Nombres réels

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Corps ordonnés

1.1 Définitions et faits de base

1.1.1 Corps ordonné

Un corps ordonné est un quadruplet $(\mathbb{K}, +, \times, \leqslant)$ avec :

(1) Le triplet $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps :
- $\times$ et $+$ sont deux lois de composition internes associatives et commutatives possédant des neutres (0 est le neutre de $+$, et 1 celui de $\times$). On suppose $0 \neq 1$.
- Tout élément x de $\mathbb{K}$ possède un inverse par $+$ noté $-x$ et appelé opposé.
- Tout élément y de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ possède un inverse pour $\times$ noté $\dfrac{1}{y}$ [a].
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

(2) $\leqslant$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{K}$, compatible avec $+$ et $\times$:
- $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$
- $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $0 \leqslant a$ et $0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab$

a. Un anneau $(\mathbb{K}, +, \times)$ possède les mêmes propriétés que le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, à l'exception de l'inversibilité des éléments de $\mathbb{K}$ par $\times$.

1.1.2 Propriétés algébriques des anneaux et corps

Éléments neutres et absorbants

- Pour $x \in \mathbb{K}$, $0 \times x = x \times 0 = 0$.
  En effet,
  $$\begin{aligned} 0 \times x &= (0+0) \times x \\ &= 0 \times x + 0 \times x \end{aligned}$$
  D'où :
  $$\begin{aligned} 0 &= 0 \times x - 0 \times x \\ &= 0 \times x + 0 \times x - 0 \times x \\ &= 0 \times x \end{aligned}$$
- Pour $x \in \mathbb{K}$, $-x = -1 \times x$.
  En effet,
  $$\begin{aligned} x + (-1) \times x &= 1 \times x + (-1) \times x \\ &= (1 + (-1)) \times x \\ &= 0 \times x \\ &= 0 \end{aligned}$$
  D'où $-x = (-1) \times x$.

Lien entre multiplication et itération de l'addition

- Pour $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, nx est défini récursivement par :
  (1) $0_{\mathbb{N}} x = 0_{\mathbb{K}}$
  (2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+1)\,x = kx + x$, c'est-à-dire si $n \in \mathbb{N}^*$, $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$
- On vérifie que $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $(n+m)\,x = nx + mx$ et $(nm)\,x = n\,(mx)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $nx = (n1_{\mathbb{K}}) \times x$ (preuve par récurrence).

- Pour $x, y \in \mathbb{K}$:
  - $-(x \times y) = (-x)\, y = x\,(-y)$
    En effet,
$$\begin{array}{rcl} xy + (-x)\, y & = & (x + (-x))\, y \\ & = & 0y \\ & = & 0 \end{array}$$
    Donc $(-x)\, y = (-xy)$. De même, $xy + x\,(-y) = x\,(y + (-y)) = 0x$
  - $$\begin{array}{rcl} (-x)\,(-y) & = & -(x\,(-y)) \\ & = & --(xy) \\ & = & xy \end{array}$$

1.2 Propriétés des corps ordonnés relatives à l'ordre

1.2.1 Inclusion de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$

Ordre et opérations
- $\forall x \in \mathbb{K}$, $x^2 \geqslant 0_{\mathbb{K}}$
  En effet :
  - si $x \geqslant 0$, alors $x \times x \geqslant 0$;
  - si $x \leqslant 0$, alors $x + (-x) = 0 \leqslant 0 + (-x)$ donc $-x \geqslant 0$. Ainsi, $(-x) \times (-x) \geqslant 0$.
- $\forall x, y \in \mathbb{K}$,
$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x - y \leqslant 0 \Leftrightarrow -x \geqslant -y$$
  La démonstration découle de la compatibilité de l'ordre avec $+$.
- $F0$: en effet $1 \neq 0$ et $1 = 1^2 \geqslant 0$.

Identification de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ L'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto n1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ est strictement croissante donc $n \leqslant m$ dans $\mathbb{Z} \Rightarrow n1_{\mathbb{K}} \leqslant m1_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.

En effet , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n1_k > 0_{\mathbb{K}}$:
- C'est vrai pour $n = 1$.
- Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$(n+1)\, 1_{\mathbb{K}} = n1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \geqslant n1_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$$

Pour $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n < m$, $m - n \in \mathbb{N}^*$ donc
$$(m-n)\, 1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow m1_{\mathbb{K}} - n1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$$
donc $m1_{\mathbb{K}} > n1_{\mathbb{K}}$.

