Lycée Buffon
MPSI

TD 19
Année 2020-2021

Espaces vectoriels

Exercice 1 : Les ensembles suivant sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble des suites réelles convergentes vers 0.
3. L'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
4. L'ensemble des suites réelles bornées.
5. L'ensemble des suites réelles croissantes.
6. L'ensemble des suites réelles monotones.
7. L'ensemble des suites réelles non convergentes.
8. L'ensemble des suites réelles périodiques à partir d'un certain rang.
9. L'ensemble des suites arithmétiques.
10. L'ensemble des suites géométriques.
11. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
13. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur β en α.

Exercice 2 : On définit les sous-ensembles

$$F=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E \mid \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{2n}=u_{2n+1}\right\} \text{ et } G=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E \mid \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{2n}=0\right\}$$

1. Montrer que F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Prouver que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3 : Vérifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. En trouver un supplémentaire.

1. $E=\left\{f\in\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)\ :\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$
2. $E=\left\{f\in\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)\ :\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0 \text{ et } f(0)=0\right\}$
3. $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)\ :\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\,,\ f(0)=0 \text{ et } f'(0)=0\right\}$
4. $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+y+z+t=0\right\}$
5. $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-y+2z=y+z=0\right\}$
6. L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
7. $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ :\ f'+2f=0\right\}$

Exercice 4 : Déterminer si les familles suivantes sont libres.

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $e_1=(1,0,1)$ et $e_2=(1,2,0)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(1,2,0)$, $e_3=(1,1,0)$ et $e_4=(1,0,0)$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$: $e_1=(1,0,1,0)$, $e_2=(1,2,0,2)$, $e_3=(1,1,0,1)$ et $e_4=(1,0,0,3)$.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f_1\ :\ x\mapsto\cos x$, $f_2\ :\ x\mapsto\sin x$ et $f_3\ :\ x\mapsto 1$.

Exercice 5 : Déterminer une base des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :

1. $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ :\ x+y+z+t=0\right\}$
2. $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-y+2z=y+z=0\right\}$
3. L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
4. $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\ :\ P(2)=0\}$
5. $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ :\ f'+2f=0\right\}$

Exercice 6 : Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où pour $a\in\mathbb{R}, f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{ax}$.
2. $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où pour $a\in\mathbb{R}, g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto |x-a|$.
3. $(h_a)_{a\in\mathbb{R}^+}$ où pour $a\in\mathbb{R}, h_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \cos(ax)$.