Pense-bête : algèbre et géométrie

3 avril 2013

Sommaire

Dans toute la suite, $(\mathbf{K},+,\times)$ est un corps. Les théorèmes d'algèbre linéaire seront énoncés sous leur forme « endomorphisme », mais il existe un énoncé analogue sous forme « matrice ».

1 Algèbre générale et arithmétique

❒ **Définition**HP [*Équipotence*] – Deux ensembles A et B sont dits équipotents s'il existe $f\colon A \longrightarrow B$ bijective. L'équipotence est une relation d'équivalence.

❒ **Théorème**HP [*Cantor-Bernstein*] – Soient A et B deux ensembles tels qu'il existe $f\colon A \longrightarrow B$ et $g\colon B \longrightarrow A$ injectives. Alors A est équipotent à B.

[Indication : on peut poser $X = \{C \in \mathscr{P}(A) \,|\, g(F \setminus f(C)) \subset E \setminus C\}$. Montrer que X n'est pas vide, puis poser $K = \bigcap_{C\in X} C$, montrer que $K \in X$ et enfin que $g(B \setminus f(K)) = A \setminus K$.]

❒ **Définition**HP [*Dénombrabilité*] – Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbf{N}$. Par exemple, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}[X]$ sont dénombrables, mais pas $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

❒ **Théorème**HP [*Cantor*] – $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrables.

[Indication : raisonner par l'absurde et numéroter les éléments de $[0,1]$. En considérant les développements décimaux de ces nombres le procédé diagonal de Cantor fournit un autre nombre de $[0,1]$ distinct de tous les autres.]

❒ **Définition** [*Sous-groupe*] – Un sous-groupe du groupe $(G,\top)$ est une partie $H \subset G$ telle que :

(1) $0_G \in H$;

(2) H est stable par $\top$;

(3) H est stable par passage à l'inverse pour $\top$.

❒ **Proposition**HP [*Sous-groupe distingué*] – Un sous-groupe distingué H du groupe $(G,\top)$ est un sous-groupe tel que $\forall h \in H$, $\forall g \in G$, $g\top h\top g^{-1} \in H$. De plus, un sous-groupe H est distingué si et seulement si il existe un morphisme de groupes $\varphi\colon (G,\top) \longrightarrow (G',\top')$ tel que $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

❒ **Définition** [*Sous-anneau*] – On appelle sous-anneau de $(A,+,\top)$ tout sous-groupe de $(A,+)$ contenant 1_A et stable par $\top$.

❒ **Définition** [*Idéal*] – On appelle idéal de l'anneau commutatif $(A,+,\top)$ tout sous-groupe G de $(A,+)$ tel que $\forall (a,g) \in A\times G$, $a\top g = g\top a \in G$. De plus, $\forall a \in A$, $a\top A = \{a\top x \,|\, x \in A\}$ est un idéal.

❒ **Définition** [*Sous-espace vectoriel*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie F telle que :

(1) $0_E \in F$;

(2) $\forall x,y \in F$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $x+\alpha y \in F$.

❒ **Définition** [*Caractéristique*] – La caractéristique d'un corps $\mathbf{K}$ est le plus petit nombre premier p tel que $p\times 1_{\mathbf{K}} = 0_{\mathbf{K}}$. S'il n'existe pas de tel entier, on dit que $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle.

❒ **Théorème** [*Restes chinois*] – Soient $m,n \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux, $u,v \in \mathbf{Z}$ tels que $um+nv = 1$. Alors $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{Z}$, on a l'équivalence

$$\begin{cases} x \equiv \alpha\ [n] \\ x \equiv \beta\ [n] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \alpha mu + \beta nv\ [mn].$$

❐ **Définition** [*Indicatrice d'Euler*] – Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose

$$\varphi(n) = \mathrm{Card}\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right) = \mathrm{Card}\left\{x \in [\![1,n]\!] \,|\, x \wedge n = 1\right\}.$$

D'après le théorème des restes chinois, $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ et si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont premiers et les $\alpha_i \geqslant 1$, alors

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right).$$

2 Polynômes

❐ **Définition** [*Fonctions symétriques élémentaires*] – Soit $n \in N$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on définit par k-ième fonction symétrique élémentaire par

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{A \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]) \\ \mathrm{Card}\, A = k}} \prod_{\alpha \in A} x_\alpha.$$

❐ **Théorème** [*Relations racines-coefficients*] – Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ scindé sur $\mathbf{K}$ dont on note $x_1, \ldots, x_n$ les racines comptées avec multiplicité. Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

❐ **Théorème**EXO [*Gauss-Lucas*] – Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de racines $z_1, \ldots, z_n$. Alors toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est à dire que toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs de $z_1, \ldots, z_n$.

