TD 12 - Suites numériques 2

Ex 1 :

1) $u_{n+1} = 2u_n + 3$

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $v_n = u_n - \dfrac{3}{1-2} = u_n + 3$ On pose $v = (u_n + 3)_{n \in \mathbb{N}}$

Mq v est une suite géométrique de raison 2

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 2u_n + 3 + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \end{aligned}$$

donc $\boxed{v_{n+1} = 2 v_n}$

Ainsi v est une suite géométrique de raison 2 tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} v_0 = u_0 + 3 \\ v_n = 2^n v_0 = 2^n (u_0 + 3) \end{cases}$$

On a alors :

$u_n + 3 = 2^n (u_0 + 3)$

$\boxed{u_n = 2^n (u_0 + 3) - 3}$

Faire réciproque en remettant dans l'équation

Ou

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v = u + 3$

u vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n + 3$

$\Leftrightarrow$ v vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = 2v_n$

$\Leftrightarrow$ $u + 3$ est géométrique de raison 2

$\Leftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{K}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n + 3 = A \times 2^n$

$\Longleftrightarrow \exists A \in \mathbb{K}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = A \times 2^n - 3$

$S = \{ (A \times 2^n - 3)_{n \in \mathbb{N}}, A \in \mathbb{K} \}$

2) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$

On a $P = X^2 - 6X + 9$ le polynôme associé.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$

P a alors une racine double : $r_0 = \frac{6}{2} = 3$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{ ((An+B)3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A,B) \in \mathbb{C} \}}$$

3) $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

On a $P = X^2 + X + 1$ le polynôme associé

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$

Donc les solutions sont des suites réelles

P a alors deux racines complexes conjuguées : $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{ (A\cos(n\tfrac{2\pi}{3}) + B\sin(n\tfrac{2\pi}{3}))_{n \in \mathbb{N}}, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \}}$$

4) $u_{n+2} = 2\sin\theta \, u_{n+1} - u_n$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

On a $P = X^2 - 2\sin\theta X + 1$ le polynôme associé

$\Delta = (-2\sin\theta)^2 - 4 \times 1 = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta$

P a alors deux racines :

$r_1 = \frac{2\sin\theta + 2\cos\theta}{2}$ et $r_2 = \frac{2\sin\theta - 2\cos\theta}{2}$

$r_1 = \sin\theta + \cos\theta$ et $r_2 = \sin\theta - \cos\theta$

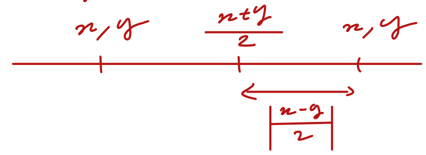
$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{ (A(\sin\theta + \cos\theta)^n + B(\sin\theta - \cos\theta)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \}}$$

Ex 2:

Soit u et v deux suites réelles convergentes de limites l_1 et l_2

Mq $w = (Max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

⊕ efficace / rapide



$Max(u, v) = \frac{u+v}{2} - \left|\frac{u-v}{2}\right|$

tend vers $\frac{l_1+l_2}{2} - \left|\frac{l_1-l_2}{2}\right|$

$= Max(l_1, l_2)$

Soit $\varepsilon > 0$

Par hyp :

$\begin{cases} \text{il existe } n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad |u_n - l_1| \leq \varepsilon \\ \text{il existe } n_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_2 \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon \end{cases}$

On pose $n_0 = Max(n_1 ; n_2)$

* Si $l = l_1 = l_2$

alors $\forall n \geq n_0 \quad l - \varepsilon \leq Max(u_n ; v_n) \leq l + \varepsilon$

Donc w converge

* Si $l_1 < l_2$

alors $\cancel{l_1 - \varepsilon \leq l_2 + \varepsilon}$ (en fixant $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2} \geq 0$)

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 \quad u_n < v_n$

~~D'où~~ $\cancel{\forall n \geq n_0 \quad l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon \leq l_2 - \varepsilon \leq v_n \leq l_2 + \varepsilon}$ $Max(u_n, v_n) = v_n$

~~Donc~~ $\cancel{\forall n \geq n_0 \quad Max(l_1, l_2) - \varepsilon \leq Max(u_n, v_n) \leq Max(l_1, l_2) + \varepsilon}$

Donc $\lim w = l_2$

Donc w converge

Oublie de $l_2 < l_1$ De même

Dans les ~~deux~~ 3 cas w converge.

