Devoir du 10/10/2020

Exercice 1 : Pour tout complexe z distinct de $2i$, on pose $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}}$

1. *Déterminer les racines carrées complexes de* $8-6\mathrm{i}$.
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a
   $$(a+ib)^2 = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 8 \\ a^2+b^2 &= 10 \\ 2ab &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 9 \\ b^2 &= 1 \\ ab &= -3 \end{cases} \Leftrightarrow a+ib = \pm(3-i)$$
   Les racines carrées de $8+6i$ sont donc $\boxed{\pm(3-i).}$
2. *En déduire l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = 1+\mathrm{i}$.*
   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
   $$f(z) = 1+i \Leftrightarrow z^2 - (1+i)z + 2i(1+i) = 0$$
   Le discriminant du polynôme $X^2-(1+i)X+2i(1+i)$ est $8-6i$ et ses racines sont 2 et $i-1$ qui sont distinctes de $2i$.
   Par conséquent, l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = 1+\mathrm{i}$ est $\boxed{\{2, i-1\}.}$
3. *Soit z_0 un complexe.*
   Discuter suivant les valeurs de z_0 le nombre de complexes z tels que $f(z) = z_0$.
   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
   $$f(z) = z_0 \Leftrightarrow z^2 - z_0 z + 2iz_0 = 0$$
   Le polynôme $X^2 - z_0X + 2iz_0$ possède deux racines dans $\mathbb{C}$ éventuellement confondues.
   Son discriminant étant égal à $z_0^2 - 8iz_0$, si $z_0 \notin \{0, 8i\}$, alors il possède deux racines distinctes. Sinon, il n'en possède qu'une.
   Il reste à vérifier si $2i$ est racine. Comme $(2i)^2 - 2iz_0 + 2iz_0 \neq 0$, ce n'est jamais le cas.
   Ainsi, l'équation $f(z) = z_0$ possède deux solutions distinctes si $z_0 \notin \{0, 8i\}$ et une seule sinon.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2+z+1$.

1. *Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$, $f(\mathbb{R})$.*
   On a $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2+z+1 = z_0$ a au moins une solution complexe donc $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C})$ puis $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
   On a $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2+z+1 = z_0$ a au moins une solution complexe non nulle car la somme des deux solutions vaut -1 donc $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C}^*)$ puis $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.
   Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'existence d'au moins une solution réelle à l'équation $z^2+z+1 = z_0$. Les solutions de cette équation sont $\dfrac{-1\pm\delta}{2}$ où δ est une racine carrée de $\Delta = 4z_0 - 3$. Elle sont donc simultanément réelles et le sont si, et seulement si, $\delta \in \mathbb{R}$. Or, $\delta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \in \mathbb{R}^+$ donc l'équation $z^2+z+1 = z_0$ a des solutions réelles si, et seulement si, $z_0 \in]3/4, +\infty[$.
   Ainsi, $f(\mathbb{R}) =]3/4, +\infty[$.
2. *Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$.*
   Par définition $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2+z+1 \in \mathbb{C}\}$ donc $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
   Par définition $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2+z+1 \neq 0\}$ donc $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}$.
   Par définition $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2+z+1 \in \mathbb{R}\}$.
   Soit $z \in \mathbb{R}$, on a :
   $$z^2+z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2+z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2+z = \bar{z}^2+\bar{z} \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1) = 0$$
   donc $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \Re(z) = -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application. Montrer que :

1. *On suppose que f est injective et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.*
   Initialisation : On a $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0 \leq 0$ donc $f(0) = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(k) = k$.
   On a $f(n+1) \in \mathbb{N}$ et $f(n+1) \leq n+1$ donc $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$. Comme f est injective, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(n+1) \neq f(k) = k$. Par conséquent, $f(n+1) = n+1$.
   Par suite, on a prouvé par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ c'est-à-dire que $f = Id_{\mathbb{N}}$.
2. *On suppose que f est surjective et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = id_{\mathbb{N}}$.*
   Initialisation : Comme f est surjective, 0 possède un antécédent $k \in \mathbb{N}$.
   Comme $0 = f(k) \geq k$, on en déduit que $k = 0$ et donc que $f(0) = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(k) = k$.
   Comme f est surjective, $n+1$ possède un antécédent $k \in \mathbb{N}$. D'après l'hypothèse de récurrence $k \notin [\![0,n]\!]$. Comme $n+1 = f(k) \geq k$, on en déduit que $k = n+1$.
   Par suite, on a prouvé par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ c'est-à-dire que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

3. *On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + (f \circ f)(n) = 2n$. Prouver que f est injective puis que $f = id_{\mathbb{N}}$.*

Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n) = f(n')$. Alors, $f(n) + f(f(n)) = f(n') + f(f(n'))$ soit $2n = 2n'$ et donc $n = n'$.

