Intégrale dépendant d'un paramètre

I. Convergence dominée

I.1. Cas discret

Théorème I.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

i. *la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;*

ii. *les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I ;*

iii. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et $\displaystyle\int_I f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,dt$.

L'hypothèse **iii.** est appelée **hypothèse de domination**.

Dans le cas où I est un intervalle **borné**, il suffit que les fonctions $|f_n|$ soient toutes majorées par une même constante M pour que cette hypothèse soit vérifiée.

I.2. Cas continu

Théorème I.2. *Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, indexée par un intervalle J de $\mathbb{R}$. Soit μ un point adhérent à J (éventuellement $\mu = \pm\infty$). On suppose que :*

i. *il existe une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que, pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to\mu}{\longrightarrow} f(t)$;*

ii. *les fonctions f_λ et f sont continues par morceaux sur I ;*

iii. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que*

$$\forall \lambda \in J \quad \forall t \in I \quad |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, les fonctions f_λ et f sont intégrables sur I, et $\displaystyle\int_I f_\lambda(t)\,dt \underset{\lambda\to\mu}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,dt$.

II. Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit $f : A\times B \longrightarrow C$, $(a,b) \longmapsto f(a,b)$ une fonction de deux variables. Pour tout $a_0 \in A$ (resp$^{\text{t}}$ $b_0 \in B$), on note $f(a_0,\cdot)$ (resp$^{\text{t}}$ $f(\cdot,b_0)$) la fonction $b \longmapsto f(a_0,b)$ de B dans C (resp$^{\text{t}}$ $a \longmapsto f(a,b_0)$ de A dans C).

II.1. Continuité

Théorème II.1. *Soit E un espace normé de dimension finie. Soient $A \subset E$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose que :*

i. *pour tout $t_0 \in I$, la fonction $f(\cdot,t_0)$ est continue sur A ;*

ii. *pour tout $x_0 \in A$, la fonction $f(x_0,\cdot)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I ;*

iii. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

Remarque 1 : si l'on veut simplement démontrer la continuité de F en un point $a \in A$, on peut, dans les hypothèses, remplacer la partie A par un voisinage (relatif) V de a.

Remarque 2 : dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut remplacer l'hypothèse **iii.** par l'hypothèse plus faible suivante : pour chaque **segment** $S \subset A$, il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in S \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_S(t)$.

Remarque 3 : si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, si l'intervalle d'intégration $I = [a,b]$ est un segment, et si f est continue sur $A \times I$ en tant que fonction de deux variables, alors, pour chaque segment $S \subset A$, f est bornée sur le compact $S \times [a,b]$; on peut donc utiliser un majorant de f comme fonction de domination sur $S \times [a,b]$.

II.2. Dérivation

Théorème II.2. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. On suppose que :*

i. *pour tout $x_0 \in J$, la fonction $f(x_0,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I ;*

ii. *en tout point de $J\times I$, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable x ;*

iii. *pour tout $t_0 \in I$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t_0)$ est continue sur J ;*

iv. *pour tout $x_0 \in J$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\cdot)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I ;*

v. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que*

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ *est de classe* C^1 *sur* J*, et* $F'(x) = \int_I (\partial f/\partial x)(x,t)\,dt$ *sur* J*.*

Remarque 1 : on peut résumer les hypothèses **iii.** à **v.** en disant que $\partial f/\partial x$ vérifie les hypothèses du théorème **??** (de continuité).

Remarque 2 : comme pour le théorème **??** (de continuité), on peut remplacer l'hypothèse de domination **v.** par une hypothèse de domination sur les segments : pour chaque **segment** $S \subset J$, il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in S \times I \quad |(\partial f/\partial x)(x,t)| \leqslant \varphi_S(t)$.

II.3. Dérivées d'ordre supérieur

Théorème II.3. *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *; soit* $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ *; soit* $p \in \mathbb{N}^*$*. On suppose que :*

i. *pour tout* $t_0 \in I$*, la fonction* $f(\cdot, t_0)$ *est* p *fois dérivable sur* J *;*

ii. *pour tout* $x_0 \in J$ *et tout* $k \in [\![0, p-1]\!]$*, la fonction* $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, \cdot)$ *est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle* I *;*

iii. *pour tout* $t_0 \in I$*, la fonction* $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(\cdot, t_0)$ *est continue sur* J *;*

iv. *pour tout* $x_0 \in J$*, la fonction* $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x_0, \cdot)$ *est continue par morceaux sur l'intervalle* I *;*

v. *il existe une fonction* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, continue par morceaux et intégrable sur* I*, telle que*

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ *est de classe* C^p *sur* J*, et, pour tout* $x \in J$*,* $\quad F^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,dt$*.*

Remarque 1 : encore une fois, les hypothèses **iii.** à **v.** affirment que $\partial^p f/\partial x^p$ vérifie les hypothèses du théorème **??** (de continuité).

Remarque 2 : comme pour les théorèmes précédents, on peut remplacer l'hypothèse de domination **v.** par une hypothèse de domination sur les segments : pour chaque **segment** $S \subset J$, il existe une fonction $\varphi_S : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\forall (x,t) \in S \times I \quad |(\partial^p f/\partial x^p)(x,t)| \leqslant \varphi_S(t)$.