Ex 3:

1) Mq par récurrence :

H(n) : " u est définie par $u_0 \geq -1$ "

. Initialisation : $u_0 = -1$

On a $1 + (-1) \geq 0$

donc $H(0)$ est vraie

FAUX

Trouver ens stable

. Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $H(n)$

Mq $H(n+1)$ l'est aussi

$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

Or d'après l'HR, u_n est bien définie

donc $u_n + 1 \geq 0$

Donc $H(n+1)$ est vraie

. Conclusion :

u est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $u_0 \geq -1$

2) ~~Si u converge vers l alors on passe à la limite~~

$x = \sqrt{1+x}$

$x^2 = 1+x$

$x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ pt fixe $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, définie sur $[-1 ; +\infty[$

On cherche x tq $x = \sqrt{1+x}$

Voir photo

$H(n)$: " $u_n \leq u_{n+1}$ et $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ "

. I : $u_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$u_0 \leq u_1 \iff \sqrt{1+u_0} \geq u_0$

. si $u_0 \leq 0$ alors $u_0 \leq u_1$

. si $u_0 \geq 0$ alors $u_0 \leq \sqrt{1+u_0} \iff u_0^2 \leq 1+u_0 \iff -u_0^2 + u_0 + 1 \geq 0$

$\iff \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq u_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc $u_0 \leq u_1$

. H: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $H(n)$ Mq $H(n+1)$ càd $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

On a $u_n \leq u_{n+1}$ $\quad$ $f \uparrow$ sur $[-1, +\infty[$

donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$

donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

et $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $f \uparrow$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc $u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi $u \uparrow$ et majorée donc elle cv

Notons l la limite

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

A la limite, $l = \sqrt{1+l}$

$$l^2 - l - 1 = 0$$

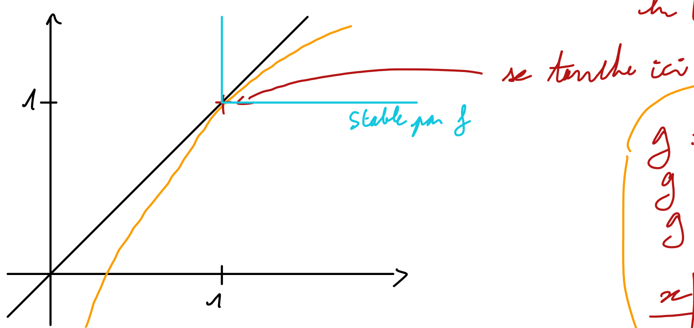
$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{car } l \geq 0$$

Ex 5:

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

On pose $f : x \mapsto 1 + \ln(x)$

Rq : $\ln(1+x) \leq x$
$\ln(y) \leq y - 1$



$g : x \mapsto \ln(x) - x$
$g \in D(\mathbb{R}^{+*})$
$g' : x \mapsto \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g \leq 0$

$[1; +\infty[$ est stable par f

En effet, si $x \geq 1$ alors $1 + \ln(x) \geq 1$

Donc, u est bien définie et minorée par 1

Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 1 + \ln(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$

donc u ↘ et minorée par 1

donc u cv

On note l la limite de u

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$

Ex 6 : Graphe

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$

$[-2;2]$ est stable par f

Donc u est correctement def.

- Supp $u_0 \geq 1$

Mq $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ↘ et min par 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $H(n)$: " $u_{2n} \geq 1$ et $u_{2n} \geq u_{2n+2}$ "

- I : $u_0 \geq 1$ par hyp

et $u_0 \geq u_2 \Leftrightarrow u_0 \geq \sqrt{2-\sqrt{2-u_0}} \geq 0$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-u_0} \geq 2 - u_0^2$

- Si $2-u_0^2 \leq 0$ alors $u_0 \geq u_2$

- Sinon $u_0 \geq u_2 \Leftrightarrow 2 - u_0 \geq (2-u_0^2)^2$) carré.