Ainsi, f est injective.

Prouvons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

Initialisation : Comme $f(0)$ et $f(f(0))$ sont deux entiers naturels vérifiant $f(0) + f(f(0)) = 0$, on a $f(0) = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$.

On a $f(n+1) + f(f(n+1)) = 2(n+1)$. Comme f est injective, l'hypothèse de récurrence implique que l'entier $f(n+1)$ est supérieur ou égal à $n+1$. Ainsi, $f(f(n+1)) \leq n+1$. De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(n+1) \neq k$ donc, par injectivité de f, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(f(n+1)) \neq f(k) = k$. Par suite, $f(f(n+1)) = n+1$ puis $f(n+1) = n+1$.

Par conséquent, on a prouvé par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$ c'est-à-dire que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est involutive si :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (f \circ f)(z) = f(f(z)) = z.$$

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}.$$

(a) *Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = 0$.*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = 0$. On a alors $f_{a,b}(1) = f_{a,b}(i) = 0$ c'est-à-dire $a + b = ia - ib = 0$ donc $a = b = 0$.

Réciproquement, on a $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{0,0}(z) = 0$.

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\{(0, 0)\}.}$

(b) *Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = 0$.*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = z$. On a alors $f_{a,b}(1) = 1$ et $f_{a,b}(i) = i$ c'est-à-dire $a + b = 1$ et $ia - ib = i$ donc $(a, b) = (1, 0)$.

Réciproquement, on a $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{1,0}(z) = Z$.

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\{(1, 0)\}.}$

(c) *Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ soit involutive.*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = z$. On a alors $f_{a,b}(1) = f_{a,b} \circ f_{a,b}(1)$ soit $1 = (a+b)^2$ donc $a + b = \pm 1$. On a, de plus, $f_{a,b}(i) = f_{a,b} \circ f_{a,b}(i)$ soit $i = i(a-b)^2$ donc $a - b = \pm 1$

Ainsi, $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Réciproquement, si $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$, alors $f_{a,b}$ est involutive.

Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}.}$

2. On considère dans cette partie, la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\bar{z}.$$

(a) *La fonction g est-elle involutive ?*

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $g(g(z)) = e^{i\frac{\pi}{4}} \overline{e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{z}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \bar{\bar{z}} = z$ donc g est involutive.

Dans le plan usuel $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point M quelconque.

On note z son affixe et l'on considère le point M' d'affixe $z' = g(z)$.

On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

(b) *Prouver que Δ est une droite dont on donnera l'équation et un vecteur directeur que l'on notera $\vec{w}$.*

On a $M \in \Delta \Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\bar{z}$. En notant $z = x + iy$, on a donc :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \left(\sqrt{2}-1\right)x \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x \end{cases} \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{2}-1\right)x$$

L'ensemble Δ est donc une droite dont un vecteur directeur est $\vec{w}$ de coordonnées $\boxed{(1, \sqrt{2}-1)}$.

(c) *Démontrer que, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{w}$.*

En notant $z = x + iy$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées :

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2}y; \frac{\sqrt{2}}{2}x - y\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\right).$$

On vérifie alors que

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - y\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\right) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est donc orthogonal à $\vec{w}$.

(d) *Soit I le milieu du segment $[MM']$. Prouver que $I \in \Delta$.*

En notant $z = x + iy$, les coordonnées de I sont données par
$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y\right) \\ y_I = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)y\right) \end{cases}$$
On vérifie alors que $y_I = \left(\sqrt{2}-1\right)x_I$ et donc que $\boxed{I \in \Delta}$.

(e) *Par quelle transformation géométrique simple, le point M' se déduit-il du point M ?*
Comme I est le milieu de $[MM']$ et puisque $(MM') \perp \Delta$, le point M' est l'image du point M par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Δ.

