Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes (en précisant les intervalles d'étude) :

1. $y'(x)+y(x)=x^2+1.$
2. $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$
3. $y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=0.$
4. $y'(x)+\dfrac{1}{1-x}y(x)=-\dfrac{1}{x}.$
5. $y'-\dfrac{\cos x}{\sin x}y=-1$
6. $y'+2y=(3x^2+1)e^{-x}$
7. $y'-\dfrac{1}{2x}y=\sqrt{x}$
8. $y'-\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{-\ln x+1}{\ln x}$
9. $y'(x)+\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x)+\dfrac{1}{\sin(x)}=0.$
10. $y'-y\tan(x)+\cos^2(x)=0.$
11. $y'+\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{1}{2x(1-x)}$

Exercice 2 : Chercher les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y''(x)+y'(x)=3+2x.$
2. $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=e^x.$
3. $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=3x^2e^{2x}.$
4. $y''-4y'+4y=(x^3+x)e^{2x}$
5. $y''-2y'+(1-a)y=0$ avec $a\in\mathbb{R}$
6. $y''+y=e^{-|x|}$
7. $y''-6y'+9y=e^{3x}+\cos x$
8. $y''+2y'+5y=\mathrm{sh}x$
9. $y''+y=\cos^3 x$
10. $(1+x)^2y''+(1+x)y'=2$

Exercice 3 : Soit λ un réel et $L>0$.

1. Trouver les solutions de $y''+\lambda y=0$ s'annulant en 0 et L
2. Trouver les solutions de $y''+\lambda y=0$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

1. Soit a, b et c trois réels. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$(E)\ :\ ax^2y''+bxy'+cy=0$$
sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que si y est solution alors $z\ :\ t\mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
En déduire l'ensemble des solution de E sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Comment obtenir celle sur $\mathbb{R}^{-*}$?
2. Déterminer les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f'(x)=f\left(\frac{1}{4x}\right)$$
3. Déterminer les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Plus généralement, les équations de la forme $a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_0y=0$ peuvent se traiter de façon similaire en se ramenant à une équation différentielle à coefficients constants.

Exercice 5 :

1. Soit a et b continues sur un intervalle I et y solution de $y'+a(x)y^2+b(x)y=0$ ne s'annulant pas sur I.
Montrer que $z=\dfrac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.
2. Résoudre $y'=y-y^2$.
3. Résoudre $y'=(y-x)^2$.

Plus généralement, on appelle équation de Bernoulli une équation du type :
$$(B)\ :\ y'+a(x)y^m+b(x)y=0$$
où a et b sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et on pose, quand cela est possible, $z=y^{1-m}$.