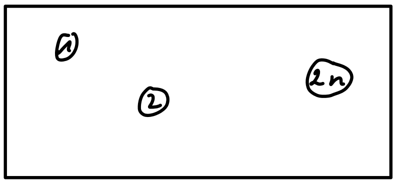
TD - Variables aléatoires

Ex 1 :

Exercice 1 :
Une boite contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire l'un des $2n$ numéros, et on a le droit de retirer un autre numéro (après avoir remis le premier dans la boite) si on trouve que le premier numéro tiré est trop petit.
On considère la variable aléatoire X égale au numéro de la première boule tirée dans le premier cas et au numéro de la deuxième boule tirée dans le deuxième cas.
Stratégiquement, on se fixe une barre $b \in [\![1, 2n]\!]$ telle que, si le premier numéro tiré est inférieur ou égal à b, on refait un deuxième tirage, sinon on se contente du premier numéro.

1. Calculer en fonction de b la probabilité de l'évènement $(X = k)$, en distinguant les cas où $k \leq b$ et $k > b$.
2. Calculer l'espérance de X. Comment choisir b pour que cette espérance soit maximale ? Interprétez.



On pioche et

- soit on garde le n° obtenu lorsqu'il est > b
- soit on remet la boule et on recommence

X le n° final

Loi de X ? → Donner valeur prise et proba de ces valeurs

$X(\Omega) = [\![1 ; 2n]\!]$

R_1 → résultat 1^{er} lancer

R_2 → résultat $2^{ème}$ lancer si existe

Soit $k \in [\![1, b]\!]$ $\quad P(X=k) = ?$

$$P(X = \overset{k}{1}) = P\big((R_1 \leq b) \cap (R_2 = \overset{k}{1})\big)$$

$$= P(R_1 \leq b)\, P(R_2 = \overset{k}{1} \mid R_1 \leq b)$$

$R_1 \sim \mathcal{U}[\![1 ; 2n]\!]$

Sachant que $R_1 \leq b$ $\quad R_2 \sim \mathcal{U}[\![1, 2n]\!]$

$$= \frac{b}{2n} \times \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{b}{(2n)^2}$$

Soit $k \in [\![b+1, 2n]\!]$

$$P(X=k) = P\Big((R_1 = k) \underset{\text{disjointe}}{\cup} \big((R_1 \leq b) \cap (R_2 = k) \big) \Big)$$

$$= P(R_1 = k) + P\big((R_1 \leq b) \cap (R_2 = k) \big)$$

$R_1 \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$

$$= \frac{1}{2n} + P(R_1 \leq b) \times P(R_2 = k \mid R_1 \leq b)$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{b}{2n} \times \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{b}{4n^2}$$

Vérif : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{b} \frac{b}{4n^2} + \sum_{k=b+1}^{2n} \left(\frac{1}{2n} + \frac{b}{4n^2} \right)$

$$= \frac{b^2}{4n^2} + (2n-b)\left(\frac{1}{2n} + \frac{b}{4n^2} \right)$$

$$= \frac{b^2 + (2n-b)(2n+b)}{4n^2}$$

$$= \frac{b^2 + 4n^2 - b^2}{4n^2} = 1$$

2) $\displaystyle E(X) = \sum_{k=1}^{2n} k\, P(X=k)$

$$= \sum_{k=1}^{b} k\, P(X=k) + \sum_{k=b+1}^{2n} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{b} k \times \frac{b}{4n^2} + \sum_{k=b+1}^{2n} k\left(\frac{1}{2n} + \frac{b}{4n^2} \right)$$

$$= \frac{b(b+1)}{2} \times \frac{b}{4n^2} + \frac{(2n-b)(2n+b+1)}{2}\left(\frac{1}{2n} + \frac{b}{4n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{8n^2}\Big(b^2(b+1) + (b+2n)(2n-b)(2n+b+1) \Big)$$

$$= \frac{1}{8n^2}\Big(b^2(b+1) + (4n^2 - b^2)(2n+b+1) \Big)$$

$$= \frac{1}{8n^2}\left(\left(1-2n-1\right)b^2 + 4n^2 b + 4n^2(2n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{8n^2}\left(-2nb^2 + 4n^2 b + 4n^2(2n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4n}\left(-b^2 + 2nb + 2n(2n+1)\right) = f(b)$$

