Matrices

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Introduction : matrice d'une application linéaire relative à un couple de bases

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Par définition, $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j$. À f est donc naturellement associée la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \mathcal{F}([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \mathbb{K})$. Cette famille s'appelle la matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et on l'écrit sous forme de tableau à n lignes et p colonnes en pratique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

La j-ième colonne du tableau est la colonne de coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. $a_{i,j}$ est à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. On a donc une application $\Phi : f \in \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{F}([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \mathbb{K})$, ce dernier ensemble étant un espace vectoriel.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha f + g) = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On sait que, par définition de C, on a $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $(\alpha f + g)(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,j}\varepsilon_i$ mais

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)(e_j) &= \alpha f(e_j) + g(e_j) \\ &= \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,j} + b_{i,j})\,\varepsilon_i \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $c_{i,j} = \alpha a_{i,j} + b_{i,j}$. Ainsi, $C = \alpha A + B$ donc Φ est linéaire. Montrons que Φ est un isomorphisme. Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = 0_{\mathcal{F}([\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\mathbb{K})}$. Alors pour $j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0\varepsilon_i = 0_F$. f s'annule sur la base $\mathcal{B}$ donc f est l'application nulle. Ainsi, Φ est injective, montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{F}([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \mathbb{K})$, existe-t-il une application linéaire telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$?

Pour $j \in [\![1, p]\!]$ posons $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire telle que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = y_j$. Il est clair que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$. Φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{F}([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \mathbb{K})$.

Remarque Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $m = \dim G$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F, $\mathcal{D} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ une base de G, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Il s'agit d'exprimer pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ $c_{i,j}$ en fonction de $a_{i,j}$ et de $b_{i,j}$. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, $g \circ f(e_j) =$

$\sum_{i=1}^{m} c_{i,j} u_i$ mais $f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \varepsilon_k$ d'où

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) &= g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\varepsilon_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} g(\varepsilon_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{i,k} u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (b_{i,k} a_{k,j}) u_i \end{aligned}$$

Ainsi, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$.

2 Définitions, vocabulaire

2.1 Matrices

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\llbracket 1, n\rrbracket \times \llbracket 1, p\rrbracket, \mathbb{K})$. Les éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appellent les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in \llbracket 1, n\rrbracket \times \llbracket 1, p\rrbracket$, on note $A[i,j]$ ou $A_{i,j}$ ou $a_{i,j}$ l'image de (i,j) par A. C'est un élément de $\mathbb{K}$ appelé coefficient de A d'indice (i,j).

Lois sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose d'après ce qui précède les lois suivantes pour $(i,j) \in \llbracket 1, n\rrbracket \times \llbracket 1, p\rrbracket$:

$$(\alpha A + B)[i,j] = \alpha A[i,j] + B[i,j] \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot A)[i,j] = \alpha A[i,j]$$

Représentation pratique Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on représente usuellement A à l'aide d'un tableau à n lignes et p colonnes. Pour $(i,j) \in \llbracket 1, n\rrbracket \times \llbracket 1, p\rrbracket$, $A[i,j]$ se trouve à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

$$A = \begin{pmatrix} A[1,1] & A[1,2] & \cdots & A[1,p] \\ A[2,1] & A[2,2] & & A[2,p] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A[n,1] & A[n,2] & & A[n,p] \end{pmatrix}$$

Vocabulaire

- Pour $j \in \llbracket 1, p\rrbracket$, $\mathrm{C}_j(A) = (A[1,j], A[2,j], \ldots, A[n,j]) \in \mathbb{K}^n$ est le j-ième vecteur colonne de A.
- Pour $i \in \llbracket 1, n\rrbracket$, $\mathrm{L}_i(A) = (A[i,1], A[i,2], \ldots, A[i,p]) \in \mathbb{K}^p$ est le i-ième vecteur ligne de A.

- Lorsque $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne. Il est clair que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Lorsque $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne. Il est clair que $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^p$.
- Lorsque $n = p = 1$, $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ s'identifie à $\mathbb{K}$.
- Pour $n = p$, on parle de matrice carrée et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ dont les éléments sont les matrices carrées de taille n.

2.2 Base naturelle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Lemme Soit X un ensemble fini, pour $x \in X$ on note δ_x l'application

$$\begin{aligned}\delta_x : \ & X \longrightarrow \mathbb{K} \\ & y \mapsto \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Alors $(\delta_x)_{x\in X}$ est une base de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$. S'en suit que $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{F}(X,\mathbb{K}) = \operatorname{Card} X$.

Démonstration

- Montrons que $(\delta_x)_{x\in X}$ est libre, soit $(\lambda_x)_{x\in X}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{x\in X} \lambda_x \delta_x = 0_{\mathcal{F}(X,\mathbb{K})}$. Montrons que $\forall x \in X,\ \lambda_x = 0$. Soit $z \in X$, alors

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} &= \left(\sum_{x\in X} \lambda_x \delta_x\right)(z) \\ &= \sum_{x\in X} \lambda_x \delta_x(z) \\ &= \lambda_z \end{aligned}$$

- Montrons que $(\delta_x)_{x\in X}$ est génératrice. Soit $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, montrons que $f = \sum_{z\in X} f(z)\,\delta_z$. En effet, pour $x \in X$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{z\in X} f(z)\,\delta_z\right)(x) &= \sum_{z\in X} f(z)\,\delta_z(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ici, avec $X = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\delta_{(i,j)}$ est la matrice notée $E_{i,j}$ et définie par

$$E_{(i,j)}[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow E_{i,j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $E_{i,j}$ s'appellent les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la base naturelle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} A[i,j]\,E_{i,j}$. On a donc $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. En particulier, $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

2.3 « Produit » matriciel

Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. On pose $L \times C = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i\right) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B = \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On définit $A \times B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ par $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$,

$$\begin{aligned} (A \times B)[i,j] &= \sum_{k=1}^{q} A[i,k]\, B[k,j] \\ &= \mathrm{L}_i(A) \times \mathrm{C}_j(B) \end{aligned}$$

$A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonne de A est égal au nombre de lignes de B, c'est-à-dire si la taille des colonnes de A est égale à la taille des lignes de B.