L'ensemble des $\{n1_{\mathbb{K}} | n \in \mathbb{Z}\}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$ en respectant les lois et l'ordre de $\mathbb{Z}$:
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n1_{\mathbb{K}} + m1_{\mathbb{K}} = (n+m)\, 1_{\mathbb{K}}$
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n1_k \times m1_{\mathbb{K}} = nm1_{\mathbb{K}}$
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m \Rightarrow n1_{\mathbb{K}} < m1_{\mathbb{K}}$

Cet ensemble s'identifie donc à $\mathbb{Z}$ et désormais, on notera pour $n \in \mathbb{Z}$, n au lieu de $n1_{\mathbb{K}}$. En ce sens, $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Z}$.

Identification de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n = n1_{\mathbb{K}}$ est inversible par $\times$. On vérifie que l'ensemble $\left\{\dfrac{p1_{\mathbb{K}}}{q1_{\mathbb{K}}} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une partie de $\mathbb{K}$ en bijection avec $\mathbb{Q}$. Pour $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, soit $r = \dfrac{p}{q}$ et $r' = \dfrac{p'}{q'}$, alors :
$$\frac{p1_{\mathbb{K}}}{q1_{\mathbb{K}}} + \frac{p'1_{\mathbb{K}}}{q'1_{\mathbb{K}}} = \left(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}\right) 1_{\mathbb{K}} \quad \text{et} \quad \frac{p1_{\mathbb{K}}}{q1_{\mathbb{K}}} \times \frac{p'1_{\mathbb{K}}}{q'1_{\mathbb{K}}} = \left(\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'}\right) 1_{\mathbb{K}}$$

De plus, dans $\mathbb{Q}$: $\dfrac{p}{q} \leqslant \dfrac{p'}{q'} \Leftrightarrow \dfrac{p1_{\mathbb{K}}}{q1_{\mathbb{K}}} \leqslant \dfrac{p'1_{\mathbb{K}}}{q'1_{\mathbb{K}}}$ dans $\mathbb{K}$.

On identifiera désormais le rationnel $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{p1_{\mathbb{K}}}{q1_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{K}$. En ce sens, $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.

Autres propriétés Pour $x, y \in \mathbb{K}_+^* = \{z \in \mathbb{K} | z > 0_{\mathbb{K}}\}$:

- $xy \in \mathbb{K}_+^*$. En effet, $xy \geqslant 0_{\mathbb{K}}$ et on ne peut avoir $xy = 0$ car si $xy = 0$, alors $\dfrac{1}{x}xy = 0 \Leftrightarrow y = 0$, ce qui est impossible.
- Pour $x \in \mathbb{K}^* = \{z \in \mathbb{K} | z \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, x et $\dfrac{1}{x}$ ont le même signe car $x \times \dfrac{1}{x} = 1 > 0$.

1.2.2 Ordre et addition

Addition d'inégalités

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$. Si de plus $a < b$, alors $a + c < b + d$.

En effet, $a \leqslant b$ donc $a + c \leqslant b + c$. De plus $c \leqslant d$ donc $c + b \leqslant d + b$ d'où le résultat par transitivité. Si $a < b$, on ne peut avoir $a + c = b + d$ donc $a + c < b + d$. D'autre part $b + c \leqslant b + d$ d'où le résultat.

Généralisation du résultat précédent Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \leqslant y_i$. Alors :

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(2) Si de plus $\exists j \in [\![1, n]\!] / x_j < y_j$, alors
$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(3) Toujours avec les mêmes hypothèses,
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = y_i$$

Corollaire Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}_+$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$ et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$$

1.2.3 Ordre et produit

Multiplication d'une inégalité par un nombre positif

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Alors :

(1) Si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.

(2) Si de plus $c > 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$.

(3) Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.

Démonstrations

(1) $b - a \in \mathbb{K}_+$ donc $(b-a)\,c \in \mathbb{K}_+$ donc $(b-a)\,c \geqslant 0 \Leftrightarrow bc \geqslant ac$.

(2) Le sens direct étant déjà prouvé, reste à montrer le sens réciproque : $ac \times \dfrac{1}{c} \leqslant bc \times \dfrac{1}{c} \Rightarrow a \leqslant b$.

(3) Si $b - a > 0$ et $c > 0$, alors $(b-a)\,c > 0$ d'où le résultat.

