

Pense-bête : analyse

21 mai 2013

Sommaire

1	Formulaire	1
2	Séries numériques	2
3	Espaces vectoriels normés	3
4	Intégrales impropres	3
5	Suites et séries d'intégrales	4
6	Suites et séries de fonctions	4
7	Intégrales à paramètre	5
8	Séries entières	6
9	Séries de Fourier	7
10	Équations différentielles linéaires	8
11	Calcul différentiel	9
12	Équations différentielles ordinaires	10
13	Lemmes et résultats divers	11

Dans toute la suite, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} et sans plus de précisions, I est un intervalle de \mathbf{R} .

1 Formulaire

□ **Proposition** [*Relations usuelles*] – On a les relations de convexité suivantes :

Formule	Domaine de validité
$\sin x \leq x$	\mathbf{R}_+
$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$e^x \geq x + 1$	\mathbf{R}
$\ln x \leq x - 1$	\mathbf{R}_+^*
$\tan x \leq x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$ \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{ x - y }$	$(\mathbf{R}_+)^2$
$ ab \leq \frac{1}{2}(a ^2 + b ^2)$	\mathbf{C}^2

□ **Proposition** [*Trigonométrie*] – Toutes les formules suivantes sont valables sur tout domaine où les fonctions en jeu sont définies, et on pose $u = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$	$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$	$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$	$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\sin a = \frac{2u}{1 + u^2}$	$\cos a = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

□ **Théorème** [*Formules de Taylor*] – Soit $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ de classe \mathcal{C}^n . Alors on a les formules suivantes :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad \text{Taylor reste intégral}$$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty \quad \text{Taylor-Lagrange}$$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n) \quad \text{Taylor-Young}$$

□ **Proposition** [*Primitives usuelles*] – Voici quelques primitives usuelles dont l'usage est courant, en particulier chez nos amis de Centrale. I est un intervalle de \mathbf{R} .

Primitive	Domaine de validité
$\int \frac{dt}{t-a-ib} = \ln x-a-ib + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)$	\mathbf{R} , avec $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$
$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right $	$\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$
$\int \tan t \, dt = -\ln \cos x $	$\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$
$\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right $	I ne contenant pas $\pm a$
$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$	\mathbf{R}
$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \operatorname{Argsh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$	\mathbf{R}
$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$	$] - a , a [$
$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \operatorname{Argch}\left \frac{x}{a}\right $	I ne contenant pas $ a $

2 Séries numériques

□ **Définition** [*Convergences*] – Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

- (1) On dit que la série de terme général (u_n) converge si la suite de terme général $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.
- (2) On dit que la série de terme général (u_n) converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)$ converge.

□ **Théorème** [*Comparaison avec une intégrale*] – Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux décroissante. Alors la série de terme général $(f(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

□ **Théorème** [*Séries de Riemann*] – Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

□ **Théorème** [*Séries de Bertrand*] – Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, la série de terme général

$$\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)_{n \geq 2} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

□ **Proposition** [*Règles de convergence*] – Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs.

- Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$, alors la série de terme général (u_n) converge si la série de terme général (v_n) converge et la série de terme général (v_n) diverge si la série de terme général (u_n) diverge.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries ont même nature (convergence ou divergence).

□ **Théorème** [*Règle de d'Alembert*] – Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty].$$

- Si $\ell < 1$, la série de terme général (u_n) converge.
- Si $\ell > 1$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

□ **Théorème** [*Règle de Riemann*] – Soit (u_n) une suite de réels positifs.

- (1) Si la suite (nu_n) admet une limite non nulle en $+\infty$, alors la série de terme général u_n diverge.
- (2) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ admet une limite finie en $+\infty$, alors la série de terme général (u_n) converge.

□ **Théorème** [*Critère de Leibniz*] – Soit (a_n) une suite de réels positifs qui décroît vers 0. Alors la série de terme général $((-1)^n a_n)$ converge, et pour tout $N \in \mathbf{N}$, le reste $R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n$ est du signe de son premier terme et vérifie

$$0 \leq (-1)^N R_N \leq a_N.$$

□ **Théorème** [*Fubini et suites doubles*] – Soit $(u_{n,m})_{n,m \in \mathbf{N}^2}$ une suite double telle que :

- (1) $\forall n \in \mathbf{N}$, la série de terme général $(|u_{n,m}|)_{m \in \mathbf{N}}$ converge ;
- (2) la série de terme général $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}|\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Alors toutes les séries qui suivent sont absolument convergentes et on peut intervertir les sommations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}.$$

□ **Théorème** [*Produit de Cauchy de séries*] – Si les séries réelles ou complexes (u_n) et (v_n) sont absolument convergentes, alors la série produit de terme général $\left(c_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}\right)$ est aussi absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right).$$

□ **Proposition**^{HP} [*Raabe-Duhamel*] – Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose avoir le développement asymptotique suivant :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \varepsilon_n,$$

où ε_n est le terme général d'une série convergente. Alors il existe $c > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} cn^\alpha$.

[Indication : on veut montrer que la suite $(u_n = a_n n^{-\alpha})$ converge. Pour cela, passer au logarithme et étudier la série de terme général $(u_n - u_{n-1})$.]

3 Espaces vectoriels normés

□ **Définition** [*Norme*] – Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel, une norme est une application $N : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- (1) (positivité) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$;
- (2) (séparation) $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- (3) (homogénéité) $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall x \in E, N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$;
- (4) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

□ **Lemme** [*Construction de normes*] – Si N est une norme et f une application linéaire injective, alors $N \circ f$ est une norme.

