Fractions rationnelles

Olivier SELLÈS, transcrit par Denis MERIGOUX

Table des matières

1 Généralités

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre. On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de cet anneau appelé corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.1 Rappels

Tout $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit $F = \dfrac{A}{B}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ avec la règle d'égalité $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$.

On a les opérations suivantes :
- $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD+BC}{BD}$;
- $\dfrac{A}{B}\dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$;
- pour $\lambda \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$, $\lambda\dfrac{A}{B} = \dfrac{\lambda A}{B}$.

$(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre : $0_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{0}{1} + \dfrac{0}{B}$ avec $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $1_{\mathbb{K}(X)} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{B}{B}$ pour tout $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

1.2 Représentants irréductibles

Pour $F \in \mathbb{K}(X)$, un représentant [a] irréductible de F est un représentant $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ de F tel que $P \wedge Q = 1$.

a. Un représentant de F est un couple $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. Voir section 18.6 du cours complet page 313.

Il y a toujours des représentants irréductibles : soit $F = \dfrac{A}{B}$, $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $D = A \wedge B \neq 0$ car $B \neq 0$ donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec $P \wedge Q = 1$ donc $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{P}{Q}$ d'où le résultat.

Caractérisation de l'ensemble des représentants irréductibles Si (P, Q) est un représentant irréductible de F, alors les autres représentants de F sont les couples (SP, SQ) avec $S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. En effet :
- $\forall S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $\dfrac{SP}{SQ} = \dfrac{P}{Q} = F$;
- soit (A, B) un représentant de F, $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{P}{Q} \Leftrightarrow AQ = PB$. $P \mid AQ$ et $P \wedge Q = 1$ donc $P \mid A$. De plus, $Q \mid B$ d'où $B = QS$ avec $S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ car $B \neq 0$ donc $AQ = PSQ$ car $Q \neq 0$. $\mathbb{K}[X]$ est intègre donc $A = SP$ d'où le résultat.

Si (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) sont deux représentants irréductibles de F, $\exists S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_1 = P_2 S$ et $Q_1 = Q_2 S$ et $\exists T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_2 = P_1 T$ et $Q_2 = Q_1 T$ donc $Q_1 = STQ_1$ et $Q_1 \neq 0$ donc $ST = 1$ donc $S, T \in \mathbb{K}^*$. Ainsi, $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P_2 = \alpha P_1$ et $Q_2 = \alpha Q_1$.

En particulier, il existe un unique représentant de F irréductible (P, Q) avec Q unitaire.

Racines Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$, on note Ω_F l'ensemble $\mathbb{K}$ privé des racines de Q dans $\mathbb{K}$.

Pour $t \in \Omega_F$, on pose alors $\widetilde{F}(t) = \dfrac{\widetilde{P}(t)}{\widetilde{Q}(t)}$. $\widetilde{F}$ est la fonction rationnelle associée à F. Si $\Delta \subset \mathbb{K}$, alors on dit que $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ est rationnelle s'il existe $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $\Delta \subset \Omega_F$ et $\forall t \in \Delta$, $f(t) = \widetilde{F}(t)$.

Degré Soient $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $AD = BC$, alors $\deg A - \deg C = \deg B - \deg D$.
En effet :
- si $A = 0$, alors $C = 0$ et $\deg A - \deg C = -\infty$, on a bien $-\infty - \deg B = -\infty = -\infty - \deg D$;
- si $A \neq 0$, alors $AD \neq 0$ d'où $BC \neq 0$ donc $C \neq 0$ donc tous les degrés sont bien des entiers naturels :

$$\deg(AD) = \deg(BC) \Leftrightarrow \deg A + \deg D = \deg B + \deg C$$

d'où le résultat.

Pour $F \in \mathbb{K}(X)$, on pose $\deg F = \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ où (A, B) est n'importe quel représentant de F.

On remarque que si $A \in \mathbb{K}[X]$, $\deg A = \deg\left(\dfrac{A}{1}\right)$ donc la définition du degré pour les fractions rationnelles prolonge celle valable pour les polynômes.

1.3 Propriétés

(1) $\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$.

(2) $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$:

  (a) $\deg(FG) = \deg F + \deg G$;

  (b) $\deg(F + G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$ avec égalité si $\deg F \neq \deg G$.

Démonstration

(1) Évident !

(2) (a) Si $F = 0$ ou $G = 0$, le résultat est trivial. Supposons F et G non nuls, et posons $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors $FG = \dfrac{AC}{BD}$ donc

$$\begin{aligned} \deg(FG) &= \deg(AC) - \deg(BD) \\ &= \deg A - \deg B + \deg C - \deg D \\ &= \deg\left(\frac{A}{B}\right) + \deg\left(\frac{C}{D}\right) \\ &= \deg F + \deg G \end{aligned}$$

(b) Si $F = 0$ ou $G = 0$, le résultat est trivial. Supposons F et G non nuls, et posons $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors $F + G = \dfrac{AD + BC}{BD}$ donc

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg(AD + BC) - \deg(BD) \\ &\leqslant \max(\deg AD, \deg BC) - \deg BD \\ &\leqslant \max(\deg AD - \deg BD, \deg BC - \deg BD) \\ &\leqslant \max(\deg A - \deg B, \deg C - \deg D) \end{aligned}$$

Si $\deg F < \deg G$, $\deg A - \deg B < \deg C - \deg D$ d'où $\deg(AD) < \deg(BC)$ donc $\deg(AD + BC) = \deg(BC)$ et

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg BC - \deg BD \\ &= \deg C - \deg D \\ &= \deg G \end{aligned}$$

1.4 Dérivation

Soient $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$. Montrons que $\dfrac{A'B - AB'}{B^2} = \dfrac{C'D - CD'}{D^2}$:

$$\begin{aligned}
AD = BC &\Leftrightarrow A'D + AD' = B'C + BC' \\
&\Leftrightarrow A'BD^2 + ABDD' = B'CBD + C'B^2D \\
&\Leftrightarrow A'BD^2 - B'CBD = C'B^2D - ABDD' \\
&\Leftrightarrow A'BD^2 - B'ADD^2 = C'B^2D - D'B^2C \\
&\Leftrightarrow D^2\left(A'B - AB'\right) = B^2\left(C'D - CD'\right)
\end{aligned}$$

Soit $F \in \mathbb{K}[X]$, on pose alors pour n'importe quel représentant (A, B) de F :

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$$

Propriétés

(1) $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha F + G)' = \alpha F' + G'$.

