TD 33 – Produits scalaires

Ex 1 :

1) $\{(0,1,1,1)\}^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } y+z+t=0\}$

C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ dont une base est :

$((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,-1))$

$$p_{\mathbb{R}u} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & \dfrac{(x,y,z,t)\cdot u}{\|u\|^2}\, u \\ & & = \dfrac{y+z+t}{3}(0,1,1,1) \end{array}$$

$$p_{(\mathbb{R}u)^\perp} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x,y,z,t) - \dfrac{y+z+t}{3}(0,1,1,1) \end{array}$$

2) $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$P^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \begin{cases} y+z+t=0 \\ y+t=0 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \begin{cases} z=0 \\ y=-t \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\\-y\end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Puis $p_P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$u \longmapsto u.v_1' \times v_1' + u.v_2' \times v_2'$$

On orthonormalise : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On prend : $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis $v_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p\big((x,y,z,t)\big) = \frac{y-2z+t}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y-2z+t}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 3y+3t \\ 6z \\ 3y+3t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y+t \\ 2z \\ y+t \end{pmatrix}$$

$F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$

Soit $u \in E$ $\quad v = p_F(u)$

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$

tq $\forall j \in [\![1, n]\!] \left(u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right) \cdot f_j = 0$

explicat° de

$\boxed{\text{on :}}$ enlève le $p_F(u)$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}^{u} - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z - \mu = 0 \\ y - \lambda + t - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = z \\ \lambda = \frac{y+t}{2} \end{cases} \rightarrow p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y+t}{2} \\ z \\ \frac{y+t}{2} \end{pmatrix}$$

2) $(\mathbb{R} I_3)^{\perp} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } Tr(M) = 0 \}$

$J_3^{\perp} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} M_{ij} = 0 \}$

$$P_{J_3^{\perp}} : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto \frac{M \cdot I_3}{\|I_3\|^2} \times I_3 = \frac{Tr(M)}{3} \times I_3$$

$$Mat_{B_c} P_{\mathbb{R}I_3} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}
\end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbb{R}J_3} : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto \frac{M \cdot J_3}{\|J_3\|^2} J_3 = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} M_{ij}}{9} J_3$$

$$Mat_{B_c} P_{\mathbb{R}J_3} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{1}{9} & & \frac{1}{9} \\
\vdots & & \\
\frac{1}{9} & & \frac{1}{9}
\end{pmatrix}}_{9}\right\} 9$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M' son proj orth sur $\mathrm{Vect}(I_3, J_3)$

$$M' = \begin{pmatrix} \gamma & \lambda & \lambda \\ \lambda & \gamma & \lambda \\ \lambda & \lambda & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

On sait que :

① $(M - M') . I_3 = 0$

② $(M - M') . J_3 = 0$

càd ①

$$\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M') = 0$$

d'où $\mathrm{Tr}(M) - 3\gamma = 0$

donc $\gamma = \dfrac{\mathrm{Tr}\, M}{3}$

d'autre part : ②

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} M_{ij} = 3\gamma + 6\lambda$$
$$= 3 \frac{\mathrm{Tr}(M)}{3} + 6\lambda$$
$$= \mathrm{Tr}(M) + 6\lambda$$

$$p : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a+e+i}{3} & \frac{S}{6} & \frac{S}{6} \\ \frac{S}{6} & \frac{a+e+i}{3} & \frac{S}{6} \\ \frac{S}{6} & \frac{S}{6} & \frac{a+e+i}{3} \end{pmatrix} \text{ avec } S = b+c+d+f+g+h$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}\, p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ \frac{1}{3} & 0 & C_2 & C_2 & C_1 & C_2 & C_2 & C_2 & C_1 \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{6} & & & & & & & \\ \frac{1}{3} & 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Ex 3:

1) P d'équat° : $x+y+3z=0$ dans $\mathcal{B}_c$

$P^\perp = \mathbb{R}(1,1,3)$ ou : Vect $(1,1,3)$

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$ est une BON de $P^\perp$

BON de $P^\perp$: $\mathcal{B}_{P^\perp} = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$$ pour $\mathbb{R}^3$ produit vectoriel marche

$$p : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} u". u" + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} v". v"$$

$$= \frac{1}{2}(-x+y)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{22}(-3x-3y+2z)\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix}11x - 11y + 9x + 9y - 6z\\ -11x + 11y + 9x + 9y - 6z\\ -6x + 6y + 4z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix}20x - 2y - 6z\\ -2x + 20y - 6z\\ -6x + 6y + 4z\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ou:}}$ $p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \cdot$ ——

