Ex 1

1) 2) c'est du cours

3) $C(x)\cdot(A-xI)=P(x)I_n=(A-xI)\,{}^tC(x)$

4) les coefficients de $C(x)$ sont des déterminants $n-1,n-1$ extraits de $A-xI$
Ce sont bien des polynômes, et ils sont de degré $\leq n-1$ car dans $A-xI$ chaque coefficient $a_{ij}(x)$ est de degré inférieur ou égal à 1, donc n'importe quel produit de $n-1$ d'entre eux est de degré $\leq n-1$.

on développe le produit $\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i\right)(A-xI)=P(x)I$; puis on identifie les "coefficients" devant chaque x^k : c'est possible car on a le lemme :

si $\forall x$, $\sum_{i=1}^{n} B_i x^i = O_n$ avec $B_i\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\forall i$ $B_i=O_n$. (Ce lemme est trivial si l'on regarde coefficient par coefficient)

Il vient :
$$\begin{cases} -C_{n-1}=I \\ \forall i\in[\![1,n-1]\!] \quad C_iA-C_{i-1}=a_{n-i}I \\ C_0A=a_nI \end{cases}$$

ces relations fournissent : $C_{n-k-1}=-\left[A^k+a_1A^{k-1}+\dots+a_kI\right]$ $\forall k\leq n-1$

5) en reportant dans la dernière relation on a l'égalité demandée

Ex 2

1) $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$. Il suffit d'appliquer cette formule.

2) comme $f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})$ on a $f(E_{ii})=f(E_{jj})$ $\forall j\neq i$

comme $f(E_{ii}E_{ij})=f(E_{ij}E_{ii})$ on a $f(E_{ij})=f(0)=0$

soit λ la valeur commune de $f(E_{ii})$. on a $f(M)=\lambda\,\mathrm{Tr}(M)$ pour toutes les matrices M de la base canonique donc $\underline{f=\lambda\,\mathrm{Tr}}$

Ex 2) (suite)

3) Pour $A = E_{ij}$ $B = E_{ii}$ on a $BA - AB = E_{ij}$ (si $i \neq j$)

Pour $A = E_{ij}$ $B = E_{ji}$ on a $BA - AB = E_{jj} - E_{ii}$

Ceci prouve que F contient toutes les matrices E_{ij} ($i \neq j$) et $E_{ii} - E_{11}$ ($i \neq 1$)

or cette famille de n^2-1 matrices engendre l'espace des matrices de trace nulle.

Par suite, $\ker(Tr) \subset F$.

Réciproquement : Tout commutateur $AB - BA$ est de trace nulle, donc $F \subset \ker Tr$. □.

4. (a) Pour tout commutateur $X = BC - CB$ on a $Tr(AX) = Tr(ABC) - Tr(ACB) = 0$.

ainsi, par linéarité de $X \mapsto Tr(AX)$, on a $Tr(AX) = 0$ $\forall X \in F$. Et d'après 3) $F = \ker Tr$ □

(b) Toute matrice X se décompose sous la forme $X = Y + \lambda I_n$ où $Y \in \ker Tr$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(car $\ker Tr \oplus \mathrm{Vect}\, I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

en prenant la trace : il vient $\lambda = \frac{Tr(X)}{n}$.

on a alors $tr(AX) = tr(AY) + \frac{tr(X)}{n} Tr(A) = \frac{tr(X)}{n} tr(A)$ car $tr(AY) = 0$ par (b).

(c) Si $tr(MX) = 0$ $\forall X$ alors en particulier c'est vrai pour $X = E_{ij}$

en calculant : $tr(ME_{ij}) = m_{ji}$. Donc $\forall i, j$ $m_{ji} = 0$ ie $M = 0$. □.

(d) De (b) on déduit $tr\left(\left(A - \frac{tr(A)}{n} I\right) X\right) = 0$ $\forall X$ donc par (c) $A - \frac{tr(A)}{n} I = 0$

Ceci prouve que A est scalaire. Réciproquement, si A est scalaire : $\exists \mu$, $A = \mu I_n$.

Alors $\forall B, C$ $tr(ABC) = \lambda tr(BC) = \lambda tr(CB) = tr(ACB)$.

