

Mesures et incertitudes

Capacités expérimentales exigibles abordées.....	3
Outils numériques mis en œuvre.....	3
I. Variabilité de la mesure d'une grandeur physique	5
1. Mesure et variabilité.....	5
a) Pourquoi mesurer ?.....	5
b) Qu'est-ce qu'une mesure ?.....	5
c) La variabilité d'une mesure.....	5
d) Les sources de variabilité.....	6
2. Valeur mesurée et incertitude-type	6
a) Valeur mesurée	6
b) Incertitude-type	7
II. Évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (incertitude de type A).....	8
1. Approche qualitative.....	8
a) Histogramme	8
b) Position et dispersion	8
2. Approche quantitative.....	9
a) Moyenne et écart-type	9
b) Méthodes d'obtention	9
c) Incertitude-type	9
III. Évaluation de l'incertitude-type pour une mesure unique (incertitude de type B) 10	
1. Intervalle de valeurs	10
2. Incertitude-type associée à l'intervalle de valeurs.....	11
a) Cas d'une distribution uniforme	11
b) Cas d'une distribution normale	11
c) Quelle loi de probabilité choisir ?	12
3. Exemples	13
a) Cas simple.....	13
b) Incertitude-type dans le cas d'une double lecture sur une échelle graduée	13
c) Incertitude-type déterminée à l'aide de la notice constructeur	13

d) Incertitude-type déterminée à l'aide des indications sur l'instrument.....	15
IV. Propagation des incertitudes.....	17
1. Incertitude-type composée	17
2. Détermination d'une incertitude-type composée grâce à une formule fournie	17
3. Détermination d'une incertitude-type composée grâce à la méthode Monte Carlo - Simulation d'un processus aléatoire	19
V. Ecriture du résultat et chiffres significatifs.....	22
1. Les trois composantes de l'écriture d'un résultat de mesure.....	22
2. Les chiffres significatifs (CS).....	23
VI. Comparaison de deux valeurs : écart normalisé	24
1. Comparaison à une valeur de référence	24
a) Définition	24
b) z-score.....	24
c) Compatibilité d'un résultat avec une valeur de référence.....	25
2. Comparaison de deux valeurs entre elles (nouveau !).....	25
3. Discussion.....	25
VII. Régression linéaire.....	28
1. Principe de la méthode	28
2. Procédure de validation	31
3. Capacité numérique : simulation de Monte-Carlo	37
ANNEXE - Simuler un processus aléatoire avec Python.....	40
BIBLIOGRAPHIE	40

Capacités expérimentales exigibles abordées

- Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
- Procéder à l'évaluation de l'incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).
- Procéder à l'évaluation de l'incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
- Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
- Evaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
- Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
- **Capacité numérique** : *simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.*
- Ecrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
- Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.
- Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
- Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.
- Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.
- **Capacité numérique** : *simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs - simulation de Monte-Carlo- pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.*

Outils numériques mis en œuvre

Probabilités - Statistiques	Capacités exigibles
Variable aléatoire	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques random et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction hist de la bibliothèque matplotlib.pyplot (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.

	Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire	Utiliser la fonction polyfit de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction random.normal de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

I. Variabilité de la mesure d'une grandeur physique

1. Mesure et variabilité

a) Pourquoi mesurer ?

Faire des mesures est une activité de tous les jours, notamment dans les domaines domestique et économique. Si l'on veut pouvoir échanger des biens et des services, il faut être capable de déterminer convenablement un poids, une distance, un temps etc...

Dans le champ de l'activité scientifique, comme en Physique-Chimie, la mesure a d'autres raisons d'être, comme celle de quantifier des phénomènes : quel poids est capable de supporter ce pont sans céder ? Dans le cadre de la recherche scientifique, il peut également s'agir de choisir entre deux théories concurrentes : dans ce cas, on espère que les mesures permettront de faire ce choix.

EXEMPLE

La mesure par Eddington en 1919 de la déflexion de la lumière d'une étoile au voisinage du soleil a permis de mettre en évidence certaines limites de la mécanique newtonienne et de soutenir la théorie de la relativité générale d'Einstein.

b) Qu'est-ce qu'une mesure ?

En Physique-Chimie, on appelle « mesure » une procédure expérimentale qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur, accompagné d'une unité appropriée.

EXEMPLE

La mesure de la longueur d'une table à l'aide d'un mètre conduit à un ensemble de valeurs numériques, associées à l'unité m ou cm.

c) La variabilité d'une mesure

La mesure est intrinsèquement variable : bien qu'on ne s'en aperçoive pas toujours, si la mesure est répétée, **dans les mêmes conditions, par le même opérateur, et avec le même matériel**, on trouve souvent une valeur numérique différente. Chacune de ces valeurs numériques est appelée « observation » ou « indication ».

Cette **variabilité** des mesures rend **impossible** la connaissance précise de la valeur de la grandeur mesurée.

EXEMPLE

La mesure d'une tension à l'aide d'un voltmètre donne une valeur unique, une indication. Mais si on prend d'autres voltmètres de la même marque, on obtient d'autres indications. La variabilité de la mesure existe mais elle est ici masquée si l'on n'envisage qu'un instrument unique.

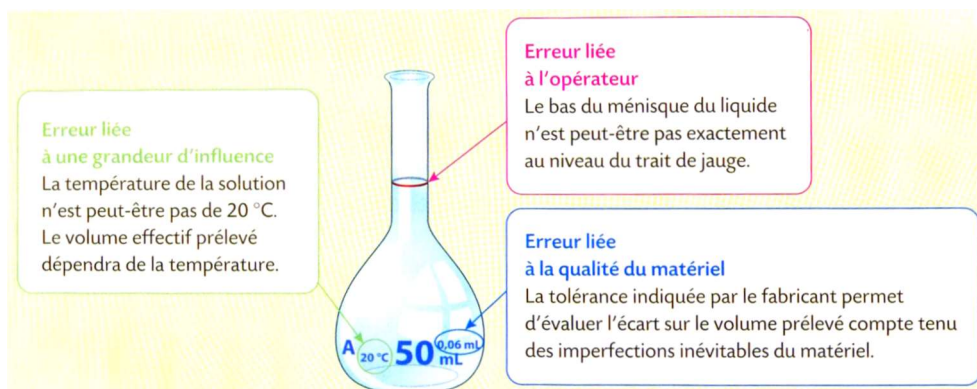


d) Les sources de variabilité

Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.

EXEMPLE

Lorsqu'on prépare une solution dans une fiole jaugée de 50,0 mL, le volume de la solution n'est pas exactement égal à 50,0 mL. Les sources d'erreur sont multiples :



Physique-Chimie, Première Spécialité, Hachette 2019

Conclusion : les **incertitudes** peuvent être liées à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.

2. Valeur mesurée et incertitude-type

a) Valeur mesurée

La valeur mesurée x est la **meilleure estimation possible** de la grandeur X mesurée. Comment la déterminer ?

- Si répète des observations et que l'on constate qu'elles varient, alors on choisit leur **moyenne arithmétique** comme meilleur estimateur.

EXEMPLE

On demande à un élève de prélever 100,0 mL d'eau à l'aide d'une fiole jaugée (préalablement tarée) et on mesure la masse d'eau pour chaque essai. On obtient les résultats suivants :

	Essai n° 1	Essai n° 2	Essai n° 3	Essai n° 4	Essai n° 5
Masse relevée (g)	99,6	99,5	99,9	99,8	99,4

La valeur attribuée à la masse d'eau est : $m = \frac{99,6+99,5+99,9+99,8+99,4}{5} = 99,6 \text{ g}$.

- Si on ne dispose que d'une valeur unique, alors c'est celle que l'on prend.

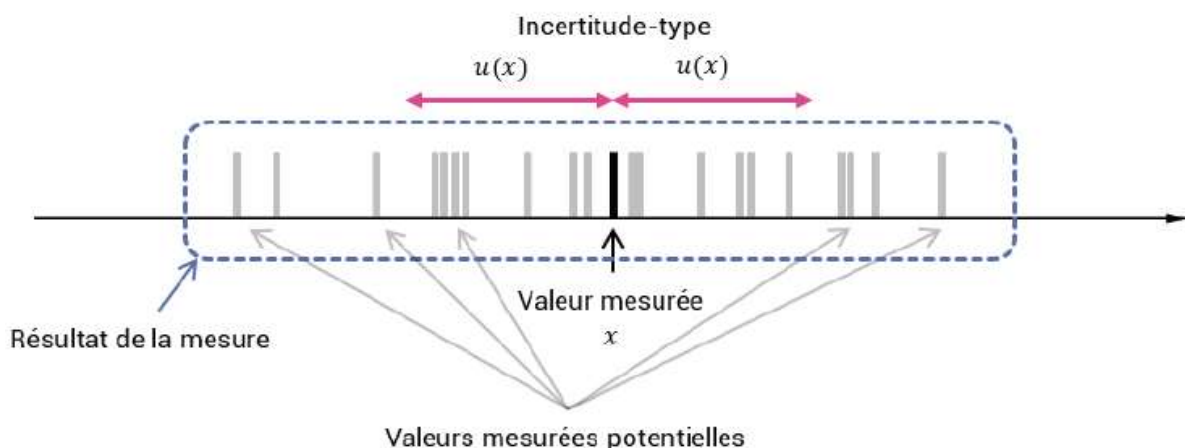
EXEMPLE

La mesure de l'angle limite au-delà duquel on peut observer la réflexion totale sur le dioptre plexiglas/air (TPO Formation des images) donne la valeur $i_{lim} = 42,5^\circ$.

b) Incertitude-type

L'incertitude-type est l'estimation à l'aide d'un **écart-type**, de la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée. La valeur mesurée est l'une de **ces valeurs**. L'incertitude-type quantifie donc la **variabilité potentielle** de cette unique valeur mesurée : elle reflète **son incertitude**.

Une mesure réalisée par un autre opérateur conduit à une valeur mesurée **différente**, mais on s'attend à ce que la différence entre les deux valeurs mesurées soit **du même ordre de grandeur** que l'incertitude-type initialement évaluée.



L'**incertitude-type** sur une grandeur X est notée $u(x)$, et son unité est la même que celle de la valeur mesurée x . Elle quantifie la variabilité potentielle de la valeur de la grandeur mesurée et prend en compte les différentes sources d'incertitudes.

Se pose alors la question de la détermination de cette incertitude-type...

II. Évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (incertitude de type A)

Procéder à l'évaluation de l'incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).

Il s'agit de répéter N fois une expérience dans les mêmes conditions (même expérimentateur, même matériel, même protocole) : l'évaluation de l'incertitude-type sur la valeur de la grandeur mesurée est effectuée à l'aide d'un traitement statistique des N observations.

