Fonctions continues

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Définitions, généralités

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Continuité : définitions

1.1.1 Théorème et définition de la continuité

Soit $D \in \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$.

(1) Soit $x_0 \in D$. f est continue au point x_0 si f vérifie au moins une des assertions équivalentes suivantes :

- (a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
- (b) $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(f(x_0)),\ \exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0),\ f(U \cap D) \subset V$.
- (c) $\forall u \in D^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0, $f(u_n)$ converge vers x_0.

(2) f est continue sur D si $\forall x \in D$, f est continue en x. On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continue de D dans $\mathbb{K}$.

Démonstration On montrera que (a) $\Rightarrow$ (b), puis que (b) $\Rightarrow$ (c) et enfin que (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(f(x_0))$, $\exists \varepsilon > 0$, $V_{\mathbb{K}}(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. On peut trouver d'après (a) un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Soit $U = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, alors $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ et, pour tout $x \in U \cap D$, on a $x \in D$ et $|x - x_0| \leqslant \alpha$ donc $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Ceci est équivalent à $f(x) \in V_{\mathbb{K}}(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ donc $f(U \cap D) \subset V$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0. Montrons que $f(u_n) \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} f(x_0)$. Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(f(x_0))$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $f(u_n) \in V$. D'après (b), il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$. u converge vers x_0 donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in U$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in U \cap D$ donc $f(u_n) \in V$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Montrons que $\neg$ (a) $\Rightarrow \neg$ (c). Supposons donc que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in D / |x - x_0| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(x)| > \varepsilon$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $|u_n - x_0| \leqslant 2^{-n}$ et $|f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ donc u est une suite de points de D qui converge vers x_0 telle que $f(u_n)$ ne converge pas vers x_0, ce qui est impossible.

1.1.2 Fonctions lipschitziennes

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. f est lipschitzienne [a] s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in D$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne.

a. Quel nom à coucher dehors !

Remarque

- Toute fonction affine du type $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \alpha t + \beta \end{array}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est $|\alpha|$-lipschitzienne : en effet, $\forall s, t \in \mathbb{R}$,

$$|f(s) - f(t)| = |\alpha|\,|s - t|$$

- On dit que f est contractante si elle est lipschitzienne de rapport strictement plus petit que 1.

Théorème Toute application lipschitzienne est continue.

En effet, soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$, et $x_0 \in D$. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, pour $x \in D$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$$

Soit $\alpha > 0$. Si $|x - x_0| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k\alpha$. Prenons donc $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$ si $k = 0$, et $\alpha = 42$ [a] si $k = 0$. On a toujours $k\alpha \leqslant \varepsilon$ donc si $x \in D \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

1.1.3 Fonctions uniformément continues

$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall s, t \in D, |s - t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Remarques

- Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.
  En effet, soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une application k-lipschitzienne et $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $k\alpha \leqslant \varepsilon$ (ou $\alpha = 42$ si $k = 0$). Pour $s, t \in D$, vérifiant $|s - t| \leqslant \alpha$, alors
  $$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &\leqslant k|s - t| \\ &\leqslant k\alpha \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$
- Montrons qu'il existe des fonctions uniformément continues mais pas lipschitziennes. Soit
  $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$$
  On a vu que $\forall u, v \in \mathbb{R}_+$,
  $$\left|\sqrt{u} - \sqrt{v}\right| \leqslant \sqrt{|u - v|}$$
  Soit $\varepsilon > 0$, $\alpha = \varepsilon^2$. Pour $u, v \in \mathbb{R}_+$,
  $$|u - v| \leqslant \alpha = \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\sqrt{u} - \sqrt{v}\right| \leqslant \sqrt{|u - v|} \leqslant \varepsilon$$
  f est donc uniformément continue. Par contre, f n'est pas lipschitzienne. Supposons qu'elle l'est. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ / \forall s, t \in \mathbb{R}$,
  $$\left|\sqrt{s} - \sqrt{t}\right| \leqslant \lambda|s - t|$$
  En particulier pour $t = 0$, $|\sqrt{s}| \leqslant \lambda|s|$. Ainsi, $\forall s > 0$,
  $$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{s^2}} \leqslant \frac{\lambda}{s^2} &\Rightarrow \frac{1}{s} \leqslant \frac{\lambda}{s^2} \\ &\Rightarrow s \leqslant \lambda \end{aligned}$$
  Or s peut décrire tout $\mathbb{R}_+^*$ donc la précédente inégalité est impossible.