Donc : $\boxed{\forall B, C \quad tr(ABC) = tr(ACB) \iff A \text{ est scalaire}}$.

Ex 2) (suite)

5) (a) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$
$A \mapsto AD - DA$.

En notant $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})$ un calcul simple fournit

$$\varphi(A) = \left((d_i - d_j) a_{ij} \right)_{i,j}.$$

cette matrice a des coefficients diagonaux nuls.

Réciproquement si $B = (b_{ij})_{ij}$ a ses coefficients diagonaux nuls,

on peut choisir A telle que $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{d_i - d_j}$ $\forall i \neq j$ car $d_i \neq d_j$ si $i \neq j$

(Il n'y a aucune condition sur a_{ii})

Alors $\varphi(A) = B$.

(b) Notons H_n la propriété à prouver.

. H_1 est vraie (une matrice $(1,1)$ de trace nulle est nulle).

. Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie.

Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.

- Si M est scalaire : $M = \lambda I_{n+1}$ et $tr(M) = 0$ donc $M = 0_{n+1}$: Le résultat est vrai

. Si M n'est pas scalaire : D'après l'ex 36, on sait que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{M} \\ 0 & \end{pmatrix} = M_1$

La matrice $\tilde{M}$ est de taille n et $tr(\tilde{M}) = tr(M_1) = tr(M) = 0$: on peut appliquer H_n

donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ $P^{-1} \tilde{M} P = \tilde{M}_1$ est de diagonale nulle.

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix}$. Un produit par blocs prouve que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} Q = I_{n+1}$

donc $Q \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$

Un produit par blocs prouve que $Q^{-1} M_1 Q = \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & P^{-1}\tilde{M}P \\ * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & \tilde{M}_1 \\ * & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle et semblable à M □

Ex 2 (suite)

5(c) Soit M de trace nulle.

D'après (b) $\exists$ B de diagonale nulle et P inversible telle que

$$M = P^{-1} B P$$

D'après (a) : $\exists$ A telle que $B = AD - DA$

en reportant il vient

$$\begin{aligned} M &= P^{-1}(AD - DA)P \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}DP) - (P^{-1}DP)(P^{-1}AP) \\ &= A'D' - D'A' \quad \text{en posant } A' = P^{-1}AP \text{ et } D' = P^{-1}DP \end{aligned}$$

ainsi M est un commutateur. $\square$

Ex 3

1 a) $\underline{\mathrm{Im}\, p\circ v = \mathrm{Im}\, p}$ (v est surjectif) et $\underline{\ker p\circ v = v^{-1}(\ker p)}$

b) Soit $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_k})$ une base de $\ker u$.

on complète en $B=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ base de u et on pose $F=\mathrm{Vect}\langle \vec{e_{k+1}},\dots,\vec{e_n}\rangle$

de sorte que $\ker u \oplus F = E$

on pose alors $\begin{cases} v(e_{k+1}) = u(e_{k+1}) \\ v(\vec{e_n}) = u(\vec{e_n}) \end{cases}$ ceci définit v sur F (1)

Notons que $(u(e_{k+1}),\dots,u(\vec{e_n}))$ et libre car $u_{|F}$ est un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}\, u$. On peut donc trouver $(\vec{\omega_1},\dots,\vec{\omega_k})$ complétant $(u(e_{k+1}),\dots,u(e_n))$ en base de E.

On pose alors $\begin{cases} v(e_1) = \omega_1 \\ v(e_k) = \omega_k \end{cases}$ ceci définit v sur $\ker u$ (2)

- (1) et (2) determinent v.
- Par construction $(v(e_1),\dots,v(e_n))$ et une base de E donc v et un automorphisme
- si p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\langle\vec{\omega_1},\dots,\vec{\omega_k}\rangle$ on a

$\begin{cases} p\circ v(e_i) = p(\omega_i) = 0 & \text{si } i\leq k \\ p\circ v(e_i) = p(u(e_i)) = u(e_i) & \text{si } i>k \end{cases}$

Ainsi $p\circ v = u$ □

c) (i) si f est un automorphisme $fg = f(gf)f^{-1}$ donc $\chi_{fg} = \det(x\mathrm{Id} - f(gf)f^{-1})$
$= \det(x\mathrm{Id} - \det gf)\det(d$
$= \chi_{gf}$.

