

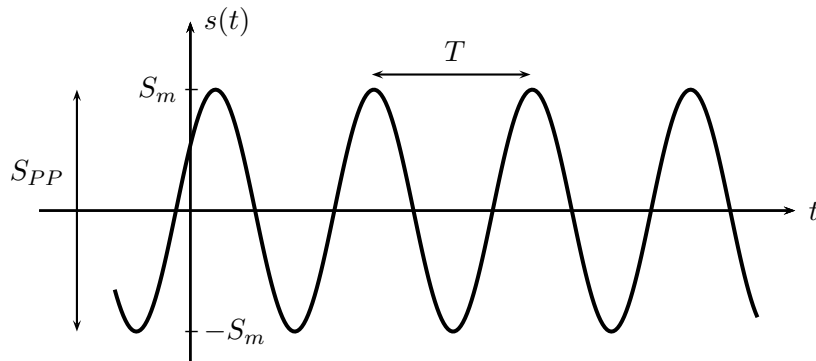
I - Caractéristiques des RSF

I-1. Régime forcé

L'étude du régime transitoire d'un oscillateur amorti (électrocinétique ou mécanique) montre que la réponse du système considéré à une excitation est la somme d'un régime transitoire (solution générale de l'équation homogène) qui tend toujours vers 0 (avec ou sans oscillations) et d'un régime établi (solution particulière de l'équation différentielle complète). Ce régime établi a donc la même forme que l'excitation par la source ; il s'agit du régime forcé, indépendant des conditions initiales.

I-2. Signal sinusoïdal

Il s'agit d'un signal qui s'écrit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation et T la période, φ la phase à l'origine et S_m l'amplitude.

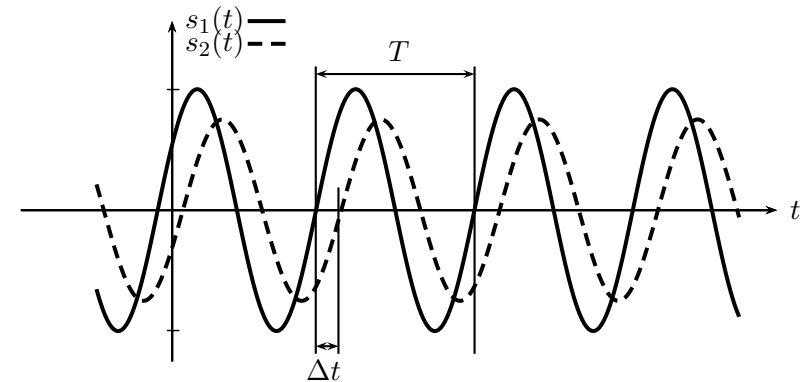


$S_{PP} = 2S_m$ est l'amplitude crête à crête (Peak to Peak).

La valeur moyenne de $s(t)$ est $\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = 0$.

La valeur efficace S (ou S_{eff}) est la moyenne quadratique du signal (RMS : Root Mean Square). Elle est définie par $S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt}$. Ici $S = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$.

Le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones (même pulsation) est donné par $\varphi_{2/1} = -2\pi \frac{\Delta t}{T}$. Sur le schéma suivant, le signal s_2 est en retard sur s_1 donc $\varphi_{2/1} < 0$.



I-3. Grandeurs complexes

On représente une grandeur sinusoïdale $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ par la grandeur complexe associée $\underline{s} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

L'amplitude complexe contient deux informations :

- amplitude réelle : $S_m = |\underline{S_m}|$
- phase : $\varphi = \arg(\underline{S_m})$

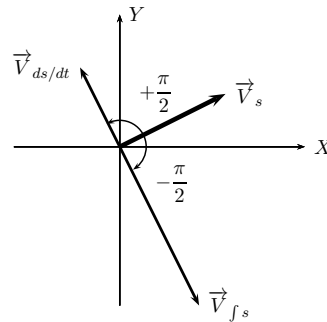
La dérivée de la grandeur sinusoïdale, $\frac{ds}{dt}$, est représentée par $j\omega \underline{s}$ et la primitive, $\int s(t) dt$, est représentée par $\frac{\underline{s}}{j\omega}$. Ainsi, l'équation différentielle sur les grandeurs réelles se transforme en polynôme de $j\omega$ avec les grandeurs complexes.

I-4. Diagramme de Fresnel

On peut également représenter une grandeur sinusoïdale par un vecteur \vec{V}_s tournant à la vitesse angulaire ω , de norme $\|\vec{V}_s\| = S_m$, faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec un axe de référence prédéterminé. On représente en général ces vecteurs à l'instant $t = 0$. Ce vecteur s'identifie à la représentation graphique de la grandeur \underline{s} dans le plan complexe.

La dérivée de s est représentée par un vecteur qui aurait "tourné" de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique (multiplication par j dans le plan complexe).