(2) $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$, $(FG)' = F'G + FG'$

Démonstrations

(1) Je laisse le soin aux potentiels PSI de refaire ce calcul long et fastidieux qui ne présente aucun intérêt.

(2) Peut-être ai-je moi-même une âme de PSI :

$$\begin{aligned}
(FG)' &= \left(\frac{AC}{BD}\right)' \\
&= \frac{(A'C + AC')BD - (B'D + BD')AC}{(BD)^2} \\
&= \frac{A'CBD + AC'BD - ACB'D - ACBD'}{(BD)^2} \\
F'G + FG' &= \frac{C}{D}\frac{(A'B - AB')}{B^2} + \frac{A}{B}\frac{(C'D - CD')}{D^2} \\
&= \frac{CD(A'B - AB') + AB(C'D - CD')}{(BD)^2} \\
&= \frac{A'CDB - AB'CD + ABC'D - ABD'C}{(BD)^2}
\end{aligned}$$

Piège ! On a pas forcément $\deg F' = \deg F - 1$: $F = \dfrac{X+1}{X} = 1 + \dfrac{1}{X}$, $\deg F = 0$ mais $F' = -\dfrac{1}{X^2}$ donc $\deg F' = -2$.

1.5 Composition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non-constant et $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$. Montrons que $B \circ P \neq 0$, $D \circ P \neq 0$ et $\dfrac{A \circ P}{B \circ P} = \dfrac{C \circ P}{D \circ P}$.

En effet, on sait que $B \circ P \neq 0$ car $\deg(B \circ P) = \deg B \deg P \in \mathbb{N}$ et de même, $D \circ P \neq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
AD = BC &\Leftrightarrow (AD) \circ P = (BC) \circ P \\
&\Leftrightarrow (A \circ P)(D \circ P) = (B \circ P)(C \circ P)
\end{aligned}$$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, on pose pour n'importe quel représentant (A, B) de F :

$$F \circ P = \frac{A \circ P}{B \circ P}$$

Propriétés $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\forall P \in K[X]$ non-constant, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:
(1) $(\alpha F + G) \circ P = \alpha F \circ P + G \circ P$;
(2) $(FG) \circ P = (F \circ P)(G \circ P)$.

Composition d'un polynôme par une fraction Formult aussi définir, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$ la fraction $P \circ F$. Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $P \circ F = \sum_{k=0}^{d} a_k F^k$. On aura les propriétés suivantes pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$:
- $(P + Q) \circ F = P \circ F + Q \circ F$;
- $(PQ) \circ F = (P \circ F)(Q \circ F)$;
- $(P \circ F)' = F'(P' \circ F)$

1.6 Valuation P-adique

1.6.1 Valuation d'un polynôme irréductible

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, pour $A \in \mathbb{K}[X]$, $\mathcal{V}_P(A)$ ou valuation de P dans A est l'exposant (éventuellement nul) de P dans l'écriture de A sous la forme

$$A = C \prod_{i=1}^{r} Q_i^{\alpha_i}$$

avec $r \in \mathbb{N}^*$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles unitaires distincts, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{V}_P(A) = 0$ si $P \notin \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$. On conviendra que $\mathcal{V}_P(0) = +\infty$ [a]. On a alors les propriétés suivantes :
(1) $\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$, $\mathcal{V}_P(AB) = \mathcal{V}_P(A) + \mathcal{V}_P(B)$;
(2) $\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$, $\mathcal{V}_P(A + B) \geqslant \min(\mathcal{V}_P(A), \mathcal{V}_P(B))$ et si $\mathcal{V}_P(A) \neq \mathcal{V}_P(B)$, il y a égalité.

Démontrons la dernière propriété. En effet, c'est vrai si A ou B est nul. Supposons $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, soit $\alpha = \mathcal{V}_P(A) = \max\left\{k \in \mathbb{N} | P^k \mid A\right\}$ et $\beta = \mathcal{V}_P(B)$. Alors $A = P^\alpha Q$ avec $\mathcal{V}_P(Q) = 0$ et $B = P^\beta R$ avec $\mathcal{V}_P(R) = 0$.
- Supposons $\alpha \geqslant \beta$, alors

$$\begin{aligned} A + B &= P^\alpha Q + P^\beta R \\ &= P^\beta \left(P^{\alpha - \beta} Q + R\right) \end{aligned}$$

  donc $P^\beta \mid A + B$ donc $\mathcal{V}_P(A + B) \geqslant \beta$.
- Si $\alpha > \beta$, alors $P \nmid P^{\alpha-\beta} Q + R$ car dans le cas contraire $P \mid R$, ce qui est impossible. D'où $\mathcal{V}_P(A + B) = \beta$.

1.6.2 Valuation dans les fractions rationnelles

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$ et (A, B), (C, D) deux représentants de F. Alors :

$$\begin{aligned} AD = BC &\Rightarrow \mathcal{V}_P(AD) = \mathcal{V}_P(A) + \mathcal{V}_P(D) = \mathcal{V}_P(B) + \mathcal{V}_P(C) \\ &\Rightarrow \mathcal{V}_P(A) - \mathcal{V}_P(B) = \mathcal{V}_P(C) - \mathcal{V}_P(D) \end{aligned}$$

Cette relation est également vraie si A ou C est nul avec les conventions prises sur la valuation du polynôme nul.

a. Avec les conventions suivantes : $+\infty + \infty = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $+\infty + n = +\infty$ et $+\infty > n$.