[*Indication : décomposer* $\dfrac{P'}{P}$ *en éléments simples, évaluer la relation en les racines de* P' *et utiliser la quantité conjuguée.*]

❐ **Proposition** [*Interpolation de Lagrange*] – Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, on pose pour $k \in [\![0,n]\!]$

$$L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

Alors $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$ et $\forall P \in \mathbf{K}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k$.

❐ **Lemme**HP [*Polynôme minimal et* $\mathbf{K}$*-algèbre engendrée*] – Soit A une $\mathbf{K}$-algèbre, $a \in A$, $\mathbf{K}[a] = \left\{\widetilde{P}(a) \,\middle|\, P \in \mathbf{K}[X]\right\}$. Si a admet un polynôme annulateur minimal μ_a, alors $\mathbf{K}[a]$ est de dimension finie et $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[a]) = \deg \mu_a$.

[*Indication : si* $d = \deg \mu_a$*, poser* $\varphi\colon P \in \mathbf{K}_{d-1}[X] \longmapsto \widetilde{P}(a) \in \mathbf{K}[a]$ *et montrer que* φ *est un isomorphisme de* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels en utilisant notamment une division euclidienne.*]

3 Algèbre linéaire

❐ **Lemme**HP [*Rang d'un projecteur*] – On suppose $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle. Si p est un projecteur sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors $\mathrm{Tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

[*Indication :* $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$*, écrire la matrice de* p *dans une base adaptée à cette décomposition.*]

❐ **Proposition**EXO [*Somme directe et projecteurs*] – Soient $F_1, \ldots, F_q$ des sous-espaces du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$ si et seulement si il existe $p_1, \ldots, p_q \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\forall (i,j) \in [\![1,q]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$, $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$ et $\sum_{i=1}^{q} p_i = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, $\forall i \in [\![1,q]\!]$, p_i est le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{q} F_j$.

❐ **Proposition**EXO [*Trace et formes linéaires*] – Pour toute forme linéaire $\ell\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$, il existe une unique matrice $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\ell(X) = \mathrm{Tr}(A_0 X)$.

[*Indication : introduire l'application linéaire adaptée* $\Psi\colon A \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}(\longmapsto)\, \ell_A$ *où* $\ell_A\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AX)$*. Montrer que* Ψ *est un isomorphisme.*]

❐ **Théorème** [*Génération de* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ *et de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$] – Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j}$ et la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $D_i(\lambda)[i,i] = \lambda$ et $D_i(\lambda)[j,j] = 1$ pour $j \neq i$. On a alors les deux résultats suivants :

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation, plus précisément $\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$,

$$M = T_{i_1,j_1}(\lambda_1) \cdots T_{i_p,j_p}(\lambda_p) D_n(\det M)\,;$$

(2) $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection.

[*Indication : la démonstration se fait par un algorithme d'opérations élémentaires sur les matrices que l'on interprète comme des produits pas des matrices de transvection ou de dilatation.*]

❐ **Proposition** [*Changement de base*] – Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$. Prenons $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. On a alors la relation

$$X = PX'.$$

.
❐ **Lemme**[HP] [*Produit tensoriel*] – Soient $p,q,r,s \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{K})$. On définit le produit tensoriel de A et de B par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pr,qs}(\mathbf{K}).$$

Un calcul par blocs montre alors que $\forall A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, $\forall B, B' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{K})$,

$$(A \otimes B) \times (A' \otimes B') = (A \times A') \otimes (B \times B').$$

❐ **Lemme** [*Produit de comatrices*] – $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\operatorname{com}(A \times B) = \operatorname{com} A \times \operatorname{com} B.$$

