

La théorie des Ondelettes et ses Applications dans l'Imagerie Médicale

Nils Xhoffray
Pierre Papin

Date : 22 novembre 2024

Table des matières

1	Introduction	2
2	Résumé	2
3	Abstract	2
4	Contexte d'étude	4
5	La Théorie de Fourier	5
5.1	Présentation	5
5.2	Théorie des séries de Fourier	5
5.3	Transformée de Fourier	5
5.4	Transformée de Fourier à court terme	6
6	La théorie des ondelettes	7
6.1	Introduction	7
6.2	Ondelettes de Haar	8
6.3	Analyse multi-échelle à l'aide de l'ondelette de Haar	8
6.3.1	Détermination des filtres passe-haut et passe-bas pour l'ondelette de Haar	8
6.3.2	Exemple d'application à une matrice de pixels	8
6.3.3	Résultats des coefficients Haar	9
7	Applications des ondelettes dans le domaine biomédical	10
7.1	L'échographie Doppler	10
7.2	Utilisation des ondelettes pour le traitement du bruit	11
7.3	Utilisation des ondelettes pour extraire les détails	12
8	Conclusion	13

1 Introduction

Les ondelettes sont des outils mathématiques qui permettent d'analyser des signaux et des images à différentes échelles de manière plus efficace que les techniques traditionnelles, par exemple la **transformée de Fourier**. Ces dernières années, les ondelettes ont trouvé des applications variées, notamment dans le traitement d'images, la compression de données, ainsi que dans le domaine biomédical. Parmi les familles d'ondelettes les plus étudiées, l'**ondelette de Haar** est l'une des plus simples, la première étudiée, mais est aussi très efficace pour la détection des discontinuités et des changements brusques dans les signaux. Grâce à sa capacité à extraire des informations à différentes échelles, elle est particulièrement adaptée pour analyser des signaux présentant des discontinuités ou affectés par le bruit.

Ce rapport explore l'utilisation de l'**ondelette de Haar** dans le cadre du traitement des signaux et des images, en mettant l'accent sur son application dans le domaine biomédical, en particulier pour la réduction du bruit dans les images venant d'**échographies Doppler**. Après une introduction théorique aux différents concepts mathématiques, nous appliquerons la décomposition en **ondelette de Haar** sur des images de test, puis sur des images bruitées, afin d'observer l'efficacité de la **transformée en ondelettes** dans le traitement d'images d'**échographie Doppler**.

2 Résumé

Les ondelettes sont des outils mathématiques puissants, fortement utilisées dans le traitement des signaux et des images. Leur particularité réside dans leur capacité à analyser les signaux de manière multi-échelle, offrant une localisation spatio-fréquentielle. Une application notable des ondelettes se trouve dans le domaine de l'imagerie médicale, notamment pour l'échographie Doppler. Ce type d'imagerie permet d'examiner la circulation sanguine en mesurant le décalage Doppler des ondes réfléchies par les globules rouges. Cependant, les images échographiques sont souvent bruitées par un phénomène : le "speckle noise", un bruit granulaire résultant des interférences aléatoires des ondes réfléchies.

Dans ce contexte, les ondelettes de Haar jouent un rôle central pour réduire le bruit et améliorer la qualité des images. La **transformée en ondelettes** permet de décomposer une image en coefficients correspondant à différents niveaux de détail : les basses fréquences capturent les grandes structures tandis que les hautes fréquences représentent les détails fins, souvent associés au bruit. En ajustant ces coefficients grâce à des seuils, on peut réduire efficacement le bruit tout en préservant les contours des structures biologiques importantes, comme les thrombi veineux ou les parois des vaisseaux sanguins.

Par rapport à d'autres méthodes comme la transformée de Fourier, les ondelettes se distinguent par leur capacité à traiter les signaux non stationnaires, tout en préservant les informations locales et globales. Toutefois, leur application nécessite des choix précis, notamment en ce qui concerne le type d'ondelette utilisé et les seuils de traitement. Ces défis, bien que complexes, ouvrent la voie à des améliorations futures, notamment par l'intégration des ondelettes avec des algorithmes d'intelligence artificielle pour des diagnostics encore plus robustes.

3 Abstract

Wavelets are powerful mathematical tools widely used in signal and image processing. Their unique feature lies in their ability to perform multi-scale analysis, offering precise spatio-frequency localization. A notable application of wavelets is in medical imaging, particularly Doppler ultrasound. This technique examines blood flow by measuring the Doppler shift of waves reflected by red blood cells. However, ultrasound images are often corrupted by speckle noise, a granular disturbance caused by random wave interferences.

In this context, Haar wavelets play a central role in reducing noise and enhancing image quality. The wavelet transform decomposes an image into coefficients corresponding to various levels of detail : low frequencies capture large structures, while high frequencies represent fine details, often linked to noise. By adjusting these coefficients through thresholding, it is possible to effectively reduce noise while preserving critical features, such as venous thrombi or vessel walls.

Compared to other methods, such as the Fourier transform, wavelets excel in handling non-stationary signals while maintaining both local and global information. However, their application requires careful choices, particularly regarding the type of wavelet and processing thresholds. Despite these challenges, wavelets pave the way for future advancements, especially when combined with artificial intelligence algorithms for more robust diagnostics.

