4 Compléments d'algèbre linéaire

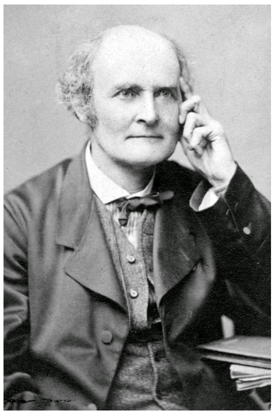
« The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colours or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in this world for ugly mathematics. »

G.H. Hardy (1941)

Plan de cours

♦ Quelques perspectives historiques

La théorie de l'algèbre linéaire naît de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Les mathématiciens se sont intéressés pendant de nombreux siècles à la seule résolution des systèmes à coefficients numériques. La méthode du pivot (ou *algorithme de Gauss-Jordan*) est alors efficacement employée. On en trouve même la trace en Chine, probablement un siècle ou deux avant notre ère, sous le nom d'*algorithme Fang-Cheng*, qui signifie littéralement *le modèle rectangulaire*. Les premiers résultats concernant le calcul explicite des solutions d'un système $n \times n$ pour $n \in \{2, 3\}$ en fonction de ses coefficients sont énoncés par Maclaurin en 1748, puis généralisés pour un entier n quelconque quelques années plus tard par Cramer; il présente alors les formules qui portent aujourd'hui son nom.



Arthur Cayley

L'utilisation des déterminants et des matrices s'étend par la suite à l'ensemble de la communauté mathématique. Sylvester introduit pour la première fois le terme de *matrice*, matrices que Cayley étudie de son côté comme des entités propres dans son traité de 1858 *A Memoir on the Theory of Matrices*. Les mathématiciens manipulaient cependant depuis un certain temps les tableaux de nombres (citons par exemple les travaux de Gauß à ce sujet).

L'algèbre linéaire, en tant que telle, ne prend son essor qu'aux alentours de 1840, moment à partir duquel les mathématiciens commencent à s'intéresser à l'étude de propriétés communes (à travers la linéarité) applicables à toute sorte d'objets. Grassman cherche de son côté à poser les bases d'un calcul véritablement géométrique débarrassé des choix de coordonnées : les espaces vectoriels voient enfin le jour. Les travaux en dimension supérieure à trois font cependant apparaître quelques résistances de la part de ceux qui considèrent que tout objet mathématique doit avoir une interprétation dans le monde sensible. Une fois dégagés de cette contrainte, les mathématiciens ont pu développer puis généraliser des résultats en dimension quelconque. Il n'en reste pas moins que le langage géométrique a irrigué l'algèbre linéaire, les termes *vecteurs* et *hyperplans* en sont de bons exemples. C'est finalement Peano qui propose en 1888 une définition axiomatisée des espaces vectoriels, peu différente de celle qui est aujourd'hui adoptée.

I | Espaces vectoriels

A – Généralités sur les espaces vectoriels

Nous ne reviendrons pas ici sur la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}$ désignant dans ce chapitre un sous-corps de $\mathbb{C}$. Les différents points de cette définition permettent d'effectuer des opérations sur les vecteurs analogues à celles qu'on effectue plus habituellement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (somme de vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire).

Exemples

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels (munis des lois usuelles) :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$;
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes ;
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes, et plus généralement,
- $\mathbb{K}^X$, l'ensemble des fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Il s'agit de résultats classiques du cours qui peuvent être réutilisés sans démonstration le jour du concours.

B – Sous-espaces vectoriels

E désigne dans toute la suite du chapitre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.1 : Sous-espace vectoriel

Soit F un sous-ensemble (ou partie) de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$;
- $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$;
- $\forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x \in F$.

On vérifie qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Ce résultat est très pratique : pour montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu. On se ramènera notamment aux exemples fondamentaux présentés précédemment. On peut même avoir plus simplement recours à la caractérisation suivante :

Théorème 4.2 : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$;
- $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F$. (*stabilité par combinaison linéaire*)

Exemples

S'en suit toute une ribambelle d'exemples qu'il convient de maîtriser parfaitement.

- $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$;
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple (bis)

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- le vecteur nul appartient bien à F car $0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$;
- si $u(x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v \in F$. En effet, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et :

$$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

Exemple (ter)

$G = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- Pour $x = y = 0$, $(x + y, x - y, 2y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
- Soient $u, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $u = (x+y, x-y, 2y)$ et $v = (x'+y', x'-y', 2y')$.

$$\lambda u + v = \lambda \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \\ 2(\lambda y + y') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''+y'' \\ x''-y'' \\ 2y'' \end{bmatrix}$$

avec $x'' = \lambda x + x'$ et $y'' = \lambda y + y'$. On a bien montré que $\lambda u + v \in G$.

Proposition 4.3 : Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels (s.e.v.) de E. Donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. de E.
  De même, $\lambda x + y \in G$ car G est un s.e.v. de E. Donc $\lambda x + y \in F \cap G$. ■

Il n'en va pas de même pour l'union : $F \cup G$ est un espace vectoriel seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

C – Familles de vecteurs

1 – Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré par une famille

Soient I un ensemble d'indices non nécessairement fini et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

Exemples

- $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille finie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$;
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie (dénombrable) de $\mathbb{R}[X]$;
- $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie (non dénombrable) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Les combinaisons linéaires s'expriment, par définition, comme des sommes *finies* de vecteurs :

- Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E, on appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tout vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de scalaires.
- Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de E, on appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i \in I}$ tout vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires presque nulle.

On rappelle qu'une famille de scalaires est dite *à support fini* ou qualifiée de *famille presque nulle* si elle possède un nombre fini d'éléments non nuls. On ne manipule donc ici que des sommes finies de vecteurs !

Définition 4.4

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $\underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}(u_i)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(u_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire :

$$\underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}(u_i) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle} \right\}$$

Théorème 4.5

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. $\underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}(u_i)$ est un espace vectoriel.

$\underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}(u_i)$ est le plus petit sous-espace, au sens de l'inclusion, contenant les éléments de $(u_i)_{i \in I}$.

En pratique, il suffit d'écrire $F = \mathrm{Vect}(\cdots)$ pour justifier que F est un sous-espace vectoriel. Commode, non ?

2 – Famille génératrice, famille libre, base

Définition 4.6 : Famille génératrice

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$. Autrement dit $E = \underset{i\in I}{\mathrm{Vect}}(u_i)$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in E, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

On dit aussi que la famille $(u_i)_{i\in I}$ engendre E.
$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Attention, il existe plusieurs familles génératrices distinctes. Elles peuvent ne pas avoir le même cardinal !

Proposition 4.7 : Propriétés des familles génératrices

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On ne change pas l'espace vectoriel engendré si :

(i) on permute les vecteurs de la famille.

(ii) on ajoute à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.

(iii) on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(iv) on retire à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.

Proposition 4.8

Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est elle-même génératrice.

Exercice 1

Proposer des familles génératrices de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

Définition 4.9 : Famille libre

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre si pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle,

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad (\forall i \in I, \quad \lambda_i = 0)$$

On dit alors que les vecteurs u_i sont linéairement indépendants. Une famille non libre est dite liée.

Exercice 2

Soit $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(i) On pose $u_i = e_1 + \cdots + e_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. La famille $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ est-elle libre ?