[Indication : faire d'abord le cas inversible, puis raisonner par continuité/densité en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.]
❐ **Proposition**[EXO] [*Diagonale dominante*] – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Si $\forall i\ [\![1,n]\!]$,

$$|A[i,i]| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A[i,j]|,$$

alors A est inversible.
[Indication : prendre un vecteur X tel que $AX = 0$, et prendre i_0 tel que $|X[i_0]|$ est maximale. La ligne i_0 du système d'équation fournit $X = 0$.]
❐ **Lemme** [*Vandermonde*] – Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

❐ **Définition** [*Matrices stochastiques*] – Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}_+)$ est dite stochastique si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A[i,j] = 1$ et bistochastique si A et ${}^{\mathrm{T}}A$ sont stochastiques. De plus, A est stochastique si et seulement si le vecteur ${}^{\mathrm{T}}(1 \cdots 1)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
❐ **Proposition** [*Matrices compagnons*] – À $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{K}[X]$ on associe

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots \quad \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots \quad \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots \quad 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

A_P est la matrice compagnon de P et $\chi_{A_p} = (-1)^n P$.

4 Réduction

❐ **Proposition** [*Polynôme caractéristique*] – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on considère la matrice $A - X\mathrm{I}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}[X])$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det(A - X\mathrm{I}_n) \in \mathbf{K}[X]$. De plus, χ_A est de degré n et est de la forme

$$\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \operatorname{Tr} A X^{n-1} + \alpha_{n-1}(A)X^{n-2} + \cdots + \alpha_1(A)X + (-1)^n \det A\right).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A.
❐ **Théorème** [*Indépendance des sous-espaces propres*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors la famille des sous-espaces propres de u est indépendante : des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes formes un système libre.
❐ **Lemme** [*Gershgorin*] – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, pour $i \in [\![1,n]\!]$ on pose $\ell_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A[i,j]|$.

Alors le spectre complexe de A est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_f(A[i,i], \ell_i)$.

[Indication : utiliser la propriété de diagonale dominante.]
❐ **Définition** [*Projecteurs spectraux*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres. Les projecteurs spectraux de u sont les $(\Pi_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, Π_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. On a alors les résultats suivants :
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\Pi_i \circ \Pi_j = \delta_{ij} P_i$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = \mathrm{Id}_E$;
- $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $\widetilde{P}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)\Pi_i$.

❐ **Théorème** [*Polynômes annulateurs et valeurs propres*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P. Si de plus P est le polynôme minimal de u, alors l'ensemble des valeurs propres de u est exactement l'ensemble des racines de P.

[Indication : pour le deuxième point, utiliser le fait qu'aucun polynôme annulateur de u ne peut diviser P minimal pour u.]

❐ **Théorème** [*Décomposition des noyaux*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{K}[X]$ premiers entre deux deux à deux. Alors

$$\operatorname{Ker}\left(\widetilde{P_1 \cdots P_k}(u)\right) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}\left(\widetilde{P_j}(u)\right).$$

❐ **Proposition** [*Polynômes annulateurs et diagonalisation*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes[1] :

(1) u est diagonalisable ;

(2) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

(3) le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

❐ **Théorème** [*Cayley-Hamilton*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$\widetilde{\chi_u}(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

❐ **Proposition** [*Polynômes annulateurs et trigonalisation*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est trigonalisable ;

(2) u admet un polynôme annulateur scindé ;

(3) χ_u est scindé.

❐ **Théorème**HP [*Sous-espaces caractéristiques*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé, $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i}$, les λ_i étant deux à deux distincts. On appelle sous-espaces caractéristiques de u les $C_{\lambda_i}(u) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}\right)$. Alors :

- les $C_{\lambda_i}(u)$ sont stables par u ;
- E est la somme directe des $C_{\lambda_i}(u)$ et dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{m_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \mathrm{I}_{m_r} + N_r \end{pmatrix},$$

  où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, si on note A_i la matrice de $u_{|C_{\lambda_i}(u)}$ dans la sous-base de $\mathscr{B}$ idoine, $N_i = A_i - \lambda_i \mathrm{I}_{m_i}$ et $N_i^{m_i} = 0$.