1. Approche qualitative

La variabilité des observations peut être observée sur un **histogramme**.

a) Histogramme

Un **histogramme** est une représentation graphique en colonnes jointives, avec en abscisse une échelle des valeurs représentées, et en ordonnée le nombre (ou la proportion) de valeurs concernées.

b) Position et dispersion

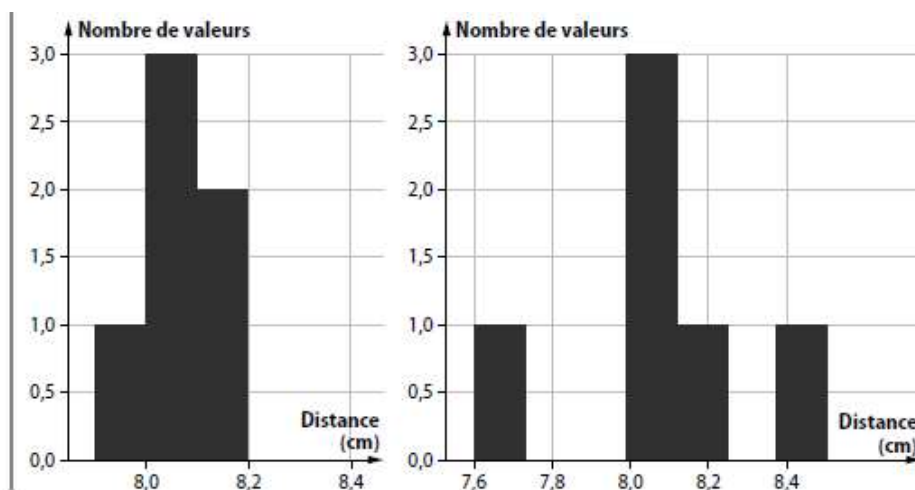
Pour décrire un ensemble d'observations de manière encore plus économe qu'un histogramme, on peut se restreindre à seulement deux paramètres :

- Un premier qui indique la **position** approximative de l'histogramme sur l'axe des abscisses.
- Un second qui indique sa **dispersion**, autrement dit son étalement.

EXEMPLE

Deux élèves ont réalisé chacun six mesures de la distance focale image d'une même lentille convergente. On observe que la valeur centrale (position sur l'axe des abscisses) des deux histogrammes se situe vers 8,0 cm.

On observe que l'histogramme du deuxième élève est plus étalé autour de cette valeur centrale (dispersion plus grande des valeurs obtenues).



2. Approche quantitative

a) Moyenne et écart-type

- La valeur centrale d'un histogramme est calculée en effectuant la **moyenne arithmétique** des observations (souvent appelée « moyenne expérimentale »).
- L'étalement des mesures est quantifié par l'**écart-type** des observations (souvent appelé « écart-type expérimental »).

Si on note les N observations x_i , alors la moyenne expérimentale \bar{x} et l'écart-type expérimental s_x valent par définition :

Moyenne expérimentale $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Ecart-type expérimental $s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$

b) Méthodes d'obtention

Avec un tableur

Pour la moyenne, on utilise la fonction MOYENNE(...) (ou AVERAGE(...) en anglais).

Pour l'écart-type, on utilise la fonction ECARTYPE(...) (ou STDEV(...) en anglais).

Avec PythonTM (et numpy)

Si « np » désigne la bibliothèque « numpy » :

`xmoy = np.mean(x)` calcule la valeur moyenne des valeurs de x stockées dans une liste ou un tableau

`stdx = np.std(x, ddof=1)` calcule l'écart-type de la distribution des valeurs de x .

Remarque : il est nécessaire de préciser « ddof =1 » pour s'assurer que le calcul utilise bien le facteur $(N-1)$.

Avec une calculatrice

Le symbole de l'écart-type diffère selon les modèles de calculatrices (« s_x », « s_{n-1} », « s », « σ_{n-1} »...).

Règle simple : si une calculatrice propose plusieurs écarts-types, choisir le plus élevé !!!

c) Incertitude-type

L'incertitude-type associée à la moyenne \bar{x} de N mesures d'une grandeur X vaut :

$$u(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

EXEMPLE

Lors d'une expérience visant à mesurer la distance focale d'une lentille mince convergente par auto-collimation, on a effectué 7 observations, en cm :

9,9; 10,1; 9,7; 9,9; 10,0; 10,2; 9,9.

1. Pour caractériser le processus de prise d'observation, on évalue l'incertitude-type associée à une unique observation. On l'évalue grâce à l'écart-type de la série des 7 observations : $s_x = 0,1618$ cm. Cela quantifie la variabilité inhérente au processus d'observation.

2. Pour mesurer au mieux la distance focale, on calcule la valeur mesurée à l'aide d'une moyenne. On profite ainsi de la compensation (partielle) des fluctuations des observations. Cette moyenne vaut 10,05 cm. L'incertitude-type associée à cette moyenne unique, qui caractérise la variabilité potentielle de ce résultat, est l'écart-type s_x divisé par $\sqrt{7}$, soit $0,1618 / \sqrt{7}$ cm $\approx 0,061$ cm.

III. Évaluation de l'incertitude-type pour une mesure unique (incertitude de type B)

Procéder à l'évaluation de l'incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).

On suppose n'avoir réalisé qu'une seule observation (ou plusieurs qui aboutissent à la même valeur) : il s'agit alors d'une incertitude de type B.

Dans ce cas, la variabilité la mesure est estimée par un modèle probabiliste (« quelle probabilité la mesure a-t-elle de donner telle valeur ? ») :

- dans des cas très rares, le constructeur de l'appareil de mesure utilisé fournit directement l'incertitude-type associée à la valeur mesurée ;
- parfois, le fabricant indique une « précision » ou une « tolérance » (termes vagues et mal définis) qui permettent d'établir un intervalle de valeurs constituant le résultat de la mesure.

Mais la plupart du temps, la source d'incertitude prédominante est celle **du repérage effectué par l'opérateur** : il est donc nécessaire d'estimer un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel on est sûr que la grandeur mesurée appartient.

1. Intervalle de valeurs

Il faut comprendre qu'il existe une part importante d'arbitraire dans le choix de cet intervalle : il est évalué par un jugement scientifique qui repose sur l'expérience et les connaissances générales de l'expérimentateur/trice.

Ainsi, si un élève produit une incertitude plus grande qu'un autre, cela ne signifie pas forcément qu'il est moins habile !

Ce qui compte n'est pas la valeur de l'incertitude obtenue, mais la justification des choix effectués.

2. Incertitude-type associée à l'intervalle de valeurs

Pour arriver à exprimer l'incertitude de type B sous forme d'un écart-type, on doit recourir à une loi de probabilité. Dans le cas d'une évaluation de type B, l'**incertitude-type s'identifie à l'écart-type** de la distribution choisie.

a) Cas d'une distribution uniforme

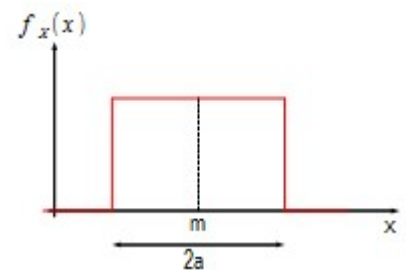
Pour calculer l'écart-type de l'ensemble des valeurs comprises dans l'intervalle défini, on fait le plus souvent l'hypothèse que ces valeurs y sont **équiréparties (on parle de distribution uniforme)**. Autrement dit, si on représentait un histogramme avec un grand nombre de valeurs dans cet intervalle, celui-ci serait rectangulaire. Ce n'est pas la distribution la plus naturelle des valeurs possibles, mais c'est le modèle probabiliste le plus simple.

Un théorème mathématique permet alors d'exprimer l'**écart-type** associé à un tel histogramme à forme rectangulaire en fonction de ses bornes.

Pour un intervalle $[m - a; m + a]$, l'incertitude-type vaut :

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

où a est la demi-étendue de l'intervalle et m sa valeur centrale.



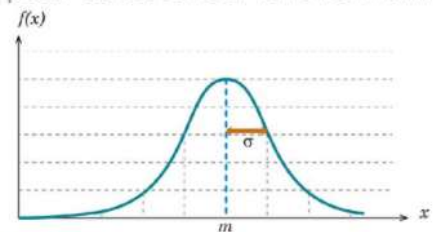
b) Cas d'une distribution normale

Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.

Si l'on devait effectuer un très grand nombre de fois la mesure de la grandeur, on observerait naturellement une distribution des valeurs mesurées suivant une « **courbe en cloche** ».

La loi de probabilité correspondante est la **loi normale** (ou loi gaussienne).

Deux grandeurs pour caractériser une loi normale



Cette distribution est caractérisée par :

- Sa valeur moyenne m
- Son écart-type σ

▪ m est la **moyenne** :

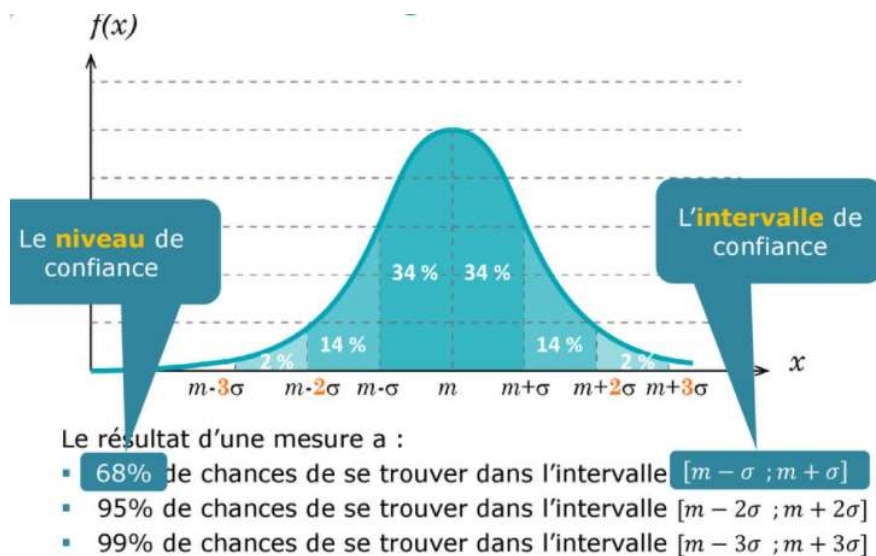
$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On montre que si l'on effectue **une seule mesure** :

▪ σ est l'**écart-type** ou écart quadratique moyen

- La probabilité de trouver la valeur dans l'intervalle $[m - \sigma; m + \sigma]$ vaut 68%
- La probabilité de trouver la valeur dans l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$ vaut 95%
- La probabilité de trouver la valeur dans l'intervalle $[m - 3\sigma; m + 3\sigma]$ vaut 99%

Ce pourcentage est appelé **niveau de confiance**.

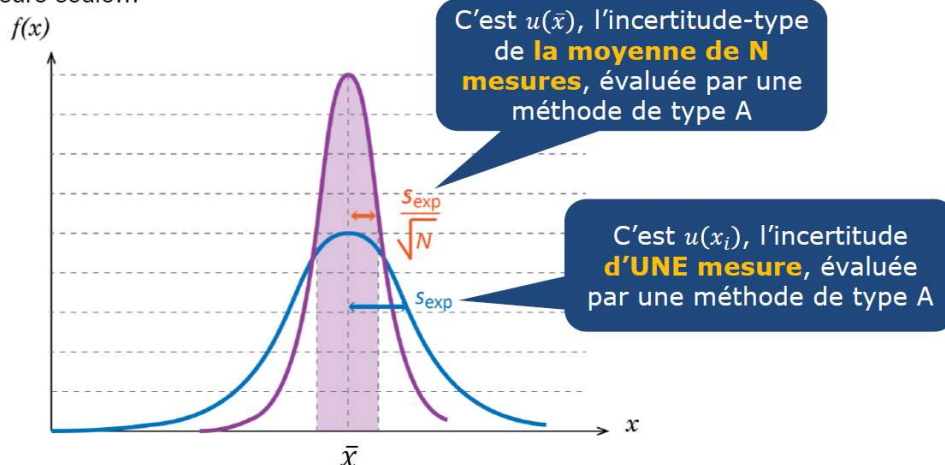


<http://www.prof-vince.fr/MI/>

On se contentera d'un **niveau de confiance de 68%** pour nos résultats.