Multiplication d'inégalités positives entre elles Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$. Alors :

(1) $ac \leqslant bc$;

(2) si de plus $0 < a < b$ et $0 \leqslant c < d$, alors $ac < bd$.

Démonstrations

(1) $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$ donc $ac \leqslant bd$. De même, $c \leqslant d$ et $b \geqslant 0$ donc $cb \leqslant db$, d'où le résultat par transitivité.

(2) *« Au courageux lecteur de le faire ! »*

Généralisation du résultat précédent Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$. Alors

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Si de plus, $\exists j \in [\![1, n]\!] \,/ x_j < y_j$, alors

$$\prod_{i=1}^{n} x_i < \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Résultats sur les puissances

(1) Pour $x \in \mathbb{K}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \in \mathbb{K}_+$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{K}_+ \mapsto x^n$ est strictement croissante, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant x < y \Rightarrow 0 \leqslant x^n < y^n$$

Démonstrations

(1) Récurrence, le principal argument étant que le produit de deux nombres positifs est positif.

(2) **1ère façon :** soient $x, y \in \mathbb{K}_+$ avec $x < y$ et $n \in \mathbb{N}^*$ D

- Si $x = 0$, alors $0^n = 0$ et $y^n \in \mathbb{K}_+^*$ donc $y^n > 0 = x^n$.
- Si $x \neq 0$, alors on pose $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = x$ et $y_i = y$ donc

$$\prod_{i=1}^{n} x_i < \prod_{i=1}^{n} y_i \Leftrightarrow x^n < y^n$$

2e façon : soit $x, y \in \mathbb{K}_+$ avec $x < y$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$y^n - x^n = (y - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k}$$

Or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x^k y^{n-k} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} < 0$ car $x^0 y^{n-1} > 0$ [a] et $y - x > 0$ donc $y^n - x^n > 0$.

[a] En effet, $0^0 = 1$ par convention et parce que la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Inégalité de Bernoulli

Pour $k \in \mathbb{K}_+$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$(1+k)^n \geqslant 1 + nk$$

Démonstration Pour $n = 0$, l'inégalité est vérifiée car $1 \leqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}(1+k)^n &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} k^l \\ &= 1 + \binom{n}{1} k + \sum_{l=2}^{n} \binom{n}{l} k^l \\ &= 1 + nk + \alpha \quad \text{avec } \alpha > 0\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Inverse et inégalités L'application $x \in \mathbb{K}_+^* \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante.

En effet, si $0 < x < y$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} - \frac{1}{x} &= \frac{x-y}{xy} \\ &= -\frac{y-x}{xy}\end{aligned}$$

Or $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

1.2.4 Valeur absolue dans $\mathbb{K}$

Définition

Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $|x| = \max(x, -x)$. $|x|$ existe toujours car l'ordre $(\mathbb{K}, \leqslant)$ est total.

On note que :
- Si $x \in \mathbb{K}_+$, alors $-x \in \mathbb{K}_-$ donc $-x \leqslant x$ donc $|x| = x$.
- Si $x \in \mathbb{K}_-$, alors $-x \in \mathbb{K}_+$ donc $x \leqslant -x$ donc $|x| = -x$.

On peut donc aussi définir la valeur absolue par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Propriétés
- $\forall x \in \mathbb{K}$, $|-x| = \max(-x, x) = |x|$
- $|0| = 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $\Rightarrow$ Déjà vu [a].

  $\Leftarrow$ On a toujours $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$ donc si $x \leqslant 0$ et $-x \leqslant 0$, alors $x \geqslant 0$ donc $x = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{K}$, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- Pour $x \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}_+$,
$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

a. « *Djafé !* »

Produit de valeurs absolues

$\forall x, y \in \mathbb{K}$,
$$|xy| = |x|\,|y|$$

Démonstration
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ donc $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
- Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$ donc $|xy| = -xy = |x|\,|y|$.
- Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$ donc $|xy| = xy = (-x) \times (-y) = |x|\,|y|$.

