DM3 - Séries des restes:
Corrigé abrégé

1(a) : S_0 est le noyau de l'application linéaire $(u_n)_n \to \lim_{n\infty} u_n$ (définie sur l'ev des suites convergentes). C'est un espace vectoriel

$S_{AC} = \ell^1(\mathbb{K})$ est un ev d'après le cours.

$S_{AC} \subset S_0$ car toute série convergente n'est pas grossièrement divergente.

(b). L'applicati est correctement définie car $R_n \underset{n\infty}{\to} 0$ (reste).

. Elle est linéaire par linéarité de la somme des séries convergentes :

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} u_k + \lambda \sum_{n\geq 1}^{\infty} v_k.$$

(c) L'applicati Φ n'est pas injective car $\ker \Phi = \{(u_n)_n,\ \forall n\geq 1\ u_n=0\}$ contient par exemple la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 0\ \forall n\geq 1 \end{cases}$

Elle n'est pas surjective : considérons la suite $\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

(α_n) est bien définie et tend vers 0 car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Donc $(\alpha_n)_n \in S_0$. Mais $(\alpha_n)_n$ n'a pas d'antécédent par Φ dans S_{AC} car si $\Phi((u_n)) = (\alpha_n)$

on a forcément $\forall n\geq 1\quad u_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n}$ et donc $\sum u_n$ n'est pas Abs CV.

(d) $E_1 = \Phi^{-1}(S_{AC})$ et (par récurrence) E_p est défini par la relation $E_p = \Phi^{-1}(E_{p-1})$

Comme Φ est linéaire, pour tout SEV F de S_0, $\Phi^{-1}(F)$ est un sev de S_{AC}.

On en déduit par une récurrence immédiate que E_p est un SEV.

2 (a) $(u_n)_n \in S_{AC} \iff |q|<1$

on a facilement $R_n = \dfrac{a\,q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{aq}{1-q}\,u_n$:

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{n\geq 0} \frac{aq}{1-q}\,u_n = \frac{aq}{(1-q)^2}$ ($\sum R_n$ est géométrique donc $\sum(R_n) \in S_{AC}$)

Comme $R_n = c^{te}\,u_n$ on a : $(u_n) \in E_p \iff (R_n) \in E_p \iff (u_n) \in E_{p+1}$ $\forall p$.

Ainsi, puisque $(u_n) \in E_1$ on a par récurrence facile $(u_n)_n \in E_p$ $\forall p \geq 1$.

3 (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} k u_k + (n+1) R_n$.

(b)(i) Comme $(n+1)R_n \geq 0$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leq \sum_{k=0}^{n} R_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} R_k < +\infty$.

Ceci prouve que la série à termes positifs $\sum k u_k$ a des sommes partielles majorées

Par le lemme de majoration, elle converge.

(ii) on a $(n+1) R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=0}^{n} k u_k$. C'est la différence de deux suites

convergentes donc $(n+1)R_n \underset{n\infty}{\sim} nR_n$ possède une limite finie

(iii) soit $L = \lim nR_n$. Si $L \neq 0$ on a $nR_n \sim L$ donc $R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{L}{n}$. Ce qui

contredit la convergence de $\sum R_n$. Donc $nR_n \underset{n\infty}{\to} 0$

(c) $0 \leq nR_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} n u_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par encadrement $nR_n \to 0$.

on reporte dans le résultat du (a) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k$ est la somme de deux suites cv

donc cv.

(d) Bien sur $E_2 \subset E_1$. Prenons $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. On a $R_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ donc $\begin{cases} \sum R_n \text{ cv} \\ \sum nR_n \text{ DIV} \end{cases}$

Ce prouve que $(u_n)_n \in E_1$ et $(u_n)_n \notin E_2$: $E_2 \subsetneq E_1$!

4 (a) c'est le théorème de sommation des relations de comparaison.

(b) ~~Le point (a) prouve le résultat pour $p=1$~~

(b) Montrons par récurrence $\mathcal{P}_k$: $(u_n)_n \in E_k \iff (v_n)_n \in E_k$ et $R_n^{(k)}(u) \sim R_n^{(k)}(v)$

(où $R_n^{(k)}(u)$ désigne le reste $\Phi^k(u)$.)

$\mathcal{P}_1$ est vraie (c'est le (a))

Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie : soit $(u_n) \in E_{k+1}$ alors :

$(u_n) \in E_k$ $(E_k \subset E_{k+1})$

Comme $\mathcal{P}_k$ est vraie $(v_n) \in E_k$ et $R_n^k(u) \underset{n\infty}{\sim} R_n^k(v)$.