Remarque :

L'estimation à partir d'une moyenne de N mesures est « meilleure » que sur une mesure seule...



<http://www.prof-vince.fr/MI/>

c) Quelle loi de probabilité choisir ?

Au niveau CPGE, deux cas sont à envisager :

- si on n'a aucune autre information qu'une limite basse et une limite haute pour les valeurs de la grandeur mesurée, alors on suppose que la répartition est uniforme entre ces deux bornes (cas a).
- si on connaît la valeur mesurée et l'incertitude-type associée, mais qu'on ne connaît pas la distribution sous-jacente, alors on suppose que la distribution est gaussienne (cas b).

3. Exemples

a) Cas simple

Dans certaines situations simples, il faut savoir faire preuve de bon sens et ne pas chercher des choses trop compliquées : en première approximation, l'incertitude-type peut être prise égale à la demi-largeur de l'intervalle dans lequel on estime que la grandeur X mesurée se situe à coup sûr.

EXEMPLE



La vitesse est comprise dans l'intervalle $[100 \text{ km.h}^{-1} ; 110 \text{ km.h}^{-1}]$.

L'incertitude-type sur la vitesse peut être estimée à $u(v) = 5 \text{ km.h}^{-1}$.

La vitesse mesurée est de 105 km.h^{-1} avec une incertitude type de 5 km.h^{-1} .

b) Incertitude-type dans le cas d'une double lecture sur une échelle graduée

Lorsqu'il y a plusieurs sources d'incertitudes pour **une** mesure effectuée :

- soit une incertitude-type dépasse largement les autres et on ne conserve qu'elle
- soit les incertitudes-types ont des valeurs voisines et on calcule l'incertitude-type sur la grandeur mesurée par :

$$u(x) = \sqrt{\sum_i (u_i(x))^2}$$

EXEMPLE

On mesure la longueur L d'un objet avec une règle. Il existe deux sources d'incertitude pour cette lecture : le repérage du « 0 » et la lecture proprement dite. On parle de double lecture.

On estime que la demi-étendue de l'intervalle pour une lecture correspond à une demi-graduation soit $0,5 \text{ mm}$.

L'incertitude-type pour une lecture vaut alors :

$$u_{\text{grad}}(L) = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,3 \text{ mm}$$

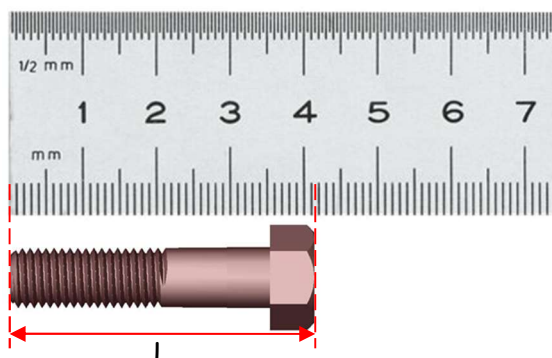
Et l'incertitude-type pour la double lecture s'obtient par :

$$u(x) = \sqrt{u_{\text{grad1}}(L)^2 + u_{\text{grad2}}(L)^2} = u_{\text{grad}}(L) \times \sqrt{2}$$

Soit $u(L) = 0,4 \text{ mm}$

Le résultat de mesure s'écrit $L = 42,0 \text{ mm}$ et $u(L) = 0,4 \text{ mm}$

On aurait pu se contenter de prendre une demi-graduation pour incertitude-type globale : $L = 42,0 \text{ mm}$ et $u(L) = 0,5 \text{ mm}$!



c) Incertitude-type déterminée à l'aide de la notice constructeur

EXEMPLE

Mesurer avec un multimètre

Pour connaître l'incertitude-type associée à la mesure à l'aide d'un multimètre, il faut consulter la notice du constructeur. On y trouve le plus souvent une « précision », qui n'est pas l'incertitude-type. Conventionnellement on considère que cette « précision » est en réalité la demi-étendue a de l'intervalle $[m - a ; m + a]$ qui représente le résultat de la mesure.

La « précision » dépend du calibre choisi. Elle est donnée par une formule rarement explicitée :

- on multiplie la valeur affichée (en valeur absolue) par une constante donnée (souvent exprimée en pourcentage);
- on lui rajoute un multiple de la résolution de l'appareil dans le calibre choisi; cette résolution est la plus petite valeur affichable dans le calibre donné.

Plage VC130/150	Précision	Résolution
200 mV	$\pm(0,5\% + 8)$	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	$\pm(0,8\% + 8)$	1 V

Extrait de la notice du multimètre Voltcraft VC 130.

En interprétant la notice ci-dessus :

- Indiquer quelle est la « précision » lorsque l'appareil affiche 10,00 V dans le calibre 20 V.
- En déduire la valeur de l'incertitude-type associée.
- Expliquer pourquoi il est préférable de choisir le calibre 20 V plutôt que le calibre 200 V.

Réponses :

Dans le calibre 20 V, la constante multiplicative de l'affichage est 0,5 % ; on doit lui rajouter 8 fois la résolution, qui est de 0,01 V. La précision est donc de $(0,5\% \times 10,00 \text{ V}) + (8 \times 0,01 \text{ V}) = 0,13 \text{ V}$. Cette précision représente la demi-étendue a de l'intervalle de valeurs représentant le résultat de la mesure. L'incertitude type vaut donc $u(U) = a/\sqrt{3} \approx 0,075 \text{ V}$.

On choisit le calibre immédiatement au-dessus de la valeur mesurée, car c'est dans ce calibre que l'incertitude est la plus petite. Dans le calibre 200 V, la précision est de $(0,5\% \times 10,00 \text{ V}) + (8 \times 0,1 \text{ V}) = 0,85 \text{ V}$ et l'incertitude-type de 0,49 V.

d) Incertitude-type déterminée à l'aide des indications sur l'instrument**EXEMPLE****Mesurer un volume avec une pipette jaugée**

Pour connaître l'incertitude-type associée au volume délivré par pipette jaugée, on ne peut se pas référer à la notice du constructeur, souvent inexistante. On peut néanmoins en appeler aux normes internationales, suivies par le fabricant (ISO 384:2015 pour la verrerie en général, ISO 648 :2008 pour les pipettes) ainsi qu'aux pratiques standardisées de laboratoire (QUAM:2012.P1).

Sur la pipette, en sus du volume nominalelement délivré, il est indiqué avec un \pm la demi-étendue de l'intervalle représentant le résultat de mesure (l'ensemble des valeurs raisonnablement attribuables au volume prélevé).

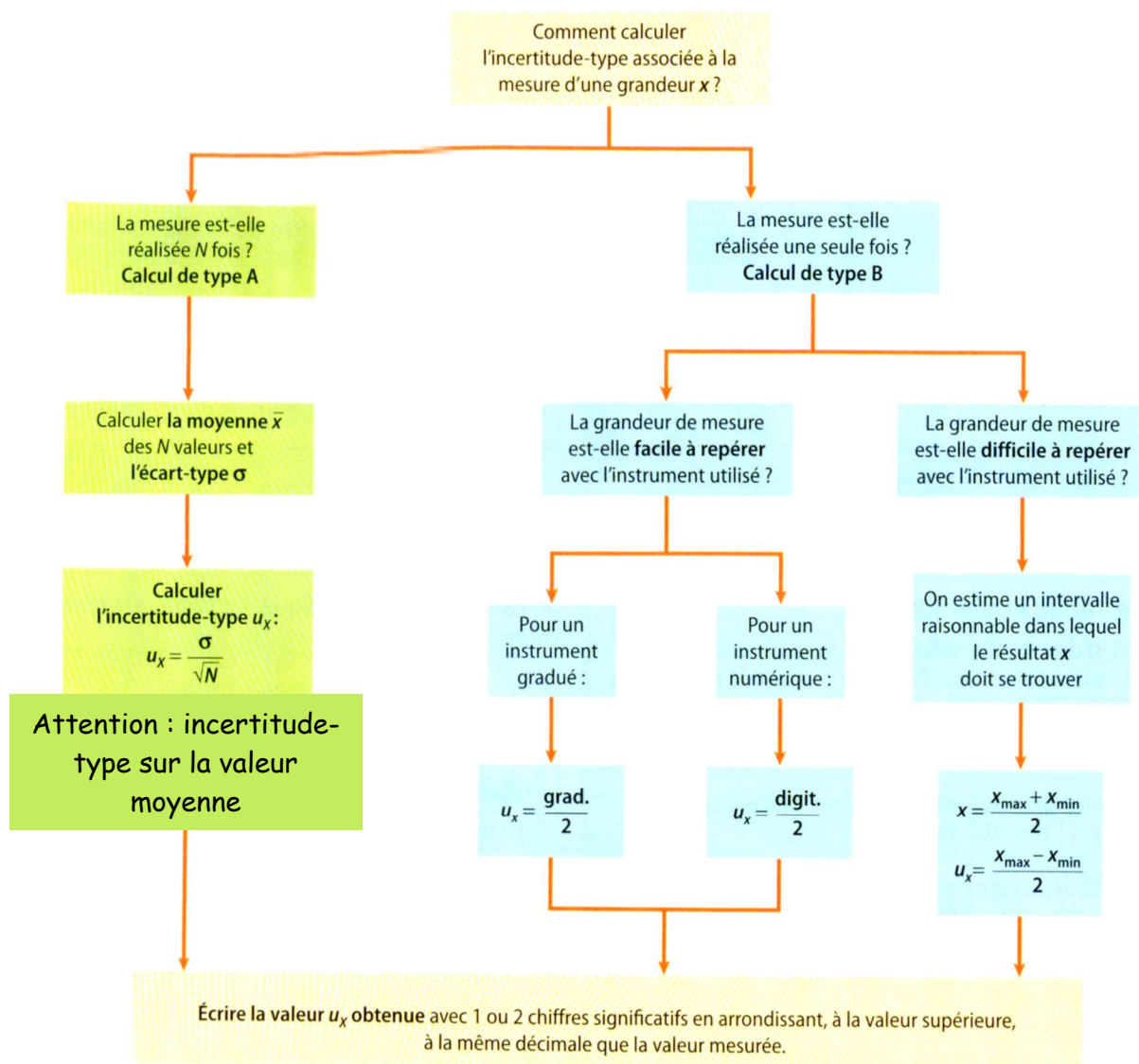
Grâce à l'examen de la photo de la pipette ci-contre, indiquer le volume prélevé et l'incertitude-type associée (en supposant l'opératrice ou l'opérateur compétent).

Réponse :

L'intervalle représentant le résultat de mesure est [25 - 0,030 mL ; 25 + 0,030 mL].

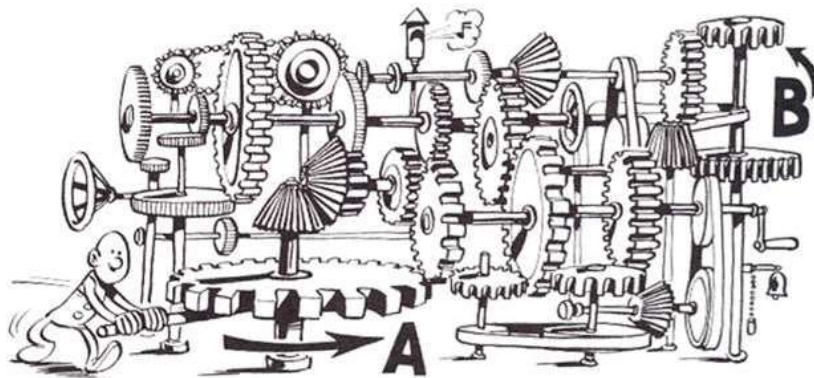
La valeur mesurée est bien entendu $V = 25 \text{ mL}$ et l'incertitude-type associée est de $u(V) = 0,030 \text{ mL} / \sqrt{3} \approx 0,017 \text{ mL}$.

