Corrigé du devoir à rendre le 1/03/2021

Problème 1 :
Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2\,y' = (2-x)\,y$.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1. *Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.*

   Pour tout $x \in I$, on a $a(x) = \dfrac{1+1-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$. Une primitive de a est donc : $\boxed{A\,:\,I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \ln(1-x)}$

2. *Intégrer (E) sur I.*
   Une fonction f est solution de (E) sur I si, et seulement si, :

   $$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} f(x)$$

   Comme (E) est une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1, l'ensemble des solutions de (E) est : $\mathcal{S} = \{I \to \mathbb{R},\ x \mapsto Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{R}\}$ soit

   $$\boxed{\mathcal{S} = \{I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{C}{1-x} e^{1/(1-x)},\ C \in \mathbb{R}\}}$$

   Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. *Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :*

   $$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}, \quad \forall x \in I$$

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
   Pour tout entier n, on pose :
   $H(n)$: "Il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ "
   Initialisation : En posant $P_0 = X$, on vérifie $H(0)$.
   Hérédité : Supposons $H(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$.
   Par suite, f est $n+1$ fois dérivable et pour tout $x \in I$, on a

   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}$$

   On pose $P_{n+1} = X^2 P_n' + X^2 P_n$, on obtient un polynôme tel que :

   $$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

   $$\boxed{\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}}$$

   et les polynômes P_n et P_{n+1} sont reliés pas : $P_{n+1} = X^2 P_n' + X^2 P_n$

4. *Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.*
   On obtient $\boxed{P_0 = X}$, $\boxed{P_1 = X^3 + X^2}$, $\boxed{P_2 = X^5 + 4X^4 + 2X^3}$ et $\boxed{P_3 = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4}$.

5. *En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :*

   $$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)\,X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

   Soit $g\,:\,x \mapsto (1-x)^2$ et $h\,:\,x \mapsto 2-x$.
   Comme f est solution de (E), on a $g\,f' = h\,f$.
   Ainsi, pour tout entier n, on a :

   $$(g\,f')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n+1-k)} = (h\,f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)} f^{(n-k)}.$$

   Comme $g^{(k)}$ est nulle pour $k \leq 3$ et que $h^{(k)}$ est nulle pour $k \leq 2$, on en déduit que

   $$gf^{(n+1)} + ng'f^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} g'' f^{(n-1)} = hf^{(n)} + nh'f^{(n-1)}$$

   i.e. que, pour tout $x \in I$, on a

   $$\begin{aligned}(2-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} - nP_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} &= (1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} - 2n(1-x)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} \\ &\quad + n(n-1)P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in I$, on a, en posant $u = \dfrac{1}{1-x}$,

$$(1+1/u)P_n(u) - nP_{n-1}(u) = \frac{1}{u^2}P_{n+1} - 2n\frac{1}{u}P_n(u) + n(n-1)P_{n-1}(u)$$

i.e. $(u^2+u)P_n(u) - nu^2P_{n-1}(u) = P_{n+1} - 2nuP_n(u) + n(n-1)u^2P_{n-1}(u)$.
Le polynôme $(X^2+X)P_n - nX^2P_{n-1} - P_{n+1} + 2nXP_n - n(n-1)X^2P_{n-1}$ admet donc une infinité de racines (l'ensemble des $\dfrac{1}{1-x}$, $x \in I$ i.e. $\mathbb{R}^{+*}$). Par suite, on a

$$\boxed{P_{n+1} = \left[(2n+1)X + X^2\right]P_n - n^2X^2P_{n-1}}$$

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

6. *Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.*
Pour tout entier n, on a $a_n = P_n(1)e$. Donc le relation précédente donne :

$$\boxed{a_{n+1} = 2(n+1)a_n - n^2a_{n-1}}$$

7. *Préciser : a_0, a_1, a_2 et a_3 .*
Pour tout entier n, on a $a_n = P_n(1)e$. Donc

$$\boxed{a_0 = e,\ a_1 = 2e,\ a_2 = 7e,\ a_3 = 34e.}$$

8. *On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.*
En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.
La fonction exp étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|u_p - e| = \left|\exp(0) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(1-0)^k \exp^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq \frac{(1-0)^{p+1}}{(p+1)!} \max_{[0,1]} \left|\exp^{(p+1)}\right| = \frac{e}{(p+1)!}$$

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{e}{(p+1)!} = 0$, on en déduit par encadrement que $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_p = e}$

Soit p et n des entiers naturels quelconques, on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$

9. (a) *Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.*
On a $\boxed{S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p}$ et

$$S_p(1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1+i}{i!} = u_p + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!} \text{ i.e.}$$

$$\boxed{S_p(1) = u_p + u_{p-1}}$$

(b) *Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.*
Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers e et $2e$.

