2^{k+1}(y) + cD_2^{k+2}(y) = (aId + bD_2 + cD_2^2)(D_2^k(y))$.
Donc $h = aId + bD_2 + cD_2^2$ puisque ces deux endomorphismes coincident sur la base B_2.

b. D'après I.1.a) et le résultat précédent, nécessairement $g = P(D)$ avec $P = a + bX + cX^2$.
Sous cette forme et compte tenu de la nilpotence de D, $g^2 = P^2(D) = a^2 Id + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$.
Enfin (Id, D_2, D_2^2) est libre puisque B_2 est libre donc $g^2 = \lambda Id + D$ si et seulement si $g = aId + bD_2 + cD_2^2$ avec $a^2 = \lambda, 2ab = 1, 2ac + b^2 = 0$.
Ce dernier système n'a de solutions que si $\lambda > 0$ et dans ce cas :
$a = \pm\sqrt{\lambda}, b = \dfrac{1}{2a}, c = -\dfrac{1}{8a^3}$.
Ainsi les solutions de $G^2 = A_1$ sont $G = \pm(I_2 + \dfrac{1}{2}A_0 - \dfrac{1}{8}A_0^2)$.

Partie II

II-1 ***a.*** Si $g^2 = D_n$ alors $g^{2n+2} = 0$ donc g est nilpotent.
De plus $g^2 \neq 0$ donc par le préliminaire b) on a $\dim\ker g^2 \geq 2$.

b. Or $\ker g^2 = \ker D_n = E_0$ qui est de dimension 1 ce qui contredit le résultat précédent : g n'existe pas.

c. Si $g^2 = D$ alors par I.1.a il existe g_n tel que $g_n^2 = D_n$ ce qui est impossible.

II-2 ***a.*** Les primitives d'un polynôme sont des polynômes donc D est surjective.
Ainsi $D(E) = E$ puis pour tout m, $D^m(E) = E$ et $g(g^{k-1}(E)) = D^m(E) = E$ donc g est surjective.

b. $\forall q \leq k, \quad \ker g^q \subset \ker g^k = \ker D^m = E_{m-1}$.
Donc $\ker g^q$ est de dimension finie pour $0 \leq q \leq k$.

c. $\forall P \in \ker g^p, \quad g^{p-1}(\Phi(P)) = g^p(P) = 0$.
Ainsi Φ est une application de $\ker g^p$ dans $\ker g^{p-1}$, linéaire comme g.
Noyau de Φ : $\ker\Phi = \ker g \cap \ker g^p = \ker g$
Image de Φ : soit $P \in \ker g^{p-1}$, il existe $Q \in E$ tel que $g(Q) = P$ (g est surjective) et $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$ donc Q est élément de $\ker g^p$ ce qui légitime $\Phi(Q) = P$. D'où $Im(\Phi) = \ker g^{p-1}$.
Par le théorème du rang :
$\dim\ker\Phi + \dim Im\Phi = \dim\ker g^p$ soit $\dim\ker g + \dim\ker g^{p-1} = \dim\ker g^p$.
Il en résulte $\dim\ker g^p = p\dim\ker g$ pour tout $0 \leq p \leq k$.

d. $\dim\ker D^m = \dim E_{m-1} = m$ et $g^k = D^m$ donc $k\dim\ker g = m$ et m est un multiple de k.
Réciproquement, si $m = pk$ il suffit de prendre $g = D^p$.
D'où la condition nécessaire et suffisante : m est un multiple de k.
Condition non remplie dans le cas II-1.c car $m = 1$ et $k = 2$.

Partie III

III-1 ***a.***

$$\begin{aligned}(I+tD_n)\big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k\big) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k - (-1)^{k+1}t^{k+1}D_n^{k+1}\\ &= I-(-1)^{n+1}t^{n+1}D_n^{n+1}\\ &= I \qquad (D_n^{n+1}=0)\end{aligned}$$

Donc la matrice carrée $I+tD_n$ est inversible et son inverse que l'on notera simplement $Q(t)$ est définie par :

$$Q(t)=(I+tD_n)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k.$$

b. L'expression précédente prouve que $t\mapsto Q(t)$ est dérivable et commute à D_n.

En dérivant l'égalité $Q(t)(I+tD_n)=I$ vraie pour tout t, il vient :

$Q'(t)(I+tD_n)+Q(t)D_n=0$ soit $Q'(t)=-Q(t)D_nQ(t)=-Q(t)^2D_n$.

c. $L_n(t)=D_nP(D_n)=P(D_n)D_n$ où P est un polynôme

donc $L_n(t)^{n+1}=D_n^{n+1}P^{n+1}(D_n)$ or $D_n^{n+1}=0$ d'où $L_n^{n+1}=0$.

d. En ajoutant un terme nul à L_n on obtient :

$L_n'(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}t^{k-1}D_n^k=D_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k=D_nQ(t).$

Comme $L_n(t)$ et $L_n'(t)$ commutent (polynômes en D_n) on a :