Mots-clés	Key-words
Transformée en ondelettes	Wavelet transform
Transformée de Fourier	Fourier transform
Imagerie Médicale	Medical Imaging
Ondelette de Haar	Haar wavelet
Échographie	Ultrasound
Analyse Multi-Résolution	Multi-Resolution Analysis
Bruit de speckle	Speckle Noise

ATTENTION ! Toutes les images utilisées dans ce rapport sont des images personnelles, réalisées à l'aide de Numpy et PyWavelets [6][15]

4 Contexte d'étude

Les signaux sont au cœur de l'information, ils la transportent, et la définissent. Ainsi, les comprendre et les interpréter nous permet de mieux appréhender les informations transmises. Pour ce faire, et dans le cadre d'une représentation mathématique des signaux, de nombreux outils ont été développés.

Tout d'abord on se propose de définir le contexte d'étude des signaux, les différents types de signaux et les différents outils mathématiques utiles pour la bonne compréhension de cette étude.

Signal

On appelle signal toute fonction f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . [7] Les outils modernes utilisés pour étudier les signaux se basent sur leur numérisation. Dans ce contexte, les signaux sont alors des suites de réels. Dans le cadre de cette étude, nous considérerons uniquement des signaux discrets, pour la plupart du temps finis. Ainsi, les différents outils seront introduits dans ce cadre.

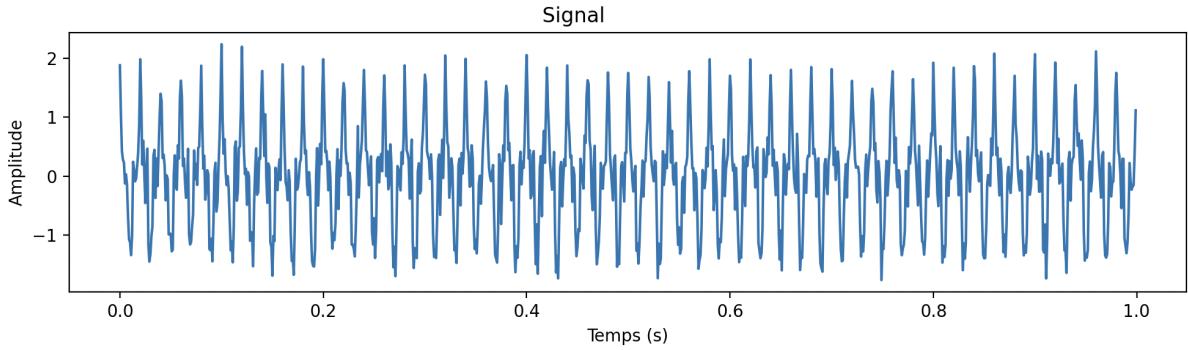


FIGURE 1 – Exemple de signal

On ne limitera pas l'étude aux signaux périodiques, car relativement rares dans les applications que nous étudieront dans la suite de ce rapport.

Théorème de Nyquist-Shannon

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un signal continu, dont le spectre fréquentiel est limité à une bande maximale de fréquence F_{\max} (l'amplitude d'un signal réel ne peut diverger).

Si le signal est échantillonné à une fréquence $F_s > 2F_{\max}$, alors f peut être parfaitement reconstruit à partir de ses échantillons : $\{f(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, où $T_s = \frac{1}{F_s}$.

Si cette condition n'est pas remplie, il y a repliement de spectre, ce qui rend la reconstruction impossible. La reconstruction est donnée par la **formule de Shannon** :

$$f : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) [8]$$

où :

$$\text{sinc} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5 La Théorie de Fourier

5.1 Présentation

L'une des pierres angulaires de l'analyse des signaux est la **théorie de Fourier**. Qui stipule que pour tout signal périodique, on peut approximer ce dernier en fonction de polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des sommes de sinus et de cosinus pondérés.

5.2 Théorie des séries de Fourier

Polynôme trigonométrique

Soit $N \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme trigonométrique P de degré N par :

$$P : x \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad [9]$$

où : $(c_n) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $((a_n), (b_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$

Théorème de densité de Weierstrass trigonométrique

Toute fonction continue 2π périodique peut être approchée uniformément par une suite de polynômes trigonométriques.

Ainsi, puisque : $x \mapsto 2\pi x$ bijective de $[0, 1]$ dans $[0, 2\pi]$, on peut approcher uniformément toute fonction continue périodique par une suite de polynômes trigonométriques. [5]

Théorème de convergence de Fourier

soit f continue par morceaux et T périodique, alors il existe $(P_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une unique suite de polynômes trigonométriques telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} P_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{\frac{2\pi i k x}{T}} \text{ avec } \forall k \in \mathbb{Z} c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi i k x}{T}} dx \quad [5]$$

Le **théorème de Dirichlet** assure que cette suite de polynômes converge normalement vers f sur \mathbb{R} c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k x}{T}}$. [5]

Les **coefficients de Fourier** représentent les amplitudes des composantes sinusoïdales qui composent le signal.

5.3 Transformée de Fourier

Cependant, la **théorie de Fourier** ne se limite pas aux signaux périodiques.