1. L'équivalence (1) ⇔ (3) n'est pas au programme.

[Indication : on utilise Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux.]

❐ **Proposition** [*Sous-espaces stables*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. Une droite $\operatorname{Vect}(a)$ avec $a \in E \setminus \{0\}$ est stable par u si et seulement si a est vecteur propre de u. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $H = \operatorname{Ker} \ell$ un hyperplan de E où $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ est telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u) = (a_1 \cdots a_n) = {}^{\mathrm{T}}X$. Alors H est stable par u si et seulement si X est vecteur propre de ${}^{\mathrm{T}}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

❐ **Lemme** [*Plan stable*] – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors tout endomorphisme de E admet une droite ou un plan stable.

❐ **Lemme** [*Commutation et stabilité*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$. Alors tout sous-espace propre de v est stable par u.

❐ **Théorème**EXO [*Diagonalisation simultanée*] – Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les matrices $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sont simultanément diagonalisables si et seulement si $\forall \alpha \in I$, A_α est diagonalisable et $\forall \beta \in I$, $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$[2].

[Indication : pour le sens difficile, procéder par récurrence sur n avec des endomorphisme et isoler u_0 qui ne soit pas une homothétie et appliquer l'hypothèse de récurrence aux sous-espaces propres de u_0.]

❐ **Proposition**HP [*Endomorphismes cycliques*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. u est cyclique si il existe $v_0 \in E$ tel que $E = \operatorname{Vect}\left((u^k(v_0))_{k \in \mathbf{N}}\right)$. Dans ce cas, le commutant de u ($\{v \in \mathscr{L}(E) \,|\, u \circ v = v \circ u\}$) est $\mathbf{K}[u]$ et $\chi_u = (-1)^n \mu_u$ où μ_u est le polynôme minimal de u.

[Indication : si f commute avec u, alors $f(v_0)$ est un polynôme en les $(u^k(v_0))_{k \in \mathbf{N}}$, généraliser ce résultat à $f(u^k(v_0))$ pour $k \in \mathbf{N}$.]

5 Dualité

❐ **Définition** [*Codimension*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La codimension d'un sous-espace vectoriel F de E est la dimension de tout supplémentaire de F dans E.

❐ **Définition** [*Crochet de dualité*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'application

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} E^* \times E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (\varphi, v) & \longmapsto & \varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle \end{array}$$

est bilinéaire. Si de plus E est de dimension finie, c'est une dualité parfaite.

❐ **Théorème** [*Base antéduale*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimnension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Pour toute base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^* il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i = e_i^*$ relativement à $(e_1, \ldots, e_n)$. $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

❐ **Lemme**EXO [*Intersection de noyaux*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi \in E^*$. Alors $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ si et seulement si $\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_j \subset$

2. Il existe un énoncé analogue en remplaçant diagonalisable par trigonalisable.

$\operatorname{Ker}\psi$.
[*Indication : pour le sens difficile, compléter un système libre maximale en base de E^*, prendre la base antéduale et décomposer ψ sur la base de E^*.*]

6 Espaces préhilbertiens

Dans toute cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
❒ **Définition** [*Produit scalaire*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi\colon E \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que :

(1) φ est linéaire à droite ;
(2) φ est symétrique si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, hermitienne si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
(3) φ est définie positive.

(E, φ) est alors un espace préhilbertien.
❒ **Théorème** [*Cauchy-Schwarz*] – Soit E un espace préhilbertien, $\forall x, y \in E$,

$$|(x|y)| \leqslant \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est liée.
[*Indication : étudier, pour $t \in \mathbf{R}$, $(x+ty|x+ty)$.*]
❒ **Proposition** [*Identité du parallélogramme*] – Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Alors $\forall x, y \in E$, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

❒ **Proposition** [*Identité de polarisation*] – Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire.
- Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors $\forall x, y \in E$,

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

- Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors la formule précédente est valable pour la partie réelle du produit scalaire d'où la formule suivante, pour $x, y \in E$,

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|ix+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

