

Fonctions usuelles

Olivier SELLÈS, transcrit par Denis MERIGOUX

Table des matières

1	Fonctions trigonométriques réciproques	2
1.1	Théorème fondamental (admis)	2
1.2	La fonction Arcsinus	2
1.2.1	Définition	2
1.2.2	Propriétés	2
1.3	La fonction Arccosinus	4
1.3.1	Définition	4
1.3.2	Propriétés	4
1.4	La fonction Arctangente	5
1.4.1	Définition	5
1.4.2	Propriétés	5
2	Fonctions hyperboliques	6
2.1	Théorème : fonctions impaires et paires	6
2.2	Définition des fonctions hyperboliques	7
2.3	Formulaire de trigonométrie hyperbolique	7
2.4	Étude des fonctions hyperboliques	8
2.4.1	Sinus hyperbolique	8
2.4.2	Cosinus hyperbolique	9
2.4.3	Tangente hyperbolique	9
2.5	Fonctions hyperboliques inverses	10
2.5.1	Sinus hyperbolique inverse	10
2.5.2	Cosinus hyperbolique inverse	11

Fonctions trigonométriques réciproques

1.1 Théorème fondamental (admis)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non nul et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. On a alors les résultats suivants :

- (1) $J = f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} dont on sait préciser la forme en fonction de I . En effet, en supposant f strictement croissante (avec des résultats analogues dans le cas où f est strictement décroissante) :
 - Si $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $J = [f(a), f(b)]$.
 - Si $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $J = \left] \lim_a f, f(b) \right]$.
 - Si $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $J = \left[f(a), \lim_b f \right[$.
 - Si $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $J = \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$.
- (2) $\tilde{f} : I \longrightarrow J = f(I)$ est bijective et d'application réciproque f^{-1} . De plus f^{-1} est continue et de la même stricte monotonie que f . On dit que f induit une bijection de I sur J .
- (3) On suppose que f est dérivable sur I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors $g = f^{-1}$ est dérivable en y_0 et

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

1.2 La fonction Arcsinus

1.2.1 Définition

Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante. On a donc $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, ainsi on définit l'application $\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ bijective. Par définition,

$$t \longmapsto \sin t$$

$$\arcsin = \varphi^{-1}$$

1.2.2 Propriétés

Imparité Soit $x \in [-1, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \sin(-\arcsin(x)) &= -\sin(\arcsin(x)) \quad \text{car } \sin \text{ est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in [-1, 1]$, donc

$$\sin(-\arcsin(x)) = -x \Leftrightarrow -\arcsin(x) = \arcsin(-x)$$

Composition avec sinus

- Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
- Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin(x))$ n'est pas toujours égal à x ! En effet,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin \pi) &= \arcsin 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dérivée φ est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(x) = \cos x$. De plus $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi'(x) \neq 0$ donc arcsin est dérivable sur $\varphi(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, et $y = \sin x$,

$$\begin{aligned}\arcsin'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}\sin^2(\arcsin(y)) + \cos^2(\arcsin(y)) &= 1 \Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2 \\ \Leftrightarrow \cos(\arcsin(y)) &= \sqrt{1 - y^2} \quad \text{car } \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Tableau de valeurs

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Graph Voir figure 1.

