DM 5

Exercice 1

1. • En 0 on fait un DL : $\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+o(1)$

Il en résulte $g(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2}+o(1)$ donc $g(x) \underset{0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Clairement, $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

g est continue sur $]0,+\infty[$ et possède une limite finie en 0^+ et $+\infty$: Elle est donc bornée

2. $x \overset{f}{\longmapsto} g(x)e^{-x}$ est continue sur $]0,\infty[$.

. en 0 $f(x) \sim \frac{1}{2}$ donc l'intégrale est faussement impropre

. en $+\infty$ $f(x) \sim e^{-x}$ donc par théo de comparaison f est intégrable

Rq : Comme g est bornée on peut aussi dire : $\exists M, \forall x\ |g(x)| \leq M$.

et alors $\forall x \in]0,\infty[\ \ |f(x)| \leq Me^{-x}$ et comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable on a fini

3. (a) $\int_0^\infty e^{-nt}dt = \lim_{A\,\infty} \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^A = \frac{1}{n}$

(b) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}}dx \overset{①}{=} \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}\right)dx \overset{②}{=} \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\infty e^{-kx}dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = H_{n-1}$

Justifications :

Pour ② Il suffit de dire que chaque intégrale $\int_0^\infty e^{-kx}dx$ converge (d'après 3])

et d'utiliser la linéarité.

Pour ① : c'est juste l'égalité géométrique $\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n}(e^{-x})^k = \frac{e^{-x}-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}}$.

4) (a) • $\int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ converge $\forall y > 0$ car $f: x \longmapsto \frac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $[y, +\infty[$ et intégrable en $+\infty$. ($x^2 f(x) = x e^{-x} \underset{x\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$)

• De la même façon $\int_y^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx$ converge $\forall y > 0$.

Par linéarité : $\int_y^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ converge et $\int_y^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} - \int_y^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx$.

On opère le CDV $t = nx$ dans la dernière intégrale : Il vient :

$$\int_y^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx = \int_{ny}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Donc $\int_y^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_y^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ny}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_y^{ny} \frac{e^{-t}}{t} dt = J(y)$.

(b) $\forall y > 0$ on a : $\forall t \in [y, ny]$ $\quad e^{-y} \geq e^{-t} \geq e^{-ny}$

Par suite $\quad e^{-y} \int_y^{ny} \frac{dt}{t} \geq J(y) \geq e^{-ny} \int_n^{ny} \frac{dt}{t}$

ou encore $\quad (\ln n) e^{-y} \geq J(y) \geq (\ln n) e^{-ny}$

En faisant tendre y vers 0 il vient par encadrement : $\lim\limits_{y \to 0} J(y) = \ln(n)$

ainsi d'après (a) $\quad \lim\limits_{y \to 0} \int_y^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln(n)$. Ceci prouve la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ ainsi que l'égalité demandée.

5) $H_{n-1} - \ln(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1-e^{-x}} - \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,dx = \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-nx})\, g(x)\,dx$. (1)

d'après 3) et 4).

. le terme de gauche est égal à $H_n - \ln(n) - \frac{1}{n} = \gamma + \frac{1}{n} + o(1) \xrightarrow[n\infty]{} \gamma$

. le terme de droite à $\int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx - \int_0^\infty e^{-nx} g(x)\,dx$ [on peut couper en 2 car on a vu au 2 que $\int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx$ converge].

De plus $\left|\int_0^\infty e^{-nx} g(x)\,dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-nx} |g(x)|\,dx \leq M \int_0^\infty e^{-nx}\,dx$ où $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |g(x)|$ (existe d'après 1))

Donc $\left|\int_0^\infty e^{-nx} g(x)\,dx\right| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et le terme de droite dans (1) tend vers $\int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx$

Par unicité de la limite : $\gamma = \int_0^\infty e^{-x} g(x)\,dx$.

