Equivalence des normes en dimension finie (corrigé)

1 On commence par remarquer que le résultat à prouver se traduit pour la norme infinie de la façon suivante :

(H_p) : " Toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^p$ bornée pour $\| \ \|_\infty$ possède une suite extraite cv pour $\| \ \|_\infty$ " (c'est à dire coordonnée par coordonnées)

On fait la preuve par récurrence sur p.

- H_1 : C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Soit $p \geq 1$. On suppose (H_p) vraie. Soit $(V_n)_n \in (\mathbb{K}^{p+1})^{\mathbb{N}}$ bornée en norme infinie ($\exists M, \forall n, \ \|V_n\|_\infty \leq M$)

On décompose V_n sous la forme $V_n = (U_n, u_n)$ où $(U_n)_n \in (\mathbb{K}^p)^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$\|V_n\|_\infty = \mathrm{Max}(\|U_n\|_\infty, |u_n|)$, donc $(U_n)_n$ est bornée pour $\| \ \|_\infty$: D'après (H_p) : $\exists \varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict $\nearrow$ telle que

$U_{\varphi_1(n)} \xrightarrow[n\infty]{\| \ \|_\infty} U$.

La suite $(u_{\varphi_1(n)})_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$, donc selon H_1, $\exists \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict $\nearrow$ telle que $(u_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ cv vers $\ell \in \mathbb{K}$. La suite $(U_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ reste convergente. Par convergence coordonnée par coordonnée

$$V_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \xrightarrow[n\infty]{\| \ \|_\infty} (U, \ell) .$$ D'où H_{p+1} $\square$.

2 : Soit $\vec{x} \in E$
$\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}$. On a :

$$N(\vec{x}) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(\vec{e_i}) \leq \underset{1\leq i\leq n}{\mathrm{Max}} |x_i| \sum_{i=1}^{n} N(\vec{e_i}) = k \|x\|_\infty$$

3 : α est la borne inférieure d'une partie non vide minorée (par 0).
α est donc bien défini.

4 : (a) Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure :

$$\exists\, \alpha_n \in \{ N(\vec{x}),\ \|x\|_\infty = 1 \},\quad \alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} \alpha.$$

Pour chaque n, $\alpha_n \in \{N(\vec{x}), \|x\|_\infty = 1\}$, donc $\exists\ \vec{U_n},\ \alpha = N(U_n),\ \|U_n\| = 1$

(b) . La suite $(U_n)_n$ est bornée en norme infinie. D'après 1)

$$\exists\ V \in \mathbb{K}^p \text{ et } \varphi \text{ extractrice},\quad U_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{\|\ \|_\infty} V$$

Comme $\big|\, \|V\|_\infty - \|U_{\varphi(n)}\|_\infty \big| \leq \|U_{\varphi(n)} - V\|_\infty$ on a

en passant à la limite $\boxed{\|V\|_\infty = 1}$ (1)

De plus $|N(V) - N(U_{\varphi(n)})| \underset{I.T}{\leq} N(V - U_{\varphi(n)}) | \leq k \|U_{\varphi(n)} - V\|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Ceci prouve que $N(U_{\varphi(n)}) = \alpha_{\varphi(n)} \longrightarrow N(V)$. Donc par unicité de la limite

$$\boxed{N(V) = \alpha} \ (2)$$

(c) (1) assure que $V \neq 0$ et (2) assure, par séparation de N que $\alpha \neq 0$.

5 : $\forall x,\ \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow N(\vec{x}) \geq \alpha$.

Donc $\forall \vec{x} \neq 0,\ N\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|_\infty}\right) \geq \alpha$. Par homogénéité on a donc

$$\forall \vec{x} \in E \quad N(\vec{x}) \geq \alpha \|x\|_\infty \quad [\text{le cas } x = 0 \text{ est trivial}]$$

Il vient donc, puisque $\alpha \neq 0$

$$\forall x \neq \vec{0} \quad \|x\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} N(\vec{x})$$

$\square$.