Complément au corrigé

Matrices Normales

L6 : Pour A matrice normale, notons $\hat{A}$ la matrice de la forme C_4 associée à A et P une matrice orthogonale telle que $\hat{A} = PAP^T$.

- Supposons A antisymétrique

Alors $\hat{A}^T = (P^T A P)^T = P^T(-A)P = -\hat{A}$ est antisymétrique

donc les blocs de taille 1 sont nuls et les blocs de taille 2 sont antisymétriques. D'où $(a) \Rightarrow (c)$.

Si (c) est vraie, alors la matrice $\hat{A}$ est antisymétrique, donc par le même calcul, A l'est aussi. Ainsi $\boxed{(a) \Leftrightarrow (c)}$

- Si (c) est vraie, alors comme $Sp(\hat{A}) = Sp(A)$ le spectre de A est constitué de 0 et des spectres des matrices $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ de sa diagonale.

Mais $\det\begin{pmatrix} x & a \\ -a & x \end{pmatrix} = x^2 + a^2$ donc $\forall a \in \mathbb{R}$ $Sp\left(\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}\right) = \{ia, -ia\}$

ainsi $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$ et donc $(c) \Rightarrow (b)$

- si (b) et vraie : alors $Sp(\hat{A}) \subset i\mathbb{R}$

on écrit $\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & r_1 R(\theta_1) & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & r_q R(\theta_q) \end{pmatrix}$

- $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des réels appartenant à $Sp(\hat{A})$ donc

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

- les valeurs propres de $r_j R(\theta_j)$ sont $r_j e^{i\theta_j}$ et $r_j e^{-i\theta_j}$

comme $Sp(\hat{A}) \subset i\mathbb{R}$ on a donc $\forall j \quad \cos\theta_j = 0$ et donc

$r_j R(\theta_j)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Finalement $(b) \Rightarrow (c)$

17 : Le même type de raisonnement prouve (pour A normale) l'équivalence entre :

(i) $A \in O_n(\mathbb{R})$

(ii) $\forall \lambda \in Sp(A) \quad |\lambda| = 1$

(iii) les blocs de taille 1 sont égaux à ± 1 et les blocs de taille 2 sont des matrices $R(\theta)$

18. Notons $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices normales.

$$\mathcal{E}_n = \{M,\ M^T M = M M^T\} = \varphi^{-1}(\{0_n\})$$

où $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^T M - M M^T \end{cases}$

Comme φ est continue, $\mathcal{E}_n$ est fermé en tant qu'image réciproque par φ du fermé $\{0_n\}$

Commençons par noter que pour toute matrice A on a :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)^T = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^T)^k}{k!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La transposition étant continue on peut faire tendre n vers $+\infty$ et il vient :

$$\exp(A)^T = \exp(A^T) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit alors A normale :

$$\exp(A)^T \exp(A) = \exp(A^T)\exp(A) = \exp(A^T + A) \quad (AA^T = A^T A)$$

$$= \exp(A + A^T) = \exp(A)\exp(A^T) = (\exp A)(\exp A)^T.$$

Donc $\exp(A)$ est normale

19 : Si $A^T = -A$

alors $\exp(A)^T \exp(A) = \exp(A^T)\exp(A) = \exp(-A)\exp(A)$

$$= \exp(-A+A) = I$$

et $\det(\exp A) = e^{Tr(A)} = 1$

ce qui prouve que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors la matrice $\tilde{A}$ de C4 s'écrit :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{n_1} & & & & (0) \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{n_2} & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ (0) & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_q} \end{bmatrix}$$

Comme $\det \tilde{A} = +1$ on a nécessairement n_2 pair

écrit $n_2 = 2p$ et, en remarquant que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi$, on

réécrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & R_\pi & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_\pi & \\ & & & & & & R_{\theta_1} \\ (0) & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_q} \end{bmatrix}$$

on remarque alors que

$$\boxed{R_\theta = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}}$$

D'après les propriétés de produit par blocs, il vient :

$$\tilde{A} = \exp \tilde{B} \quad \text{avec} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -\theta_q \\ \theta_q & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La matrice $\tilde{B}$ est bien antisymétrique

Enfin, comme $\tilde{A} = PAP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$

on obtient

$$A = P^T \tilde{A} P = P^T \exp(\tilde{B}) P = \exp(P^T \tilde{B} P)$$

en posant $B = P^T \tilde{B} P$ on a bien B antisymétrique

et $A = \exp(B)$

B n'est pas unique (on peut remplacer le bloc $\begin{pmatrix} 0 & -\theta_q \\ \theta_q & 0 \end{pmatrix}$

par $\begin{pmatrix} 0 & -(\theta_q + 2\pi) \\ \theta_q + 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ par exemple) : Donc exp n'est pas injective

