Corrigé mines 2 PSI 2015

Partie I

Les questions de cette partie sont très faciles, il est donc indispensable d'être irréprochable sur le plan de la rédaction.

Question 1

- Tous les blocs qui interviennent dans ce qui suit sont carrés d'ordre n, donc les produits par blocs ne posent pas de problème.
  On trouve de suite que $J^2 = \begin{bmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix} = -I_{2n}$, et que $J^T = -J$.

- La relation $J^2 = -I_{2n}$ garantit que J est inversible et que son inverse est $-J$.

Question 2

- D'après la première question, $J^T JJ = -J^2 J = J$, donc $\boxed{J \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

- Pour tout réel α, $(K(\alpha))^T = \begin{bmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$.
  Là encore, les produits par blocs qui suivent ne posent pas de problème, et
  $$\begin{aligned} & (K(\alpha))^T JK(\alpha) \\ = & \begin{bmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -\alpha I_n + \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \\ = & J, \end{aligned}$$
  donc $\boxed{K(\alpha) \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

Question 3

Soit $U \in \mathcal{G}_n$.
Les produits par blocs qui suivent ne posent toujours pas de problème, et :
$$\begin{aligned} & (L_U)^T JL_U \\ = & \begin{bmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0_n & -U^T \\ U^{-1} & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0_n & -U^T (U^{-1})^T \\ U^{-1}U & 0_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Mais on sait que la transposée d'une matrice inversible est inversible, et que l'inverse de sa transposée est la transposée de son inverse.
Ainsi, $(L_U)^T JL_U = J$, donc $\boxed{L_U \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

Question 4

On sait que le déterminant du prosuit de deux matrices carrées de même ordre A et B est le produit des déterminants de A et B, et qu'une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.
Ainsi, si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, $\text{dét}\left(M^T JM\right) = (\text{dét}\,(M))^2\, \text{dét}\,(J)$, donc $(\text{dét}\,(M))^2\, \text{dét}\,(J) = \text{dét}\,(J)$.
Mais on a vu que J est inversible, donc son déterminant est non nul, donc $(\text{dét}\,(M))^2 = 1$, donc $\boxed{\text{dét}\,(M) \in \{-1, +1\}}$.
On verra à la partie III, qu'en fait $\text{dét}\,(M)$ *vaut forcément 1.*

Question 5

Soit M et N deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$.

- M et N sont donc deux éléments de $\mathcal{M}_{2n}$, donc leur produit est défini et élément de $\mathcal{M}_{2n}$.
- Par appartenance de M puis N à $\mathcal{S}p_{2n}$,$(MN)^T J (MN) = N^T \left(M^T JM\right) N = N^T JN = J$.
- Finalement, $\boxed{MN \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

Question 6

J'aurais posé 7 avant 6, mais bon...

- D'après Q4, les éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$ sont de déterminant non nul, donc inversibles.
- Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, et comme M, M^T et J sont inversibles, $\left(M^T JM\right)^{-1} = J^{-1}$,
  donc $M^{-1} J^{-1} \left(M^T\right)^{-1} = J^{-1}$.
  On remplace J^{-1} par $-J$, $\left(M^T\right)^{-1}$ par $\left(M^{-1}\right)^T$, et on transpose, ce qui donne :
  $-M^{-1} J^T \left(M^{-1}\right)^T = -J^T$.
  Mais $J^T = -J$, donc $M^{-1} J \left(M^{-1}\right)^T = J$.
- Finalement, $\boxed{M^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

Question 7

Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, $M^T JM = J$, donc, en transposant, $M^T J^T M = J^T$, donc, en remplaçant J^T par $-J$ et en multipliant par -1, $M^T JM = J$, donc $\boxed{M^T \in \mathcal{S}p_{2n}}$.

Question 8

- On ne travaille que sur des blocs carrés d'ordre n, donc les produits par blocs qui suivent ne posent toujours pas de problème.
- $M^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$, donc

$$
\begin{aligned}
& M^T J M \\
= & \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} C^T & -A^T \\ D^T & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Ainsi, comme tous les blocs qui interviennent sont carrés d'ordre n, $M \in \mathcal{S}p_{2n}$ si et seulement si : $\boxed{\begin{cases} \left(C^T\right) A - \left(A^T\right) C = 0_n \\ \left(C^T\right) B - \left(A^T\right) D = -I_n \\ \left(D^T\right) A - \left(B^T\right) C = I_n \\ \left(D^T\right) B - \left(B^T\right) D = 0_n \end{cases}}$.

Partie II

Question 9

Ne pas oublier que les éléments de $\mathcal{Z}$ se recrutent parmi ceux de $\mathcal{S}p_{2n}$.

