Ensembles et applications

I. Ensembles

1. Généralités

La notion d'ensemble est une notion intuitive : c'est une collection d'objets appelés éléments. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Lorsqu'un élément x appartient à un ensemble E, on note $x \in E$.
La négation $\overline{x \in E}$ se note $x \notin E$.

Remarque. *Il y a plusieurs façons de définir un ensemble :*
– *de manière descriptive :* $A = \{0, 1, 2\}$
– *de manière conditionnelle :* $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 2\}$

Définition. *On dit qu'un ensemble F est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble E si tout élément de F est aussi élément de E. On dit aussi que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.*

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, \ x \in E$$

Par exemple, on a la chaine d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a*
– $\emptyset \subset E$.
– $E \subset E$*, ce qui signifie que l'inclusion est réflexive.*
– $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \Rightarrow (E \subset G)$ *, ce qui signifie que l'inclusion est transitive*

Définition. *Deux ensembles E et F sont dits égaux et on note $E = F$ si E est inclus dans F et F est inclus dans E.*

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E) \wedge (E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x \in F, \ x \in E) \wedge (\forall x \in E, \ x \in F)$$

Remarque. *On a toujours $E = E$. La relation "=" est réflexive.*

En pratique, pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on procède ainsi par double inclusion. On commence par supposer que $x \in F$ et on montre que $x \in E$ ce qui montre la première inclusion $F \subset E$ puis on montre l'inclusion réciproque $E \subset F$ de la même manière.

Proposition. *Si A et B sont deux parties de E, alors on a l'équivalence*

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Définition. *L'ensemble des parties d'un ensemble E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc*

$$F \subset E \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$$

Proposition. *Soient E et F deux ensembles, on a alors*

$$E \in \mathcal{P}(E), \qquad \emptyset \in \mathcal{P}(E)$$
$$a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$$
$$E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$$

2. Opérations sur les ensembles

Définition. *On appelle intersection de deux ensembles E et F et on note $E \cap F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à E et à F.*

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \in F)$$

On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si leur intersection est l'ensemble vide. On dit qu'il s'intersectent ou qu'ils ont une intersection non vide sinon.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cap \emptyset = \emptyset \qquad E \cap E = E$$
$$E \cap F = F \cap E \quad \textit{(La loi } \cap \textit{ est commutative)}$$
$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) \quad \textit{(La loi } \cap \textit{ est associative)}$$

L'associativité de la loi $\cap$ autorise à noter $E \cap F \cap G$ l'ensemble $(E \cap F) \cap G$ puisque la position des parenthèse n'a aucune importance.

Proposition. *Soient E et F deux ensembles, on a alors*

$$F \subset E \Leftrightarrow E \cap F = F$$
$$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$

Définition. *On appelle réunion de deux ensembles E et F et on note $E \cup F$, l'ensemble dont les éléments appartiennent à E ou bien à F.*

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \vee (x \in F)$$

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cup \emptyset = E \qquad E \cup E = E$$
$$E \cup F = F \cup E \quad \textit{(La loi } \cup \textit{ est commutative)}$$
$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad \textit{(La loi } \cup \textit{ est associative)}$$

De même que pour l'intersection, on note $E \cup F \cup G$ l'ensemble $(E \cup F) \cup G$ puisque la position des parenthèse n'a aucune importance.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$F \subset E \Leftrightarrow E \cup F = E$$
$$\mathcal{P}(E \cup F) \supset \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$$

Exercice. *Soient E et F deux ensembles.*
On a $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ si, et seulement si, $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Proposition. *Soient E, F et G trois ensembles, on a alors*

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

On dit que la loi $\cup$ est distributive par rapport à la loi $\cap$ et inversement.