Corollaire

(1) Pour $x \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$,
$$|x|^n = |x^n|$$

(2) Pour $x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$,
$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$$

Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Alors :
$$||x| - |y|| \overset{(2)}{\leqslant} |x + y| \overset{(1)}{\leqslant} |x| + |y|$$

Démonstration Soient $x, y \in \mathbb{K}$. Alors $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc $x + y \leqslant |x| + |y|$. De même, $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$ donc
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$
On a alors, pour $x, y \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \\ &\leqslant |x + y| + |-y| \\ &\leqslant |x + y| + |y| \end{aligned}$$
Donc $|x| - |y| \leqslant |x + y|$. De même, $-(|x| - |y|) \leqslant |x + y|$ donc
$$||x| - |y|| \leqslant |x + y|$$

Remarque (1) est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe.
En effet :

$\Leftarrow$ « *Easy but left to the reader !* »

$\Rightarrow$ Supposons que $|x + y| = |x| + |y|$.

1^er^ cas : Supposons que $x + y \geqslant 0$. Alors $|x + y| = x + y = |x| + |y|$ d'où
$$\underbrace{(|x| - x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(|y| - y)}_{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |y| = y \end{cases} \Rightarrow x, y \in \mathbb{K}_+$$

2^ème^ cas : Supposons que $x + y < 0$. Alors $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$ d'où
$$\underbrace{(|x| + x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(|y| + y)}_{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |y| = -y \end{cases} \Rightarrow x, y \in \mathbb{K}_-$$

Généralisation de l'inégalité triangulaire Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

De plus, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right|$ si et seulement si tous les x_i sont de même signe.

2 Nombres réels

2.1 Propriété fondamentale

2.1.1 Énoncé

On admet l'existence d'un corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ appelé corps des réels qui vérifie de plus la propriété suivante :

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Corollaire Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (voir la section 7.1.3.2 du cours complet page 91 pour la démonstration).

2.1.2 Exemple d'utilisation

On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que tout réel positif est un carré.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est une bijection. En effet, elle est strictement croissante donc injective, montrons qu'elle est surjective.

- Pour $x = 0$, $0 = 0^2$.
- Pour $x > 0$, introduisons $A_x = \left\{y \in \mathbb{R}_+ | y^2 \leqslant x\right\}$. On montre [a] que A_x est non vide et majoré et que $a = \sup A$ vérifie $a^2 = x$.

Pour $y \in \mathbb{R}_+$, on notera alors $\sqrt{y}$ l'unique réel positif x tel que $x^2 = y$ et on a pour $z \in \mathbb{R}$,

$$z^2 = y \Leftrightarrow z \in \{\pm\sqrt{y}\}$$

2.2 Intervalles

On rajoute à $\mathbb{R}$ deux objets externes $+\infty$ et $-\infty$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

2.2.1 Définitions

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout ensemble d'un des types suivants avec $a, b \in \mathbb{R}$:

(1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \| a \leqslant x \leqslant b\}$	(6) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \| a < x\}$
(2) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \| a \leqslant x < b\}$	(7) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \| a \geqslant x\}$
(3) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \| a < x \leqslant b\}$	(8) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \| a > x\}$
(4) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \| a < x < b\}$	(9) $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
(5) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \| a \leqslant x\}$	

$(1), (2), (3), (4)$ sont des intervalles bornés et $(5), (6), (7), (8), (9)$ des intervalles non bornés.

a. « *left to the reader !* »

2.2.2 Propriétés

- Si $a > b$, alors $(1), (2), (3), (4)$ sont vides.
- Si $a = b$, $[a, b] = \{a\}$ et les autres intervalles sont vides. Ce sont des intervalles triviaux.
- Si $a < b$, $]a, b[\subset [a, b[$ (ou $]a, b]) \subset [a, b]$.
- $]a, b[\neq \varnothing$ car $\dfrac{a+b}{2} \in]a, b[$.
- $]a, b[$ est infini. En effet, si $]a, b[$ était fini, alors on le note $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ avec $a < x_1 < \cdots < x_n < b$. Or $]a, x_1[\neq \varnothing$ donc $\exists x_1'/a < x_1' < x_1$ donc $x_1' \in]a, b[$...
- Si $a < b$, tout intervalle borné d'extrémités a et b est infini.
- Tout intervalle non borné est infini (et bien sûr non borné).
- Pour $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$$

  et de plus

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

  Si $a < b$, alors $]a, b[=]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ avec $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. De plus, $[a, b] = [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$

2.2.3 Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Théorème et définition Les intervalles de $\mathbb{R}$ non vides sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Alors que A est convexe si $\forall x, y \in A$ avec $x \leqslant y$, on a $[x, y] \subset A$.