- On vérifie immédiatement que I_{2n} et $-I_{2n}$ appartiennent à $\mathcal{S}p_{2n}$.
- I_{2n} et $-I_{2n}$ commutent avec toute matrice carrée d'ordre $2n$, donc avec tout élément de $\mathcal{S}p_{2n}$.
- Finalement : $\boxed{\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}}$.

Question 10

- Avec les notations de I, $L = (K(-1))^T$, donc, d'après Q2 et Q7, L est élément de $\mathcal{S}p_{2n}$.
- Ainsi, $LM = ML$,donc, toujours puisque les produits par blocs ne posent pas de problème et puisque les tailles des blocs des deux membres correspondent,
  $\begin{bmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{bmatrix}$, et donc $C = 0_n$ et $D = A$.
  Comme $L \in \mathcal{S}p_{2n}$, $L^T \in \mathcal{S}p_{2n}$, donc $L^T M = ML^T$, donc, en tenant compte des relations déjà acquises, $\begin{bmatrix} A & B \\ A & B+A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & B \\ A & B \end{bmatrix}$, donc $B = 0_n$.
- Ainsi, $M = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix}$, donc, d'après le dernier résultat rappelé en préambule, $\text{dét}(M) = (\text{dét}(A))^2$.
  Or M est inversible, donc de déterminant non nul, donc A est de déterminant non nul, donc A est inversible.

Question 11

On sait que, si $U \in \mathcal{G}_n$, $L_U \in \mathcal{S}p_{2n}$, donc $\begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix} L_U = L_U \begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix}$.
En identifiant les blocs carrés d'ordre n supérieurs gauches des deux membres, on obtient : $\boxed{AU = UA}$.

Question 12

- Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $I_n + E_{ij}$ est une matrice triangulaire donc les coefficients diagonaux valent tous 1 ou 2, donc sont non nuls. Par conséquent, $I_n + E_{ij}$ est inversible.

- Ainsi, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $(I_n + E_{ij})\,A = A\,(I_n + E_{ij})$, donc, en développant, $E_{ij}A = AE_{ij}$.
On explicite A sous la forme $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.
Toutes les lignes de $E_{ij}A$ sont nulles, sauf la i-ième, qui est $\begin{bmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix}$.
Toutes les colonnes de AE_{ij} sont nulles, sauf la j-ième, qui vaut $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$.
On en déduit que, pour $k \neq j$, $a_{jk} = 0$, et que $a_{jj} = a_{ii}$.

- Par conséquent, A est une matrice dont les coefficients non diagonaux sont tous nuls et les coefficients diagonaux tous, égaux, donc A est de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $M = \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ 0_n & \lambda I_n \end{bmatrix}$, donc $\text{dét}\,(M) = \lambda^{2n}$.
Mais, d'après Q4, le déterminant d'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ est 1 ou -1, donc $\lambda \in \{-1, +1\}$, donc $M \in \{-I_{2n},\, I_{2n}\}$.

- On vient de démontrer que $\mathcal{Z} \subset \{-I_{2n},\, I_{2n}\}$, et on a prouvé en Q9 que $\{-I_{2n},\, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.
Finalement : $\boxed{\mathcal{Z} = \{-I_{2n},\, I_{2n}\}}$.

Partie III

Question 13

Si Q, U, V, W sont quatre matrices de $\mathcal{M}_n$, $\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{bmatrix}$.
Comme D est inversible, pour que ceci soit égal à M, il suffit que $V = C$, $W = D$, $Q = BD^{-1}$, $U = A - BD^{-1}C$.

Question 14

- D'après Q8, $\left(D^T\right) B - \left(B^T\right) D = 0_n$, donc, puisque D (et donc D^T) est inversible, $BD^{-1} = \left(D^T\right)^{-1} B^T = \left(D^{-1}\right)^T B^T = \left(BD^{-1}\right)^T$, donc BD^{-1} est symétrique.

- D'après Q13, $\text{dét}\,(M) = \text{dét}\left(\begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - \left(BD^{-1}\right) C & 0_n \\ C & D \end{bmatrix}\right)$, puis, d'après le dernier résultat des préliminaires, $\text{dét}\,(M) = \text{dét}\,(A - \left(BD^{-1}\right) C)\,\text{dét}\,(D)$.
Mais une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant,
donc $\text{dét}\,(A - \left(BD^{-1}\right) C) = \text{dét}\left(A^T - C^T \left(BD^{-1}\right)^T\right)$, donc, comme BD^{-1} est symétrique,
$\text{dét}\,(M) = \text{dét}\left(A^T - C^T \left(BD^{-1}\right)\right) \text{dét}\,(D) = \text{dét}\left(\left(A^T\right) D - \left(C^T\right) B\right)$.
Toujours d'après Q8, $\left(D^T\right) A - \left(B^T\right) C = I_n$, donc, en transposant, $\left(A^T\right) D - \left(C^T\right) B = I_n$,

donc $\det(M) = \det(I_n)$,
donc $\boxed{\det(M) = 1}$.