La primitive de s est représentée par un vecteur qui aurait "tourné" de $-\frac{\pi}{2}$ (multiplication par $-j$).



II - Dipôles usuels

Pour les dipôles linéaires, la relation courant-tension, qui faisait éventuellement intervenir les dérivées, est désormais une loi multiplicative. On définit alors l'impédance \underline{Z} et l'admittance \underline{Y} d'un dipôle par : $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$ et $\underline{i} = \underline{Y}\underline{u}$.

II -1. Impédances - Admittances

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Relation $i - u$	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
Relation $\underline{i} - \underline{u}$	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$
Impédance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Admittance	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$
TBF $\omega \rightarrow 0$	inchangé	fil	interrupteur ouvert
THF $\omega \rightarrow \infty$	inchangé	interrupteur ouvert	fil
Référence i	$\overrightarrow{U_{Rm}} = RI_m$ $\overrightarrow{I_m}$	$\overrightarrow{U_{Lm}} = L\omega I_m$ $\overrightarrow{I_m}$	$\overrightarrow{U_{Cm}} = \frac{I_m}{C\omega}$ $\overrightarrow{I_m}$
Référence u	$I_{Rm} = \frac{U_m}{R}$ $\overrightarrow{U_m}$	$\overrightarrow{U_m}$ $I_{Lm} = \frac{U_m}{L\omega}$	$\overrightarrow{U_m}$ $I_{Cm} = C\omega U_m$

II -2. Associations de dipôles

	Groupement série	Groupement parallèle
Impédances	$\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_k$	$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_k}$
Admittances	$\frac{1}{\underline{Y}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Y}_k}$	$\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_k$
Référence	i	u
Diviseur	de tension : $\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{eq}} \underline{u}$	de courant : $\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i}$

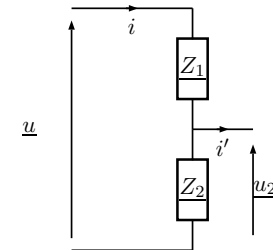
Remarque : pour le diviseur de tension obtenu avec deux dipôles, on a une expression simplifiée.

Si $i' = 0$, on a alors

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_1} \underline{u}$$

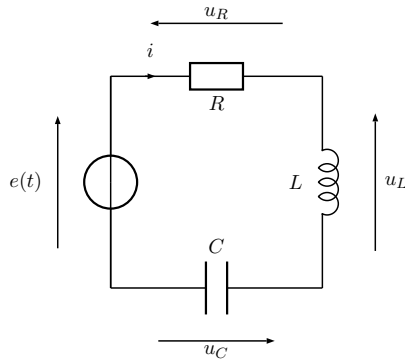
☞ Exercice 1 : Dipôles équivalents

☞ Exercice 2 : Équilibrage d'un pont



III - Résonances

On s'intéresse au circuit RLC série, alimenté par une source $e(t) = E_m \cos(\omega t)$:



$$\begin{aligned} 1. \underline{u_R} &= \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} \underline{e} \\ 2. \underline{u_C} &= \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} \underline{e}, \\ \text{soit } \underline{u_C} &= \frac{1}{1 + \underline{Y_C}(\underline{Z_R} + \underline{Z_L})} \underline{e} \end{aligned}$$

III -1. Résonance d'intensité (tension aux bornes de R)

On s'intéresse ici à la tension aux bornes de la résistance $\underline{u_R}$.

En passant aux amplitudes complexes, et en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ il vient :}$$

$$\underline{U_{Rm}} = \frac{E_m}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

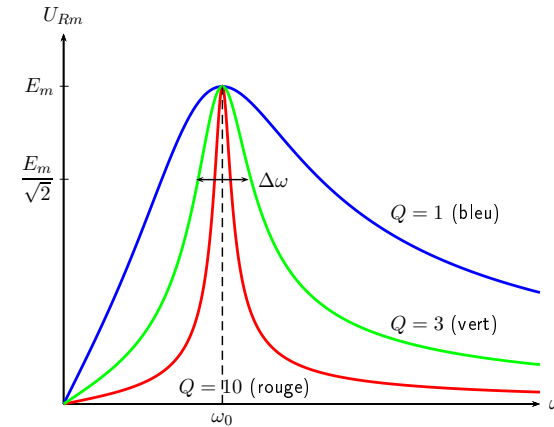
En revenant aux grandeurs réelles :

$$U_{Rm} = \frac{E_m}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \text{ et } \tan \varphi = -Q \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

Lorsque la pulsation (ou la fréquence) du signal d'entrée $e(t)$ varie, la réponse en intensité (ou en tension aux bornes de R) voit son amplitude varier. Elle passe par un maximum lorsque la fonction sous la racine est minimale, soit pour $x_r = 1$ ou encore $\omega_r = \omega_0$.

