Lycée Buffon
MPSI

TD 23
Année 2020-2021

Polynômes

Exercice 1 : Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et $P\in\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que le reste dans la division Euclidienne de P par $X-a$ est $P(a)$.
2. Déterminer le reste dans la division Euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ lorsque $a\neq b$ puis lorsque $a=b$.
3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.
   Déterminer le reste de la division Euclidienne de $(\cos\theta+X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 2 :

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(0)=1$ et $P(1)=2$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :
   $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P'(0)=-1$ et $P'(1)=0$.

Exercice 3 : Relation de Bézout améliorée
Soit $(A,B)\in\mathbb{K}[X]^2$ non nuls tel que $A\wedge B=1$ et $(U_0,V_0)\in\mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU_0+BV_0=1$

1. Montrer que
$$\{(U,V)\in\mathbb{K}[X]^2\ :\ AU+BV=1\}=\{(U_0+RB,V_0-RA),\ R\in\mathbb{K}[X]\}$$
2. En déduire qu'il existe un unique couple $(U_1,V_1)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que :
$$AU_1+BV_1=1,\ \deg U_1<\deg B \text{ et } \deg V_1<\deg A.$$

Exercice 4 :

1. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique couple de polynômes (P_n,Q_n) de degré strictement inférieur à n tel que
$$(1-X)^nP_n(X)+X^nQ_n(X)=1.$$
2. Exprimer Q_n en fonction de P_n et en déduire l'existence de $c_n\in\mathbb{R}$ telle que
$$(1-X)P_n'(X)-nP_n(X)=c_nX^{n-1}$$
3. En déduire les coefficient de P_n.

Exercice 5 : On cherche à déterminer les polynômes P non nuls de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$P(X^2)+P(X)P(X+1)=0.$$

1. Soit P un polynôme solution
   (a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 aussi.
   (b) En déduire que a est racine de P, alors $a\in\{0\}\cup\mathbb{U}$.
   (c) Montrer que si a est racine de P, alors $a-1\in\{0\}\cup\mathbb{U}$.
   (d) En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{N}^4$ tels que :
$$P=\lambda X^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\delta$$
2. Conclure.

Exercice 6 :

1. A l'aide du polynôme $(X+1)^n$ déterminer les sommes :
$$\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k}$$
2. Déterminer les sommes :
$$\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},\qquad\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=0}^n k3^k$$

Exercice 7 :

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un unique polynôme P_n tel que :
$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{1}{z^n}$$
2. Pour tout entier n, simplifier $P_n(2\cos\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.
3. En déduire les racines de P_n puis la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.