(ii) Reprendre la question avec $v_k = e_k - e_{k+1}$ si $k \in [\![1,p-1]\!]$ et $v_p = e_p$.

Exercice 3

On considère les trois suites complexes définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1\,; \quad v_n = j^n\,; \quad w_n = \bar{j}^n$$

Montrer que la famille $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre.

On observera que dans le cas d'une famille infinie, la définition d'une famille libre revient à vérifier que toute sous-famille finie de $(u_i)_{i\in I}$ est libre. Et même mieux, lorsque la famille est indexée par $\mathbb{N}$, on peut travailler de façon ordonnée :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est libre} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \text{ est libre}$$

Proposition 4.10

Toute famille de polynômes *non nuls* échelonnée en degré est libre.

Démonstration

Il suffit de montrer que la propriété est vraie pour toute famille finie. Procédons par récurrence.

– *Initialisation*
Si P_1 est non nul, la famille (P_1) qui ne contient qu'un seul vecteur est libre.

– *Hérédité*
Considérons une famille $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ de polynômes non nuls échelonnés en degré. On peut sans perte de généralité supposer que les polynômes sont ordonnés dans le sens des puissantes croissantes. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$.
Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, $P_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)$, ce qui est absurde pour une question de degré.
D'où $\lambda_{n+1} = 0$ et donc, $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. La famille $(P_1, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré donc par hypothèse de récurrence, elle est libre. Ce qui conduit à $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ est libre.

Ceci conclut la démonstration par récurrence. ∎

Exemple

On prouve ainsi que la famille $(X(X-2)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. Engendre-t-elle $\mathbb{R}[X]$?

Proposition 4.11

- Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.
- Une famille composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
- Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

La dernière propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs. Il faudrait vérifier que chaque vecteur n'est pas combinaison des autres pour prouver que la famille est libre, ce qu'on ne fait pas en pratique.

Théorème 4.12 : Caractérisation des familles liées

Une famille est liée si et seulement si (au moins) un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Théorème 4.13 : Caractérisation des familles libres

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si :

$$\forall x \in \operatorname*{Vect}_{i\in I}(u_i), \quad \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle}, \quad x = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

$\hookrightarrow$ Unicité de la décomposition.

Proposition 4.14

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Définition 4.15 : Base

Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.

Théorème 4.16 : Caractérisation d'une base

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle}, \quad x = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

$\hookrightarrow$ Existence et unicité de la décomposition

Proposition 4.17

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

On peut plus généralement prouver la propriété suivante.

Proposition 4.18

Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout k est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

La famille (P_k) constituée de polynômes non nuls ($\deg(P_k) \neq -\infty$) est échelonnée en degré ; elle est libre. Reste cependant à montrer qu'elle est génératrice.
Considérons pour cela un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et posons $n = \deg(P)$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ puisqu'elle est libre et contient $n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ éléments. Comme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il s'écrit bien comme combinaison linéaire des polynômes $P_0, \dots, P_n$ et donc plus généralement comme une combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

D – Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 4.19 : Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie.

Théorème 4.20 : Théorème de la base extraite

Soit E un espace de dim. finie. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

Un espace de dimension finie admet donc une base finie.

Si on connaît une famille génératrice de E, on peut toujours enlever des vecteurs combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre donc une base de E.

Théorème / Définition 4.21 : Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinal.
On appelle dimension de E ce cardinal et on le note $\dim E$.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'exhiber une base de cet espace et de compter le nombre de vecteurs obtenus. Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Définition 4.22

On appelle droite vectorielle un espace de dimension 1, plan vectoriel un espace de dimension 2.

Théorème 4.23

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$, et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Dans la pratique, ce résultat a une importance capitale : il suffit qu'une famille soit génératrice et comporte autant de vecteurs que la dimension de E pour que celle-ci soit une base de E.

Attention, ce n'est pas parce qu'une famille contient plus de $n = \dim(E)$ vecteurs qu'elle est génératrice ! Par exemple, $(X, 2X, 3X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car le polynôme constant 1 ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs précédents.

Voici maintenant l'analogue du théorème de la base extraite pour les familles libres :

Théorème 4.24 : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

Théorème 4.25

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$, et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Si on connaît une famille libre d'un espace vectoriel E qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base!

Exercice 4

Montrer que $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème 4.26 : Dimension d'un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel de E, E étant supposé de dimension finie.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit donc de prouver que $F \subset E$ puis que $\dim(F) = \dim(E)$. La double inclusion ne sera alors pas nécessaire.

Proposition 4.27 : Produit cartésien

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors, $F \times G = \{(x, y) \mid x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Tout produit cartésien fini d'espaces vectoriels est un espace vectoriel et $\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

E – Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.28 : Rang

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On le note $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemples

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

- Si $u \in E$ est non nul, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\mathrm{rg}(u, v) = \dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = 2$.
- Si $u, v \in E$ sont colinéaires et non nuls, $\mathrm{rg}(u, v) = \dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = 1$.

Proposition 4.29

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

(i) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant p$ et $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant n$;

(ii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si et seulement si la famille est libre;

(iii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice de E.

Ainsi, si E est de dimension n, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

F – Représentation matricielle et changement de base

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n et une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.
Pour tout vecteur x de E, il existe alors un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont alors appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. On peut alors choisir de représenter x par la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Le « vecteur coordonnées » dépend donc de la base choisie.

On peut de même représenter une famille de vecteurs $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})=\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{pn}\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où u_{ij} représente la j^{e} coordonnée du vecteur u_i dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on a $u_i=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}e_j$.

Soient plus généralement deux bases $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E. On cherche à déterminer un lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Définition 4.30 : Matrice de passage

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, soit :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \qquad \text{où } e'_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}e_j \text{ pour tout } k\in[\![1,n]\!]$$

Théorème 4.31 : Inversibilité d'une matrice de passage

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
La matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Théorème 4.32 : Formule de passage

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Soit $x\in E$. On pose $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. $X=PX'$ avec $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

Comme P est inversible, on trouve $X'=P^{-1}X$. Pour ne pas confondre P et P^{-1}, on se souviendra que pour obtenir les coordonnées X' dans la nouvelle base en fonction des coordonnées X dans l'ancienne base, il est nécessaire d'inverser un système, donc d'inverser une matrice.

Théorème 4.33

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n, admettant pour base la famille $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Alors, le rang de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est égal au rang de la matrice représentative des vecteurs $u_1,\dots,u_p$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_p)=\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p))$$

Ce théorème fournit deux informations :

- Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, il suffit de calculer le rang d'une matrice.
- Si l'on change de base, le rang de la matrice obtenue est invariant. Autant choisir une base simple !

Exemple

Montrons que la famille $\mathscr{F}=(1+2X+3X^2, 2+X+3X^2, 3+2X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, montrons que $\mathrm{rg}(\mathscr{F})=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$ en écrivant la matrice M représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(M) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -8\end{bmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-4}\end{bmatrix}=3$$

Théorème 4.34

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On considère la matrice représentative M de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans une base quelconque de E.

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \iff \det(M) \neq 0 \iff \mathrm{rg}(M) = n$$

Dans ce cas, la matrice M est inversible.

Attention, le déterminant n'a de sens que lorsqu'on manipule une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Sinon, la matrice n'est pas carrée (et la famille ne peut être une base de E). On peut néanmoins déterminer son rang.