En $x_r = 1$: $U_{Rm,max} = E_m$ et $\varphi = 0$ (courant en phase avec $e(t)$).

Cette résonance est d'autant plus aigüe que Q est important :

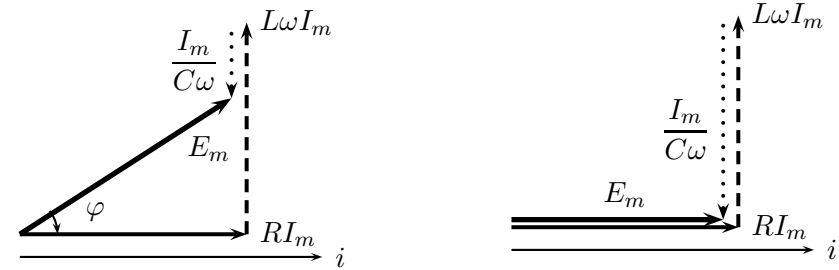


La bande passante est définie par l'ensemble des pulsations telles que

$$\frac{U_{Rm,max}}{\sqrt{2}} \leq U_{Rm} \leq U_{Rm,max}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

On peut retrouver la condition de résonance avec un diagramme de Fresnel. Les dipôles étant en série, on prend l'intensité comme référence pour le tracé :



Cas quelconque : $\varphi \neq 0$

$$\frac{I_m}{C\omega} = L\omega I_m \text{ soit } LC\omega^2 = 1 : \varphi = 0.$$

III -2. Résonance en tension aux bornes de C

On s'intéresse maintenant à la tension aux bornes du condensateur $\underline{u_C}$. Avec les mêmes notations,

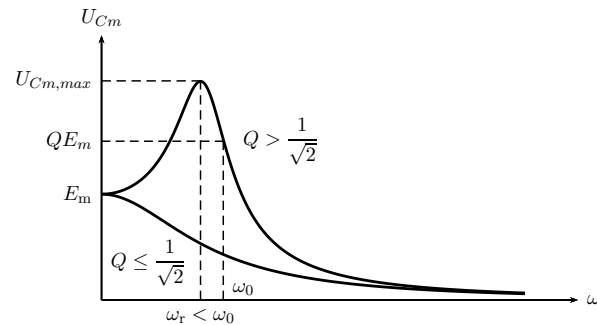
$$\underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad \tan \varphi = -\frac{x}{Q(1 - x^2)}$$

Lorsque la fréquence de l'excitation varie, l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur passe par un maximum en $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

L'amplitude maximale (en cas de résonance) est

$$U_{Cm,max} = U_{Cm}(x_r) = \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

La résonance n'a pas lieu pour la pulsation propre du circuit, mais un peu avant. Notons qu'en $\omega = \omega_0$, l'amplitude U_{Cm} a la valeur particulière QE_m



Exercice 3 : Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

IV - Filtrés linéaires

IV -1. Notion de filtre

Tout signal réalisable en pratique peut se décomposer en une somme de composantes sinusoïdales. Pour un signal périodique de fréquence $f_s = \frac{1}{T_s}$,

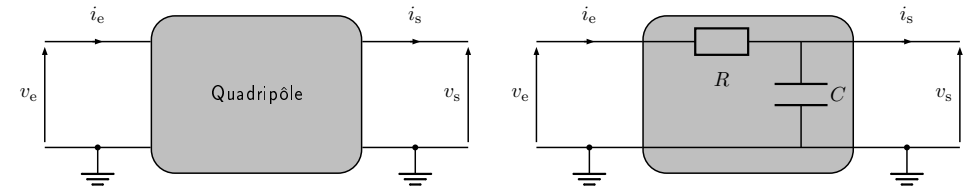
$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

où A_0 est la composante continue (valeur moyenne), A_1 l'amplitude du fondamental (fréquence $f_1 = f_s$) et les A_n les différents harmoniques (fréquences $f_n = n f_s$).

L'action d'un filtre sur un tel signal sera de transmettre différentiellement les différentes composantes fréquentielles.

On se limite ici à l'étude des filtres linéaires (régis par une équation différentielle linéaire). En électronique, il s'agit d'un opérateur quadripolaire, réalisé par un

circuit comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, circuit constitué de dipôles linéaires (passifs ou éventuellement actifs).



Si la réponse à un signal d'entrée e_1 (resp. e_2) est s_1 (resp. s_2), alors la réponse à une entrée $\alpha e_1 + \beta e_2$ sera $\alpha s_1 + \beta s_2$. Il nous suffit donc d'étudier le comportement du filtre en régime sinusoïdal forcé à une fréquence donnée, pour en déduire comment seront transmises les différentes composantes spectrales d'un signal périodique quelconque, et ainsi reconstituer la réponse du filtre.

Pour une fréquence donnée ω , la réponse du filtre linéaire est caractérisée par sa fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$$

Son module donne le **GAIN** du filtre $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$.