Théorème Toute fonction uniformément continue est continue.

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ uniformément continue et $x_0 \in D$. Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, f est uniformément continue donc $\exists \beta > 0 / \forall s, t \in D$,

$$|s - t| \leqslant \beta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour $x \in D$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \beta$, on a bien $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

[a] Ou n'importe quoi pourvu que ce soit strictement positif.

Remarque Montrons qu'il existe des fonctions continues qui ne le sont pas uniformément. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$$

Montrons que f est continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $u \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0. On sait que $\left(u_n^2\right)$ tend vers x_0^2 donc $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$ donc f est continue en x_0. Supposons que f est uniformément continue, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall s, t \in \mathbb{R}$, $|s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|s^2 - t^2\right| \leqslant \varepsilon$. Posons maintenant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \alpha$, alors pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &\leqslant \frac{1}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{n_0} \\ &\leqslant \alpha \end{aligned}$$

On doit donc aussi avoir

$$\left|x_n^2 - y_n^2\right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \leqslant \varepsilon$$

Si $\varepsilon = 1$, la relation précédente est absurde donc c'est impossible.

1.2 Continuité : théorèmes

1.2.1 Théorème de Heine

Soit Δ une partie compacte de $\mathbb{R}$ et $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors f est uniformément continue.

Démonstration Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists s, t \in \Delta / \begin{cases} |s-t| \leqslant \alpha \\ |f(s) - f(t)| > \varepsilon \end{cases}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n, y_n \in \Delta$ avec $|x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Δ est compact donc il existe une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de x avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante qui converge vers un élément a de Δ. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left|y_{\varphi(n)} - a\right| &= \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - a\right| \\ &\leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - a\right| \end{aligned}$$

Or $\left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc cette quantité tend vers 0, ainsi que $\left|x_{\varphi(n)} - a\right|$. Donc $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers a. f et continue en a car $a \in \Delta$ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(a)$ et $f\left(y_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(a)$ donc

$$\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} 0$$

Ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| > \varepsilon$.

Remarque Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ continue en $x_0 \in D$. Supposons que $f(x_0) > 0$, et soit $\lambda \in]0, f(x_0)[$. Alors $V = [\lambda, +\infty[$ est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tel que $x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V$. Ainsi, $f(x) \geqslant \lambda > 0$ donc f est strictement positive sur $D \cap U$. Ceci revient à dire que l'on peut trouver un voisinage de x_0 autour duquel $f(x)$ est toujours positive.

1.2.2 Théorèmes généraux

Somme, produit, quotient, valeur absolue

Version locale Soient $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $x_0 \in D$, on suppose f et g continues en x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
- $\alpha f + g$ est continue en x_0.
- fg est continue en x_0.
- Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.
- $|f|$ est continue en x_0.

Version globale Soient $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
- $\alpha f + g$ est continue sur D.
- fg est continue sur D.
- Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue sur D.
- $|f|$ est continue sur D.

Démonstration Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0. f et g sont continues en x_0 donc $f(u_n) \longrightarrow f(x_0)$ et $g(u_n) \longrightarrow g(x_0)$. D'après les théorèmes généraux sur les suites convergentes :
- $\alpha f(u_n) + g(u_n) \longrightarrow \alpha f(x_0) + g(x_0)$
- $f(u_n)\, g(u_n) \longrightarrow f(x_0)\, g(x_0)$
- Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f(u_n)} \longrightarrow \dfrac{1}{f(x_0)}$
- $|f(u_n)| \longrightarrow |f(x_0)|$

Opérations spécifiques aux fonctions réelles Soient $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$. Alors :
- $\inf(f, g)$ est continue sur D.
- $\sup(f, g)$ est continue sur D.
- f^+ est continue sur D.
- f^- est continue sur D.

Opérations spécifiques aux fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$ Soient $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$. Alors :
- $\Im\mathrm{m}(f)$ est continue sur D.
- $\Re\mathrm{e}(f)$ est continue sur D.

Les démonstrations suivantes sont « *laissées aux courageux lecteur !* ».

Remarques

(1) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est continue si et seulement si $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont continues.

(2) Soit $D \subset \mathbb{R}$, alors :
- $t \in D \longmapsto t$ est continue donc par produit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto t^n$ est continue.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \alpha t^n$ est continue donc par somme, toutes les fonctions polynômiales sont continues.
- Par quotient, toute fonction rationnelle bien définie est continue.