□ **Définition**^{HP} [*Distance*] – On appelle distance sur un ensemble X non-vidé une application $d : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

- (1) (positivité) $\forall x \in X, d(x, x) \geq 0$;
- (2) (séparation) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- (3) (symétrie) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
- (4) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

□ **Théorème** [*Continuité des applications linéaires*] – Soit $(E, |||_E)$ et $(F, |||_F)$ deux \mathbf{K} -espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est continue sur E ;

(2) f est continue en 0_E ;

(3) f est lipschitzienne;

(4) $\exists C > 0$ telle que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.

□ **Théorème**^{HP} [*Point fixe contractant*] – Soit (X, d) un espace métrique complet non-vidé, $f : X \longrightarrow X$ contractante, c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$. Alors :

(1) il existe un unique $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = x_0$;

(2) $\forall a \in X$, la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0

[Indication : montrer que (u_n) est de Cauchy.]

□ **Proposition** [*Exponentielle*] – Soit A une \mathbf{K} -algèbre de Banach. $\forall a \in A$, la série de terme général $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ converge absolument (d'Alembert) et on définit l'exponentielle par

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

On a aussi les propriétés suivantes :

- (1) si a et b commutent, alors $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) = \exp(b) \exp(a)$;
- (2) pour $a \in A$, $\varphi : t \in (\mathbf{K}, +) \longmapsto \exp(ta) \in (A^*, \times)$ est un morphisme de groupes \mathcal{C}^∞ et $\forall t \in \mathbf{K}, \varphi'(t) = a \exp(ta) = \exp(ta)a$.

□ **Théorème** [*Équivalence de normes en dimension finie*] – Toutes les normes d'un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

□ **Définition** [*Connexité par arcs*] – Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est connexe par arcs si $\forall a, b \in X, \exists \varphi : [0, 1] \longrightarrow X$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

□ **Proposition**^{HP} [*Composantes connexes*] – Soit (X, d) un espace métrique, on munit X de la relation binaire $\forall (a, b) \in X^2, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists \varphi : [0, 1] \longrightarrow X$ continue telle que $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$. Alors \mathcal{R} est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence de \mathcal{R} sont les composantes connexes de X .

4 Intégrales impropres

□ **Définition** [*Convergence, intégrabilité, semi-convergence*] – Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux.

(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{\leftarrow b} f$ est convergente si l'expression $\int_a^x f$ admet une limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures.

(2) On dit que f est intégrable en b si $\int_a^{\leftarrow b} |f|$ est convergente.

(3) On dit que $\int_a^{\leftarrow b} f$ est semi-convergente si l'intégrale converge et si f n'est pas intégrable en b .

□ **Théorème [Règle de Riemann]** – Soit $f : [a, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux positive.

(1) Si $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in]0, +\infty]$ non-nulle, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$ et

$$\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

(2) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \mu \in [0, +\infty[$ finie, alors f est intégrable en $+\infty$.

□ **Proposition [Convergence de l'intégrale et limite]** – Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$, alors $\ell = 0$.

□ **Théorème [Changement de variable]** – Un changement de variable \mathcal{C}^1 -difféomorphisme ne change ni la nature ni la valeur d'une intégrale impropre.

5 Suites et séries d'intégrales

□ **Théorème [Convergence dominée]** – Soit I un intervalle de \mathbf{R} , (f_n) une suite d'applications de I dans \mathbf{C} et $g : I \rightarrow \mathbf{C}$. On suppose que :

- (1) les f_n et g sont continues par morceaux sur I ;
- (2) (f_n) converge simplement vers g sur I ;
- (3) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors g et les f_n sont intégrables sur I et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I g(t)dt.$$

□ **Théorème [Somme L¹]** – Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers \mathbf{C} continues par morceaux. On suppose que :

- (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $g : I \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux;
- (2) $\forall n \in \mathbf{N}$, u_n est intégrable sur I ;

(3) la série de terme général $\int_I |u_n(t)|dt$ converge.

Alors g est intégrable et

$$\int_I g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)dt.$$

□ **Théorème [Convergence dominée des sommes partielles]** – Soit (u_n) une suite de fonctions de I vers \mathbf{C} continues par morceaux. On suppose que :

- (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $g : I \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux;
- (2) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in I, \left| \sum_{k=0}^n u_k(t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors, $\forall n \in \mathbf{N}$, u_n est intégrable, g est intégrable et

$$\int_I g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)dt.$$

6 Suites et séries de fonctions

□ **Théorème [Approximations de fonctions]** – Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbf{R} .

- (1) Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- (2) Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continue est limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux.

□ **Théorème [Approximation de Weierstrass]** – Toute fonction continue sur un segment de \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{C} est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

□ **Théorème [Bernstein]** – Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ continue, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1]$ on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Alors la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

[Indication : On utilisera l'uniforme continuité de f , la positivité de $x \in [0, 1] \mapsto$

$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et le fait que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$. Majorer les différents termes selon la position de $\left| x - \frac{k}{n} \right|$ par rapport $\delta > 0$ fixé.]

□ **Proposition** [*Séries uniformément convergentes*] – La série de fonctions de terme général (u_n) , applications de $A \subset \mathbf{R}$ dans E complet est uniformément convergente sur A si et seulement si

- (1) la série converge simplement ;
- (2) la suite de restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)$ converge uniformément vers 0.

□ **Théorème** [*Interversion des limites*] – Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$, $x_0 \in \overline{A}$, (f_n) une suite d'applications de A vers E , espace de Banach. On suppose que :

- (1) (f_n) converge uniformément sur A vers $g : A \longrightarrow E$;
- (2) $\forall n \in \mathbf{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_n \in E$.