Bilan (simplifié au niveau première)



Physique-Chimie, Première EDS, Bordas 2019, page 403

IV. Propagation des incertitudes



<https://algoric.pagesperso-orange.fr/Priodik/dess1/mecaniq.htm>

1. Incertitude-type composée

On cherche souvent l'incertitude-type $u(x)$ sur la valeur d'une grandeur X calculée à partir d'une ou plusieurs grandeurs mesurées.

EXEMPLE

On cherche à calculer la vitesse du son dans l'air. On a mesuré une distance de propagation d avec une incertitude-type $u(d)$; on a également mesuré un temps de propagation Δt avec une incertitude-type $u(\Delta t)$. La vitesse du son $v = \frac{d}{\Delta t}$ est facilement calculable. Mais que vaut l'incertitude-type associée $u(v)$?

2. Détermination d'une incertitude-type composée grâce à une formule fournie

Evaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.

Dans le cas où les grandeurs intervenant dans l'expression de X sont **indépendantes**, on peut utiliser les formules du tableau suivant pour évaluer l'incertitude-type sur la valeur de la grandeur X calculée :

Cas	Relation	Incertitude
1	$X = \lambda Y$ (λ constante)	$u(X) = \lambda \cdot u(Y)$
2	$X = Y + Z$ ou $X = Y - Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
3	$X = Y/Z$ ou $X = Y \cdot Z$	$u(X) = X \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
4	$X = \lambda Y^a Z^b$	$u(X) = X \sqrt{a^2 \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

Tableau – Expressions permettant de calculer l'incertitude de grandeurs composées, dans des cas particuliers.

Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.

On appelle **incertitude relative** (en toute rigueur incertitude-type relative) la grandeur :

$$\frac{u(x)}{x}$$

Cette notion permet de calculer mentalement et rapidement des incertitudes-types composées dans les cas de produits ou de rapports de puissances de grandeurs mesurées, et de comparer entre elles les différentes contributions **pour ne garder que la principale source d'incertitude**.

EXEMPLE

On cherche à calculer la vitesse du son dans l'air. On a mesuré une distance de propagation $d = 2,000$ m avec $u(d) = 0,010$ m ; on a également mesuré un temps de propagation $t = 5,7$ ms avec $u(t) = 0,1$ ms. L'incertitude-type $u(d)/d = 0,005 = 0,5$ % est plus petite que $u(t)/t = 0,0175 = 1,75$ %. En reprenant la formule mathématique du cas 3, on se rend compte qu'on peut négliger $(u(d)/d)^2$ devant $(u(t)/t)^2$. Ainsi a-t-on $u(v) \approx v \times u(t)/t$, soit $u(v) \approx 350,8 \times 1,75 \% \approx 6,1$ m·s⁻¹.

3. Détermination d'une incertitude-type composée grâce à la méthode Monte Carlo - Simulation d'un processus aléatoire

Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.

Il arrive parfois qu'on n'ait pas de formule mathématique à appliquer ou que l'approximation qu'elle nécessite ne soit pas justifiée.

Dans ce cas, on est amené à réaliser **une simulation** : on se ramène ainsi à une situation où l'on peut faire une évaluation de type A de l'incertitude.

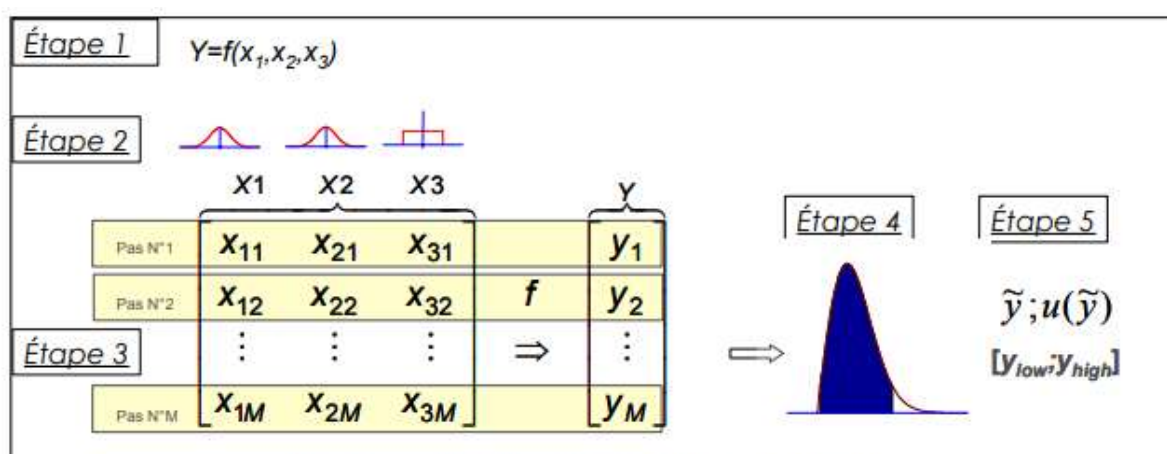


Figure 1 – Les différentes étapes de la méthode de Monte Carlo

<https://documents.lne.fr/publications/13e-congres-metrologie/actes/117-desenfant-incertitude-simulations-monte-carlo.pdf>

La méthode Monte Carlo permet d'étudier la variabilité de la valeur d'une grandeur Y sans utiliser de formule de composition d'incertitudes.

Principe :

- 1) On écrit l'expression de Y en fonction des grandeurs X_i .
- 2) On associe à chaque X_i un intervalle dans lequel sa valeur est supposée appartenir (on suppose les distributions uniformes pour simplifier).
- 3) On utilise un code Python pour simuler un tirage au sort des valeurs des grandeurs X_i . Il en résulte une valeur de Y . Cette procédure est répétée un très grand nombre de fois (M dans la figure ci-dessus) et permet d'obtenir un ensemble de valeurs de Y .
- 4) On peut alors tracer un histogramme des valeurs potentielles de Y .

5) Le programme calcule ensuite la valeur moyenne \bar{y} et l'incertitude-type associée $u(\bar{y})$.

EXEMPLE

On cherche à estimer la valeur de la distance focale image f' (notée « fp » dans le programme) d'une lentille convergente en mesurant la position de l'objet \overline{OA} et la position de l'image associée $\overline{OA'}$ et en appliquant la relation de conjugaison de Descartes.

Dans ce cas, il n'y a pas de formule simple permettant de calculer l'incertitude-type sur f' en connaissant les incertitudes-types sur \overline{OA} et sur $\overline{OA'}$.

Une simulation grâce à la méthode Monte Carlo est donc particulièrement adaptée à cette situation si l'on n'a le temps de ne réaliser l'expérience qu'une fois.

Le programme ci-dessous permet de calculer f' et d'estimer $u(f')$:

```
#Importation des bibliothèques-----
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Positions de l'objet et de l'image-----
OA = - 15 # mesure algébrique de OA en cm
OAp = 30 # mesure algébrique de OA' en cm

# Demi-largeur des intervalles des positions-----
DeltaOA = 1 # valeur en cm
DeltaOAp = 3 # valeur en cm

# Fonction permettant de calculer la distance focale image connaissant OA et OA'
def focale(objet,image):
    return 1/(1/image - 1/objet)

# Nombre de simulations à effectuer
N = 10000

# Simulation MC avec une distribution de probabilité uniforme-----
fp = [] # initialisation de la liste des valeurs de f'

for i in range(0,N):
    # Tirage aléatoire d'une valeur de OA et de OA' dans les intervalles définis
    # précédemment.
    objet = np.random.uniform(OA-DeltaOA,OA+DeltaOA)
    image = np.random.uniform(OAp-DeltaOAp,OAp+DeltaOAp)
```

```

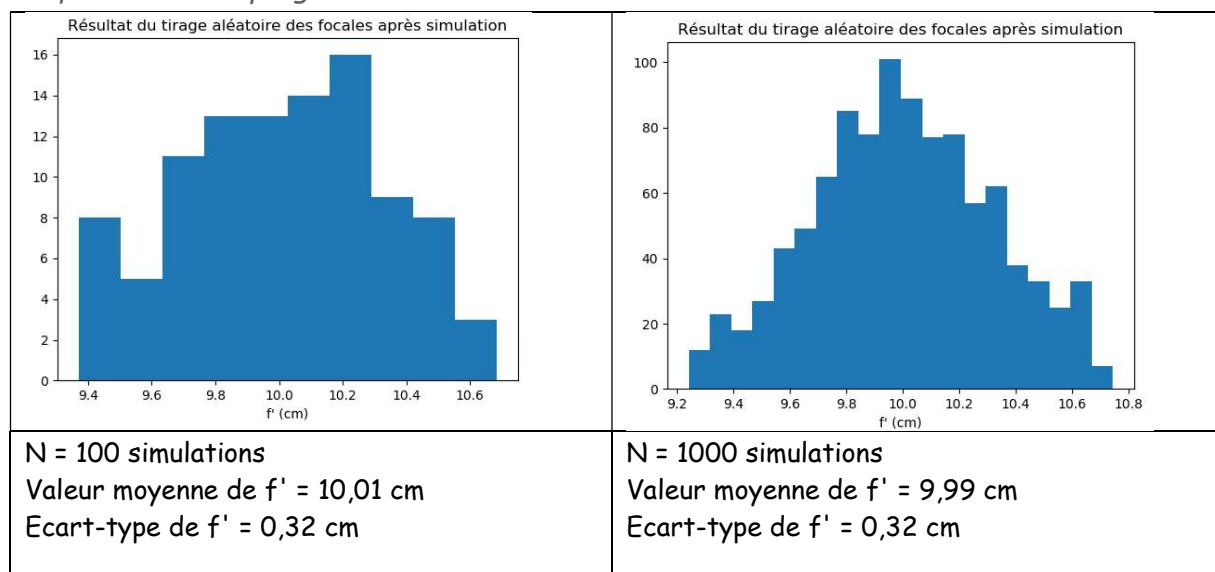
# Création de la liste de valeurs de f' résultant
fp.append(focale(objet,image))

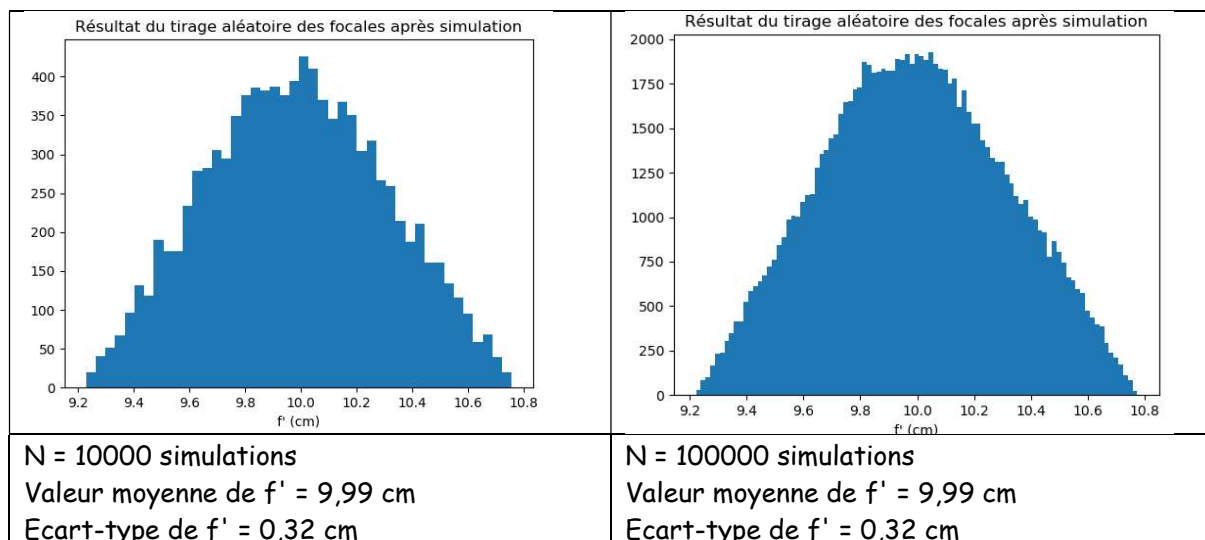
# Tracé de l'histogramme permettant de visualiser la distribution des valeurs de f'
plt.hist(fp,bins = 'rice')
# Python utilise la règle de Rice pour trouver le nombre d'intervalles de l'histogramme,
on peut modifier cette valeur, par exemple bins=15.
plt.title('Résultat du tirage aléatoire des focales après simulation')
plt.xlabel("f' (cm)")
plt.show()

# Calcul et affichage de la valeur moyenne et de l'incertitude-type de f' -----
-----
fmoy = np.mean(fp) # valeur moyenne des valeurs de f'
uf = np.std(fp,ddof=1) # écart-type de la distribution des valeurs de f'
# ddof = 1 permet de calculer l'écart-type de f' avec le facteur N - 1.
print("Valeur moyenne de f' = {:.2f} cm".format(fmoy))
print("Incertainitude-type de f' = {:.2f} cm".format(uf))
# L'instruction .2f indique un format avec deux décimales.
# L'instruction {...}.format(stdf) indique de remplacer la variable stdf dans l'accolade.