Exemple

Reprenons l'exemple de la famille $\mathscr{F} = (1+2X+3X^2, 2+X+3X^2, 3+2X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit en fait de calculer le déterminant de la matrice M, matrice représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, pour montrer qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 + 14 + 3 = 12 \neq 0$$

G – Somme de sous-espaces vectoriels

1 – Cas de deux sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel de dimension quelconque, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 4.35 : Somme de deux sous-espaces

On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F + G$ défini par :

$$F + G = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F, x_2 \in G\}$$

Cela signifie que pour tout $x \in F + G$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$.
La décomposition n'est pas nécessairement unique !

Proposition 4.36

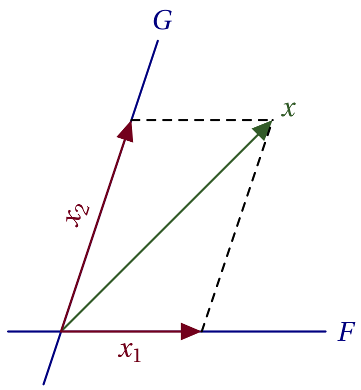
$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E ; il contient F et G.

Définition 4.37 : Somme directe

On dit que la somme de F et de G est directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique. On la note alors $F \oplus G$.

Autrement dit, si $x \in F \oplus G$ alors il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Chaque vecteur se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.



Proposition 4.38 : Caractérisation d'une somme directe

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 4.39 : Espaces supplémentaires

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $E = F \oplus G$. De façon équivalente,

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F \times G, \quad x = x_1 + x_2$$

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On pose $F = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus F$.

On dit également que G est un supplémentaire de F dans E. Attention, un supplémentaire n'a aucune raison d'être unique ! Cependant, le théorème suivant permet de s'assurer de l'existence d'au moins un supplémentaire en dimension finie. Son existence en dimension infinie relève de l'axiome du choix.

Théorème 4.40 : Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède (au moins) un supplémentaire dans E.

En dimension finie, on peut compter sur la caractérisation suivante qui s'appuie sur la formule de Grassman.

Lemme 4.41 : Formule de Grassman

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Théorème 4.42 : Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie

Si E est un espace de dimension finie, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées (la troisième étant automatiquement vraie) :

$$\text{(i) } E = F + G \qquad \text{(ii) } F \cap G = \{0_E\} \qquad \text{(iii) } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

En dimension finie, tout supplémentaire de F a donc pour dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Exercice 6

On considère les deux espaces vectoriels :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \right\} ; \quad G = \left\{ \lambda(1, 1, 2, 0) + \mu(2, 0, 1, 1) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Déterminer une base de F et trouver un système d'équations vérifiées par les éléments de G.
F et G sont -ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 7

$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension puis que $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 8

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions de ces espaces.

Théorème 4.43 : Base adaptée

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors, $E = F \oplus G$ si, et seulement si, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est qualifiée de *base adaptée*.

On peut ainsi montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en montrant que la concaténation de deux bases est encore une base (mais de l'espace tout entier cette fois !).

2 – Cas d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque. On considère p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E.

Définition 4.44 : Somme de p sous-espaces

On appelle somme de $F_1, \dots, F_p$ l'ensemble noté $F_1 + \cdots + F_p$ ou bien $\sum_{i=1}^{p} F_i$ défini par :

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}$$

Proposition 4.45

$F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient $F_1, \dots, F_p$.

Démonstration

- $0_E \in F_1 + \cdots + F_p$ car $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$.
- Avec des notations évidentes, pour tous $x = x_1 + \cdots + x_p$, $x' = x'_1 + \cdots + x'_p$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda x + x' = \underbrace{(\lambda x_1 + x'_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda x_p + x'_p)}_{\in F_p}$$

par stabilité par combinaison linéaire des F_i en tant que sous-espaces vectoriels. ■

$F_1 + \cdots + F_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$. Il s'agit aussi de l'image de l'application linéaire :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array} \right.$$

Définition 4.46 : Somme directe

Les espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_p$ comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ou bien $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition 4.47 : Caractérisation de la somme directe

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si, et seulement si, la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i est unique.

Démonstration

Le sens direct est immédiat, par définition d'une somme directe. Reste à montrer que l'unicité de la décomposition du vecteur nul implique l'unicité de la décomposition de n'importe quel vecteur.
Supposons que $x_1 + \cdots + x_p = x'_1 + \cdots + x'_p$ avec $x_i, x'_i \in F_i$. Alors :

$$(x_1 - x'_1) + \cdots + (x_i - x'_i) + \cdots + (x_p - x'_p) = 0_E$$

L'unicité de la décomposition du vecteur nul conduit à $x_i - x'_i = 0_E$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, i.e. $x_i = x'_i$. ■

En d'autres termes, l'application φ définie précédemment est injective si, et seulement si, la somme est directe.

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces suivants :

- F l'ensemble des fonctions constantes de E ;
- G l'ensemble des fonctions nulles sur $[-1,0]$;
- H l'ensemble des fonctions nulles sur $[0,1]$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Proposition 4.48 : Caractérisation de la somme directe (bis)

$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$. Il y a égalité si, et seulement si, les sous-espaces sont en somme directe.

Démonstration

Une récurrence suffit. On peut également anticiper un peu et adopter le point de vue suivant.
L'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \longrightarrow & F_1 + \cdots + F_p \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array} \right.$ est, par définition, surjective.

- Si φ est injective, φ est un isomorphisme et alors, $\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right)$.
- Si φ n'est pas injective, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$. ■

Théorème 4.49 : Base adaptée

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si la famille obtenue par concaténation de bases des espaces $F_1, \ldots, F_p$ est une base de E, appelée base adaptée à la somme directe.

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ puis écrire la matrice représentative de f dans une base adaptée à cette somme directe.

II | Applications linéaires

A – Définitions et premières propriétés

Définition 4.50

On dit que f est une application linéaire de E dans F si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

On a plus souvent recours à la caractérisation suivante.

Proposition 4.51

L'application $f : E \to F$ est linéaire si, et seulement si,

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Exemples

- l'application $f:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y,-x,2y) \end{array}\right.$ est linéaire.
- l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)=X^2P''-P$ est linéaire.

Des occasions multiples nous conduiront à rencontrer les applications linéaires suivantes :

- les applications définies sur $\mathbb{K}[X]$ par $P\mapsto P(a)$, $P\mapsto PQ$, $P\mapsto P\circ Q$ et $P\mapsto P'$ où $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $a\in\mathbb{K}$.
- les applications $f\mapsto f'$ et $f\mapsto\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ définies respectivement sur $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$.
- l'application linéaire définie sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\simeq\mathbb{K}^p$ par $X\mapsto AX$ où $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- l'application $x\mapsto(f(x),g(x))$ où $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(E,G)$.
- l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ définie sur l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes.

Exercice 11

Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ non nul. On note T l'application qui à $P\in\mathbb{C}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que T est linéaire et en donner une interprétation géométrique.

Proposition 4.52

Si $f:E\to F$ est linéaire, alors $f(0_E)=0_F$.

Cette propriété est une simple conséquence de la définition d'une application linéaire.

Exemple

L'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(x+2y+1,x-y)$ n'est pas linéaire. En effet, $\varphi(0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

Proposition 4.53

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4.54

Soient $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$ où E, F et G sont des espaces vectoriels. Alors,

- $g\circ f$ est linéaire.
- Si f est de plus bijective, f^{-1} est également linéaire.