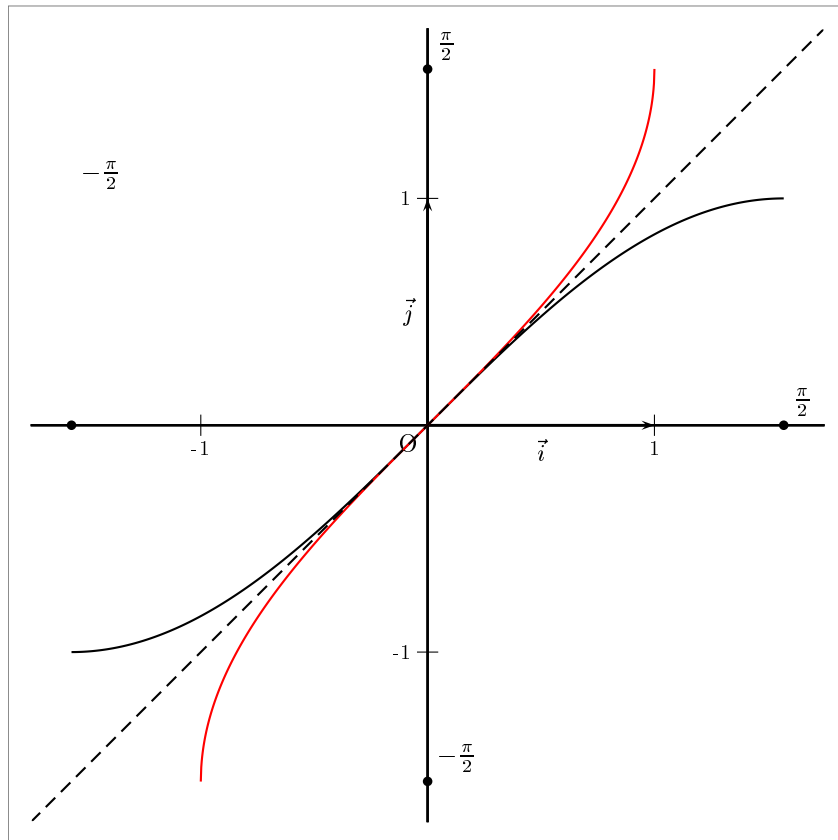


FIGURE 1 – Graphe des fonctions arcsin et sin

1.3 La fonction Arccosinus

1.3.1 Définition

Soit $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement décroissante. On a donc $f([0, \pi]) = [-1, 1]$, ainsi on définit

$$t \longmapsto \cos t$$

 l'application $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ bijective. Par définition,

$$t \longmapsto \cos t$$

$$\arccos = \varphi^{-1}$$

1.3.2 Propriétés

Dérivée φ est dérivable sur $[0, \pi]$ donc $\forall x \in [0, \pi], \varphi'(x) = -\sin x$. De plus $\forall x \in]0, \pi[, \varphi'(x) \neq 0$ donc \arccos est dérivable sur $\varphi(]0, \pi[) =]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, et $y = \cos x$,

$$\begin{aligned} \arccos'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos(y))} \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \sin^2(\arccos(y)) + \cos^2(\arccos(y)) &= 1 \Leftrightarrow \sin^2(\arccos(y)) = 1 - y^2 \\ \Leftrightarrow \sin(\arccos(y)) &= \sqrt{1 - y^2} \quad \text{car } \arccos(y) \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Constance de la somme de arcsin et arccos Soit l'application $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Or

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

donc g est constante sur $] -1, 1[$ donc sur $[-1, 1]$ par continuité. De plus

$$\begin{aligned} g(0) &= \arcsin(0) + \arccos(0) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \in [-1, 1]$,

$$\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$$

Relation particulière Pour $x \in [-1, 1]$, soit $\theta = \arcsin(x) \in [0, \pi]$. Donc $\pi - \theta \in [0, \pi]$ et $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -x$. Ainsi,