Transformée de Fourier discrète

Soit un signal (x_n) de N échantillons. Sa **transformée de Fourier** est définie par :

$$\forall k \in [0, N-1] X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \quad [10]$$

Dans le cas d'un signal discret, on peut toujours retrouver ce dernier à partir de sa **transformée de Fourier** :

$$\forall n \in [0, N-1] x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{i \frac{2\pi}{N} kn} \quad [10]$$

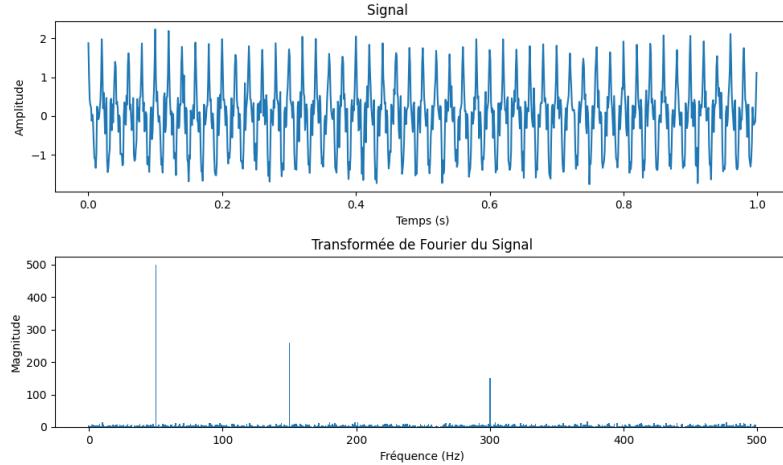


FIGURE 2 – Exemple de signal et sa **transformée de Fourier**

Sur le diagramme de la **transformée de Fourier**, chaque barre correspond à l'amplitude d'une composante particulière présente dans le signal. L'axe des abscisses représente les fréquences en Hertz (Hz), tandis que l'axe des ordonnées indique l'amplitude de chaque composante. La composante avec l'amplitude la plus élevée est appelée fondamentale, tandis que les autres composantes sont appelées harmoniques.

Cependant, malgré son importance, la **transformée de Fourier** présente une limite majeure : son incapacité à fournir une localisation temporelle précise des différentes fréquences du signal. On ne sait pas quand chaque fréquence est présente dans le signal. [11][12] Ce manque de localisation temporelle rend la **transformée de Fourier** inadaptée à l'analyse des signaux non stationnaires, c'est-à-dire ceux qui changent dans le temps. Cela peut poser des problèmes pour l'analyse des signaux biologiques, les images médicales ou les sons dans des applications de reconnaissance vocale par exemple.

5.4 Transformée de Fourier à court terme

Pour pallier ce problème, la **transformée de Fourier à court terme** a été développée. Pour cela, on multiplie le signal par une fenêtre glissante, ce qui permet de localiser les composantes fréquentielles du signal dans le temps.

Fenêtre glissante

On appelle fenêtre glissante une fonction w définie sur \mathbb{R} telle que :

1. w est à support compact (pour les fonctions réelles, c'est-à-dire nulle en dehors d'un certain intervalle)
2. $w \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'intégrale de $\int_{\mathbb{R}} w^2$ est finie
3. w est continue et de préférence différentiable
4. la **transformée de Fourier** de w doit être concentrée autour de 0
5. la somme des fenêtres doit être égale à l'espace d'étude (ne doit pas laisser de trous, ni se chevaucher de manière excessive)

Transformée de Fourier locale discrète

Soit un signal discret (x_n) de N échantillons.

$$\text{pour un instant } n_0 \in [0, N-1], \forall k \in [0, N-1], X_{n_0}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot w[n - n_0] \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \quad [12]$$

Malgré tout, cette approche présente des limitations. La non-adaptation de la fenêtre aux caractéristiques du signal peut entraîner des erreurs dans l'analyse. Également, il peut y avoir des informations redondantes ou inutiles, car elle utilise une même fenêtre glissante pour toutes les fréquences. Enfin, la **transformée de Fourier** est inadaptée aux signaux possédant du bruit. Le bruit étant une perturbation

du signal localisée en temps et en fréquences de manière imprévisible. Si un pic de bruit apparaît brièvement à un instant précis, il affectera l'ensemble du spectre fréquentiel, rendant difficile la distinction entre le signal utile et le bruit. [12] Ces limitations ont conduit au développement de nouvelles approches, telles que la **transformée en ondelettes**, qui permet une analyse plus précise des signaux non stationnaires.

6 La théorie des ondelettes

6.1 Introduction

Afin de dépasser les limites de la **transformée de Fourier à court terme**, des outils mathématiques ont été développés pour offrir une analyse plus précise des signaux non stationnaires.

L'une de ces approches est la théorie des ondelettes. Elle utilise des fonctions appelées ondelettes, qui sont des fonctions oscillantes localisées à la fois en temps et en fréquence. Cette approche est particulièrement utile pour l'analyse de signaux transitoires et irréguliers, car elle permet de décomposer un signal en fonction de ses caractéristiques à différentes échelles et positions.

Ondelettes

On appelle ondelette mère une fonction ψ de l'**espace de Hilbert** $L^2(\mathbb{R})$ et de moyenne nulle.

La famille des ondelettes associées à ψ est obtenue par les transformations de dilatation et de translation, définies pour $s > 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\psi_{s,\tau} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \quad [3] \quad [4]$$

où $\psi_{s,\tau}(t)$ est une version dilatée et déplacée de l'ondelette mère $\psi(t)$.