Disposition pratique

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & & b_{q,j} & & b_{q,r}\end{pmatrix}}^{B} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q}\end{pmatrix}}^{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ \vdots & \rightarrow & \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}}_{A\times B}\end{array}$$

On remarque que pour un i, si $\mathrm{L}_i(A) = 0$, alors $\mathrm{L}_i(AB) = 0$. Et si pour un j, $\mathrm{C}_j(B) = 0$, alors $\mathrm{C}_j(AB) = 0$.

Produit matriciel et composition Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases respectives de E, F et G, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors, d'après le calcul effectué en introduction (voir remarque page 2),

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Propriétés

Pseudo-associativité Soient $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$. Alors

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

En effet, soient $c \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^s, \mathbb{K}^r)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_s,\mathrm{BC}_r}(c) = c$, $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_r,\mathrm{BC}_q}(b) = B$ et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_q,\mathrm{BC}_p}(a) = A$. On a alors

$$\mathbb{K}^s \xrightarrow{c} \mathbb{K}^r \xrightarrow{b} \mathbb{K}^q \xrightarrow{a} \mathbb{K}^p$$

Donc $B \times C = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_s,\mathrm{BC}_q}(b \circ c)$ d'où $A \times (B \times C) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_s,\mathrm{BC}_p}(a \circ (b \circ c))$. De même, $(A \times B) \times C = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_s,\mathrm{BC}_p}((a \circ b) \circ c)$. Or $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ d'où le résultat.

Pseudo-distributivité Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$.

(1) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B$.

(2) Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2$.

(3) Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $(\alpha \cdot A) \times B = A \times (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \times B)$.

En effet :

(1) Pour $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$:

$$\begin{aligned}((A_1 + A_2) \times B)[i, j] &= \sum_{k=1}^{q} (A_1[i, k] + A_2[i, k]) B[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^{q} A_1[i, k] B[k, j] + \sum_{k=1}^{q} A_2[i, k] B[k, j] \\ &= (A_1 \times B)[i, j] + (A_2 \times B)[i, j]\end{aligned}$$

(2) Preuve analogue.

(3) Commutativité du produit dans $\mathbb{K}$.

2.4 Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note ${}^{\mathrm{T}}A$ la transposée de A, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$({}^{\mathrm{T}}A)[i, j] = A[j, i]$$

- Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{L}_i({}^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{C}_i(A)$.
- Pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{C}_j({}^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{L}_j(A)$.

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longmapsto {}^{\mathrm{T}}A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est linéaire et pour toute matrice A, ${}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}A) = A$.

Transposée et produit

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors

$${}^{\mathrm{T}}(A \times B) = {}^{\mathrm{T}}B \times {}^{\mathrm{T}}A$$

En effet, pour $(i, j) \in [\![1, r]\!] \times [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned}({}^{\mathrm{T}}(AB))[i, j] &= (AB)[j, i] \\ &= \sum_{k=1}^{q} A[j, k] B[k, i] \\ &= \sum_{k=1}^{q} {}^{\mathrm{T}}B[i, k]\, {}^{\mathrm{T}}A[k, j] \\ &= ({}^{\mathrm{T}}B\,{}^{\mathrm{T}}A)[i, j]\end{aligned}$$

3 La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Construction

Rappels On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2 dont une base est $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ (voir section 2.2 page 4). Si E et F dont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F, alors $f \in \mathcal{L}(E,F) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, avec $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, alors on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$. C'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A[i,j]$ est la i-ième coordonnée de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A[i,j]\, e_i$$

L'application $f \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times B$ est bien défini et $A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc le produit matriciel est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce produit est associatif, distributif par rapport à $+$ (voir page 5).

Reste à trouver l'élément neutre pour le produit matriciel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ donc en particulier,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E \circ f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

Écrivons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Id}_E(e_j) = e_j = 0e_1 + \dots + 1e_j + \dots + 0e_n$ donc la j-ième colonne de la matrice de Id_E est

$$j\text{-ième place} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{I}_n[i,j] = \delta_{i,j}$ et $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{I}_n \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Or, lorsque f décrit $\mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ décrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc I_n est l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\times$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est donc un anneau, non-commutatif si $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, $\mathrm{Mat}_1(\mathbb{K})$ s'identifie à $\mathbb{K}$ via le morphisme d'anneau injectif $\lambda \in \mathbb{K} \longmapsto (\lambda) \in \mathrm{Mat}_1(\mathbb{K})$.

Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre pour $n \geqslant 2$: il n'est pas commutatif et il existe des diviseurs non-triviaux de 0 : $(E_{12})^2 = 0$ mais $E_{12} \neq 0$.

Piège ! Méfiance avant d'appliquer la formule du binôme pour calculer $(A+B)^k$: il faut d'abord s'assurer que $AB = BA$.

On a aussi vu que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ donc $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Isomorphismes de $\mathbb{K}$-algèbres Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E, alors

$$\begin{array}{rl} \Phi : & \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

vérifie $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, $\Phi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$ et $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(f \circ g) = \Phi(f)\Phi(g)$ donc Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres dans ce cas particulier. Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(f)$ s'appelle l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

On aurait pu définir cette notion avant : pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_n}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_n}(f)$ s'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A.