❒ **Théorème** [*Pythagore*] – Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Si $u, v \in E$ sont orthogonaux, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Réciproquement, dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, alors $(u|v) = 0$.
❒ **Proposition** [*Gram-Schmidt*] – Soit $I = \mathbf{N}^*$ ou $I = [\![1, p]\!]$ avec $p \in \mathbf{N}^*$, E un espace préhilbertien, $(v_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. Alors il existe un unique système orthonormal $(e_i)_{i\in I}$ tel que $\forall k \in I$, $\operatorname{Vect}((e_i)_{i\leqslant k}) = \operatorname{Vect}((v_i)_{i\leqslant k})$ et $(e_k|v_k) \in \mathbf{R}_+$. De plus, on a les formules suivantes :
- $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$;
- $\forall k \leqslant 2$, $e_k = \dfrac{w_k}{\|w_k\|}$ où w_k est la projection orthogonale de v_k sur $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})^\perp$, soit $w_k = v_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (e_i|v_k)\, e_i$.

❒ **Proposition** [*Distance à une partie*] – Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $\forall v \in E$, la distance de v à F est atteinte en la projection orthogonale de v sur F : $\mathrm{d}(v, F) = \|v - p_F(v)\|$.
❒ **Théorème**[HP] [*Projection sur un convexe complet non vide*] – Soit E un espace préhilbertien, $C \subset E$ convexe compact non vide. Alors pour tout $v \in E$, il existe un unique $p_C(v) \in C$ tel que $\|v - P_C(v)\| = \mathrm{d}(v, C)$. De plus, $p_C(v)$ est caractérisé par la propriété

$$\forall z \in C, \quad \Re\mathrm{e}\,((v - p_C(v)|z - p_C(v))) < 0.$$

Enfin $v \in E \longmapsto p_C(v) \in C$ est 1-lipschitzienne.
[*Indication : prendre une suite (c_n) de points de C telle que $\|c_n - v\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{d}(v, C)$ et montrer qu'elle est de Cauchy grâce à l'identité du parallélogramme. Pour l'affaire de l'angle obtus, utiliser la méthode du glissement.*]
❒ **Proposition**[HP] [*Gram*] – Soit E un espace préhilbertien, $v_1, \dots, v_n \in E$. On appelle matrice de Gram du système $(v_1, \dots, v_n)$ la matrice $G(v_1, \dots, v_n)$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $G(v_1, \dots, v_n)[i, j] = (v_i|v_j)$. On note $g(v_1, \dots, v_n) = \det G(v_1, \dots, v_n)$. On a alors les propriétés suivantes :
- $g(n_1, \dots, n_n) = 0$ si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est liée ;
- si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E, alors $\forall u \in E$,

$$(\mathrm{d}(u, F))^2 = \frac{g(v_1, \dots, v_p, u)}{g(v_1, \dots, v_p)}.$$

❒ **Lemme** [*Projecteur orthogonal*] – Soit E un espace préhilbertien, p un projecteur de E. Si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, alors p est orthogonal.
[*Indication : utiliser la méthode de glissement.*]
❒ **Proposition** [*Topologie des matrices*] – Voici un tableau récapitulant les diverses propriétés topologiques des ensembles de matrice relativement à la topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ muni d'une norme quelconque. $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

$\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$	compact	$\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$	compact
$\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$	compact	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$	ouvert dense
$\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$	fermé d'intérieur vide	$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid A \text{ diagonalisable}\}$	dense
$\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$	fermé	$\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$	ouvert de $\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$

❒ **Lemme** [*Valeurs propres d'une antisymétrique*] – La seule valeur propre réelle d'une matrice antisymétrique à coefficients complexes est 0.

[Indication : Multiplier l'équation aux éléments propres $AX = \lambda X$ par ${}^{\mathrm{T}}\overline{X}{}^{\mathrm{T}}\overline{A}$ à gauche.]

❒ **Lemme** [*Valeurs propres d'une hermitienne*] – Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est hermitienne (${}^{\mathrm{T}}\overline{A} = A$), alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(A) \subset \mathbf{R}$.

❒ **Lemme**HP [*Schur*] – Dans un espace préhilbertien de dimension finie, tout endomorphisme trigonalisable l'est en base orthonormale.

