Espaces euclidiens II

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Étude de la dimension 2

Dans la suite, E est un plan euclidien orienté dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On réutilisera très largement les notations et résultats développés dans Espace euclidiens I.

1.1 Faits de base

Complétion de base

Soit $a \in E$ unitaire, alors il existe un unique $b \in E$ tel que (a, b) est une base orthonormée directe. On note $b = \wedge a$.

En effet, on doit choisir b unitaire dans $\{a\}^\perp$ qui est un hyperplan de E, ici une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}\,(e)$ avec $e \in E \backslash \{0\}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha e\| = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = \dfrac{1}{\|e\|}$, ce qui laisse deux choix pour b : appelons les u et $-u$. Or les bases (a, u) et $(a, -u)$ sont d'orientation opposées donc un seul choix convient.

Ensemble des vecteurs unitaires Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de E. L'ensemble des vecteurs unitaires de E est alors $\{u_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ où $u_\theta = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$.

– En effet, il est clair que $\|u_\theta\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

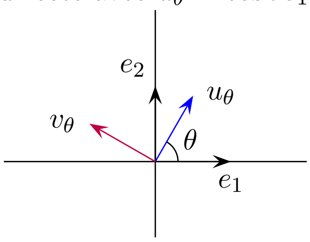
– Si $a \in E$ est unitaire, a s'écrit $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\theta = \sin\theta$.

De plus, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $v_\theta = \wedge u_\theta = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$. En effet, v_θ est aussi unitaire, orthogonal à u_θ car $\langle u_\theta, v_\theta \rangle = 0$ et

$$\mathcal{P}_{(e_1,e_2)}^{(u_\theta,v_\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a pour déterminant 1.

Ainsi, (u_θ, v_θ) est une base orthonormée directe avec $u_\theta = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ et $v_\theta = \wedge u_\theta = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$.



L'ensemble des bases orthonormées directes est donc $\{(u_\theta, v_\theta) \,|\theta \in \mathbb{R}\}$.

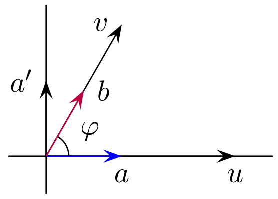
Remarque On a

$$\frac{\langle u_\theta, e_1 \rangle}{\|u_\theta\| \|e_1\|} = \cos\theta \text{ et } [e_1, u_\theta] = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta$$

Ainsi, si φ est l'angle géométrique de e_1 et u_θ, $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$ donc $|\sin\theta| = \sin\varphi$ car $\varphi \in [0, \pi]$.

Identité de Lagrange Soient $u, v \in E \backslash \{0\}$, φ l'angle géométrique de u et v, $a = \dfrac{u}{\|u\|}$, $a' = \wedge a$, $b = \dfrac{v}{\|v\|}$. On sait que b s'écrit dans la base orthonormée $(a, \wedge a)$: $b = \alpha a + \beta a'$ et

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle a, b \rangle \\ &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \\ &= \cos\varphi \end{aligned}$$



Or $1 = \|b\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \cos^2\varphi + \beta^2$ d'où $\sin^2\varphi = \beta^2$. On a donc

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \|u\| \|v\| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ &= \|u\| \|v\| \cos\varphi \end{aligned}$$

Mais aussi $u = \|u\| a$ et $v = \|v\| b$ d'où (par définition du produit mixte) :

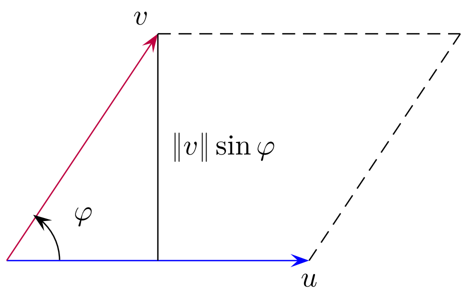
$$\begin{aligned} [u, v] &= \begin{vmatrix} \|u\| & \|v\| \cos\varphi \\ 0 & \|v\| \beta \end{vmatrix} \\ &= \|u\| \|v\| \beta \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité de Lagrange :

$$\langle u, v\rangle^2 + [u, v]^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \|u\|^2 \|v\|^2$$

Cette égalité reste valable même si u ou v est nul.

Remarques $|[u, v]| = \|u\| \|v\| |\beta| = \|u\| \|v\| \sin\varphi$. On interprète le produit mixte comme l'aire du parallélogramme bâti sur les vecteurs u et v.



1.2 Rotations

On a vu que $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ où, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Grâce aux formules de trigonométrie, pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = R_{\theta+\varphi}$$

Ainsi $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif, car $\varphi + \theta = \theta + \varphi$.

Soit maintenant $f \in SO(E)$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. On sait que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in SO_2(\mathbb{R})$ et d'autre part, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in SO_2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ car $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$.

Théorème et définition

Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$, alors il existe un réel θ tel que pour toute basse orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$.
On dit que f est une rotation dont l'angle est $\{\theta \in \mathbb{R} | \forall \mathcal{B}$ base orthonormée directe, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta\}$.
Tout réel θ appartenant à cet angle est une mesure de l'angle.

Remarques

❑ Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$, θ une mesure de l'angle de f. Alors l'angle de f est $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$.

❑ On dira souvent par abus que f est la rotation d'angle θ, alors qu'il faudrait en toute rigueur dire que f est la rotation dont θ est une mesure de l'angle. On note alors $f = r_\theta$.

En effet, soit $\varphi \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$, $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$ donc $R_\theta = R_\varphi$ donc φ est une mesure de l'angle de f. D'autre part, soit φ une mesure de l'angle de f,$\mathcal{B}$ une base orthonormée, $R_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R_\varphi$ donc $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$ donc $\varphi \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition Montrons que $\mathrm{SO}(E)$ est commutatif.

En effet, soient $f, g \in \mathrm{SO}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ sont dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ d'où, puisque $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g)
\end{aligned}$$

donc $f \circ g = g \circ f$. Si f est la rotation d'angle θ et g la rotation d'angle φ , alors $f \circ g$ est la rotation d'angle $\theta + \varphi$, c'est-à-dire $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi}$.