3.2 Matrices carrées remarquables

3.2.1 Matrices inversibles

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$. Par définition, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AB = BA = \mathrm{I}_n$$

- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il y a une seule matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$ [a]. B est l'inverse de A et se note A^{-1}. Il est clair que A^{-1} est inversible d'inverse A.
- Si $A, A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AA' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AA')^{-1} = A'^{-1}A^{-1}$.
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^{\mathrm{T}}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^{\mathrm{T}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right)$.
  En effet, $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= {}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_n \\ &= {}^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}A\right) \\ &= {}^{\mathrm{T}}\left(AA^{-1}\right) \\ &= {}^{\mathrm{T}}A\,{}^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right) \\ &= {}^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right){}^{\mathrm{T}}A \end{aligned}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Alors

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\Leftrightarrow f \text{ est un isomorphisme} \\ &\Leftrightarrow f \in \mathrm{GL}(E) \end{aligned}$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $B = A^{-1}$, $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = B$. Alors, puisque $\mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= AB \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Id}_E = f \circ g = g \circ f$ donc $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $f^{-1} = g$.

a. Voir la section 18.1.4 du cours complet page 289.

$\Leftarrow$ Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, soit $g = f^{-1}$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. Alors

$$\begin{aligned} AB &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

De même, $BA = \mathrm{I}_n$ donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Corollaires Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \mathrm{I}_n$, alors B est inversible et $B = A^{-1}$.

(2) Si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = \mathrm{I}_n$, alors B est inversible et $B = A^{-1}$.

Démonstration

(1) Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associées à A et B. $AB = \mathrm{I}_n \Rightarrow f \circ g = \mathrm{Id}_E$. $f \circ g$ est surjective car Id_E l'est donc f est surjective [a]. $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ donc f est un isomorphisme donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1}AB = A^{-1}\mathrm{I}_n$ donc $B = A^{-1}$.

(2) Utiliser l'injectivité à la place de la surjectivité.

3.2.2 Matrices diagonales

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow A[i,j] = 0$, c'est-à-dire si A est du type suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales, il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, $\forall A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ donc $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$.

Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{i,i} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Soient $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} (AB)[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A[i,k]}_{\delta_{i,k}} B[k,j] \\ &= A[i,i]\,B[i,j] \end{aligned}$$

a. Voir la section 6.2.3.2 du cours complet page 85.

Si $i \neq j$, $(AB)[i,j] = 0$ donc $AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,j] = A[i,i]\,B[i,i]$. Ainsi,

$$\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \times \mathrm{Diag}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) = \mathrm{Diag}(\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2,\ldots,\alpha_n\beta_n)$$

Deux matrices diagonales commutent toujours entre elles donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a aussi, pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$(\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))^k = \mathrm{Diag}\left(\alpha_1^k,\alpha_2^k,\ldots,\alpha_n^k\right)$$

- Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$, il est clair que $\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ est inversible et

$$(\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\ldots,\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

- Réciproquement, si $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ est inversible, montrons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$. Si $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i = 0$, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A et $\mathrm{BC}_n = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} f(e_k) &= \sum_{p=1}^{n} A[p,k]\,e_p \\ &= A[k,k]\,e_k \\ &= \alpha_k e_k \end{aligned}$$

Ainsi, $f(e_i) = 0$ donc f n'est pas injective car $\mathrm{Ker}\,f \neq \{0\}$ donc f n'est pas un isomorphisme donc $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On retiendra le critère suivant pour déterminer l'inversibilité dune matrice diagonale :

$$\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \alpha_i \neq 0$$

Remarque Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A, $\mathrm{BC}_n = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} f(e_j) &= \sum_{i=1}^{n} A[i,j]\,e_i \\ &= (A[1,j], A[2,j], \ldots, A[n,j]) \\ &= \mathrm{C}_j(A) \end{aligned}$$

Un autre critère pratique pour déterminer l'inversibilité d'une matrice carrée quelconque :

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\Leftrightarrow f \text{ est un isomorphisme} \\ &\Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}_2(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A)) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}_2(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

3.2.3 Matrices triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Rightarrow A[i,j] = 0$. A est donc du type

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

On dit que A est triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow A[i,j] = 0$. On note $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Les matrices diagonales sont triangulaires supérieures et inférieures.

- $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une base de $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ d'où $\dim \mathrm{TS}_n(\mathbb{K}) = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- Soient $A, B \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(AB)[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A[i,k]}_{0 \text{ si } k<i} B[k,j] \\ &= \sum_{k=i}^{n} A[i,k]\,B[k,j]\end{aligned}$$

  - Si $i > j$, alors pour $k \geqslant i$, $B[k,j] = 0$ donc $(AB)[i,j] = 0$ donc $AB \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$.
  - $$\begin{aligned}(AB)[i,i] &= \sum_{k=i}^{n} A[i,k]\,B[k,i] \\ &= A[i,i]\,B[i,i] + \sum_{k=i+1}^{n} A[i,k]\,\underbrace{B[k,i]}_{0 \text{ car } k>i}\end{aligned}$$

    D'où $(AB)[i,i] = A[i,i]\,B[i,i]$.

Bilan

$AB \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,i] = A[i,i]\,B[i,i]$.

De plus, $\mathrm{I}_n \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À quelle condition une matrice triangulaire est-elle inversible ?

- Soit $A \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$, supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $A[i,i] \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors $(\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}_2(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$. En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 \mathrm{C}_1(A) + \cdots + \alpha_n \mathrm{C}_n(A) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Alors

$$\begin{cases} \alpha_1 A[1,1] + \alpha_2 A[1,2] + \cdots + \alpha_n A[1,n] = 0 \\ \alpha_2 A[2,2] + \cdots + \alpha_n A[2,n] = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n A[n,n] = 0 \end{cases}$$

  Ce système triangulaire possède une unique solution immédiate car $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $A[i,i] \neq 0$: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Réciproquement, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^{-1} \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$. En effet, $\varphi : X \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow AX \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est bien définie car $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel et de plus φ est linéaire. De plus φ est injective : si $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, $AX = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 \Leftrightarrow X = 0$. φ est donc un isomorphisme car $\mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. En particulier, elle est surjective donc I_n possède un antécédent ; $\exists B \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = \mathrm{I}_n$ donc $B = A^{-1}$ donc $A^{-1} \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$.$AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\left(AA^{-1}\right)[i,i] = 1$ or, puisque $A, A^{-1} \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$, $\left(AA^{-1}\right)[i,i] = A[i,i]\,A^{-1}[i,i]$ d'où $A[i,i] \neq 0$.

