Devoir du 18/12/2020

Exercice 1 : On dit qu'une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est **continue au sens de Cesàro** en $a\in\mathbb{R}$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a\right)\Longrightarrow\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(a)\right)$$

On dit que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ si f est continue au sens de Cesàro en tout $a\in\mathbb{R}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers $a\in\mathbb{R}$.
Prouver que la suite $\left(y_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* a.
Soit $\varepsilon>0$ fixé.
Puisque x converge vers a, il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_1$, $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$.
Soit $n\geq n_1$.

$$|y_n-a|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1-1}|x_k-a|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_1}^{n}|x_k-a|$$

Or, d'une part, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n}|x_k-a|\leqslant\frac{1}{n}(n-n_1)\varepsilon\leq\varepsilon$.

D'autre part, comme la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1-1}|x_k-a|$ converge vers 0, il existe un entier $n_2\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_2$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1}|x_k-a|\leq\varepsilon$.

Soit $n_0=\max(n_1,n_2)$. On a alors $\forall n\geq n_0$, $|y_n-a|\leq 2\epsilon$ ce qui prouve que la suite y converge aussi vers a.

(b) *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *et* u *la suite définie par* $\forall p\in\mathbb{N}$, $u_{2p}=x$ *et* $u_{2p+1}=y$. *Prouver que la suite* u *converge en moyenne vers* $\dfrac{x+y}{2}$.

Pour tout entier n, posons $v_n=\dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$

Pour tout entier n, on a $v_{2n}=\dfrac{x+y}{2}$ et $v_{2n+1}=\dfrac{2n\,v_{2n}+y}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n+1}=\dfrac{x+y}{2}$, ce qui prouve que la suite v converge vers $\dfrac{x+y}{2}$, c'est-à-dire que la suite u converge en moyenne vers $\dfrac{x+y}{2}$.

(c) *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une application continue en* $a\in\mathbb{R}$. *La fonction* f *est-elle continue au sens de Cesàro en* a *? La réponse sera justifiée.*

La suite u de terme général $(-1)^n$ converge en moyenne vers zéro. La fonction $f:x\mapsto|x|$ est continue en zéro mais la suite de terme général $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=1$ ne converge pas vers $f(0)$.

La fonction f n'est donc pas continue au sens de Cesàro en 0.

Si on prend g constante, alors elle est continue et continue au sens de Cesàro en tout point.

Ainsi, si une fonction est continue en un point a, alors on ne peut rien en conclure sur sa continuité au sens de Cesàro en ce point.

2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

(a) On pose $g=f-f(0)$.
Prouver que f *est continue au sens de Cesàro sur* $\mathbb{R}$ *équivaut à* g *est continue au sens de Cesàro sur* $\mathbb{R}$.

— Supposons f est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$. Montrons que g est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.
Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}-f(0)$$

et donc, puisque, par hypothèse f est continue au sens de Cesàro en a,

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(a)-f(0)=g(a)$$

Ainsi, g est continue au sens de Cesàro en a. Ce résultat étant vrai pour tout réel a, g est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

— Réciproquement, si g est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$, alors de la même façon que précédemment, $f=g+f(0)$ est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

On suppose donc désormais que $f(0)=0$.

(b) *Prouver que* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et u la suite définie par $\forall p\in\mathbb{N},\ u_{2p}=x$ et $u_{2p+1}=y$. On a prouvé que la suite u converge en moyenne vers $\dfrac{x+y}{2}$.

Donc comme f est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ et donc en $\dfrac{x+y}{2}$, la suite v de terme général $f(u_n)$ converge en moyenne vers $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Comme la suite v est telle que $\forall p\in\mathbb{N},\ v_{2p}=f(x)$ et $v_{2p+1}=f(y)$, elle converge en moyenne vers $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Par conséquent, on a $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Ainsi, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

(c) *En déduire que f est additive, càd que* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$

En prenant $y=0$ dans la relation précédente, on a donc, puisque $f(0)=0$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors,

$$f(x+y)=f\left(\frac{2x+2y}{2}\right)=\frac{f(2x)+f(2y)}{2}=\frac{2f\left(\frac{2x}{2}\right)+2f\left(\frac{2y}{2}\right)}{2}=f(x)+f(y)$$

D'où, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

(d) *Prouver que f est $\mathbb{Q}$-linéaire, càd* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall r\in\mathbb{Q},\quad f(rx)=rf(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé.

Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f(nx)=nf(x)$ puis, comme $f(nx)+f(-nx)=f(0)=0$, $f(-nx)=-nf(x)$. Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{Z}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(px)=pf(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{Q}$, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r=p/q$. On a alors :

$$f(rx)=f(px/q)=pf(x/q)\qquad f(x)=f(q\times x/q)=qf(x/q)$$

donc $f(rx)=rf(x)$.

(e) *Prouver que* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=xf(1)$.

En prenant $x=1$ dans la relation précédente, on a $\forall qr\in\mathbb{Q},\ f(r)=rf(1)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. D'après la question 1. a, cette suite converge aussi vers x en moyenne, et on a donc, comme f est continue au sens de Cesàro en x,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(r_1)+\cdots+f(r_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}f(1)\frac{r_1+\cdots+r_n}{n}=f(1)x$$

3. *Conclure.*

On a prouvé que si f est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-f(0)=xf(1)$, c'est-à-dire que f est une fonction affine.

Réciproquement, toute fonction affine est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

En effet, soient $(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto Ax+B$, $a\in\mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant en moyenne vers a. Alors,

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=A\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+B\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}Aa+B=f(a)$$

Par conséquent, les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions affines.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la suite $\left(u_n+\dfrac{u_{2n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite u est convergente.

1. On dit qu'un réel a est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

   (a) *Montrer qu'une suite admettant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est une suite divergente.*

   Soit v une suite admettant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes. Il existe deux suites extraites de v convergeant vers deux limites distinctes.

   Supposons, par l'absurde que v converge. Alors toute suite extraite de v converge vers $\lim v$, on a donc une contradiction.

   Par conséquent, toute suite admettant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est une suite divergente.

   (b) *Donner un exemple d'une suite n'admettant pas de valeur d'adhérence et un exemple de suite divergente admettant exactement une valeur d'adhérence.*

   La suite de terme général n n'admet pas de valeur d'adhérence puisque toutes ses suites extraites tendent vers $+\infty$ donc divergent.

   La suite v définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{2n}=n$ et $v_{2n+1}=0$ est divergente et admet pour unique valeur d'adhérence 0.

   En effet, soit $w=\left(v_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de v convergente.

   L'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\,:\,\phi(n)\equiv 0[2]\}$ est fini car sinon, on pourrait extraire de w une suite divergente tendant vers $+\infty$. Il existe donc un entier n_0 tel que $\forall n\geq n_0,\ \phi(n)\equiv 1[2]$. La suite w est donc stationnaire à 0.

   Ainsi, la seule valeur d'adhérence de v est nulle.

2. *Prouver que u admet une valeur d'adhérence, que l'on notera a.*

   La suite u est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède donc une suite extraite convergente, c'est-à-dire une valeur d'adhérence.

3. *Prouver qu'alors $2(\ell - a)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   Soit φ une extractrice telle que la suite de terme général $u_{\varphi(n)}$ tende vers a.
   Par hypothèse, la suite de terme général $u_{\varphi(n)} + \dfrac{u_{2\varphi(n)}}{2}$ converge vers ℓ donc la suite de terme général $u_{2\varphi(n)}$ converge vers $2(\ell - a)$.
4. On considère la suite définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2(l - a_n)$.
   Prouver que pour tout entier n, a_n est une valeur d'adhérence de la suite u.
   Ce résultat se prouve par récurrence à l'aide de la question précédente.
5. *Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.*
   La suite a étant arithmético-géométrique, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-2)^n \left(a - \frac{2\ell}{3}\right) + \frac{2\ell}{3}$$
6. *Prouver que u admet $\dfrac{2\ell}{3}$ pour unique valeur d'adhérence.*
   La suite u étant bornée, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est borné donc la suite de terme général $(-2)^n\left(a - \dfrac{2\ell}{3}\right) + \dfrac{2\ell}{3}$, ce qui donne $a = \dfrac{2\ell}{3}$
   Ainsi, on a prouvé que si a est une valeur d'adhérence de u, alors elle vaut $\dfrac{2\ell}{3}$.
   Comme une telle valeur d'adhérence existe, on a donc prouvé que u admet $\dfrac{2\ell}{3}$ pour unique valeur d'adhérence.
7. *Prouver qu'une suite bornée converge si, et seulement si, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.*
   Soit v une suite bornée.
   • Si la suite v converge, alors sa limite est une valeur d'adhérence et d'après 1.a, c'est la seule.