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite finie $\lambda \in E$ et

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

□ **Théorème** [*Continuité des limites uniformes*] – Une limite uniforme de fonctions continues est continue. C'est toujours vrai si la convergence est uniforme uniquement sur tout compact inclus dans l'ensemble de départ.

□ **Théorème** [*Caractère \mathcal{C}^1 d'une limite uniforme*] – Soit A un intervalle de \mathbf{R} , E un espace de Banach, (f_n) une suite d'applications \mathcal{C}^1 de A dans E . On suppose que :

- (1) il y a convergence simple en au moins un point : $\exists a \in A/f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$.
- (2) il y a convergence uniforme de (f'_n) vers $h : A \longrightarrow E$.

Alors h est continue sur A , la suite (f_n) converge simplement sur A vers la fonction \mathcal{C}^1

$$g : x \in A \longmapsto \ell + \int_a^x h(t)dt.$$

De plus, la convergence de (f_n) vers g est uniforme sur tout compact de A .

□ **Théorème** [*Caractère \mathcal{C}^p d'une limite uniforme*] – Soit A un intervalle de \mathbf{R} , (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^p de A vers E , espace de Banach. On suppose que $\forall k \leq p$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $h_k : A \longrightarrow E$.

Alors $h_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^p et $\forall x \in A, \forall k \leq p$,

$$h_0^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x) = h_k(x).$$

□ **Lemme** [*Convergence uniforme et adhérence*] – Soit (f_n) une suite d'applications de \mathbf{R} dans E espace vectoriel normé qui converge uniformément sur $A \subset \mathbf{R}$. Alors elle converge uniformément sur \overline{A} .

[Indication : passer par le critère de Cauchy uniforme.]

□ **Proposition**^{HP} [*Limite diagonale*] – Soit (f_n) une suite d'applications de A partie de \mathbf{R} dans E espace vectoriel normé, $(x_n) \in A^{\mathbf{N}}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur A vers g , que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ et que les (f_n) sont continus en α . Alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(\alpha).$$

[Indication : astuce taupinale avec $g(x_n)$.]

7 Intégrales à paramètre

□ **Proposition** [*Intégrale dépendant d'une borne*] – Soit I un intervalle de \mathbf{R} , $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue et $a \in I$. Alors $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est \mathcal{C}^1 et $F' = f$.

□ **Théorème** [*Continuité des intégrales à paramètre*] – Soit (A, d) un espace métrique, I un intervalle de \mathbf{R} , $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que :

- (1) $\forall x \in A, t \in I \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux ;
- (2) $\forall t \in A, x \in A \longmapsto f(x, t)$ est continue ;
- (3) $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors $F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t)dt$ est définie et continue sur A .

□ **Théorème** [*Caractère \mathcal{C}^1 des intégrales à paramètre*] – Soient A, I deux intervalles de \mathbf{R} , $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que :

- (1) f est continue par morceaux par rapport t et $F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t)dt$ existe ;
- (2) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$;
- (3) pour $x \in A, t \in I \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux ;
- (4) pour $t \in I, x \in A \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue ;
- (5) pour tout compact $K \subset A$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_K(t).$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur A et $\forall x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

□ **Théorème** [*Caractère \mathcal{C}^k des intégrales à paramètre*] – Soient A, I deux intervalles de \mathbf{R} , $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$. On suppose que :

- (1) $\forall i \leq k$, f admet une dérivée partielle i -ième par rapport à $x \frac{\partial^i f}{\partial x} : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ avec
 - (i) pour $x \in A$ fixé, $t \in I \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux,
 - (ii) pour $t \in I$, $x \in A \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x}(x, t)$ est continue ;
- (2) pour tout compact $K \subset A$ et pour tout $i \leq k$ il existe $\varphi_{i,K} : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, \left| \frac{\partial^i f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{i,K}(t).$$

Alors $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k et $\forall i \leq k$, $\forall x \in A$,

$$F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x}(x, t) dt.$$

□ **Théorème** [*Fubini et intégrales doubles : cas de compacts*] – Soit $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbf{C}$ globalement continue. Alors

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_I \left(\int_J f(x, y) dx \right) dy = \int_J \left(\int_I f(x, y) dy \right) dx.$$

Le résultat est aussi valable dans le cas où $I \times J = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ et } y \in [h(x), g(x)]\}$, h, g continues et $g \geq h$.

□ **Théorème** [*Fubini et intégrales doubles : cas général*] – Soient I et J deux intervalles de \mathbf{R} , $f : I \times J \longrightarrow \mathbf{C}$. On suppose que :

- (1) $\int_I \left(\int_J |f(x, y)| dy \right) dx$ existe ;
- (2) toutes les fonctions apparaissant dans les calculs sont continues par morceaux¹.

Alors

$$\int_I \left(\int_J f(x, y) dx \right) dy = \int_J \left(\int_I f(x, y) dy \right) dx.$$

1. Ceci implique en théorie d'étudier 6 fonctions différentes.

□ **Proposition** [*Formule de Gauss*] – Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Alors Γ est définie sur $\Lambda = \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0\}$, $\forall z \in \Lambda$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. On a de plus la formule de Gauss : $\forall z \in \Lambda$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

[Indication : on applique le théorème de convergence dominée² à $f_n(t) = t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ pour $t < n$ et 0 sinon. On retrouve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ grâce à la formule de Stirling.]