[Indication : résulte de Gram-Schmidt.]

❒ **Théorème**HP [*Spectraux*] – Les théorèmes suivants résultent d'une application judicieuse du lemme de Schur :

(1) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est hermitienne si et seulement si elle est unitairement diagonalisable à valeurs propres réelles ;

(2) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable [1] ;

(3) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est unitaire si et seulement si elle est unitairement diagonalisable à valeurs propres de module 1.

❒ **Proposition**HP [*Racine carrée*] – Pour tout $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$

[Indication : utiliser le théorème spectral pour l'existence, et considérer les restrictions aux sous-espaces propres pour l'unicité.]

❒ **Théorème**EXO [*Décomposition polaire*] – Pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, il existe un unique couple $(S, P) \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = SP$. Si on a juste $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors il existe un couple $(S, P) \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $A = SP$.

[Indication : pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, prendre pour S une racine carrée de $A{}^{\mathrm{T}}A$. Pour le cas général, utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et le fait que $\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$ est fermé.]

❒ **Proposition**EXO [*Min-max*] – Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Pour $d \in [\![0, n]\!]$, on pose X_d l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d et Σ la sphère unité de E. Alors, $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda_k = \inf_{F \in X_k} \left(\sup_{x \in F \cap \Sigma} (x|u(x)) \right) = \sup_{F \in X_{n+1-k}} \left(\inf_{x \in F \cap \Sigma} (x|u(x)) \right).$$

[Indication : prendre une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de u, et considérer les sous-espaces $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k$ et $G_k = (e_{n+1-k}, \ldots, e_n)$.]

❒ **Proposition** [*Formule de réflexion*] – Soit E un espace euclidien, $n \in E \setminus \{0\}$, $H = \{n\}^\perp$. Alors la réflexion par rapport à H est l'endomorphisme

$$\sigma_H \colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{2\,(n|x)\,n}{\|n\|^2} \end{array}.$$

❒ **Théorème**HP [*Cartan*] – Soit E un espace euclidien, $\mathrm{O}(E)$ est le sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ engendré par les réflexions. Plus précisément, tout $u \in \mathrm{O}(E)$ peut s'exprimer comme composé de $n - p$ réflexions où $p = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

[Indication : montrer d'abord que si $n = \dim E \geqslant 2$, $\forall x, y \in E$, il existe une unique réflexion qui échange x et y. Procéder ensuite par récurrence sur $n - p$ en utilisant le fait que tout endomorphisme d'un espace euclidien admet un plan ou une droite stable.]

❒ **Proposition** [*Expression intrinsèque d'une rotation*] – Soit E un espace euclidien de dimension 3, R la rotation d'axe dirigé et orienté par $n \in E \setminus \{0\}$ et d'angle θ. Alors $\forall x \in E$,

$$R(x) = \cos\theta x + \frac{\sin\theta n \wedge x}{\|n\|} + (1 - \cos\theta)\frac{(n|x)}{\|n\|^2} n.$$

❒ **Lemme**EXO [*Famille quasi-orthonormale*] – Soit E un espace préhilbertien réel, $(u_1, \ldots, u_p)$ des vecteurs de E tels que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (u_i|v)^2$. Alors $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

[Indication : montrer que $E^\perp = \{0\}$.]

❒ **Lemme**EXO [*Similitude sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$*] – Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $A = P^{-1}BP$. Alors A et B sont aussi semblables via une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

[Indication : décomposer $P = R + iS$ où R et S sont à coefficients réels, déduire de la relation de similitude un système de deux équations. $x \in \mathbf{R} \colon \det(R + xS) \longmapsto$ est polynômiale en x donc s'annule un nombre fini de fois.]

7 Formes bilinéaires symétriques et quadratiques

Dans la suite $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle ou plus grande que 2.

❒ **Définition** [*Forme quadratique et polaire*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. À une forme bilinéaire symétrique φ de E on associe la forme quadratique q définie par $q \colon x \in E \longmapsto \varphi(x, x) \in \mathbf{K}$. On dit aussi que φ est la forme polaire de q.