(ii) si f est un projecteur
on se place dans une base adaptée à $\ker p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$ $(\dim \ker p = s)$
$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. $\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ Alors $\mathrm{Mat}(fg) = \begin{pmatrix} O_s & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}(gf) = \begin{pmatrix} O_s & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$

donc $\chi_{fg} = \chi_{gf} = \chi_D \cdot \chi_{O_s}$.

(c) (iii) si $f = p\circ v$ avec v inversible et p projecteur on a :

$$\chi_{f\circ g} = \chi_{p\circ v\circ g} = \chi_{(v\circ g)\circ p} = \chi_{g\circ p\circ v} = \chi_{g\circ f}$$ en appliquant successivement (i) et (ii)

2 (a)

(i) on a $\underset{\substack{\uparrow \\ p \text{ projecteur}}}{\mathrm{rg}(p) =} \mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i} p_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linéarité}}}{=} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{tr}(p_i) \underset{\substack{\uparrow \\ p_i \text{ projecteurs}}}{=} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(p_i)$

Donc $\dim \mathrm{Im}\, p = \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Im}\, p_i)$ (1)

Mais $\mathrm{Im}\, p \subset \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(p_i)$ (2)

(1) et (2) impliquent que l'inclusion est une égalité et que la somme est directe.

(ii) si $x \in \mathrm{Im}\, p_i$ alors $x \in \mathrm{Im}\, p$ (car $\mathrm{Im}\, p = \bigoplus_j \mathrm{Im}\, p_j$)

Donc puisque p et p_i sont des projecteurs $x = p_i(x)$ et $x = p(x)$

si $x \in \mathrm{Im}\, p_j$ alors d'une part : $p_j(x) = p(x)$ (1)

et d'autre part $p(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$. (2)

Par unicité de la décomposition dans une somme directe, on en déduit :

$\forall i \neq j \quad \underline{p_i(x) = 0}$: Ainsi $\underline{p_i \circ p_j = \tilde{0}}$

(b) Réciproquement, si $\forall i \neq j \quad p_i \circ p_j = 0$ alors $\left(\sum_{i=1}^{r} p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} p_i^2 = \sum_{i=1}^{r} p_i$ Donc $p^2 = p$

et p est un projecteur

Ex 4 :

1) a) • Si $A = LN^T$ où L, N sont des colonnes non nulles

alors $\begin{cases} (i)\ rg(A) \leq rg(L) = 1 \\ (ii)\ A \neq 0 \text{ car } \exists i_0,\ L_{i_0} \neq 0 \text{ et } \exists j_0,\ N_{j_0} \neq 0 \text{ donc } a_{i_0 j_0} \neq 0 \end{cases}$

En suite $rg(A) = 1$

• Si $rg(A) = 1$ soit $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$ une colonne non nulle de A

Toutes les colonnes sont proportionnelles à L : $\exists \lambda_i \quad C_i = \lambda_i L$.

Alors en posant $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $A = LN^T$.

b) L est un vecteur de Im A (Donc une base de Im A)

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ posons $f(x) = N^T x = \sum_{i=1}^n n_i x_i$: C'est une forme linéaire

Alors $Ax = \cancel{L}f(x) = f(x)L$ Donc $Ax = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ et Ker A est l'hyperplan associé

Ainsi N^T est la matrice de la forme linéaire associée à l'hyperplan Ker A

c) L'écriture n'est pas unique : par exemple $\tilde{L} = \alpha L$ et $\tilde{N} = \frac{1}{\alpha} N$ convient pour tout $\alpha \neq 0$

d) $A^2 = LN^TLN^T = L(N^TL)N^T$ Mais $N^TL = \langle N, L \rangle$ est un scalaire

donc on peut le permuter avec L et il vient $A^2 = \langle N, L \rangle A$.