8 Séries entières

□ **Théorème** [*Règle de d'Alembert*] – Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $\exists n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \geq n_0$, $a_n \neq 0$. On suppose que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty].$$

Alors le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\frac{1}{\ell}$.

□ **Proposition** [*Séries entières usuelles*] – On a les développements en série entière suivants :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad z \in \mathbf{C}, |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} z^n \quad z \in \mathbf{C}, |z| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots \quad x \in \mathbf{R}, |x| < 1$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots \quad z \in \mathbf{C}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \cdots \quad z \in \mathbf{C}$$

$$\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \cdots \quad z \in \mathbf{C}$$

2. Voir page 4.

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \quad z \in \mathbf{C}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots \quad z \in \mathbf{C}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad x \in \mathbf{R}, |x| < 1$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad x \in \mathbf{R}, |x| < 1$$

□ **Proposition**^{HP} [*Formule de Cauchy*] – On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors $\forall r \in]-R, R[, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt.$$

[*Indication : intervenir somme et intégrale grâce au théorème de sommation L^1* .]

□ **Lemme**^{HP} [*Convergence radiale d'Abel*] – Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbf{C}^*$

telque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge. Alors le rayon de convergence de la série est plus grand que $|z_0|$ et la série converge uniformément sur $[0, z_0] = \{tz_0 \mid t \in [0, 1]\}$.

[*Indication : utiliser la transformation d'Abel*.]

□ **Définition**^{HP} [*Caractère analytique*] – Soit Ω un ouvert de \mathbf{R} ou \mathbf{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est dite analytique sur Ω si $\forall x_0 \in \Omega, \exists \rho > 0$ tel que $D_f(x_0, \rho) \subset \Omega$ et $\exists (a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall z \in D_f(x_0, \rho)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - x_0)^n,$$

série entière de rayon de convergence au moins égal à ρ .

□ **Théorème** [*Caractérisation des sommes de séries entières*] – Soit $R \in]0, +\infty]$, une application $f :]-R, R[\rightarrow \mathbf{C}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur à R si et seulement si f est \mathcal{C}^∞ et si $\forall x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, f est somme d'une unique série entière de rayon de convergence strictement positif, sa série de Taylor : $\forall x \in \mathbf{C}$ tel que $|x| < R$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

9 Séries de Fourier

□ **Définition** [*Coefficients et série de Fourier*] – Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 2π -périodique continue par morceaux.

(1) On pose pour $n \in \mathbf{Z}$ les coefficients de Fourier complexes de f :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

(2) Les coefficients de Fourier sont les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies par $a_0 = c_0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

(3) La n -ième somme partielle de la série de Fourier de f est la fonction notée $S_n(f)$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

□ **Théorème** [*Parseval et convergence quadratique*] – Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux 2π -périodique. Alors la série de terme général $\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et on a l'égalité de Parseval :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

De plus, si f est partout continue, on a $S_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_2} f$.

□ **Proposition** [*Parseval sesquilinéaire*] – Soit $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 2π -périodiques continues par morceaux. Alors la série de terme général $\left(\overline{c_n(f)} c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)} c_{-n}(g)\right)$ converge et

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

[*Indication : dans le cas continu, cette formule découle de l'identité de polarisation associée au produit scalaire $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{C}) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f} g$* .]

1. Voir page 4.

□ **Théorème** [*Convergence normale de Dirichlet*] – Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est 2π -périodique, \mathcal{C}^1 par morceaux et partout continue, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbf{R} .

□ **Théorème** [*Convergence simple de Dirichlet*] – Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est 2π -périodique et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers sur \mathbf{R} vers la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

□ **Définition** [*Fourier en période T*] – Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ T -périodique continue par morceaux, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(1) On pose pour $n \in \mathbf{Z}$ les coefficients de Fourier complexes de f :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

(2) Les coefficients de Fourier sont les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies par $a_0 = c_0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

(3) La n -ième somme partielle de la série de Fourier de f est la fonction notée $S_n(f)$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\omega x} = a_0(f) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x).$$

10 Équations différentielles linéaires

□ **Définition** [*Équation résolue d'ordre 1*] – Soit E un espace de Banach, I un intervalle de \mathbf{R} , $a : I \rightarrow \mathcal{L}_c(E) : \forall t \in I, a(t)$ est un endomorphisme continu de E et on suppose a continue de I dans $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$. On se donne aussi $b : I \rightarrow E$ continue. On a alors l'équation différentielle résolue du premier ordre

$$x'(t) = a(t).x(t) + b(t) \quad \text{d'équation homogène associée} \quad x'(t) = a(t).x'(t)$$

□ **Théorème** [*Solution générale de $X' = aX + b$*] – Si $a, b : I \rightarrow \mathbf{K}$ sont continues, la solution général de l'équation différentielle $X' = aX + b$ est

$$X(t) = \left[C + \int_{t_0}^t \exp(-A(s)) b(s) ds \right] \exp(A(t)) \quad A(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds, t_0 \in I, C \in \mathbf{K}$$

□ **Théorème** [*Cauchy pour les EDL*] – Soit E un espace de Banach, I un intervalle de \mathbf{R} , $(t_0, x_0) \in I \times E$ et $(E) \quad X(t) = a(t).X(t) + b(t)$. Alors le problème de Cauchy $((E), (t_0, x_0))$ admet une unique solution $\varphi : I \rightarrow E \mathcal{C}^1$.

□ **Lemme**^{HP} [*Gronwall*] – Soit $I = [a, b[$ ou $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbf{R} fermé à gauche, $u, v : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continues positives et telles que $\forall t \in I, u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds$.

