Xhoffray
MS

Devoir surveillé n°3

Préliminaires

a) soit $k \in \mathbb{N}$ et f un endomorphisme de V

si $x \in \ker f^k$ alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ donc $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$

vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a donc bien le résultat voulu.

b) si on a $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![p, q-1]\!]$ $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ $q \geq p$ alors si $x \in \ker(f^{q+1})$, $f^{q+1}(x) = 0$

$= f^q(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker f^q = \ker f^{q-1}$ d'après ce que l'on vient de supposer donc $f^{q-1}(f(x)) = 0 = f^q(x)$. Ainsi $x \in \ker f^q$ et on trouve bien que $\ker f^q = \ker f^{q+1}$. C'est vrai pour tout $q \geq p$ et ainsi par récurrence on a montré que $\forall q \geq p$ $\ker f^q = \ker f^{q+1}$.

Si V est de dimension n finie étant donné que $\ker f^0 \subset \quad \subset \ker f^{k+1} \subset$ la suite $(\dim \ker(f^i))_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par n donc elle converge, et c'est une suite entière donc elle atteint sa limite. Ainsi il existe $q \leq n$ tel que $\forall n \geq n_0$ un certain rang $\dim \ker f^n = \dim \ker f^{n+1}$, c'est à dire $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ d'après a. On a en particulier que $\ker f^n = \ker f^{n+1}$.

c) soit $u \in \mathcal{L}(V)$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $u^q = 0$ alors $\ker f^q = E$ et $\ker f^{q+1} = E$ $= \ker f^q$ donc d'après b. $q \leq n$ et en particulier $\ker f^n = \ker f^q = E$ donc $u^n = 0$.

Première Partie

I/ Une caractérisation des sous espaces stables par g :

a) soit $n \in \mathbb{N}$ si $g \in E_n$ tel que $g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$ alors $g^3 = \lambda g + gD_n = \lambda g + D_n g$ et donc $gD_n = D_n g$

soit $P \in E_p = \ker(D_n)^{p+1}$ alors $D_n^{p+1} g(P) = g D_n^{p+1}(P) = g(0) = 0$ donc $g(P) \in E_p$ et E_p stable par g.

E_p est stable par g qui induit dans un endomorphisme $g_p = g|_{E_p}$ sur ce dernier.
Ainsi g_p^2 laisse également stable E_p et ainsi on a la relation :

$$g_p^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p$$

b) De la même manière si $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g^2 = \lambda Id_E + D$ dans :
$g^3 = \lambda g + gD = \lambda g + Dg$ et ainsi $gD = Dg$.
Puis $E_n = Ker(D)^{n+1}$ donc si $P \in E_n$ $D^{n+1}g(P) = gD^{n+1}(P) = 0$
donc $g(P) \in Ker D^{n+1} = E_n$. g laisse donc stable E_n tout comme g_n^2 et ainsi

$$g_n^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$$

c) i. si F sous espace de E de dimension $n+1$, si $P \in F$ dans $deg(P) \leq q$
Comme D laisse stable F, l'endomorphisme D_F a pour particularité que
$deg(D_F(P)) \leq q-1$. Et ainsi $D_F^{q+1} = 0$ donc D_F est nilpotent.
En particulier $Ker\, D_F^{n+1} = F$ car $q \leq n+1$ d'après les questions préliminaires.
Idem pour E_n où $D|_{E_n}$ est nilpotent d'ordre $n+1$ donc $Ker\, D|_{E_n}^{n+1} = E_n$.
On trouve donc, étant donné que $\dim F = \dim E_n$ que $E_n = F$.
Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc sans perte de généralité on peut dire que les sous espaces de E de dimension $k \in \mathbb{N}$ ~~sont~~ égaux à $E_k = \mathbb{R}_k[X]$.
Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$ E_n est stable par D, idem pour E qui est stable par D.

ii. si G est un sous espace de E si G est stable par g
$\iff \forall x \in G$ $g(x) \in G$ et $Dg(x) = gD(x) \in G \iff G$ stable par D.