6) $g(x) = \frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\left[\ln(e^{x}-1) - \ln(x)\right]$, donc sous réserve de convergence des termes écrits on a :

$$\int_0^\infty g(x) e^{-x}\,dx = \underbrace{\Big[(\ln(e^{x}-1) - \ln x)\, e^{-x}\Big]_0^\infty}_{A} + \underbrace{\int_0^\infty (\ln(e^{x}-1) - \ln x)\, e^{-x}\,dx}_{B}.$$

Comme $\int_0^\infty g(x) e^{-x}\,dx$ il suffit de vérifier l'existence de A ou celle de B (l'autre s'en déduit par linéarité de la limite)

or : en 0 $(\ln(e^{x}-1) - \ln(x))e^{-x} = \ln\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)e^{-x} \sim \ln\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right) = \ln(1+o(1)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

en $+\infty$ $(\ln(e^{x}-1) - \ln(x)) \sim x e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

→

Ceci assure que le terme A est convergent ~~et donc nul~~ (et égal à zéro !)

et donc que
$$\int_0^\infty e^{-t} g(t)\,dt = \int_0^\infty \left[\ln(e^t-1) - \ln(t)\right] e^{-t}\,dt.$$

De plus on peut séparer l'intégrale en 2 car les deux intégrales : $\int_0^\infty \ln(e^t-1)e^{-t}\,dt$ et $\int_0^\infty \ln t\, e^{-t}$ convergent. Là encore, ~~~~ il suffit de prouver la convergence de l'une des 2. Faisons le pour la seconde :

Soit $\varphi(t) = \ln t\, e^{-t}$: φ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,\infty[$.

en 0^+ $\varphi(t) \sim \ln t$ qui est intégrable en 0 (Intégrale de référence)

en $+\infty$ $t^2\varphi(t) = t^2 \ln t\, e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi(t) \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et φ est intégrable par comparaison à Riemann.

$$\int_0^\infty \ln(e^t-1)\,e^{-t}\,dt \underset{\substack{u=e^t-1\\ \mathcal{C}^1 \text{ bijectif}}}{=} \int_0^\infty \frac{(\ln u)\,du}{(u+1)^2}$$ . . Notons J cette intégrale

Dans J on opère le CDV ($\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0,\infty[$ sur $]0,\infty[$) $v = \frac{1}{u}$. Il vient :

$$J = \int_\infty^0 \frac{-(\ln v)}{\left(1+\frac{1}{v}\right)^2}\left(\frac{-dv}{v^2}\right) = -\int_0^\infty \frac{\ln v}{(1+v)^2}\,dv = -J.$$

Donc $J=0$ et finalement

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-t} g(t) = -\int_0^\infty \ln t\, e^{-t}\,dt$$

$\square$.

Problème 2 (corrigé)

I 1. Soient $f, g \in E$ et F, G des primitives respectives

Alors $F+\lambda G$ est une primitive de $f+\lambda g$.

Or $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(t)}{(1+t)^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{G(t)}{(1+t)^2}dt$ convergent, donc par linéarité $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F+\lambda G(t)}{(1+t)^2}dt$ aussi.

Donc $f+\lambda g \in E$. et E est un espace vectoriel.

2) a) $f \in \mathcal{L}(I) \Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ cv $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ possède une limite quand $x \longrightarrow +\infty$

~~Donc on a~~ $\Leftrightarrow$ F possède une limite finie en $+\infty$

b) on a d'après ce qui précède $F(x) = \ell + \underset{+\infty}{o}(1)$

Donc $\dfrac{F(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{\ell}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc par théorème de comparaison

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(x)}{(x+1)^2}dx$ converge. donc $\boxed{f \in E}$

3) on a déjà $\mathcal{L}(I) \subset E$

posons $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on a bien f $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{F(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \sim \dfrac{\ln x}{x^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(x)}{(x+1)^2}dx$ est convergente et $f \in E$.