20 : Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique

$M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Avec cette decomposition, on A :

$$MM^T = (A+S)(-A+S) = S^2 - A^2 + (AS - SA)$$

et $$M^T M = (-A+S)(A+S) = S^2 - A^2 - (AS - SA)$$

Ainsi M est normale $\iff \boxed{AS - SA = 0}$

2) Soit M une matrice normale on décompose $M = P\hat{M}P^T$ avec $\hat{M}$ sous la forme C4

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_p & & & \\ & & & k_1 R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & k_q R_{\theta_q} \end{bmatrix}$$

Ecrivons $k_1 R_{\theta_1}$ sous la forme $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 I_2 + b_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

alors $\exp(k_1 R_{\theta_1}) = \exp(a_1 I) \times \exp\left(b_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= S_1 R_{b_1}$ où l'on a posé $S_1 = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_1} \end{pmatrix}$

Ainsi on a $\exp(\hat{M}) = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & & & \\ & \ddots & & & (0) \\ & & e^{d_p} & & \\ (0) & & & S_1 R_{b_1} & \\ & & & & \ddots \ S_q R_{b_q} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{d_1} & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & e^{d_p} & & \\ (0) & & & S_1 & \\ & & & & \ddots \ S_q \end{bmatrix}}_{\hat{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ (0) & & & R_{b_1} & \\ & & & & \ddots \ R_{b_q} \end{bmatrix}}_{\hat{T}}$

La matrice $\hat{S}$ est dans S_n^{++} car elle est symétrique et ses v.p sont toutes >0
la matrice $\hat{T}$ est SO_n

de plus $\hat{S}\hat{T} = \hat{T}\hat{S}$.

Si maintenant $S = P\hat{S}P^T$ alors S est dans S_n^{++} $(S^T = S$ et $Sp(S) = Sp(\hat{S}))$
$T = P\hat{T}P^T$ $\quad$ T est dans SO_n $(T^T T = I_n$ et $\det T = \det \hat{T})$

$ST = TS$

et l'on a : $\exp(M) = P\exp(\hat{M})P^T = P\hat{S}\hat{T}P^T = (P\hat{S}P^T)(P\hat{T}P^T) = ST$.

enfin les valeurs propres de $\exp(M)$ sont celles de $\exp(\tilde{M})$, les vp de

la matrice $S_1 R_{b_1} = e^{a_1}\begin{pmatrix} \cos b_1 & -\sin b_1 \\ \sin b_1 & \cos b_1 \end{pmatrix}$ sont $e^{a_1} e^{i\theta_1}$ $e^{a_1}e^{-i\theta_1}$

Le spectre de $\exp(M)$ est donc

$$\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}, e^{a_1}e^{-i\theta_1}, e^{a_1}e^{i\theta_1}, \dots, e^{a_q}e^{i\theta_q}, e^{a_q}e^{-i\theta_q}\}$$

Les seuls nombres réels négatifs dans cette liste sont les $e^{a_j}e^{\mp i\theta_j}$ avec $\theta_j \equiv \pi [2\pi]$

Ils apparaissent toujours par groupes de 2.

Ainsi $\exp(M) \in \mathcal{F}_n$.

Réciproquement si $M \in \mathcal{F}_n$.

$M = TS = ST$ avec $S \in S_n^{++}$ et $T \in SO_n$

En particulier $\left.\begin{array}{l} MM^T = STT^TS = S^2 \\ M^TM = ST^TTS = S^2 \end{array}\right\}$ donc M est normale.

On peut donc quitte à faire un cht de BON supposer que M a la forme C_4

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_p & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & \begin{pmatrix} a_q & -b_q \\ b_q & a_q \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

. Déjà aucun μ_i n'est nul ($\det M \neq 0$)

De plus :

Comme les valeurs propres négatives sont de multiplicité paire on peut supposer tous les $\mu_i > 0$ (si par exemple $\mu_1 = \mu_2 < 0$ on peut écrire le bloc $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$ sous la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a = \mu_1$ $b = 0$)

Chaque bloc $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ s'écrit $r_i R_{\theta_i}$ pour un certain $r_i > 0$ et $\theta_i \in \mathbb{R}$

alors $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = \exp \begin{bmatrix} r_i & -\theta_i \\ \theta_i & r_i \end{bmatrix} = \exp B_i$

et donc $M = \exp(A)$ où $A = \begin{bmatrix} \ln\mu_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \ln\mu_p & & \\ & (0) & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_q \end{bmatrix}$

De plus la matrice A est normale $\square$.