Il est donc cohérent de poser pour $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $F \in \mathbb{K}(X)$ et n'importe quel représentant (A, B) de F,

$$\mathcal{V}_P(F) = \mathcal{V}_P(A) - \mathcal{V}_P(B)$$

Si (A, B) est un représentant irréductible de F, A et B n'ont aucun diviseur commun dans $\mathbb{K}[X]$ donc :
- si $P \mid A$, alors $P \nmid B$ et $\mathcal{V}_P(F) = \mathcal{V}_P(A) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$;
- si $P \mid B$, alors $P \nmid A$ et $\mathcal{V}_P(F) = -\mathcal{V}_P(B) \in \mathbb{Z}_-^*$;
- si $P \nmid A$ et $P \nmid B$, alors $\mathcal{V}_P(F) = 0$.

Propriétés

(1) $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\mathcal{V}_P(FG) = \mathcal{V}_P(F) + \mathcal{V}_P(G)$;

(2) $\forall F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\mathcal{V}_P(F+G) \geqslant \min(\mathcal{V}_P(F), \mathcal{V}_P(G))$, avec égalité si $\mathcal{V}_P(F) \neq \mathcal{V}_P(G)$.

(3) plus généralement, si $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathbb{K}(X)$,

$$\mathcal{V}_P\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \geqslant \min\{\mathcal{V}_P(F_i) \,|\, i \in [\![1, m]\!]\}$$

et si $\forall i \in [\![2, m]\!]$, $\mathcal{V}_P(F_1) < \mathcal{V}_P(F_2)$, alors $\mathcal{V}_P\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) = \mathcal{V}_P(F_1)$.

2 Vers la décomposition en éléments simples

2.1 Éléments simples

Les éléments simples de $\mathbb{K}(X)$ sont :

(1) les polynômes ;

(2) les fractions rationnelles du type $\dfrac{A}{P^\alpha}$ avec P irréductible unitaire, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg A < \deg P$.

Exemples

- Les éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ sont les polynômes et les fractions rationnelles du type $\dfrac{\lambda}{(X-a)^\alpha}$ avec $\lambda, a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- Les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ sont les polynômes, les fractions rationnelles du type $\dfrac{\lambda}{(X-a)^\alpha}$ avec $\lambda, a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$et les fractions du type $\dfrac{\lambda X + \mu}{(X^2 + aX + b)^\alpha}$ avec $\lambda, \mu, a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $a^2 - 4b < 0$.

Montrons que tout $F \in \mathbb{K}(X)$ peut s'écrire comme une somme finie d'éléments simples de façon unique à l'ordre près des termes de la somme.

Par exemple, soit $P = C\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{\alpha_i}$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{K}$ distincts, $C \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$. Considérons maintenant $F = \dfrac{P'}{P}$, on sait que

$$\begin{aligned} P' &= C\sum_{k=1}^{r} \alpha_k (X - x_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} (X - x_i)^{\alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \frac{P}{X - x_k} \end{aligned}$$

D'où, en divisant par P,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{X - x_i}$$

Dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1$, alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{X - x_i}$.

2.2 Existence et unicité de la décomposition en éléments simples

2.2.1 Petit histoire de l'existence

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Si $F \in \mathbb{K}[X]$, alors F déjà un élément simple. Supposons maintenant que $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}[X]$, et soit (A, B) un représentant irréductible de F avec B unitaire. Alors $\deg B \geqslant 1$ sinon $F \in \mathbb{K}[X]$, donc B s'écrit $B = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} S_i^{\alpha_i}$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, $S_1, S_2, \ldots, S_r \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles unitaires distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$. Les S_i sont irréductibles distincts donc ils sont premiers entre eux deux à deux donc $\forall i, j \in [\![1, r]\!]$, $i \neq j$, $S_i^{\alpha_i} \wedge S_j^{\alpha_j} = 1$.

Lemme 1 Soient $U \in \mathbb{K}[X]$, $V_1, V_2, \ldots, V_r \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ avec $i \neq j \Rightarrow V_i \wedge V_j = 1$. Alors $\exists W_1, W_2, \ldots, W_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{U}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r} V_i} = \sum_{k=1}^{r} \frac{W_k}{V_k}$$

En effet, pour $r = 2$, soient $U, V_1, V_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ avec $V_1 \wedge V_2 = 1$, alors, d'après le théorème de Bézout $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $V_1 C_1 + V_2 C_2 = 1$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{U}{V_1 V_2} &= \frac{U V_1 C_1 + U V_2 C_2}{V_1 V_2} \\ &= \frac{U C_1}{V_2} + \frac{U C_2}{V_2} \end{aligned}$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour $r \geqslant 2$, soient $U, V_1, V_2, \ldots, V_{r+1} \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ avec les V_i premiers entre eux deux à deux, on a alors $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{r} V_i\right) \wedge V_{r+1} = 1$ d'après une variante du théorème de Gauss. Ainsi, d'après le cas $r = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{U}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r+1} V_i} &= \frac{U_1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r} V_i} + \frac{A_{r+1}}{V_{r+1}} \\ &= \frac{A_1}{V_1} + \frac{A_2}{V_2} + \cdots + \frac{A_r}{V_r} + \frac{A_{r+1}}{V_{r+1}} \end{aligned}$$

Formula \$a\$t donc écrire

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r} S_i^{\alpha_i}} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{S_k^{\alpha_k}} \end{aligned}$$

avec $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

Lemme 2 Soit $U \in \mathbb{K}[X]$, P un polynôme non-constant et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors on peut écrire $U = R_0 + R_1 P + \cdots + R_{\alpha-1}P^{\alpha-1} + CP^{\alpha}$ avec $R_0, R_1, \dots, R_{\alpha-1} \in \mathbb{K}[X]$ et $\forall k \in [\![1, \alpha-1]\!]$, $\deg R_k < \deg P$. Pour le montrer, on procède par récurrence sur α.

- Pour $\alpha = 1$, on effectue la division euclidienne de U par P. On a alors $U = PQ + R$ avec $\deg R < \deg P$.
- Supposons le résultat vrai pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, U s'écrit donc $U = R_0 + R_1 P + \cdots + R_{\alpha-1}P^{\alpha-1} + CP^{\alpha}$ avec $\forall k \in [\![1, \alpha-1]\!]$, $\deg R_k < \deg P$. On effectue alors la division euclidienne de C par P. $C = PQ + R_\alpha$ avec $\deg R_\alpha < P$ d'où le résultat.