II/ Une application immédiate, le cas $\lambda < 0$:
a) sur $\mathbb{R}_0[X]$, si $P \in E_0$ dans $D_0(P) = 0$ ainsi si on a g tel que
$g^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 = \lambda Id_{E_0}$ ainsi $\lambda \geq 0$

b) Supposons trouvé un tel endomorphisme g tel que $g^2 = \lambda Id_E + D$ $\lambda < 0$
dans d'après la question b de la partie précédente on aurait $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$
notamment $g_0^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 = \lambda Id_{E_0}$ ce qui est en contradiction avec ce que l'on a montré dans la question précédente de cette partie. Par un raisonnement complètement analogue pour E_n on obtient qu'il n'y a pas d'endomorphismes g de E ni de E_n vérifiant

$g^2 = \lambda Id \circ D$ est ce pour $\lambda < 0$.

III / Une représentation matricielle de D_n :

a) Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $f^n \neq 0$ et $f^{n+1} = 0$. Comme $f^n \neq 0$ il existe $y \in V$ tel que $y \notin \operatorname{Ker} f^n$ soit $(\lambda_0 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(y) = 0$ alors $f^n\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(y)\right) = f^n(0) = 0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^{n+i}(y) = \lambda_0 f^n(y)$ or $y \notin \operatorname{Ker} f^n$ donc $f^n(y) \neq 0$ et ainsi $\lambda_0 = 0$. En itérant ce procédé on trouve que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ donc que la famille est libre : $(y \ldots f^n(y))$. de plus son cardinal est égal à la dimension de V donc $(f^n(y) \ldots y)$ est une base de V, $B = (f^n(y) \ldots y)$

$$\operatorname{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A_0$$

b) D_n est nilpotent d'ordre $n+1$ donc E_n si l'on considère la famille $B_n = \left(1, X \ldots \frac{X^n}{n!}\right)$ c'est une famille de polynôme échelonné en degré donc libre et de cardinal $n+1$ donc c'est a fortiori une base de E_n et $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $(D_n(1) = 0)$

$D_n\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \frac{kX^{k-1}}{k!} = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$ donc $\operatorname{Mat}_{B_n} D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A_0$

et $\operatorname{Mat}_{B_n} \lambda Id_{E_n} \circ D_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} = A_\lambda$

IV / Un exemple

a) tout d'abord si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $h = a Id_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$ alors $hD_2 = aD_2 + bD_2^2 = D_2 h$ donc les endomorphismes de ce type commutent effectivement avec D_2. Supposons trouvé $g \in \mathcal{L}(E_2)$ tel que $gD_2 = D_2 g$ et h le même que précédemment :

$gh = ag + bgD_2 + cgD_2^2 = ag + bD_2 g + cD_2^2 g = hg$. Ainsi g commutant également avec h. Ainsi g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en h et comme D_2 est nilpotente d'ordre 3 sur E_2 g est un polynôme d'ordre plus petit ou égal à 2 en D_2, d'où le résultat attendu.

b) si $g = a\,Id_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$ dans $g^2 = a^2 Id_{E_2} + 2ab D_2 + (b^2+2ac) D_2^2$

Or g commutant avec D_2. Comme $\lambda \geq 0$ on peut prendre :

$g = \sqrt{\lambda}\, Id_{E_2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} D_2 - \frac{1}{8\lambda^{\frac{3}{2}}} D_2^2$. On a donc l'existence de tels endomorphismes

si on pose $B_2 = \left(1, x, \frac{x^2}{2}\right)$ $\quad Mat_{B_2}\, \lambda Id_{E_2} + D_2 = A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

donc les matrices G d'ordre 3 vérifiant $G^2 = A_1$ sont les

$G = I_2 + \frac{1}{2} Mat_{B_2} D_2 - \frac{1}{8} Mat_{B_2} D_2^2$ et $H = -I_2 - \frac{1}{2} Mat_{B_2} D_2 + \frac{1}{8} Mat_{B_2} D_2^2$

$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

I/ Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$:

a) Soit $n \geq 1$ et $g \in \mathcal{L}(E_n)$, $g^2 = D_n$, D_n est nilpotent d'ordre $n+1$

donc $g^{(2n+2)} = D_n^{n+1} = 0$ donc g est bien nilpotent, et $n \geq 1$ donc ~~Ker~~ $D_n = E_0$

b) si on a g endomorphisme de E_n tel que $g^2 = D_n$ dans étant donné que D_n est nilpotent d'ordre $n+1$ g l'est également d'ordre $2n+2$ ~~ce~~ qui est absurde or on a montré dans les questions préliminaires que l'ordre de nilpotence était inferieur ou égal à la dimension de l'espace, soit ici $n+1$.