Son argument donne le **déphasage** du signal de sortie par rapport à l'entrée

$$\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$$

Les grandeurs réelles $e(t)$ et $s(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire :

$$a_n \frac{d^n s}{dt} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m e}{dt} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0$$

La fonction de transfert s'exprime alors comme le rapport de deux polynômes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

Le système linéaire considéré est un filtre si \underline{H} est bien fonction de ω . L'**ordre** du filtre est le degré maximum des polynômes N et D .

Remarque : Cette fonction de transfert peut se décomposer en produit de filtres d'ordre 1 ou 2 donc on se limitera à l'étude de ces ordres particuliers.

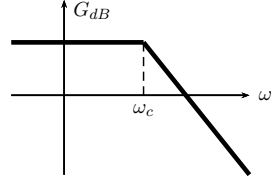
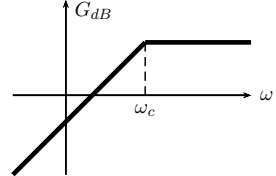
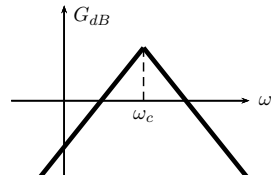
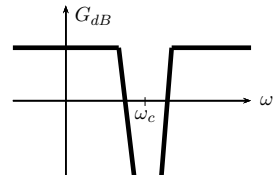
Diagramme de Bode : Il résume le comportement d'un filtre par le tracé (en échelle logarithmique), de deux courbes,

- gain en décibels $G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = f_1(\omega)$
- phase $\varphi_{s/e}(\omega) = f_2(\omega)$

Pulsation de coupure : On considère que le signal est transmis correctement si l'amplitude est suffisamment grande, c'est-à-dire si $S_m(\omega) \geq \frac{S_{m,max}}{\sqrt{2}}$. Les pulsations limites (ω_c) vérifiant l'égalité sont les pulsations de coupure.

Bande Passante : l'intervalle de pulsation (ou de fréquence) telle que la condition précédente est remplie constitue la bande-passante. Cette grandeur est caractéristique de la qualité d'un filtre.

IV -2. Nature d'un filtre

Passe-bas	Passe-haut
TBF : $G \neq 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G = 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$	TBF : $G = 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G \neq 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$
	
Passe-bande	Coupe-bande
TBF : $G = 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G = 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$	TBF : $G \neq 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G \neq 0, G_{dB} \rightarrow -\infty$
	

Exercice 4 : Filtre à retard de phase

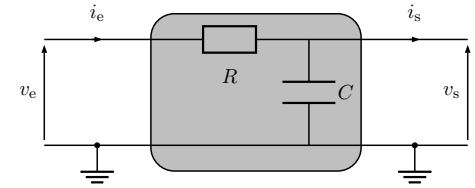
IV -3. Filtre passe-bas d'ordre 1

Exemple : circuit RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

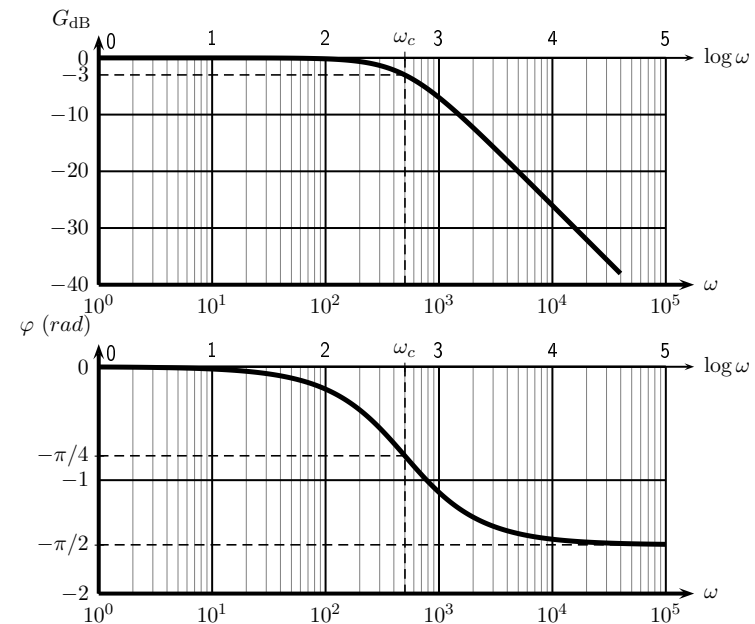


Comportement asymptotique :

TBF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$
$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{j\tau\omega}$	$G \sim \frac{1}{\tau\omega}$	$G_{dB} \sim -20 \log(\tau\omega)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Ce filtre présente une asymptote de pente -20 dB/dec aux THF. Il a donc un comportement *intégrateur* ($\underline{H} \sim \frac{1}{j\tau\omega}$).



