- limite supérieure
- Suites sous-additives

(Corrigé abrégé)

I

1: $(s_n)_n$ et $(i_n)_n$ sont bien définies car $(u_n)_n$ est bornée.

Soit $A_n = \{u_k, k \geq n\}$ on a clairement $A_{n+1} \subset A_n$

par conséquent : $\begin{cases} \sup A_{n+1} \leq \sup A_n \\ \inf A_{n+1} \geq \inf A_n \end{cases}$: $(s_n)_n$ décroît et $(i_n)_n$ croît.

De plus $s_n \geq i_n \geq i_0 \quad \forall n$ et $i_n \leq s_n \leq s_0 \quad \forall n$.

s_n est décroissante minorée
i_n est croissante majorée } Les deux suites convergent.

2

(a) $\forall n \geq 0 \quad s_n = \mathrm{Max}\{u_0, u_1, u_2\} = S$ et $i_n = \mathrm{Min}\{u_0, u_1, u_2\} = I$.

(b) $s_n = \sup\left\{(-1)^k + \frac{1}{2^k}, k \geq n\right\} = 1 + \frac{1}{2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$ (partie entière supérieure)

$$S = \lim_{n\infty} 1 + \frac{1}{2^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil}} = 1$$

$$i_n = \inf\left\{(-1)^k + \frac{1}{2^k}, k \geq n\right\} = -1 + \frac{1}{2^{2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1}}$$

$$I = \lim_{n\infty} -1 + \frac{1}{2^{2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1}} = -1$$

3] ~~Pour tout ...~~

3] $u_n \in A_n$ donc $i_n \leq u_n \leq s_n$ par définition des bornes inf et sup ; et donc $I \leq S$ en passant à la limite □

4] (a) si $S = I$, comme $i_n \leq u_n \leq s_n$ $u_n \xrightarrow[n\infty]{} S$ par théorème d'encadrement. □

(b) si $u_n \xrightarrow[n\infty]{} L$ alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0$ $u_n \leq L+\varepsilon$ ceci prouve que $A_n \subset]-\infty, L+\varepsilon]$

et donc $s_n \leq L+\varepsilon$.

~~par~~ passage à la limite il vient $S \leq L+\varepsilon$, ceci $\forall \varepsilon > 0$ donc $\underline{S \leq L}$

Symmetriquement, $I \geq L$ on a donc $I \geq S$, et par 3] $I = S$. □

5] (a) Soit $\varepsilon > 0$.

$s_n \to S$ donc $\exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$ $s_n < S+\varepsilon$.

Alors par définition de la borne supérieure $\forall x \in A_n$, $x \leq s_n < S+\varepsilon$. $(\forall n > n_\varepsilon)$

Ainsi $\forall n > n_\varepsilon$ $u_n < S+\varepsilon$.

(b) Supposons que $\forall n > n_\varepsilon$ on ait $u_n \leq S-\varepsilon$ alors $s_{n_\varepsilon+1} \leq S-\varepsilon$.

Mais comme $(s_n)_n$ decroît, on a aussi $s_{n_\varepsilon+1} \geq S$. C'est impossible.

6]. Soit ℓ une valeur d'adhérence. $\exists \varphi$ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 5(a) [même notations]

$\forall n > n_\varepsilon$ on a $\varphi(n) > n_\varepsilon$ donc $u_{\varphi(n)} \leq s_{\varphi(n)} \leq S+\varepsilon$. (1)

Par passage à la limite [Tout converge] on a $\ell \leq S+\varepsilon$: Ainsi

$\ell \leq S+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\underline{\ell \leq S}$

- Montrons que S est une valeur d'adhérence : ~~On construit une~~

~~Soit~~

6] (Suite)

D'après la quest. 5 :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \{n, \quad S-\varepsilon < u_n < S+\varepsilon\} \text{ est non vide.}$$

~~On a pu~~ on commence par $\varepsilon = 1$: $\exists n_1, S-1 \le u_{n_1} < S+1$ on pose $\varphi(1) = n_1$.

Soit $k \geq 1$

Supposons construits $n_1 < n_2 \dots < n_k$ et $S - \frac{1}{i} \le u_{n_i} \le S + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

d'après 5], $\exists n_{k+1}$ (qu'on peut prendre supérieur à n_k) tel que

$$S - \frac{1}{k+1} < u_{n_{k+1}} < S + \frac{1}{k+1}.$$

Par le principe de recurrence, la suite $(n_k)_k$ est bien définie. en posant $\varphi(k) = n_k$

on a l'extractrice requise $\square$.