Théorème sur la composition Soient D, Δ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset \Delta$ et $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ toutes deux continues. Alors $g \circ f$ est continue sur D.

Démonstration Soit $x_0 \in$D . Montrons que $g \circ f$ est continue en x_0.

Soit W un voisinage de $g(f(x_0))$ dans $\mathbb{K}$. Or $f(x_0) \in \Delta$ et g est continue sur Δ donc on peut trouver un voisinage V de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g(\Delta \cap V) \subset W$. De même, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(x_0))$ et f est continue en x_0 donc $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$.

Si $x \in U \cap D$, alors $f(x) \in V$ et $f(x) \in \Delta$ donc $f(x) \in V \cap \Delta$ donc $g(f(x)) \in W$ donc $g \circ f(U \cap D) \in W$ [a].

1.2.3 Image d'une partie compacte

> Soit Δ un compact de $\mathbb{R}$, $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors $\Lambda = f(\Delta)$ est un compact de $\mathbb{K}$.

Démonstration Soit $y \in f(\Delta)^{\mathbb{N}}$. Montrons qu'il existe une sous-suite de y qui converge dans $f(\Delta)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(\Delta)$ donc $\exists x_n \in \Delta$ tel que $y_n = f(x_n)$. Δ est un compact donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $a \in \Delta$ tels que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers a. f est continue en Δ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(a)$ donc $y_{\varphi(n)} \longrightarrow f(a)$ et $f(a) \in f(\Delta)$.

a. Les autres preuves de ce résultat utilisant respectivement les définitions séquentielles et epsilonnesques de la continuité sont elles aussi « *laissées au courageux lecteur !* » .

Corollaire Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur Δ compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. La partie $\Omega = \{f(x) \,|x \in D\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ donc $m = \inf \Omega$ et $M = \sup \Omega$ sont des valeurs prises par f.

En d'autres termes, $\exists x, t \in \Delta / \forall t \in \Delta,\ f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(y)$.

Démonstration $\Omega = f(\Delta)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc il est bornée, d'où l'existence de $m = \inf \Omega$ et $M = \sup \Omega$. Il est aussi fermé, d'où $m, M \in \Omega$.

Cas particulier En particulier, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

2.1 Énoncés et démonstrations

2.1.1 Énoncés

Version n°1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) f(b) \leqslant 0$, alors il existe un point c du segment $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Version n°2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f prend sur I des valeurs positives et négatives, alors f doit s'annuler au moins une fois.

Version n°3

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1.2 Démonstrations

Version n°1 Supposons par exemple $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.

On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

(1) $a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$

(2) $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}(b - a)$

(3) $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \leqslant 0$

On prend $a_0 = a$, $b_0 = b$, on a bien $f(a_0) \leqslant 0$ et $f(b_0) \geqslant 0$. Soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(c) \leqslant 0$, on prend $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.
- Sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

On a bien dans tous les cas :

(1) $a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$

(2) $b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b_0 - a_0)$

(3) $f(a_1) \leqslant 0$ et $f(b_1) \geqslant 0$

Supposons avoir construit

$$a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\forall k \in [[0, n]]$, $f(a_k) \leqslant 0$ et $f(b_k) \geqslant 0$. Soit $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$:

- Si $f(c_n) \leqslant 0$, alors on prend $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$.
- Si $f(c_n) \geqslant 0$, alors on prend $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$.

Dans tous les cas on a bien :

(1) $a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$

(2) $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(a-b)$

(3) $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ et $f(b_{n+1}) \geqslant 0$

Il est clair que les suites a et b sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune $x \in [a,b]$. f est continue en x donc les suites (a_n) e (b_n) convergent toutes les deux vers x donc $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(x)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 0$. De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, $f(x) = 0$.

Version n°2 Par hypothèse, $\exists a, b \in I$ avec $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.

- Si $a = b$, alors$f(a) = 0$.
- Si $a \neq b$, alors f est continue sur $\underset{\Leftrightarrow}{[a,b]} = [\min(a,b), \max(a,b)]$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$. D'après la version n°1 du théorème, f s'annule au moins une fois sur $\underset{\Leftrightarrow}{[a,b]} \subset I$.

Version n°3 Soit $J = f(I)$, montrons que J est une partie convexe de $\mathbb{R}$ et donc un intervalle.