Question 15

On s'inspire de la preuve de l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique. L'hypothèse de non-inversibilité de Q est sans importance ici, elle ne semble être là que pour donner une idée pour la question 17.
Idem pour l'hypothèse de non-nullité de V_1 et V_2.

D'une part, $QV_1 = s_1 PV_1$, donc $(QV_1|QV_2) = s_1 \left(V_1^T\right)\left(P^T\right) QV_2$.
D'autre part, $QV_2 = s_2 PV_2$, donc $(QV_1|QV_2) = s_2 \left(V_1^T\right)\left(Q^T\right) PV_2$.
Mais $\left(P^T\right) Q$ est stymétrique, donc $\left(V_1^T\right)\left(P^T\right) QV_2 = \left(V_1^T\right)\left(Q^T\right) PV_2$.
En soustrayant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient
$(s_1 - s_2)\left(V_1^T\right)\left(P^T\right) QV_2 = 0$, donc, comme $s_1 \neq s_2$, $\left(V_1^T\right)\left(P^T\right) QV_2 = 0$,
donc $\boxed{(QV_1|QV_2) = 0}$.

Question 16

Soit V un élément de $\mathcal{E}_n$ appartenant à $\ker B \cap \ker D$.
On peut effectuer le produit par blocs $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0_{n1} \\ V \end{bmatrix}$, où 0_{n1} désigne le vecteur nul de $\mathcal{E}_n$, et il vaut $\begin{bmatrix} BV \\ DV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n1} \\ 0_{n1} \end{bmatrix}$.
Ainsi, M est inversible puisqu'élément de $\mathcal{S}p_{2n}$, et $M\begin{bmatrix} 0_{n1} \\ V \end{bmatrix}$ est nul, donc $V = 0_{n1}$.
Comme 0_{n1} appartient au noyau de tout endomorphisme de $\mathcal{E}_n$,
on a bien prouvé que $\boxed{\ker B \cap \ker D = \{0_{n1}\}}$.

Question 17

En tenant compte des remarques faites au 15, la non-nullité des vecteurs DV_i n'intervient que dans la conclusion de ce raisonnement.

- Soit $i \in [[1, m]]$ et $V \in \mathcal{E}_n$ pour lequel $(D - s_i B) V = 0_{n1}$.
  Alors $DV = s_i BV$ et $s_i$est non nul, donc si DV est nul, alors BV est nul, donc $V \in \ker B \cap \ker D$, donc, d'après Q16, V est nul.
  Mais V_i est non nul, donc DV_i est non nul.

- D'après Q8, $\left(D^T\right) B - \left(B^T\right) D = 0_n$, donc $\left(B^T\right) D$ est symétrique et D non inversible.
  Mais les vecteurs DV_i sont tous non nuls, donc, d'après la question 15, ils sont deux à deux orthogonaux.
  la famille $(DV_i)_{i \in [[1,m]]}$ est donc formée de vecteurs **non nuls** deux à deux orthogonaux, donc est libre.

Question 18

Si $s_1, \cdots, s_m$ sont des réels deux à deux distincts pour lesquels $D - s_1 B$, ..., $D - s_m B$ sont non inversibles, alors il existe des vecteurs V_1, ..., V_m non nuls pour lesquels $(D - s_1 B) V_1$, ...,

$(D - s_m B)\, V_m$ sont nuls.
D'après la question 17, la famille $(DV_i)_{i \in [[1,m]]}$ est donc une famille libre de vecteurs de $\mathcal{E}_n$.
or $\mathcal{E}_n$ est de dimension n, donc $m \leqslant n$.
Il existe donc au plus n réels s pour lesquels $D - sB$ est non inversible, donc il existe une infinité de réels α pour lesquels $D - \alpha B$ est inversible.

Question 19

On se laisse guider par l'énoncé : où, hormis dans Q18, un réel α apparaît-il ?

On considère une matrice $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ de $\mathcal{S}p_{2n}$, A, B, C, D étant quatre blocs d'ordre n.

- Si D est inversible, alors, d'après Q14, $\det(M) = 1$.
- Sinon, on choisit pour α un des réels mis en évidence dans $Q18$.
  D'après Q2 et Q5, $K(\alpha)\, M \in \mathcal{S}p_{2n}$.
  Mais $K(\alpha)\, M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{bmatrix}$, et $-\alpha B + D$ est inversible, donc, d'après Q14, $\det(K(\alpha)\, M) = 1$.
  Ainsi, $\det(K(\alpha)) \det(M) = 1$. Or $\det(K(\alpha)) = 1$, donc, à nouveau, $\det(M) = 1$.
- On a donc bien montré que $\boxed{\text{le déterminant de tout élément de } \mathcal{S}p_{2n} \text{ est } 1}$.