7. (a) Soit $\varepsilon > 0$. on sait (5(a)) que $\exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon \quad \begin{cases} u_n < \overline{\lim}\, u + \varepsilon \\ v_n < \overline{\lim}\, v + \varepsilon. \end{cases}$

en sommant :

$$\forall n > n_\varepsilon \qquad u_n + v_n \le \overline{\lim}\, u + \overline{\lim}\, v + 2\varepsilon.$$

Si φ est une extractrice : $\forall n > n_\varepsilon$ on a $\varphi(n) > n_\varepsilon$ et donc

$$u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)} \le \overline{\lim}\, U + \overline{\lim}\, V + 2\varepsilon. \quad (*)$$

Si L est une valeur d'adhérence de $(u_n + v_n)_n$ on peut appliquer $(*)$

à une extractrice associée et il vient en passant à la limite :

$$L \le \overline{\lim}\, U + \overline{\lim}\, V + 2\varepsilon. \text{ C'est vrai } \forall \varepsilon > 0$$

Donc $\quad L \le \overline{\lim}\, U + \overline{\lim}\, V$: c'est vrai pour toute valeur d'adhérence L, donc en particulier pour S.

7 (b) Comme f est croissante continue on sait que pour toute partie A bornée

$$f(\sup A) = \sup f(A)$$

ceci prouve que $f(A_n) = \sup\{f(u_k),\ k \geq n\}$.

Le terme de gauche tend, quand $n \to +\infty$ vers $f(S)$ [car f continue]

Le terme de droite, par définition, vers $\overline{\lim}\,(f(u_n))$.

8. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to S$.

on sait que
$$u_{\varphi(n)} = \frac{u_{\varphi(n)-1} + a}{u_{\varphi(n)-2} + b}$$

D'après la questi (5), on a pour ~~tou~~ n assez grand $I - \varepsilon \leq u_n < S + \varepsilon$

ainsi
$$u_{\varphi(n)} \leq \frac{S + \varepsilon + a}{I - \varepsilon + b} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

en passant à la limite :
$$S \leq \frac{S + \varepsilon + a}{I - \varepsilon + b} \quad \forall \varepsilon > 0$$

ceci vaut $\forall\, \varepsilon > 0$ donc $S \leq \dfrac{S + a}{I + b}$. L'autre inégalité est analogue.

De $S \leq \dfrac{S+a}{I+b}$ on déduit $S(b-1) \leq a - IS$.

De $I \geq \dfrac{I+a}{S+b}$ on déduit $I(b-1) \geq a - IS$

en regroupant il vient $S(b-1) \leq I(b-1)$ donc (puisque $b > 1$)

$\underline{S \leq I}$. Mais $S \geq I$ et finalement $S = I$.

Ce qui prouve, selon 4(a), la convergence de $(u_n)_n$

II

1\. (a) : $u_{bq+r} \leq u_{bq} + u_r$. et par recurrence facile $u_{bq} \leq b\,u_q$.

(b) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\exists (b,r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,\dots,q-1\}$ t.q $n = bq+r$.

D'après (a) $u_n \leq b u_q + u_r$ donc $\frac{u_n}{n} \leq \frac{b}{n} u_q + \frac{u_r}{n}$

si $u_q \geq 0$ Mais $\frac{b}{n} \leq \frac{1}{q}$ et $u_r \in \{u_0, \dots, u_{q-1}\}$. Donc si l'on note $A = \underset{r \in \{0,q-1\}}{\mathrm{Max}} u_r$

on a A independant de n et $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{A}{n}$.

si $u_q < 0$ on note que $\frac{b}{n} - \frac{1}{q} = \frac{-r}{nq} \geq \frac{-1}{n}$ Donc

$\frac{u_n}{n} \leq \frac{b}{n} u_q + \frac{u_r}{n} \leq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) u_q + u_r = \frac{u_q}{q} - \frac{u_q}{n} + \frac{u_r}{n}$ et on conclut de même.

(c) En appliquant la quest° ~~precedente~~ (a) pour $q=1$ on a : $\forall n$ $\frac{u_n}{n} \leq u_1$ donc

La suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est majorée. Si elle est de plus minorée, elle possède une limite supérieure ~~qui est aussi une valeur d'adhérence~~;

on a $u_n \leq \frac{u_q}{q} + \frac{A}{n}$ donc $\overline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim} \left(\frac{u_q}{q} + \frac{A}{n} \right) = \lim_{n\infty} \left(\frac{u_q}{q} + \frac{A}{n} \right) = \frac{u_q}{q}$.

(d) Dans l'hypothèse précédente on a

$$\forall q, \quad \overline{\lim} \left(\frac{u_n}{n}\right) \leq \frac{u_q}{q}.$$

Ceci prouve que $\overline{\lim} \left(\frac{u_n}{n}\right) \leq \underline{\lim} \frac{u_q}{q}$ et donc que $\frac{u_n}{n}$ converge.

Si maintenant $\frac{u_n}{n}$ n'est pas minorée : $\forall A' < 0$, $\exists q$ t.q $\frac{u_q}{q} < A' - 1$

~~on a alors~~

On a alors $\forall n > q \quad \frac{u_n}{n} < A' - 1 + \frac{A}{n}$

et comme $A' - 1 + \frac{A}{n} \to A' - 1$, $\exists N_1, \quad \forall n > N_1 \quad \frac{u_n}{n} < A'$: c'est la définition de $\frac{u_n}{n} \to -\infty$ $\square$

• Si l'on prend $u_n = n$ alors $\frac{u_n}{n} \to 1$ (cas très particulier mais valable, ici on a en fait $u_{n+m} = u_n + u_m$.