Ainsi A est un projecteur $\Leftrightarrow \langle N, L \rangle = 1$

A est nilpotent $\Leftrightarrow \exists k,\ A^k = 0 \Leftrightarrow \exists k,\ \langle N, L \rangle^{k-1} = 0 \Leftrightarrow \langle N, L \rangle = 0$

2) On a $M^2 = \langle N, L \rangle M$ (avec les notations précédentes)

Mais $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrice } (1,1)}}{N, L = N^T L} = tr(N^TL) \underset{\substack{\uparrow \\ tr(AB) = tr(BA)}}{=} tr(LN^T) = tr(M)$. Donc $M^2 = tr(M)M$.

3. Il suffit de montrer que toute matrice de rang r est somme de r matrices de rang 1.

Soit M de rang r : $\exists P,Q \in GL_n$, $M = P J_r Q$.

on écrit $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{ii}$ alors $M = \sum_{i=1}^{r} P E_{ii} Q$

chaque $P E_{ii} Q$ est de rang 1, donc s'écrit $C_i L_i$ □.

• Pour tout vecteur colonne X on a $MX = \sum_{i=1}^{r} C_i L_i X$

Mais $L_i X$ est un scalaire donc $MX \in \text{Vect}\langle C_1, \dots, C_r \rangle$ ainsi $\text{Im } M \subset \text{Vect}\langle C_1, \dots, C_r\rangle$

et par dimension on a égalité Ainsi $\boxed{(C_1, \dots, C_r) \text{ est une base de } \text{Im } M}$

• $MX = 0 \iff \sum_{i=1}^{r} C_i (L_i X) = 0 \underset{(C_1, \dots C_r) \text{ libre}}{\iff} \forall i \; L_i X = 0$

Ainsi $\boxed{\text{Ker } M \text{ est l'intersection des hyperplans d'équation } L_i X = 0, \; i = 1 \text{ à } r}$

4 (a) on a $\chi_{B^T} = \det(X I_n - B^T) = \det((X I_n - B)^T) = \det(X I_n - B) = \chi_B$.

(b) Posons $M = X Y^T$ alors M est de rang 1 et

$$f(M) = A X Y^T + X Y^T B = (AX) Y^T + X (B^T Y)^T = \lambda X Y^T + X (\mu Y)^T = (\lambda + \mu) X Y^T = (\lambda+\mu) M$$

(c) Soient $(X_1, \dots, X_n)$ (resp $(Y_1, \dots, Y_n)$) une base propre de A pour les vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(resp de B^T pour les vp $\mu_1, \dots, \mu_n$)

Alors $\forall i,j \quad f(X_i Y_j^T) = (\lambda_i + \mu_j) X_i Y_j^T$.

De plus les n^2 matrices $X_i Y_j^T$ sont linéairement indépendantes : car si $\sum_{ij} \lambda_{ij} X_i Y_j^T = 0$

Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j^T \right) = 0$ donc pour toute colonne X : $\sum X_i \big(\underbrace{\sum \lambda_{ij} Y_j^T X}_{\text{scalaire}} \big) = 0$

ce qui impose par indépendance des X_i que : $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j^T\right) X = 0 \; \forall X$ donc $\sum \lambda_{ij} Y_j^T = 0$ et par indépendance des Y_j $\boxed{\lambda_{ij} = 0 \; \forall i,j}$. Finalement on a une base propre $\Rightarrow f$ est DZ.

Ex 5

1) Soit F un sev $F \neq \{0\}$, $F \neq E$

alors $\exists x \neq 0 \in F$. considérons un endomorphisme u tel que $u(x) = y$
$y \neq 0 \notin F$

(un tel u existe, on prend par exemple — une base $\mathcal{B}$ dont le premier vecteur est $\vec{x}$ pour s'en convaincre)

alors $u(F) \not\subset F$ donc F n'est pas stable par u (donc pas stable par $\mathcal{L}(E)$)

2) Soit $x \in E_\lambda(u)$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ Donc $v(x) \in E_\lambda(u)$

Si u commute avec tous les éléments de A, soit λ une valeur propre de u (λ existe car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). D'après la partie précédente $E_\lambda(u)$ est stable par v, $\forall v \in A$,

comme A est irréductible et que $E_\lambda(u) \neq \{0\}$, c'est que $E_\lambda(u) = E$ donc $u = \lambda Id_E$

3 a) Si $y \in F$ alors $\exists v \in A$ / $y = v(x)$

Mais alors $\forall u \in A$ $u(y) = u \circ v(x) \in F$ car $u \circ v \in A$ (algèbre).