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

Tableau de valeurs

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

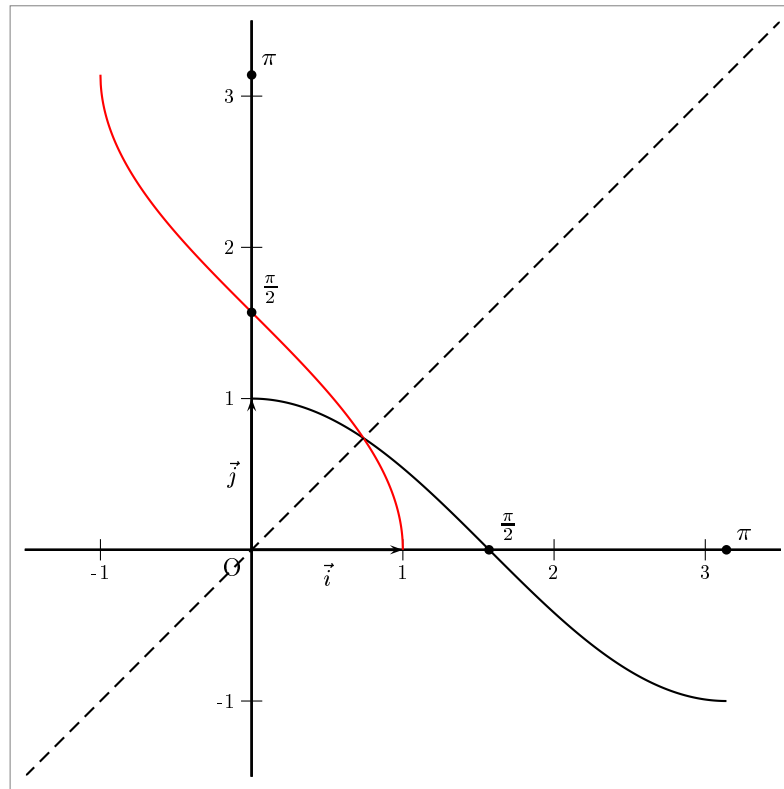


FIGURE 2 – Graphe des fonction cos et arccos

Graphe Voir figure 2

1.4 La fonction Arctangente

1.4.1 Définition

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante. Or $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ donc $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Par définition,

$$\arctan = \varphi^{-1}$$

1.4.2 Propriétés

Limites \arctan est continue et strictement croissante donc $\arctan]-\infty, +\infty[=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or $]-\infty, +\infty[=]\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x[$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Imparité Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tan(-\arctan(x)) &= -\tan(\arctan(x)) \quad \text{car } \tan \text{ est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in \mathbb{R}$, donc

$$\tan(-\arctan(x)) = -x \Leftrightarrow -\arctan(x) = \arctan(-x)$$

Dérivée f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ donc \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \tan x$,

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{f'(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Somme d'arctangentes $\forall x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

En effet, soit $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = 0$ donc φ est une fonction constante. Or

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 2 \arctan 1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Graphes Voir figure 3 page ci-contre.

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Théorème : fonctions impaires et paires

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors f s'écrit de manière unique $f = g + h$ avec g, h des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que g est paire et h est impaire. On a aussi :

- g est la partie paire de f ;
- h est la partie impaire de f .

Démonstration

Unicité Supposons que $f = g + h$ avec g paire et h impaire, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$. Alors $f(-x) = g(x) - h(x)$, d'où

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Donc g et h sont uniques.

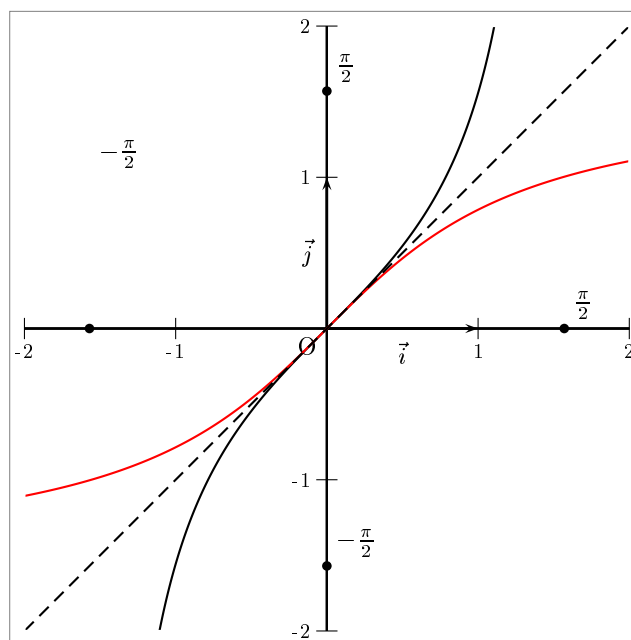


FIGURE 3 – Graphe des fonctions tan et arctan

Existence Prouvons que g et h existent. Posons donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$ donc g est paire et h est impaire. Or $g(x) + h(x) = f(x)$ donc g et h existent bien avec les propriétés susmentionnées.