Donc il n'existe pas de $g \in \mathcal{L}(E_n)$, $g^2 = D_n$

c) Supposons que c'est le cas dans E dans $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g^2 = D$ d'après la première partie, $\forall n$ g_n vérifie que $g_n^2 = D_n$ ce qui est en contradiction avec la question précédente, donc on a pas d'endomorphismes g de ~~E~~ vérifiant $g^2 = D$.

II/ Existence d'un endomorphisme g tel que $D^m = g^k$:

a) D_n est nilpotent d'ordre $n+1$ dans E_n à $n \in \mathbb{N}$ donc $D_n^{n+1} = 0$ et $Ker\, D_n^{n+1} = E_n$

alors $\forall P \in E_n$ il existe $x \in Ker\, D_n^{n+1}$ tel que $x = P$ (inutile)

On a clairement que $Im\, D \subset E$ et si $P \in E$ dans $P(x) = D\left(\int_0^x P(t)dt\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

et vrai pour tout $P \in E$ donc $Im\, D = E$. D est donc surjectif

Xhaffray
Nils

Devoir surveillé n°3

Deuxième partie

IV/ Existence d'un endomorphisme g tel que $D^m = g^k$

a) Comme $\operatorname{Im} g^k \subset \operatorname{Im} g^{k-1} \subset \dots \subset \operatorname{Im} g$ car si $k \in \mathbb{N}$ et $y \in \operatorname{Im} g^k$ on a $x \in V$ tel que $y = g^k(x) = g^{k-1}(g(x)) \in \operatorname{Im} g^{k-1}$.
donc si D surjectif et $g^k = D^m$, g est également surjectif ($\operatorname{Im} g = E$).

b) comme $\operatorname{Ker} D^m = E_{m-1}$ et que $\dim E_{m-1} = m$ donc $\ker D^m$ est de dimension m et $\operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker} D^m$ donc d'après les préliminaires $\ker g \subset \dots \subset \ker g^k$
donc $\dim \ker g \leq \dim \ker g^2 \leq \dots \leq \dim \ker g^k = m$
On a donc bien que pour tout $q \in [\![0,k]\!]$ $\dim \ker g^q < \infty$.

c) soit $(P,Q) \in \ker g^p$, ϕ est linéaire car g est un endomorphisme de E
donc $g|_{\ker g^p}^{~~\ker g^{p-1}~~}$ est linéaire. et $g^{p-1}(\phi(P)) = g^p(P) = 0$ de plus
$\operatorname{Ker} g^{p-1}$ est stable par g donc ϕ est une application de $\ker g^p$ dans $\ker g^{p-1}$, linéaire. ~~On a clairement que $\operatorname{Im} g^{p-1} \cap \ker \phi$~~ Si $P \in \ker \phi$ alors $P \in \ker g^p$ et $g(P) = 0 \iff P \in \operatorname{Im} g^{p-1} \cap \ker g^p$ donc $\ker \phi = \operatorname{Im} g^{p-1} \cap \ker g^p$
Si $Q \in \operatorname{Im} \phi$ alors il existe $P \in \ker g^p$ $Q = \phi(P) = g(P)$ donc $g^{p-1}(Q) = g^p(P) = 0$ et $\operatorname{Im} \phi \subset \ker g^{p-1}$. De même si $P \in \ker g^{p-1}$ alors comme $\ker g^{p-1} \subset \ker g^p$ $P \in \ker g^p$ (inutile) comme $\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$ sont de dimension finie et que $\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \ker g^p - \dim \ker \phi = \dim \ker g^p - \dim(\ker g^p \cap \operatorname{Im} g^{p-1}) = \dim \ker g^{p-1}$
donc $\operatorname{Im} \phi = \ker g^{p-1}$, ϕ est surjective.
$\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$ sont de dimension finie donc ϕ est injective donc bijective
et $\dim \ker g^p = \dim \ker g^{p-1}$ donc d'après la partie préliminaire si on se place dans E_n, $p \leq n$ et $\dim \ker g^p = p \dim \ker g$.

d) Comme dit il faut que l'ordre à partir duquel la suite des noyaux est stationnaire soit inférieur ou égal à n (dans E_n) alors il est nécessaire que $k \leq m$. Puis en se plaçant sur E si $k \leq m$ il existe au moins un endomorphisme vérifiant ce que l'on cherche.