Ici, soit $j \in [\![1, r]\!]$, A_j s'écrit $A_j = R_{0,j} + R_{1,j}S_j + \cdots + R_{\alpha_j-1,j}S_j^{\alpha_j-1} + C_j S_j^{\alpha_j}$ et $\forall i \in [\![1, \alpha_j - 1]\!]$, $\deg R_{i,j} < \deg S_j$. Ainsi,

$$\frac{A_j}{S_j^{\alpha_j}} = \frac{R_{0,j}}{S_j^{\alpha_j}} + \frac{R_{1,j}}{S^{\alpha_j-1}} + \cdots + \frac{R_{\alpha_j-1,j}}{S_j} + C_j$$

On a donc obtenu la décomposition en éléments simples de F :

$$F = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} C_k}_{E \in \mathbb{K}[X]} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=0}^{\alpha_j-1} \frac{T_{i,j}}{S_j^i} \quad \text{où } \forall i,j,\ \deg T_{i,j} < \deg S_j$$

2.2.2 Prenons un peu de hauteur : unicité de la décomposition en éléments simples

Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Si $F \in \mathbb{K}(X)$, alors il existe une une famille $(T_{l,P})_{(l,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{I}}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que :
(1) $\forall (l, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I}$, $\deg T_{l,P} < \deg P$;
(2) l'ensemble $\{(l, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I} | T_{l,P} \neq 0\}$ est fini (éventuellement vide).
Et on a alors :

$$F = E + \sum_{P\in\mathcal{I}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,p}}{P^l}$$

Pour faire le lien avec les notation précédentes, il suffit de prendre $T_{l,P} = 0$ si $P \notin \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ et si $P = S_j$, alors pour $l \in [\![1, \alpha_j]\!]$, $T_{l,P} = T_{i,j}$ et $T_{l,P} = 0$ si $l > \alpha_j$.

Montrons qu'une telle écriture est unique Tout revient en fait à prouver que si $\exists E \in \mathbb{K}[X]$ et une famille $(T_{l,P})_{(l,P)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{I}}$ de polynômes qui vérifie (1) et (2), alors [a]

$$E + \sum_{P\in\mathcal{I}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ \forall (l, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I},\ T_{l,P} = 0 \end{cases}$$

Supposons donc $H = E + \sum_{P\in\mathcal{I}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l} = 0 \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $E \neq 0$, alors $\deg E \in \mathbb{N}$ mais $\forall (l, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I}$, $\deg T_{l,P} < 0 \leqslant \deg E$ donc $\deg H = \deg E \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. On a donc $E = 0$.
- Supposons maintenant que $\exists Q \in \mathcal{I}$ et $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tels que $T_{m,Q} \neq 0$. On a alors

$$\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,Q}}{Q^l} = -\sum_{\substack{P\in\mathcal{I} \\ P\neq Q}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l} = G$$

[a] En effet, si on prenait deux polynômes E et deux familles qui vérifient (1) et (2), alors les deux familles sont égales à F si et seulement si leur différence est égale à 0. Or une telle est différence donnerait toujours la somme d'un polynôme du type E et d'une double somme du même type que celles ci-dessus, d'où le raccourci que M. Sellès a pris en ne montrant que cette implication.

Soit $\alpha = \max\{m \in \mathbb{N}^* | T_{m,Q} \neq 0\}$, on a $\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,Q}}{Q^l} = \frac{T_{1,Q}}{Q} + \cdots + \frac{T_{\alpha,Q}}{Q^\alpha}$ avec $T_{\alpha,Q} \neq 0$. Or $\mathcal{V}_Q(T_{\alpha,Q}) = 0$ car $\deg T_{\alpha,Q} < \deg Q$ donc $Q \nmid T_{\alpha,Q}$ d'où $\mathcal{V}_Q\left(\frac{T_{\alpha,Q}}{Q^\alpha}\right) = -\alpha < 0$. D'autre part, pour $l < \alpha$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_Q\left(\frac{T_{l,Q}}{Q^l}\right) &= \underbrace{\mathcal{V}_Q(T_{l,Q})}_{\begin{cases} = +\infty & \text{si } T_{l,Q} = 0 \\ = 0 & \text{sinon}\end{cases}} - l \\
&\geqslant -l \\
&> -\alpha
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{V}_Q\left(\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,Q}}{Q^l}\right) = -\alpha < 0$.
Maintenant, pour $P \in \mathcal{I}\setminus\{Q\}$ et $l \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{V}_Q\left(\frac{T_{l,P}}{P^l}\right) = \underbrace{\mathcal{V}_Q(T_{l,P})}_{\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}} - \underbrace{\mathcal{V}_Q\left(P^l\right)}_{0}$$

D'où $\mathcal{V}_Q\left(\sum_{P\in\mathcal{I}\setminus\{Q\}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l}\right) \geqslant 0$, ce qui nous fournit une contradiction acceptable.

2.2.3 Récapitulatif

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

(1) Il existe un et un seul polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ appelé partie entière de F, et une seule famille $(T_{l,P})_{(l,P)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{I}}$ d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

(a) $\forall (l,P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I}$, $\deg T_{l,P} < \deg P$;

(b) l'ensemble $\{(l,P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I} | T_{l,P} \neq 0\}$ est fini.

La décomposition de F en éléments simples est alors :

$$F = E + \sum_{P\in\mathcal{I}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l}$$

(2) Pour $P \in \mathcal{I}$, $\sum_{l\in\mathbb{N}^*} \frac{T_{l,P}}{P^l}$ s'appelle la partie P-fractionnaire de la décomposition de F en éléments simples.

(3) Si (A,B) est un représentant irréductible de F, alors pour $P \in \mathcal{I}$, P ne divise pas B implique que $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $T_{l,P} = 0$.
Si P est un diviseur irréductible de B, c'est-à-dire su $\mathcal{V}_P(F) < 0$, la partie P-fractionnaire de la décomposition de F en éléments simples est de la forme $\sum_{l=1}^{\alpha} \frac{T_{l,P}}{P^l}$ où $\alpha = \mathcal{V}_P(B) = -\mathcal{V}_P(F)$ et $T_{\alpha,P} \neq 0$.