- s est un facteur de dilatation ou compression de l'ondelette (quand $s > 1$, l'ondelette est dilatée et quand $s < 1$, elle est compressée).
- τ est un paramètre de translation qui déplace l'ondelette dans le temps.

Produit de convolution

Pour deux signaux discrets (x_n) et (h_n) , le produit de convolution est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (y * h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} x[k] \cdot h[n-k] \quad [10]$$

Cette opération est symétrique, et représente une pondération du premier signal par le second.

Transformée en ondelettes discrètes

La **transformée en ondelettes** d'un signal f permet de le représenter dans une base d'ondelettes adaptées. Elle associe, pour chaque échelle $m \in \mathbb{Z}$ et chaque position $n \in \mathbb{Z}$: une ondelette discrète définie par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \psi_{m,n} : t \mapsto s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m} t - n\tau_0) \quad [3]$$

où $s_0 > 1$ est une base d'échelle et $\tau_0 > 0$ est un pas de translation.

La **transformée en ondelettes** discrètes s'écrit alors comme une décomposition du signal f en termes d'ondelettes :

$$f : t \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{m,n}(t) dx \quad \psi_{m,n}(t) \quad [2]$$

où $\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les coefficients $\int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{m,n}(t) dx$ représente la composante de f selon l'ondelette $\psi_{m,n}$.

Dans le cas où $(\psi_{m,n})$ forme une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, cette décomposition est unique.

Cependant, l'application de la transformée en ondelette à une image peut se réduire à une simple convolution entre l'image et la fonction d'ondelette.

On détermine ainsi, à l'aide de l'ondelette choisie, deux filtres, un passe-haut et un passe-bas, dont les coefficients dépendent de l'ondelette. [13][14] Ensuite, les filtres successivement pour obtenir une résolution multi-échelle qui sera détaillée plus tard avec un exemple.

6.2 Ondelettes de Haar

Ondelette mère de Haar

L'**ondelette de Haar** est définie comme suit :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Cette ondelette est capable de capturer les discontinuités et les changements brusques dans un signal, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'analyse de signaux à structure discontinue ou avec du bruit. Grâce à sa simplicité de compréhension et son efficacité, nous travaillerons pour tout le reste de cette étude avec ce type d'ondelette mère. [14]

6.3 Analyse multi-échelle à l'aide de l'ondelette de Haar

6.3.1 Détermination des filtres passe-haut et passe-bas pour l'ondelette de Haar

L'**ondelette de Haar** est définie par des filtres de décomposition et de reconstruction. Ces filtres respectent des propriétés qui permettent la reconstruction du signal.

Implémentation des filtres : Les coefficients des filtres passe-bas (h_n) et passe-haut (g_n) sont régis par les conditions ci-dessous :

1. Orthogonalité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} h[n] \cdot g[n] = 0.$$

2. Énergie finie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} h[n]^2 = 1, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} g[n]^2 = 1.$$

3. Lien entre les deux filtres

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g[n] = (-1)^n h[n]$$

On obtient alors les filtres passe-bas H et passe-haut G pour l'**ondelette de Haar** :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la reconstruction, les filtres sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h'[n] = h[n], \quad g'[n] = -g[n].$$

On peut alors se limiter à des filtres de longueur 2 avec : [14]

$$\begin{cases} H = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ G = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \end{cases}$$

6.3.2 Exemple d'application à une matrice de pixels

Considérons une matrice de pixels M donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 9 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 5 & 2 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

On va appliquer les filtres passe-bas et passe-haut sur les lignes puis sur les colonnes de M et inversement pour obtenir une résolution multi-échelle.

coefficient HH : Filtre passe-bas sur les lignes puis passe-bas sur les colonnes

On commence par appliquer le filtre passe-bas sur les lignes de la matrice M , à l'aide du produit de convolution :

$$H = \begin{bmatrix} 7.071 & 7.071 & 8.485 \\ 2.121 & 3.536 & 6.364 \\ 1.414 & 4.243 & 10.607 \\ 5.657 & 7.071 & 12.021 \\ 8.486 & 8.486 & 7.071 \\ 9.899 & 5.356 & 12.728 \end{bmatrix}.$$

puis on applique le filtre passe-bas sur les colonnes pour obtenir le coefficient HH :

$$HH = \begin{bmatrix} 6.5 & 7.5 & 10.5 \\ 5.0 & 8.0 & 16.0 \\ 13.0 & 8.5 & 14.0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient HH représente une approximation de l'image. Ce coefficient capture les grandes structures de l'image, telles que les formes générales, sans tenir compte des détails fins comme les textures ou les bords.

6.3.3 Résultats des coefficients Haar

Coefficient HG : Filtre passe-bas sur les lignes puis passe-haut sur les colonnes

$$HG = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.5 & 1.5 \\ -3.0 & -2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 3.5 & -4.0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient LH capture les détails horizontaux de l'image tout en conservant une certaine forme générale. Ce coefficient est particulièrement utile pour détecter les variations horizontales dans les hautes fréquences, c'est-à-dire les détails qui apparaissent principalement dans les directions horizontales.

Coefficient GH : Filtre passe-haut sur les lignes puis passe-bas sur les colonnes

$$GH = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & -5.5 \\ 2.0 & -5.0 & -1.0 \\ 2.0 & -1.5 & -3.0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient HL capture les détails verticaux de l'image tout en conservant les grandes structures de l'image. Ce coefficient permet de détecter les variations verticales dans les hautes fréquences, comme les détails fins présents dans les directions verticales.