$k \leq m$ est une condition nécessaire et suffisante (on prendra une application g polynomiale en D bien choisie) de l'existence d'un endomorphisme g de $\mathcal{L}(E)$ tel que $g^k = D^m$.
dans la question II.1.c $k > m$ donc il n'existe pas de tel endomorphisme.

Troisième partie

I/ Dérivée de l'application $t \mapsto (L_n(t))^k$:

a) il existe une base B_n définie à la question I.3.b telle que $\mathrm{mat}_{B_n} D_n = A_0$
ainsi $\mathrm{mat}_{B_n}(I_{E_n} + tD_n) = I_{n+1} + tA_0$ triangulaire supérieure et $\det(I_{n+1} + tD_n) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$
donc $I_{n+1} + tD_n$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$
Si $(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) D_n^k$ alors $(I_{n+1} + tD_n)(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = I_{n+1}$
$= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k(t) D_n^k + t a_k(t) D_n^{k+1}\right)$ alors

$$\begin{pmatrix} a_0(t) & ta_0(t)+a_1(t) & \cdots & ta_{n-1}(t)+a_n(t) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & ta_0(t)+a_1(t) \\ 0 & & 0 & a_0(t) \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $a_0(t) = 1$ et si $k \in [\![1, n]\!]$ $ta_{k-1}(t) + a_k(t) = 0$
donc $a_k(t) = -ta_{k-1}(t) = (-1)^k t^k = (-t)^{k-1} a_1(t) = (-t)^{k-1} \times (-t) \times a_0 = (-t)^k$.
donc $(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k (D_n)^k$ et c'est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) $t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est une application polynomiale en t donc dérivable
et sa dérivée est $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k t^{k-1} D_n^k = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k (k+1) D_n^{k+1}$
$= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k k D_n^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k D_n^{k+1} = -D_n \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k k D_n^k + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \right)$

c) Comme D_n^{n+1} est nulle et $t \in \mathbb{R}$ quelconque : $L_n(t)^{n+1}$ est un polynôme en D_n, dont la plus petite puissance apparaissant est D_n^{n+1} donc $L_n(t)^{n+1} = 0$ et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) $\frac{d}{dt} L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} D_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k D_n^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k D_n^{k+1}$
$= (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n$

Ainsi $\frac{d^k}{dt^k} L_n(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n = (-1)^k D_n^k \left(\sum_{k=1}^{k-1} L_n(kt) + [illegible] (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \right)$

$$\frac{d^k}{dt^k} L_n(t) = (-1)^{k-1} D_n^k \left(\sum_{i=1}^{k} L_n(it) \quad d(I_{n+1} + D_n)^{-1} \right)$$

II / Matrice $\varphi_u(t)$:

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi_{u+v}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} L_n(t)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sum_{i=0}^{k} u^i v^{k-i} \binom{k}{i}}{k!} L_n(t)^k \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{u^i v^{k-i}}{i!\,(k-i)!} L_n(t)^k \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{u^i}{i!} L_n(t)^i \sum_{k=i}^{n} \frac{v^{k-i}}{(k-i)!} L_n(t)^{k-i} \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{u^i}{i!} L_n(t)^i \sum_{p=0}^{n} \frac{v^p}{p!} L_n(t)^p \right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{u^i}{i!} L_n(t)^i \right) \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{v^p}{p!} L_n(t)^p \right) = \varphi_u(t)\, \varphi_v(t).$$

b) $t \mapsto L_n(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable comme polynôme de fonction qui le sont.

Et $\varphi_u'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \frac{d}{dt}\left(L_n(t)^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k!} k \left(\frac{d}{dt} L_n(t)\right) L_n(t)^{k-1}$

$$= u\,(I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} L_n(t)^{k-1} = u\,(I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n\, \varphi_u(t)$$

c) Si $u = 1$ donc pour tout t $\varphi_1'(t) = (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n\, \varphi_1(t)$