Alors $\forall t \in I$,

$$u(t) \leq C \exp \left(\int_a^t v(s) ds \right).$$

[*Indication : on majore la quantité de droite, pour cela on pose pour $t \in I$*

$$\varphi(t) = \left(C + \int_a^t u(s)v(s)ds \right) \exp \left(- \int_a^t v(s)ds \right).$$

On montre ensuite que φ est décroissante par le calcul de φ' .

□ **Proposition** [*Variation des deux constantes*] – Soient $a, b \in \mathbf{K}$, (φ_1, φ_2) une base de solutions de l'équation différentielle $(e) : X''(t) = a'X(t) + bX$, $t \in I$. Pour résoudre $(E) : X''(t) = a'X(t) + bX + c(t)$ où $c : I \rightarrow \mathbf{K}$, si $X \in \mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ on pose $\lambda, \mu : I \rightarrow \mathbf{K}$ telles que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}}_{R(t)} \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

λ et μ sont uniques et de classe \mathcal{C}^1 car $R(t)$ est inversible $\forall t \in I$. Alors X est solution de (E) si et seulement si

$$R(t) \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{c(t)\varphi_2(t)}{\det(R(t))} \\ \mu'(t) = \frac{c(t)\varphi_1(t)}{\det(R(t))} \end{cases}.$$

□ **Théorème** [*Équations d'Euler*] – Soient $a_0, \dots, a_r \in \mathbf{C}$, $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$, $b : I \rightarrow \mathbf{C}$ continue et l'équation différentielle

$$(E_r) \quad x^r y^{(r)}(x) + a_{r-1} x^{r-1} y^{(r-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = b(x).$$

On peut lui associer le polynôme caractéristique d'inconnue α :

$$(*) \quad \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - r + 1) + a_{r-1} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - r + 2) + \dots + a_1 \alpha + a_0.$$

Si $(*)$ se scinde en $\prod_{j=1}^N (\alpha - \alpha_j)$ avec $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, m_j \in \mathbf{N}^*$ et $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$, alors la famille des

$$\left(x \in I \mapsto (\ln |x|)^k |x|^{\alpha_j} \right)_{k \in \llbracket 0, m_j - 1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$$

est un système fondamental de solutions de (E_r) .

□ **Proposition** [Zéros isolés] – Soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ non nulle de classe \mathcal{C}^2 solution de $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, $a, b : I \rightarrow \mathbf{K}$ continues. Alors $\{t \in I \mid f(t) = 0\}$ est une partie discrète de I , c'est-à-dire que $\forall [a, b] \subset I$, $\{t \in [a, b] \mid f(t) = 0\}$ est fini.

[Indication : démontrer la deuxième caractérisation en utilisant une suite de zéros distincts à laquelle on appliquera la propriété de Bolzano-Weierstrass. f et f' ne peuvent s'annuler en même temps (Cauchy).]

11 Calcul différentiel

□ **Définition** [Différentiabilité] – Soient E, F deux \mathbf{K} -espace de Banach, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$. f est dite différentiable en $M_0 \in U$ si $\exists \varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que l'on ait le développement limité suivant pour h voisin de 0_E :

$$f(M_0 + h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(M_0) + \varphi(h) + o(\|h\|_E).$$

On note alors $\varphi = (df)(M_0)$, et cette application est en fait unique.

□ **Définition** [Dérivées partielles] – Soient E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriels normés de dimensions finies, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ième dérivée partielle de f par rapport à \mathcal{B}_E est l'application, lorsqu'elle est définie,

$$\begin{aligned} \partial_{j, \mathcal{B}_E} f : E &\longrightarrow F \\ M_0 &\longmapsto \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(M_0 + te_j) - f(M_0)}{t} \end{aligned}.$$

□ **Théorème** [Condition de différentiabilité] – Soient E, F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$, $M_0 \in U$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que f admet une dérivée partielle $(\partial_{j, \mathcal{B}_E} f)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définies et continues au voisinage de M_0 . Alors f est différentiable et

$$(df)(M_0) : E \longrightarrow F \\ \sum_{j=1}^n x_j e_j \longmapsto \sum_{j=1}^n x_j (\partial_{j, \mathcal{B}_E} f)(e_j).$$

□ **Proposition** [Matrice jacobienne] – Soient E, F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels normés de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une \mathbf{R} -base de E , $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , U un ouvert de E , $M_0 \in U$, $f : U \rightarrow F$ différentiable en M_0 . Si on note $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les fonctions coordonnées de f relativement à \mathcal{B}_F , alors l'application linéaire $(df)(M_0)$ peut être représentée par la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}((df)(M_0)) = \text{Jac}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)(M_0) = ((\partial_{j, \mathcal{B}_E} f_i)(M_0))_{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

□ **Théorème** [Formule de la chaîne] – Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, \mathcal{B}_E une base de E , F, G des espaces de Banach, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : U \rightarrow F$, $g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$, $M_0 \in U$, $N_0 = f(M_0) \in V$. Si f et g sont respectivement différentiables en M_0 et N_0 , alors $g \circ f$ a des dérivées partielles selon \mathcal{B}_E en M_0 et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(\partial_{i, \mathcal{B}_E} g \circ f)(M_0) = [(dg)(N_0)]((\partial_{i, \mathcal{B}_E} f)(M_0)).$$

□ **Théorème** [Schwarz] – Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow E$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continue, c'est à dire que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(\partial_{i, \mathcal{B}_E} (\partial_{j, \mathcal{B}_E} f)) : U \rightarrow E$ est définie et continue sur U . Alors $\forall M \in U$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$(\partial_{i, \mathcal{B}_E} (\partial_{j, \mathcal{B}_E} f))(M) = (\partial_{j, \mathcal{B}_E} (\partial_{i, \mathcal{B}_E} f))(M).$$

□ **Théorème**^{HP} [Inversion locale] – Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$, $A \in U$. On suppose que $(df)(A) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est inversible et bicontinue¹. Alors il existe deux ouverts ω et ω' voisinages respectivement de A et $f(A)$ tels que $f|_{\omega} : \omega \rightarrow \omega'$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.