Remarque Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$, θ une mesure de l'angle de f, $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe et $\mathcal{C}$ une base orthonormée indirecte. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ donc $\exists\psi \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = S_\psi$ où

$$S_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix}$$

On a de plus, en faisant le produit matriciel, $\forall\phi \in \mathbb{R}$, $S_\phi^2 = \mathrm{I}_2$ donc $\forall M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $M^2 = \mathrm{I}_2$.

Soit maintenant $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $N \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Alors $MN \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det MN = \det M \det N = -1$ donc $MN \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ donc $(MN)^2 = MNMN = \mathrm{I}_2$ donc

$$N^{-1} = MNM = M^{-1}NM$$

car $M^2 = \mathrm{I}_2 \Rightarrow M = M^{-1}$.

Ici, si on pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) &= P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,P \\
&= P\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{\in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}P \\
&= \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} \\
&= R_\theta^{-1}
\end{aligned}$$

Or $R_\theta R_{-\theta} = R_0 = \mathrm{I}_2 \Rightarrow R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = R_{-\theta}$. Si on change l'orientation de E, R_θ est transformée en $R_{-\theta}$.

Théorème

Soient $a, b \in E$ unitaires. Alors il existe une unique $f \in \mathrm{SO}(E)$ telle que $f(a) = b$.

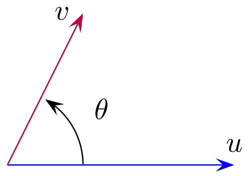
Démonstration

Unicité : supposons l'existence de f. On sait que f transforme toute base orthonormée directe en base orthonormée directe, or $(a, \wedge a)$ est une base orthonormée directe donc $(f(a), f(\wedge a))$ aussi [a]. Or $f(a) = b$ donc $f(\wedge a)$ est l'unique vecteur b' de E tel que (b, b') soit une base orthonormée directe donc $f(\wedge a) = \wedge b$. Les valeurs de f sont imposées sur $(a, \wedge a)$ d'où l'unicité.

Existence : soit f l'unique application linéaire définie sur la base $(a, \wedge a)$ par $f(a) = b$ et $f(\wedge a) = \wedge b$. f transforme une base orthonormée directe en base orthonormée directe, c'est donc un élément de $\mathrm{SO}(E)$ qui change a en b.

1.3 Angle orienté

Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. On appelle angle orienté de u et v et on note $\widehat{(u,v)}$ l'unique rotation qui change $\dfrac{u}{\|u\|}$ en $\dfrac{v}{\|v\|}$. Tout réel $\theta \in \widehat{(u,v)}$ est une mesure de cet angle.



On a tout de suite que si $\theta \in \widehat{(u,v)}$, alors $\widehat{(u,v)} = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$. On dira parfois que θ est l'angle $\widehat{(u,v)}$, mais c'est un abus.

Lien entre angle géométrique et angle orienté Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$, φ l'angle géométrique entre u et v, θ une mesure de $\widehat{(u,v)}$, $a = \dfrac{u}{\|u\|}$, $b = \dfrac{v}{\|v\|}$. On sait que $\cos\varphi = \langle a, b\rangle$ et $\varphi \in [0, \pi]$. Plaçons nous dans la base orthonormée directe $(a, \wedge a)$.Par définition de θ, $r_\theta(a) = b$ donc ,puisque $(a, \wedge a)$ est une base orthonormée directe,

$$\mathrm{Mat}_{(a,\wedge a)}(r_\theta) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

D'où $b = r_\theta(a) = \cos\theta a + \sin\theta \wedge a$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle b, a\rangle &= \langle a\cos\theta + \wedge a \sin\theta, a\rangle \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

On en déduit $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin^2\theta = \sin^2\varphi \Leftrightarrow |\sin\theta| = \sin\varphi$ [b]. Or

$$\begin{aligned} [a, b] &= \det_{(a,\wedge a)}(a, b) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

- Si $[a, b] \geqslant 0$, alors $\theta \equiv \varphi \ [2\pi]$.
- Si $[a, b] < 0$, alors $\theta \equiv -\varphi \ [2\pi]$.

a. « *Comme Félicie !* »

b. Voir le calcul déjà effectué de la page 2.

Remarques

❑ Si θ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(u,v)}$, alors

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \text{ et } \sin\theta = \frac{[u,v]}{\|u\|\,\|v\|}$$

Ces deux relations permettent de donner θ à 2π près.

❑ Si θ est une mesure de $\widehat{(u,v)}$ et que l'on choisit l'orientation opposée, alors $-\theta$ devient une mesure du nouvel angle $\widehat{(u,v)}$. En particulier, il est toujours possible de choisir une orientation sur E telle que l'angle orienté coïncide avec l'angle géométrique.

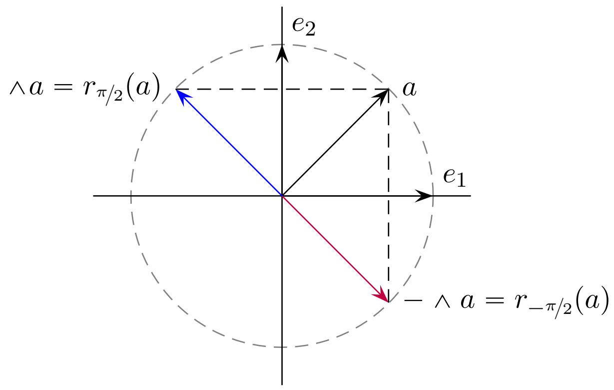
❑

$$\begin{aligned} u\perp v &\Leftrightarrow 0 = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \cos\theta \\ &\Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \widehat{(u,v)} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } \widehat{(u,v)} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

❑ Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(r_{\pi/2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(r_{-\pi/2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

❑ Soit $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ unitaire où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée, on a donc $r_{\pi/2}(a) = -\beta e_1 + \alpha e_2 = \wedge a$ et $r_{-\pi/2}(a) = \beta e_1 - \alpha e_2 = - \wedge a$.