Pourtant $f \notin \mathcal{L}(I)$. Donc $\boxed{\mathcal{L}(I) \subsetneq E}$

4) $f \geq 0 \Rightarrow F \geq 0$ donc $I(f) = 0 \Longrightarrow F = 0 \Rightarrow f = 0$. (car l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle ssi cette fonction est identiquement nulle)

5] On opère dans $I(f)$ le CDV $t \to \frac{1}{t}$ (C^1 bijectif de $]0,\infty[$ sur lui même)

Il vient $I(f) = \int_0^\infty \frac{F(\frac{1}{t})}{(1+\frac{1}{t^2})} \frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{F(\frac{1}{t})}{(t^2+1)} dt$. (prouve la cv de l'intégrale au passage)

Donc $\underline{\int_0^\infty \frac{F(t)+F(\frac{1}{t})}{(t^2+1)} dt = 2I(f)}$. qui donne le résultat voulu en divisant par 2.

II

1] On fait une I.P.P en posant $u(t) = F(t)$
$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$

Il vient $\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt = \left.-\frac{F(t)}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{f(t)}{(1+t)} dt$

comme $F(0) = 0$, <u>c'est le résultat demandé.</u>

2] lorsque g est une <u>fonction positive</u> la fonction $A \to \int_0^A g(t)dt$ est croissante donc ne peut que converger (si $\int_0^\infty g(t)dt$ cv) ou bien tendre vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$. Ceci prouve le résultat de l'indication

* <u>Supposons $\int_0^\infty \frac{f(t)}{1+t} dt$ cv.</u> Alors comme $F(A) \geq 0$ on a: $\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^A \frac{f(t)}{1+t} dt \leq \int_0^\infty \frac{f(t)}{1+t} dt$.

Ceci prouve que $\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ est majorée, donc converge d'après ce qui précède.

* Supposons $\int_0^\infty \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ cv. Alors si $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ diverge on aura:

$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{f(t)}{1+t} dt = 0$, donc d'après le 1] $\lim_{A \to +\infty} -\frac{F(A)}{1+A} = +\infty$

Il en résultera : $\dfrac{F(A)}{1+A} \geq 1$ pour A assez grand

et donc $\dfrac{F(A)}{(1+A)^2} \geq \dfrac{1}{1+A}$.

Or $\int_0^\infty \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ converge et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t}$ diverge : c'est impossible

Donc $\underline{\int_0^\infty \frac{f(t)}{1+t}\,dt \text{ converge.}}$

3) • posons $f(t) = (t+1)\cos t + \sin t$ Alors $\boxed{\int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+1)}\,dt \text{ diverge}}$

en effet c'est la somme des deux intégrales $\int_0^\infty \cos t\,dt$ et $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t+1}\,dt$.

La première diverge et la seconde converge (voir après).

Mais $F(t) = \int_0^t f(u)\,du \underset{\text{IPP}}{=} (t+1)\sin t - \int_0^t \sin u\,du + \int_0^t \sin u\,du = (t+1)\sin t$

et $\dfrac{F(t)}{(1+t)^2} = \dfrac{\sin t}{1+t}$ Donc $\boxed{\int_0^\infty \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt \ \underline{\text{converge}}}$

Ceci prouve que si f n'est pas supposée positive, les deux intégrales ne sont plus forcément de même nature.

Preuve de la convergence de $\underline{\int_0^\infty \frac{\sin t}{(t+1)}\,dt}$:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{(t+1)}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{(t+1)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\cos t}{(t+1)^2}\,dt = 1 - \underbrace{\frac{\cos x}{x+1}}_{} - \int_0^x \frac{\cos t}{(t+1)^2}\,dt$$

$\xrightarrow{x\to\infty} 1$; $\int_0^x \frac{\cos t}{(t+1)^2}\,dt \xrightarrow{x\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t+1)^2}\,dt$ (Absolument cv car $\left|\frac{\cos t}{(t+1)^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$)

3) a) $f \in L^2(I)$; $x \geq 0$

$$|F(x)|^2 = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^2 \leq \int_0^x 1\,dt \times \int_0^x f^2(t)\,dt \leq x \int_0^\infty f^2(t)\,dt.$$

Il en résulte $|F(x)| \leq M\sqrt{x}$ où M est une constante positive ($M = \sqrt{\int_0^\infty f^2(t)\,dt}$)

En suite $\dfrac{F(x)}{(x+1)^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ est intégrable (Riemann en $+\infty$)

et donc $f \in E$.