2.3 Pôles et zéros d'une fraction rationnelle

2.3.1 Faits de base

Soit $F \in \mathbb{K}(X)\setminus\{0\}$, $a \in \mathbb{K}$.

(1) On dit que a est pôle de F si $\mathcal{V}_{X-a}(F) < 0$. Dans ce cas, $-\mathcal{V}_{X-a}(F) \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre du pôle a.

(2) On dit que a est un zéro de F si $\mathcal{V}_{X-a}(F) > 0$.

Explication Écrivons $F=\dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible, A et B ne peuvent donc pas avoir de racines communes dans $\mathbb{K}$.

Si $a\in\mathbb{K}$ est racine de B d'ordre $\alpha\in\mathbb{N}^*$, a n'est pas racine de A donc $\mathcal{V}_{X-a}(F)=\mathcal{V}_{X-a}(A)-\mathcal{V}_{X-a}(B)=-\alpha<0$.

Si a n'est pas racine de B, alors $\mathcal{V}_{X-a}(B)=0$ et $\mathcal{V}_{X-a}(A)\geqslant 0$ d'où $\mathcal{V}_{X-a}(F)\geqslant 0$.

Les pôles de F sont les racines de B dans $\mathbb{K}$, et si $a\in\mathbb{K}$ est un pôle de F d'ordre α, alors a est racine de B d'ordre de multiplicité α.

Remarque Soit $F\in\mathbb{K}(X)\setminus\{0\}$, $a\in\mathbb{K}$ un pôle de F d'ordre $\alpha\in\mathbb{N}^*$ et (A,B) un représentant irréductible de F $(A\wedge B=1)$.

Alors $X-a$ est un diviseur irréductible unitaire de B et $\mathcal{V}_{X-a}(B)=\alpha$ donc il existe un partie $(X-a)-$fractionnaire dans la décomposition de F en éléments simples.

Cette partie $(X-a)-$fractionnaire s'appelle en fait la partie polaire de la décomposition de F en éléments simples relative à a, et s'écrit sous la forme $\displaystyle\sum_{l=1}^{\alpha}\frac{T_{l,X-a}}{(X-a)^l}$ avec $\forall l\in[\![1,\alpha]\!]$, $\deg T_{l,X-a}<\deg(X-a)=1$ d'où $\exists\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\alpha\in\mathbb{K}$ avec $\lambda_\alpha\neq 0$ tels que la partie $(X-a)-$fractionnaire soit

$$\sum_{l=1}^{\alpha}\frac{\lambda_l}{(X-a)^l}$$

2.3.2 Cas du corps des complexes

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$, écrivons $F=\dfrac{A}{B}$ avec $A,B\in\mathbb{C}[X]$, $A\wedge B=1$ et B unitaire.

Si B n'est pas constant, B s'écrit $B=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{\alpha_i}$ avec $r\in\mathbb{N}^*$, $a_1,a_2,\dots,a_r\in\mathbb{C}$ distincts et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\in\mathbb{N}^*$. Il est clair que $\forall i\in[\![1,r]\!]$, a_i est racine de B d'ordre α_i, c'est-à-dire que a_i est pôle de F d'ordre α_i.

La décomposition de F en éléments simples va alors s'écrire, puisque les diviseurs irréductibles de B sont $X-a_1,X-a_2,\dots,X-a_r$:

$$F=\text{partie entière de }F+\sum_{a\text{ pôle de }F}(\text{partie polaire relative à }a)$$

Et chaque partie polaire s'écrit $\displaystyle\sum_{l=1}^{\alpha}\frac{\lambda_l}{(X-a)^l}$ où α est l'ordre du pôle a.

Donc, pour faire la décomposition de F en éléments simples dans$\mathbb{C}[X]$, il faut :
- savoir trouver la partie entière ;
- savoir trouver chaque pôle de F et la partie polaire relative à ce pôle.

3 Pratique de la décomposition en éléments simples

3.1 Partie entière

Soit $F\in\mathbb{K}(X)$, $F=\dfrac{A}{B}$ avec $A\wedge B=1$. Il faut d'abord s'assurer que F est bien sous forme irréductible.

On effectue la division euclidienne de A par B : $A=BQ+R$ avec $\deg R<\deg B$, alors $F=Q+\dfrac{R}{B}$ et d'autre part, on sait que F s'écrit

$$F=\underbrace{E}_{\in\mathbb{K}[X]}+\underbrace{\sum_{P\in\mathcal{I}}\sum_{l\in\mathbb{N}^*}\frac{T_{l,P}}{P^l}}_{H}$$

avec $\forall (l, P) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{I}$, $\deg T_{l,P} < \deg P \Rightarrow \deg \dfrac{T_{l,P}}{P^l} < 0$ donc $\deg H < 0$.

On a alors $E - Q = \dfrac{R}{B} - H$ donc $\deg (E - Q) < 0 \Rightarrow E - Q = 0$ car $E - Q \in \mathbb{K}[X]$.

La partie entière de la décomposition de F en éléments simples est le quotient de la division euclidienne de A par B ou (A, B) est un représentant irréductible de F.

En particulier, si $\deg F < 0 \Leftrightarrow \deg A < \deg B$, alors le quotient de la division euclidienne de A par B est nul donc $E = 0$.

Remarque Supposons $m = \deg A > \deg B = n$, alors A s'écrit

$$A = \underbrace{a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}}_{A_0} + \underbrace{a_n X^n + \cdots + a_m X^m}_{A_1}$$

La division euclidienne de A_1 par B donne $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$ d'où $A = BQ_1 + R_1 + A_0$ avec $\deg (A_0 + R_1) < \deg B$.

Le quotient de la division euclidienne de A par B est égal au quotient de la division euclidienne de A_1 par B.

3.2 Calcul de parties polaires

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

3.2.1 Cas d'un pôle simple

Supposons que $a \in \mathbb{K}$ est un pôle simple de F, c'est-à-dire que a est racine simple de B. B s'écrit donc $B = (X - a) S$ avec $\widetilde{S}(a) \neq 0$.