[Indication : on peut réduire la problème en supposant $E = F = \mathbf{R}^n$, $A = 0$ et $(df)(A) = I_n$ quitte à composer par $((df)(A))^{-1}$. Pour trouver un voisinage sur lequel f est injective, on considère une boule dans laquelle la différentielle de f ne s'éloigne pas trop de I_n puis on montre que $h(t) = f(t) - t$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne en dérivant $\varphi(t) = f(t) + (1-t)x$.]

□ **Théorème** [Inversion globale] – Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : U \rightarrow V$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$. f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de U sur V si et seulement si :

- (1) f est \mathcal{C}^k ;
- (2) $\forall A \in U$, $\det(\text{Jac}(f)(A))$ ne s'annule pas ;
- (3) f est bijective de U dans V .

□ **Proposition** [Égalité de la moyenne] – Soit U un ouvert de E espace vectoriel complet de dimension finie (ou Banach), $f : U \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 , $A, B \in U$ tels que $[AB] \in U$. Alors

$$f(B) = f(A) + \int_0^1 [(df)(tB + (1-t)A)](B-A) dt,$$

et si $E = \mathbf{R}^n$ alors

$$f(b_1, \dots, b_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tB + (1-t)A) dt.$$

¹. Continue de réciproque continue

□ **Définition** [*Gradient*] – Soit E un espace euclidien, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$. Si f est différentiable en $M_0 \in U$, l'unique vecteur noté $\nabla f(M_0)$ tel que $\forall H \in E$ $(df)(M_0)(H) = (H|\nabla f(M_0))$ s'appelle gradient de f en M_0 .

□ **Théorème** [*Inégalité des accroissements finis*] – Soit U un ouvert de E espace vectoriel normé de dimension finie (ou Banach), $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors pour tous points $A, B \in U$ tels que $[AB] \in U$,

$$\|f(B) - f(A)\| \leq \|B - A\| \sup_{M \in [AB]} \|(df)(M)\|,$$

et si E est euclidien et $F = \mathbf{R}$,

$$|f(B) - f(A)| \leq \|B - A\| \sup_{M \in [AB]} \|\nabla f(M)\|.$$

□ **Définition** [*Hessienne*] – Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On appelle matrice hessienne de f en $A \in \mathbf{R}^n$ la matrice symétrique réelle

$$\mathcal{H}(f)(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{(i,j) \in [1,n]^2}.$$

La forme quadratique hessienne de \mathbf{R}^n canoniquement associée à $\mathcal{H}(f)(A)$ est alors

$$\mathcal{H}(f)(A) : (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

□ **Théorème** [*Taylor-Young à l'ordre 2*] – Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^2 . Alors $\forall A \in U$, f admet le développement limité suivant pour H voisin de 0 :

$$f(A + H) = f(A) + (df)(A)(H) + \frac{1}{2} \mathcal{H}(f)(A)(H) + o(\|H\|^2).$$

□ **Théorème**^{HP} [*Extrema et hessienne*] – Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , A un point critique de f $((df)(A) = 0)$ et $q = \mathcal{H}(f)(A)$ la forme quadratique hessienne de f en A .

- (1) Si f présente un minimum (respectivement maximum) local en A , alors q est positive (respectivement négative).
- (2) Si q est définie négative (respectivement positive), alors f admet un maximum (respectivement minimum) local en A .

□ **Théorème** [*Étude locale d'un point critique*] – Soit U un ouvert de \mathbf{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , $A \in U$, on pose les notations de Monge suivantes :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(A), q = \frac{\partial f}{\partial y}(A), r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- (1) Si f présente un extremum local en A , alors $p = q = 0$;
- (2) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 > 0$, alors f présente en A un extremum local strict :
 - (i) minimum si $r \geq 0$ ou $r + t \geq 0$,
 - (ii) maximum si $r \leq 0$ ou $r + t \leq 0$;
- (3) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 < 0$, alors f présente un col en A : pour tout voisinage V de A , il existe $M, N \in V$ tels que $f(M) \leq f(A) \leq f(N)$;
- (4) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

□ **Proposition**^{HP} [*Convexité et maximum*] – Soit K un ouvert de \mathbf{R}^n convexe, $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ est dite convexe si $\forall t \in [0, 1], \forall M, N \in K$, $f(tM + (1-t)N) \leq tf(M) + (1-t)f(N)$. Si de plus K est compact et f continue, le maximum de f sur K est atteint en un point de $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$, en un point A tel que $K \setminus A$ reste convexe.

12 Équations différentielles ordinaires

□ **Définition** [*Équation différentielle d'ordre 1*] – Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie ou un Banach, U un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ continue. L'équation d'ordre 1 résolue associée à f est

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t)).$$

Une solution de (E) est un couple (I, φ) où I est un intervalle de \mathbf{R} et $\varphi : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. La donnée d'une condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour (E) constitue un problème de Cauchy.