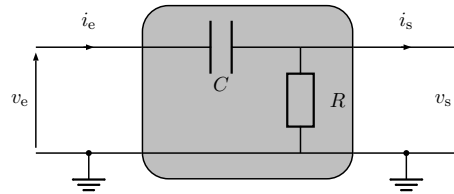
IV -4. Filtre passe-haut d'ordre 1

Exemple : circuit RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$$

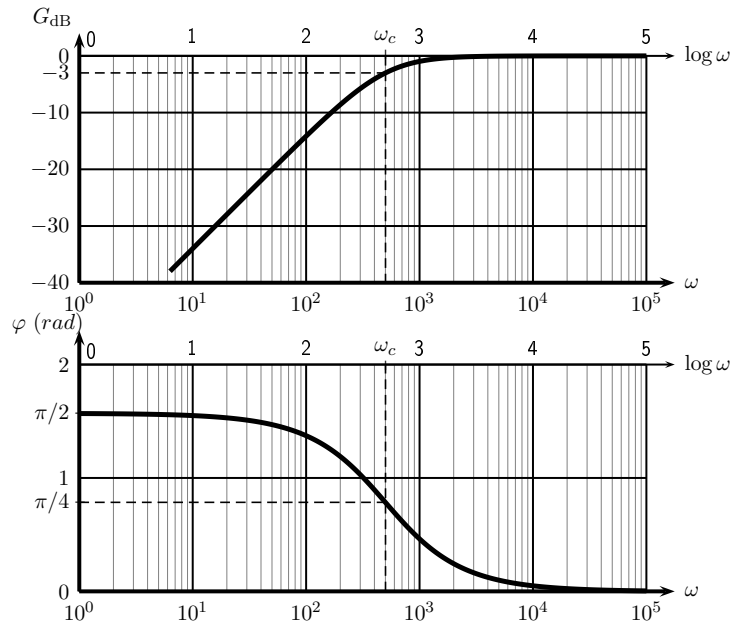


Comportement asymptotique :

TBF	$\underline{H} \sim j\tau\omega$	$G \sim \tau\omega$	$G_{dB} \sim 20 \log(\tau\omega)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$\underline{H} = \frac{j}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Ce filtre présente une asymptote de pente 20 dB/dec aux TBF. Il a donc un comportement *dérivateur* ($\underline{H} \sim j\tau\omega$).



IV -5. Filtre passe-bande

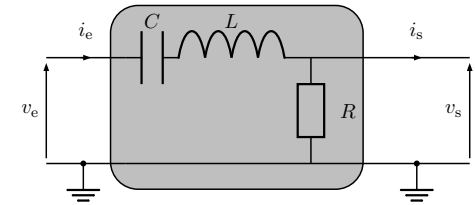
Exemple : circuit RLC $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - j\frac{1}{RC\omega}}$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$



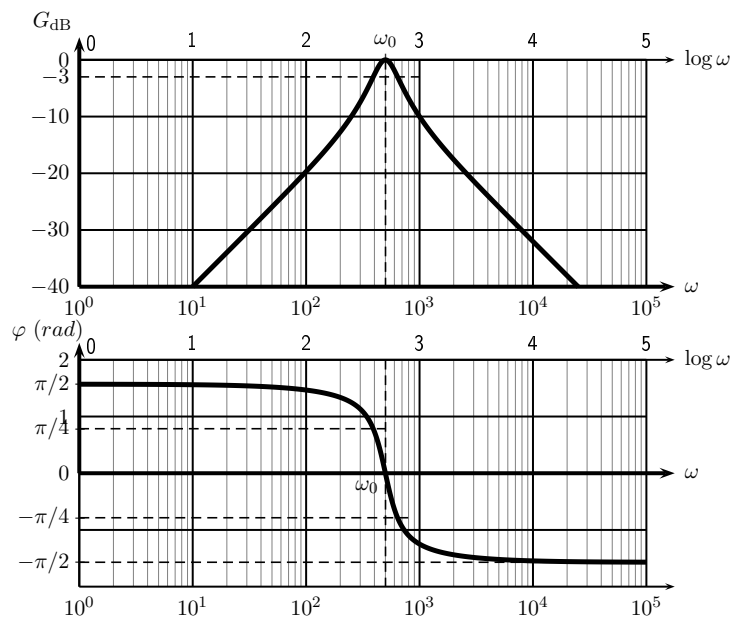
Comportement asymptotique :

TBF	$\underline{H} \sim j\frac{x}{Q}$	$G \sim \frac{x}{Q}$	$G_{dB} \sim 20 \log \left(\frac{x}{Q} \right)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$x_{c,1} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 - j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
$x = 1$	$\underline{H} = 1$	$G = 1$	$G_{dB} = 0$	$\varphi = 0$
$x_{c,2} = +\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{jQx}$	$G \sim \frac{1}{Qx}$	$G_{dB} \sim -20 \log(Qx)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

