Transformée de Laplace

I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

Toutes les fonctions f considérées sont continuse de I dans $\mathbb{C}$ et intégrable sur $]0, 1]$.

On note $A(f)$ l'ensemble des réels x tels que la fonction $t \to f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur I.

On pose pour un tel x ,

$$L(f)(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

La fonction $L(f)$ s'appelle transformée de Laplace de f.

Première partie : Propriétés de $A(f)$. Premiers exemples.

1. Lorsque $A(f)$ est non vide on note $\alpha(f)$ sa borne inférieure (éventuellement égale à -∞).

   Montrer que tout si $a \in A(f)$ alors $[a, \infty[\subset A(f)$

   Il en résulte facilement et nous l'admettrons que $A(f)$ est l'un des deux intervalles $[\alpha(f), +\infty[$ et $]\alpha(f), +\infty[$.

2. Calculer $A(f)$ et $\alpha(f)$ dans les exemples suivants :$f(t) = e^{-t^2}$, $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $f(t) = e^{at} (a \in \mathbb{C})$.
3. Dans le dernier exemple calculer $L(f)$. En déduire la transformée de Laplace des fonctions $\sin$ et $\cos$.

Deuxième partie : Propriétés de $L(f)$

1. Continuité, limites.
   (a) Montrer que $f(t)e^{-xt}$ est dominée par une fonction intégrable , sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ inclus dans $A(f)$.

   (b) En déduire que $L(f)$ est continue

   (c) Déterminer la limite en $+\infty$ de $L(f)$

2. Comportement aux bornes.
   Dans cette question on suppose que f possède une limite finie en 0 et en $+\infty$.On note l et l' ces limites.

   (a) Montrer que $]0, +\infty[\subset A(f)$.

   (b) Si $l \neq 0$, démontrer $L(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{l}{x}$.

   (c) Par une méthode analogue, étudier le comportement quand $x \to 0$ lorsque l' est non nulle.

   (d) Donner une condition suffisante sur f pour que $L(f)$ ait une limite finie en zéro.

3. Dérivation.
   (a) On note $f_1 : t \to tf(t)$. Démontrer que pour tout $a > \alpha(f)$, l'intégrale $L(f_1)(a)$ est bien convergente.
   indication : on choisira $\alpha(f) < b < a$ et on utilisera la définition de $\alpha(f)$

   (b) Démontrer que $L(f)$ est de classe C^1 sur $]\alpha(f), +\infty[$ et que $L(f)' = -L(f_1)$.

   (c) Démontrer enfin que $L(f)$ est une fonction de classe C^{∞} sur $]\alpha(f), +\infty[$

4. Transformée d'une dérivée.

   Dans cette question on suppose que f est de classe C^1 et que $\forall x \in A(f), f(t)e^{-xt} \to 0$ quand $t \to \infty$.
   Montrer que sur $A(f) \cap A(f')$ on a $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$.

5. Développement en série entière.

   Soit $a > \alpha(f)$.
   Démontrer qu'il existe des coefficients (b_n) que l'on exprimera à l'aide de f, tels que l'on ait, pour $|h| < a - \alpha(f)$ l'égalité :

$$L(f)(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^n$$

   On dit que $L(f)$ est développable en série entière.

6. Transformée de Laplace d'une série entière.

   Soit (a_n) une suite complexe, on note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$. On suppose R non nul.
   Autrement dit on suppose que la série converge absolument pour tout x positif plus petit que R

   (a) soit $r < R$. Démontrer qu'il existe un réel M (dépendant de r) tel que pour tout n on ait $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$

   (b) Montrer que la fonction $f(t) = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

   (c) Montrer que $\alpha(f) \leq R$ et donner l'expression de $L(f)$ comme somme d'une série sur $]R, +\infty[$.

Troisième partie : Applications.

1. Calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
   Soit $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$.

   (a) Calculer $L(f)''(x)$.

   (b) En utilisant le comportement en $+\infty$ de $L(f)'$ et $L(f)$ déterminer l'expression de $L(f)'$ puis de $L(f)$ sur $]0, = \infty[$.

   (c) Montrer $L(f)(0) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et conclure.

2. Une application aux équations différentielles.

   Il est admis que la transformation de Laplace est injective. Autrement dit deux fonctions distinctes ont des transformées de Laplace différentes.

   (a) Soit a un réel. Trouver une fonction dont la transformée de Laplace est $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$.

   (b) En déduire une fonction dont la tranformée de Laplace est $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$. (on utilisera la deuxième partie)

   (c) On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^t + t$. Soit f la solution vérifiant les conditions $f(0) = f'(0) = 0$. Trouver la tranformée de Laplace de f. En déduire f