Équivalents

Olivier SELLÈS, transcrit par Denis MERIGOUX

Table des matières

1 Négligeabilité, domination

1.1 Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$.

Domination

On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on écrit $f \underset{a}{=} (g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x)$ s'il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\omega : U \cap D \longrightarrow \mathbb{K}$ bornée telle que $\forall x \in U \cap D$, $f(x) = \omega(x) g(x)$.

Négligeabilité

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on écrit $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\, g(x)$ s'il existe $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et une fonction $\varepsilon : U \cap D \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in U \cap D$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ [a].

[a] Il n'est pas ici nécessaire de rappeler la pagaïe qui ponctua cette partie du cours en raison de blagues sulfureuses, et à laquelle M. Sellès mit fin d'un ton sans appel : « *Quelle bande de tartiflettes !* »

Remarques

- Les notations $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f \underset{a}{=} (g)$ peuvent induire en erreur [a] car ce ne sont pas de vraies égalité entre fonctions.
- $f \underset{a}{=} (0)$ signifie que $f(x) = 0$ au voisinage de a. Ceci ne se produit JAMAIS sauf cas trivial.
- De même, à moins que f soit nulle au voisinage de a, on n'a pas $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(0)$.
- $f \underset{a}{=} (1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a. C'est notamment le cas si f admet une limite finie en a.
- $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$ signifie que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

1.2 Étude de différents cas de domination ou négligeabilité

1.2.1 Cas des suites

Soient $a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, On a $a_n \underset{+\infty}{=} (b_n)$ signifie que l'on peut écrire pour n assez grand $a_n = \omega_n b_n$ avec ω bornée. De même, $a_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n)$ signifie qu'on a pour a assez grand $a_n = \varepsilon_n b_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.2.2 Cas sympathiques

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.
1$^{\text{er}}$ cas : Si $a \notin D$, on suppose $g \neq 0$ au voisinage de a : $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_1 \cap D$, $g(t) \neq 0$.
2$^{\text{ème}}$ cas : Si $a \in D$, on suppose :

(1) f et g continues en a.

(2) $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_1 \cap D \setminus \{a\}$, $g(t) \neq 0$ et $f(a) = 0$.

Alors
$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\, g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Les hypothèses sur g font que $\dfrac{f}{g}$ est bien défini au voisinage de a (privé de a).

[a] Et non pas nous « *enduire d'erreur* » comme des petits plaisantins pourraient le faire remarquer.

Démonstration

$\Rightarrow$ Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\, g(x)$, on a, au voisinage de a, $f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. D'où, pour $x \in D\setminus\{a\}$ voisin de a,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

$\Leftarrow$ – Cas 1 : Soit $U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_1 \cap D$, $g(t) \neq 0$. On pose $\varepsilon(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ pour $t \in U_1 \cap D$. On a bien $\forall t \in U_1 \cap D$, $f(t) = \varepsilon(t)\, g(t)$ et $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$.

– Cas 2 : Soit $U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_1 \cap D$, $g(t) \neq 0$. On pose

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = a \\ \frac{f(t)}{g(t)} & \text{si } t \in U_1 \cap D\setminus\{a\} \end{cases}$$

On a bien $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$ et $\forall t \in U_1 \cap D$, $f(t) = \varepsilon(t)\, g(t)$ y compris pour $t = a$.

Application

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$.
- $\forall \alpha > 0$, $x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^x\right)$ et $\ln(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$, $\ln(x) \underset{0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\mathrm{e}^x \underset{-\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.2.3 Propriétés

- $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} (g)$.
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \\ g \underset{a}{=} (h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} (g) \\ g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \\ g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} (g) \\ g \underset{a}{=} (h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{=} (h)$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \\ \varphi \underset{a}{=} (\psi) \end{cases} \Rightarrow f\varphi \underset{a}{=} \mathrm{o}(g\psi)$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \\ \varphi \underset{a}{=} \mathrm{o}(\psi) \end{cases} \Rightarrow f\varphi \underset{a}{=} \mathrm{o}(g\psi)$
- Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\, g(x)$ et prenons $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $b \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Delta)$ avec $\varphi(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, alors
$$f \circ \varphi(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}\, g \circ \varphi(t)$$
- $\begin{cases} f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h) \\ g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h) \end{cases} \Rightarrow \alpha f + g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$

2 Fonctions équivalentes

2.1 Faits de base

2.1.1 Définition

Soient $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\varphi : U \cap D \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et, $\forall x \in U \cap D$, $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$.
On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

2.1.2 Remarques

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a[a].
-
$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$$
En effet, si $f \underset{a}{\sim} g$, soit $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ et $\varphi : U \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ sur $U \cap D$. $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ donc $\exists U_1 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a) / \forall x \in U_1 \cap D$, $|\varphi(x) - 1| \leqslant \frac{1}{2}$ d'où $|\varphi(x)| \geqslant \frac{1}{2}$. Avec $U' = U_1 \cap U$, $\forall x \in U' \cap D$, $\varphi(x) \neq 0$ et $\dfrac{1}{\varphi(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)} f(x)$.
- Il est clair que $f \underset{a}{\sim} f$ et $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g \underset{a}{\sim} h \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$; $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$. On dira alors indifféremment que f est équivalente à g au voisinage de a ou que f et g sont équivalentes au voisinage de a.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, on peut au voisinage de a écrire $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ avec $\varphi(x) \neq 0$. f et g s'annulent simultanément au voisinage de a. Mieux, elles sont de même signe au voisinage de a car $\varphi(x) > 0$.

