Devoir du 3/11/2020

On pourra utiliser les fonctions des questions précédentes (même si elles n'ont pas été faites pour traiter les questions suivantes
L'ensemble du devoir sera à refaire sur machine et les questions étoilées seront à faire à ce moment là. Le tout sera à rendre

Exercice 1 : On considère une liste L à n éléments compris entre 0 et $n-1$.
On définit sur $[\![0, n-1]\!]$ la relation $\mathcal{R}_L$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2, \quad i\,\mathcal{R}_L\,j \;\Leftrightarrow\; L[i] = j.$$

Pour L fixée, chaque élément de $[\![0, n-1]\!]$ n'est donc en relation qu'avec un élément.

1. Écrire une fonction **EstReflexive** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est réflexive et False sinon.
2. Écrire une fonction **EstSymetrique** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est symétrique et False sinon.
3. Écrire une fonction **EstAntisymetrique** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est antisymétrique et False sinon.
4. Écrire une fonction **EstTransitive** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est transitive et False sinon.
5. Écrire une fonction **EstRelEquiv** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est une relation d'équivalence et False sinon.
6. Écrire une fonction **EstRelOrdre** qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie True si $\mathcal{R}_L$ est une relation d'ordre et False sinon.
   (*) Dans le cas où $\mathcal{R}_L$ est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle.

Exercice 2 : On suppose que l'on dispose de la fonction tan et d'une variable *pi*.

1. Écrire une fonction **GrapheArctan** qui prend en paramètre un réel $M \in [0, \pi/2[$ et un entier n et qui affiche une courbe reliant n points du graphe de arctan dont les ordonnées sont équidistantes et appartiennent à $[-M, M]$.
2. Écrire une fonction **ArctanDicho** qui prend en paramètre un réel x et un réel strictement positif *eps* et qui renvoie un réel y tel que $|y - \arctan(x)| \leq eps$ obtenu par dichotomie.
3. Écrire une fonction **ApproxArctan** qui prend en paramètre un réel x et un entier n et qui renvoie une approximation de $\arctan x$ en utilisant la méthode des rectangles et la relation $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
4. On suppose qu'il existe $(C, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
   $\arctan(x) - \mathrm{ApproxArctan}(x, n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^\alpha}$
   En fixant x à une valeur particulière intéressante, proposer une méthode permettant de visualiser la valeur de α.
   Écrire les commandes correspondantes. **(*)** Obtenir graphiquement α.

Exercice 3 :
On admettra que l'on dispose d'un complexe i (obtenu avec la commande $\mathrm{i} = \mathrm{complexe}(0,1)$*) et que l'on peut créer des complexes de la même façons que pour les flottants.*
Ainsi la commande print(3 + 4 * i) *affiche 3+4j (notation issue de la Physique)*
On admettra aussi que si z est un complexe, alors la commande z.real *renvoie la partie réelle de z et que la commande* z.imag *renvoie la partie imaginaire de z*
*Ainsi la commande (3+4*i).real renvoie 3 De même les commandes*
z=3+4*i
x=z.imag
permettent de créer une variable x contenant 3
Enfin, on admet que la commande abs(z) *renvoie le module de z.*

On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $z_0 = 2+2i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_{n+1}-3}{z_n - 1} = 1 + i$.
On admet que que la suite est bien définie, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 1$.

1. **(*)** Placer les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 dans un repère orthonormé.
2. Écrire les commandes permettant d'afficher z_1 puis z_2.
3. Écrire une fonction **Affiche** qui prend en paramètre un entier n et qui affiche les n premiers points de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On note Ω le point d'affixe $1+2i$ et, pour tout n, on note M_n le point d'affixe z_n.
   Écrire les commandes permettant d'afficher le triangle $\Omega M_0 M_1$
   Écrire une fonction **AfficheT** qui place les n premiers triangles $\Omega M_n M_{n+1}$.
5. **(*)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que le triangle $\Omega M_n M_{n+1}$ est isocèle et rectangle en M_n.
6. Écrire une fonction **Aire** qui prend en paramètre un complexe z et qui renvoie l'aire d'un triangle $\Omega M M'$ isocèle et rectangle en M d'affixe z.
7. Pour tout entier n, on note E_n l'union des 8 triangles tracés à l'aide des points M_k, $k \in [\![n, n+8]\!]$. Écrire une fonction **Aire8** qui calcule l'aire $\mathcal{A}_n$ de E_n.
8. Écrire une fonction **Perimetre8** qui calcule le périmètre $\mathcal{P}_n$ de E_n.
9. **(*)** Étudiez la suite de terme général $\mathcal{A}_n/\mathcal{P}_n^2$. Déterminer l'expression de z_n en fonction de n et prouver que la suite de terme général $\mathcal{A}_n/\mathcal{P}_n^2$ converge.