Devoir à rendre le 7/12/2020

Dans cet exercice, on étudie une équation différentielle fréquemment rencontrée en Physique. On considère deux nombres réels positifs λ et ω_0 ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

Il s'agit de l'équation générale d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement λ.

Étude du régime libre :

1. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors la quantité $E = (\omega_0^2 y^2 + y'^2)/2$ décroit au cours du temps. Cette quantité est proportionnelle à l'énergie du système.
2. Donner la forme générale des solution suivant que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :
   — $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique),
   — $\lambda = \omega_0$ (régime critique)
   — ou $\lambda > \omega_0$ (régime apériodique).

   On se place maintenant dans le cas $\lambda < \omega_0$ et on note $E_n = E(t_n)$ l'énergie du système à l'instant $t_n = \dfrac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.
3. Donner et tracez la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. Montrer que, pour cette solution,

   $$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-\delta}$$

   avec δ un réel à exprimer en fonction de λ et ω_0. Ce nombre s'appelle le décrément logarithmique. Il mesure à quelle vitesse le système perd de l'énergie.
5. Montrer que δ est une fonction croissante de λ.

Étude du régime forcé :

On modifie maintenant l'équation différentielle en introduisant un terme de forçage sinusoïdal à la pulsation ω.

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

1. Expliquez pourquoi, le comportement d'une solution de cette équation différentielle lorsque t est suffisamment grand ne dépend pas des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$.
2. Trouvez une solution particulière de la forme $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$.

   Pour étudier la fonction $H(\omega)$, on pose $m = \lambda/\omega_0$, $x = \omega/\omega_0$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ par

   $$f(x) = \frac{1}{1 - x^2 + 2imx}$$
3. Tracez le graphe de l'argument de f en fonction de x.

   On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.
4. On suppose maintenant que $m < 1/\sqrt{2}$. Étudiez les variations de $g = |f|^2$ et montrer que g possède un maximum global g_m que l'on tracera en fonction de m.
5. Tracez le graphe de g en fonction de x. On distinguera les cas $m < 1/\sqrt{2}$ et $m > 1/\sqrt{2}$.

   Ce phénomène s'appelle la résonance. Si le système est peu amorti (m est petit), alors le maximum global g_m est grand. Remarquez que la condition pour observer une résonance est $m < 1/\sqrt{2}$ alors qu'en régime libre, on observe des oscillation si $m < 1$.