```

Ce que renvoie le programme :





V. Ecriture du résultat et chiffres significatifs

Ecrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.



Source : ???

1. Les trois composantes de l'écriture d'un résultat de mesure

Un résultat de mesure doit inclure :

- La valeur mesurée, sous la forme $X = \dots$ en précisant l'unité appropriée.
- L'incertitude-type associée à la valeur mesurée, sous la forme $u(x) = \dots$ en utilisant la même puissance de 10 que celle de la valeur mesurée, et évidemment la même unité.

- Idéalement, des informations concernant l'obtention des deux grandeurs précédentes, comme la méthode utilisée pour l'évaluation de l'incertitude, le nombre d'observations réalisées etc...

Il est possible de condenser la valeur mesurée et l'incertitude-type sous la forme $x \pm u(x)$ mais il faut alors bien préciser que ce qui suit le \pm est l'incertitude-type. Dans ce cas, la puissance de 10 doit être commune et en facteur.

EXEMPLES

- 1) Dans le cas d'un prélèvement avec la pipette jaugée vu dans l'exemple précédent (et en supposant l'opérateur/-trice compétent-e), on écrira :
 $V = 25,00 \pm 0,02 \text{ mL}$ où $0,02 \text{ mL}$ est l'incertitude-type
- 2) Résultat de la mesure de la vitesse du son dans l'air : $c = (3,4 \pm 0,1) \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

2. Les chiffres significatifs (CS)

L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur.

On limite donc en général son nombre de chiffres significatifs à un ou deux.

Lorsque l'incertitude-type est précisée, le nombre de CS de la valeur mesurée correspondante n'a plus de sens propre : on le choisit de manière à faciliter la lecture, **en s'arrangeant pour que le dernier chiffre de la valeur mesurée ait la même position (en écriture décimale) que le dernier chiffre de l'incertitude-type.**

EXEMPLE

Dans le cas de l'étude statistique de la valeur de la distance focale réalisée 30 fois par le même élève, les résultats obtenus grâce à Python sont :

```
>>>
La valeur moyenne vaut : 8.096666666666666 cm avec un écart-type de :
0.16501480254047293
Incrtitude-type : u = 0.03012744322455927 cm
>>>
```

Le résultat de ces mesures doit s'écrire :

« Dans les conditions de l'expérience, avec un échantillon de 30 mesures, la valeur de la distance focale est $f' = 8,10 \text{ cm}$ avec une incertitude-type $u(f') = 0,03 \text{ cm}$. »

L'incertitude-type fournit alors une estimation de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la distance focale.

VI. Comparaison de deux valeurs : écart normalisé

1. Comparaison à une valeur de référence

Dans certains cas, il est possible de comparer une valeur trouvée (munie de son incertitude-type) à une valeur de référence.

a) Définition

On appelle **valeur de référence** une valeur mesurée par une méthode de référence, c'est-à-dire une méthode scientifiquement jugée comme étant supérieure à toute autre.

Par extension, on appelle valeur de référence toute valeur mesurée dont l'incertitude-type est supposée **négligeable** devant celle obtenue par une autre méthode.

b) z-score

Par définition, l'**incertitude-type** quantifie les variations de la **valeur mesurée** annoncée. On s'attend à ce que la **valeur de référence** ne coïncide pas exactement avec la valeur mesurée, mais ne s'en écarte pas plus que de quelques incertitudes-types.

On définit l'**écart normalisé (ou z-score)** comme l'écart absolu entre la valeur mesurée x et la valeur de référence x_{ref} , divisé par l'incertitude-type :

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}$$

z est donc le nombre d'incertitudes-types d'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence.

Il représente une évaluation de l'accord entre le résultat de mesure et la valeur de référence.

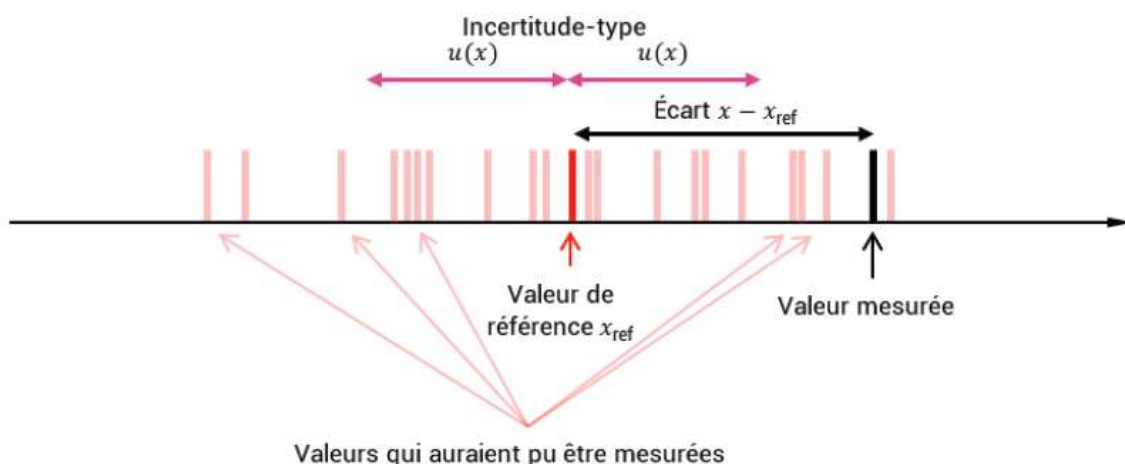


Figure 7 – Si la valeur de référence est correcte, l'écart entre la valeur mesurée et celle-ci sera du même ordre de grandeur que l'incertitude-type, qui caractérise la variabilité du processus de mesure.

c) Compatibilité d'un résultat avec une valeur de référence

Lorsque $z \leq 2$, on considère que le résultat de mesure est compatible avec la valeur de référence.

Lorsque $z > 2$, on considère qu'il ne l'est pas.

Ce seuil à 2 est fixé par convention. On le retrouve dans de nombreux domaines scientifiques tels que la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie etc...

On rédige la conclusion de la manière suivante :

« Il y a moins de deux incertitudes-types entre la valeur de X mesurée et la valeur de référence. »

Ou

« La valeur de X trouvée expérimentalement est compatible avec sa valeur de référence à $z \times u(x)$ près. »

2. Comparaison de deux valeurs entre elles (nouveau !)

Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.

Supposons que l'on souhaite comparer deux valeurs x_1 et x_2 de la même grandeur X obtenues par deux méthodes différentes avec les incertitudes-types associées $u(x_1)$ et $u(x_2)$.

On définit l'écart normalisé (ou **z-score**) entre les deux processus de mesure qui ont conduit aux valeurs x_1 et x_2 :

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Le critère de compatibilité entre les deux valeurs reste le même que dans le paragraphe précédent.

Si $z \leq 2$, on écrira : « les deux mesures sont compatibles entre elles ».

3. Discussion

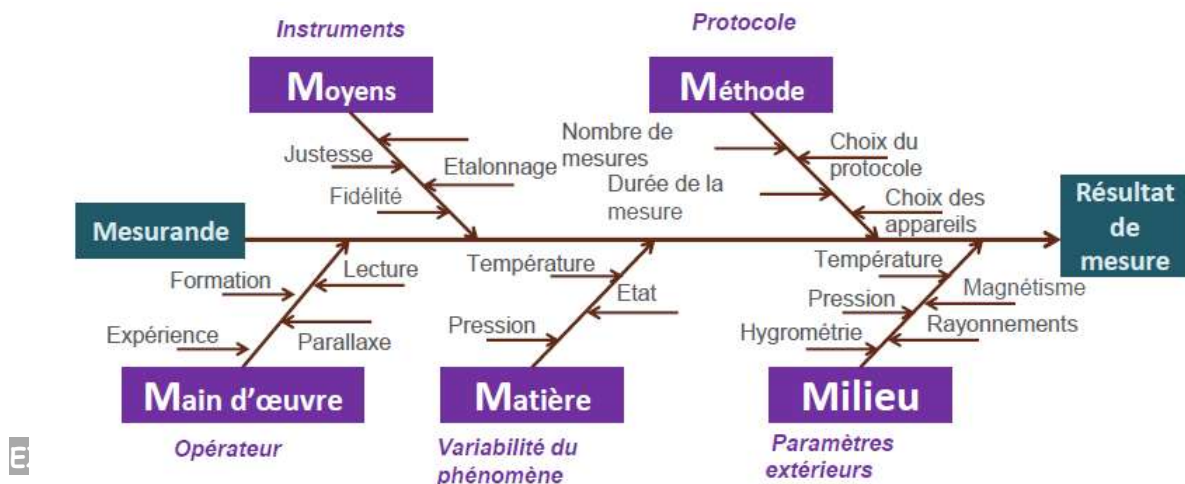
Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

Comment interpréter un **z-score** supérieur à 2 ?

- Il est possible que l'incertitude-type ait été sous-estimée, ou qu'une source d'incertitude ait été oubliée : il convient donc de réexaminer les choix qui ont

mené à son évaluation (attention également à ne pas surestimer l'incertitude-type, cela peut conduire par erreur à un accord mesure / référence).