□ **Lemme** [*Prolongement en une borne*] – Soit $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b \in \mathbf{R}$, (I, φ) une solution de $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$ où $f : U \subset \mathbf{R} \times E \rightarrow E$ continue. On suppose que $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} \ell \in E$ avec $(b, \ell) \in U$. Alors si $J = I \cup \{b\}$ et ψ définie par $\psi|_I = \varphi$ et $\psi(b) = \ell$, (J, ψ) est une solution de (E) qui prolonge strictement (I, φ) .

[Indication : c'est le théorème du relèvement \mathcal{C}^1]

□ **Théorème** [*Cauchy-Lipschitz*] – Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, $f : U \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 et $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$. Alors tout problème de Cauchy $((E), (t_0, x_0))$ où $(t_0, x_0) \in U$ admet une unique solution maximale (I, φ) . De plus, I est un intervalle ouvert de \mathbf{R} et tout autre solution du même problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

□ **Proposition**^{HP} [*Solution maximale sur \mathbf{R}*] – Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : \mathbf{R} \times E \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 bornée. Alors toute solution de $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$ est bornée sur \mathbf{R} .

[Indication : Cauchy-Lipschitz s'applique, prendre une solution maximale définie sur un intervalle ouvert et supposer par l'absurde qu'une borne est finie. Utiliser le prolongement en une borne.]

□ **Proposition** [*Système autonome*] – Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ \mathcal{C}^1 , $(E) \quad x'(t) = f(x(t))$ l'équation autonome associée à f .

(1) Pour toute fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n \mathcal{C}^1$, (I, φ) est solution (respectivement solution maximale) de (E) si et seulement si $\forall a \in \mathbf{R}$, $(I - a, t \in I - a \mapsto \varphi(t + a))$ est solution (respectivement solution maximale) de (E) .

(2) Une solution maximale de (E) est soit injective soit définie sur \mathbf{R} et périodique.

□ **Proposition** [Trajectoires] – Soit $(E) \quad x'(t) = f(x(t))$ une équation autonome d'ordre 1 avec $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \mathcal{C}^1$ et (I, φ) une solution maximale de (E) . La trajectoire associée à la fonction (I, φ) est le support de la courbe paramétrée $t \in I \mapsto \varphi(t)$. De plus, deux trajectoires associées à des solutions maximales sont soit disjointes, soit confondues.

13 Lemmes et résultats divers

□ **Lemme**^{EXO} [Césaro] – Soit (u_n) une suite d'un espace vectoriel normé E . Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

[Indication : revenir à la définition de la limite.]

□ **Proposition** [Dérivée d'une quantité bilinéaire] – Soient A une partie de \mathbf{R} , E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés, $f : A \rightarrow E_1, g : A \rightarrow E_2$ dérivables en a et $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinéaire continue. Alors $h : x \in A \mapsto B(f(x), g(x))$ est dérivable en a et

$$h'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

□ **Proposition**^{EXO} [Suites sous-additives] – Une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ est sous-additive si $\forall m, n \in \mathbf{N}^*, u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est sous-additive, alors

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \inf_{p \geq 1} \frac{u_p}{p} \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

[Indication : montrer que $\forall k > \ell, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{u_n}{n} < k$.]

□ **Théorème**^{HP} [Sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$] – Les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sont soit denses dans \mathbf{R} , soit de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.

[Indication : si G est le sous-groupe, introduire $\inf G \cap \mathbf{R}_+^*$ et discuter son appartenance à G .]

□ **Proposition**^{EXO} [Wallis] – Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

On a alors les propriétés suivantes :

(1) $\forall n \geq 1, (n+1)W_n + 1 = nW_{n-1}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$;

(2) W_n est décroissante positive;

$$(3) \quad W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

[Indication : tout part d'une intégration par parties.]

□ **Proposition**^{EXO} [Polynômes de Tchebycheff] – Pour $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbf{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. De plus, T_n est de degré n , de coefficient dominant 2^{n-1} , ses racines sont les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ et on a une expression de T_n :

$$T_n = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^p \binom{2p}{n} (1 - X^2)^p X^{n-2p}.$$

□ **Théorème**^{HP} [Baire] – Soit $(\Theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses dans \mathbf{R} . Alors $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Theta_n$ est dense dans \mathbf{R} .

[Indication : utiliser le théorème des segments emboîtés.]

□ **Théorème**^{HP} [Borel-Lebesgue] – Soit (E, d) un espace métrique. On dit que E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement de E par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Alors E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement si on peut lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass; c'est-à-dire si toute suite de E admet une valeur d'adhérence.

□ **Proposition** [Série harmonique] – On a le développement limité de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ suivant, avec γ la constante d'Euler :

$$H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

[Indication : utiliser des suites adjacentes.]

□ **Proposition**^{EXO} [Ensemble des valeurs d'adhérences] – L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est le fermé $\bigcap_{p \geq 0} \overline{\{u_n \mid n \geq p\}}$.

□ **Proposition** [Stirling] – On a l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

□ **Définition**^{HP} [Module de continuité] – Soit $f : I \rightarrow E$ où I est un intervalle non-vide de \mathbf{R} , E un espace vectoriel normé. Pour $\delta \geq 0$ on pose

$$\omega(\delta) = \sup \{ \|f(x) - f(y)\| \mid (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \delta \}.$$

Si f est uniformément continue sur I , alors $\omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

□ Proposition [*Moments*] – Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue vérifie $\forall n \in \mathbf{N}, \int_a^b f(t)t^n dt = 0$, alors f est nulle.

[Indication : Par linéarité pour toute fonction polynômiale. Conclure en construisant $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que Pf est de signe constant ou appliquer le théorème d'approximation de Weierstrass.]

