Résumé 6 – Espaces vectoriels normés et topologie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Norme et distance

Définition : Norme sur un espace vectoriel

Une norme est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

(E, N) est un espace vectoriel normé.

$(E, \|\cdot\|)$ désigne désormais un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Une norme sur E vérifie l'inégalité triangulaire étendue :

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Exemples de normes à connaître :

- Normes sur $\mathbb{K}^n$ – pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\ ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

- Normes sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$ – pour $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\ ; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}\ ; \quad \|f\|_\infty = \sup_I |f|$$

- Norme euclidienne : si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel, alors $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E.
- Norme produit : si (E_i, N_i) sont p espaces vectoriels, on peut munir $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad N(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} N_i(x_i)$$

Définition : Distance associée à une norme

On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application :

$$d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$$

Proposition

Une distance d associée à une norme $\|\cdot\|$ vérifie :

- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

- la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ est

$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$$

- la boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ est

$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}$$

- la sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geqslant 0$ est

$$S(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$$

Une partie A est bornée si, et seulement si,

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x\| \leqslant M$$

Comparaison de normes

Soient N et N' deux normes définies sur E.

Proposition

Toute suite convergeant au sens de N converge aussi au sens de N' si, et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N'(x) \leqslant \alpha N(x)$.

Définition : Normes équivalentes

N et N' sont équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$$

L'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Théorème : Équivalence des normes

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit de construire une suite de vecteurs telle que $N(u_n) \leqslant \alpha N'(u_n)$ est impossible, en passant à la limite.

Notions générales de topologie

→ Voisinages, ouverts et fermés

Soit A une partie de E et $x \in E$.

Définition : Voisinage, ouvert, fermé

- A est un voisinage de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
- A est un ouvert de E si :

$$\forall x \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset A$$

- A est un fermé de E si son complémentaire $A^c = E \setminus A$ est un ouvert.

$\varnothing$ et E sont des parties ouvertes et fermées de E.

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé, toute intersection de fermés est un fermé.

Théorème : Caractérisation séquentielle

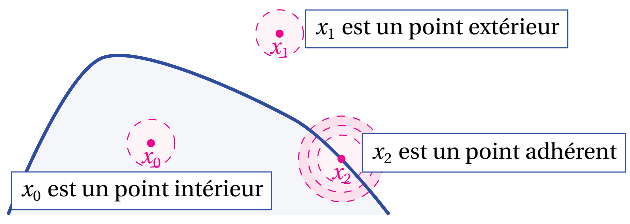
A est une partie fermée de E si et seulement si la limite de toute suite convergente de A est dans A.

Deux normes équivalentes définissent sur un espace la même topologie : les parties ouvertes et les parties fermées sont les mêmes pour l'une comme pour l'autre.

→ Intérieur, adhérence et frontière

Définition : Point intérieur, point adhérent

- x est un point intérieur à A s'il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset A$.
- x est un point adhérent à A si pour tout $r>0$, $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$.



Définition : Intérieur, adhérence et frontière

- L'intérieur de A est l'ensemble $\mathring{A}$ des points intérieurs à A.
- L'adhérence de A est l'ensemble $\overline{A}$ des points adhérents à A.
- La frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\setminus\mathring{A}$.

- $\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$.
- L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, c'est même le plus grand ouvert de A.
- L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est le plus petit des fermés contenant A.

Proposition : Caractérisation séquentielle

Un point x de E est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

$$\begin{aligned} a\in\overline{A} &\iff \forall r>0,\quad B(a,r)\cap A\neq\varnothing\\ &\iff \exists (x_n)\in A^{\mathbb{N}},\quad x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} a\\ &\iff d(a,A)=0\end{aligned}$$

Si A est une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$, $\sup(A)$ et $\inf(A)$ appartiennent à $\overline{A}$.

Définition

Soient A et B deux parties de E.

- On dit que A est dense dans E si $\overline{A}=E$.
- On dit que A est dense dans B si $B\subset\overline{A}$.

De façon équivalente, A est dense dans B si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- tout élément de B est limite d'une suite de A.
- pour tout $x\in B$, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$

Continuité dans un espace vectoriel normé

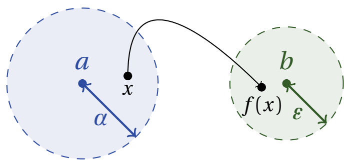
Soient $f:E\to F$, où E et F désignent des espaces vectoriels munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et $A\subset E$.

→ Limites

Définition

f admet comme limite $b\in F$ en $a\in\overline{A}$ si,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\alpha>0,\quad \forall x\in A,\\ \|x-a\|_E\leqslant\alpha \implies \|f(x)-b\|_F<\varepsilon$$



$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)=b &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ f(B(a,\alpha))\subset B(b,\varepsilon)\\ &\iff \forall V\in\mathscr{V}(b),\ \exists U\in\mathscr{V}(a),\ f(U)\subset V\end{aligned}$$

→ Continuité

f est continue en $a\in A$ ssi $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
Les opérations classiques sur les limites nous permettent de montrer que :

- l'ensemble $\mathscr{C}(A,F)$ des fonctions continues sur A est un espace vectoriel.
- l'ensemble $\mathscr{C}(A,\mathbb{K})$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (le produit de deux fonctions continues est en particulier continu).
- si $f:A\to F$ et $g:B\to G$ sont continues avec $f(A)\subset B$, alors $g\circ f$ est continue sur A.

