Récurrences linéaires à coefficients constants

Dans tout ce qui suit, on désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites à valeurs complexes.

1. Les espaces $\mathcal{P}_q$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on désignera par $\mathcal{P}_q$ le sous-espace des suites de la forme $\big(P(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à q ; en particulier, $\mathcal{P}_0$ est l'espace des suites constantes.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera e_k la suite (n^k) ; en particulier, e_0 est la suite constante égale à 1.

L'application $P \longmapsto \big(P(n)\big)$ est clairement linéaire. De plus, si la suite $(P(n))$ est la suite nulle, alors $P = 0$; cette application est donc injective. Par suite, elle réalise un isomorphisme de $\mathbb{C}_q[X]$ dans $\mathcal{P}_q$; en particulier, $(e_0, e_1, \dots, e_q)$, image de la base canonique de $\mathbb{C}_q[X]$ par cet isomorphisme, est une base de $\mathcal{P}_q$.

2. L'opérateur de différence Δ

Pour toute suite $u = (u_n)$, on définit la suite $\Delta(u) = (u'_n)$ par $\quad u'_n = u_{n+1} - u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie aisément que Δ est un endomorphisme de E.

Proposition 2.1. *Le noyau de Δ est l'espace $\mathcal{P}_0$ des suites constantes.*

C'est immédiat.

Proposition 2.2. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a* $\quad \Delta(\mathcal{P}_{q+1}) = \mathcal{P}_q$.

Considérons la restriction de Δ à $\mathcal{P}_{q+1}$. Puisque $\operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_{q+1}$, le noyau de cette restriction est aussi $\mathcal{P}_0$, donc est de dimension 1. La formule du rang nous dit alors que $\Delta(\mathcal{P}_{q+1})$ est de dimension $\dim \mathcal{P}_{q+1} - 1 = q + 1$.

D'autre part, $\Delta(\mathcal{P}_{q+1})$ est le sous-espace engendré par les vecteurs images des vecteurs de la base $(e_0, \dots, e_{q+1})$. Or $\Delta(e_0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, q+1]\!]$, $\quad \Delta(e_k) = \big((n+1)^k - n^k\big)$ est un polynôme de degré $k-1$ en n, donc appartient à $\mathcal{P}_q$; par suite $\Delta(\mathcal{P}_{q+1}) \subset \mathcal{P}_q$.

Puisque ces deux sous-espaces sont de même dimension, ils sont donc égaux.

Proposition 2.3. *Pour toute suite u de E et tout $q \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Delta(u) \in \mathcal{P}_q \Longleftrightarrow u \in \mathcal{P}_{q+1}$$

La proposition 2.2 fournit l'implication $\quad u \in \mathcal{P}_{q+1} \Longrightarrow \Delta(u) \in \mathcal{P}_q$.

Réciproquement, soit $u \in E$ vérifiant $\Delta(u) \in \mathcal{P}_q$. La proposition 2.2 montre qu'il existe une suite $v \in \mathcal{P}_{q+1}$ telle que $\Delta(v) = \Delta(u)$. Il existe alors une suite $w \in \operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{P}_0$ telle que $u = v + w$. Puisque $w \in \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_{q+1}$, on a bien $u = v + w \in \mathcal{P}_{q+1}$.

Proposition 2.4. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,* $\quad \operatorname{Ker}(\Delta^q) = \mathcal{P}_{q-1}$.

On raisonne par récurrence sur q. Pour $q = 1$, c'est la proposition 2.1. Supposons le résultat établi à un rang $q \geqslant 1$. Alors, pour tout $u \in E$:

$$u \in \operatorname{Ker}\Delta^{q+1} \Longleftrightarrow \Delta^q\big(\Delta(u)\big) = 0 \Longleftrightarrow \Delta(u) \in \operatorname{Ker}\Delta^q = \mathcal{P}_{q-1} \Longleftrightarrow u \in \mathcal{P}_q$$

d'après la proposition 2.3, ce qui achève la démonstration.

3. Récurrences linéaires

On cherche à déterminer l'ensemble F des suites complexes vérifiant la relation de récurrence

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+q} = a_{q-1}u_{n+q-1} + a_{q-2}u_{n+q-2} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n = \sum_{k=0}^{q-1} a_k u_{n+k}$$

dans laquelle $a_0,\ldots, a_{q-1}$ sont des nombres complexes fixés ; on supposera de plus $a_0 \neq 0$.

On considère d'autre part l'opérateur de décalage T sur les suites, défini par : si $u = (u_n) \in E$, alors $T(u)$ est la suite (v_n) définie par $\quad v_n = u_{n+1} \quad$ pour tout n.

On vérifie immédiatement que T est un endomorphisme de E ; et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $u = (u_n)$, la suite $T^k(u)$ est la suite (u_{n+k}). La relation de récurrence peut donc se réécrire

$$T^q(u) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k T^k(u) \qquad \text{soit} \qquad [P(T)](u) = 0$$

où $\quad P = X^q - \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k \quad$ est le polynôme caractéristique de la relation $(\mathcal{R})$. L'ensemble F des suites cherchées est donc le noyau de $P(T)$; ce qui montre en particulier que c'est un espace vectoriel.