Ainsi, $\forall A \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$, $A[i,i] \neq 0$.

3.2.4 Matrices symétriques et antisymétriques

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si ${}^{\mathrm{T}}A = A$, et antisymétrique si ${}^{\mathrm{T}}A = -A$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques.

Remarque Soit

$$s : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto {}^{\mathrm{T}}A \end{array}$$

s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc s est une symétrie. On sait alors que [a]

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \dfrac{A + {}^{\mathrm{T}}A}{2} + \dfrac{A - {}^{\mathrm{T}}A}{2}$.

3.3 Trace d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A[i,i] \in \mathbb{K}$$

Remarques

(1) Tr est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ donc c'est une forme linéaire ; et $\mathrm{Tr} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})}$ car $\mathrm{Tr}(E_{1,1}) = 1$.

(2) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ est le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = n^2 - 1$.

(3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{Tr} A$.

Proposition $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A[i,j]\,B[j,i] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B[j,i]\,A[i,j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (BA)[j,j] \end{aligned}$$

4 Changement de base

4.1 Problèmes et définitions

Premier problème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $x \in E$, X la colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$ et X' celle des composantes de x dans $\mathcal{B}'$. Quel est le rapport entre X et X' ?

Plus généralement, si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est la matrice dont la j-ième colonne est la colonne des composantes de x_j dans $\mathcal{B}$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, quel est le rapport entre M et M' ?

Pour $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ la matrice à p colonnes dont chacune des colonnes est la colonne des composante d'un x_i dans $\mathcal{B}$.

[a]. Voir section 21.4.2.3 du cours complet page 399.

Deuxième problème Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $M' = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Quel est le rapport entre M et M' ?

La réponse à ces deux problèmes est donnée par les matrices de passage.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ et on note $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(e'_1, e'_2, \dots, e'_r\right) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, la j-ième colonne de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la colonne des composantes de e'_j dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $e'_j = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]\, e_i$.

Proposition Avec les notations précédentes, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

En effet, soit le diagramme suivant :

$$\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f=\mathrm{Id}_E} \underset{\mathcal{B}'}{E} \xrightarrow{g=\mathrm{Id}_E} \underset{\mathcal{B}}{E}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \\
&= \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)}_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)}_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{I}_n = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ d'où le résultat.

Remarques

(1) Soit $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\mathrm{BC}_r = (e_1, e_2, \dots, e_r)$. On a donc $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_r}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_r(M))$. Alors M est inversible si et seulement si $(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_r(M))$ est une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^r$. Si c'est le cas, alors $M = \mathcal{P}_{\mathrm{BC}_r}^{\mathcal{C}}$ et $M^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{BC}_r}$. Pour trouver M^{-1}, il suffit pour $j \in [\![1,r]\!]$ d'exprimer e_j en fonction de $\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_r(M)$.

(2) On note que $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) = \left\{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} | \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ sont des bases de } E\right\}$. Plus précisément, on peut montrer [a] que pour $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ une base de E de dimension r , alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que $M = \mathcal{P}_{B}^{\mathcal{C}}$.

4.2 Résultats principaux

Réponse au premier problème Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ deux bases de E, $x \in E$, $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$ la colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix}$ celle des composantes de x dans $\mathcal{B}'$. On a

a. « *Left to the reader !* »

alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{r} \beta_j e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} \beta_j \sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j] \right) e_j \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_i \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]$ d'où $X = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$.

Pour $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, on pose pour $j \in [\![1,r]\!]$ X_j comme étant la j-ième colonne de M et X'_j comme étant la j-ième colonne de M'. Alors $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $X_j = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'_j$ d'où, d'après la règle de multiplication des matrices,

$$M = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} M'$$

Réponse au deuxième problème Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\underset{\mathcal{B}'}{E} \xrightarrow{\mathrm{Id}_E} \underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{F} \xrightarrow{\mathrm{Id}_F} \underset{\mathcal{C}'}{F} \quad \text{avec } P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } Q = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

On a donc

$$\begin{aligned} M' &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E) \\ &= \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)}_{Q^{-1}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)}_{P} \end{aligned}$$

On a donc $M' = Q^{-1}MP$. En particulier, si $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$, $M' = P^{-1}MP$ où $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

4.3 Matrices équivalentes et semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont équivalentes si $\exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $B = QAP$. L'équivalence ici définie est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Réflexivité : $A = \mathrm{I}_n A \mathrm{I}_p$, $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{I}_p \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ donc A est équivalente à A.

Symétrie : soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que B est équivalente à A, montrons que A est équivalente à B. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$ donc $A = Q^{-1}BP^{-1}$.

Transitivité : soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que A soit équivalente à B et B soit équivalente à C, on écrit $C = QBP$ et $B = RAS$ avec $Q, R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P, S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ d'où $C = QRASP$ avec $QR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $SP \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que B est semblable à A s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Ceci définit également une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Applications

(1) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.

(2) Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables.

4.4 Trace d'un endomorphisme

Proposition Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}\left(P^{-1}MP\right) = \mathrm{Tr}(M)$. Deux matrices semblables ont toujours la même trace.

En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(P^{-1}MP\right) &= \mathrm{Tr}\left(MPP^{-1}\right) \quad \text{car } \forall A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \\ &= \mathrm{Tr}(M\mathrm{I}_n) \\ &= \mathrm{Tr}(M)\end{aligned}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$. Par définition, $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E.

5 Rang d'une matrice

5.1 Faits de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$. On définit la rang de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ comme

$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

Avec cette définition et ces notations, on a toujours $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant p$ avec égalité si et seulement si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre.

Si, de plus, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \subset E$ d'où $\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqslant n$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = n &\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = E \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_p) \text{ est génératrice}\end{aligned}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle rang de M et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de la famille $(\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \ldots, \mathrm{c}_p(M))$ où $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{c}_j(M)$ est le j-ième vecteur colonne de M.