La réciproque est fausse.

Prenons $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^\alpha}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Alors $f \notin L^2(I)$. Cependant $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ et donc $\dfrac{F(x)}{(x+1)^2} \sim \dfrac{k}{x^{1+\alpha}}$

et donc $f \in E$.

b) Soit $\tilde{F}$ une primitive de $|f|$ telle que $\tilde{F}(0) = 0$

$$\tilde{F}(x) = |\tilde{F}(x)| = \int_0^x |f(t)|\,dt \geq \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \geq |F(x)|$$

Donc $\forall x \geq 0$ $\dfrac{|F(x)|}{(1+x)^2} \leq \dfrac{\tilde{F}(x)}{(1+x)^2}$. Par suite, si $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tilde{F}(x)}{(x+1)^2}\,dx$ cv,

on a aussi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(x)}{(1+x)^2}\,dx$ convergente □

4) Posons $G(t) = F(t) - m(f)t$ et $H(t) = G(t+T) - G(t)$

Alors $H'(t) = f(t+T) - f(t) = 0$. De plus $H(0) = G(T) - G(0) = F(T) - T\,m(f) = 0$

Donc H est la fonction nulle.

Il en résulte que G est périodique et continue, donc bornée.

4°)

* f est périodique : $\frac{F(t)}{(1+t)^2} = \frac{m(f)\,t}{(1+t)^2} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

si $m(f) \neq 0$: $\frac{F(t)}{(1+t)^2} \sim_{\infty} \frac{m(f)}{t}$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ diverge

si $m(f) = 0$: $\frac{F(t)}{(1+t)^2} = O_{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ converge

Finalement pour f périodique :

$$\boxed{\begin{cases} f \in E \iff m(f) = 0 \\ |f| \in E \iff m(|f|) = 0 \iff f = \widehat{0} \end{cases}}$$

(car $\int_0^{T} |f(u)|\,du = 0$ et f (cont) $\Rightarrow f = 0$ sur $[0,T]$ donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité)

La réciproque de a) est fausse.

On prend par exemple $f(t) = \sin t$

5°)

a) oui :

$$|\Phi(f)| = \left|\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt\right| \leq \int_0^{\infty} \frac{\left|\int_0^t f(u)\right|}{(1+t)^2}\,dt \leq \int_0^{\infty} \frac{\left(\int_0^t |f(u)|\,du\right)dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} \times \int_0^{\infty} |f(u)|\,du$$

Il suffit de prendre $a = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = 1$

b) oui. Au 3) on a prouvé : $|F(t)| \leq \sqrt{t}\sqrt{\int_0^{\infty} |f(u)|^2\,du}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(I)$

Donc

$$\Phi(f) \leq \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt \times \sqrt{\int_0^{\infty} |f(u)|^2\,du} \quad \text{l'intégrale } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt \text{ est bien convergente}$$

(car $\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} \sim_{\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$)

On pose $a_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt$

Problème 2

1) C'est du cours.

2) a) Si $\alpha \neq 0$ on a $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\alpha}{x} > 0$ et $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ div.