• Si l'on prend $u_n = -n^2$: $u_{n+m} = -(n+m)^2 = -n^2 - m^2 - 2mn \leq -n^2 - m^2 = u_n + u_m$.

on a $\frac{u_n}{n} \to -\infty$.

2) • Si (μ_n) s'annule : $\exists n_0$ $\mu_{n_0} = 0$. Alors $\forall p > 0 \quad \mu_{n_0 + p} \leq \mu_{n_0} \mu_p = 0$

et donc $\mu_n = 0 \ \forall n > n_0$ aussi $\mu_n^{\frac{1}{n}} = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

• Si $\forall n \ \mu_n > 0$. On pose $u_n = \ln(\mu_n)$ alors $(u_n)_n$ est sous-additive

D'après 1) $\frac{u_n}{n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

si $\ell \in \mathbb{R}$ par continuité de l'exponentielle $e^{\frac{u_n}{n}} \to e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$: $\mu_n^{\frac{1}{n}}$ converge.

si $\ell = -\infty$ $\frac{\ln(\mu_n)}{n} \to -\infty$ Donc $\mu_n^{\frac{1}{n}} \to 0$.

3) (a) $s_{n+m} \leq s_n s_m$: En effet pour tout chemin auto évitant de longueur $n+m$ on peut fabriquer 2 chemins auto évitant de longueur n [les n premiers points] et m [les $m+1$ derniers] qui n'ont qu'une extrémité commune.

~~L'applicat~~. Si l'on note E_n l'ensemble des chemins auto évitant de longueur n [sans s'intéresser au premier point, puisque par invariance, il y en a autant au départ de chaque point du réseau) on définit une applicati $E_{n+m} \to E_n \times E_m$

II 3 (suite)

Cette application est injective donc $|E_{n+m}| \leq |E_n \times E_m| = |E_n||E_m|$ c'est l'inégalité voulue.

(b) soit $a = \lim s_n^{\frac{1}{n}} = \inf s_n^{\frac{1}{n}}$. On a : $\forall \varepsilon>0, \exists n_0, \forall n>n_0 \quad a \leq s_n^{\frac{1}{n}} \leq a+\varepsilon$ d'après 2)

ceci fournit $\quad a^n \leq s_n \leq (a+\varepsilon)^n$

4 : (a) Il suffit de dire que $\forall n,m \quad \|M^{m+n}\| = \|M^m M^n\| \leq \|M^n\| \, \|M^m\|$

et d'appliquer (2) à la suite $u_n = \|M^n\|$.

(b) Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, $\exists\, C, D>0$ tq $\forall M$

$C\|M\| \leq N(M) \leq D\|M\|$ ~~$C N(M) \leq \|M\| \leq D N(M)$~~ où $\| \; \|$ est une norme d'algèbre

on en déduit $\forall M, \forall m \qquad C^{\frac{1}{n}} \|M^n\|^{\frac{1}{n}} \leq N(M^n)^{\frac{1}{n}} \leq D^{\frac{1}{n}} \|M^n\|^{\frac{1}{n}}$

Comme $C^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ et $D^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ on a $\lim N(M^n)^{\frac{1}{n}} = \ell(M)$.

III

1) • si $\forall n \; |u_n| \leq M$ alors $\left|\frac{u_0+\dots+u_n}{n+1}\right| \leq \frac{|u_0|+\dots+|u_n|}{n+1} \leq M \quad \forall n$. Donc $(v_n)_n$ est borné

• Soit $S = \overline{\lim}\, u_n$: $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon, \quad \forall n>n_\varepsilon \quad u_n \leq S+\varepsilon$.

Par suite : $\forall n \geq n_\varepsilon \qquad v_n \leq \frac{u_0+\dots+u_{n_\varepsilon}}{n+1} + (S+\varepsilon)\left(\frac{n-n_\varepsilon+1}{n+1}\right) \leq \frac{A_\varepsilon}{n+1} + S+\varepsilon$

où $A_\varepsilon = u_0+\dots+u_{n_\varepsilon}$.

Comme $\frac{A_\varepsilon}{n+1} \to 0$, $\exists N_1, \quad \forall n>N_1 \quad \frac{A_\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon$. Ainsi $\forall n > \max(N_1, n_\varepsilon) \quad v_n \leq S+2\varepsilon$

ceci prouve $\forall \varepsilon>0 \quad \overline{\lim}\, v_n \leq S+2\varepsilon$ i.e $\overline{\lim}\, v_n \leq S$. □

2) On prend $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ alors ~~[illegible]~~ $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 1 = \overline{\lim}\, u_n$.