On a donc toujours $\mathrm{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$ et $\mathrm{rg}(M) = p$ si et seulement si $(\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \ldots, \mathrm{c}_p(M))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$. De même $\mathrm{rg}(M) = n$ si et seulement si $(\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \ldots, \mathrm{c}_p(M))$ engendre $\mathbb{K}^n$.

Propositions

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ et $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de E. Alors
$$\mathrm{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p))$$

(2) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$$

Démonstrations

(1) Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, considérons φ l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E définie sur $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = b_i$. φ transforme une base en une base donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E. Pour $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{C}_j(M)) &= \varphi(M[1,j], M[2,j], \dots, M[n,j]) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, \varphi(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, b_i \\
&= x_j \quad \text{d'après la définition de } M
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(\mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_p(M))) = \mathrm{Vect}((\varphi\mathrm{C}_1(M)), \varphi(\mathrm{C}_2(M)), \dots, \varphi(\mathrm{C}_p(M))) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots,$
Posons alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} : \ & \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_p(M)) \longrightarrow \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) \\
& x \mapsto \varphi(x)
\end{aligned}$$

$\widetilde{\varphi}$ est bien définie, linéaire et injective comme φ et surjective au vu de sa définition donc $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc

$$\dim \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_p(M)) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

(2) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$, on sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Im}\, f) \\
&= \dim f(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)) \\
&= \dim \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) \\
&= \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))
\end{aligned}$$

D'après (1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) &= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))) \\
&= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque Pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à M, $\mathrm{BC}_p = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. Alors il est évident que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

En effet, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = \mathrm{C}_j(M)$. De plus, avec les notations de (2),

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = p \\
&\Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_p(M)) \text{ est libre dans } \mathbb{K}^p \\
f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n
\end{aligned}$$

5.2 Rang d'un produit de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors :

(1) $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$;

(2) si $p = q$ et A est inversible, alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\, B$;

(3) si $q = r$ et $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\, A$.

Démonstration

(1) Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ canoniquement associée à A et $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ canoniquement associée à B. $AB = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_r,\mathrm{BC}_p}(a \circ b)$ donc $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(a \circ b)$ avec $a \circ b : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^p$. Or $\mathrm{Im}(a \circ b) \subset \mathrm{Im}\, a$ donc $\mathrm{rg}(a \circ b) \leqslant \mathrm{rg}\, a = \mathrm{rg}\, A$. De même, $\mathrm{Ker}\, b \subset \mathrm{Ker}(a \circ b)$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, b \leqslant \dim \mathrm{Ker}(a \circ b)$. D'après le théorème du rang appliqué à $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$, $\dim \mathrm{Ker}\, b = r - \mathrm{rg}\, b$ et pour $a \circ b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^p)$, $\dim \mathrm{Ker}(a \circ b) = r - \mathrm{rg}(a \circ b)$. Ainsi, $r - \mathrm{rg}\, b \leqslant r - \mathrm{rg}(a \circ b)$ donc $\mathrm{rg}(a \circ b) \leqslant \mathrm{rg}\, b$ donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

(2) Supposons $p = q$ et $A \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, on sait que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}\, b$ mais aussi $B = A^{-1}AB$ d'où, d'après (1), $\mathrm{rg}\, b \leqslant \mathrm{rg}(AB)$.

(3) Supposons $q = r$ et $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, on sait que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}\, A$ mais aussi $A = ABB^{-1}$ d'où $\mathrm{rg}\, A \leqslant \mathrm{rg}(AB)$.

Conséquence Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, deux matrices équivalentes ont le même rang.

En effet, soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(QMP) &= \mathrm{rg}(QM) \quad \text{car } P \text{ est inversible} \\ &= \mathrm{rg}(M) \quad \text{car } Q \text{ est inversible} \end{aligned}$$

Rang et équivalence

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A est équivalente à B si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.

Démonstration Le sens direct a déjà été vu. Supposons que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$, montrons que A est équivalente à B. Pour cela, nous utiliserons le lemme (qui peut avoir valeur de théorème) suivant :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\, A = r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors A est équivalente à $J_{n,p,r}$ qui est la matrice suivante :

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Si le lemme est vrai, alors A et B sont équivalente à $J_{n,p,r}$ et $\mathrm{rg}\, J_{n,p,r} = r$ d'où le résultat. Montrons maintenant le lemme.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A, on a donc $\mathrm{rg}\, A = r = \mathrm{rg}\, f$. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, f$, alors, d'après le théorème de la base incomplète [a], $\exists \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{K}^n$ tels que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Im}\, f$ donc $\exists e_i \in \mathbb{K}^p$ tel que $\varepsilon_i = f(e_i)$. Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$: en effet, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e_i) = 0$ or $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_r))$ est libre donc $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 0$.

Soit $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_r)$, montrons que $\mathbb{K}^p = H \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

– Soit $x \in H \cap \mathrm{Ker}\, f$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$ et $f(x) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e_i) = 0$. $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_r))$ est libre donc $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 0$ donc $x = 0$.

–

$$\begin{aligned} \dim(H + \mathrm{Ker}\, f) &= \dim H + \dim \mathrm{Ker}\, f \\ &= r + \dim \mathrm{Ker}\, f \\ &= p \quad \text{d'après le théorème du rang} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{K}^p = H \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ par recollement. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, $f(e_i) = \varepsilon_i$ et $\forall j \in [\![r+1, p]\!]$, $f(e_j) = 0$ d'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_{n,p,r}$. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n,\mathrm{BC}_p}(f) = A$ est équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ d'où la preuve du lemme.

a. Voir section 22.1.1.2 du cours complet page 404.

Rang et transposition Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^{\mathrm{T}}M$.