Soit $c, d \in J$ tels que $c \leqslant d$. Montrons que $[c,d] \subset J$. Soit $\gamma \in [c,d]$, $c, d \in f(I)$ donc $\exists a, b \in I / f(a) = c$ et $f(b) = d$. Soit

$$g : \begin{array}{l} \underset{\Leftrightarrow}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) - \gamma \end{array}$$

g est continue car f est continue et

$$g(a)g(b) = (c-\gamma)(d-\gamma) \leqslant 0 \quad \text{car } c \leqslant \gamma \leqslant d$$

D'après la version n°1 du théorème, $\exists Adrien \in [a,b]$ [a] tel que $g(Adrien) = 0 \Leftrightarrow \gamma = f(Adrien)$ donc $\gamma \in J$ car $Adrien \in I$. Donc J est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

2.2 Corollaires

2.2.1 Image d'un segment par une application continue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f([a,b])$ est un segment $[M,n]$ avec $m \leqslant M$.

Démonstration $[a,b]$ est un intervalle et un compact et f et continue sur $[a,b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Soit $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, alors $\exists x, y \in [a,b]$ tels que $m = f(x)$ et $M = f(y)$. Alors, $\forall t \in [a,b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$ donc $f([a,b]) \subset [m,M]$.

Or $m, M \in f([a,b])$ donc $f([a,b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires donc $[m,M] \subset [a,b]$ donc

$$f([a,b]) = [\min f, \max f]$$

2.2.2 Petit problème

Un marcheur parcourt 20 km en 4 h pour une vitesse moyenne de 5 km/h [b]. Montrons qu'il y a un intervalle de temps de 1 h pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.

On admet que la fonction qui à t associe $d(t)$ la distance parcourue est continue. Alors $f : t \in [0, 3\,\mathrm{h}] \longrightarrow d(t + 1\,\mathrm{h}) - d(t)$ est continue. De plus :

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 20$$

Alors $\exists k \in [[0,3]]$ tel que $f(k) \leqslant 5$ et $\exists l \in [[0,3]]$ tel que $f(l) \leqslant 5$. Donc $t \longrightarrow f(t) - 5$ est continue et prend des valeurs positives et négatives donc doit s'annuler donc $\exists t \in [0,3]$ tel que $f(t) = 5 \Leftrightarrow d(t+1) - d(t) = 5$.

a. Une petite dédicace de la part de M. Sellès à celui qu'on ne présente plus, aussi connu sous le nom d'AMÉNOFIS.

b. Ou km.h^{-1} pour parler comme les physiciens !

2.2.3 Autre version du théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, si c et d avec $c \leqslant d$ sont deux valeurs prises par f, alors f prend toutes les valeurs comprises entre c et d.

3 Complément : résultats sur la continuités des fonctions à variable complexe

3.1 Généralités sur la continuité dans $\mathbb{C}$

3.1.1 Définition de la continuité dans $\mathbb{C}$

Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$, on dit que $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en z_0 si (les définitions suivantes sont équivalentes) :

(1) $\forall \delta_n \in \Delta^{\mathbb{N}}$ convergente vers z_0, alors $(f(\delta_n))$ converge vers $f(z_0)$.

(2) $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(f(z_0))$, $\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z_0)$ tel que $f(U \cap \Delta) \subset V$.

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall \delta \in \Delta$, $|\delta - z_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(\delta) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon$.

3.1.2 Théorèmes

On montre de la même façon que pour les théorèmes analogues concernant les fonctions à variable réelle les résultats suivants :
- Théorèmes généraux.
- Image d'un compact par une fonction continue.

En particulier, toute fonction polynômiale sur $\mathbb{C}$ est continue.

3.2 Théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ polynômiale de degré nPartérieur ou égal à 1. Alors P possède une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration

Montrons que $|P(z)|$ est minorée. On écrit alors :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{avec } a_n \neq 0$$

On peut supposer $a_n = 1$ car P s'annule si et seulement si $\dfrac{P}{a_n}$ s'annule. Alors, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\
&\geqslant \left| |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \right| \\
&\geqslant |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \\
&\geqslant |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \left| z^k \right| \\
&\geqslant |z|^n \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z^{n-k}|} \right]
\end{aligned}$$