Comme $(v_n) \in E_{k+1}$, $(R_n^k(u)) \in E_1$. On en déduit que $\mathcal{P}_1$ s'applique aux deux suites $(R_n^k(u))_n$ et $(R_n^k(v))$. C'est exactement le résultat voulu.

5 (a) Comparaison série intégrale

(b) en sommant (tout converge car $\alpha > 1$) : (Je note R_n^α le reste)

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n^\alpha \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Les deux intégrales se calculent et sont équivalentes à $\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$

Donc $R_n^\alpha \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

(c) En appliquant la partie 4) on a pour tout $\alpha > 1$:

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n \in E_p \iff \left(R_n^\alpha\right)_n \in E_{p-1} \iff \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)_n \in E_{p-1}$$

On en déduit par une récurrence aisée que $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \in E_p \iff \underline{\alpha > p+1}$

(6) on note $\tilde{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$

Par hypothèse $\sum_{n\geq 1} n|u_n|$ cv donc d'après (3) $\sum \tilde{R}_n$ converge.

Mais $|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| = \tilde{R}_n$.

Ainsi par comparaison $\sum |R_n|$ cv $\square$.

(7) on montre la sommabilité :

(i) $\sum_{p=0}^{\infty} |v_{n,p}| = \sum_{p=0}^{n-1} |u_n| = n|u_n| < \infty$ $\forall n$.

(ii) $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p=0}^{\infty} |v_{n,p}|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n|u_n| < +\infty$.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(v_{n,p})$ est sommable.

Il en résulte, en permutant les indices :

(i) $\forall p$, $\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,p}| < \infty$: Mais $\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,p}| = \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n|$ (c'est $\tilde{R}_p$)

(ii) $\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n,p}|\right) < \infty$: donc $\sum_{p\geq 0} \tilde{R}_p$ cv on a retrouvé le résultat du 6)

De plus : $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} v_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,p}\right)$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} n u_n = \sum_{p=0}^{\infty} R_p$

8 (a) $2R_n = (-1)^{n+1} f(n+1) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1))$

(b) Pour montrer que $\sum R_n$ converge, il suffit de montrer la convergence de la série de T.G $w_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (f(k)-f(k+1))$

Si l'on pose $\alpha_k = f(k) - f(k+1)$ on a bien $\alpha_k \geq 0$ et $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,

De plus, f étant convexe, on a : $\alpha_{k+1} - \alpha_k \leq 0$ $\left[f(k+1) \leq \frac{1}{2}\left[f(k) + f(k+2)\right]\right]$

Ainsi par le C.S.S.A $|w_n| \leq |f(n+1) - f(n+2)| = f(n+1) - f(n+2)$

Mais la série de T.G $(f(n+1) - f(n+2))_n$ est convergente donc par comparaison.

$\sum w_n$ CVABS. $\square$.

(c) Non : par exemple si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ on a bien $\sum R_n$ cv mais $n u_n \not\to 0$

Ce qui prouve que $(R_n)_n$ n'est pas dans S_{AC}.

(d) Si $f(n+1) \underset{n}{\sim} f(n)$ alors le (b) prouve que $w_n = o(f(n+1))$

et par suite, d'après 8 (a) $R_n \sim (-1)^{n+1} \frac{f(n+1)}{2} \sim (-1)^{n+1}\frac{f(n)}{2}$

9]

(a). Sans difficulté

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k t^k\,dt = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} u_k = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt$

Mais $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt\right| \le \int_0^1 \frac{t^{m+1}}{1+t}\,dt \le \int_0^1 t^{m+1}\,dt = \frac{1}{m+2} \to 0$

Ce qui prouve que : (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} u_k \xrightarrow[m\infty]{} \ln 2$ (on retrouve la somme de cette série)

(ii) $\displaystyle R_m = \ln 2 - S_m = \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} R_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+1} t^{m+1}}{1+t}\,dt$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{-t}{(1+t)^2}\left(1 - (-1)^{m+1} t^{m+1}\right) dt$

En refaisant exactement la même chose on trouve par $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{m+2}}{(t+1)^2}\,dt \xrightarrow[m\infty]{} 0$

et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} R_k = \int_0^1 \frac{-t}{(1+t)^2}\,dt = \frac{1}{2} - \ln 2.$