❒ **Proposition** [*Caractérisation des formes quadratiques*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $q \colon \mathbf{K} \longrightarrow E$ est une forme quadratique si et seulement si elle s'exprime par un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de la variable dans une base de E quelconque.

❒ **Théorème** [*Congruence*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, φ une forme bilinéaire symétrique. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$, alors

$$A' = {}^{\mathrm{T}}PAP.$$

❒ **Théorème**HP [*Réduction en carré*] – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme bilinéaire symétrique. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit diagonale. Autrement dit, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors il existe $c_1, \ldots, c_n$ telles que pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i y_i$.

1. Ce résultat est le théorème spectral qui est lui au programme.

[Indication : procéder par récurrence et considérer l'hyperplan $H = \{x \in E \,|\, \varphi(x, e_1) = 0\}$ où $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$.]

❒ **Définition**HP *[Signature]* – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, Q une forme quadratique. L'indice de positivité p de Q est la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie positive. L'indice de négativité q de Q est la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels Q est définie négative. Le couple (p, q) est la signature de Q.

❒ **Théorème** *[Cauchy-Schwarz pour les FBS positives]* – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique *positive*. Alors $\forall x, y \in E$,

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)}.$$

❒ **Définition** *[Noyau, cône isotrope d'une FBS]* – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associée. Le noyau de φ est le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \,|\, \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$. Le cône isotrope de q est l'ensemble $K = \{x \in E \,|\, q(x) = 0\}$.

❒ **Théorème**HP *[Forme réduite de Sylvester]* – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme bilinéaire symétrique de signature (p, q). Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle on ait, par blocs,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Indication : utiliser la réduction en carré.]

❒ **Définition** *[Endomorphisme symétrique d'une FBS]* – Soit E un espace euclidien, φ une forme bilinéaire symétrique. Alors il existe un unique $\Pi \in \mathscr{L}(E)$ symétrique tel que $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = (\Pi(x)|y) = (x|\Pi(y))$. Les matrices de Π et φ coïncident dans n'importe quelle base orthonormée de E.

❒ **Théorème** *[Réduction simultanée de deux FBS]* – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, φ_1, φ_2 deux formes bilinéaires symétriques telles que φ_1 est définie positive. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_1) = \mathrm{I}_n$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_2) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
[Indication : φ_1 est en fait un produit scalaire sur E, prendre une base orthonormale pour φ_1 qui réduit φ_2 donnée par le théorème spectral.]

8 Quadriques de $\mathbf{R}^3$

❒ **Définition** *[Quadrique]* – Une quadrique de $\mathbf{R}^3$ est une surface d'équation

$$f(x, y, z) = \underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fzy}_{q(x,y,z)} + gx + hy + iz + j = 0,$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbf{R}$.

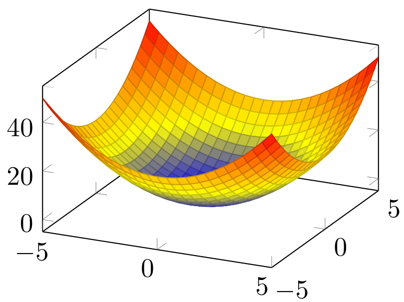
❒ **Proposition** *[Quadriques à centre]* – On peut classifier les quadriques possédant un centre de symétrie en fonction de la forme de leur équation réduite dans un repère orthonormal de vecteurs propres de la matrice de la forme bilinéaire associée à l'équation de la quadrique et centré sur le centre de symétrie de la quadrique.

Équation réduite	Nature de la surface
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	ellipsoïde
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	hyperboloïde à une nappe
$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	hyperboloïde à deux nappes
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	cylindre à base elliptique
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	cylindre à base hyperbolique
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$	cône de révolution

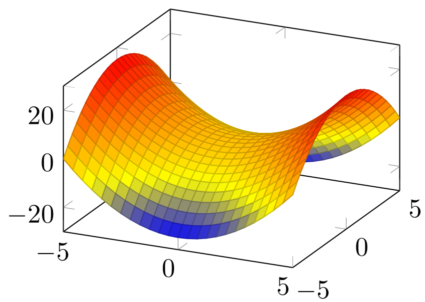
❒ **Proposition** *[Quadriques asymétriques]* – Si la quadrique ne présente pas de centre de symétrie, on peut tout de même réduire l'équation dans un repère orthonormal qui diagonalise la forme quadratique associée à l'équation de la quadrique.