Prenons z tel que $|z| \geqslant 1$, soit $M = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|)$. Si $j \in \mathbb{N}^*$, alors $|z|^j \geqslant |z| \geqslant 1$ donc
$$\frac{1}{|z|^j} \leqslant \frac{1}{|z|}$$
Donc pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \leqslant \dfrac{M}{|z|}$, donc
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \leqslant \frac{nM}{|z|}$$
Pour z-espace v$|z| \geqslant \max(1, 2nM)$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} &\leqslant \frac{nM}{|z|} \\ &\leqslant \frac{nM}{2nM} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$
C'es
$$\begin{aligned} |P(z)| &\geqslant |z|^n \left[1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z^{n-k}|}\right] \\ &\geqslant |z|^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &\geqslant \frac{|z|^n}{2} \end{aligned}$$
Pour $R = \max(1, 2nM, |P(0)|)$, si $|z| > R$, alors $|P(z)| \geqslant \dfrac{|z|}{2} \geqslant |P(0)|$. Soit $\Delta = \overline{\mathcal{D}}(0, R)$ un compact de $\mathbb{C}$, donc Δ est fini et borné. Soit l'application
$$\varphi : \begin{array}{l} \Delta \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto |P(z)| \end{array}$$
continue, $\varphi(\Delta)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, φ atteint un minimum : $\exists z_0 \in \Delta / \forall z \in \Delta$, $|P(z)| \geqslant |P(z_0)|$. De plus $0 \in \Delta$ donc $|P(0)| \geqslant |P(z_0)|$. Ainsi :

- Si $|z| \leqslant R$, alors $|P(z)| \geqslant |P(z_0)|$.
- Si $|z| > R$, alors $|P(z)| \geqslant |P(0)| \geqslant |P(z_0)|$.

Dans tous les cas, $|P(z)| \geqslant |P(z_0)|$.

Soit $Q = \dfrac{1}{P(z_0)} P$. Alors $Q(z_0) = 1$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \geqslant 1$. On note que Q est polynômiale de degré n comme P.

Soit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = Q(z + z_0)$, alors T est aussi polynômiale de degré n ; $T(0) = 1$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|T(z)| \geqslant 1$.

Montrons que cette dernière assertion est impossible T s'écrit $T(z) = \lambda_0 + z\lambda_1 + \cdots + \lambda_n z^n$ avec $n \geqslant 1$ et $\lambda_n \neq 0$. Or $T(0) = \lambda_0$ donc $\lambda_0 = 1$. Soit $j = \min\{k \in [\![1, n]\!] \,|\, \lambda_k \neq 0\}$. Alors
$$T(z) = 1 + \lambda_j z^j + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k z^k$$
On sait que $\lambda_j \neq 0$ donc on peut écrire $\lambda_j = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout réel $t > 0$,
$$T\left(t\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\theta}{j} + \frac{\pi}{j}\right)}\right) = 1 + \underbrace{r\mathrm{e}^{i\theta} \cdot t^j \mathrm{e}^{i(-\theta+\pi)}}_{-rt^j} + \underbrace{\sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k t^k \mathrm{e}^{i\left(-\frac{\theta}{j} + \frac{\pi}{j}\right)}}_{Z_t}$$

Or $|Z_t| \leqslant \sum_{k=j+1}^{n} |\lambda_k|\, t^k$, de plus pour $t \leqslant 1$ on $\forall k \in [\![j+1, n]\!]$, $t^k \leqslant t^{j+1}$ donc

$$\begin{aligned} |Z_t| &\leqslant \sum_{k=j+1}^{n} |\lambda_k|\, t^{j+1} \\ &\leqslant M' t^{j+1} \quad \text{avec } M' = \sum_{k=j+1}^{n} |\lambda_k| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| T\left(t\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\theta}{j}+\frac{\pi}{j}\right)} \right) \right| &= \left|1 - rt^j + Z_t\right| \\ &\leqslant \left|1 - rt^j\right| + |Z_t| \end{aligned}$$

Supposons de plus que $t \leqslant \dfrac{1}{r} \Leftrightarrow t \in \left]0, \min\left(1, \dfrac{1}{r}\right)\right]$. Alors

$$t^j \leqslant t \leqslant \frac{1}{r} \Rightarrow 1 - rt^j \geqslant 0$$

Donc $\left| T\left(t\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\theta}{j}+\frac{\pi}{j}\right)} \right) \right| \leqslant 1 - rt^j + M't^{j+1}$ et $rt^j - Mt^{j+1} > 0$ pour $t \in \left]0, \min\left(1, \dfrac{1}{r}, \dfrac{r}{M'}\right)\right[$. On a donc

$$\left| T\left(t\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\theta}{j}+\frac{\pi}{j}\right)} \right) \right| \leqslant 1 - \left(rt^j - Mt^{j+1}\right) < 1$$

Ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse de départ.