Relations de Chasles

> Soient $u, v, w \in E\setminus\{0\}$, alors on a les égalités entre ensembles suivantes :
> ❑ $\widehat{(u,v)} = -\widehat{(v,u)}$;
> ❑ $\widehat{(u,w)} = \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)}$.

Démonstration Posons $u' = \frac{u}{\|u\|}$, $v' = \frac{v}{\|v\|}$ et $w' = \frac{w}{\|w\|}$.

Soit θ une mesure de $\widehat{(u,v)}$, alors $r_\theta(u') = v'$ d'où $r_{-\theta}(v') = u'$ donc $-\theta$ est une mesure de $\widehat{(v,u)}$ donc $\widehat{(v,u)} = -\theta + 2\pi\mathbb{Z} = -(\theta + 2\pi\mathbb{Z})$.

Soit φ une mesure de $\widehat{(u,w)}$, alors $w = r_\varphi(v) = r_\varphi(r_\theta(u)) = r_{\varphi+\theta}(u)$ donc $\theta + \varphi$ est une mesure de $\widehat{(u,w)} = \theta + \varphi + 2\pi\mathbb{Z} = (\theta + 2\pi\mathbb{Z}) + (\varphi + 2\pi\mathbb{Z})$.

Conservation de l'angle orienté

Soient $u, v \in E \backslash \{0\}$:
(1) si $f \in \mathrm{SO}(E)$, alors $\widehat{(u,v)} = \widehat{(f(u), f(v))}$;
(2) si $f \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$, $\widehat{(u,v)} = -\widehat{(f(u), f(v))}$.

Démonstration

(1) Si $f \in \mathrm{O}(E)$ et $x \neq 0_E$, $f(x) \neq 0_E$ donc il est légitime de considérer $\widehat{(f(u), f(v))}$. Soit $r \in \mathrm{SO}(E)$ telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$. Alors

$$\begin{aligned} r\left(\frac{f(u)}{\|f(u)\|}\right) &= \frac{1}{\|f(u)\|} r \circ f(u) \\ &= \frac{1}{\|u\|} r \circ f(u) \text{ car } f \text{ conserve la norme} \\ &= \frac{1}{\|u\|} f \circ r(u) \text{ car } \mathrm{SO}(E) \text{ est commutatif} \\ &= f\left(r\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|v\|} f(v) \\ &= \frac{f(v)}{\|f(v)\|} \end{aligned}$$

d'où $\widehat{(u,v)} = \widehat{(f(u), f(v))}$.

(2) On a vu que $\forall M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\forall N \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $M^2 = \mathrm{I}_2 \Leftrightarrow M^{-1} = M$ et $N^{-1} = MNM \Leftrightarrow MN^{-1} = NM$. On en déduit aussitôt que $\forall r \in \mathrm{SO}(E)$, $\forall g \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$, $g \circ r^{-1} = r \circ g$. Ici, si $f \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$,

$$\begin{aligned} r^{-1}\left(\frac{f(u)}{\|f(u)\|}\right) &= \frac{1}{\|f(u)\|} r^{-1} \circ f(u) \\ &= \frac{1}{\|u\|} f \circ r(u) \\ &= f \circ r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \\ &= f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \\ &= \frac{f(v)}{\|f(v)\|} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

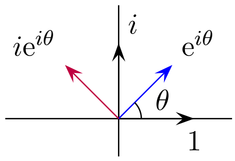
1.4 Le plan euclidien $\mathbb{C}$

1.4.1 Propriétés et intérêt

❑ On munit $\mathbb{C}$ du produit scalaire canonique $\langle z, z' \rangle = \Re\mathrm{e}(\overline{z}z')$, et on l'oriente par le choix de la base canonique $(1, i)$. La norme euclidienne de $z \in \mathbb{C}$ est $\|z\|^2 = \langle z, z' \rangle = \Re\mathrm{e}(\overline{z}z) = |z|^2$ donc

$$\boxed{\|z\| = |z|}$$

❑ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $u_\theta = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $v_\theta = -\sin\theta + i\cos\theta = i\mathrm{e}^{i\theta}$. L'ensemble des bases orthonormées est donc $\left\{\left(\mathrm{e}^{i\theta}, i\mathrm{e}^{i\theta}\right) | \theta \in \mathbb{R}\right\}$.



❑ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, r la rotation d'angle θ. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{(1,i)}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où $r(1) = e^{i\theta}$ et $r(i) = ie^{i\theta}$. Pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, $r(z) = xr(1)+yr(i) = xe^{i\theta}+iye^{i\theta} = (x+iy)e^{i\theta}$ d'où

$$\boxed{r_\theta(z) = ze^{i\theta}}$$

❑ Soit maintenant E un plan euclidien orienté, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe, $\psi_{\mathcal{B}}$ l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{C}$ telle que $\psi_{\mathcal{B}}(e_1) = 1$ et $\psi_{\mathcal{B}}(e_2) = i$. $\psi_{\mathcal{B}}$ transforme une base en une base donc c'est un isomorphisme. Pour $u \in E$, $z = \psi_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{C}$ s'appelle l'affixe de u et pour $z \in \mathbb{C}$, $u = \psi_{\mathcal{B}}^{-1}(z)$ est l'image de z. Si $u = ae_1 + be_2$, alors $z = a + ib$.

Soient $u, v \in E$ d'affixes z et z', alors $\langle u, v\rangle = \Re\mathrm{e}(\overline{z}z')$ et $\|u\| = |z|$. Ainsi, $\psi_{\mathcal{B}}$ est une isométrie et $(1, i)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{C}$. De plus $\widehat{(u,v)} = \widehat{(z,z')}$

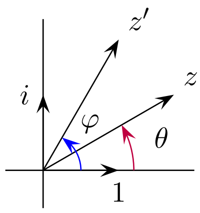
N'importe quel énoncé de géométrie euclidienne dans un espace abstrait possède un équivalent dans $\mathbb{C}$. On peut donc utiliser $\mathbb{C}$ pour résoudre tous les problèmes de géométrie plane.