Exercice 5

1. *Prouver que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H(n) =$ "$\forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.".

   Initialisation : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$, alors, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{1} z_k\right| = |z_1|$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} |z_k| = |z_1|$. ainsi, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{1} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} |z_k| = |z_1|$, et donc, $H(1)$ est vraie

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ soit vraie. Soit $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Alors, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right|$ et donc, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$
   et, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on a, donc,
$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$
   ce qui prouve $H(n+1)$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Prouver que*
$$\left(\exists u \in \mathbb{C},\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n,\ \forall k \in [\![1n]\!],\ z_k = \lambda_k u\right) \Longleftrightarrow \left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right).$$

Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tels que
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = \lambda_k u.$$
Alors, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u\right| = |u|\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right|$, et puisque $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \geqslant 0$, on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et donc, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k|u| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k u| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Réciproquement, raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$H(n) = \text{"}\forall (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left(\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right) \Rightarrow \left(\exists u \in \mathbb{C},\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n,\ \forall k \in [\![1n]\!],\ z_k = \lambda_k u\right)\text{"}$$

Initialisation : $H(1)$ est évidente.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ soit vraie.
Soit $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. Alors, comme :
$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$
on a : $\begin{cases} (1) & \left|\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \\ (2) & \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \end{cases}$

Distinguons deux cas :

- Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k \neq 0$, alors, d'après (2) et l'hypothèse de récurrence, il existe $u \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = \lambda_k u$. D'après (1), et le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_{n+1} = \lambda\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

  Ainsi, $z_{n+1} = \lambda_{n+1}u$ où $\lambda_{n+1} = \lambda\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \in \mathbb{R}^+$.

- Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$, alors, d'après (2), $\forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = 0$. Alors, en posant $u = z_{n+1}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$ on a bien le résultat souhaité.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$. On se place dans un repère orthonormé direct et on considère des points $M_1, \cdots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, \cdots, z_n$ non nulles.

Pour tout $k \in [\![1 n]\!]$, on note $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.

(a) *Donner, en le justifiant rapidement, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ quelconque, un exemple de n nombres complexes $z_1, \cdots, z_n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$.*

Il suffit de prendre, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ car la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

(b) Soit z un complexe. On pose $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k)$

Prouver que $\varphi(z) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ puis que $|\varphi(z)| = -\varphi(z)$.

On a

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z - \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z_k = z \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} = z \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k} - \sum_{k=1}^{n} |z_k| = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

En particulier, $\varphi(z) \in \mathbb{R}_-^*$ et donc $|\varphi(z)| = -\varphi(z)$.

(c) *Prouver que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$.*

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire précédemment démontrée :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = -\varphi(z) = |\varphi(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\overline{a_k}(z - z_k)| = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$

car, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|\overline{a_k}| = 1$.

(d) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MM_k = \sum_{k=1}^{n} OM_k$*

Il s'agit donc de déterminer les points dont l'affixe z vérifie

$$(*) \ : \ \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$

On a donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \left| \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k) \right| = \sum_{k=1}^{n} |\overline{a_k}(z - z_k)|$.

D'après le cas d'égalité, vu en amont, dans l'inégalité triangulaire, on a

$$(*) \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{C},\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \overline{a_k}(z - z_k) = \lambda_k u$$

Supposons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Il existe donc $u \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \overline{a_k}(z - z_k) = \lambda_k u.$$

Alors, $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z - z_k) = u \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Or $\varphi(x) < 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geqslant 0$, donc $u \in \mathbb{R}_-^*$.

Soit $\forall k \in [\![1, n]\!]$, soit $z = z_k$ soit $\operatorname{Arg}(-\overline{a_k}(z - z_k)) \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\operatorname{Arg}(z_k - z) \equiv \operatorname{Arg}(a_k)\ \ [2\pi]$, ce qui prouve que les points O, M et M_k sont alignés. Par suite :

- Si $M_1, \cdots, M_n$ sont alignés sur une droite passant par O, l'ensemble demandé est le plus petit segment joignant deux des points $M_1, \cdots, M_n$ et passant par O.
- Sinon, seul O convient.

La réciproque est immédiate.