Définition. *Soit F une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de F dans E et on note $C_E F$ ou $E \backslash F$ (ou bien $\bar{F}$ s'il n'existe pas d'ambiguïté sur l'ensemble E) l'ensemble constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à F.*

$$x \in E \backslash F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin F)$$

Proposition. *Soient A et B deux parties de E, on a alors*

$$\overline{\emptyset} = E \qquad \overline{E} = \emptyset$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$\overline{A} = B \Leftrightarrow \overline{B} = A$$
$$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Définition. *Plus généralement, si A et B sont deux ensembles, on note $A \backslash B$ l'ensemble formé des éléments de A n'appartenant pas à B.*

$$A \backslash B = \{x \in A \ : \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Définition. *Soient E et F deux ensembles.*
On appelle produit cartésien de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble formé des couples d'éléments dont le premier est dans E et le deuxième dans F. Ainsi, on a :

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in F)$$

Proposition. *Soient A, A',B, B' et C des parties de E, on a alors*

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$
$$(A \subset A') \wedge (B \subset B') \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(A \times B = A \times C) \wedge (A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C$$

Exercice. *Soient A, B, C et D des ensembles. Montrer*

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

Définition. *On généralise l'intersection et la réunion de deux ensembles de la manière suivante : soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$, une famille (non nécessairement finie) de parties de E. On appelle intersection et réunion des éléments de $\mathcal{F}$ les ensembles :*

$$\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E \ : \ \forall X \in \mathcal{F}, \ x \in X\}$$

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = \{x \in E, \ \exists X \in \mathcal{F} \ : \ x \in X\}$$

On dit que $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E si $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = E$.

Remarquons que lorsque la famille $\mathcal{F}$ ne contient que deux parties de E, on retrouve la définition de l'intersection et de la réunion présentée ci-dessus.

Définition. *Soit $\mathcal{F}$ un recouvrement de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une partition de E si ses éléments sont non vides et deux à deux disjoints, c'est à dire*

$$\forall (X, X') \in \mathcal{F}^2, X \neq X' \Rightarrow X \cap X' = \emptyset$$

Par exemple, on peut former une partition de E à deux éléments en considérant une partie $A \subset E$ et son complémentaire $\bar{A}$.

II. Applications

1. Injectivité, surjectivité, bijectivité d'une application

Définition. *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F est la donnée d'une partie G_f de $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E, l'ensemble $\{y \in F : (x,y) \in G_f\}$ contienne exactement un élément.*
On dit que E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée et G_f est le graphe de l'application f.
Pour tout élément x de E, l'unique élément de l'ensemble $\{y \in F : (x,y) \in G_f\}$ est appelé image de x par f et on le note $f(x)$.

Pour dire que f est une application de E dans F qui à tout élément x de E associe l'image $f(x)$, on notera $f : E \to F, x \mapsto f(x)$
On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition. *Soit $f \in F^E$ et $y \in F$. On appelle antécédent de y tout élément x de E tel que $y = f(x)$.*

Exemple. *On définit l'application identité de E notée Id_E par*

$$Id_E\ :\ E \to E,\ x \mapsto x$$

Soit a un élément de F, l'application constante à a associe à tout élément de E l'élément a.

Remarque.
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto y$ *tel que* $y^2 = x$ *n'est pas une application.*
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto y$ *tel que* $y^2 = x$ *est une application.*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$ *n'est pas une application*

Définition. *Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est injective (ou que f est une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent par f, ce qui s'écrit*

$$\forall (x,x') \in E^2 : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou encore, par contraposée

$$\forall (x,x') \in E^2 : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Définition. *Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.*

Définition. *Soit $f \in F^E$ une application. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) si tout élément de F admet exactement un antécédent par f. Une application est donc bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque. *Si $f \in F^E$ est bijective alors on peut définir l'application*

$$F \to E,\ y \mapsto \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Définition. *On appelle suite d'élément de E tout élément de l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$. Si on appelle u une suite de E, il est habituel de noter u_n l'image de l'entier n au lieu de $u(n)$.*

2. Composition d'applications

Définition. *Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On appelle composée de f et g l'application de E dans G notée $g \circ f$ définie par*

$$g \circ f \,:\, E \to H,\ x \mapsto g(f(x))$$

Proposition. *Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. On a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
On dit que la composition est associative et l'on note $h \circ g \circ f$.

Proposition. *(*) La composée de deux injections est une injection.*

Proposition. *(*) Si $g \circ f$ est une injection, alors f est une injection.*

Proposition. *(*) La composée de deux surjections est une surjection.*

Proposition. *(*) Si $g \circ f$ est une surjection, alors g est une surjection.*

Proposition. *La composée de deux bijections est une bijection.*

Proposition. *Soit $f \in F^E$, on a $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$*

Définition. *Soit $f \in E^E$.*
On dit que f est une involution si $f \circ f = Id$. On dit que f est idempotente si $f \circ f = f$.