2.2 Définition des fonctions hyperboliques

- cosh est la partie paire de exp.
- sinh est la partie impaire de exp.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

De plus,

- $\exp(t) = \cosh(t) + \sinh(t)$
- $\exp(-t) = \cosh(t) - \sinh(t)$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

–

$$\begin{aligned} 1 = e^t e^{-t} &\Leftrightarrow \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t) \geq 1 \end{aligned}$$

– Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \frac{1}{2} \left(e^{a+b} + e^{-a-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^a e^b + e^{-a} e^{-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\cosh a + \sinh a)(\cosh b + \sinh b) + (\cosh a - \sinh a)(\cosh b - \sinh b)] \\ &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b\end{aligned}$$

–

$$\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$$

–

$$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= \frac{1}{2} \left(e^{a+b} - e^{-a-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^a e^b - e^{-a} e^{-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\cosh a + \sinh a)(\cosh b + \sinh b) - (\cosh a - \sinh a)(\cosh b - \sinh b)] \\ &= \cosh a \sinh b + \sinh a \cosh b\end{aligned}$$

–

$$\sinh(a-b) = \cosh a \sinh b - \sinh a \cosh b$$

–

$$\begin{aligned}\cosh(2a) &= \cosh^2 a + \sinh^2 a \\ &= 1 + 2 \sinh^2 a \\ &= 2 \cosh^2 a - 1\end{aligned}$$

–

$$\sinh(2a) = 2 \cosh a \sinh a$$

– a

...

2.4 Étude des fonctions hyperboliques

2.4.1 Sinus hyperbolique

Dérivée

\sinh est de classe \mathcal{C}^∞ et de plus

$$\sinh' = \cosh$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \sinh'(t) \geq 1$.

Limites On a par retour à la définition de la fonction,

$$\lim_{+\infty} \sinh = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \sinh = -\infty$$

a. Vous pourrez faire le reste si ça vous chante.

Tableau de variation

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sinh'(t)$	+		+
$\sinh(t)$	$-\infty$	0	$+\infty$

On remarque que :

- $\forall t < 0, \sinh(t) < 0$
- $\forall t > 0, \sinh(t) > 0$

2.4.2 Cosinus hyperbolique**Dérivée**

\cosh est de classe \mathcal{C}^∞ et de plus

$$\cosh' = \sinh$$

Limites On a par retour à la définition de la fonction,

$$\lim_{+\infty} \cosh = \lim_{-\infty} \cosh = +\infty$$

Tableau de variations

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\cosh'(t)$	–	0	+
$\cosh(t)$	$+\infty$	1	$+\infty$

On remarque que $\cosh(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

2.4.3 Tangente hyperbolique**Dérivée**

\tanh est infiniment dérivable sur \mathbb{R} , et

$$\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2}$$

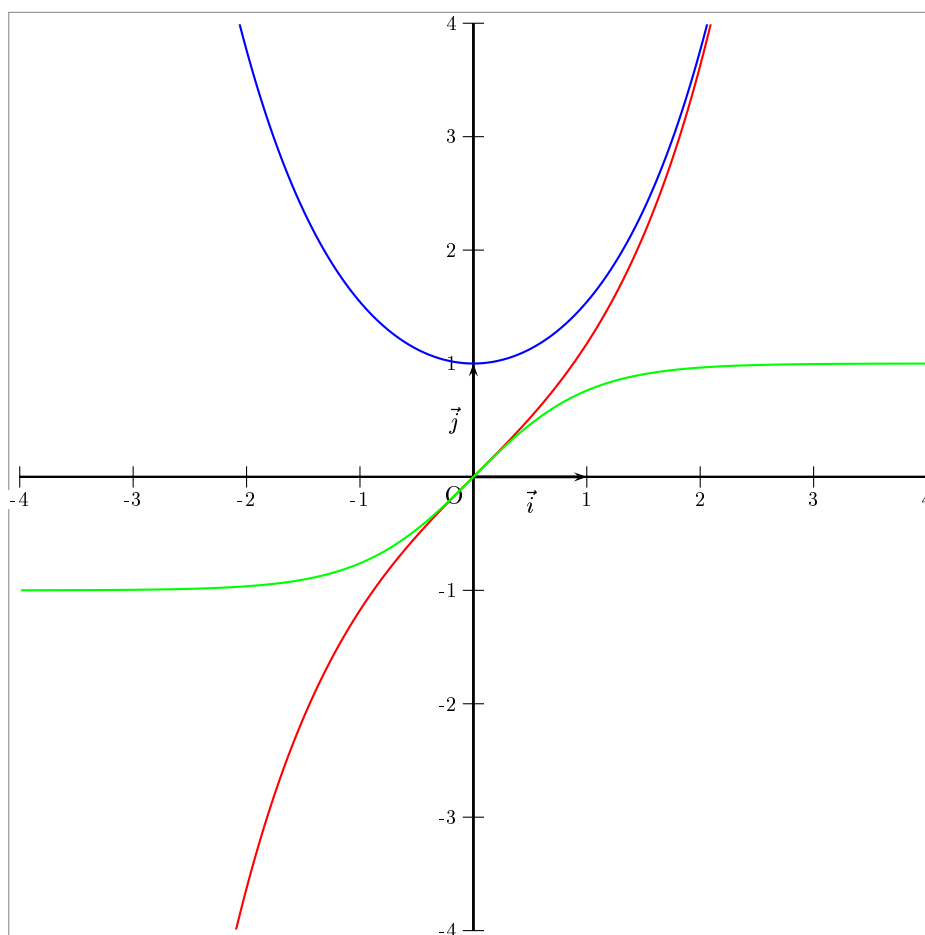
Limites Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (1) \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (2) \end{aligned}$$