10. *Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :*

$$S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

Soient n et p deux entiers strictement positifs. On a :

$$\begin{aligned}
&S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1)\\
&\quad= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+1+i)!}{(i!)^2} - (2n+2)\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} + n^2\sum_{i=0}^{p} \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\\
&\quad= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}(-n+i(i-1)) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\left(-(n+i)+i^2\right)\\
&\quad= -S_p(n) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2} = -S_p(n) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)}$

11. *En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge.*
Pour tout entier n, on pose : $H(n)$: "La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge "
Initialisation : Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n-1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
Pour tout entier p non nul, on a :

$$S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

Par conséquent, la suite $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
On a donc prouvé par une récurrence double que pour tout entier n, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

12. *Prouver que : $a_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} . \frac{1}{i!}$*

Pour tout entier n, on pose ℓ_n la limite de la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier n, on pose : $H(n)$: "La suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_n. "

Initialisation : Les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a_0 et a_1.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n-1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a_n et a_{n-1}.

Pour tout entier p non nul, on a :

$$S_p(n+1)=(2n+2)\,S_p(n)-n^2S_p(n-1)+S_{p-1}(n)-S_p(n)$$

Par conséquent, la suite $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$(2n+2)\,a_n-n^2a_{n-1}+a_n-a_n=(2n+2)\,a_n-n^2a_{n-1}=a_{n+1}$$

d'après la question 6. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{(n+i)!}{(i!)^2}$ Pour tout $(n,i)\in\mathbb{N}^2$, on a $\dbinom{n+i}{n}.\dfrac{1}{i!}=\dfrac{(n+i)!}{n!\,(i!)^2}$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\lim_{p\to+\infty}n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}$$

Problème 2 :

On note $p:x\mapsto e^x$, $q:x\mapsto e^{2x}$ et $r:x\mapsto e^{x^2}$. On note $\mathcal{B}=(p,q,r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

13. *Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$* Par définition, la famille $\mathcal{B}$ engendre $\mathcal{E}$. Montrons que cette famille est libre.

    Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ap+bq+cr$ soit la fonction nulle. Alors :

    $$\forall x\in\mathbb{R},\quad ae^x+be^{2x}+ce^{x^2}=0.$$

    En particulier, $a+b+c=0$ et $ae+be^2+ce=0$, ce qui implique que $be^2=be$ soit $b=0$ et $a+c=0$.

    De plus, $ae^{-1}+ce=0$ donc $a=c=0$.

    Par suite, la famille $\mathcal{B}$ est libre donc $\boxed{\mathcal{B}\text{ est une base de }\mathcal{E}}$.

On note ψ l'application qui, à $f\in\mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0),f'(0),f(1)\big)$.

14. *Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.*

    Montrons que ψ est une application linéaire bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.

    Soit $(f,g,\lambda)\in\mathcal{E}^2\times\mathbb{R}$. Alors :

    $$\begin{aligned}\psi(f+\lambda g)&=\big((f+\lambda g)(0),(f+\lambda g)'(0),(f+\lambda g)(1)\big)\\&=\big(f(0),f'(0),f(1)\big)+\lambda\big(g(0),g'(0),g(1)\big)\\&=\psi(f)+\lambda\psi(g).\end{aligned}$$

    Ainsi, ψ est une application linéaire.

    Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $f=Ap+Bq+Cr$. On a

    $$\psi(f)=(a,b,c)\iff\begin{cases}A+B+C=a\\A+2B=b\\Ae+Be^2+Ce=c\end{cases}\iff\begin{cases}A+B+C=a\\B-C=b-a\\e(e-1)B=c-ea\end{cases}$$

    donc

    $$\psi(f)=(a,b,c)\iff\begin{cases}B=\dfrac{c-ea}{e(e-1)}=\dfrac{-1}{e-1}a+\dfrac{1}{e(e-1)}c\\C=\dfrac{e-2}{e-1}a-b-\dfrac{1}{e(e-1)}c\\A=\dfrac{2}{e-1}a-b-\dfrac{2}{e(e-1)}c\end{cases}$$

    donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent par ψ.

    Ainsi, $\boxed{\psi\text{ est un isomorphisme de }\mathcal{E}\text{ dans }\mathbb{R}^3.}$

15. *Déterminer ψ^{-1}.*

    Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on a :

    $$\boxed{\begin{aligned}\psi^{-1}((a,b,c))=\left(\frac{2}{e-1}a-b-\frac{2}{e(e-1)}c\right)p+\left(\frac{c-ea}{e(e-1)}=\frac{-1}{e-1}a+\frac{1}{e(e-1)}c\right)q\\+\left(\frac{e-2}{e-1}a-b-\frac{1}{e(e-1)}c\right)r.\end{aligned}}$$

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f\in\mathcal{E}$, associe $\varphi(f)=Ap+Bq+Cr$ où

$$\begin{cases}A=\dfrac{2}{e-1}f(0)+f'(0)+\dfrac{2}{e(e-1)}f(1)\\B=-\dfrac{1}{e-1}f(0)-\dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\\C=\dfrac{e-2}{e-1}f(0)-f'(0)-\dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\end{cases}$$

16. *On note $\mathcal{P}=\{f\in\mathcal{E}:\varphi(f)=f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P}=\{f\in\mathcal{E}:f(1)=0\}$. Déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$; exhibez une base (e_1,e_2) de $\mathcal{P}$.*

Soit $f \in \mathcal{E}$.
Comme ψ est bijective, $\varphi(f) = f$ si, et seulement si, $\psi(\varphi(f)) = \psi(f)$. Or,

$$\psi(\varphi(f)) = \big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$$

donc $\varphi(f) = f$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ i.e. $\boxed{\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}}$.