❑ Pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on écrit $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\varphi}$. θ et φ sont des mesures de $\widehat{(1,z)}$ et $\widehat{(1,z')}$ donc

$$e^{i(\varphi-\theta)}\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi} = \frac{z'}{|z'|}$$

donc $\varphi - \theta$ est une mesure de $\widehat{(z,z')}$. Ainsi,

$$\boxed{\widehat{(z,z')} = \arg\left(\frac{z'}{z}\right)}$$



❑ Au passage, si $u \in E$, on appelle système de coordonnées polaires de u dans $\mathcal{B}$ tout couple (r, θ) tel que $u = r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2$. Si z est l'affixe de u, (r, θ) est un système de coordonnées polaires de u dans E si et seulement si (r, θ) est un système de coordonnées polaires de z dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si $z = re^{i\theta}$.

Su $u \neq 0$, $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(\|u\|, \theta)$ est un système de coordonnées polaires de u. On prend en effet pour θ un argument de z. Les systèmes de coordonnées polaires de u sont alors éléments de

$$\{(\|u\|, \theta + 2k\pi) \,|k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-\|u\|, \theta + \pi + 2k\pi) \,|k \in \mathbb{Z}\}$$

1.4.2 Description des éléments de $\mathbf{O}(E)\setminus\mathbf{SO}(E)$

❑ Soit $f \in \mathrm{O}(E)\setminus\mathrm{SO}(E)$, $\exists\varphi \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. $S_\varphi^2 = \mathrm{I}_2$ donc f est une symétrie. Soit

$$\widetilde{f} : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = a+ib \mapsto \text{affixe de} f(ae_1 + be_2) \end{array}$$

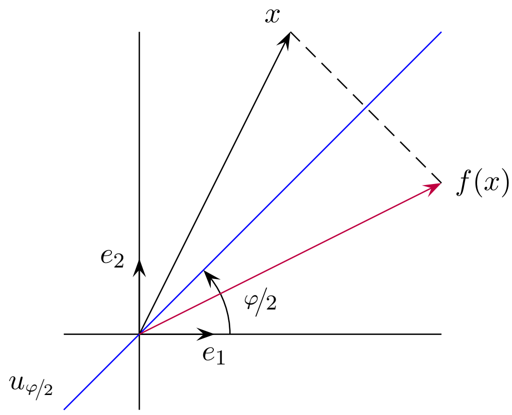
$\widetilde{f} \in \mathrm{O}(\mathbb{C})\setminus\mathrm{SO}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Mat}_{(1,i)}\left(\widetilde{f}\right) = S_\varphi$ donc, pour $z = x+iy$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(z) &= x\widetilde{f}(1) + y\widetilde{f}(i) \\ &= x\mathrm{e}^{i\varphi} - i\mathrm{e}^{i\varphi}y \\ &= \mathrm{e}^{i\varphi}(x - iy) \\ &= \overline{z}\mathrm{e}^{i\varphi} \end{aligned}$$

❑ On remarque de plus que $\widetilde{f}\left(\mathrm{e}^{i\varphi/2}\right) = \mathrm{e}^{i\varphi/2}$ et $\widetilde{f}\left(i\mathrm{e}^{i\varphi/2}\right) = -i\mathrm{e}^{i\varphi/2}$ donc $f\left(u_{\varphi/2}\right) = u_{\varphi/2}$ et $f\left(v_{\varphi/2}\right) = -v_{\varphi/2}$. On sait que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$, or $u_{\varphi/2} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)\setminus\{0\}$ donc $\dim\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \geqslant 1$ et $v_{\varphi/2} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)\setminus\{0\}$ donc $\dim\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \geqslant 1$. Or $\dim\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \dim\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \dim E = 2$ donc $\dim\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = 1$ et $\dim\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = 1$ d'où

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(u_{\varphi/2}\right) \text{ et } \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(v_{\varphi/2}\right)$$

f est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\left(u_{\varphi/2}\right)$.



Bilan

$\mathrm{SO}(E)$ est l'ensemble des rotations, $\mathrm{O}(E)\setminus\mathrm{SO}(E)$ est l'ensemble des réflexions.

2 Étude de la dimension 3

Dans la suite, E est un espace euclidien orienté de dimension 3 dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

2.1 Produit vectoriel

2.1.1 Théorème et définition

Soient $x, y \in E$, il existe un unique $w \in E$ tel que $\forall z \in E$, $[x, y, z] = \langle w, z\rangle$. w s'appelle le produit vectoriel de x et y et se note $x \wedge y$.

En effet, $\psi : z \in E \longrightarrow [x, y, z] \in \mathbb{R}$ est linéaire d'après les propriétés du déterminant, c'est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après les propriétés des formes linéaires [a] il existe un unique $w \in E$ tel que $\psi = \langle w, \cdot \rangle$.

Remarque Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe, $\mathcal{C}$ une base orthonormée indirecte.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(x, y, z)$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \text{O}_3(\mathbb{R}) \backslash \text{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $\langle w, z \rangle = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = -\det_{\mathcal{C}}(x, y, z)$ donc $\det_{\mathcal{C}}(x, y, z) = -\langle w, z \rangle = \langle -w, z \rangle$.

Si on change d'orientation sur E, le produit scalaire est changé.

2.1.2 Propriétés du produit vectoriel

Bilinéarité $(x, y) \in E^2 \longmapsto x \wedge y \in E$ est bilinéaire.

En effet, montrons par exemple la linéarité par rapport à x. Soit $x, x', y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\forall z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left[\alpha x + x', y, z\right] &= \alpha [x, y, z] + \left[x', y, z\right] \\ &= \alpha \langle x \wedge y, z \rangle + \left\langle x' \wedge y, z \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha x \wedge y + x' \wedge y, z \right\rangle \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\alpha x \wedge y + x' \wedge y = (\alpha x + x') \wedge y$. La bilinéarité entraîne de plus que $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow x \wedge y = 0$.