$(\mathscr{L}(E,F),+,\circ)$ possède une structure d'anneau.

On remarquera que si $f:E\to F$, $f^{-1}:F\to E$ donc $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_E$ alors que $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_F$.

Exemple

L'application définie sur $\mathbb{K}[X]$ par $\varphi(P)=X^2P''-P$ est linéaire comme somme et composée des applications linéaires $P\mapsto P$, $P\mapsto P'$ et $P\mapsto X^2P$.

Proposition 4.55

Si E et F sont de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim(\mathscr{L}(E,F))=\dim E\times\dim F$$

En particulier, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires a même dimension que E.

Définition 4.56

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Il est appelé groupe linéaire.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + 2y - z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

Attention, $\mathrm{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel. Il possède cependant une structure de groupe, d'où son nom.

B – Image et noyau d'une application linéaire

Dans toute cette partie, on considère $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et F ne sont pas réduits à $\{0\}$.

1 – Image, rang et surjectivité

Définition 4.57

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

On retiendra que :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in E, \quad y = f(x)$$

Tout vecteur s'écrivant sous la forme $f(\cdots)$ appartient à l'image de f.

Théorème 4.58

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

On obtient facilement une famille génératrice de l'image en prenant l'image par f d'une base quelconque de E. Il suffit alors de retirer les vecteurs « en trop » pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(f)$. C'est le moyen le plus courant pour déterminer l'image d'une application linéaire.

Théorème 4.59

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}\big(f(e_i)\big)$.

Démonstration

$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in E,\ y = f(x) \iff \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle},\ y = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i)$$

Comme annoncé, $\mathrm{Im}(f) = \underset{i \in I}{\mathrm{Vect}}\big(f(e_i)\big)$. ■

Théorème / Définition 4.60

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.
Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration

Si E est de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ pour une certaine base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. $\mathrm{Im}(f)$ admet donc une famille génératrice finie. De plus, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(E)$. ■

f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$. En dimension finie, l'égalité entre les dimensions suffit.

Corollaire 4.61

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et E de dimension finie, alors f surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Reprenons les deux exemples du paragraphe précédent pour étudier la surjectivité des applications.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Déterminons son image. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve :

$$f(e_1) = (2, 0, -1)\,; \quad f(e_2) = (-1, 1, 0)\,; \quad f(e_3) = (0, 1, 1)$$

Cette dernière famille est libre puisque $\det(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = 3 \neq 0$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, qui est ainsi de dimension 3. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ donc f est surjective.

Exemple 2

Étudions la surjectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'image de φ.

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$$

$\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc φ n'est pas surjective.

2 – Noyau et injectivité

Définition 4.62

On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

On rappelle que si A est un ensemble, $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de A. La notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que f est bijective ! On retiendra que :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F$$

Théorème 4.63

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention, 0_E n'est pas toujours le seul antécédent de 0_F, on se méfiera de l'implication souvent fausse : $f(x) = 0_F \Longrightarrow x = 0_E$. Cette propriété est vraie lorsque l'application est injective. Et dans le cas d'une application linéaire, il suffit réciproquement que cette propriété soit vérifiée pour que l'application soit injective.

Théorème 4.64

L'application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Démonstration

Démontrons ce résultat par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective, c'est-à-dire que : $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $f(x) = 0_F = f(0_E)$, par injectivité, $x = 0_E$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Considérons $x, y \in E$ quelconques.

$$f(x) = f(y) \underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{\iff} f(x - y) = 0_F \iff x - y \in \mathrm{Ker}(f)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$. ■

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z)=(2x-y,y+z,z-x)$. Étudions l'injectivité de f.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z)=(0,0,0) \iff (2x-y,y+z,z-x)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases}2x-y=0\\ y+z=0\\ z-x=0\end{cases} \iff x=y=z=0\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et f est injective.

Exemple 2

Étudions l'injectivité de l'endomorphisme $\varphi: P\mapsto XP'-P$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Vérifions pour commencer que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$:
  - ⋆ φ est linéaire : pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,
  $$\varphi(\lambda P+Q)=X(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)=\lambda(XP'-P)+(XQ'-Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$
  - ⋆ φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ puisque pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $\deg(\varphi(P))\leqslant \max\big(\deg(XP'),\deg(P)\big)\leqslant 2$.
- Déterminons le noyau de φ.
$$P=aX^2+bX+c\in\mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(X)=aX^2-c=0_{\mathbb{R}[X]}$$
Or deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes coefficients. Donc par identification, $a=c=0$. Ainsi, $P=bX$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(X)$. L'application n'est donc pas injective.

Exercice 12

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ distincts.

(i) Montrer que si $\Phi\in\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(\Phi^2-(\alpha+\beta)\Phi+\alpha\beta\,\mathrm{id}_E)=\mathrm{Ker}(\Phi-\alpha\,\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(\Phi-\beta\,\mathrm{id}_E)$.

(ii) En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y''=(\alpha+\beta)y'-\alpha\beta y$.

3 – Théorème du rang et bijectivité

Théorème 4.65 : Caractérisation de la bijectivité par l'image d'une base

Soient $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

(i) f est surjective si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

(ii) f est injective si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

(iii) f est un isomorphisme si, et seulement si, $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration

Le point (i) étant déjà prouvé, il nous reste à démontrer le point (ii).

- Supposons que f est injective. Considérons une famille $(\lambda_i)\in\mathbb{K}^I$ presque nulle telle que $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i f(e_i)=0_F$.

  Par linéarité, $f\left(\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\right)=0_F$. Par injectivité, $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i e_i=0_E$. Ce qui implique la nullité des λ_i.
- Réciproquement, supposons que $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre et prenons $x\in\mathrm{Ker}(f)$. $x=\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$ puis $f(x)=0_F=\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i f(e_i)$ amènent la nullité des λ_I. x est ainsi nul ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$. ■

L'image de toute base par un isomorphisme est donc une base, et réciproquement. Il en découle que deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E)=\dim(F)$.

Théorème 4.66 : Théorème du rang

On suppose que E est de *dimension finie*. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{=\operatorname{rg}(f)}$$

On notera que dans le théorème du rang, seule la dimension de l'espace de départ intervient. Ce résultat n'a plus de sens lorsqu'il est de dimension infinie mais nous pouvons en donner une forme plus générale.

Théorème 4.67 : Forme géométrique du théorème du rang

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions quelconques et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $\operatorname{Ker}(f)$ possède un supplémentaire I dans E, alors f induit un isomorphisme de I sur $\operatorname{Im}(f)$.

Ce théorème nous dit que *modulo* son noyau, une application linéaire est bijective.

Démonstration

On suppose donc que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus I$. Rappelons que la restriction $f_{|I}$ est linéaire et $f_{|I} : I \longrightarrow \operatorname{Im}(f)$.

- L'application $f_{|I}$ est injective : $\operatorname{Ker}(f_{|I}) = \operatorname{Ker}(f) \cap I = \{0_E\}$.
- L'application $f_{|I}$ est surjective. En effet, soit $y \in \operatorname{Im}(f)$, i.e. $y = f(x)$ avec $x \in E$. Il existe alors $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(f) \times I$ tel que $x = x_1 + x_2$. Ainsi, $y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) = f_{|I}(x_2)$.