Définition. *Soit $f \in F^E$. On dit que f est inversible s'il existe une application $g \in E^F$, appelée inverse de f qui vérifie*

$$g \circ f = Id_E \qquad et \qquad f \circ g = Id_F$$

Proposition. *Soit $f \in F^E$ inversible. Alors l'inverse de f est unique. On le note f^{-1}.*

Proposition. *(*) Une application $f \in F^E$ est bijective si et seulement si elle est inversible. Dans ce cas, l'inverse f^{-1} associe à tout élément de F son unique antécédent par f.*

Corollaire. *Soit $f \in F^E$ bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Remarque. *L'application $Bij(E,E) \to Bij(E,E)$, $f \mapsto f^{-1}$ est donc une involution.*

Proposition. *Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

3. Restrictions, prolongements et fonctions indicatrices

Définition. *Soit A une partie de E. On appelle fonction indicatrice de l'ensemble A, notée $\mathbb{1}_A$ allant de l'ensemble E dans l'ensemble $\{0,1\}$ et telle que*

$$\forall x \in E,\ \ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in A \\ 0 & si\, x \notin A \end{cases}$$

On remarque que l'on définit bien là une application car tout élément de E appartient soit à A, soit à son complémentaire et jamais aux deux à la fois.

Proposition. *Soient A et B deux parties de E alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\bar{A}} &= 1 - \mathbb{1}_A \\ \mathbb{1}_{A\cap B} &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{A\cup B} &= max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B &\Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

Définition. *Soit A une partie de E et f une application de E dans F.*
On appelle restriction de F à A et on note $f_{|A}$, l'application de A dans F définie par

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$$

Définition. *Soient $f \in F^E$ et $g \in F'^{E'}$ avec $E \subset E'$.*
On dit que l'application g est un prolongement de f à E' si $f = g_{|E}$.

Définition. *Soient $f \in E^E$ et A une partie de E. On dit que la partie A est stable par f si l'image de tout élément de A reste dans A. Dans ce cas, l'application g définie par*

$$g : A \to A,\ x \mapsto f(x)$$

est appelée application induite par f sur A.

Attention, l'application induite n'est pas qu'une restriction. L'ensemble d'arrivée change aussi. C'est pourquoi on ne parle d'application induite que sur une partie stable alors que l'on peut restreindre une application à n'importe quelle partie de l'ensemble de départ.

4. Image directe et réciproque d'une partie par une application

Définition. *Soit $f \in F^E$ et A une partie de E. On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ la partie de F définie par*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

On peut ainsi parler de $f(x)$ (image d'un élément de E par l'application f) qui est un élément de F, mais aussi de $f(A)$ (image d'une partie de E), qui est une partie de F. On a alors $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.
Si $f \in E^E$ et $A \subset E$, alors A est stable par f si, et seulement si, $f(A) \subset A$.

Proposition. *(*) Soient A et B, deux parties de E et $f \in F^E$. On a alors*

$$\begin{aligned} f(A) = \emptyset &\Leftrightarrow A = \emptyset \\ A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \\ f(E) \backslash f(A) &\subset f(\overline{A}) \end{aligned}$$

Remarque. *L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ peut être stricte.*
Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$
Si f est injective, c'est une égalité.

Remarque. *L'inclusion $f(E) \backslash f(A) \subset f(\overline{A})$ peut être stricte.*
Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ A = \mathbb{R}^+$ et $B = \mathbb{R}^-$.
Si f est injective, c'est une égalité.

Exercice. *(*) Soit $f \in F^E$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Définition. *Soit $f \in F^E$ et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ la partie de E définie par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

Remarque. *Par conséquent,*

$$\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

On peut donc parler de l'image réciproque de n'importe quelle partie de F, sans supposer que f est inversible.