Démonstration Il est clair que tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.
Réciproquement, soit A une partie convexe de $\mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent alors :

- Si A est minorée, on note $a = \inf A$:
  - Supposons que A est majorée, alors on note $b = \max A$:
    - → Supposons que $a, b \in A$. Montrons que $A = [a, b]$.
      - ⇝ $a, b \in A$ et $a \leqslant b$ donc $[a, b] \in A$.
      - ⇝ $\forall x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$ donc $A \subset [a, b]$.
    - → Supposons que $a \in A$ et $b \notin A$.
      - ⇝ Donc $\forall x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$, et même $x < b$ donc $A \subset [a, b[$.
      - ⇝ Si $y \in [a, b[$, alors $y < b = \sup A$ donc y ne majore pas A : $\exists x \in A/y < x$. Ainsi si $a \in A$ et $x \in A$ tel que $a \leqslant y \leqslant x$, alors (du fait que A est convexe) $[a, x] \subset A$ d'où $y \in A$ donc $[a, b[\subset A$.
    - → Si $x \notin A$ et $b \in A$ alors $A =]a, b]$.
    - → Si $a \notin A$ et $b \notin B$, alors $A =]a, b[$.
  - Supposons que A n'est pas majorée :
    - → Si $a \in A$:
      - ⇝ Alors $\forall x \in A$, $x \geqslant a$ donc $A \subset [a, +\infty[$.
      - ⇝ Si $y \in [a, +\infty[$, alors y ne majore pas A donc $\exists x \in A/y < x$ donc $a \leqslant x$. Or A est convexe donc $[a, x] \in A$ et $y \in [a, x]$ donc $[a, +\infty[\subset [a, x] \subset A$. Finalement, $A = [a, +\infty[$.
    - → Si $a \notin A$, alors $A =]a, \infty[$.
- Supposons que A n'est pas minorée[a]...

Caractérisation des bornes inférieures et supérieures

a. « *Left to the reader !* »

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \varnothing$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) A est majorée et
$$\sup A = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leqslant \omega \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \omega < a - \varepsilon \end{cases}$$

(2) A est minorée et
$$\inf A = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geqslant \omega \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \omega > a - \varepsilon \end{cases}$$

Démonstration du (1)

$\Rightarrow$ – $\sup A$ majore A donc $\forall a \in A$, $a \leqslant \omega$.
– Soit $\varepsilon > 0$, alors $\omega - \varepsilon < \omega$ donc $\exists a \in A / a > \omega - \varepsilon$.

$\Leftarrow$ – ω est un majorant de A alors A est majorée.
– Soit α un majorant de A. Alors on ne peut avoir $\alpha < \omega$ car si $\alpha < \omega$, alors en posant $\varepsilon = \omega - \alpha$, $\varepsilon > 0$ on a $\exists a \in A / \omega - \varepsilon < a$ donc α ne serait pas un majorant de A. Ainsi, $\alpha \geqslant \omega$.

Caractère archimédien de $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n tel que $n\varepsilon > x$.

Démonstration

– $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. En effet, si $\mathbb{N}$ est majorée alors appelons $\omega = \sup \mathbb{N}$ donc $\exists n \in \mathbb{N} / \omega - 1 < n$ d'où $\omega < n + 1$, ce qui est impossible car $n + 1 \in \mathbb{N}$.
– Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{x}{\varepsilon}$ ne majore pas $\mathbb{N}$: $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\frac{x}{\varepsilon} < n \Leftrightarrow x < n\varepsilon$$

Puissances d'un réel Soit $a > 1$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier naturel n tel que $a^n > M$.

En effet, posons $a = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N} / n\varepsilon > M$, alors, d'après l'inégalité de Bernoulli,
$$a^n = (1 + \varepsilon)^n \geqslant 1 + n\varepsilon > M$$
De même, $\forall \alpha > 0$, il existe un entier naturel n tel que $\dfrac{1}{a^n} < \alpha$.

2.3 Parties entières supérieures et inférieures d'un réel

2.3.1 Théorème et définition

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$. n est alors la partie entière inférieure de x et se note $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

(2) Il existe un unique entier relatif m tel que $m - 1 < x \leqslant m$. m est alors la partie entière supérieure de x et se note $\lceil x \rceil$.