Tout supplémentaire à $\operatorname{Ker}(f)$ est donc isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$. ■

Corollaire 4.68

Soit f un *endomorphisme* de E, où E est de *dimension finie*. Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ sujective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration

La preuve repose sur le théorème du rang :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0 \\ &\iff \dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) \iff \operatorname{Im}(f) = E \iff f \text{ surjective} \end{aligned}$$

L'hypothèse de dimension finie nous permet d'utiliser le théorème du rang, le fait que f soit un endomorphisme permet de justifier que $\operatorname{Im}(f) \subset E$ puis que $\operatorname{Im}(f) = E$ par égalité des dimensions. ■

En dimension finie, un endomorphisme est bijectif dès qu'il est injectif ou surjectif! Il est souvent plus simple de prouver la bijectivité en commençant par justifier l'injectivité de l'application et ce, en montrant que le noyau est réduit à $\{0_E\}$. Mais il n'y a pas de règle générale...

On déduit du corollaire qu'en dimension finie, si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $f \circ g = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Évoquons enfin une dernière conséquence particulièrement éclairante dans son expression matricielle.

Corollaire 4.69

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \in \mathscr{L}(E,F)$ et $w \in \mathscr{L}(G,E)$.

- Si v est surjective, $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.
- Si w est injective, $\operatorname{rg}(w \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.
- En particulier, si v et w sont bijectives, $\operatorname{rg}(w \circ u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

Démonstration

Sous les hypothèses précédentes, $\operatorname{Im}(u \circ v) = u(\operatorname{Im}(v)) = \operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(w \circ u) = \operatorname{Ker}(u)$. ■

Exercice 13

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie.
À quelle condition sur F et G existe-t-il $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker}(f) = F$ et $\operatorname{Im}(f) = G$?

4 – Résolution d'une équation linéaire

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $y \in F$.

- Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, il n'y a aucune solution.
- Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$.
  Le problème admet donc au moins une solution. De plus,
  $$y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Longleftrightarrow x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$$
  Les solutions sont donc de la forme $x_0 + u$ où $u \in \mathrm{Ker}(f)$. L'ensemble des solutions s'écrit $\mathscr{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.
  Il possède une structure de sous-espace affine.
  Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, il n'y a qu'une solution, x_0. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$, il y en a une infinité.

On retrouve un résultat bien connu : dans un problème linéaire, les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène...

C – Représentation matricielle

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Dans toute cette partie, E et F sont supposés de dimension finie.

1 – Trace d'une matrice

Définition 4.70

On appelle trace d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M.

En d'autres termes, $\mathrm{Tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

Exemple

Si $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Proposition 4.71

Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 4.72

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Attention, les matrices AB et BA sont généralement différentes, même si elles ont la même trace.

Démonstration

$(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$ et $(BA)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$.

Les indices de sommation étant muets, $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$. De plus, les sommes considérées sont finies donc l'ordre de sommation n'importe pas. L'égalité est donc établie. ■

Exemple

Les deux matrices suivantes ont bien même trace :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \ ; \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

Exercice 14

Déterminer la dimension de $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

2 – Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ une base de F.

Soit $u\in E$ quelconque. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ tels que $u=\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j e_j$. Par linéarité,

$$f(u)=f\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f(e_j)$$

Pour déterminer $f(u)$ à partir de u, il faut et il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par f, c'est-à-dire de connaître les vecteurs $f(e_j)$. On vient simplement de montrer :

Théorème 4.73

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

De plus, les vecteurs $f(e_j)$ sont des éléments de F. Ils peuvent donc s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs f_i, à savoir :

$$\forall j\in[\![1,p]\!],\quad f(e_j)=\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}f_i$$

Définition 4.74 : Matrice d'une application linéaire

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(f)$ ou bien $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p)\end{array}\\
\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{array} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}
\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Si $E=F$, on prend généralement $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$ et on obtient la matrice carrée :

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n)\end{array}\\
\begin{array}{c} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{array} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}
\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\in\mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$$

Si $f=\mathrm{id}_E$ alors dans toute base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=I_n$.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z)=(2x-y,y+z,z-x)$.
On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ avec :

$$e_1'=(1,1,0),\quad e_2'=(0,0,1),\quad e_3'=(0,1,1)$$

Montrons que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

- ⋆ Tout d'abord, $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.
- ⋆ $f(e_1)=(2,0,-1)=2e_1-e_3$, $f(e_2)=(-1,1,0)=-e_1+e_2$ et $f(e_3)=(0,1,1)=e_2+e_3$ donc :

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\end{array}\\
\begin{array}{c} e_1\\ e_2\\ e_3\end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

- $\star$ $f(e_1)=(2,0,-1)=2e'_1+e'_2-2e'_3$, $f(e_2)=(-1,1,0)=-e'_1-2e'_2+2e'_3$ et $f(e_3)=(0,1,1)=e'_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

Pour déterminer les coordonnées du vecteur $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}'$, on peut déterminer $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $f(e_1)=\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3$ à l'aide d'un système linéaire, ou bien effectuer les calculs de tête.

- $\star$ $f(e'_1)=(1,1,-1)=e'_1-e'_2$, $f(e'_2)=(0,1,1)=e'_3$ et $f(e'_3)=(-1,2,1)=-e'_1-2e'_2+3e'_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

Pour s'exercer, on déterminera Mat$_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 2

Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de l'endomorphisme $\varphi : P\mapsto XP'-P$.
$\varphi(1)=-1$, $\varphi(X)=0$ et $\varphi(X^2)=X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour s'exercer, on écrira la matrice représentative de φ dans la base $(1+X, X^2+X, X^2+X+1)$ en montrant préalablement qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3 – Image d'un vecteur

Proposition 4.75

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Soient $x\in E$ et $f\in\mathscr{L}(E,F)$. On pose $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x))=MX$.

Exemple 2 (bis)

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe précédent. $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On retrouve bien $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$.

4 – Composition d'applications et produit matriciel

On suppose par la suite que f est un endomorphisme de E, ce qui revient à prendre $F=E$.

Proposition 4.76

On considère deux endomorphismes f et g de E et on note $\mathscr{B}$ une base de cet espace.

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f\circ g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(iii) f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

Voici un tableau de correspondance synthétisant les propriétés qui viennent d'être exposées :

Représentation vectorielle	Représentation matricielle
$x \in E$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x) \in E$	$MX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f+g \in \mathscr{L}(E)$	$M+N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$f \circ g \in \mathscr{L}(E)$	$MN \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
f^{-1}, $f \in \mathrm{GL}(E)$	M^{-1}, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

5 – Changement de base, équivalence et similitude

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ – ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right] \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$$

La matrice P est inversible et P^{-1} représente la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.77 : Formules de changement de base

(i) Soit $x \in E$. Si on note X (resp. X') le vecteur coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$),

$$X = PX' \quad \text{c'est-à-dire} \quad X' = P^{-1}X$$

(ii) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si on note M (resp. M') la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$),

$$M' = P^{-1}MP$$

Démonstration

(ii) D'après ce qui précède, $f(x)$ a pour coordonnées MX dans la base $\mathscr{B}$ et $M'X'$ dans la base $\mathscr{B}'$. Ainsi, $M'X' = P^{-1}(MX)$, ce qui donne $M'P^{-1}X = P^{-1}MX$.
L'égalité précédente étant valable quel que soit le vecteur X, un résultat de première année montre que $M'P^{-1} = P^{-1}M$, c'est-à-dire que $M' = P^{-1}MP$. ■

N'oublions pas que pour déterminer X' en fonction de X, on doit inverser un système. D'où la présence de la matrice P^{-1} dans la formule $X' = P^{-1}X$.