La règle des 5M permet de répertorier les sources d'incertitudes mises en jeu lors d'une mesure afin de ne pas en oublier :



- On a mesuré un rayon au lieu d'un diamètre.
- On a mal repéré la position de l'objet sur le banc d'optique.
- On n'a pas fait attention à placer correctement son œil et commis une erreur de parallaxe en lisant un volume sur une éprouvette graduée.
- On a mal recopié des valeurs.
- Il est possible que la modélisation du phénomène observé ne corresponde pas aux conditions expérimentales.

EXEMPLE

On compare la mesure de la période d'un pendule de longueur L avec la valeur de référence donnée par la formule théorique $2\pi\sqrt{L/g}$. Cela ne fonctionnera pas forcément bien, car on a négligé les frottements avec l'air, et la masse du pendule n'est pas ponctuelle.

En fin de compte, l'important est le soin accordé à la mesure et l'honnêteté des observations.

EXEMPLE

Identification d'un métal

On mesure la masse volumique d'un métal doré dont on ignore complètement la nature : $\rho = (8,40 \pm 0,20) \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, écriture dans laquelle l'incertitude-type est indiquée derrière le signe \pm . On trouve dans Wikipédia les densités suivantes : Or (19,3), Laiton (8,2), Cuivre (8,9). Qu'est-on en droit d'affirmer ?

Réponse :

On peut faire les hypothèses successives que le métal est de l'or, du laiton, du cuivre.

On calcule alors les trois z-scores :

$$\bullet z_{\text{or}} = \frac{|8,40 - 19,3|}{0,2} = 54,5 ;$$

$$\bullet z_{\text{laiton}} = \frac{|8,40 - 8,2|}{0,2} = 1 ;$$

$$\bullet z_{\text{cuivre}} = \frac{|8,40 - 8,9|}{0,2} = 2,5.$$

Avec un seuil à 2, on peut rejeter l'hypothèse qu'il s'agisse d'or ou de cuivre. On ne peut pas rejeter l'hypothèse qu'il s'agisse de laiton. Mais il serait faux de conclure qu'il s'agit de laiton. Le métal doré pourrait être un autre alliage, de masse volumique différente mais voisine !

VII. Régression linéaire

1. Principe de la méthode

Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.

«/... un modèle de **régression linéaire** est un modèle de régression qui cherche à établir une relation linéaire entre une variable, dite expliquée, et une ou plusieurs variables, dites explicatives.

On parle aussi de **modèle linéaire** ou de **modèle de régression linéaire**.

Parmi les modèles de régression linéaire, le plus simple est l'ajustement affine. Celui-ci consiste à rechercher la droite permettant d'expliquer le comportement d'une variable statistique y comme étant une fonction affine d'une autre variable statistique x . »

https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9gression_lin%C3%A9aire

Concrètement, en physique-chimie, on dispose d'une **série de mesures des grandeurs X et Y** et on cherche à savoir s'il est possible d'ajuster la distribution de points expérimentaux dans le plan (XOY) par **une droite**.

Attention au vocabulaire !

On parle de « régression linéaire » mais dans la plupart des cas, on teste un modèle « affine » (avec une ordonnée à l'origine non nulle) et non « linéaire » !

EXEMPLE

Modélisation par des fonctions affines en physique-chimie

Méthode

Soient deux grandeurs physiques reliées théoriquement par une loi affine. Tester cette loi signifie :

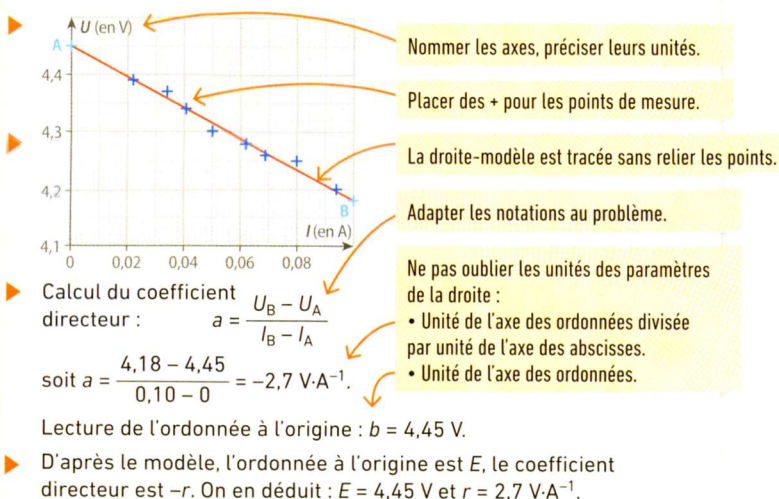
- 1 relever expérimentalement les valeurs des deux grandeurs lorsqu'on les fait varier ;
- 2 placer les points dans un graphique ;
- 3 tracer la droite-modèle la plus proche des points expérimentaux ;
- 4 déterminer graphiquement son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine ;
- 5 les identifier aux paramètres de la loi affine testée.

Exemple

- La tension U aux bornes d'une pile est liée à l'intensité I du courant qu'elle délivre par la relation affine $U = -rI + E$, loi à tester.

Faire varier I et relever U et I dans un tableau.

U (en V)	4,39	4,37	4,34	4,30	4,28	4,26	4,25	4,20
I (en mA)	22	34	41	50	62	69	80	94



Physique-Chimie, Première Spécialité, Hatier 2019, page 433

Remarque : le calcul de la « meilleure » droite repose sur la **méthode des moindres carrés** :

Principe

On cherche la droite qui passe « au mieux » parmi les points expérimentaux

- Equation de la droite « estimatrice »:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

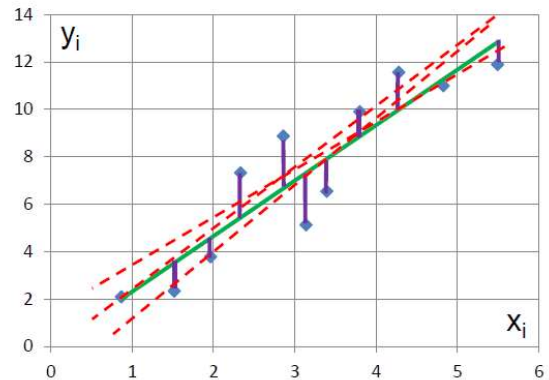
où \hat{a} et \hat{b} sont des estimateurs des paramètres de la droite vraie

- Distance entre la droite et les points

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$$

- « Passer au mieux » signifie minimiser cette distance

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \hat{a}} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \hat{b}} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0 \end{cases}$$



Paramètres de la droite optimale

$$\hat{b} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

Attention : quels que soient les x_i et les y_i , on peut toujours calculer une droite des moindres carrés, mais **ça ne veut pas dire qu'elle a un sens.**

D'après « Traitement numérique des données », J.-M. Commenge, Stage ENSIC, juin 2021

Evidemment, ces calculs ne sont pas effectués « à la main » mais par un logiciel ou en utilisant Python...

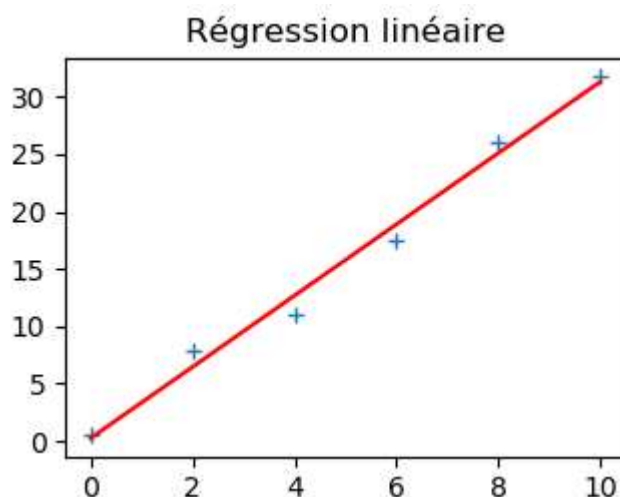
EXEMPLE

On dispose des valeurs expérimentales de deux grandeurs X_{exp} et Y_{exp} , que l'on suppose reliées par une loi de variation affine.

La régression linéaire s'obtient avec la fonction `np.polyfit(Xexp,Yexp,1)`. Le dernier argument désigne l'ordre du polynôme par lequel est faite la régression, toujours égal à 1 pour une régression linéaire. Cette fonction renvoie un tableau à deux éléments qui désignent les coefficients de la régression.