Antisymétrie $(x, y) \in E^2 \longmapsto x \wedge y \in E$ est antisymétrique, c'est-à-dire que $\forall x, y \in E$, $x \wedge y = -y \wedge x$.

En effet, $\forall z \in E$,

$$\begin{aligned} [y, x, z] &= -[x, y, z] \text{ car le déterminant est antisymétrique} \\ &= -\langle x \wedge y, z \rangle \\ &= \langle -x \wedge y, z \rangle \end{aligned}$$

En particulier, $(x, y) \in E^2 \longmapsto x \wedge y \in E$ est alternée, c'est-à-dire que $\forall x, y \in E$, $x \wedge x = 0$ et (x, y) liée entraîne $x \wedge y = 0$.

Double orthogonalité $\forall x, y \in E$, $x \wedge y \in \text{Vect}(x, y)^{\perp} = \{x, y\}^{\perp}$.

En effet, puisque le déterminant est alterné, $\langle x \wedge y, x \rangle = [x, y, x] = 0$ et $\langle x \wedge y, y \rangle = [x, y, y] = 0$.

Lien avec les familles libre et les base directes

Pour $x, y \in E$:
(1) (x, y) liée $\Leftrightarrow x \wedge y = 0$;
(2) (x, y) libre $\Rightarrow (x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.

En effet, montrons (2) et pour cela supposons (x, y) libre. Soit $z \in E$ tel que (x, y, z) soit une base. Ainsi, $\langle x \wedge y, z \rangle = [x, y, z] \neq 0$ donc $x \wedge y \neq 0_E$. On a alors

$$\begin{aligned} [x, y, x \wedge y] &= \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \\ &= \|x \wedge y\|^2 > 0 \end{aligned}$$

d'où (2). Pour (1), on a vu (x, y) liée $\Rightarrow x \wedge y = 0$ et (x, y) libre $\Rightarrow x \wedge y \neq 0$ d'où l'équivalence demandée.

a. Voir section 25.3.3 du cours complet page 489.

2.1.3 Produit scalaire dans une base orthonormée

❑ Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de E. Alors

$$\boxed{e_1 \wedge e_2 = e_3} = -e_2 \wedge e_1, \ \boxed{e_2 \wedge e_3 = e_1} = -e_3 \wedge e_2 \text{ et } \boxed{e_3 \wedge e_1 = e_2} = -e_1 \wedge e_3$$

En effet, soit $z \in E$, $z = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2, z] &= \det_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1, e_2, z) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \\
&= \gamma \\
&= \langle e_3, z \rangle \text{ car } (e_1, e_2, e_3) \text{ est orthonormée}
\end{aligned}$$

On a donc $e_3 = e_1 \wedge e_2$. Ensuite, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe et $[e_2, e_3, e_1] = -[e_2, e_1, e_3] = +[e_1, e_2, e_3]$ donc (e_2, e_3, e_1) est aussi une base orthonormée directe donc ,d'après ce qui précède, $e_2 \wedge e_3 = e_1$. De même, (e_3, e_1, e_2) est une base orthonormée directe donc $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

❑ Soient $a, b \in E$ unitaires et orthogonaux. Alors $a \wedge b$ est l'unique vecteur c de E tel que (a, b, c) soit une base orthonormée directe.

En effet, si $c \in E$ est tel que (a, b, c) est une base orthonormée directe, on doit avoir $c \in \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$, or $\dim \mathrm{Vect}(a, b)^\perp = 1$ car (a, b) est libre donc il existe $e \in E$ unitaire tel que $\mathrm{Vect}(a, b)^\perp = \mathrm{Vect}(e)$. c s'écrit donc $c = \alpha e$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, or $\|c\| = 1 \Leftrightarrow \|\alpha e\| = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow c = \pm e$. Or (a, b, e) et $(a, b, -e)$ sont deux bases orthonormées d'orientation opposées donc un seul choix convient pour obtenir une base orthonormée directe.

Soit donc $c \in E$ tel que (a, b, c) soit une base orthonormée directe. Alors on a vu que $a \wedge b = c$.

❑ Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe, $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $x' = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$. Calculons $x \wedge x'$.

$$\begin{aligned}
x \wedge x' &= (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3)\left(\alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3\right) \\
&= \alpha\alpha' \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{0} + \alpha\beta' \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{e_3} + \alpha\gamma' \underbrace{e_1 \wedge e_3}_{-e_2} + \beta\alpha' \underbrace{e_2 \wedge e_1}_{-e_3} + \beta\beta' \underbrace{e_2 \wedge e_2}_{0} + \beta\gamma' \underbrace{e_2 \wedge e_3}_{e_1} \\
&\quad + \gamma\alpha' \underbrace{e_3 \wedge e_1}_{e_2} + \gamma\beta' \underbrace{e_3 \wedge e_2}_{-e_1} + \gamma\gamma' \underbrace{e_3 \wedge e_3}_{0}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \wedge x' = \left(\beta\gamma' - \gamma\beta'\right) e_1 - \left(\alpha\gamma' - \gamma\alpha'\right) e_2 + \left(\alpha\beta' - \beta\alpha'\right) e_3}$$

Pour s'en rappeler, on peut développer le faux déterminant suivant par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & e_1 \\ \beta & \beta' & e_2 \\ \gamma & \gamma' & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} e_3$$

Illustration : recherche d'équation cartésienne Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ avec (u, v) libre. On cherche une équation cartésienne du plan $P = \mathrm{Vect}(u, v)$. Posons $w = u \wedge v$, $P^\perp = \mathrm{Vect}(w)$ donc $P = \{w\}^\perp$. Si $w = (\alpha, \beta, \gamma)$, l'équation cartésienne de P est alors $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

D'une autre façon :

$$\begin{aligned}
X = (x, y, z) \in P &\Leftrightarrow \det(u, v, X) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \alpha \\ u_2 & v_2 & \beta \\ u_3 & v_3 & \gamma \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

2.1.4 Norme du produit scalaire

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$, θ l'angle géométrique de x et y. Alors

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta$$

On en déduit que $\forall x, y \in E$, $\langle x, y\rangle^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2$.