D'autre part, la partie polaire relative à a va s'écrire $\dfrac{\lambda}{X - a}$ avec λ à déterminer et la décomposition en éléments simples de F est :

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \underbrace{E + \sum_{P \in \mathcal{I} \setminus \{X - a\}} \text{Parties } P\text{-fractionnaires}}_{H}$$

et a n'est pas un pôle de H.

On a alors $(X - a) F = \dfrac{A}{S} = \lambda + (X - a) H$. a n'est pas racine de S donc on peut considérer $\widetilde{\left(\dfrac{A}{S}\right)}(a)$. On a alors

$$\frac{\widetilde{A}(a)}{\widetilde{S}(a)} = \lambda = (\widetilde{X - a)\, F}(a)$$

Or $B' = S + (X - a) S'$, si bien que l'on a aussi en dérivant $\widetilde{B'}(a) = \widetilde{S}(a)$ d'où

$$\lambda = \frac{\widetilde{A}(a)}{\widetilde{B'}(a)}$$

Exemples

(1) Soit $f : t \in]1,+\infty[\longrightarrow \dfrac{1}{t^3-1}$, il s'agit de trouver une primitive de f sur $]1,+\infty[$. On remarque que $f = \widetilde{F}_{|]1,+\infty[}$ où $F = \dfrac{1}{X^3-1} \in \mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$. F est bien sous forme irréductible et $X^3-1 = (X-1)(X-j)\left(X-\overline{j}\right)$. $\deg F < 0$ donc $E = 0$. Les pôles de F sont 1, j et $\overline{j}$, tous simples dans la décomposition en éléments simples de F qui s'écrit

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-\overline{j}}$$

Or $a = \dfrac{\widetilde{1}(1)}{\widetilde{(X^3-1)'}(1)} = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{1}{3j^2} = \dfrac{j}{3}$ et $c = \dfrac{\overline{j}}{3}$. D'où $F = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{j}{X-j} + \dfrac{\overline{j}}{X-\overline{j}}\right)$. Ainsi, pour $t > 1$,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{j}{t-j} + \frac{\overline{j}}{t-\overline{j}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t-2}{t^2+t+1}\right) \\
\Rightarrow \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}\left(\int^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(x-1) - \int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\right) \\
\text{or } \int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+4}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\int^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t + 3\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x+x^2\right) + 3\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\right) \\
\text{et de plus, } t^2+t+1 &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right) \\
\Rightarrow \int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3}\int^x \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int^x \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est donc

$$x \in]1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{3}\left(\ln(x-1) - \frac{1}{2}\left(1+x+x^2\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de faire la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X^n-1} \in \mathbb{C}(X)$. $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{u \in \mathbb{U}_n}(X-u)$ et chaque racine est simple, $\deg F < 0$ donc la décomposition de F en éléments simples

s'écrit $F = \sum_{u \in \mathbb{U}_n} \frac{\lambda_u}{X-u}$. On a alors, pour $u \in \mathbb{U}_n$, $\lambda_u = \frac{\widetilde{A}(u)}{\widetilde{B'}(u)} = \frac{1}{nu^{n-1}} = \frac{u}{n}$ car $u^n = 1$. D'où

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{u \in \mathbb{U}_n} \frac{u}{X-u}$$

(3) Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ distincts avec $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} x_i$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Posons $F = \frac{1}{P}$, $\deg F < 0$ donc la décomposition de F en éléments simples va s'écrire :

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X-x_i} \Rightarrow \frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\widetilde{P'}(x_i)(X-x_i)}$$

car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \frac{1}{\widetilde{P'}(x_i)}$ et $\widetilde{P'}(x_i) \neq 0$. Supposons maintenant $n \geqslant 2$, pour $t \in \mathbb{R}$ assez grand $(t > \max_{i \in [\![1,n]\!]}(x_i))$, $\frac{1}{\widetilde{P}(t)}$ est défini et

$$\frac{1}{\widetilde{P}(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\widetilde{P'}(x_i)(t-x_i)} \Rightarrow \frac{t}{\widetilde{P}(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{\widetilde{P'}(x_i)(t-x_i)}$$

Si $t \to +\infty$, $\frac{t}{\widetilde{P}(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\deg P \geqslant 2$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{t}{t-x_i} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où, par unicité de la limite,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\widetilde{P'}(x_i)} = 0$$

(4) Décomposons en éléments simples la fractions rationnelle $F = \frac{X^4+X+1}{X(X-1)(X+1)}$. F est sous sa forme irréductible car A et B n'ont aucune racine commune. La division euclidienne de X^4 par $X^3 - X$ donne X pour quotient donc $E = X$. On cherche donc la décomposition en éléments simples de F sous la forme

$$F = X + \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X-1} + \frac{\nu}{X+1}$$

$\lambda = \widetilde{XF}(0) = \frac{1}{-1\cdot 1} = -1$, $\mu = \widetilde{(X-1)F}(1) = \frac{3}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$ d'où

$$F = X - \frac{1}{X} + \frac{3}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$$

3.2.2 Parties polaires relatives à des pôles multiples

Cas d'un pôle d'ordre 2 Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$, $A \wedge B = 1$ et $a \in \mathbb{C}$ un pôle de P d'ordre 2. B s'écrit donc $B = (X-a)^2 S$ avec $\widetilde{S}(a) \neq 0$, et la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2} + \text{autres termes de la décomposition en éléments simples}$$

et a n'est pas pôles des autres termes. Ainsi, $\frac{A}{S} = (X-a)^2 F = \lambda(X-a) + \mu + (X-a)^2$ (autres termes) $= G$. On peut considérer la valeur de G en a d'où $\mu = \frac{\widetilde{A}(a)}{\widetilde{S}(a)} = \widetilde{(X-a)^2 F}(a)$. D'autre part, $G' = \lambda + 2(X-a)$ (autres termes)$+$ $(X-a)^2$ (autres termes)$'$ d'où $\widetilde{G'}(a) = \lambda$.