Proposition : Caractérisation séquentielle

f est continue en $a\in A$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big)=f(a)$$

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense de E sont égales.

Applications lipschitziennes

Définition

f est dite lipschitzienne de rapport $K\geqslant 0$ si :

$$\forall x,y\in E,\quad \|f(x)-f(y)\|_F\leqslant K\cdot\|x-y\|_E$$

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$, lien avec les accroissements finis.

Proposition

Toute fonction lipschitzienne est continue.

$x\mapsto\|x\|$ et $x\mapsto d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$ sont continues.

Applications uniformément continues

Définition

$f : E \to F$ est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y \in A,$$
$$\|x - y\|_E < \alpha \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

$\boxed{f \text{ lipschitzienne}} \implies \boxed{f \text{ uniformément continue}}$

$\implies \boxed{f \text{ continue}}$

Caractérisations topologiques de la continuité

Si $X \subset F$ et $f : E \to F$,

$$f^{-1}(X) = \{x \in E \mid f(x) \in X\} \subset E$$

$A \subset f^{-1}(X)$ si et seulement si $f(A) \subset X$.

Théorème : Image réciproque et continuité

Une application de E dans F est continue si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vraie :

- L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
- L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

Par exemple, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue,

$$\{x \in E, f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \text{ est ouvert ;}$$

$$\{x \in E, f(x) \geqslant 0\} \text{ et } \{x \in E, f(x) = 0\} \text{ sont fermés.}$$

→ Applications linéaires

La continuité d'une application linéaire se ramène par linéarité à sa continuité en 0.

Théorème : Continuité d'une application linéaire

L'application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue si, et seulement s'il existe $C > 0$ tel que,

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Pour justifier la continuité d'une application linéaire,

- on peut invoquer un argument de dimension :

  Théorème

  Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

- on peut majorer $\|u(x)\|$ afin de trouver C tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$.

Pour justifier la non-continuité, on peut chercher une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u(x_n)\| > n\|x_n\|$.

Tout noyau d'application linéaire en dimension finie est fermé et plus généralement :

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$ continue, on définit :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

$|||\cdot|||$ est appelée norme d'opérateur / norme subordonnée.

Théorème : Norme d'opérateur

L'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$.
Si $u, v \in \mathscr{L}_c(E)$, $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \cdot |||v|||$; $|||\mathrm{id}_E||| = 1$.

→ Applications polynomiales et multilinéaires

Théorème : Continuité d'une application multilinéaire

L'application multilinéaire u de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est continue si, et seulement s'il existe $C > 0$ tel que,

$$\forall x \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C \cdot \|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}$$

- toute application polynomiale définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.
- toute application multilinéaire définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ supposé de dimension finie est continue.

Parties compactes

→ Définition et premières propriétés

Définition : Partie compacte

A est compacte si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans A.

Toute suite d'un compact admet donc au moins une valeur d'adhérence.

Théorème

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Les parties compactes d'un compact sont les parties fermées de ce compact.

Proposition

Soit $X \subset A$ où A est une partie compacte de E. Alors, X est compacte si et seulement si X est fermée.

Proposition

Le produit fini de compacts d'espaces normés est compact (pour la norme produit).

→ Compacité et continuité

Théorème

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Corollaire : Théorème des bornes atteintes

Si f est une application continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes.

On peut ainsi montrer qu'une norme est atteinte ou justifier l'existence d'un minimum/maximum.

Théorème : Théorème de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

→ **Compacité en dimension finie**

En dimension finie, les parties compactes sont les fermés bornés de l'espace.

Théorème : Caractérisation en dimension finie

Une partie d'un espace de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Trois conséquences immédiates :

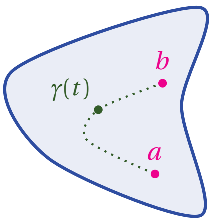
- En dimension finie, la boule unité fermée et la sphère unité sont compactes.
- Toute application continue sur un fermé borné en dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend à tout espace vectoriel de dimension finie.

Parties connexes par arcs

Définition : Connexité par arcs

Soient A une partie de E non vide et $a, b \in A$.

- On appelle chemin continu (ou arc) joignant les points a et b toute application $\gamma : [0,1] \to A$ continue et vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
- A est dite connexe par arcs si pour tous $a, b \in A$, il existe un chemin continu joignant a et b.



Les composantes connexes de la partie A sont les classes d'équivalences de A relativement à la relation d'équivalence « il existe un chemin continu de A joignant a et b ». A est connexe par arcs si elle possède une seule composante connexe.

- Les parties convexes et les parties étoilées de E sont connexes par arcs.
- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème

Soient $f : E \to F$ une application continue et A une partie connexe par arcs de E. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Ce résultat permet de montrer qu'une partie est connexe par arcs.

Corollaire : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient A une partie connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(A)$ est un intervalle.