□ Théorème [*Relèvement \mathcal{C}^1*] – Soit I un intervalle de \mathbf{R} , $f : I \longrightarrow \mathbf{U}^1$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ telle que $\forall t \in I, f(t) = e^{i\theta(t)}$.

[Indication : procéder par analyse et synthèse. Il existe aussi un théorème de relèvement continu mais plus difficile à démontrer.]

□ Lemme [*Riemann-Lebesgue*] – Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \pm\infty} 0.$$

[Indication : suivre la méthode de construction de l'intégrale.]

□ Théorème^{EXO} [*Critère de Weyl*] – On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1]$ est équirépartie si $\forall [a, b] \subset [0, 1], \frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_k \in [a, b]\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$. Alors cette condition est équivalente au fait que $\forall p \in \mathbf{N}^*,$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2ip\pi u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

[Indication : montrer d'abord (u_n) est équirépartie si et seulement si pour toute fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

Conclure en appliquant le théorème de Weierstrass trigonométrique.]

□ Lemme^{EXO} [*Dini*] – Soit (X, d) un espace métrique compact, E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé, $(f_n), g$ des applications de X dans E continues. On suppose que $\forall x \in X, \|f_n(x) - g(x)\|_E \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en décroissant. Alors (f_n) converge uniformément vers g sur X .

☞ Cette fiche comporte 106 entrées dont 52 théorèmes, 31 propositions, 15 définitions et 8 lemmes. ☞

1. On rappelle que \mathbf{U} est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Index

Égalité de la moyenne, 9
 Équation différentielle d'ordre 1, 10
 Équation résolue d'ordre 1, 8
 Équations d'Euler, 8
 Équivalence de normes en dimension finie, 3
 Étude locale d'un point critique, 10

 Approximation de Weierstrass, 4
 Approximations de fonctions, 4

 (HP) Baire, 11
 Bernstein, 4
 (HP) Borel-Lebesgue, 11

 (EXO) Césaro, 11
 Caractérisation des sommes de séries entières, 7
 Caractère \mathcal{C}^1 d'une limite uniforme, 5
 Caractère \mathcal{C}^1 des intégrales à paramètre, 5
 Caractère \mathcal{C}^k des intégrales à paramètre, 6
 Caractère \mathcal{C}^p d'une limite uniforme, 5
 (HP) Caractère analytique, 7
 Cauchy pour les EDL, 8
 Cauchy-Lipschitz, 10
 Changement de variable, 4
 Coefficients et série de Fourier, 7
 Comparaison avec une intégrale, 2
 (HP) Composantes connexes, 3
 Condition de différentiabilité, 9
 Connexité par arcs, 3
 Connvergences, 2
 Construction de normes, 3
 Continuité des applications linéaires, 3
 Continuité des intégrales à paramètre, 5
 Continuité des limites uniformes, 5
 Convergence de l'intégrale et limite, 4
 Convergence dominée, 4
 Convergence dominée des sommes partielles, 4
 Convergence normale de Dirichlet, 8
 (HP) Convergence radiale d'Abel, 7
 Convergence simple de Dirichlet, 8

Convergence uniforme et adhérence, 5
 Convergence, intégrabilité, semi-convergence, 3
 (HP) Convexité et maximum, 10
 Critère de Leibniz, 2
 (EXO) Critère de Weyl, 12

 Dérivée d'une quantité bilinéaire, 11
 Dérivées partielles, 9
 Différentiabilité, 9
 (EXO) Dini, 12
 (HP) Distance, 3

 (EXO) Ensemble des valeurs d'adhérences, 11
 Exponentielle, 3
 (HP) Extrema et hessienne, 10

 (HP) Formule de Cauchy, 7
 Formule de Gauss, 6
 Formule de la chaîne, 9
 Formules de Taylor, 1
 Fourier en période T , 8
 Fubini et intégrales doubles : cas de compacts, 6
 Fubini et intégrales doubles : cas général, 6
 Fubini et suites doubles, 2

 Gradient, 10
 (HP) Gronwall, 8

 Hessienne, 10

 Inégalité des accroissements finis, 10
 Intégrale dépendant d'une borne, 5
 Intersion des limites, 5
 Inversion globale, 9
 (HP) Inversion locale, 9

 (HP) Limite diagonale, 5

 Matrice jacobienne, 9
 (HP) Module de continuité, 11
 Moments, 12

Norme, 3

 Parseval et convergence quadratique, 7
 Parseval sesquilinéaire, 7
 (HP) Point fixe contractant, 3
 (EXO) Polynômes de Tchebycheff, 11
 Primitives usuelles, 2
 Produit de Cauchy de séries, 3
 Prolongement en une borne, 10

 Règle de d'Alembert, 2, 6
 Règle de Riemann, 2, 4
 Règles de convergence, 2
 (HP) Raabe-Duhamel, 3
 Relèvement \mathcal{C}^1 , 12
 Relations usuelles, 1
 Riemann-Lebesgue, 12

 Série harmonique, 11
 Séries de Bertrand, 2
 Séries de Riemann, 2
 Séries entières usuelles, 6
 Séries uniformément convergentes, 5
 Schwarz, 9
 Solution générale de $X' = aX + b$, 8
 (HP) Solution maximale sur \mathbf{R} , 10
 Sommation L^1 , 4
 (HP) Sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$, 11
 Stirling, 11
 (EXO) Suites sous-additives, 11
 Système autonome, 10

 Taylor-Young à l'ordre 2, 10
 Trajectoires, 11
 Trigonométrie, 1

 Variation des deux constantes, 8

 (EXO) Wallis, 11

 Zéros isolés, 9