Norme sur un espace vectoriel

Feuille d'exercices #02

Exercice 1 — Montrer qu'une boule d'un espace vectoriel réel normé est convexe.

Exercice 2 — Soient E un espace vectoriel normé. Si A est une partie bornée non vide de E, on appelle diamètre de A le réel $\delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A} \|x-y\|$.

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$.
2. Soient A et B sont deux parties bornées de E d'intersection non vide.
   a) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$.
   b) Montrer que $\delta(A\cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

🚲 **Exercice 3 —** *Inégalités de Hölder et de Minkowski*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout réel $p > 1$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. a) Montrer que pour tous réels positifs α et β, $\alpha\beta \leqslant \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$.
   b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum\limits_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.
   On commencera par traiter le cas $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
2. a) Établir que $\sum\limits_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leqslant \sum\limits_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum\limits_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.
   b) En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.
3. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$.

Exercice 4 — Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{y\in E \\ \|y\|\leqslant 1}} |(x|y)|$$

Exercice 5 — Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E et B_1 et B_2 les boules unités fermées associées. Montrer que $B_1 = B_2$ si, et seulement si, $N_1 = N_2$.

Exercice 6 — On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées. Pour toute suite $u \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|'_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|)$$

Montrer que l'on définit ainsi deux normes équivalentes sur E.

Exercice 7 — Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\,; \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t\,; \quad N_3(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.
2. Donner des inégalités optimales entre N_1, N_2 et N_3.
3. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 — Soient $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et,

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \int_0^1 \mathrm{e}^t |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 9 — Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.
2. Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes puis, plus généralement, que pour tous $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
3. a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n/2^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser dans ce cas sa limite.
   b) Établir que pour $0 \leqslant a < b$ et $b > 1$, N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Exercice 10 — Soient $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et,

$$\forall f\in E,\quad N(f)=\sup_{[0,1]}\left(|f|+|f'|\right)\quad\text{et}\quad N'(f)=\sup_{[0,1]}|f|+\sup_{[0,1]}|f'|$$

Montrer que N et N' sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 11 — On définit sur $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'application N par :

$$N(f)=\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis que $\|\cdot\|_\infty\leqslant\sqrt{2}N$. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 12 — Soit $E=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid(a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. Montrer que les applications $a+b\sqrt{2}\mapsto|a|+|b|$ et $a+b\sqrt{2}\mapsto|a+b\sqrt{2}|$ définissent deux normes sur E.
3. À l'aide de $u_n=(1+\sqrt{2})^n$, montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 13 — Soit $E=\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère la suite de fonctions définies par $f_n:x\mapsto\mathrm{e}^{inx}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\overline{B(0,1)}$.
2. En calculant $\|f_n-f_p\|_\infty$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.

🚲 **Exercice 14 —** Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists N\in\mathbb{N},\quad\forall n,p\geqslant N,\quad\|u_n-u_p\|\leqslant\varepsilon$$

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. toute suite de Cauchy d'éléments de E converge ;
2. pour toute suite (u_n) d'éléments de E, la convergence de la série $\sum\|u_n\|$ implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 15 — *Autour de la convergence simple*
Soit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On considère la propriété $(*)$ suivante :

$$\forall f\in E,\quad\forall(f_n)\in E^{\mathbb{N}},\quad\|f-f_n\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\quad\Longleftrightarrow\quad\forall t\in E,\quad f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(t)$$

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme $\|\cdot\|$ vérifiant la propriété $(*)$.
   On construira une suite de fonctions affines par morceaux de support $[0,\frac{1}{n}]$.
2. Soient F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus k définies sur $[0,1]$ et $\alpha_0,\dots,\alpha_k\in[0,1]$ distincts.
   a) Montrer que $\|P\|=\sum_{i=0}^{k}|P(\alpha_i)|$ définit une norme sur F.
   b) À l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange, montrer que la propriété $(*)$ est vérifiée dans F.

🚲 **Exercice 16 —** *Autour des normes matricielles*
On considère les trois applications définies sur $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\|M\|_1=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|m_{i,j}|\,;\quad\|M\|_2=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2}\,;\quad\|M\|_\infty=\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}|m_{i,j}|$$

1. Montrer que ces applications sont des normes sur E.
2. a) Montrer qu'elles vérifient de plus, pour les deux premières :
   $$\forall M,N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad\|MN\|\leqslant\|M\|\cdot\|N\|$$
   b) Prouver que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall M,N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad\|MN\|\leqslant c\cdot\|M\|\cdot\|N\|$$

🚲 **Exercice 17 —** *Norme subordonnée*
On considère la norme définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $\|X\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des vecteurs colonnes unitaires. On pose alors, pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N(A)=\sup_{X\in\mathscr{S}}\|AX\|$$

1. Justifier que N est bien définie.
2. Montrer que pour tous $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AX\|\leqslant N(A)\|X\|$.
3. En déduire que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Justifier que N est en fait la norme $\|\cdot\|_1$ définie dans l'exercice précédent.