$\boxed{\text{ou:}}$

Soit $e_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B = (e_1, e_2, e_3)$ est une BON

$$\mathrm{Mat}_B\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{B_c} P = \mathrm{Mat}_{B_c} B \times \mathrm{Mat}_B\, P \times \mathrm{Mat}_B\, B_c$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4) $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, P\right) = \| x - p(x) \|$

$$= \left\| \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{x + y + 3z}{11} \right| \sqrt{11}$$

$$= \frac{x + y + 3z}{\sqrt{11}}$$

Ex 4:

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$

$$\langle S \cdot A \rangle = Tr({}^tSA)$$
$$= Tr(SA)$$
$$= Tr(S(-{}^tA))$$
$$= -Tr(S\,{}^tA) = -Tr({}^tAS) = -\langle A, S\rangle = \langle S, A\rangle$$
$$= -Tr({}^t(S\,{}^tA))$$
$$= -Tr(A\,{}^tS)$$
$$= -Tr({}^tSA)$$

$\boxed{\text{ou:}}$

$$\langle S, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}A_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ji}(-A_{ji})$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ji}A_{ji}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}A_{ij}$$
$$= -\langle S, A\rangle$$

Ex 5:

1) $$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle I_3 . L \rangle = Tr({}^t I_3 \, L)$

$= Tr(L)$

$= 0$

$\langle I_3 , L^2 \rangle = Tr({}^t I_3 \, L^2)$

$= Tr(L^2)$

$= 0$

$\langle L , L^2 \rangle = Tr({}^t L \, L^2) = 0$

donc orthogonaux.

2) $\| I_3 \| = \sqrt{3}$

$\| L \| = \sqrt{2}$

$\| L^2 \| = 1$

donc $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} I_3 , \frac{1}{\sqrt{2}} L , L^2 \right) = (K_0, K_1, K_2)$

BON de F

3) $p : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$

$M \mapsto M.K_0 \; K_0 + M.K_1 \; K_1 + M.K_2 \; K_2$

$= \frac{1}{3} Tr(M) \quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (M_{12} + M_{23}) L + M_{13} L^2$

$$= \begin{pmatrix} \frac{M_{11} + M_{22} + M_{33}}{3} & \frac{M_{13} + M_{23}}{2} & M_{13} \\ 0 & \frac{M_{11} + M_{22} + M_{33}}{3} & \frac{M_{13} + M_{23}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{M_{11} + M_{22} + M_{33}}{3} \end{pmatrix}$$

$B_c = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{9} \Bigg\} 9$$

$$p\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} I_3 \qquad p\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$p\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} L$$

$$p\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = L^2$$

$\dim A = 3$

Ex 6:

1) $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 (fg + f'g')$$

Si $(f,g) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2$

alors $\int_0^1 (fg + f'g')$ bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$

→ Symétrique

Soit $(f, g) \in E^2$

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$$

$$= \int_0^1 (gf + g'f) = \varphi(g, f)$$

→ Bilinéaire (ici $2^{\text{ème}}$ var):

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f, g, h) \in E^3$

$$\varphi(f, \lambda g + h) = \int_0^1 \left(f(\lambda g + h) + f'(\lambda g + h)' \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\lambda fg + fh + \lambda f'g' + f'h' \right)$$

lin $\left\{ \begin{array}{l} \text{dérivée} \\ \text{intégrale} \end{array} \right.$

$$= \lambda \int_0^1 fg + f'g' + \int_0^1 fh + f'h'$$

$$= \lambda \varphi(f, g) + \varphi(f, h)$$

puis par symétrie, on a la lin par rapport à la $1^{\text{ère}}$ v

→ Def positive

Soit $f \in E$

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2 + (f')^2 \geq 0$$

Soit $f \in E$

$$\varphi(f, f) = 0$$

càd $\int_0^1 f^2 + (f')^2 = 0$

Or $f^2 + (f')^2 \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$

donc $\forall x \in [0,1] \quad (f^2 + (f')^2)(x) = 0$

$$= \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0} + \underbrace{(f'(x))^2}_{\geq 0}$$