Le code ci-dessous permet d'obtenir la figure qui suit (inachevée, à légender etc...)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Xexp = np.array([0, 2, 4, 6, 8, 10])
Yexp = np.array([0.5, 7.9, 11, 17.5, 26, 31.8]) # 3x+1 avec un bruit
p = np.polyfit(Xexp,Yexp,1) # p est un tableau
Ymod = p[0] * Xexp + p[1] # p[0] est la pente, p[1] l'ordonnée à l'origine
plt.figure(figsize=(3,2))
plt.plot(Xexp,Yexp,'+') # points expérimentaux
plt.plot(Xexp,Ymod,'r') # droite modèle
plt.show()
```



2. Procédure de validation

Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.

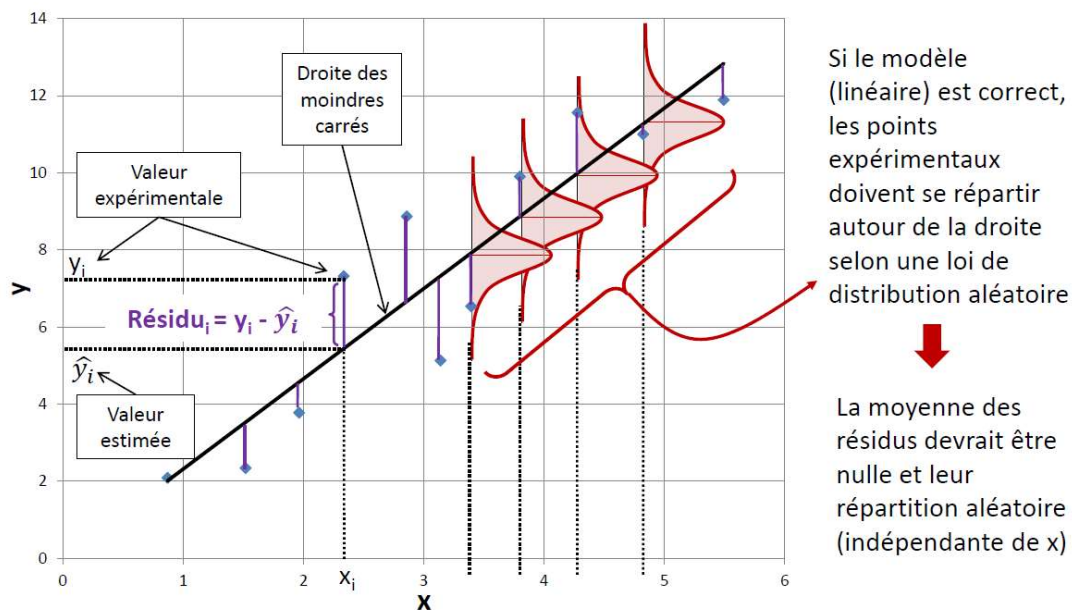
A un niveau CPGE, la démarche expérimentale doit respecter la procédure d'analyse des résultats expérimentaux suivante :

- 1) Représentation graphique des points expérimentaux avec leurs barres d'incertitude.
- 2) Superposition de la courbe représentative du modèle testé.
- 3) Observation graphique des résidus ou des écarts normalisés.
- 4) Conclusion : les données expérimentales sont-elles en accord avec le modèle testé ?

Dans le cas d'une régression linéaire, le modèle testé est une fonction affine ou linéaire.

Une nouvelle notion : les résidus...

Distribution des résidus



D'après « Traitement numérique des données », J.-M. Commenge, Stage ENSIC, juin 2021

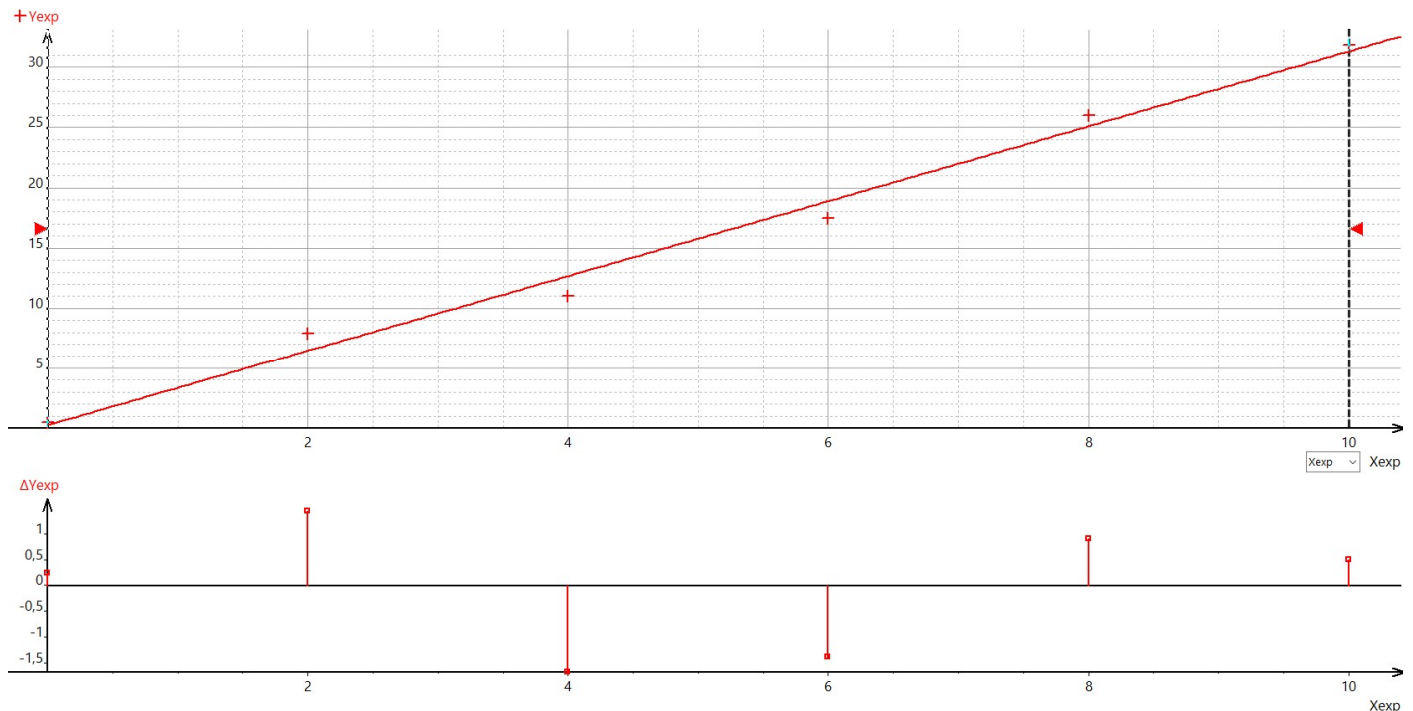
Pour une observation donnée, le résidu désigne l'écart algébrique entre la valeur expérimentale obtenue et la valeur prédite par la méthode des moindres carrés (sur le graphique, c'est la longueur du segment vertical reliant le point expérimental considéré à la droite de régression linéaire, avec un signe « + » si le point est au-dessus de la droite, et « - » s'il est en-dessous).

Le modèle est adapté si la distribution des résidus est aléatoire autour de la valeur nulle.

Certains logiciels (comme Regressi) permettent l'affichage des résidus.

EXEMPLE

On a repris les valeurs de X_{exp} et Y_{exp} de l'exemple précédent pour effectuer la régression linéaire avec le logiciel Regressi et faire afficher les résidus (deuxième graphique) :



Choix d'un modèle affine :

$$Y_{\text{exp}} = a \cdot X_{\text{exp}} + b$$

Ecart-type données-modèle

$$Y_{\text{exp}} = 1,406$$

$$\text{Coeff. corrélation} = 0,99419$$

$b = 0$?

Incertitude-type

$$a = (3,10 \pm 0,17)$$

$$b = (262 \pm 1,02 \text{E}3) 10^{-3}$$

Répartition des résidus

Visuellement, les résidus se répartissent bien de manière aléatoire autour de la valeur nulle : on peut donc considérer que le modèle choisi est adapté pour la distribution de points expérimentaux.

(ou que les résultats expérimentaux sont en accord avec le modèle s'il s'agit d'un modèle physique testé).

Mais dans l'exemple choisi, on n'a pas tenu compte des incertitudes sur les valeurs des grandeurs X_{exp} et Y_{exp} ...

Rajout des incertitudes sur les points expérimentaux

EXEMPLE

On dispose des valeurs de l'indice optique d'un prisme (en verre flint SF10) mesurées par spectroscopie pour différentes longueurs d'onde, ainsi que de leurs incertitudes-types associées.

λ (nm)	404,7	435,8	480,0	546,1	578,1	615,0
n	1,77610	1,76325	1,74957	1,73481	1,72942	1,72397
$u(n)$	0,00014	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00013

On cherche à vérifier si le verre constituant le prisme suit la loi de Cauchy, c'est-à-dire si l'on peut écrire : $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ où A et B sont des coefficients positifs caractéristiques du verre.

Le programme suivant permet de réaliser les trois premières étapes de la procédure de validation.

Importation des bibliothèques utiles

```
import numpy as np          # pour le traitement vectoriel des données
import numpy.random as rd   # pour les tirages aléatoires
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphes
```

Saisie des valeurs expérimentales

```
lamb = np.array([404.7, 435.8, 480.0, 546.1, 578.1, 615]) # longueurs d'onde (en nm)
n = np.array([1.77610, 1.76325, 1.74957, 1.73481, 1.72942, 1.72397]) # indices optiques
u_n = np.array([1.4, 1.4, 1.4, 1.3, 1.3, 1.3])*1e-4 # incertitudes-types sur les indices
```

Les observations sont-elles correctement décrites par une loi de la forme $n=A+B/\lambda^2$

Ajustement affine selon une loi de Cauchy

```
p = np.polyfit(1/lamb**2, n, 1)
# p est un tableau contenant les coefficients de l'ajustement : p[0] pente ; p[1] ordonnée à l'origine
```

Calcul des résidus et des écarts normalisés

```
n_mod = p[0]*1/lamb**2 + p[1] # calcul des ordonnées des points "modèle"
residus = n - n_mod          # calcul des résidus
En = residus/u_n             # calcul des écarts normalisés
# Remarque : il faut faire l'un ou l'autre, mais pas les deux !!!
```

Vérification graphique

```
plt.figure(figsize = (19,5)) # création d'une fenêtre graphique avec trois graphes
```

```
plt.subplot(1, 3, 1) # 1er graphe
```

```
# points expérimentaux avec barres d'erreur pour n
```

```
plt.errorbar(1/lamb**2, n, yerr = u_n, fmt = 'bo', label = "Points expérimentaux")
```

```
# points issus de la régression linéaire
```

```
plt.plot(1/lamb**2, n_mod, 'c--', label = "Modèle affine")
```

```
plt.xlabel(r"$1/\lambda^2$ (en nm$^{-2}$)")
```

```
plt.ylabel(r"$n$")
```

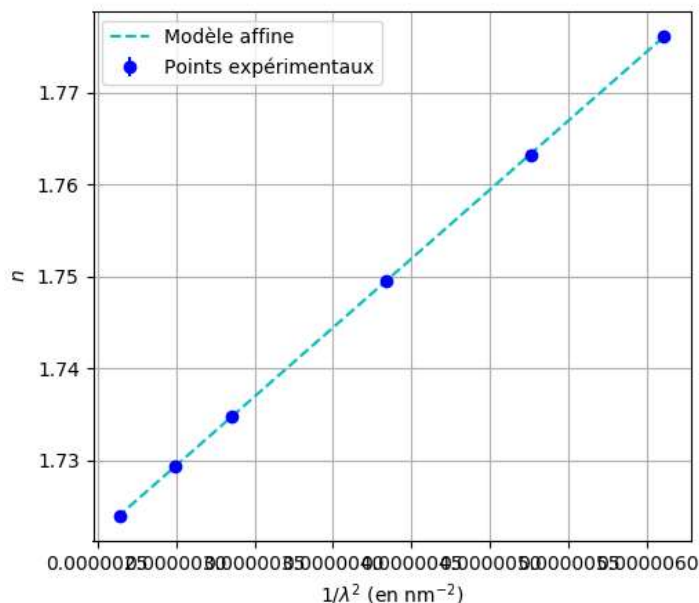
```
plt.grid(), plt.legend(loc = 'best')
```

```
plt.subplot(1, 3, 2)          # 2ème graphe
# Affichage des résidus avec barres d'incertitude-type :
plt.errorbar(lamb, residus, yerr = u_n, fmt = 'bo')
# Pour mieux visualiser la droite correspondant à un résidu nul :
plt.plot([350, 650], [0, 0], 'c--')
plt.xlabel(r"$\lambda$ (en nm)"), plt.xlim(350, 650)
plt.ylabel(r"résidus"), plt.ylim(-3e-4, 3e-4),
plt.ticklabel_format(axis = 'y', style = 'sci', scilimits = (0,0))
plt.grid()
```

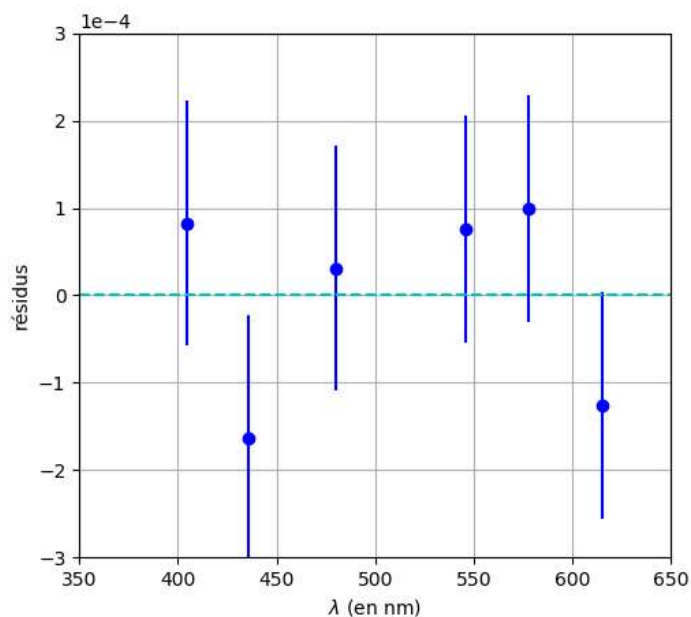
```
plt.subplot(1, 3, 3)          # 3ème graphe
# Affichage des écarts normalisés :
plt.plot(lamb, En, 'bo')
# Pour mieux visualiser le domaine des En acceptables :
plt.fill_between([350, 650], y1 = -2, y2 = 2, color = 'cyan', alpha = .1)
plt.xlabel(r"$\lambda$ (en nm)"), plt.xlim(350, 650)
plt.ylabel(r"écarts normalisés"), plt.ylim(-3,3)
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