   • Réciproquement, supposons que v possède une unique valeur d'adhérence notée ℓ. Si elle converge, elle converge donc ver ℓ. Supposons donc par l'absurde que v diverge. On en déduit l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N, \quad |v_n - \ell| > \varepsilon.$$
   En prenant $N = 0$, il existe donc un entier $\phi(0)$ tel que $|v_{\phi(0)} - \ell| > \varepsilon$.
   En prenant $N = \phi(0)+1$, il existe donc un entier $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $|v_{\phi(1)} - \ell| > \varepsilon$.
   On construit ainsi une suite extraite de v, $\left(v_{\phi(n)}\right)_{n_i n\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$$
   Comme v est bornée, la suite $\left(v_{\phi(n)}\right)_{n_i n\mathbb{N}}$ l'est aussi et donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente. Il existe donc une extractrice ψ telle que la suite $\left(v_{\phi\circ\psi(n)}\right)_{n_i n\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ' sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_{\varphi\circ\psi(n)} - \ell| > \varepsilon$, on a, en passant à la limite, $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$ Ainsi, $l' \neq l$ donc v possède au moins deux valeurs d'adhérence ce qui est absurde.

   Par conséquent, v converge si, et seulement si, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.
8. *Conclure.*
   La suite u étant bornée et admettant une unique valeur d'adhérence, elle converge vers cette unique valeur d'adhérence, soit vers $\dfrac{2\ell}{3}$.

Exercice 3 :

1. *Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.*
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\ln x + nx = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ a une unique solution que l'on notera u_n.
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, e]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln x + nx = 0 \Leftrightarrow f(x) = -n$.
   Or, d'après le théorème de la bijection continue, f établit donc une bijection de l'intervalle $]0, e]$ dans $f(]0, e]) =]\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(e)] =]-\infty, 1/e]$. De même, f établit donc une bijection de l'intervalle $[e, +\infty[$ dans $f(]0, e][e, +\infty[) = [f(e), \lim\limits_{x\to+\infty}[= [1/e, 0]$ (limite obtenue par croissances comparées).
   Comme $-n \in f(]0, e])$ et $-n \notin f(]0, e][e, +\infty[)$, il existe donc un unique réel strictement positif tel que $\ln u_n + nu_n = 0$.
2. *Prouver que la suite u est monotone.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(u_n) = -n > -n - 1 = f(u_{n+1})$. Comme u_n et u_{n+1} appartiennent à $]0, e]$ sur lequel f est strictement croissante, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$, c'est-à-dire que u est décroissante.
3. *Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.*
   La suite u est décroissante et minorée par zéro donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite.
   Si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -nu_n = -\infty$ car $\ell > 0$. Par unicité de la limite, on a donc $\ln \ell = -\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, $\ell = 0$.
4. On considère la suite $v = (nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) *Prouver que la suite v tend vers $+\infty$.*
   Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = -\ln u_n$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) *En déduire que* $\ln v_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *puis déterminer un équivalent de* v_n.

On a $\dfrac{\ln v_n + v_n}{v_n} = 1 + \dfrac{\ln v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ par croissances comparées donc $\ln v_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

De plus, $\ln v_n + v_n = \ln n + \ln u_n + nu_n = \ln n$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

(c) *Déterminer un équivalent de* $\ln v_n$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

On a $\ln(v_n) = \ln(\ln n + o(\ln n)) = \ln(\ln n) + \ln(1 + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$.

(d) *Prouver que* $u_n - \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n}$.

On pourra utiliser le fait que $u_n = -\dfrac{\ln(u_n)}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - \dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{\ln(u_n)}{n} - \dfrac{\ln n}{n} = -\dfrac{\ln(nu_n)}{n} = -\dfrac{\ln(v_n)}{n}$.

Donc $u_n - \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n}$.

(e) *En déduire un équivalent de* $u_n - \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln(\ln n)}{n}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(\ln n)}{n} = -\frac{\ln(v_n)}{n} + \frac{\ln(\ln n)}{n} = -\frac{\ln\left(\frac{\ln n}{v_n}\right)}{n}.$$

Or $\ln n = v_n + \ln v_n$ donc $\dfrac{\ln n}{v_n} = 1 + \dfrac{\ln v_n}{v_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln v_n}{v_n} = 0$ puis $\ln\left(\dfrac{\ln n}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln v_n}{v_n} \sim \dfrac{\ln(\ln n)}{n}$.

Ainsi, $u_n - \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln(\ln n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n^2}$.

Exercice 4 : fait en TD