La pulsation de résonance est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Les pulsations de coupures sont

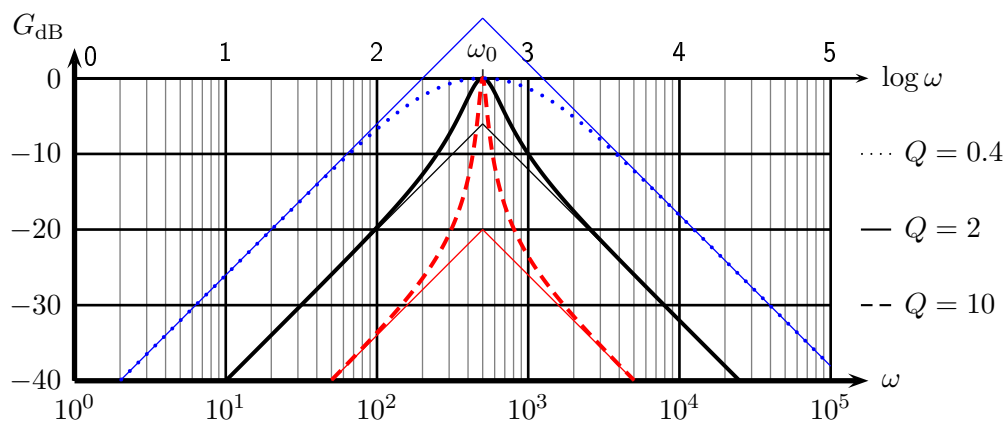
données dans le tableau, elles définissent la *bande-passante* du filtre : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Ce filtre présente une asymptote de pente +20 dB/dec aux TBF (comportement *dérivateur*) et une asymptote de pente -20 dB/dec aux THF (comportement *intégrateur*).



Influence du facteur de qualité

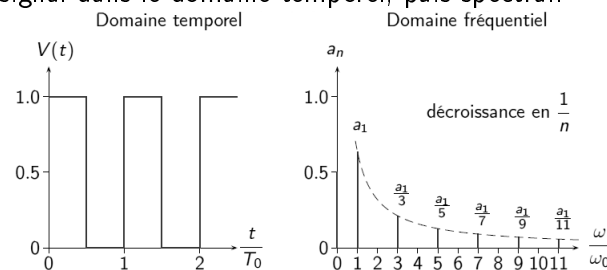
Il contrôle l'acuité de la résonance et donc la largeur de la bande passante. Les asymptotes TBF et THF se coupent toujours pour $x = 1$ soit $\log x = 0$ en $y = -20 \log Q$.



Si $Q < 1$, la résonance est floue, la bande passante large, et la courbe de gain est en dessous des asymptotes. Si $Q > 1$, la résonance est aigüe, la bande passante étroite, et la courbe de gain au dessus des asymptotes.

IV -6. Compléments

On s'intéresse à l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique mais non sinusoïdal. Le contenu fréquentiel est transmis sélectivement. La figure suivante représente ce signal dans le domaine temporel, puis spectral.



Tracés pour $E_0 = 1 \text{ V}$.

$$V(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\omega_0 t) \right)$$

a) Moyenneur

Il s'agit d'un filtre passe-bas qui va donc systématiquement laisser passer la composante continue (valeur moyenne) et plus ou moins couper les hautes fréquences selon les valeurs respectives de la fréquence de coupure f_c du filtre et la fréquence fondamentale f_e du signal d'entrée.

Si $f_c \gg f_e$, le signal est partiellement transmis en plus de sa composante continue. Si $f_c \ll f_e$ alors seule la composante continue est transmise par le filtre, on a un moyenneur.

b) AC-DC

Sur un oscilloscope, il existe plusieurs positions pour observer un signal. La position DC (Direct Current) correspond au signal direct, non filtré, mais la position AC (Alternative Current) a été filtrée avant d'être observée. On a coupé la composante continue à l'aide d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure assez basse pour laisser passer l'essentiel des composantes spectrales du signal de départ.

Privé de composante continue, le signal AC observé à l'oscilloscope est centré

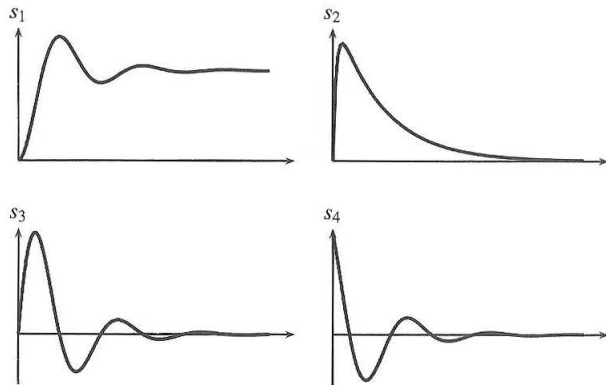
sur 0.

c) Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système correspond au signal de sortie recueilli lorsqu'on envoie en entrée une marche (ou fonction de Heaviside). L'allure de cette réponse renseigne sur la nature du filtre.