$b = 0$ $\qquad \frac{1}{4n} \times 2n(2n+1) = \frac{2n+1}{2}$

$$f : t \mapsto \frac{1}{4n}\left(-t^2 + 2nt + 2n(2n+1)\right)$$

f maximale en $t = \frac{-2n}{-2} = n$

$$f(n) = \frac{1}{4n}\left(-n^2 + 2n^2 + 2n(2n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4n}\left(n^2 + 2n(2n+1)\right)$$

$$= \frac{2n+1}{2} + \frac{n}{4}$$

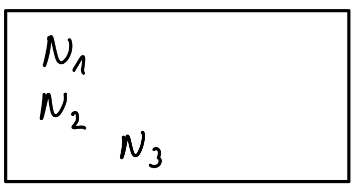
Ex 2 :

Exercice 2 : Lois multinomiales
Soit $(N_1, N_2, N_3) \in (\mathbb{N}^*)3$. On considère une urne contenant N_1 boules rouges, N_2 boules noires et N_3 boules blanches. On pose

$$N = N1 + N2 + N3,\ p_1 = \frac{N_1}{N},\ p_2 = \frac{N_2}{N} \text{ et } p_3 = \frac{N_3}{N}.$$

Soit n un entier. On effectue des tirages successifs avec remise de n boules dans cette urne. On note respectivement X, Y et Z le nombre de boules rouges, noires et blanches obtenues.

1. Définir la loi du triplé $(X; Y; Z)$.
2. Indiquer les lois suivies par les variables aléatoires X, Y, Z, $X+Y$, $X+Z$ et $Y+Z$.
3. En déduire les valeurs des espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$, ainsi que la matrice des variances-covariances du triplé $(X; Y; Z)$.
4. Combien vaut la variance de $X+Y+Z$?



1) $(X, Y, Z)(\Omega) = \{(n_1, n_2, n_3) \in [\![0, n]\!]^3$ tq $n_1 + n_2 + n_3 = n\}$

$= \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ tq $n_1 + n_2 + n_3 = n\}$

Soit $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ tq $n_1 + n_2 + n_3 = n$

$\boxed{n = 1}$

$P((X,Y,Z) = (1,0,0)) = p_1$

$P((X,Y,Z) = (0,1,0)) = p_2$

$P((X,Y,Z) = (0,0,1)) = p_3$

$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{\overbrace{n-n_1-n_2}^{n_3}}{n_3} = \dfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times n_2!(n-n_2$

choix de la 1ère place 2ème 3ème s'aligne

L'événement $(X,Y,Z) = (n_1, n_2, n_3)$ est l'union disjointe de $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$ éven disjoints de proba $p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3}$

$\underbrace{P((X,Y,Z) = (n_1, n_2, n_3))}_{\text{unions disjointes de } \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} \text{ éven de proba } p_1^n\, p_2^n\, p_3^n} = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3} \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$

n tirages successifs ind avec remise

$A =$ " que des tirages de la couleur 1 " $\qquad P(A) = p_1^n$

$A_k =$ " k tirages de la couleur 1

2)

- Loi de X : Y , Z

$\overset{Y\ Z}{X}(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$$P(\underset{Y\ Z}{X} = k) = \binom{n}{k} \underset{\substack{p_2 \\ p_3}}{p_1^{k}} (1-\underset{\substack{p_2 \\ p_3}}{p_1})^{n-k}$$

- Loi de X+Y

$(X+Y)(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$X + Y \leadsto B(n, p_1 + p_2)$

Rq :

$X \leadsto B(n, p)$

loi de $n-X \leadsto B(n, 1-p)$

car $(n-X)(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$$P(n-X=k) = P(X=n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k}$$

$$= \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

3) $E(X) = np_1$

$E(Y) = np_2$

$E(Z) = np_3$

4) $\begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(Y,X) & V(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(Z,X) & Cov(Z,Y) & V(Z) \end{pmatrix}$

$V(X_i) = np_i(1-p_i)$

$\hookrightarrow$ $X_2 = Y$ $\quad X_3 = Z$ $\quad X_1 = X$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

$$= E(X_1 X_2) - n^2 p_1 p_2$$

$$E(X_1 X_2) = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n} n_1 n_2 \underbrace{P((X_1, X_2) = (n_1, n_2))}_{=}$$