Remarque. *Si $f \in F^E$ est bijective alors*

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$$

car, pour tout $x \in E$, $x \in (f^{-1})(B) \Leftrightarrow \exists y \in B\ :\ x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) \in B$
La dernière équivalence étant due au fait que x n'a qu'un antécédent par f^{-1} : $f(x)$.

Remarque. *Si B est le singleton $\{y\}$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents de B. Elle peut être vide si y n'a pas d'antécédent par f, ou bien contenir un ou plusieurs éléments.*

Proposition. *(*) Soient A et B, deux parties de F et $f \in F^E$. On a alors*

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(\overline{A}) &= \overline{f^{-1}(A)} \end{aligned}$$

Remarque. *L'implication $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ peut ne pas être une équivalence.*
Il suffit de prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ A = \mathbb{R}^{-*}$ et $B = \{1\}$

Proposition. *(*) Soit $f \in F^E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \subset f^{-1}(f(A))$.*

Exercice. *(*) Soit $f \in F^E$. Montrer que f est injective si et seulement si*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \ f^{-1}(f(A)) = A$$

Proposition. *(*) Soit $f \in F^E$ et $A \in \mathcal{P}(F)$. On a $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.*
Plus précisément, $f\left(f^{-1}(A)\right) = f(E) \cap A$.

Exercice. *(*) Soit $f \in F^E$. Montrer que f est surjective si et seulement si*

$$\forall A \in \mathcal{P}(F),\ \ f\left(f^{-1}(A)\right) = A$$

III. Relations dans un ensemble

1. Définition et premiers exemples

Définition. *Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est une partie de $E \times E$. On dit que deux éléments x et y de E sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$ si $(x,y) \in \mathcal{R}$.*

Exemple. *$\leq$ définit une relation sur $\mathbb{R}$. La divisibilité définit une relation sur $\mathbb{N}$ et l'inclusion définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$.*

Définition. *Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ sur E.*
On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$
On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall (x,y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall (x,y) \in E^2 : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall (x,y,z) \in E^3 : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Exemple. *Si on considère l'ensemble des droites du plan. On définit une relation $\mathcal{R}$ par $D_1\mathcal{R}D_2$ si les droites D_1 et D_2 sont orthogonales. La relation $\mathcal{R}$ n'est ni réflexive, ni transitive, ni antisymétrique, mais elle est symétrique. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique. Il en est de même de l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$. La relation sur $\mathbb{N}$ définie par $n\mathcal{R}m$ si n et m ont la même parité est réflexive, symétrique et transitive, mais pas antisymétrique.*

2. Relations d'ordre

Définition. *Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit que l'ensemble E est ordonné lorsqu'il est muni d'une relation d'ordre.*

Exemple. *La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.*

Définition. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. On dit que l'ordre est total (ou que E est totalement ordonnée) si*

$$\forall(x, y) \in E^2 : (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel et deux éléments x et y qui vérifie la proposition ci-dessus sont dits comparables.

Exemple. *L'ordre $\leq$ est total sur $\mathbb{R}$. La divisibilité muni $\mathbb{N}$ d'un ordre partiel pour lequel 2 et 4 sont comparables, mais pas 2 et 3.*

3. Relations d'équivalence

Définition. *Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple. *La congruence modulo n définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}y$ si $n|(x-y)$ est une relation d'équivalence.*

Définition. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On définit la classe d'un élément $x \in E$ et on note $Cl(x)$ ou $\bar{x}$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x.*
On appelle classe d'équivalence tout ensemble de la forme $Cl(x)$ avec $x \in E$.
On dit d'un élément d'une classe d'équivalence qu'il est un représentant de cette classe.

Proposition. *Soit A une classe d'équivalence, alors*

$$\forall x \in A,\ A = Cl(x)$$

Proposition. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On a alors*

$$\forall x \in E, x \in Cl(x)$$

$$\forall(x, y) \in E^2 : Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset \Rightarrow Cl(x) = Cl(y)$$

Les classes d'équivalence forment donc une partition de E.

Exercice. *Soit f une application de E dans F.*
Montrer que la relation sur E définie par

$$x\mathcal{R}y \quad si \quad f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.
Prouver que la classe d'un élément $x \in E$ est $f^{-1}(\{f(x)\})$.
En déduire que les classes d'équivalences sont les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in f(E)$.