DM 19

—

D'après Mines-Ponts PSI 2020
Mathématiques 2

—

Caractérisation et exponentielle de matrices normales

—

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.

— $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) dont la matrice unité est notée I_n.

— E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^{\mathrm{t}}XY \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}XX}.$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^{\mathrm{t}}A$, la transposée de A (la notation A^T est aussi acceptée).

— $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A\,{}^{\mathrm{t}}A = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.

— $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite* ***normale*** *lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$.*

Définition 2 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite* ***orthogonalement semblable à*** *$B \in \mathcal{M}_n$ s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^{\mathrm{t}}QAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est* ***ORTS*** *à B.)*

Objectifs

— Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(C₁) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^{\mathrm{t}}A = P(A)$.

(C₂) La matrice A est normale.

(C₃) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^{\mathrm{t}}AX\| = \|AX\|$.

(C_4) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

I. Question préliminaire

1. Démontrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

1.bis (cette questions est un peu plus difficile et peut être admise dans un premier temps)
Soit f un endomorphisme d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

(a) Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 1 ou 2 tel que $P(f)$ n'est pas inversible (on pourra considérer un diviseur du polynôme minimal de f).

(b) En considérant un vecteur $x \in \ker P(f)$ démontrer qu'il existe un sous espace stable par f de dimension 1 ou 2.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions **(C_1)**, **(C_2)**, **(C_3)** et **(C_4)**, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions **(C_1)**, **(C_2)** et **(C_3)**.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions **(C_1)**, **(C_2)** et **(C_3)**.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions **(C_1)** et **(C_4)**.

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition **(C_1)**, alors A vérifie la condition **(C_2)**.

6. Montrer que si A vérifie la condition **(C_2)**, alors A vérifie la condition **(C_3)**.

IV. La condition (C_3) implique la condition (C_4)

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition **(C_3)**.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *de* E_2.
En déduire que A vérifie la condition **(C_4)**.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition **(C_3)**.

8. Montrer que pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie $(\mathbf{C_3})$.

9. En déduire que A et ${}^{t}A$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathbf{C_3})$, avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $(\boldsymbol{C_3})$.

12. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

V. La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$
On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(rR(\theta)) = {}^{t}(rR(\theta))$.
Lorsque $\sin\theta \neq 0$, *on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.*

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$.

VI. Applications

16. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale. En utilisant le théorème démontré dans les parties précédentes établir l'équivalence des propriétés suivantes :
    (a) M est antisymétrique
    (b) Le spectre de M est inclus dans $i\mathbb{R}$
    (c) les blocs de la condition $(\mathbf{C_4})$ de taille $(1, 1)$ sont nuls et et ceux de taille $(2, 2)$ sont de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

17. De manière analogue, parmi les matrices normales, caractériser par leur spectre et leur forme réduite celles qui sont orthogonales.

18. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$ et que si $A \in \mathcal{E}_n$ la matrice $\exp A$ est aussi dans $\mathcal{E}_n$.

19. Démontrer, à l'aide des résultats précédents que $\exp(\mathcal{A}_n) = \mathcal{SO}_n$. La restriction de exp à $\mathcal{A}_n$ est elle injective ?

   On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions :

   — les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire,

   — il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

20. Démontrer que toute matrice normale est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique qui commutent.

21. Démontrer que $\exp(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$ et que la décomposition $B = ST = TS$ est unique.

FIN DU PROBLÈME