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n - n_1 - n_2)$$

$$= \sum_{\substack{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2 \\ \text{tq } n_1+n_2 \leq n}} n_1 n_2 \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, (n-n_1-n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2}$$

$$= \sum_{n_1=\cancel{0}\ 1}^{n} \sum_{n_2=\cancel{0}\ 1}^{n-n_1} \frac{n!}{(n_1-1)!(n_2-1)!(n-n_1-n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2}$$

$$= \ldots$$

$$= n(n-1) p_1 p_2$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{V(X_1+X_2) - V(X_1) - V(X_2)}{2}$$

$$V(\underbrace{X_1 + V_2 + V_3}_{}) = 0$$

car cst à n

Ex 3:

M̂ chose mais sans remise

$$(X_1, X_2, X_3)(\Omega) = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 : n_1 + n_2 + n_3 = n\}$$

Soit $(n_1, n_2, n_3) \in (X_1, X_2, X_3)(\Omega)$

$$P((X_1, X_2, X_3) = (n_1, n_2, n_3))$$

$$\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\binom{N_3}{n_3}}{\binom{N}{n}}$$

$$\sum_{\substack{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \\ \text{tq } n_1 + n_2 + n_3 = n}} \binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\binom{N_3}{n_3}$$

3) $P(X_2 = k \mid X_1 = i)$

$$= \frac{P(X_2 = k \cap X_1 = i)}{P(X_1 = i)}$$

$$= \frac{\binom{N_1}{i}\binom{N_2}{k}\binom{N_3}{n-i-k}}{\binom{N}{n}} \times \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N_1}{i}\binom{N_2 + N_3}{n-i}}$$

$$P(X = i) = \frac{\binom{N_1}{i}\binom{N_2 + N_3}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\binom{N_2}{k}\binom{N_3}{n-i-k}}{\binom{N_2 + N_3}{n-i}}$$

$(X_1(X_1 - 1))$

$$E(X_1) = \sum_{n_1 = 0}^{n} n_1 \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2 + N_3}{n - n_1}}{\binom{N}{n}}$$

$\times (n_1 - 1)$

$$= \cdots$$

$$= n p_1$$

$$E(X_1(X_1-1)) = \frac{1}{\binom{N}{n}} N_1(N_1-1) \sum_{n_1=2}^{n} \binom{N_1-2}{n_1-2}\binom{N_1+N_2}{n-n_1}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)}{N(N-1)} \times n(n-1)$$

$$= n(n-1)p_1 \frac{N_1-1}{N-1} + np_1 + (np_1)^2$$

$$= np_1\left((n-1)\frac{N_1-1}{N-1} + 1 + np_1\right)$$

$$= np_1\left(\frac{(n-1)(N_1-1) + N-1 + np_1(N-1)}{N-1}\right)$$

$$= \frac{np_1}{N-1}\left(-Np_1 - n + N + np_1\right)$$

$$= \frac{np_1}{N-1}(N-n)(1-p_1)$$

$$= np_1(1-p_1) \times \frac{N-n}{N-1}$$

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{V(X_1+X_2) - V(X_1) - V(X_2)}{2}$$

$$= \frac{V(X_3) - V(X_1) - V(X_2)}{2}$$

$$= \underbrace{-np_1p_2}_{Ex\ 3} \frac{N-n}{N-1}$$

Correctif

Ex4 :

$X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$

$n_1 + n_2 = n$

$0 \leqslant n_1 \leqslant Min(n, N_1)$

$0 \leqslant n_2 \leqslant Min(n, N_2)$

$$\underbrace{n - Min(n, N_2)}_{= Max(0,\, n-N_2)} \leqslant n - n_2 \leqslant n$$

$X(\Omega) = [\![Max(0, n-N_2), Min(n, N_1)]\!]$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$P(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N_1} k \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_1} N_1 \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{N_1}{\binom{N}{1}} \binom{N-1}{n-1} = n p_1 = n \frac{N_1}{N}$$

$X = \sum X_i$

$X_i \rightsquigarrow B(P(X_i = 1))$

$$P(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$$