Coefficient GG : Filtre passe-haut sur les lignes puis passe-haut sur les colonnes

$$GG = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0.0 & 3.0 & -2.0 \\ -2.0 & -0.5 & -3.0 \end{bmatrix}$$

Le coefficient HH représente les détails fins de l'image à la fois horizontalement et verticalement. Il capture les petites variations de l'image dans les deux directions (horizontale et verticale).

On a appliqué la transformée décrite ci-dessus à l'image titre :

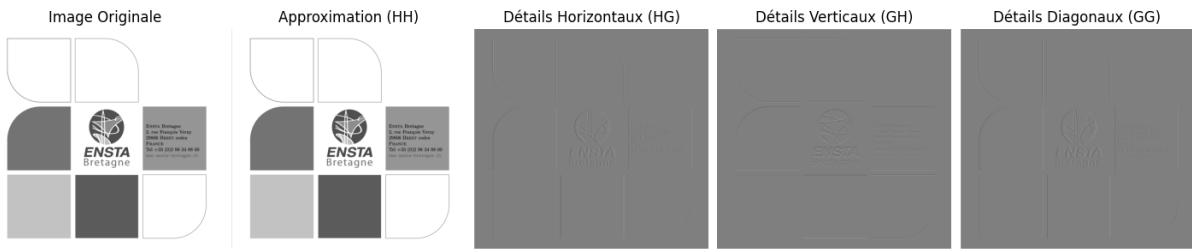


FIGURE 3 – Application de la **transformée en ondelettes de Haar** sur l'image titre

On remarque bien sur la Figure 3 que le coefficient HH donne une approximation de l'image, le coefficient HG donne les détails horizontaux, le coefficient GH donne les détails verticaux et le coefficient GG donne les détails diagonaux.

7 Applications des ondelettes dans le domaine biomédical

7.1 L'échographie Doppler

L'**échographie Doppler** est une technique d'imagerie médicale non invasive utilisée pour examiner la circulation sanguine dans le corps humain. Cette dernière utilise l'**effet Doppler** pour analyser le flux sanguin et y détecter des anomalies.

L'effet Doppler

L'**effet Doppler**, découvert par **Christian Doppler** en 1842, décrit le changement de fréquence d'une onde lorsqu'elle est émise ou reçue par un objet en mouvement relatif à la source. L'**effet Doppler** peut être décrit par la relation suivante :

$$f' = f \cdot \frac{c + v_o}{c + v_s},$$

où :

- f' la fréquence perçue
- f la fréquence émise
- c la vitesse de propagation de l'onde
- v_o la vitesse de l'observateur
- v_s la vitesse de la source

Dans le cadre de l'**échographie Doppler**, une onde ultrasonore est envoyée par une sonde. Elle se réfléchit sur les globules rouges en mouvement, ce qui modifie la fréquence de l'onde. La fréquence du signal réfléchi augmente quand les globules rouges se déplacent vers la sonde et diminue lorsqu'ils s'en éloignent. Cette variation permet de déterminer : [1]

- La direction du flux sanguin
- La vitesse de circulation du sang
- Les anomalies éventuelles dans le flux, comme un rétrécissement ou une obstruction vasculaire.

Inconvénients de l'Échographie Doppler : Le Speckle Noise ou Bruit

Le bruit, est un phénomène courant dans les images venant d'**échographies Doppler**. Il se manifeste par l'apparition de grain sur l'image. Ce bruit est causé par l'interférence constructive et destructive des ondes ultrasonores réfléchies par les tissus dans le corps. Le bruit peut masquer les détails fins des structures anatomiques, rendant difficile la détection des petites anomalies, comme les lésions, les thrombi ou les vaisseaux sanguins de faible taille. [1]

Le bruit peut produire ce type d'image :

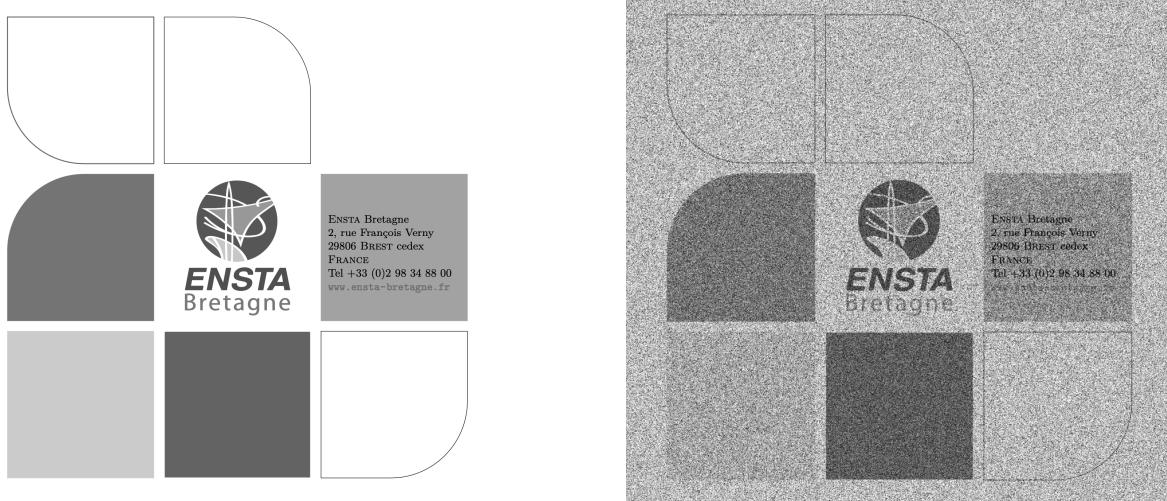


FIGURE 4 – Comparaison entre l'image originale et l'image avec bruit

À partir du moment où l'image est contaminée par du bruit, ce dernier altère la lisibilité des informations. Plus particulièrement, sur la partie droite de l'image, les écritures deviennent floues et difficilement discernables