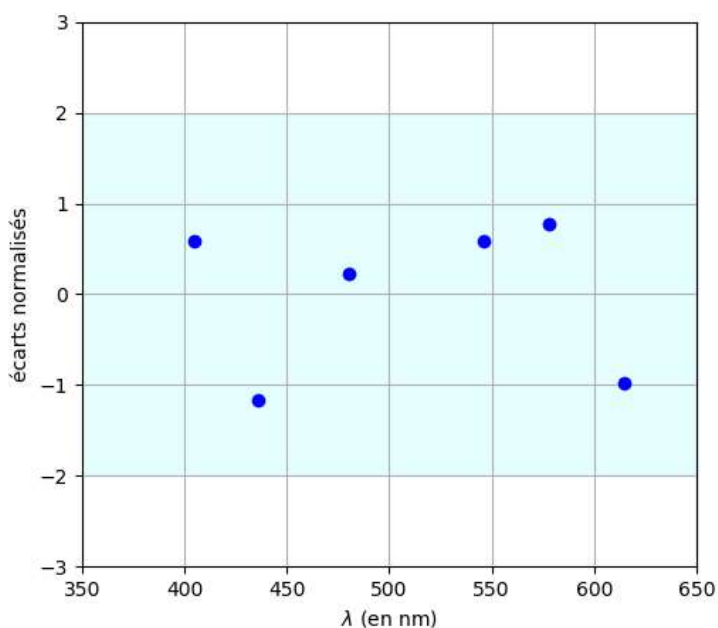
Le programme retourne :



Les points expérimentaux semblent appartenir à la droite modèle.



Les résidus sont répartis de manière aléatoire autour de la valeur nulle (qui correspond à un point sur la droite modèle).



Les écarts normalisés (z-score) sont inférieurs à 2 (en valeur absolue).

Conclusion (4^{ème} étape) :

Les résultats obtenus permettent de conclure que les données expérimentales sont en accord avec le modèle utilisé : le verre du prisme suit bien la loi de Cauchy.

Il reste ensuite à estimer les valeurs des coefficients A et B ainsi que leurs incertitudes-types...

3. Capacité numérique : simulation de Monte-Carlo

Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs - simulation de Monte-Carlo- pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

Soient m couples de mesures (x_i, y_i) , et leurs intervalles de variations $[x_i - \Delta x_i ; x_i + \Delta x_i]$ et $[y_i - \Delta y_i ; y_i + \Delta y_i]$ associés. On suppose que cette distribution de points peut être ajustée par une droite et on cherche à déterminer les paramètres de cette droite (pente et ordonnée à l'origine) avec leurs incertitudes-types à l'aide d'une simulation de Monte Carlo.

Principe

- 1) On fixe un nombre N de tirages.
- 2) On initialise les listes des pentes et des ordonnées à l'origine à 0.
- 3) Pour i compris entre 1 et N (pour chacun des tirages) :
 - Pour j variant entre 1 et m , on tire au hasard m couples de points (x_j, y_j) dans les intervalles : $[x_j - \Delta x_j ; x_j + \Delta x_j]$ et $[y_j - \Delta y_j ; y_j + \Delta y_j]$
 - On réalise une régression linéaire sur l'ensemble des m couples de points tirés au sort et on obtient une valeur de pente (pente[i]) et une valeur d'ordonnée à l'origine (ord[i]) qui sont stockées dans les listes correspondantes.
- 4) On calcule ensuite les valeurs moyennes et les écarts-types des deux listes « pente » et « ordonnée à l'origine ».
- 5) On obtient l'équation de la droite moyenne avec les incertitudes sur les paramètres du modèle (pente et ordonnée à l'origine).

EXEMPLE

Suite du programme précédent (loi de Cauchy pour un prisme en verre)

Simulation Monte-Carlo avec la loi normale

$N = 50000$

nombre d'expériences simulées

Initialisation des listes dans lesquelles on va stocker les valeurs de A et B correspondant à chaque expérience simulée

A_{mc} = []

B_{mc} = []

Pour chaque expérience, on simule la mesure des indices pour les 6 longueurs d'onde

```
for i in range(N):
    # on tire aléatoirement (distribution normale) une série de 6 valeurs de n
    nmc = n + rd.normal(0, u_n, size = 6)
    # on reprend l'ajustement affine avec cette série de valeurs de n
    p = np.polyfit(1/lamb**2, nmc, 1)
    # on stocke les valeurs des paramètres d'ajustement dans les listes Amc et Bmc
    Amc.append(p[1])
    Bmc.append(p[0])

## Représentation graphique de l'ensemble des valeurs de A et de B obtenues sous
forme d'histogrammes
plt.figure(figsize = (15, 4))

plt.subplot(1, 2, 1) # premier graphe
plt.hist(Amc, bins = 'rice', color = 'y')
plt.xlabel(r"Valeurs de $A$ obtenues")
plt.ylabel(r"Nombre d'apparitions")

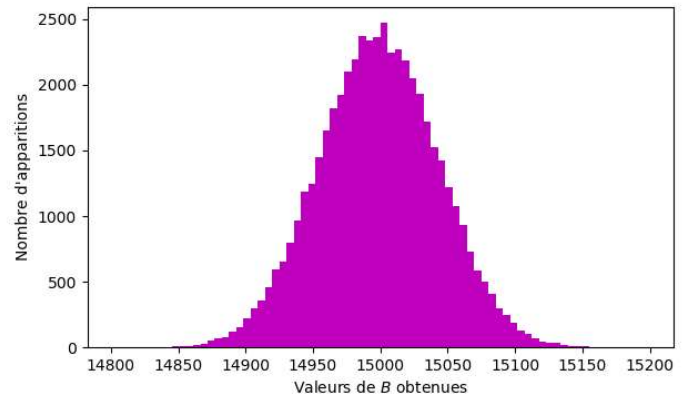
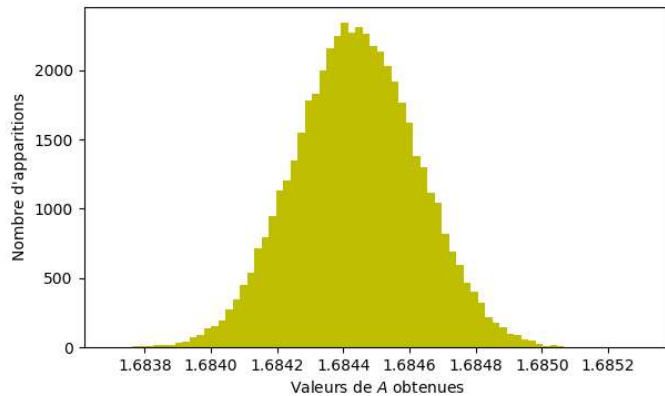
plt.subplot(1, 2, 2) # deuxième graphe
plt.hist(Bmc, bins = 'rice', color = 'm')
plt.xlabel(r"Valeurs de $B$ obtenues")
plt.ylabel(r"Nombre d'apparitions")

plt.show()

## Analyse statistique de l'ensemble des valeurs de A et de B obtenues

# Calcul de la valeur moyenne et de l'écart-type de A
Amoy = np.mean(Amc)
u_A = np.std(Amc, ddof = 1)
print("Estimation du paramètre A de la loi de Cauchy :")
print("* Valeur mesurée : A = {}".format(Amoy))
print("* Incertitude-type : u(A) = {}".format(u_A))
# Calcul de la valeur moyenne et de l'écart-type de B
Bmoy = np.mean(Bmc)
u_B = np.std(Bmc, ddof = 1)
print("Estimation du paramètre B de la loi de Cauchy :")
print("* Valeur mesurée : B = {}".format(Bmoy))
print("* Incertitude-type : u(B) = {}".format(u_B))

Le programme retourne :
```



Estimation du paramètre A de la loi de Cauchy :

* Valeur mesurée : $A = 1.6844428992429576$

* Incertitude-type : $u(A) = 0.00018748871962907728$

Estimation du paramètre B de la loi de Cauchy :

* Valeur mesurée : $B = 14998.10982295686$

* Incertitude-type : $u(B) = 44.34945521988488$

Conclusion : avec un CS pour l'incertitude, on écrira :

Le verre du prisme étudié suit la loi de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec

$A = 1,6844 \pm 0,0002$ (sans unité) mais comme il y a seulement 4 CS pour les longueurs d'onde...

$A = 1,684 \pm 0,001$ (on majore l'incertitude)

$B = (1,500 \pm 0,005) \times 10^3 \text{ nm}^{-2}$ (attention à ne pas oublier les unités !!)

où les valeurs derrière les \pm désignent les incertitudes-types.

ANNEXE – Simuler un processus aléatoire avec Python

Mise en œuvre avec `numpy.random` (avec alias `rd`)

On utilise le sous-module `random` de la bibliothèque NumPy :

1. dans sa version la plus simple, l'expression `rd.uniform(x-a, x+a, N)` permet de créer un array de N valeurs tirées aléatoirement entre $x-a$ et $x+a$ et issues d'une distribution uniforme (autrement dit rectangulaire) ; ici x et a sont des scalaires ;
2. l'expression `X + rd.uniform(-a, +a, N)` permet de rajouter à X , un **numpy array de taille N** , un array de N valeurs tirées aléatoirement entre $-a$ et $+a$ issues d'une distribution uniforme ; cette expression permet de gérer le cas où on a un ensemble de N valeurs mesurées, auxquelles on rajoute des variables aléatoires uniformes ayant toute la même étendue a ;
3. l'expression `X + A * rd.uniform(-1, +1, N)` permet de gérer le cas où on a un ensemble de N différentes valeurs mesurées (représentées par l'array numpy X), auxquelles on rajoute des variables aléatoires issues de distributions uniformes de **différentes** étendues, contenues dans un array A ; ainsi peut-on prendre en compte le fait que la « précision » varie en fonction de la valeur de la lecture à l'appareil.
4. l'expression `rd.normal(loc=0.0, scale=1.0, size=None)` crée un array de taille `size` qu'on peut préciser (si on ne le précise pas on obtient un scalaire), contenant des valeurs tirées aléatoirement issues d'une **distribution gaussienne** d'espérance `loc` et d'écart-type `scale`. C'est ce qu'on utilise habituellement si on a un processus qu'on peut raisonnablement penser comme gaussien.
5. On peut adapter les points (2) et (3) au cas gaussien, en substituant `rd.normal` à `rd.uniform`.

BIBLIOGRAPHIE

Mesures et incertitudes au lycée, IREM, mai 2021

<https://eduscol.education.fr/document/7067/download>

http://sciences-physiques.ac-besancon.fr/wp-content/uploads/sites/3/Ressources_p%C3%A9dagogiques/PNF_Ressources_nationales/Mesures_et_incertitudes-VF.pdf

Complément pour le Bac - Terminale EDS PC, Belin 2020

<https://www.belin-education.com/sciences-lycee-2020>

Présentation de J. Vince et T. Rondepierre sur les incertitudes

<http://www.prof-vince.fr/MI/>

Mesures et incertitudes, M. Champion

<https://mchampion.fr/Formations/incertitude>