$\dfrac{d}{dt}L_n^k(t)=kL_n'(t)L_n^{k-1}(t)=kL_n^{k-1}(t)D_nQ(t).$

III-2 ***a.***

$$\begin{aligned}\varphi_u(t)\varphi_v(t) &= \sum_{p=0}^{n}\frac{u^p}{p!}(L_n(t))^p\sum_{q=0}^{n}\frac{v^q}{q!}(L_n(t))^q\\ &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}L_n(t)^{p+q}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}\right)L_n(t)^k \qquad \text{nilpotence de } L_n(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{u^pv^{k-p}}{p!(k-p)!}\right)L_n(t)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}C_k^p u^pv^{k-p}\frac{1}{k!}\right)L_n(t)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(u+v)^k}{k!}L_n(t)^k\\ &= \varphi_{u+v}(t)\end{aligned}$$

b. $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.
En utilisant III-1.d :

$$\begin{aligned}\varphi_u'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k!} kQ(t)D_n L_n^{k-1}(t)\\ &= uQ(t)D_n \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} L_n^{k-1}(t)\\ &= uQ(t)D_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} L_n^{k}(t)\\ &= uQ(t)D_n \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} L_n^{k}(t) \quad (D_n L_n^n(t) = 0)\\ &= uQ(t)D_n \varphi_u(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi_u'(t) = uQ(t)D_n\varphi_u(t).$$

c. φ_1' est dérivable comme produit de fonctions dérivables et
$\varphi_1''(t) = Q'(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_n\varphi_1'(t) = -Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) = 0$
Ainsi $\varphi_1''(t) = 0$ est nul pour tout réel t ; par conséquent $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t\varphi_1'(0)$.
Comme $L_n(0) = 0$ on déduit $\varphi_1(0) = I$ et $\varphi_1'(0) = D_n\varphi_n(0) = D_n$ et l'on conclut :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_1(t) = I + tD_n.$$

III-3 ***a.*** $\lambda I + D_n = \lambda(I + \frac{1}{\lambda}D_n) = \lambda\varphi_1(\frac{1}{\lambda}) = \lambda(\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda}))^2 = \left(\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda})\right)^2$

Ce qui prouve l'existence de $M = \pm\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda})$ donc de g pour $\lambda > 0$.

b. Pour $\lambda = 1$ et $n = 2$ il vient $L_n(1/\lambda) = L_2(1) = D_2 - \frac{1}{2}D_2^2$ puis
$\varphi_{\frac{1}{2}}(1) = I + \frac{1}{2}L_2(1) + \frac{1}{8}L_2^2(1) = I + \frac{1}{2}(D_2 - \frac{1}{2}D_2^2) + \frac{1}{8}D_2^2 = I + \frac{1}{2}D_2 - \frac{1}{8}D_2^2$
On retrouve bien les matrices G puisque $A_0 = D_2$ avec les notations de l'énoncé.

Partie IV

IV-1 ***a.*** h vérifie sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1+x)y' = \frac{1}{2}y$$

b. Posons $a = 1/2, b_0 = 1$ et $b_p = a(a-1)\cdots(a-p+1)/p!$ pour $p \in \mathbf{N}^*$.

Alors $\dfrac{b_{p+1}}{b_p} = \dfrac{a-p}{p+1}$ tend vers -1 quand p tend vers l'infini donc la série entière $\sum b_p x^p$ a un rayon de convergence égal à 1 et dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$ sa somme S vérifie :

$$\begin{aligned}(1+x)S'(x) - aS(x) &= S'(x) + xS'(x) - aS(x)\\ &= \sum_{p=1}^{\infty} pb_px^{p-1} + \sum_{p=0}^{\infty}(p-a)b_px^p\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}[(p+1)b_{p+1} + (p-a)b_p]x^p = 0\end{aligned}$$

Donc S est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle et vérifie $S(0) = 1 = h(0)$.
En vertu de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, $h(x) = S(x)$ sur $]-1, 1[$.

c. c_n est le coefficient de x^n dans le développement en série entière du produit $h(x)h(x) = 1 + x$.
Donc $c_0 = c_1 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 2$.

IV-2 ***a.*** Soit $P \in E$ et n un majorant de son degré.

Alors $D^p(P) = 0$ pour $p > n$ donc $T(P) = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P$ qui est bien un polynôme.

Etant clairement linéaire (prendre n pour majorant commun du degré de P et de Q), T est un endomorphisme de E qui d'après le calcul précédent laisse stable les sous espaces E_n.

b. En notant T_n l'endomorphisme induit par T sur E_n on a pour $P \in E_n$: $T^2(P) = T_n^2(P)$.

Or $T_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$ ce qui conduit, compte tenu de $D_n^k = 0$ pour $k > n$ à

$$T_n^2 = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p \sum_{q=0}^{n} \frac{b_q}{\lambda^q} D_n^q = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k}^{n} \frac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}} D_n^{p+q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\lambda^k} D_n^k = I + \frac{1}{\lambda} D_n$$

Ainsi $T^2(P) = P + \frac{1}{\lambda} DP$ et finalement : $T^2 = Id + \frac{1}{\lambda} D$.

c. $g = \pm\sqrt{\lambda} T$ convient . $(\lambda > 0)$

d. Et $g_n = \pm\sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$.

Dans le cas I-4, $n = 2$ et $\lambda = 1$.

Donc $g_2 = \pm(b_0 I + b_1 D_2 + b_2 D_2^2)$ avec $b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}$ ce qui redonne les matrices précédentes.