7.2 Utilisation des ondelettes pour le traitement du bruit

Afin de réduire le bruit dans les images **échographie Doppler**, nous pouvons utiliser la **transformée en ondelettes**. Étant donné que le bruit est majoritairement à haute fréquence, nous pouvons utiliser la transformée en **ondelettes de Haar** vu précédemment pour n'extraire que les basses fréquences de l'image. Ainsi en ne conservant que le coefficient HH de l'image, nous avons de fortes chances de réduire le bruit.

Nous avons appliqué la transformée en ondelette sur l'image bruitée de la Figure 4 :

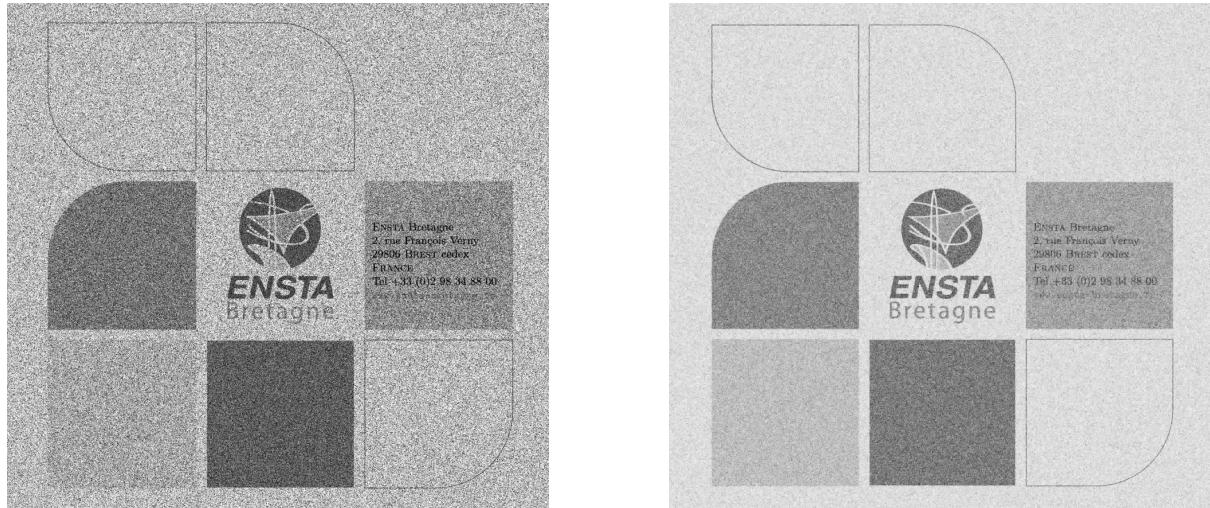


FIGURE 5 – réduction du bruit à l'aide de l'**ondelette de Haar**

On peut observer, sur la partie droite de l'image, que la réduction du bruit a effectivement amélioré la qualité visuelle de l'image, en rendant les éléments textuels et les détails principaux plus visibles. Toutefois, bien que le bruit ait été largement atténué, certaines subtilités de l'image restent encore difficiles à discerner.

7.3 Utilisation des ondelettes pour extraire les détails

Une approche intéressante pour extraire les détails les plus fins d'une image consiste à utiliser les autres coefficients issus de la **transformée en ondelettes**. Ces coefficients permettent de récupérer des contours plus nets et des textures spécifiques.

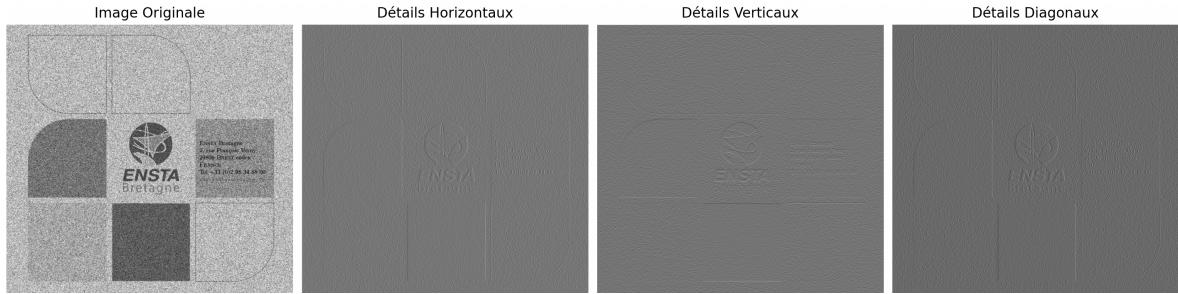


FIGURE 6 – Obtention des détails de l'image

Cependant, une méthode plus efficace consiste à d'abord enlever le bruit de l'image, puis à extraire les détails sur l'image nettoyée. Cela permet de garantir que les détails extraits ne soient pas faussés par les perturbations de bruit présentes dans l'image originale. La figure suivante illustre ce processus, où on extrait les détails de l'image avec un bruit réduit :