En effet, si $r = \operatorname{rg} M$, M est équivalente à $J_{n,p,r}$ donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $M = QJ_{n,p,r}P$ d'où

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{T}}M &= {}^{\mathrm{T}}(QJ_{n,p,r}P) \\ &= \underbrace{{}^{\mathrm{T}}P}_{\in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})} {}^{\mathrm{T}}J_{n,p,r} \underbrace{{}^{\mathrm{T}}Q}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} \\ &= {}^{\mathrm{T}}PJ_{p,n,r}{}^{\mathrm{T}}Q \end{aligned}$$

Donc ${}^{\mathrm{T}}M$ est équivalente à $J_{p,n,r}$ et $\operatorname{rg} J_{p,n,r} = r$ d'où le résultat.

Corollaires

(1) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \ldots, \mathrm{L}_n(M))$.
En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} M &= \operatorname{rg} {}^{\mathrm{T}}M \\ &= \operatorname{rg}(\mathrm{C}_1({}^{\mathrm{T}}M), \mathrm{C}_2({}^{\mathrm{T}}M), \ldots, \mathrm{C}_n({}^{\mathrm{T}}M)) \\ &= \operatorname{rg}(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \ldots, \mathrm{L}_n(M)) \end{aligned}$$

(2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) M est inversible ;

(b) $\operatorname{rg} M = n$;

(c) $(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M))$ est libre ;

(d) $(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M))$ est une base de $\mathbb{K}^n$;

(e) $(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \ldots, \mathrm{L}_n(M))$ est une base de $\mathbb{K}^n$;

(f) $(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \ldots, \mathrm{L}_n(M))$ est libre.

En effet, M est inversible si et seulement si f est un endomorphisme si et seulement si $\operatorname{rg} f = n \Leftrightarrow \operatorname{rg} M = n$...

5.3 Calcul pratique du rang d'une matrice

Opérations élémentaires sur les rangées Ici, les rangées désignent les lignes ou les colonnes. On distingue trois types d'opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(1) Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut remplacer la rangée R_i par $\mathrm{R}_i + \lambda \mathrm{R}_j$, et on note $\mathrm{R}_i \leftarrow \mathrm{R}_i + \lambda \mathrm{R}_j$.

(2) On peut permuter deux rangées, on note alors $\mathrm{R}_i \leftrightarrow \mathrm{R}_j$.

(3) On peut multiplier une rangée par un scalaire α non nul, et on note $\mathrm{R}_i \leftarrow \alpha \mathrm{R}_i$.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, si M' se déduit de M en effectuant une opération élémentaire sur une rangée de M, alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M'$ [a].

a. Afin de pouvoir aider les éventuels lecteurs blonds venant d'Angers à comprendre à quoi « *peut bien servir ce machin puisque c'est que pour une seule opération* ! », on notera que si la propriété est vraie pour une opération, alors, par transitivité de la relation d'égalité, le rang de M se conservera dans le cas de plusieurs opérations successives !

En effet, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in E$. Alors, pour $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, montrons que $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_r)$. Posons $x_i' = x_i + \lambda x_j$.

– Pour tout $k \neq i$, $x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ et $x'_i \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ donc

$$\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_r) \subset \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

– D'autre part, pour $k \neq i$, $x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ et $x_i = x'_i - \lambda x_j \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$ donc $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r) \subset \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_r)$ d'où le résultat.

On a aussi de manière analogue pour $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$:

$$\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i \dots, x_r) \text{ et}$$

$$\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, \alpha x_i, \dots, x_r) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

Comme $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \dots \mathrm{L}_p(M))$ [a], le résultat est valable pour des opérations sur les lignes ou les colonnes.

Méthode de calcul du rang

En pratique, pour chercher le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on transforme M au moyens d'opérations élémentaires de manière à obtenir une matrice M' du type suivant :

$$M' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r,r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$. On a alors $\operatorname{rg} M' = r$.

En effet,

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

est inversible car $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$ donc $(\mathrm{C}_1(M_1), \mathrm{C}_2(M_1), \dots, \mathrm{C}_r(M_1))$ est libre donc

$$\left(\mathrm{C}_1\left(M'\right), \mathrm{C}_2\left(M'\right), \dots, \mathrm{C}_r\left(M'\right)\right)$$

est libre car les coefficients des colonnes qui n'appartiennent pas à M_1 sont nuls. Si $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, il est clair que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{C}_k(M') \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ donc $(\mathrm{C}_1(M'), \mathrm{C}_2(M'), \dots, \mathrm{C}_r(M'))$ est libre dans $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$ de dimension r donc c'est une base de $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ donc

$$\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r) = \operatorname{Vect}\left(\mathrm{C}_1\left(M'\right), \mathrm{C}_2\left(M'\right), \dots, \mathrm{C}_r\left(M'\right)\right)$$

Or, pour $k > r$, $\mathrm{C}_k(M') \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r) = \operatorname{Vect}(\mathrm{C}_1(M'), \mathrm{C}_2(M'), \dots, \mathrm{C}_r(M'))$ d'où

$$\operatorname{Vect}\left(\mathrm{C}_1\left(M'\right), \mathrm{C}_2\left(M'\right), \dots, \mathrm{C}_p\left(M'\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(\mathrm{C}_1\left(M'\right), \mathrm{C}_2\left(M'\right), \dots, \mathrm{C}_r\left(M'\right)\right)$$

Cette dernière famille est libre donc $\operatorname{rg} M' = r$.

a. Voir corollaire (1) page ci-contre.

Exemple On notera $\sim$ pour signifier que deux matrices ont même rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3$$

Ainsi, $\operatorname{rg} A = 3$.

6 Complément : plein de trucs utiles

6.1 Lien entre produit matriciel et image par une application linéaire

Soit E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, F de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $x = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j e_j \in F$, $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des composantes de x, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \varepsilon_i$, $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors $Y = MX \Leftrightarrow y = f(x)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} M[i,j]\, \alpha_j\right) \varepsilon_j \end{aligned}$$

Ainsi, $y = f(x) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{p} M[i,j]\, \alpha_j$. Or $MX = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1(M)\, X \\ \vdots \\ \mathrm{L}_n(M)\, X \end{pmatrix}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{L}_i(M) = \sum\limits_{j=1}^{p} M[i,j]\, \alpha_j = \beta_i$.