D'après le 1) on a donc $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \sim \alpha \int_a^x \frac{dt}{t}$

Donc $\ln(f(x)) - \ln f(a) \underset{+\infty}{\sim} \alpha(\ln x - \ln a)$

comme $\ln x \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ les termes $\ln(f(a))$ et $\ln(a)$ sont négligeables et

$$\boxed{\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \longrightarrow \alpha}$$

Si $\alpha = 0$ Alors $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a aussi $\ln(f(x)) = o(\ln x)$ soit $\lim_{x \infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x} = 0 = \alpha$.

b) Si $\alpha < -1$ alors, soit $\beta /$ $\alpha < \beta < -1$

D'après le a) : $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \leq \beta$ pour x assez grand.

on en déduit $0 \leq f(x) \leq x^{\beta}$ au voisinage de $+\infty$, donc puisque $\beta < -1$ f est intégrable sur $[a, +\infty[$ (Théo de comparaison)

c) Si $\alpha > -1$, alors en considérant β tel que $\alpha > \beta > -1$ on montre de même que $f(x) \geq x^{\beta}$. pour x assez grand, et comme $\beta > -1$ $\int_a^{+\infty} x^{\beta} dx$ Div.

d) Cas $\alpha = -1$

Prenons par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$.

alors $\ln f(x) = -\ln x - \beta \ln(\ln x) \sim -\ln x$ Donc $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x} \longrightarrow -1$.

Pourtant si $\beta > 1$ f est intégrable

si $\beta < 1$ f n'est pas intégrable.

3) Voir à la fin

4) a) et b) comme f décroit on a $\forall t \in [s_{n-1}, s_n]$ $f(s_n) \leq f(t) \leq f(s_{n-1})$

Par intégration il vient, vu que $s_n - s_{n-1} = u_n$:

$$u_n f(s_n) \leq \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt \leq u_n f(s_{n-1})$$

or, vu que $s_n \to +\infty$ et $f \geq 0$ on a : f intégrable sur $[a, +\infty[\iff \sum \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)dt$ cv.

Les résultats voulus se déduisent alors du théorème de comparaison.

c) Supposons la suite (u_n) bornée par M

alors on a $\forall n$ $s_n \leq M + s_{n-1}$ donc $u_n f(s_n) \geq u_n f(s_{n-1}+M)$

posons $g(t) = f(t+M)$ alors $u_n f(s_n) \geq u_n g(s_{n-1})$

comme $\int_a^{+\infty} f dt$ et $\int_a^{+\infty} g dt$ sont de même nature (C.D.V $t+M = s$) on a :

Ainsi f intégrable $\underset{(a)}{\Rightarrow} \sum u_n f(s_n)$ cv $\Rightarrow \sum u_n g(s_{n-1})$ cv $\underset{(b)}{\Rightarrow} g$ intégrable $\Rightarrow f$ intégrable.

et les propriétés sont donc équivalentes.

4d) si $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ on sait que $\sum a_n$ cv.

construisons une suite u_n telle que $\sum w_n$ diverge.

Comme $w_n = \dfrac{u_n}{(1+s_{n-1})^2} = \dfrac{u_n}{\left(1+\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)^2}$, il suffit de choisir la suite définie par

la récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \left(1+\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)^2 \end{cases}$ qui vérifie bien les hypothèses requises.

On a alors $w_n = 1$ donc $\sum w_n$ DIV.

3) (Corrigé abrégé)

Supposons $\frac{x f(x)}{f'(x)} \to \alpha$

Alors $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{x}{\alpha}$ (on suppose $\alpha \neq 0$)

En intégrant au voisinage de $+\infty$ cette relation de comparaison (comme précédemment, l'intégrale diverge) il vient :

$\ln|f(x)| \sim \frac{x^2}{2\alpha}$

On en déduit $\ln[x^2|f(x)|] \sim \frac{x^2}{2\alpha} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ($\alpha < 0$)

et donc $x^2 f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure l'intégrabilité de f par Riemann.

Toujours par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{\infty} f(t)\,dt \sim \int_x^{\infty} \frac{\alpha f'(t)}{t}\,dt.$$

or $$\int_x^{\infty} \frac{\alpha f'(t)}{t}\,dt = -\frac{\alpha f(x)}{x} + \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{\alpha t^2}\,dt = -\frac{\alpha f(x)}{x} + \underset{+\infty}{o}\left(\int_x^{\infty} f(t)\,dt\right)$$

Donc $$\boxed{\int_x^{\infty} f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha f(x)}{x}}$$

un exemple est $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$