Cas général (méthode officielle) Soit $a \in \mathbb{C}$ un pôle de F d'ordre $m \geqslant 2$ avec $F = \dfrac{A}{B}$, $A \wedge B = 1$ et $B = (X-a)^m S$ où $\widetilde{S}(a) \neq 0$. Alors la décomposition de F en éléments simples s'écrit

$$F = \frac{A}{(X-a)^m S} = \underbrace{\frac{\lambda_1}{X-a} + \cdots + \frac{\lambda_m}{(X-a)^m}}_{\text{partie polaire relative à } a} + \underbrace{\text{autres termes}}_{H \in \mathbb{C}(X)}$$

où a n'est pas pôle de H. On a donc

$$\frac{A}{S} = (X-a)^m F = \lambda_m + \lambda_{m-1}(X-a) + \cdots + \lambda_1 (X-a)^{m-1} + (X-a)^m H$$

L'application $\varphi : t \longrightarrow \dfrac{\widetilde{A}(a+t)}{\widetilde{S}(a+t)}$ est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ car $t \longmapsto \widetilde{S}(a+t)$ ne s'annule pas en a donc, pour t voisin de 0,

$$\varphi(t) = \lambda_m + \lambda_{m-1} t + \cdots + \lambda_1 t^{m-1} + \underbrace{t^m \widetilde{H}(a+t)}_{\mathrm{o}(t^{m-1})}$$

φ admet donc un $\mathrm{DL}_{m-1}(0)$ dont la partie régulière est $\lambda_m + \lambda_{m-1} t + \cdots + \lambda_1 t^{m-1}$.

Il suffit donc d'effectuer un $\mathrm{DL}_{m-1}(0)$ de φ pour déterminer les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ par identification et unicité de la partie régulière.

Exemple

(1) Effectuons la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{X^3+X+1}{X^3(X-1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$. $\deg F = -2 < 0$ donc $E = 0$. Les pôles de F sont 0 (triple) et 1 (double). La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$F = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\lambda_3}{X^3} + \frac{\mu_1}{X-1} + \frac{\mu_2}{(X-1)^2}$$

- Déterminons la partie polaire relative à 0 : $X^3 F = \dfrac{X^3+X+1}{(X-1)^2}$, on effectue un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\varphi : t \longrightarrow \dfrac{1+t+t^3}{(t-1)^2}$. Pour les calculs, se reporter au chapitre 16.1 du cours complet page 242. On trouve donc qu'au voisinage de 0, $\varphi(t) = 1 + 3t + 5t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right)$ donc $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_1 = 5$.
- Déterminons la partie polaire relative à 1 : $(X-1)^2 F = \dfrac{X^3+X+1}{X^3}$, on effectue un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\varphi : t \longrightarrow \dfrac{1+(1+t)+(1+t)^3}{(1+t)^3}$ et on trouve qu'au voisinage de 0, $\varphi(t) = 3 - 5t + \mathrm{o}(t)$ d'où $\mu_2 = 3$ et $\mu_1 = -5$.

On a donc

$$F = \frac{5}{X} + \frac{3}{X^2} + \frac{1}{X^3} - \frac{5}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}$$

3.3 Obtention de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On étudiera les différentes méthode sur des exemples.

3.3.1 Première méthode : repasser dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = \dfrac{1}{X^4+1} \in \mathbb{R}(X)$, les racines de X^4+1 sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$ d'où, en posant $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$, puisque $\deg\left(X^4+1\right) = 4$ et X^4+1 est unitaire, $F = \dfrac{1}{(X-\omega)(X-\overline{\omega})(X+\omega)(X+\overline{\omega})}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc :

$$F = \frac{\lambda}{X-\omega} + \frac{\mu}{X-\overline{\omega}} + \frac{\alpha}{X+\omega} + \frac{\beta}{X+\overline{\omega}}$$

F est réelle donc $\mu = \overline{\lambda}$ et $\beta = \overline{\alpha}$. De plus, F est paire donc

$$F(X) = F(-X) = \frac{-\lambda}{X+\omega} + \frac{-\mu}{X+\overline{\omega}} + \frac{-\alpha}{X-\omega} + \frac{-\beta}{X-\overline{\omega}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\alpha \\ \beta = -\mu \end{cases}$$

par unicité de la décomposition en éléments simples. Or, puisque ω est pôle simples de F,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\left(\widetilde{X^4+1}\right)'(\omega)} \\ &= \frac{1}{4\omega^3} \\ &= -\frac{\omega}{4} \quad \text{car } \omega^4 = -1 \end{aligned}$$

On a donc enfin :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4}\left(\frac{-\omega}{X-\omega} + \frac{-\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}} + \frac{\omega}{X+\omega} + \frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-\omega(X-\overline{\omega}) - \overline{\omega}(X-\omega)}{(X-\omega)(X-\overline{\omega})} + \frac{\omega(X+\overline{\omega}) + \overline{\omega}(X+\omega)}{(X+\omega)(X+\overline{\omega})}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-2\Re\mathrm{e}(\omega)X+2}{X^2-\Re\mathrm{e}(\omega)+1} + \frac{2\Re\mathrm{e}(\omega)X+2}{X^2+2\Re\mathrm{e}(\omega)+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{2}X+2}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right) \end{aligned}$$

3.3.2 Deuxième méthode : procéder directement dans $\mathbb{R}(X)$

Dans $\mathbb{R}(X)$,

$$\begin{aligned} X^4+1 &= X^4+2X^2+1-2X^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 \\ &= \left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right) \end{aligned}$$

Chacun des facteurs est irréductible dans $\mathbb{R}(X)$ donc $F = \dfrac{1}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)}$. La décomposition de F en éléments simples va donc s'écrire

$$F = \frac{\alpha X+\beta}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\gamma X+\delta}{X^2-\sqrt{2}X+1}$$

1re idée On cherche la relation de Bézout des deux polynômes :

$$X^2+\sqrt{2}X+1 = 1\cdot\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right) + \left(2\sqrt{2}X\right) \quad \text{et} \quad X^2-\sqrt{2}X+1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X - \frac{1}{2}\right)\left(2\sqrt{2}X\right) + 1$$

On remonte alors l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)-\left(\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)-\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X+\frac{1}{2}\right)+\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc pour F, en remplaçant le 1 du numérateur par l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X+\frac{1}{2}\right)+\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)}{\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}X+\frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}X+\frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$

2^e^ idée On utilise la parité ou l'imparité de F. Ici, F est paire donc

$$F=F(-X)=\frac{-\alpha X+\beta}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{-\gamma X+\delta}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Par unicité de la décomposition de F en éléments simples,

$$-\alpha X+\beta=\gamma X+\delta \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-\alpha\\ \delta=\beta\end{cases}$$

On a donc $\dfrac{1}{X^4+1}=\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{-\alpha X+\beta}{X^2-\sqrt{2}X+1}$ d'où, pour $t\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{t^4+1}=\dfrac{\alpha t+\beta}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\dfrac{-\alpha t+\beta}{t^2-\sqrt{2}t+1}$.