Équation réduite	Nature de la surface
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$	paraboiloïde elliptique
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$	paraboloïde hyperbolique
$y = kx^2$	cylindre parabolique

Paraboloïde elliptique



Paraboloïde hyperbolique



9 Étude affine des courbes et surfaces

❒ **Proposition** [*Branches infinies en polaires*] – Soit $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, Γ l'arc d'équation polaire $\rho(\theta)$. Soit $\theta_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \pm\infty$, alors $\theta = \theta_0$ est direction asymptotique car $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)} = \tan\theta \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \tan\theta_0$. Pour étudier l'asymptote, on se place dans le repère mobile $\left(O; \vec{u}_{\theta_0}, \vec{u}_{\theta_0+\frac{\pi}{2}}\right)$ et il suffit de voir si $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ admet une limite en 'θ_0.

❒ **Théorème** [*Position par rapport au plan tangent*] – Soit $\mathscr{S}$ une surface de $\mathbf{R}^3$ définie par $z = \varphi(x,y))$ avec $\varphi\colon U \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, on pose $r = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $t = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ et $s = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$.

(1) Si $rt - s^2 > 0$, il existe un voisinage V de M_0 tel que $\mathscr{S} \cap V \setminus \{M_0\}$ est inclus dans un des demi-espaces délimités par le plan tangent. M_0 est dit elliptique.

(2) Si $rt - s^2 < 0$, dans tout voisinage de M_0 il existe des points de $\mathscr{S}$ de part et d'autre du plan tangent. M_0 est dit hyperbolique.

(3) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire sauf que M_0 est dégénéré.

10 Intégrales curvilignes

❒ **Définition** [*Formes différentielles*] – À toute application $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ on peut associer la forme différentielle

$$\omega\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & (\mathrm{d}f)(M) \end{array}.$$

On dit que f est une primitive de ω. De plus, si $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est la base canonique de $(\mathbf{R}^n)^*$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{d}x_i = e_i^*$ et on écrit $\omega(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i(M)\mathrm{d}x_i$.

Réciproquement, on dit que ω est exacte s'il existe $f\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

❒ **Proposition** [*Forme fermée*] – Une forme différentielle

$$\omega\colon \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i(M)\mathrm{d}x_i \end{array}$$

de classe $\mathscr{C}^1$ est dite fermée si elle vérifie $\forall (i,) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial p_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial p_j}{\partial x_i}$. C'est une condition nécessaire à l'exactitude de ω.

❒ **Définition** [*Intégrale curviligne*] – Soit ω une forme différentielle continue sur U, $\psi\colon [a,b] \longmapsto U$ continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, U étant un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soit $(a_0, \ldots, a_p)$ une subdivision adaptée au caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux de ψ, on pose alors l'intégrale curviligne de ω sur le chemin orienté ψ comme étant

$$\int_\psi \omega = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} [\omega(\psi(t))](\psi'(t))\mathrm{d}t.$$

De plus, si $\omega(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^n p_i(M)\mathrm{d}x_i$ et $\psi(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$, alors

$$\int_\psi \omega = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \sum_{i=1}^n p_i(\psi(t))\alpha_i'(t)\mathrm{d}t.$$

❒ **Théorème** [*Poincaré*] – Soit U un ouvert étoilé, $\omega\colon U \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ une forme différentielle $\mathscr{C}^1$ fermée. Alors ω est exacte et si U est étoilé par rapport à $A \in U$, alors l'application $M \in U \longmapsto \int_{[AM]} \omega$ est une primitive de ω et toute autre primitive de ω diffère de celle-ci d'une constante.

❒ **Théorème** [*Green-Riemann*] – Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$, Δ un compact inclus dans U de frontière orientée Γ, $\omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Alors

$$\int_\Gamma \omega = \iint_\Delta \mathrm{d}\omega = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cette fiche comporte 90 entrées dont 27 théorèmes, 27 propositions, 21 définitions et 15 lemmes.

Index