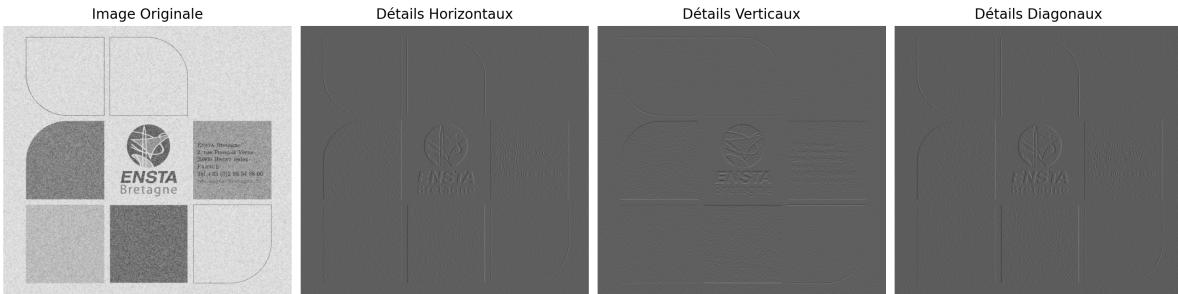


FIGURE 7 – Suppression du bruit puis extraction des détails

Si on compare les images de la figure 6 avec celle de la figure 7. Les détails extraits de l'image de la figure 7 sont nettement plus visibles et plus lisibles, que ceux de la figure 6, où on peut encore apercevoir la texture granuleuse. Cette amélioration de la lisibilité des détails peut s'expliquer par l'atténuation des hautes fréquences associées au bruit lors de la phase de réduction du bruit. Cela est particulièrement utile dans des applications sensibles comme l'imagerie médicale, où le bruit, par exemple le "speckle noise" est généralement à haute fréquence. Cela permet donc une meilleure détection des caractéristiques des tissus étudiés.

8 Conclusion

En conclusion, les ondelettes, s'avèrent être des outils indispensables pour le traitement des signaux et des images. En particulier lorsqu'il s'agit de détecter des structures discontinues ou de traiter des signaux bruités. Dans ce projet, nous avons démontré l'application de la transformée en **ondelettes de Haar** sur des images, illustrant ainsi comment cette technique permet d'extraire des informations à différentes résolutions et de séparer les détails fins du signal. L'exemple d'application dans le domaine biomédical, en particulier pour le traitement des images d'**échographies Doppler**, montre les avantages indéniables de cette méthode pour extraire les détails des images tout en supprimant le bruit de fond.

Toutefois, bien que les résultats soient prometteurs, certaines subtilités dans les images restent encore difficiles à extraire en raison des limites inhérentes à la méthode elle-même. La simplicité de la transformée en **ondelettes de Haar** peut parfois conduire à des résultats peu précis et de manière peu efficace. Pour ce faire, on pourrait envisager d'utiliser des ondelettes plus complexes, telles que les **ondelettes de Daubechies**, qui offrent une meilleure résolution et une meilleure capacité à extraire les détails fins. Néanmoins, avec l'inconvénient d'être plus difficile à mettre en place.

Références

- [1] Thibaud Berthomier. *Identification et caractérisation du thrombus veineux par imagerie échographique mode B couplée à l'élastographie*. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2018. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. NNT : 2018ENTA0007. Disponible sur : <https://hal.science/tel-02366284/>
- [2] Valérie Perrier. *Transformée en Ondelettes Continue Directionnelle : applications en Imagerie Médicale*. 2007. Disponible sur : https://www.researchgate.net/publication/251965704_Transformee_en_Ondelettes_Continue_Directionnelle_applications_en_Imagerie_Medicale.
- [3] Valérie Perrier. *Application de la théorie des ondelettes*. Disponible sur : https://www.academia.edu/37830456/Application_de_la_th%C3%A9orie_des_ondes.
- [4] Aurélien Drappeau, Arthur Leclaire. *Ondelettes : construction et applications*. Exposé de maîtrise sous la direction de Vincent Rivoirard. Disponible sur : <https://sary-aurelien-drappeau.pedaweb.univ-amu.fr/documents/MemoireMagistere.pdf>.
- [5] Banque de concours X-ENS. *Épreuve de Mathématiques C 2017*. Disponible sur : <https://cpge-paradise.com/MP4Math/DM/DM7%20Math%20C%202017.pdf>.
- [6] PyWavelets. *PyWavelets : A Python library for wavelet transform*. Documentation officielle, disponible sur : <https://pywavelets.readthedocs.io/en/latest/>.
- [7] Wikipédia. *Signal (théorie des systèmes)*. Disponible sur : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Signal_\(th%C3%A9orie_des_syst%C3%A8mes\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Signal_(th%C3%A9orie_des_syst%C3%A8mes)).
- [8] Wikipédia. *Théorème d'échantillonage*. Disponible sur : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27%C3%A9chantillonnage.
- [9] Trigopoly Série. *Dictionnaire de Mathématiques Appliquées*. Disponible sur : <https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=../t/trigopolyserie.html>
- [10] Samuel Gallay. *Rapport sur la Transformée de Fourier Rapide (FFT)*. Disponible sur : <https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/samuel>
- [11] Jean-Pierre Gazeau. *De la transformée de Fourier à la transformée par ondelettes : le succès de l'analyse temps-fréquence*. Disponible sur : <https://interstices.info/de-la-transformee-de-fourier-a-la-transformee-par-ondes-le-succes-de-lanalyse-temps-frequence>
- [12] Pierre Maurel. *Introduction à l'analyse de Fourier*. Disponible sur : https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.maurel/IMA/CM/ima05_Fourier_imprimable.pdf
- [13] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Chapters 1-3*. Disponible sur : <https://www.di.ens.fr/~mallat/papiers/WaveletTourChap1-2-3.pdf>
- [14] Jérémie Bigot. *Introduction aux ondelettes*. Disponible sur : https://www.math.u-bordeaux.fr/~jbigot/Site/Enseignement_files/ondelettesIMAT.pdf
- [15] NumPy Developers. *NumPy Documentation*. Disponible sur : <https://numpy.org/doc/>