- La valeur en 0 donne : $1=\beta+\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{1}{2}$.
- La valeur en $\sqrt{2}$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}=\frac{\alpha\sqrt{2}+\beta}{5}+\frac{-\alpha\sqrt{2}+\beta}{1} &\Leftrightarrow 1-6\beta=-4\sqrt{2}\alpha \\ &\Leftrightarrow 2=4\sqrt{2}\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3^e^ idée : une méthode élégante On a $\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)F=\dfrac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\alpha X+\beta+\dfrac{-\alpha X+\beta}{X^2+\sqrt{2}X+1}\left(X^2-\sqrt{}\right.$
Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ une racine de $X^2+\sqrt{2}X+1$, alors z n'est pas racine de $X^2-\sqrt{2}X+1$. On prend alors la valeur de $\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)F$ en z :$\dfrac{1}{z^2-\sqrt{2}z+1}=\alpha z+b$ or on a

$$\begin{aligned} z^2+\sqrt{2}z+1=0 &\Leftrightarrow z^2=-1-\sqrt{2}z \\ &\Leftrightarrow z^2+1-\sqrt{2}z=-2\sqrt{2}z \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sqrt{2}z}=\alpha z+\beta &\Leftrightarrow -1=2\sqrt{2}z^2\alpha+2\sqrt{2}z \\ &\Leftrightarrow -1=2\sqrt{2}\alpha\left(-1-2\sqrt{2}z\right)+2\sqrt{2}z \\ &\Leftrightarrow -1=-2\sqrt{2}\alpha+2\sqrt{2}\left(\beta-\sqrt{2}\alpha\right)z \end{aligned}$$

Or, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $z = s + it$, $a + bz = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ [a]. Ici, $0 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $0 = 2\sqrt{2}\left(\beta - \sqrt{2}\alpha\right)$ d'où

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

3.3.3 Exercice corrigé

Il s'agit de trouver une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$f : t > 0 \longrightarrow \frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2 t^3} \Rightarrow F = \frac{1-X^2}{\left(X^2+1\right)^2 X^3} = \frac{1-X^2}{\left(X-i\right)^2\left(X+i\right)^2 X^3}$$

$\deg F < 0$ donc $E = 0$, la décomposition de F en éléments simples s'écrit donc

$$F = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{\left(X-i\right)^2} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{\left(X+i\right)^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{a_3}{X^3}$$

F est réelle donc $\gamma = \overline{\alpha}$ et $\delta = \overline{\beta}$. Calculons la partie polaire relative à i. On effectue un $\mathrm{DL}_1(0)$ se $t \longmapsto \widetilde{(X-i)^2 F}(i+t) = \dfrac{1-(i+t)^2}{(2i+t)^2(i+t)^3}$. Au voisinage de 0, $1-(i+t)^2 = 2 - 2it + \mathrm{o}(t)$ et de plus,

$$\begin{array}{rcl}
(2i+t)^2(1+t)^3 & = & \left(-4+4it+\mathrm{o}(t)\right)\left(-i-3t+\mathrm{o}(t)\right) \\
& = & 4i + 16t + \mathrm{o}(t) \\
& = & 4i\left(1-4it+\mathrm{o}(t)\right) \\
\Rightarrow \dfrac{2-2it+\mathrm{o}(t)}{4i\left(1-4it+\mathrm{o}(t)\right)} & = & \dfrac{2}{4i}\left(i - it + \mathrm{o}(t)\right)\left(2-2it+\mathrm{o}(t)\right) \\
& = & -\dfrac{i}{2}\left(1+3it+\mathrm{o}(t)\right) \\
& = & -\dfrac{i}{2} + \dfrac{3}{2}t + \mathrm{o}(t)
\end{array}$$

La partie relative à i est donc $\dfrac{-\frac{i}{2}}{(X-i)^2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{X-i}$ et celle relative à $-i$ est $\dfrac{\frac{i}{2}}{(X+i)^2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{X+i}$.

Calculons maintenant la partie relative à 0. Après de courtes computations que vous m'excuserez de ne point rapporter ici, le résultat donne $\dfrac{1}{X^3} - \dfrac{3}{X}$. On a donc enfin :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \dfrac{-\frac{i}{2}}{(X-1)^2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{X-i} + \dfrac{\frac{i}{2}}{(X+i)^2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{X+i} + \dfrac{1}{X^3} - \dfrac{3}{X} \\
\Rightarrow \text{pour } t > 0,\ f(t) & = & \dfrac{-\frac{i}{2}}{(t-i)^2} + \dfrac{\frac{i}{2}}{(t+i)^2} + \dfrac{3}{2}\underbrace{\left[\dfrac{1}{t-i} + \dfrac{1}{t+i}\right]}_{\frac{2t}{t^2+1}} + \dfrac{1}{t^3} - \dfrac{3}{t} \\
\Rightarrow \displaystyle\int^x f(t)\ \mathrm{d}t & = & \dfrac{\frac{i}{2}}{x-i} - \dfrac{\frac{i}{2}}{x+i} + \dfrac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \dfrac{1}{2x^2} - 3\ln(x) \\
& = & -\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \dfrac{1}{2x^2} - 3\ln(x)
\end{array}$$

a. En effet, $az + b = (as + b) + ita = 0$. En prenant les parties réelles et imaginaires on obtient le résultat.