Démonstration

(1) Si $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n < m$, alors $n + 1 \leqslant m$ donc $[n, n+1[\cap [m, m+1[= \varnothing$. D'où l'unicité d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. Prouvons l'existence d'un tel entier relatif.
– Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \leqslant x < x + 1$.
– Si $x \notin \mathbb{Z}$:

- Si $x > 0$, alors on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$ donc $A = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant x\} \neq \varnothing$ or $0 < x$ et cet ensemble est inclus dans $[\![0, n-1]\!]$ donc A admet un maximum p. On a $p \leqslant x$ et $p+1 > p = \max A$ donc $p+1 \notin A$ et $p+1 > x$.
- Si $x < 0$, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant -x < p+1$ et de ce fait $p < -x < p+1$ car $x \notin \mathbb{Z}$ donc $-(p+1) < x < -p = -(p+1)+1$ donc l'entier $-(p+1)$ fait l'affaire.

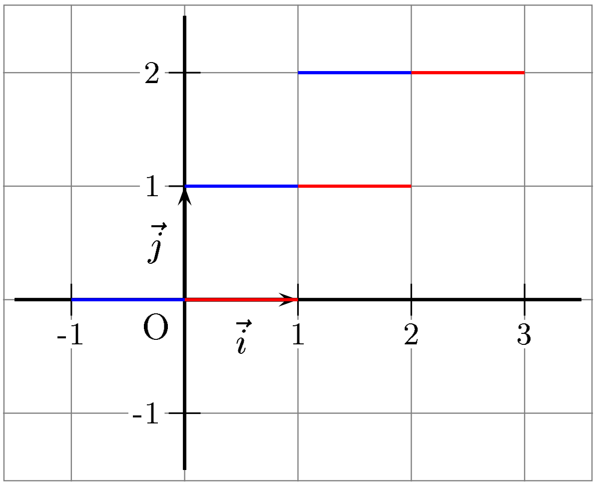

FIGURE 1 – Graphes de $\lfloor x \rfloor$ (en rouge) et de $\lceil x \rceil$ (en bleu)

2.3.2 Partie fractionnaire

On définit la partie fractionnaire d'un réel par

$$\mathrm{Frac}\,(x) = x - \mathrm{E}\,(x)$$

Ainsi, $\mathrm{Frac}\,(x) \in [0, 1[$.

2.3.3 Propriétés

- Pour $\theta \in [0, 1[$ et $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{E}\,(\theta + m) = m$ et $\mathrm{Frac}\,(x) = \theta$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{E}\,(x+m) = \mathrm{E}\,(x) + m$$

  En effet,

$$\mathrm{E}\,(x) \leqslant x < \mathrm{E}\,(x) + 1 \Rightarrow \underbrace{m + \mathrm{E}\,(x)}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant m + x < (m + \mathrm{E}\,(x)) + 1$$

- $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Frac}\,(x)$ est 1-périodique. En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Frac}\,(x+1) &= x + 1 - \mathrm{E}\,(x+1) \\ &= x + 1 - (\mathrm{E}\,(x) + 1) \\ &= x - \mathrm{E}\,(x) \\ &= \mathrm{Frac}\,(x) \end{aligned}$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant x \Leftrightarrow m \leqslant \mathrm{E}\,(x)$.

  $\Leftarrow$ « *Obvious !* »

  $\Rightarrow$ Si $m > \mathrm{E}\,(x)$, alors $m \geqslant \mathrm{E}\,(x) + 1 > x$...

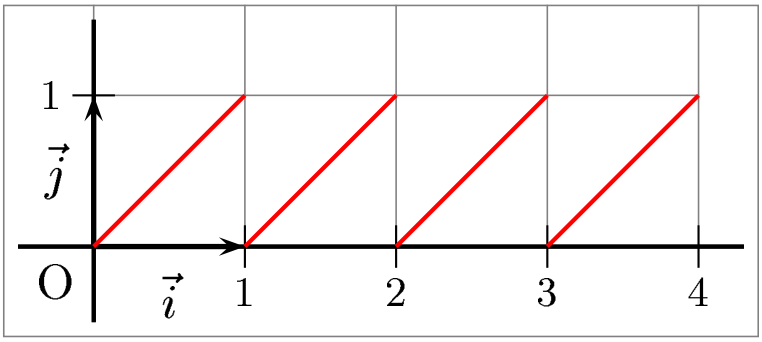

FIGURE 2 – Graphe de la partie fractionnaire

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Alors :
  - $m > x \Leftrightarrow m \geqslant \mathrm{E}(x) + 1$
  - $m \geqslant x \Leftrightarrow m \geqslant \lceil x \rceil$
  - $m \leqslant x \Leftrightarrow m \leqslant \lceil x \rceil - 1$

Exemple Soient $a, b \in \mathbb{R}$. *Quid* de $\mathrm{Card}(\mathbb{Z} \cap [a, b])$?

Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$a \leqslant n \leqslant b \Rightarrow \begin{cases} n \geqslant \lceil a \rceil \\ n \leqslant \mathrm{E}(b) \end{cases} \Rightarrow n \in [\![\lceil a \rceil, \mathrm{E}(b)]\!]$$

Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathbb{Z} \cap [a, b]) = \mathrm{E}(b) - \lceil a \rceil + 1$.

2.4 Densité des divers ensembles dans $\mathbb{R}$

2.4.1 Définition et propriété

On rappelle que $A \subset \mathbb{R}$ est dense si :

(1) $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in A$ tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$.

(2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$, alors $A \cap]\alpha, \beta[\neq \varnothing$.

Ces deux conditions sont équivalentes : il suffit d'en avoir une pour prouver la densité.

Propriété Si A est dense dans $\mathbb{R}$ et $a < b$, alors $A \cap]a, b[\neq \varnothing$ et est infini.

En effet, si $A \cap]a, b[$ est fini alors on peut noter ses éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ or $A \cap]a, x_1[\neq \varnothing$ donc....

2.4.2 $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ l'ensemble des nombres décimaux de la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n(x) = \frac{1}{10^n} \mathrm{E}(10^n x)$$

$\omega_n(x)$ est la partie décimale de x approchée à 10^n par défaut, et $\omega_n(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$. On définit de plus

$$\eta_n(x) = \omega_n(x) + \frac{1}{10^n}$$

$\eta_n(x)$ est la partie décimale de x approchée à 10^n par excès, et $\eta_n(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x < \mathrm{E}(10^n x) + 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ & \Leftrightarrow \quad \omega_n(x) \leqslant x < \eta_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \omega_n(x) < \eta_n(x) - \omega_n(x) = \frac{1}{10^n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $10 > 1$ donc on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, on a alors

$$|x - \omega_n(x)| = x - \omega_n(x) < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

Ainsi, $\mathbb{D} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$. A *fortiori*, puisque $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right] \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On montre aussi que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.4.3 $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Lemme Soit $\varepsilon > 0$, alors $\forall M > 0$, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $|p| > M$ et $|p + 2\pi q| \leqslant \varepsilon$. Ce lemme est toujours vrai pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Démonstration Supposons que $\exists \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tels que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$,

$$|p + 2\pi q| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |p| \leqslant M$$

Soient $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|p + 2\pi q| \leqslant \varepsilon$. Alors $|p| \leqslant M$, or

$$\begin{aligned} |2\pi q| &= |2\pi q + p - p| \\ &\leqslant |2\pi q + p| + |p| \\ &\leqslant \varepsilon + M \end{aligned}$$

donc $|q| < \frac{\varepsilon + M}{2\pi}$. Alors, $\left\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \middle| |p + 2\pi q| \leqslant \varepsilon\right\} \subset \left([-M, M] \times \left[-\frac{\varepsilon + M}{2\pi}; \frac{\varepsilon + M}{2\pi}\right]\right) \cap \mathbb{Z}^2$ qui est lui même fini. Par conséquent, $[0, \varepsilon] \cap \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est nécessairement fini, ce qui est impossible car $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall M > 0$, $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tels que $|p| > M$ et $|p + 2\pi q| \leqslant \varepsilon$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $M > 0$, alors $\exists (p_1, q_1) \in \mathbb{Z}^2$ tells que $|p_1| > M$ et $|p_1 + 2\pi q_1| \leqslant \varepsilon$.

- Si $p_1 \in \mathbb{N}$, on prend $p = p_1$ et $q = q_1$.
- Si $p_1 < 0$, on a aussi $|-(p_1 + 2\pi q_1)| \leqslant \varepsilon$ et $|-p_1| > M$ donc on prend $p = -p_1$, $q = -q_1$.

Densité de $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Or $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$|x - (l + 2\pi k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On peut trouver de plus $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ avec $p \geqslant |l|$ et $|p + 2\pi q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned} |x - ((p + l) + 2\pi(q + k))| &= |x - (l + 2\pi k) - (p + 2\pi q)| \\ &\leqslant |x - (l + 2\pi k)| + |p + 2\pi q| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$