Démonstration

- Si $\theta \in \{0, \pi\}$, (x, y) est liée et $x \wedge y = 0$, on a bien $0 = \|x\| \, \|y\| \, 0$.
- Si $\theta \in \left]0, \pi\right[$, (x, y) est libre. Soit donc $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$, e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base orthonormée de Vect (x, y) et $e_3 = e_1 \wedge e_2$, ainsi (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe. On a $\dfrac{y}{\|y\|} = \alpha e_1 + \beta e_2$ où $\alpha = \left\langle e_1, \dfrac{y}{\|y\|} \right\rangle$ et $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} = \cos\theta$ donc $\alpha = \cos\theta$ et $1 = \left\| \dfrac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ d'où $\beta^2 = \sin^2\theta \Leftrightarrow |\beta| = \sin\theta$. $x = \|x\| \, e_1$, $y = \|y\| \cos\theta e_1 + \|y\| \, \beta e_2$ d'où

$$x \wedge y = \|x\| \, \|y\| \cos\theta \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{0} + \|x\| \, \|y\| \, \beta \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{e_3}$$

$$\boxed{\Rightarrow \|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \, |\beta| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta}$$

- Montrons maintenant le corollaire. Si x ou y est nul, $\langle x, y\rangle^2 = 0 = \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2$. Si $x, y \in E \setminus \{0\}$, en notant θ l'angle géométrique de x et y, $\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$ et $\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta$ d'où le résultat [a].

Remarques ❑ $\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \Leftrightarrow \sin\theta = 1 \Leftrightarrow x \perp y$.

❑ Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée, $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{R}$, $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, $x' = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$, alors d'après l'égalité vectorielle du théorème, on a

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2\right) = \left(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'\right)^2 + \left(\beta\gamma' - \gamma\beta'\right)^2 + \left(\alpha\gamma' - \gamma\alpha'\right)^2 + \left(\alpha\beta' - \beta\alpha'\right)^2$$

En arithmétique, cela démontre que tout nombre produit de sommes de trois carrés s'écrit comme la somme de quatre carrés [b].

2.1.5 Double produit vectoriel

Soient $a, b, c \in E$, alors

$$a \wedge (b \wedge c) = b \langle a, c\rangle - c \langle a, b\rangle$$

On en déduit tout de suite :

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge c &= -c \wedge (a \wedge b) \\ &= -\left(a \langle b, c\rangle - b \langle a, c\rangle\right) \\ &= b \langle a, c\rangle - a \langle b, c\rangle\end{aligned}$$

Démonstration

- Si b ou c est nul, c'est vérifié. On supposera dans la suite $b, c \in E \setminus \{0\}$.
- Si (b, c) est liée, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $c = \alpha b$ donc $b \wedge c = 0$ donc $a \wedge (b \wedge c) = 0$. De plus, $b \langle a, c\rangle - c \langle a, b\rangle = b \langle a, \alpha b\rangle - \alpha b \langle a, b\rangle = 0$.

[a]. Afin d'éclairer nos chers lecteurs blonds venant d'Angers, il est à noter que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

[b]. Pour répondre à l'éventuelle question de nos lecteurs angevins chevelus, cela ne sert effectivement pas à grand chose.

– Si (b,c) est libre, soit $e_1 = \dfrac{b}{\|b\|}$, e_2 tel que (e_1,e_2) est une base orthonormée de (b,c) et $e_3 = e_1 \wedge e_2$. On a alors $b = \|b\|\, e_1 = \alpha e_1$, $c = \beta e_1 + \gamma e_2$ et $a = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$, donc $\langle a,c\rangle = \lambda\beta + \mu\gamma$, $\langle a,b\rangle = \lambda\alpha$ d'où

$$\begin{aligned} b\langle a,c\rangle - c\langle a,b\rangle &= \alpha e_1 (\lambda\beta + \mu\gamma) - \lambda\alpha(\beta e_1 + \gamma e_2) \\ &= \mu\gamma\alpha e_1 - \lambda\alpha\gamma e_2 \end{aligned}$$

D'autre part, $b \wedge c = \alpha\gamma e_3$ donc

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge c) &= \alpha\gamma (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3) \wedge e_3 \\ &= \alpha\gamma(-\lambda e_2 + \mu e_1) \\ &= \alpha\gamma\mu e_1 - \lambda\alpha\gamma e_2 \end{aligned}$$

2.2 Le groupe orthogonal en dimension 3

E est toujours un espace euclidien orienté de dimension 3.

2.2.1 Orientation d'un plan

❑ Soit $a \in E$ unitaire, $P = \{a\}^\perp$, $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$, $\mathcal{B}' = (e_1',e_2')$ deux bases de P. Alors (a,e_1,e_2) et (a,e_1',e_2') sont deux bases de E et

$$\begin{aligned} \det \mathcal{P}_{(a,e_1,e_2)}^{(a,e_1',e_2')} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{vmatrix} \\ &= \det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

On définit une orientation sur P en décrétant qu'une base $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ de $\mathcal{B}$ est directe si et seulement si (a,e_1,e_2) est une base directe de E déjà orienté.

❑ Mais on a aussi $P = \{-a\}^\perp$ et, si $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ est une base orthonormée de P, $(-a,e_1,e_2)$ est une base orthonormée de E et

$$\det \mathcal{P}_{(a,e_1,e_2)}^{(-a,e_1,e_2)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Si on choisit $-a$, c'est l'orientation opposée qui est choisie pour P. Plus généralement, $\forall t > 0$, ta détermine la même orientation sur P que a et $\forall t < 0$, ta détermine sur P la même orientation que $-a$.

2.2.2 Histoire

Il était une fois $f \in \mathrm{O}(E)$...

❑ f admet forcément une valeur propre ; c'est-à-dire $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = 0$. En effet, $x \longmapsto \det(x\mathrm{Id}_E - f)$ est un polynôme de degré 3, qui admet forcément une racine réelle. Il existe donc un $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc, puisque f conserve la norme, $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $\lambda \in \{\pm 1\}$.