- (1) $\Rightarrow \lim_{+\infty} \tanh = 1$
- (2) $\Rightarrow \lim_{-\infty} \tanh = -1$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\tanh'(x)$		+	+
$\tanh(x)$	-1	0	1

FIGURE 4 – Graphe des fonctions \sinh , \cosh et \tanh

2.5 Fonctions hyperboliques inverses

2.5.1 Sinus hyperbolique inverse

On a vu que \sinh est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ainsi, on note

$$\operatorname{argsinh} = \sinh^{-1}$$

De plus on montre en résolvant l'équation $x = \sinh(y)$ que

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Dérivée \sinh est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh'(x) \neq 0$ donc, après le théorème fondamental, $\operatorname{argsinh}$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(y))} \\ &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh}(y))}\end{aligned}$$

Or $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cosh^2(\operatorname{argsinh}(y)) &= 1 + \sinh^2(\operatorname{argsinh}(y)) \\ &= 1 + y^2\end{aligned}$$

De plus $\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) > 0$ donc

$$\operatorname{argsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

2.5.2 Cosinus hyperbolique inverse

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f est dérivable et $f'(t) = \sinh t \geq 0$. De même $\forall t > 0, f'(t) > 0$ donc f est

strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* donc elle établit une bijection \tilde{f} de \mathbb{R}_+ dans $f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{+\infty} f \right[= [1, +\infty[$.

Par définition,

$$\operatorname{argcosh} = \tilde{f}^{-1}$$

Dérivée Ainsi, $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est aussi continue et strictement croissante. \tilde{f} est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \tilde{f}'(t) > 0$ donc $\operatorname{argcosh}$ est dérivable sur $\tilde{f}(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ et $\forall y > 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argcosh}'(y) &= \frac{1}{\tilde{f}'(\operatorname{argcosh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh}(y))}\end{aligned}$$

Or pour $y \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sinh^2(\operatorname{argcosh}(y)) &= \cosh^2(\operatorname{argcosh}(y)) - 1 \\ &= y^2 - 1 \geq 0\end{aligned}$$

Pour $y \geq 1, \operatorname{argcosh}(y) \geq 0$ donc $\sinh(\operatorname{argcosh}(y)) \geq 0$ donc $\sinh(\operatorname{argcosh}(y)) = \sqrt{y^2 - 1}$ donc $\forall y > 1$,

$$\operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Expression de la fonction Soit $y \geq 1$, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\cosh x = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est racine du polynôme } P(X) = X^2 - 2yX + 1\end{aligned}$$

Or $\Delta(P) = 4(y^2 - 1) \geq 0$:

- Pour $y = 1$, $\Delta(P) = 0$ donc l'unique racine de P est 1 donc

$$\begin{aligned}\cosh x = y &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

- Pour $y > 1$, $\Delta(P) > 0$ donc P admet pour racine

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1$ et on a

$$\begin{aligned}y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 &\Leftrightarrow y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow (y - 1)^2 < y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow y > 1 \quad \text{ce qui est vrai}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}e^x \text{ est racine de } P &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})\end{aligned}$$

Pour $y \geq 1$, l'équation $f(x) = y$ admet donc comme unique solution $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Or cette unique solution est par définition $\tilde{f}^{-1}(y)$ donc pour $y > 1$,

$$\operatorname{argcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Cette expression est *a posteriori* valable pour $y = 1$.