Soit $f = Ap + Bp + Cr \in \mathcal{P}$, on a $f \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $f(1) = 0$ donc si, et seulement si, $Ae + Be^2 + Ce = 0$.

Une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{A + eB + C = 0}$.

Ainsi, $\mathcal{P} = \{Ap + Bq - (A + eB)r,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(p - r, q - er)$ i.e. la famille $(p - r, q - er)$ engendre $\mathcal{P}$. Comme les fonctions $\boxed{e_1 = p - r}$ et $\boxed{e_2 = q - er}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2) \text{est une base de } \mathcal{P}}$.

17. *On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.*
Soit $f \in \mathcal{E}$.
Comme ψ est bijective, $\varphi(f) = -f$ si, et seulement si, $\psi(\varphi(f)) = -\psi(f)$. Or,

$$\psi(\varphi(f)) = \big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$$

donc $\varphi(f) = -f$ si, et seulement si, $f(0) = f'(0) = 0$ i.e.

$$\boxed{\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : f(0) = f'(0) = 0\}}$$

Soit $f = Ap + Bp + Cr \in \mathcal{P}$, on a $f \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $f(0) = f'(0) = 0$ donc si, et seulement si, $A + B + C = A + 2B = 0$.

Une équation de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{A + B + C = A + 2B = 0}$.

Ainsi, $\mathcal{D} = \{Ap - \dfrac{A}{2}q - fracA2r,\ A \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(2p - q - r)$ i.e. la famille $(2p - q - r)$ engendre $\mathcal{P}$. Comme la fonction $\boxed{e_3 = 2p - q - r}$ est non nulle, on en déduit que $\boxed{\text{la famille } (e_3) \text{ est une base de } \mathcal{D}}$.

18. *Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.*
Montrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{0\}$.
Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$, alors $\varphi(f) = f = -f$ donc $f = 0$.
Les sev $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont donc en somme directe.
Soit $f = Ap + Bq + Cr \in \mathcal{E}$. Si on pose

$$\begin{cases} a = \dfrac{1+e}{e-1}A - \dfrac{2e}{1-e}B - \dfrac{2}{1-e}C \\ b = \dfrac{A+B+C}{1-e} \\ c = \dfrac{1}{1-e}A + \dfrac{e}{1-e}B + \dfrac{1}{1-e}C \end{cases}$$

alors $f = ae_1 + be_2 + ce_3$ donc $f \in \mathcal{P} + \mathcal{D}$.
Par conséquent, $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}}$.
Ainsi : $\boxed{s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathcal{P} \text{ parallèlement à } \mathcal{D}}$

19. *Prouver que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.*
On a déjà prouvé que (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathcal{E}$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, alors $ae_1 + be_2 = -ce_3 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ donc $c = 0$ et $ae_1 + be_2 = 0$ donc $a = b = c = 0$ ce qui prouve la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3).
Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathcal{E}}$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

20. *Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base*
Comme $\mathcal{F}$ est le noyau de l'application linéaire $\Theta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.
La famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ engendre $\mathcal{F}$ et est échelonnée en degré donc libre. Ainsi : $\boxed{\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$

Soit $(P_k)_{1 \leq k \leq q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \quad \lim_{x \to +\infty} P_{k+1}(x) - P_k(x) = +\infty$$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$.

21. *Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq q}$ est libre.*
Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq q}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \lambda_k f_k = 0$. Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_q = 0$.
Supposons, par l'absurde, que $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq q}$ soit non nul, alors l'ensemble $\{k \in [\![1, q]\!]\ :\ \lambda_k = 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ; elle admet donc un plus petit élément que l'on note r.
On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k = f_r \left(\lambda_r + \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k e^{P_k - P_r}\right)$ donc $\displaystyle\lambda_r + \sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k e^{P_k - P_r} = 0$
Or, pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$,

$$e^{P_k - P_r} = \prod_{j=k}^{r-1} e^{P_j - P_{j+1}}$$

donc $\displaystyle\lim_{+\infty} e^{P_k - P_r} = 0$.
Par suite, $\lambda_r = 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.
Par conséquent, $\boxed{\text{la famille } (f_k)_{1 \leq k \leq q} \text{ est libre.}}$