Pour qu'il existe de brusques variations (discontinuités) dans le signal de sortie, il faut que celui-ci contienne des hautes fréquences : le système qui agit comme filtre doit présenter un caractère passe-haut.

Pour qu'il existe une valeur moyenne non nulle dans le signal de sortie, celui-ci doit contenir des basses fréquences (composante continue) : le système qui agit comme filtre doit présenter un caractère passe-bas.

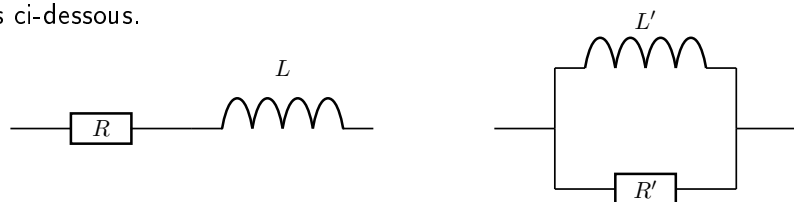


	Continuité en 0	Valeur finale	Nature du filtre
Système 1	oui (pas de HF)	non nulle (BF)	passe-bas
Système 2	oui (pas de HF)	nulle (pas de BF)	passe-bande
Système 3	oui (pas de HF)	nulle (pas de BF)	passe-bande
Système 4	non (HF)	nulle (pas de BF)	passe-haut

Exercices

1 - Dipôles équivalents

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω et on considère les deux dipôles ci-dessous.



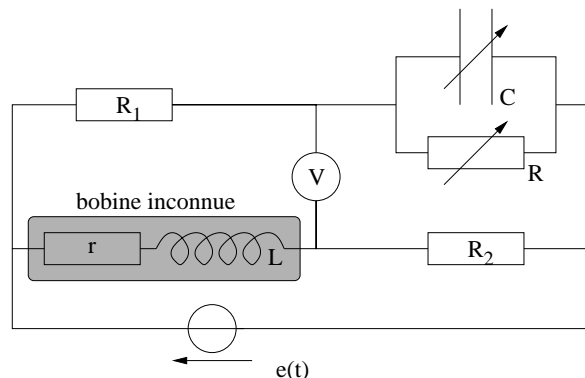
1. Quelles doivent être les expressions de L' et R' (en fonction de R , L et ω) pour que les deux dipôles soient équivalents ?
2. Pour quelle pulsation a-t-on $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$?

2 - Équilibrage d'un pont

Soit le circuit de la figure suivante, connecté à une source libre de tension sinusoïdale :

$$V_C - V_D = e = E_m \cos \omega t.$$

Pour déterminer les caractéristiques d'une bobine réelle, modélisée par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L et d'un résistor de résistance r , on place celle-ci dans une structure en pont, alimentée par une tension sinusoïdale.

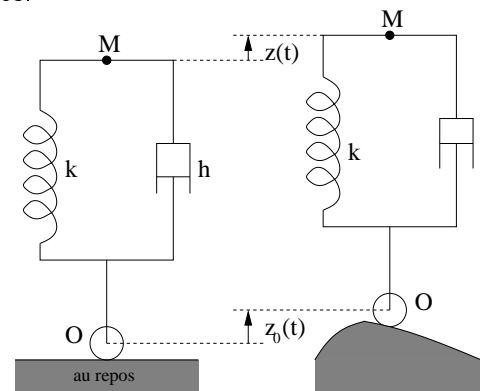


1. Exprimer la tension complexe u_{AB} qui s'applique aux bornes du voltmètre.
2. La capacité C du condensateur et la résistance R sont ajustables. On choisit leurs valeurs de manière à annuler la tension lue par le voltmètre (on dit alors que le pont est équilibré). Déterminer l'expression de l'inductance L et de la résistance r en fonction de R , C , R_1 et R_2 .

3 - Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

Un véhicule automobile est sommairement modélisé par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O , par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h . La force générée par l'amortisseur s'exprime par $\vec{f} = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)\vec{e}_z$. En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical.

On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route dont le profil impose au centre O de la roue une elongation $z_O(t) = a \cos(2\pi \frac{x}{\lambda})$ par rapport à sa position d'équilibre. On repère le mouvement de la masse m par l'elongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos.