Exemple 1 (bis)

Reprenons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$. Notons M sa matrice dana la base canonique et M' sa matrice dans la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,1,0)$, $e'_2 = (0,0,1)$, $e'_3 = (0,1,1)$.

$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Après calcul, on trouve $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ce qui était exactement ce que nous avions trouvé auparavant.

Définition 4.78 : Matrices semblables

Deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M' = P^{-1}MP$$

Toute matrice inversible pouvant s'interpréter comme une matrice de passage, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Elles vérifient donc, comme nous allons le constater, un certain nombre de propriétés communes.

Proposition 4.79

Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Démonstration

Considérons deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M' = P^{-1}MP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(i) Le rang d'un endomorphisme étant égal au rang de sa matrice représentative dans n'importe quelle base, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M')$.

(ii) $\mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(MP)) = \mathrm{Tr}((MP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$;

(iii) $\det(M') = \det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \dfrac{1}{\det(P)}\det(M)\det(P) = \det(M)$. ■

Le déterminant et la trace étant invariants par changement de base, on peut donner la définition suivante.

Définition 4.80

On appelle déterminant (respectivement trace) d'un endomorphisme f et on note $\det(f)$ (respectivement $\mathrm{Tr}(f)$), le déterminant (respectivement la trace) de toute matrice représentative de f.

Exemple

Dans l'exemple 1, on vérifie bien que : $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M') = 4$ et $\det(M) = \det(M') = 3$.

Théorème 4.81 : Formule de changement de base (généralisation)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de F. On pose $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$ ainsi que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$. Alors :

$$M' = Q^{-1}MP$$

Définition 4.82 : Matrices équivalentes

Soient $M, M' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. M et M' sont dites équivalentes s'il existe deux matrices $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$M' = Q^{-1}MP$$

On rappelle que lorsque M et M' sont deux matrices équivalentes, on peut passer de M à M' par une série d'opérations élémentaires sur les lignes, c'est même une caractérisation des matrices équivalentes.

Théorème 4.83

- Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.
- Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors M est équivalente à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration

Le premier point découle du second. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Construisons une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$ et une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telles que $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_r$.

- $\text{Ker}(u)$ étant de dimension $p - r$ (théorème du rang), considérons une base de $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\text{Ker}(u)$ que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$.
Les $p - r$ dernières colonnes de $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ seront nulles.
- Pour obtenir les p premières colonnes souhaitées, il suffit de poser $f_j = f(e_j)$ pour $j \in [\![1, r]\!]$. En effet, cette dernière famille est une base de $\text{Im}(u)$ et il ne reste qu'à la compléter en une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$. ■

6 – Matrice, image et noyau

Il est souvent plus simple de travailler avec des matrices que des applications linéaires. On considère pour cela une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$x \in \text{Ker}(f) \iff MX = 0 \ \text{ avec } \ X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \ \text{ et } \ M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

Exemple

L'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ admet comme matrice dans la base canonique : $\varphi(1) = -1$, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. D'où,

$$P = a + bX + cX^2 \in \text{Ker}(\varphi) \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Attention à ne pas conclure que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}((0,1,0))$ mais plutôt $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X)$: n'oublions pas que $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$. On travaillait jusqu'à présent avec des coordonnées.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(f) &\iff x \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &\iff X \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \text{ avec } X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } C_i \text{ la } i^{\text{e}} \text{ colonne de } M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{aligned}$$

Exemple (suite)

La matrice de l'exemple précédent nous donne directement $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(-1, 0, X^2) = \text{Vect}(1, X^2)$.
Cette famille génératrice est même une base car $(1, X^2)$ est libre.

D – Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Rappelons que si F est un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(E)$, la restriction de u à F, notée $u_{|F}$, est également linéaire. De plus,

$$\text{Ker}(u_{|F}) = \text{Ker}(u) \cap F \qquad \text{et} \qquad \text{Im}(u_{|F}) = u(F)$$

Lorsque $E = F \oplus G$, connaître u revient à connaître $u_{|F}$ et $u_{|G}$ et réciproquement. Plus généralement, on définit un unique endomorphisme de E par la donnée de ses restrictions à des sous-espaces dont la somme directe est égale à E.

Proposition 4.84

Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$.

Alors, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.

Démonstration

Soit p_i la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_j$. L'application linéaire $u=\sum_{i=1}^{p} u\circ p_i$ convient.

u est unique : si v vérifie les mêmes hypothèses que u, $v-u$ s'annule sur tous les E_i donc sur E. ■

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la restriction s'effectue sur un sous-espace stable par u.

Définition 4.85

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F\subset E$ est stable par $u\in\mathscr{L}(E)$ si $u(F)\subset F$, autrement dit si :

$$\forall x\in F,\quad u(x)\in F$$

Dans ce cas, l'application restreinte $u_{|F}$, définie sur F, est à valeurs dans F. Étant de plus linéaire, $u_{|F}$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit.

Définition 4.86

On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u\in\mathscr{L}(E)$.
L'application linéaire $u_{|F}$ est appelée endomorphisme induit par u sur F.

Exercice 15

Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\Delta(P)=P(X+1)-P(X)$.

(i) Étudier le noyau et l'image de $\Delta_{|\mathbb{K}_n[X]}$. En déduire la surjectivité et la non-injectivité de Δ.

(ii) On note δ l'application de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par $\delta(u)=v$ où $v_n=u_{n+1}-u_n$. Montrer que si $\delta^p(u)=0$ pour une certaine suite u et un certain entier p, alors il existe $P\in\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=P(n)$.

Adoptons maintenant un point de vue matriciel. Supposons pour cela E de dimension finie et complétons une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Alors,

$$\begin{array}{c} \\ e_1\\ \vdots\\ e_p\\ e_{p+1}\\ \vdots\\ e_n\end{array}
\begin{array}{c} u(e_1)\ \cdots\ u(e_p)\quad u(e_{p+1})\cdots u(e_n)\\ \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}\left(u_{|F}\right) & \star\\ \hline 0 & \star \end{array}\right]\end{array} = \mathrm{Mat}(u)$$

Si $E=F\oplus G$ et si F et G sont stables par u, dans une base *adaptée* :

$$\begin{array}{c} \\ e_1\\ \vdots\\ e_p\\ e_{p+1}\\ \vdots\\ e_n\end{array}
\begin{array}{c} u(e_1)\ \cdots\ u(e_p)\quad u(e_{p+1})\cdots u(e_n)\\ \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}\left(f_{|F}\right) & 0\\ \hline 0 & \mathrm{Mat}\left(f_{|G}\right) \end{array}\right]\end{array} = \mathrm{Mat}(u)$$

Réciproquement, toute présence de blocs nuls dans une matrice définie par blocs peut s'interpréter comme une condition de stabilité.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) est $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&5&6\\0&0&7&8\end{bmatrix}$.

$F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $G=\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$ sont stables par u et les blocs non nuls font apparaître les matrices représentatives des endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u_{|G}$ resp. dans les bases (e_1,e_2) de F et (e_3,e_4) de G.