2.1.3 Caractérisation de l'équivalence avec la négligeabilité

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow fg \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$$

$\Rightarrow$ Au voisinage de a,$f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ avec $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. D'où $f(x)\, g(x) = (\varphi(x) - 1)\, g(x)$ avec $\varphi(x) - 1 \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$\Leftarrow$ Au voisinage de a, $f(x)\, g(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ d'où $f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x)$ avec $1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$

2.2 Cas sympathiques

(1) $a \notin D$ et au voisinage de a, $g(x) \neq 0$. Alors
$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

(2) $a \in D$, g ne s'annule par au voisinage de a (ou uniquement en a), f et g sont continues en a et $f(a) = g(a)$. Alors
$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x\to a \\ x\in D\setminus\{a\}}]{} 1$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Au voisinage de a, on a $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ avec $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq a$. Donc pour $x \in D \setminus \{a\}$ au voisinage de a,
$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

$\Leftarrow$ Soit $U \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in U \cap (D \setminus \{a\})$. On pose $\varphi(a) = 1$ et, $\forall x \in U \cap D$, $x \neq a$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. On a alors $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et $\forall x \in U \cap D$, $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$, même pour $x = a$[b].

---

a. En pratique cela n'arrive JAMAIS : « *Si jamais vous trouvez ça, une alarme doit retentir dans votre tête : attention, connerie en cours !* ».

b. C'est alors que M. Sellès se lança dans une diatribe virulente à destination des choux de bruxelles, salades frisées, potirons, potimarrons, endives, pois cassés, chevaux, dauphins, produits Yves Rocher, chanteurs de variété dont le nom est Christophe, et bien d'autres ennemis héréditaires de l'homme moderne et libéré. Ses prises de postions courageuses resteront à jamais présentes dans la mémoire collective de la communauté des MPSI 2 passés, présents et futurs. « *J'assume mes choix, le potiron c'est pas bon. Et si le syndicat du potiron vient me voir, je l'attend de pied ferme !* ».

Exemples d'utilisation

- Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{K}^*$ ($l \neq 0$). Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$.
- Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de x_0 :
$$f(x) - f(x_0) \underset{x\to a}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$
- Soit une fonction polynômiale
$$P(x) = \alpha x^j + \sum_{k=j+1}^{m-1} x^k a_k + \beta x^m \qquad (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^*$$
Alors $P \underset{\infty}{\sim} \beta x^m$ et $P \underset{0}{\sim} \alpha j^j$.

2.3 Équivalents usuels

$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$\cos x \underset{0}{\sim} 1$	$\tan x \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\arcsin x \underset{0}{\sim} x$
$\arccos x \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$	$\arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{0}{\sim} -x$	$\arctan x \underset{0}{\sim} x$	$\sinh x \underset{0}{\sim} x$
	$\cosh x \underset{0}{\sim} 1$	$\cosh x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	

2.4 Propriétés des équivalents

2.4.1 Propriété fondamentale

On suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{K}$. Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Démonstration Au voisinage de a, $f(x) = \varphi(x) g(x)$ avec $\varphi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, d'où le résultat d'après les théorèmes généraux.

2.4.2 Opérations

Produit Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, alors $fh \underset{a}{\sim} gk$. Si de plus h et k ne sont pas nulles au voisinage de a, alors $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{k}$.

Piège ! Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, on a pas forcément $f + h \underset{a}{\sim} g + k$. Par contre, si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{=} o(f)$, alors $f + h \underset{a}{\sim} g$.

2.4.3 Composition

Composition à droite

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et $\omega : \Delta \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$, $b \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Delta)$. On suppose que $\omega(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$, alors $f \circ \omega(x) \underset{a}{\sim} g \circ \omega(x)$.

Piège ! Il n'existe pas de théorème général sur la composition à gauche !

Cas particuliers de composition à droite

(1) Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, on suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \{0, +\infty\}$ [a]. Alors $\ln f(x) \underset{a}{\sim} \ln g(x)$.
En effet, au voisinage de x, $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ avec $\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \varphi(x) + \ln g(x) \\ &= \left(1 + \frac{\ln \varphi(x)}{\ln g(x)}\right) \ln g(x) \end{aligned}$$

Or $\ln \varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $\ln g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ donc $1 + \dfrac{\ln \varphi(x)}{\ln g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln f(x) \underset{a}{\sim} \ln g(x)$.

(2) Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
En effet, au voisinage de a, $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$ avec $\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ d'où $f(x)^\alpha = \varphi(x)^\alpha\, g(x)^{\alpha\,\hat{}}$ et $\varphi(x)^\alpha \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

a. À la rigueur n'importe quel réel marche mais SURTOUT PAS 1.