

ELECTROMAGNETISME

Chapitre 5 : Equations de Maxwell

Exercice 1 : Décharge d'un conducteur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité σ ; la densité de charges ρ y est nulle et la densité de courants \vec{j} y est fournie par la loi d'Ohm. L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte des coordonnées sphériques de centre O et on cherche un champ électromagnétique de la forme $(\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_r$ et $\vec{B} = \vec{0})$.

- 1) Justifier la forme du champ électrique et déterminer $E(r, t)$ en fonction de $q(t)$, ϵ_0 et r .
- 2) Vérifier que les hypothèses sont compatibles avec les équations de Maxwell.
- 3) Ecrire l'équation vérifiée par $q(t)$ et déterminer $q(t)$. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

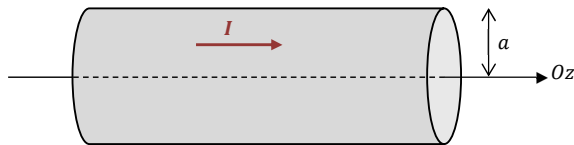
Exercice 2 : Emission isotrope de charges

Une bille de cuivre fixe de rayon a suffisamment faible pour que cette bille soit assimilée à un point confondu avec son centre O , initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir de l'instant $t = 0$: le nombre d'électrons émis par unité de temps est une constante notée α et les électrons sont émis avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_r$ où v_0 est une constante. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons.

- 1) Déterminer la densité volumique de charges $\rho(r, t)$. En déduire la densité de courant $\vec{j}(r, t)$.
- 2) Vérifier localement puis globalement (pour une sphère de rayon r) la conservation de la charge.
- 3) Justifier que : $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_r$ et $\vec{B} = \vec{0}$. Calculer $E(r, t)$ pour tout r .
- 4) Vérifier les équations de Maxwell.
- 5) Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} ainsi que la densité volumique de puissance reçue par les charges en mouvement, P_v . Commenter ?

Exercice 3 : Bilans d'énergie

- 1) Un conducteur ohmique de conductivité γ a la forme d'un cylindre infini de rayon a et d'axe Oz . Ce conducteur est parcouru dans tout son volume par un courant I . Le régime est stationnaire.



- a) Calculer le champ électrique dans le conducteur
- b) Calculer le champ magnétique dans le conducteur.
- c) Que vaut le vecteur de Poynting ?

On désire réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de rayon a^- et de hauteur h .

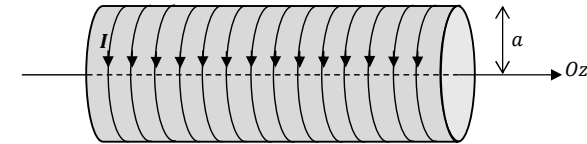
- d) On appelle $U(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce système. Que vaut $\frac{dU}{dt}$?
- e) Calculer la puissance électromagnétique P_{ray} entrante dans le système. Commenter.

- f) Calculer la puissance $P_{charges}$ cédée par le champ électromagnétique aux charges. Que devient-elle ?
- g) Vérifier le bilan global d'énergie électromagnétique dans le système.

- 2) On considère un solénoïde infini, de rayon a , comportant n spires par unité de longueur et parcouru par le courant $I(t)$. On supposera que les champs électriques et magnétiques sont approximativement donnés par :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z \quad \vec{E} = -\frac{\mu_0 n \dot{I} r}{2} \vec{u}_\theta$$

à l'intérieur du solénoïde (on utilise les coordonnées cylindriques).



- a) Donner l'expression du vecteur de Poynting.

On désire réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de rayon a^- et de hauteur h .

- b) Quelle est l'énergie électromagnétique $U(t)$ contenue dans ce cylindre à l'instant t ?
- c) Le courant varie désormais sinusoïdalement à la pulsation ω . Montrer que l'énergie magnétique est prépondérante par rapport à l'énergie électrique dans l'hypothèse où la pulsation du courant n'est pas trop élevée. Proposer une application numérique.

On supposera désormais que cette approximation est vérifiée.

- d) Quelle est la puissance électromagnétique entrante rayonnée à l'intérieur du cylindre ?
- e) Quelle est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges dans le cylindre ?
- f) Réaliser un bilan d'énergie sur le cylindre. Commenter notamment le sens du vecteur de Poynting.
- g) Vérifier le bilan local d'énergie électromagnétique. On donne :

$$\text{div}(f(r)\vec{u}_r) = \frac{1}{r} \frac{d(rf)}{dr}$$