d'où $f^2(x) = -(f'(x))^2$

donc $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0$

Ainsi $f = 0_E$

2) Mq $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$

Mq $V \perp W$

Soit $(v, w) \in V \times W$

$\langle v, w \rangle = \int_0^1 vw + v'w'$

Or $w \in W$ càd $w = w''$

donc $\varphi(v, w) = \int_0^1 vw'' + v'w'$

$$= [vw']_0^1 = 0 \quad \text{car} \quad v(0) = v(1) = 0$$

Donc $V \perp W$

donc $V - W = V \ominus W$

$W = \{ f \in E \text{ tq } f'' = f \} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto e^{-x},\ x \mapsto e^{x})$

Soit $f \in E$) en dehors de A/S

Analyse:

Supp qu'il existe $(v, w) \in V \times W$ tq $f = v + w$

On a :

$$\begin{cases} f(0) = w(0) \\ f(1) = w(1) \end{cases}$$

Or il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0,1]$ $w(x) = ae^{x} + be^{-x}$

donc on a:

$$\begin{cases} a + b = f(0) \\ ae + be^{-1} = f(1) \end{cases}$$

$\boxed{\text{on:}}$ Système de Cramer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} f(0) & 1 \\ f(1) & \frac{1}{e} \end{vmatrix}}{e^{-1} - e}$$

$$= \left(\frac{1}{e} f(0) - f(1)\right) \frac{1}{e^{-1} - e}$$

$$= \frac{f(0) - ef(1)}{1 - e^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(0) \\ e & f(1) \end{vmatrix}}{e^{-1} - e} = \left(f(1) - ef(0)\right) \times \frac{1}{e^{-1} - e} = \frac{f(1) - ef(0)}{e^{-1} - e}$$

puis on pose $v = f - w$

Synthèse:

On pose:

$$\omega : x \mapsto a e^{x} + b e^{-x} \quad \text{avec} \begin{cases} a = \dfrac{f(0) - e f(1)}{1 - e^2} \\ b = \dfrac{e f(1) - e^2 f(0)}{1 - e^2} \end{cases}$$

$$v = f - \omega$$

Mq $\omega \in W$ ✓

$v \in V$?

$f = v + \omega$ ✓ par constru.

$$v(0) = f(0) - \omega(0)$$
$$= \ldots$$
$$v(1) \ldots$$

Synthèse bis:

Soit $\omega : x \mapsto a e^{x} + b e^{-x}$ où (a, b) est l'unique sol° du syp de Cramer précédent (*)
↳ car det $\neq 0$

et $v = f - \omega$

On a donc $\begin{cases} f = v + \omega \\ \omega \in W \end{cases}$

Vérifions que $v \in V$

$$v(0) = f(0) - (a + b)$$
$$= 0 \quad \text{d'après (*)}$$

$v(1) = f(1) - (ae + be^{-1})$

$= 0$ d'après $(*)$

donc $E \subset V + W$

donc $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$

<u>Méthode 2 :</u>

Comme W de dim finie, $E = W \oplus W^{\perp}$

De plus $V \subset W^{\perp}$

Mq $W^{\perp} \subset V$

Soit $f \in W^{\perp}$

càd $\forall g \in W \quad \varphi(f,g) = 0$

Mq $f \in V$ càd $f(0) = f(1) = 0$

On sait $\forall g \in W \quad \varphi(f,g) = 0$

On a :

$$\int_0^1 \left(f(x)e^x + f'(x)e^x \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(f(x)e^{-x} + f'(x)e^{-x} \right) dx = 0$$

Mq $f(1) = f(0) = 0$

On a :

$$\left[f(x)e^x \right]_0^1 = \left[f(x)e^{-x} \right]_0^1 = 0$$

$$f(1)e - f(0) = f(1)\frac{1}{e} - f(0) = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & e \\ -1 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}}_{\in GL_2 \text{ car } \det \neq 0} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $f(0) = f(1) = 0$

Méthode 3: Mq $W \subset V^\perp$