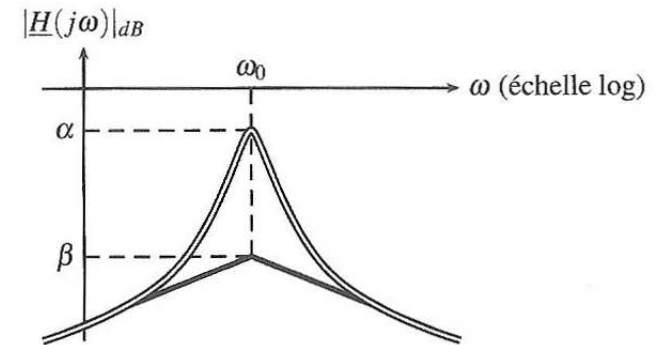
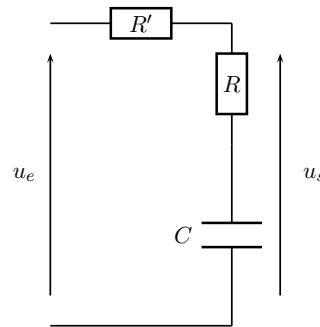
1. Établir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse, lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v .
2. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

À quelle allure faut-il rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

4 - Filtre à retard de phase

On considère le filtre ci-contre. La tension d'entrée est sinusoïdale, de pulsation ω . On posera $\alpha = \frac{R'}{R}$ et $x = RC\omega$.

1. Faire une analyse qualitative de ce filtre pour les hautes et basses fréquences.
2. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$.
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.

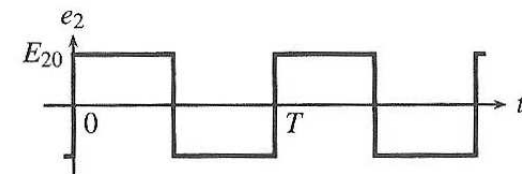


Identifier les pentes des asymptotes, les valeurs de α et β . En déduire l'allure du diagramme de Bode en phase.

3. Le montage peut-il servir d'intégrateur, ou de dérivateur ? Si oui, dans quelle bande de fréquence ?
4. On étudie la sortie $s_1(t)$ associée à l'entrée $e_1(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t)$, où $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

Comment réaliser expérimentalement ce signal en TP ?

5. Calculer l'expression littérale de la sortie $s_1(t)$, observée sur l'oscilloscope en régime permanent.
6. On étudie maintenant la sortie $s_2(t)$ associée au signal crêteau $e_2(t)$, de période $T_2 = 6\pi\sqrt{2LC}$, d'amplitude $E_{2,0} = 1 \text{ V}$, représenté sur la figure suivante :

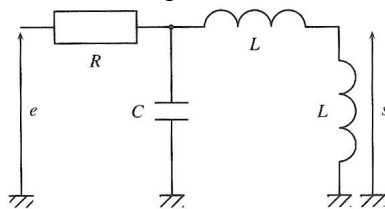


On donne sa décomposition en série de Fourier :

$$e_2(t) = \frac{4E_{2,0}}{\pi} \left[\sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(3\omega_2 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_2 t)}{5} + \dots + \frac{\sin[(2n+1)\omega_2 t]}{2n+1} + \dots \right]$$

5 - Filtre de Hartley

On réalise le montage décrit sur la figure suivante :



1. Établir sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\omega}{1 + 2j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. On exprimera H_0 , ω_0 et Q en fonction de R , L , et C .

2. Dans le cas où $R = 10,0 \text{ k}\Omega$, $L = 1,0 \text{ mH}$ et $C = 100,0 \text{ nF}$, le diagramme de Bode en amplitude a l'allure présentée sur la figure suivante :

Calculer la valeur efficace $E_{2,eff}$ de $e_2(t)$.

7. Tracer l'allure du spectre de $e_2(t)$. Préciser numériquement les pulsations des 3 premières harmoniques.
8. Calculer numériquement les amplitudes des 3 premières harmoniques du signal de sortie s_2 .

Justifier alors le nom de "tripleur de fréquence" donné au montage.

Éléments de réponse

$$1. R' = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R} \text{ et } L' = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{L\omega^2} ; \omega = \frac{R}{L}$$

$$2. u_{AB} = \left(\frac{r + jL\omega}{r + R_2 + jL\omega} - \frac{(1 + jRC\omega)R_1}{(1 + jRC\omega)R_1 + R} \right) e.$$

$$r = \frac{R_1 R_2}{R} \quad L = R_1 R_2 C.$$

$$3. \ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = a(\omega_0^2 \cos \omega t - 2\alpha\omega \sin \omega t).$$

Il faut rouler à grande vitesse pour que les amplitudes des oscillations soient faibles.

$$4. \underline{H} = \frac{1 + jx}{1 + j(1 + \alpha)x}$$

$$5. \underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + 2j\frac{L}{R}\omega + 2LC(j\omega)^2}.$$

Comportement intégrateur à THF et dérivateur à TBF.

L'harmonique de rang 3 domine les autres dans le signal de sortie (amplitude bien supérieure aux autres).