Application En particulier, pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, si on connaît $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_p,\mathrm{BC}_n}(f)$, alors on a tout de suite l'expression analytique de f : pour $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$, on sait exprimer les coordonnées $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) \in \mathbb{K}^n$ de $x' = f(x)$ en fonction de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$. En effet,

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \alpha'_i = \sum_{j=1}^{p} M[i,j]\,\alpha_j$$

Exemple Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ canoniquement associée à M. Alors, pour tout $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si on note $x' = f(x) = (\alpha', \beta')$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha a + c\beta \\ \beta' = b\alpha + d\beta \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha, \beta) = (a\alpha + c\beta, b\alpha + d\beta) \end{aligned}$$

6.2 Calcul d'inverse de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposons que $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet comme unique solution $X = BY$. Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Ainsi, pour prouver que A est inversible et déterminer A^{-1}, il suffit d'identifier B telle que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'unique solution de $AX = Y$ est BY.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, canoniquement associée à A, $y \in \mathbb{K}^n$, Y la colonne des composantes de y dans BC_n. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$. Ainsi, si $x = \sum_{i=1}^{n} X[i,1]$, alors $f(x) = y$ car $AX = Y$. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et f est surjective donc $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} AX = Y \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{l'unique solution de } AX = Y \text{ est } A^{-1}Y \end{aligned}$$

On a donc $A^{-1}Y = BY$ et ce $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc en particulier, pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $E_i = i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1}E_i = BE_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A[1,i] \\ A[2,i] \\ \vdots \\ A[n,i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B[1,i] \\ B[2,i] \\ \vdots \\ B[n,i] \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = B$.

Exemple Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = y_1 \\ 2x_2 + 2x_3 = y_2 - y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x_2 = y_3 + y_1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + x_3 \\ 2x_3 = -3y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_3 + y_1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-y_1+y_2-2y_3}{2} \\ x_3 = \frac{-3y_1+y_2-2y_3}{2} \\ x_2 = y_3 + y_1 \end{cases} \\
& \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} \frac{-y_1+y_2-2y_3}{2} \\ y_3 + y_1 \\ \frac{-3y_1+y_2-2y_3}{2} \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'unique solution de $AX = Y$ est BY donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

6.3 Produit par des matrices particulières

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

6.3.1 Produit par les matrices de la base naturelle

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base naturelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Quid* de $E_{i,j} \times A$?

Pour $k \neq i$, $\mathrm{L}_k(E_{i,j}) = 0 \Rightarrow \mathrm{L}_k(E_{i,j}A) = 0$. De plus, $\mathrm{L}_i(E_{i,j}A) = (A[j,1], A[j,2], \dots, A[j,p]) = \mathrm{L}_j(A)$.

Maintenant, pour $\left(E'_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ la base naturelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, pour $k \neq j$, $\mathrm{C}_k\left(E'_{i,j}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{C}_k\left(AE'_{i,j}\right) = 0$ et $\mathrm{C}_j(E_{i,j}) = \mathrm{C}_i(A)$.

$\boxed{\mathrm{L}_k(E_{i,j}A) = \delta_{i,k}\mathrm{L}_j(A) \text{ et } \mathrm{C}_k\left(E'_{i,j}\right) = \delta_{j,k}\mathrm{C}_i(A).}$

6.3.2 Produit par les matrices diagonales

– Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Quid* de DA ? Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned}
(DA)[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{D[i,k]}_{\alpha_i\delta_{i,k}} A[k,j] \\
&= \alpha_i A[i,j]
\end{aligned}$$

Ainsi $\text{L}_i(DA) = \alpha_i(A[i,1], A[i,2], \ldots, A[i,p]) = \alpha_i \text{L}_i(A)$.

– Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$, $\Delta = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. *Quid* de $A\Delta$? Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned}(A\Delta)[i,j] &= \sum_{k=1}^{p} A[i,k]\, B[k,j] \\ &= \beta_j A[i,j]\end{aligned}$$

On a donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\text{L}_i(DA) = \alpha_i \text{L}_i(A)$ et $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\text{C}_j(A\Delta) = \beta_j \text{C}_j(A)$.

Illustrations

– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que dire de A si A commute avec toutes les matrices, c'est-à-dire si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$?
  ○ On doit avoir en particulier, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $E_{i,j}A = AE_{i,j}$ donc pour $k \neq j$, $A[j,k] = 0$ et pour $k \neq i$, $A[k,i] = 0$ donc A est forcément diagonale. De plus $A[j,j] = A[i,i]$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \text{Diag}(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = \alpha \text{I}_n$.
  ○ Réciproquement, αI_n commute avec toutes les matrices.

– Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $DA = AD$. *Quid* de A ?
  ○ $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A = A\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_i A[i,j] = \alpha_j A[i,j] \Leftrightarrow (\alpha_i - \alpha_j) A[i,j] = 0$ donc $A[i,j] = 0$ pour $i \neq j$. A est une matrice diagonale.
  ○ Réciproquement, deux matrices diagonales commutent toujours entre elles.

7 Complément : systèmes linéaires

7.1 Définitions

On se donne un système linéaire (S) de n équations à p inconnues de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Une solution de (S) est un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{K}^p$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\alpha_j = b_i$.

– On dit que (S) est compatible s'il admet des solutions.
– Soit $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$, M est la matrice du système linéaire (S).
– $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'appelle le second membre de (S).

7.2 Interprétation comme matrice d'une application linéaire

Résoudre (S), c'est à dire trouver toutes les éventuelles solutions de (S), revient à résoudre l'équation $MX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à M, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors on a

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ est solution de } (S) \quad &\Leftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = b \\ \text{Ainsi, } (S) \text{ est compatible} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{K}^p / f(x) = b \\ &\Leftrightarrow \quad b \in \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

Si $b \in \operatorname{Im} f$, soit $x_0 \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(x_0) = b$. Alors l'ensemble des solutions de (S) est $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + y | y \in \operatorname{Ker} f\}$. $\operatorname{Ker} f$ est donné par la résolution du système homogène (S_0) qui correspond à l'équation matricielle $MX = 0$.