Supposons maintenant que $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, tous stables par $u \in \mathscr{L}(E)$. La matrice de u sera alors, dans une base adaptée, diagonale par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_p \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad M_i = \mathrm{Mat}(u_i)$$

Réduire u consiste à écrire E comme somme directe de sous-espaces stables par u pour lesquels les matrices associées seront les plus simples possibles, par exemple diagonales ou triangulaires. Déterminer des conditions pour établir l'existence de tels espaces est l'est un des grands objectifs du programme d'algèbre de MP.

E – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

1 – Homothétie

On appelle homothétie de rapport λ l'endomorphisme $h = \lambda \mathrm{id}_E$.

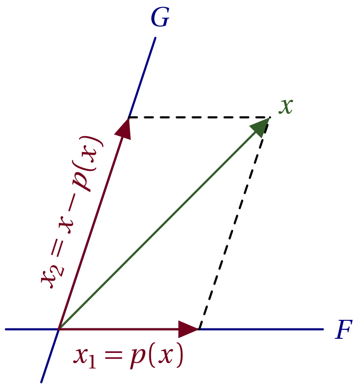
2 – Projecteur vectoriel

Définition 4.87 : Projecteur vectoriel

On suppose que $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application p définie par :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x_1$$

On vérifie aisément que p est linéaire. C'est même l'unique application linéaire définie par $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$. On notera que par définition, $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.



Projection d'un vecteur x sur F, parallèlement à G

Théorème 4.88 : Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ ssi $p \circ p = p$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $x \in E$, $p(p(x)) = p(x)$ car $p(x) \in F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p \circ p = p$ et montrons que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

- $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$. En effet, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$. $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ puisque $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$.
- De plus, $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$. $p(x) = 0_E$ et il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. Ainsi, $p(x) = 0_E = p(p(x')) = p(x') = x$.

Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}\, p \times \mathrm{Ker}\, p$ alors,

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = p(p(y_1)) = p(y_1) = x_1$$

p est bien la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. ■

Proposition 4.89

Si p est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

Démonstration

- $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(p)$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.
- $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. En effet, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, $x = p(x')$ avec $x' \in E$.
  Alors, $p(x) = p(p(x')) = p(x') = x$ d'où $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. ■

Exercice 16

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques géométriques.

Soit p une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p)$ vérifie $p(x) = 0_E$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Im}(p)$ vérifie $p(x) = x$. Considérons maintenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

Dans cette base, la matrice de p est diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Si l'on pose $q = \mathrm{id}_E - p$, q est également un projecteur : il s'agit du projecteur sur G parallèlement à F.
$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $p + q = \mathrm{id}_E$.

Généralisons ce résultat pour une somme directe de n espaces vectoriels en supposant donc que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

Ainsi, tout vecteur x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ où $x_i \in E_i$. Notons alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, p_i l'application définie sur E par $p_i(x) = x_i$. On montre aisément le résultat suivant :

Proposition 4.90

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, p_i est la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E_k$. De plus,

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

3 – Symétrie vectorielle

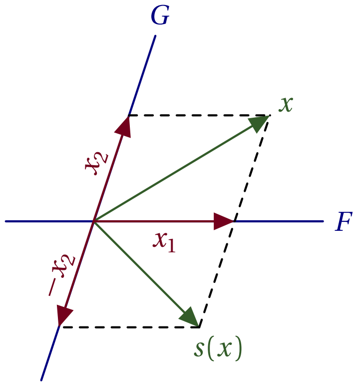
Définition 4.91 : Symétries vectorielles

On suppose que $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s définie par :

$$\forall x \in E, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

On vérifie que s est linéaire. C'est même l'unique application linéaire définie par $s_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$.
On notera que par définition, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Ainsi, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

En conservant les notations du paragraphe précédent, $s = 2p - \mathrm{id}_E$.



Symétrie d'un vecteur x par rapport à F, parallèlement à G

Attention, deux sous-espaces vectoriels F et G de E n'étant pas nécessairement orthogonaux, les normes des vecteurs x et $s(x)$ diffèrent en général.

Théorème 4.92 : Caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ si, et seulement si, $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que s est la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G et considérons $x \in E$.

$$s(s(x)) = s(x_1 - x_2) = x_1 + x_2 = x$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

(a) Montrons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Procédons pour cela par analyse/synthèse.

- *Analyse*
  Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe deux vecteurs $x_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. $s(x) = x_1 - x_2$. Donc nécessairement, $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x_2 = \dfrac{x - s(x)}{2}$.
- *Synthèse*
  Soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x_2 = \dfrac{x - s(x)}{2}$. $x = x_1 + x_2$ et, de plus,
  $$s(x_1) = \frac{s(x) + s(s(x))}{2} = \frac{x + s(x)}{2} = x_1 \text{ et } s(x_2) = \frac{s(x) - s(s(x))}{2} = -\frac{x - s(x)}{2} = -x_2$$
  donc $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Nous avons ainsi prouvé que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

(b) Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ alors,

$$s(x) = s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$$

s est bien la symétrie vectorielle sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. ■

Exercice 17

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que g est une symétrie vectorielle et préciser ses caractéristiques géométriques.

Soit s une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x)=x$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x)=-x$. Considérons maintenant une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.

Dans cette base, la matrice de s est diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 18

Pour chacun des endomorphismes précédemment définis (homothétie, projecteur, symétrie), préciser leur trace, leur rang et leur déterminant. Qui, parmi eux, sont des automorphismes ?

III | Formes linéaires et hyperplans

Terminons ce tour d'horizon par l'étude d'autres applications linéaires remarquables, les formes linéaires, dont les noyaux généralisent à tout espace vectoriel la notion de plan étudiée depuis bien longtemps dans $\mathbb{R}^3$.

E désigne à nouveau dans les prochains paragraphes un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

A – Formes linéaires et espace dual

Définition 4.93

On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires est appelé espace dual et est noté E^*.

Si E est de dimension finie, $\dim(E^*)=\dim(E)$.

Exemples

- pour tout $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$, l'application $(x_1,\dots,x_n)\mapsto\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$;
- Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- pour tout élément a de l'intervalle I, l'application « évaluation » $f\mapsto f(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^I$;
- si $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel et $y\in E$, l'application $x\mapsto\langle x,y\rangle$ est une forme linéaire sur E.

Supposons E de dimension finie et notons $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On appelle formes coordonnées associées à la base $\mathscr{B}$ les formes linéaires :

$$e_i^* : x=\sum_{i=1}^n x_ie_i \mapsto x_i$$

En particulier, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j)=\delta_{i,j}$.

Théorème 4.94 : Base duale (pour votre culture, HP)

La famille $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ des formes coordonnées associées à la base $\mathscr{B}$ est une base de l'espace dual E^*.

Démonstration

- Soit $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. Pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $\varphi(x)=\sum_{i=1}^n x_i\varphi(e_i)=\sum_{i=1}^n \alpha_ie_i^*(x)$ en posant $\alpha_i=\varphi(e_i)\in\mathbb{K}$.

  Ainsi, $\varphi=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i^*$, ce qui prouve que la famille $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ engendre bien $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

- Montrons maintenant que la famille est libre en considérant $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i^*=0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$.