$\Leftrightarrow 0 \geq 2 + u_0 - 4u_0^2 + u_0^4$

$\Leftrightarrow 0 \geq (u_0 - 1)(u_0^3 + u_0^3 - 3u_0 - 2)$

$\Leftrightarrow 0 \geq (u_0-1)(u_0+2)(u_0^2 - u_0 - 1)$

$\Leftrightarrow 0 \geq \underbrace{(u_0-1)}_{\geq 0}\underbrace{(u_0+2)}_{\geq 0}\underbrace{\left(u_0 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}_{\leq 0}\underbrace{\left(u_0 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\geq 0}$

$u_0 \leq \sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ds tt les cas $u_0 \geq u_2$

. H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $H(n)$
Mq $H(n+1)$

On a d'après HR

$u_{2n} \geq 1$ et $u_{2n} \geq u_{2n+2}$

Or $f \searrow$ sur $[-2;2]$ et f laisse stable $[-2;2]$

Donc $f \circ f$ est $\nearrow$ sur $[-2;2]$
$f\circ f(u_{2n}) \geq 1$ et $f\circ f(u_{2n}) \geq f\circ f(u_{2n+2})$
On a alors $u_{2n+2} \geq 1$ et $u_{2n+2} \geq u_{2n+4}$
Donc $H(n+1)$
Ainsi u est $\searrow$ et min par 1

On note l sa limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{2n+2} = \sqrt{2-\sqrt{2-u_n}}$

Comme u est à valeurs ds $[-2;2]$, $l \in [-2;2]$

donc $\sqrt{2-\sqrt{2-u_n}} \to \sqrt{2-\sqrt{2-l}}$

Par unicité de la lim, on a,

$l = \sqrt{2-\sqrt{2-l}}$

$\sqrt{2-l} = 2-l^2$

$l \in \{1; \cancel{-2}; \cancel{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\}$

Comme $l \leq \sqrt{2}$ donc $l \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $l = 1$

Pour tt $n \in \mathbb{N}$ $u_{2n+1} = \sqrt{2-u_{2n}}$

Or $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

• Supp $u_0 \leq 1$ alors $2-u_0 \geq 1$ puis $u_1 \geq 1$

Donc $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 càd $\lim u = 1$

Ex 7:

3) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$

4) $\sin(2^{-n}) \sim 2^{-n}$

5) $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}_{=\sqrt{n}+\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}+o\sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}}}$

$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}$

6) $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[3]{n}\left(\underbrace{1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}_{\sim -\frac{1}{3n}}\right) \sim -\frac{\sqrt[3]{n}}{3n} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{n^{2/3}} \longrightarrow 0$

7) $(\underbrace{n-\ln n}_{\sim n})e^{-n} \sim ne^{-n}$

8) $\ln(\underbrace{n^2+2}_{\sim n^2}) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)$

$= \ln(n^2) + \underbrace{\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}_{=o(\ln(n^2))}$

$\sim \ln n^2 = 2\ln n$

9) $\ln(n\ln(n)) = \ln n + \ln(\ln n) = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n$

$\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$\ln(1+\ln$

Ex 9 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

Mq $\exists !\, u_n \in \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[: \tan u_n = n$

tan réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ dans $\mathbb{R}$

2) Mq $u_n \sim n\pi$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{\pi}{2} + n\pi < u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{n\pi}}_{\to 1} < \frac{u_n}{n\pi} < \underbrace{\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{n\pi}}_{\to 1}$$

Par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n\pi} = 1$$

Donc $u_n \sim n\pi$

3) Mq $u_n - n\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

tan 

4) Posons $w = \left(u_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

On a déjà $\lim w = 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \arctan n - \frac{\pi}{2}$

$= -\arctan \frac{1}{n}$

$\sim -\frac{1}{n}$

Ex 10 :

$u \searrow$

$u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

$u \searrow$ elle a une limite si $\lim u = -\infty$ alors $\lim u_{n+1} + u_n = -\infty$

Donc $\lim u \neq -\infty$

Ainsi u a une limite finie ℓ

Ainsi $u_{n+1} + u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\ell$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

donc $\ell = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$2u_n \leqslant u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underbrace{u_{n+1} + u_n}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant 2u_n \leqslant \underbrace{u_{n-1} + u_n}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}}$

Donc $\frac{u_{n+1} + u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{2u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{u_{n-1} + u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ $\to 1$ $\to 1$

Par encadrement : $\frac{2u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim 1$

Donc $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$