UE 1.3 Etude bibliographique

Méthodologie de la recherche documentaire

Ce document est à remettre avec le rapport, il doit être signé par l'encadrant.

Noms, prénoms du binôme : XHOFFRAY Nils, PAPIN Pierre

Sujet : Les ondes électromagnétiques

Signature de l'encadrant :



1. Analyse du sujet : listez les mots-clés qui définissent votre sujet en français et en anglais.

Pour vous aider, tentez de répondre aux questions : Qui ? Quoi ? Quand ? Où ? Comment ?

Français	Anglais
Transformée en ondelettes	Wavelet transform
Transformée de Fourier	Fourier transform
Imagerie Médicale	Medical Imaging
Ondelette de Haar	Haar wavelet
Echographie	Ultrasound
Analyse Multi-Résolution	Multi-Resolution Analysis
Speckle Noise	Speckle Noise

2. Sélection des sources : cochez dans la liste ci-dessous les ressources en ligne sur internet, adaptées à votre sujet et que vous avez utilisées : Ces ressources sont pour la plupart présentées dans la rubrique Médiathèque du site web de l'école, testez-les avant de les utiliser.

Ressources gratuites

- Catalogue de la médiathèque ENSTA Bretagne
- SUDOC, catalogue des bibliothèques de l'enseignement supérieur
- Google Scholar, moteur de recherche Google pour l'enseignement supérieur et la recherche
- HAL, archive ouverte. Publications scientifiques en libre accès gratuit

Abonnements Médiathèque

Articles de revues scientifiques

- Cairn.info (sciences humaines)
- IEEEXplore.com (informatique, télécom, électronique)
- Science Direct.com (science et technique)
- SpringerLink.com (science et technique)
- Auto-innovations.com, bibliothèque en ligne des innovations automobile (code abonné : enstabret98)
- Techniques de l'ingénieur, encyclopédie scientifique et technique
- Europresse (presse nationale et internationale)



3. Stratégie de recherche : présentez deux ressources parmi celles listées précédemment :

Nom de la ressource n°1	Catalogue de la médiathèque (https://mediatheque.ensta-bretagne.fr) OBLIGATOIRE pour découvrir l'outil
Mots-clés utilisés, parmi ceux cités au point 1. et combinaison entre eux à l'aide d'opérateurs booléens : ET, OU, ...	Imagerie médicale ET Transformée en ondelettes ET Transformée de Fourier ET Ondelette de Haar ET Echographie ET Analyse Multi-Résolution ET Speckle Noise
Documents retenus à présenter sous la forme de références bibliographiques. Préciser entre crochets le type de document (livre, chapitre d'un livre, article de revue, rapport, thèse...).	Thibaud Berthomier. Identification et caractérisation du thrombus veineux par imagerie échographique mode B couplée à l'élastographie. Traitement du signal et de l'image. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2018. Français. [Thèse]
Commentaires sur la pertinence et la fiabilité des documents retenus	Le document est une thèse issue de l'ENSTA Bretagne.
Commentaires sur la pertinence et la fiabilité de la ressource	La ressource est le catalogue de la médiathèque.

Nom de la ressource n°2	Google Scholar
Mots-clés utilisés, parmi ceux cités au point 1. et combinaison entre eux à l'aide d'opérateurs booléens : ET, OU, ...	Imagerie médicale ET Transformée en ondelettes
Documents retenus à présenter sous la forme de références bibliographiques. Préciser entre crochets le type de document (livre, chapitre d'un livre, article de revue, rapport, thèse...).	Valérie Perrier, Anne Bilgot, Olivier Le Cadet and Laurent Desbat. Transformée en Ondelettes Continue Directionnelle : applications en Imagerie Médicale. Paris-sud working group on modelling and scientific computing 2006-2007. Français. [article issu d'un cours]
Commentaires sur la pertinence et la fiabilité des documents retenus	Article issu d'un cours dispensé à l'université doctorale d'Orsay. Cela semble être une source fiable.
Commentaires sur la pertinence et la fiabilité de la ressource	ESAIM est un ensemble de journaux scientifiques, avec un système de multi-lectures avant acceptation et publication. De plus, L'ESAIM est assez ancien (1995).