Donc F est stable par A. De plus $F \neq \{0\}$ car $x = Id(x) \in A$. Donc $\boxed{F = E}$

b) Soit y un vecteur de $\bigcap_{l' \in F'} \ker l'$

Alors $\forall v \in A$ on a $l \circ v(y) = 0$. Par suite $\forall u \in A$ on a $l \circ v(u(y)) = l \circ (\underbrace{u \circ v}_{\in A})(y)$.

ceci prouve que $u(y) \in \bigcap_{l' \in F'} \ker l'$. Donc $\bigcap \ker l'$ est un sev A-stable. De plus

il n'est pas égal à E puisque $l \neq 0$ et $\bigcap_{l' \in F'} \ker l' \subset \ker l$.

Donc $\bigcap_{l' \in F'} \ker l' = \{0\}$ ce qui prouve que $\boxed{F' = E^*}$

4) $Rg\, v = 1$ donc $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{vect}\langle \vec{x} \rangle$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\forall y \in E \wedge v(\vec{y}) = \ell(y)\, \vec{x}$. Il est facile de vérifier que ℓ est linéaire

$\exists \ell(y) \in \mathbb{K}$.

5) Si A contient v de rang 1. alors $\exists\, \ell \neq \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ / $v : y \longmapsto \ell(y)\, \vec{x} \in A$.

Mais alors soit ℓ' une forme linéaire non nulle et $\vec{x}'$ un vecteur non nul.

D'après 4), il existe $w_1 \in A$ et $w_2 \in A$ tels que $\begin{cases} \ell' = \ell \circ w_1 \\ \vec{x}' = w_2(\vec{x}) \end{cases}$

l'endomorphisme $w_2 \circ v \circ w_1$ est élément de A et l'on a :

$\forall y \quad w_2 \circ v \circ w_1(y) = \ell \circ w_1(y)\, w_2(x) = \ell'(y)\, \vec{x}'$.

Ceci prouve que tous les endomorphismes de rang 1 sont dans $\mathcal{A}$.

En particulier les endomorphismes associés dans une base $\mathcal{B}$ quelconque

aux matrices E_{ij} (puisqu'elles sont de rang 1). les E_{ij} forment une base

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A contient une base de $\mathcal{L}(E) \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)}$

6) a) $rg\, u > 1 \Rightarrow \exists (x, y)$ / $(u(x), u(y))$ libre.

puis d'après 3a), $\exists v \in A$ / $v(u(x)) = y$.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ $(u \circ v - \lambda \mathrm{Id})(u(x)) = u(y) - \lambda u(x) \neq 0$ donc $u \circ v - \lambda I|_{\mathrm{Im}\, u}$

est non nul.

comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'endomorphisme $u \circ v|_{\mathrm{Im}\, u}$ (c'est bien un endomorphisme

car $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$) possède au moins une vp λ. Pour ce λ $u \circ v - \lambda I$

n'est pas bijectif

II 6c] on a $u' = u\circ v\circ u - \lambda u \in A$ car A algèbre.

$u' \neq \tilde{0}$ et $rg(u') < rg(u)$ d'après le b].

7] La question 6 prouve que A contient toujours un endomorphisme de rang 1. On peut alors appliquer 5].

8] Soit $\mathcal{B}$ une sous algèbre unitaire stricte.

Alors $\mathcal{B}$ n'est pas irréductible. Donc $\exists F$ stable par $\mathcal{B}$ de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$

Dans une base adaptée, les éléments de $\mathcal{B}$ ont pour matrice :

$$\begin{array}{c c} & \overbrace{\hphantom{U}}^{k} \\ k\{ & \left(\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline O & W \end{array}\right) \end{array}$$

. La dimension de $\mathcal{B}$ est donc inférieure à celle de l'espace vectoriel des matrices de ce type, soit $\dim \mathcal{B} \leq n^2 - k(n-k) \leq n^2 - n + 1$.

On a égalité en prenant l'algèbre des matrices de la forme $\begin{bmatrix} d & & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$.