(S_0) est toujours compatible : $0_{\mathbb{K}^p}$ est toujours solution.

Démonstration

- Si $y \in \operatorname{Ker} f$, $f(x_0 + y) = f(x_0) = b$ d'où $x_0 + y \in \mathcal{S}$.
- Réciproquement, pour $x \in \mathcal{S}$, $f(x) = b = f(x_0)$ d'où $f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker} f$ d'où, puisque $x = x_0 + (x - x_0)$, $x \in x_0 + \operatorname{Ker} f$.

Pour résoudre (S), il suffit de :
(1) résoudre (S_0) ;
(2) connaître une solution particulière.

Remarque Soit $r = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M$ qu'on définit comme étant le rang du système (S). On a alors, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = p - r$.

- Si $r = p$, alors $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective ;(S) admet au plus une solution.
- Si $r < p$, alors $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ et, si $\mathbb{K}$ est infini, $\operatorname{Ker} f$ étant isomorphe à $\mathbb{K}^{p-1}$ est infini aussi. Deux cas se présentent :
  - si $b \in \operatorname{Im} f$, alors (S) admet une infinité de solutions ;
  - si $b \notin \operatorname{Im} f$, (S) est incompatible.

(S) admet donc 0, 1 ou une infinité de solutions.

7.3 Interprétation du second membre comme combinaison linéaire

Soient $\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \dots, \mathrm{c}_p(M)$ les vecteurs colonne de M. Pour $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 a_{1,1} + \dots + \alpha_p a_{1,p} = b_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n,1} + \dots + \alpha_p a_{n,p} = b_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} \\ \vdots \\ \alpha n, p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1 \mathrm{c}_1(M) + \dots + \alpha_p \mathrm{c}_p(M) = B \end{aligned}$$

Ainsi, (S) est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Vect}(\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \mathrm{c}_p(M))$. Résoudre (S), c'est trouver toutes les façons d'écrire B comme combinaison linéaire de $(\mathrm{c}_1(M), \mathrm{c}_2(M), \mathrm{c}_p(M))$.

7.4 Méthodes de résolution d'un système linéaire

La méthode du pivot de Gauss consiste, au moyen d'opérations élémentaires opérant exclusivement sur les lignes, et au prix d'une éventuelle permutation des inconnues, à transformer (S) en un système linéaire (S') équivalent, c'est à dire possédant les mêmes solutions que (S). La matrice M' de (S') est de plus idéalement du type :

$$M' = \begin{pmatrix} m_{1,1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{r,r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,i} \neq 0$. On a alors nécessairement $r = \operatorname{rg} M' = \operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(S)$.

Le système $M'X = B'$ est particulièrement simple à résoudre, mais on distingue ici plusieurs cas.

1^er cas : $r = p \leqslant n$ $\quad(S')$ est alors du type :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_i + \cdots + m_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad m_{p,p}x_p = \beta_p \\ 0 = \beta_{p+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_n \end{cases}$$

Les équations $(0 = \beta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont les équations de compatibilité de (S). Si $\exists j \in [\![p+1, n]\!]$ tel que $\beta_j \neq 0$, alors (S') et (S) sont incompatibles.

Si $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $\beta = 0$, alors les équations de compatibilité peuvent être retirées du système car toujours vraies et le système restant se résout aisément en « remontant ».

2^e cas : $r = n \leqslant p$ $\quad(S')$ est alors du type :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_i + \cdots + m_{1,n}x_n + \cdots + m_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad m_{1,n}x_n + \cdots + m_{p,p}x_p = \beta_p \end{cases}$$

On appelle alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les inconnues principales et $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p$ les inconnues secondaires. On pose $\forall i \in [\![n+1, p]\!]$, $x_i = \lambda_i$ pour marquer le fait qu'on prend les inconnues secondaires pour paramètres et on résout par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On a toujours dès que $p > n$ une infinité de solution.

Exemple Prenons $n = 2$, $p = 4$,

$$(S) : \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ y + z - t = 2 \end{cases}$$

On prend z et t pour paramètres. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z,t)\in\mathcal{S} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y=1+z-t \\ y=2+t-z \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x=-1+2\,(z-t) \\ y=2+t-z \end{cases} \\
\text{On a donc } \mathcal{S} & = & \left\{(-1+2\,(z-t)\,,2+t-z,z,t)\,|z,t\in\mathbb{R}\right\} \\
 & = & \left\{(-1,2,0,0)+z\,(2,-1,0,0)+t\,(-2,1,0,1)\,|z,t\in\mathbb{R}\right\} \\
 & = & (-1,2,0,0)+\mathrm{Vect}\left((-2,1,1,0)\,,(-2,1,0,1)\right)
\end{array}$$

3

3$^{\text{e}}$ cas : $r=p=n$ On a alors tout de suite, d'après la forme de M', M' est inversible donc

$$M'X=B\Leftrightarrow X={M'}^{-1}B$$

(S) a donc une unique solution, on parle de système de CRAMER. La résolution de ce système triangulaire [a] est immédiate.

4$^{\text{e}}$ cas : en général, $r<\min(n,p)$ S' est du type

$$\begin{cases}
m_{1,1}x_i+\cdots+m_{1,n}x_n+\cdots+m_{1,p}x_p=\beta_1 \\
\qquad\ddots \\
\qquad m_{1,n}x_n+\cdots+m_{p,p}x_p=\beta_p \\
0=\beta_{p+1} \\
\vdots \\
0=\beta_n
\end{cases}$$

Pour $i\in[\![r+1,n]\!]$, $0=\beta_i$ est une équation de compatibilité de (S'), et donc de (S).
Si les conditions de compatibilité sont vérifiées, on est ramené au deuxième cas avec r à la place de n.

[a] On remarque que dans ce cas, la matrice M' est aussi triangulaire supérieure.