  En évaluant l'égalité en e_j, on trouve $\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i^*(e_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta_{i,j}=\alpha_j=0_{\mathbb{K}}$. ■

En d'autres termes, les formes linéaires ne sont rien d'autres en dimension finie que des combinaisons linéaires des formes coordonnées.

Exemple

Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont exactement les applications de la formes $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n$.

Exercice 19

On travaille ici dans $E=\mathbb{K}_n[X]$.

(i) Déterminer la base duale associée à la base $(1,X,\dots,X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

(ii) Trouver une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour laquelle la base duale sera $(P\mapsto P(\alpha_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ où $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ sont $n+1$ scalaires distincts.

B – Hyperplans

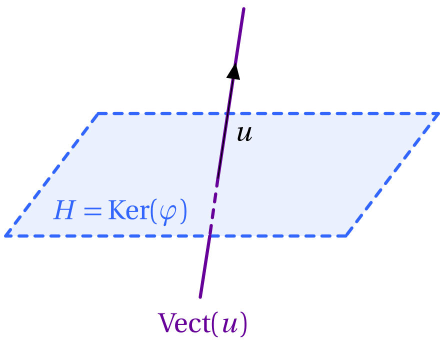
Définition 4.95 : Hyperplan

On appelle hyperplan de E tout noyau de forme linéaire *non nulle*.

Le noyau de la forme linéaire nulle est E, on exclut ainsi E de ses hyperplans.

Exemples

- le plan vectoriel d'équation $x+y-z=0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$;
- l'ensemble $\left\{f\in\mathscr{C}([a,b]),\int_a^b f=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}([a,b])$.



Représentation d'un hyperplan en dimension 3

Supposons E de dimension finie n et soit H un hyperplan de E. $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ avec $\varphi\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ non nulle. $\mathrm{Im}\,\varphi\subset\mathbb{K}$ donc $0\leqslant \mathrm{rg}(\varphi)\leqslant 1$. Comme φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi)=1$ donc d'après le théorème du rang, $\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=n-1$. Nous allons voir que réciproquement, tout sous-espace de dimension $n-1$ est un hyperplan de E.

Ainsi, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ seront les droites vectorielles ; les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ les plans vectoriels.

Les hyperplans ne sont que la généralisation de la notion de plan en dimension supérieure.

Théorème 4.96 : Caractérisation d'un hyperplan

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement si H admet une droite vectorielle comme supplémentaire.
Autrement dit, H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $u\in E$ non nul tel que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(u)$.

Démonstration

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(u)$ avec $u\neq 0_E$. Tout vecteur $x\in E$ s'écrit, de façon unique, $x=h+\lambda u$ avec $h\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On introduit alors φ l'unique application linéaire définie par $\varphi(x)=\lambda$. On vérifie que φ est une forme linéaire non nulle. De plus, $x\in H\iff\varphi(x)=0$, donc $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ avec φ une forme linéaire non nulle. Il existe donc $u\in E$ tel que $\varphi(u)\neq 0_{\mathbb{K}}$. Montrons que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(u)$ par analyse-synthèse. Soit $x\in E$.

- *Analyse* – supposons que $x=h+\lambda u$ avec $h\in H$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors, $\varphi(x)=\lambda\varphi(u)$. Ainsi,

$$x=\left(x-\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u\right)+\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u$$

- *Synthèse* – Il suffit de vérifier que $x-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u\in H$: $\varphi\left(x-\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u\right)=\varphi(x)-\varphi(x)=0_{\mathbb{K}}$. ■

Exemple

Déterminons un supplémentaire de $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-2y+z=t\}$.
F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ comme noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z,t)\mapsto 3x-2y+z-t$.
D'après ce qu'il précède, il suffit de prendre un vecteur $u\notin F$ pour avoir un supplémentaire de F (qui est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$). On prendra par exemple $u=(1,1,1,1)$.

Théorème 4.97 : Caractérisation d'un hyperplan en dimension finie

On suppose E de dimension n. H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H)=n-1$.

Tout droite du plan admet une équation de la forme $ax+by=0$ et tout plan de l'espace admet une équation de la forme $ax+by+cz=0$. Nous allons généraliser ce résultat en supposant E de dimension n et en introduisant une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Soient $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ un hyperplan de E et $x\in E$.

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n\in H \iff \varphi(x_1e_1+\dots+x_ne_n)=0 \iff \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0$$

en posant pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_i=\varphi(e_i)\in\mathbb{K}$.

Attention, tout comme il n'y a pas unicité de l'équation d'un hyperplan dans une base donnée, il n'y a pas non plus unicité de la forme linéaire φ.

Proposition 4.98

Soient φ,ψ deux formes linéaires non nulles sur E, de même noyau H. Il existe $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $\varphi=\lambda\psi$.

Autrement dit, deux équations linéaires d'un même hyperplan sont proportionnelles.

Démonstration

D'après ce qui précède, $E=H\oplus\mathrm{Vect}(u)$. Si $\varphi=\lambda\psi$ alors $\varphi(u)=\lambda\psi(u)$. D'où $\lambda=\dfrac{\varphi(u)}{\psi(u)}$. Réciproquement, pour une telle valeur de λ, φ et $\lambda\psi$ coïncident sur H (c'est trivial !) mais aussi sur $\mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, $\varphi=\lambda\psi$. ■

Proposition 4.99 : Intersection de p hyperplans

Soient E un espace de dimension n et p un entier inférieur ou égal à n.

(i) L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace de dimension au moins $n-p$.

(ii) Tout sous-espace de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Démonstration

(i) Considérons p hyperplans de E, notés $H_1,\dots,H_p$. Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, notons φ_i une forme linéaire non nulle de E telle que $H_i=\mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Considérons enfin l'application linéaire :

$$\varphi:\left|\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)) \end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker}(\varphi)=\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}(\varphi_i)=\bigcap_{i=1}^{p}H_i$ et, comme $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathbb{K}^p$, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p}H_i\right)=\dim(E)-\mathrm{rg}(\varphi)\geqslant n-p$$

(ii) Considérons maintenant un sous-espace F de E de dimension $n-p$. Notons $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. Posons alors :

$$\forall i\in[\![1,p]\!],\quad H_i=\underset{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}{\mathrm{Vect}}(e_k)$$

On laisse aux lecteurs le soin de montrer que les espaces H_i sont des hyperplans d'intersection F. ■

Considérons le système d'équation linéaires $n \times p$ sans second membre suivant :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_p + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Il peut s'interpréter naturellement comme l'intersection de p hyperplans, chaque équation linéaire représentant un hyperplan donné. D'après ce qui précède, l'ensemble des solutions sera donc un espace vectoriel de dimension *au moins* $n-p$. Attention cependant, la dimension ne sera égale à $n-p$ que si les équations sont linéairement indépendantes. Dans le cas d'équations indépendantes, chaque équation supplémentaire impose une nouvelle contrainte sur l'ensemble des solutions, d'où la perte d'un degré de liberté.

Exemples

Considérons les deux systèmes :

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma_2) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations de ces deux systèmes sont linéairement indépendantes. L'ensemble des solutions est donc de dimension au plus 1. La dernière équation de (Σ_1) est linéairement indépendante des deux autres donc l'ensemble des solutions est de dimension 0, seul le triplet $(0,0,0)$ est solution. La dernière équation de (Σ_2) étant quant à elle la somme des deux premières, l'ensemble des solutions est un espace de dimension 1, c'est la droite vectorielle d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$