D'autre part, décomposons P dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $\quad P = \prod_{i=1}^{r}(X - b_i)^{m_i} \quad$ où les b_i sont les racines (deux à deux distinctes) de P, et les m_i leurs ordres respectifs. Le lemme des noyaux montre alors que

$$F = \operatorname{Ker} P(T) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big([(X - b_i)^{m_i}](T)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big((T - b_i\mathrm{Id}_E)^{m_i}\big)$$

4. Étude de $\operatorname{Ker}\big((T - b\mathrm{Id}_E)^m\big)$

4.1. Cas $b = 1$

On a alors $T - \mathrm{Id}_E = \Delta$, l'opérateur de différence étudié plus haut. La proposition 2.4 donne donc $\quad \operatorname{Ker}\big((T - \mathrm{Id}_E)^m\big) = \mathcal{P}_{m-1}$.

4.2. Cas général

Notons déjà que l'hypothèse $a_0 \neq 0$ fait que 0 n'est pas racine de P : on peut donc supposer $b \neq 0$.

Considérons l'application Φ, de E dans lui-même, qui, à une suite u, associe la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Phi(u)_n = v_n = b^n u_n$$

L'application Φ est clairement linéaire, et bijective, de réciproque $\quad (u_n) \longmapsto (u_n/b^n)$. Soient alors $u = (u_n) \in E$, $v = \Phi(u)$ et $w = [T - b\mathrm{Id}_E](v) = [(T - b\mathrm{Id}_E) \circ \Phi](u)$. On a pour tout n :

$$w_n = v_{n+1} - bv_n = b^{n+1}u_{n+1} - b^{n+1}u_n = b.b^n(u_{n+1} - u_n)$$

et donc $\quad (T - b\mathrm{Id}_E) \circ \Phi = b\Phi \circ (T - \mathrm{Id}_E) \quad$ soit $\quad T - b\mathrm{Id}_E = b\Phi \circ (T - \mathrm{Id}_E) \circ \Phi^{-1}$.

Une récurrence simple fournit alors $(T - b\mathrm{Id}_E)^m = b^m \Phi \circ (T - \mathrm{Id}_E)^m \circ \Phi^{-1}$. Puisque $b \neq 0$ et que Φ est bijective, on en déduit, pour toute suite u :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(T - b\mathrm{Id}_E)^m &\iff b^m [\Phi \circ (T - \mathrm{Id}_E)^m \circ \Phi^{-1}](u) = 0 \\ &\iff [(T - \mathrm{Id}_E)^m \circ \Phi^{-1}](u) = 0 \\ &\iff \Phi^{-1}(u) \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_E)^m = \mathcal{P}_{m-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, la suite u appartient à $\mathrm{Ker}(T - b\mathrm{Id}_E)^m$ si et seulement si il existe un polynôme P de degré au plus $m-1$ vérifiant $u_n / b^n = P(n)$ soit $u_n = P(n) b^n$ pour tout n.

L'ensemble de ces suites est clairement isomorphe à $\mathbb{C}_{m-1}[X]$; il est donc de dimension m.

5. Bilan

L'ensemble F, somme directe des espaces $\mathrm{Ker}(T - b_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}$, est donc de dimension $\sum m_i = \deg P = q$ où q est l'ordre de la relation de récurrence. Les suites vérifiant $(\mathcal{R})$ sont les suites de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n) b_i^n$$

où les b_i sont les racines du polynôme caractéristiques, et les P_i des polynômes de degré strictement inférieur à m_i, ordre de la racine b_i dans le polynôme caractéristique. Une base de cet espace est fournie par les suites $(b^n n^k)$ où b est une racine du polynôme caractéristique, et $k \in \mathbb{N}$ est strictement plus petit que l'ordre de la racine b.

En particulier, si les racines sont toutes simples, les suites vérifiant $(\mathcal{R})$ sont les combinaisons linéaires des suites (b_i^n).

5.1. Le cas $a_0 = 0$

Dans ce cas, 0 est racine du polynôme caractéristique. Notons m son ordre : on a donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ et $a_m \neq 0$. Dans l'étude précédente, cela rajoute à la décomposition en somme directe de F le terme $\mathrm{Ker}\, T^m$.

Or, ce sous-espace est clairement constitué des suites nulles à partir du rang m. Rajouter ce terme revient donc à ajouter aux suites solutions une suite quelconque nulle à partir du rang m ; autrement dit, les termes $u_0, \ldots, u_{m-1}$ des suites solutions peuvent être choisis arbitrairement.

Cela traduit le fait que la récurrence est en réalité une récurrence d'ordre $q - m$, mais qui ne s'applique à la suite qu'à partir du rang m, puisque le terme de plus petit indice apparaissant réellement dans la récurrence est u_{n+m}, avec donc $n + m \geqslant m$.