❑ Choisissons $a \in E$ unitaire tel que $f(a) = \lambda a$, soit $P = \{a\}^\perp$. Alors P est orienté par le choix de a et stable par f : soit $z \in P$, montrons que $f(z) \in P$.

$$\begin{aligned} \langle f(z), a\rangle &= \langle f(z), \pm f(a)\rangle \\ &= \langle z, \pm a\rangle \text{ car } f \text{ conserve le produit scalaire} \\ &= \pm\langle z,a\rangle \\ &= 0 \text{ car } z \in \{a\}^\perp \end{aligned}$$

❑ Soit φ l'endomorphisme de P induit par f. Pour $z \in P$, $\|\varphi(z)\| = \|f(z)\| = \|z\|$ donc $\varphi \in \mathrm{O}(P)$ et $\dim P = 2$. φ est donc une rotation ou une réflexion, nombre de situations doublé par les deux valeurs possibles de λ.

(1) $\lambda = 1$ et φ est une réflexion. Soit $e_1 \in P$ tel que φ est la réflexion d'axe $D = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ dans P, $e_2 = a \wedge e_1$. Alors $e_2 \in P$ et (e_1, e_2) est une base orthonormée directe de P. De plus $f\,(e_2) = \varphi\,(e_2) = -e_2$ donc

$$\mathrm{Mat}_{(a,e_1,a\wedge e_1)}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On reconnait en f la réflexion de E de plan $\mathrm{Vect}\,(a, e_1)$.

(2) $\lambda = -1$ et φ est une réflexion. Soit $e_1 \in P$ tel que φ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(e_1)$, $e_2 = a \wedge e_1 \in P$. (a, e_1, e_2) est alors une base orthonormée directe de E, et

$$\mathrm{Mat}_{(a,e_1,e_2)}\,(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On reconnait là que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(e_1)$.

On appelle retournement ou demi-tour toute symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.

(3) $\lambda = 1$ et φ est une rotation de P orienté par le choix de a, on le rappelle. Ainsi $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe (e_1, e_2) de P, $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}\,(\varphi) = R_\theta$. Soit maintenant (e_1, e_2) une base orthonormée directe de P, donc (a, e_1, e_2) est une base orthonormée directe de E et

$$\mathrm{Mat}_{(a,e_1,e_2)}\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

– Pour $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, f est le demi-tour d'axe $\mathrm{Vect}\,(a)$.
– Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $f = \mathrm{Id}_E$.

Dans les autres cas, f s'appelle la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle θ et se note $R_{a,\theta}$.

Si $x = \alpha a + y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in P$ [a], $f\,(x) = \alpha a + r_\theta\,(y)$ où r_θ est la rotation de P d'angle θ. De plus, $R_{a,\theta} = R_{-a,-\theta}$ car $-a$ définit l'orientation opposée de P.
Réciproquement, soit $R_{a,\theta}$ la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle θ. Alors, si (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\{a\}^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{(a,e_1,e_2)}\,(R_{a,\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M_\theta$$

On a bien $M_\theta \in \mathrm{O}_3\,(\mathbb{R})$ et (a, e_1, e_2) est une base orthonormée directe. Mieux, $\det M_\theta = 1$ donc $M_\theta \in \mathrm{SO}_3\,(\mathbb{R})$ donc $R_{a,\theta} \in \mathrm{SO}\,(E)$.

(4) $\lambda = -1$ et $\varphi \in \mathrm{SO}\,(P)$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = r_\theta$, d'où pour $x = \alpha a + y$ avec $y \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f\,(x) = -\alpha a + r_\theta\,(y)$. Ainsi, si (e_1, e_2) est une base orthonormée de P,

$$\mathrm{Mat}_{(a,e_1,e_2)}\,(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a. On rappelle que $E = \mathbb{R}\alpha \oplus P$.

Soit $R_{a,\theta}$ la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle θ, σ_P la réflexion de plan $P = \{a\}^{\perp}$. Alors

$$\begin{aligned} \sigma_P \circ R_{a,\theta}(\alpha a + y) &= \sigma_P(-\alpha a + y) \\ &= -\alpha a + r_\theta(y) \\ &= f(\alpha a + y) \\ R_{a,\theta} \circ \sigma_P(\alpha a + y) &= R_{a,\theta}(\alpha a + r_\theta(y)) \\ &= -\alpha a + r_\theta(y) \\ &= f(\alpha a + y) \end{aligned}$$

f est la composée commutative de la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle θ et de la réflexion de plan $\{a\}^{\perp}$.

Bilan

SO (E) est composé :
- de Id_E ;
- des rotations axiales $R_{a,\theta}$ où $a \in E$ unitaire et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ [a].

O $(E) \setminus$SO (E) est composé :
- des réflexions ;
- des composées commutatives $R_{a,\theta} \circ \sigma_P$

a. Ce qui comprend les demi-tours.

3 Complément : identification de la nature d'un endomorphisme en dimension 3

On se donne $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, et on muni $\mathbb{R}^3$ orienté par le choix de la base canonique du produit scalaire canonique. Comment identifier géométriquement $f \in \mathrm{O}\left(\mathbb{R}^3\right)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_3}(f) = M$?

3.1 Étude préliminaire

❑ Si on ne dit pas que M est orthogonale, penser à le prouver. Il suffit pour cela de vérifier que les vecteurs colonnes sont bien de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

❑ On calcule le déterminant de M, on a même besoin que de son signe :
- si $\det M > 0$, alors, puisque $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $f \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^3\right)$;
- si $\det M < 0$, alors $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $f \in \mathrm{O}\left(\mathbb{R}^3\right) \setminus \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

3.2 Si f est dans SO $(\mathbb{R}^3)$

❑ f est une rotation donc $\exists a \in E$ unitaire, $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ [b] tels que $f = R_{a,\theta}$. On a alors pour $x = \alpha a + y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in \{a\}^{\perp}$, $f(x) = \alpha a + r_\theta(y)$ donc

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow y = r_\theta(y) \\ &\Leftrightarrow \left(r_\theta - \mathrm{Id}_{\{a\}^{\perp}}\right)(y) = 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \det\left(r_\theta - \mathrm{Id}_{\{a\}^{\perp}}\right) &= \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta \\ &= 2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

b. On suppose en effet $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, dans ce cas $M = \mathrm{I}_3$, ce qui est plutôt facile à identifier, sauf peut-être lorsque l'on vient d'Angers et que l'on est blond, mais là c'est une autre histoire.

Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\det\left(r_\theta - \mathrm{Id}_{\{a\}^\perp}\right) \neq 0$ donc $\left(r_\theta - \mathrm{Id}_{\{a\}^\perp}\right)(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}\,(a)$. On a donc

$$\boxed{R_{a,\theta}(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}\,(a)}$$

On obtient donc $\mathrm{Vect}\,(a)$ de $R_{a,\theta}$ en trouvant les $x \in E$ tels que $f(x) = x$, ce qui se fait en résolvant le système $MX - X = 0$. On doit normalement trouver une droite vectorielle Δ. Il y a deux choix possibles pour l'orientation du Δ, pour décider on choisit a unitaire sur Δ donc on a $\Delta = \mathrm{Vect}\,(a)$.

❑ On sait que $P = \{a\}^\perp$, et puisque $f = R_{a,\theta}$, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée directe de P,

$$\mathrm{Mat}_{(a,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{Tr}\,M = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_3}(f)) = \mathrm{Tr}\,\left(\mathrm{Mat}_{(a,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(f)\right)$ donc on en déduit $\mathrm{Tr}\,M = 1 + 2\cos\theta$ d'où

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}\,M - 1}{2}}$$

❑ Notons $\mathrm{BC}_3 = (e_1, e_2, e_3)$, soit $x \in E$ non colinéaire à a avec $x = \alpha a + y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $y = \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée directe de P. Alors

$$\begin{aligned}
[a, x, f(x)] &= \det_{(a,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(a, x, f(x)) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \lambda & \lambda\cos\theta - \mu\sin\theta \\ 0 & \mu & \lambda\sin\theta + \mu\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & \lambda\cos\theta - \mu\sin\theta \\ \mu & \lambda\sin\theta + \mu\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \left(\lambda^2 + \mu^2\right)\sin\theta
\end{aligned}$$

Or $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ car $y \neq 0$ donc $\sin\theta$ est du signe de $[a, x, f(x)]$. Mais on a aussi

$$\boxed{\mathrm{sgn}\,(\sin\theta) = \mathrm{sgn}\,[a, x, f(x)] = \mathrm{sgn}\,\det_{\mathrm{BC}_3}(a, x, f(x))}$$

Pour simplifier les calculs, on choisit x parmi les vecteurs de BC_3 non colinéaires à a, $f(x)$ est déjà exprimé dans M. Connaissant $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$, on détermine θ à 2π près, et ainsi on caractérise complètement f.

3.3 Si $f \in \mathbf{O}\left(\mathbb{R}^3\right) \backslash \mathbf{SO}\left(\mathbb{R}^3\right)$

❑ Si M est symétrique, c'est-à-dire si ${}^{\mathrm{T}}M = M$, alors f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. f ne peut être une symétrie par rapport à une droite, car dans ce cas $f \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^3\right)$. C'est donc une réflexion, ou $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ [a]. En écartant le dernier cas, il nous faut déterminer le plan P de la réflexion. Or

$$\boxed{P = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$$

que l'on trouve en résolvant $MX - X = 0$.

❑ Si M n'est pas symétrique, $f = R_{a,\theta} \circ \sigma_{\{a\}^\perp}$ avec $a \in E$ unitaire, $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On trouve $\Delta = \mathrm{Vect}\,(a) = \{x \in E | f(x) = -x\}$ en résolvant le système $MX + X = 0$. On choisit a unitaire sur cette droite, déterminant l'orientation de $\{a\}^\perp$. Reste à trouver θ. Or, pour toute base orthonormée directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\{a\}^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{(a,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a. Là encore, à moins de venir d'Angers et d'avoir les cheveux couleur d'or, alors on saura reconnaître dès le début M comme étant $-\mathrm{I}_3$.

Par conservation de la trace par changement de base,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\operatorname{Tr} M + 1}{2}}$$

et $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[a, x, f(x)]$ où $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \operatorname{Vect}(a)$, que l'on prend en pratique comme étant un vecteur de BC_3 non colinéaire à a.

3.4 Illustration

On demande d'identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

❏ Vérifions que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$: $8 - 16 + 8 = 0$, $-4 - 28 + 32 = 0$, $-32 + 28 + 4 = 0$, $\frac{1}{9}\left(8^2 + 4^2 + 1^2\right) = 1$ et enfin on a bien $\frac{1}{9}\left(4^2 + 7^2 + 4^2\right) = 1$. Calculons maintenant $\det A$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 9 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \frac{1}{9^2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= \frac{4 \times 8 + 7 \times 7}{81} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\det A = 1$ donc $f \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

❏ Résolvons le système $AX - X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 4x_3 = 9x_1 \\ -4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 9x_2 \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 9x_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 & \\ -9x_2 + 9x_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ 9x_2 - 9x_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(-3, 1, 1)$ donc on prend $a = \frac{(-3,1,1)}{\|(-3,1,1)\|} = \frac{(-3,1,1)}{\sqrt{11}}$.

❏ $f = R_{a,\theta}$ avec

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\operatorname{Tr} M - 1}{2} \\
&= \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

d'où $\cos\theta \in \pm\arccos\left(\frac{7}{18}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$. Enfin, trouvons le signe de $\sin\theta$; c'est celui de

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1\cdot(-1)^{1+2}}{9\sqrt{11}}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{9\sqrt{11}} < 0$$

Finalement,

$$\theta \in -\arccos\left(\frac{7}{18}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$$