Équations différentielles linéaires

I. Systèmes d'équations linéaires d'ordre 1

I.1. Présentation du problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Un **système différentiel linéaire d'ordre 1** est un système de la forme

$$(\Sigma) : \begin{cases} x_1' &= a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ & \cdots \\ x_n' &= a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

dans lequel :

- les a_{ij} et les b_i sont des fonctions données de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, supposées continues sur I ;
- les x_i sont les fonctions inconnues.

Une solution de (Σ) sur un intervalle $J \subset I$ est un n-uplet de fonctions $(x_1, \ldots, x_n)$ de J dans $\mathbb{K}$, de classe C^1 sur J, et vérifiant, pour tout $t \in J$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_i(t)$.

Pour tout t dans I, notons $A(t)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les nombres $a_{ij}(t)$, et $B(t)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les $b_i(t)$. Le système (Σ) se réécrit alors sous la forme

$$(\Sigma) \quad : \quad X' = A(t)X + B(t)$$

Sous cette forme, une solution du système sur un intervalle $J \subset I$ est une fonction $X : t \longmapsto X(t) = {}^t\big(x_1(t) \cdots x_n(t)\big)$ de J dans l'espace $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ des colonnes, de classe C^1 sur J, vérifiant $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ pour tout t dans J.

On peut aussi considérer, pour tout t, l'endomorphisme φ_t de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice est $A(t)$ dans la base canonique ; et le vecteur $b(t)$ de $\mathbb{K}^n$ dont la colonne des coordonnées dans cette même base est $B(t)$. Les applications $t \longmapsto \varphi_t$ et $t \mapsto b(t)$ sont alors des applications continues sur I, à valeurs respectivement dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathbb{K}^n$. Le système (Σ) peut alors s'écrire $x' = \varphi_t(x) + b(t)$; une solution du système sur un intervalle J inclus dans I est une fonction $x : t \mapsto x(t)$ de J dans $\mathbb{K}^n$, de classe C^1 sur J, et vérifiant $x'(t) = \varphi_t\big(x(t)\big) + b(t)$ pour tout t dans J.

I.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

On appelle **problème de Cauchy** pour le système (Σ) tout problème de la forme suivante :

$$(C) \quad \begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

où t_0 est un réel quelconque de l'intervalle I, et X_0 un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$. Une solution du problème (C) sur un intervalle J inclus dans I et contenant t_0 est alors une solution X du système (Σ), vérifiant de plus la condition $X(t_0) = X_0$. Cette dernière condition sera en général appelée **condition de Cauchy**, ou condition initiale.

Proposition I.1. *Avec les notations précédentes, soit X une fonction continue d'un intervalle J inclus dans I et contenant t_0, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Alors, X est solution sur J du problème de Cauchy (C) si et seulement si elle vérifie*

$$(C') : \quad \forall t \in J \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t A(u)X(u)\,du + \int_{t_0}^t B(u)\,du.$$

Théorème I.2 (de Cauchy-Lipschitz, cas linéaire)**.** *Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. Alors, pour tout choix de t_0 dans I et de X_0 dans $\mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy*

$$(C) \quad \begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution X sur l'intervalle I ; de plus, toute solution sur un intervalle J contenant t_0 et inclus dans I est en fait la restriction à J de cette solution X.

I.3. Système linéaire homogène

Définition. *Un système différentiel est dit **homogène** s'il est de la forme $X' = A(t)X$. Si $(\Sigma) : X' = A(t)X + B(t)$ est un système différentiel quelconque, le système $(\Sigma_0) : X' = A(t)X$ est appelé **système homogène associé** à (Σ).*

Proposition I.3. *Soit A une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'ensemble S_0 des solutions sur I du système homogène (Σ_0) : $X' = A(t)X$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Théorème I.4. *Soit A une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; soit S_0 l'ensemble des solutions sur I du système homogène $(\Sigma_0) : X' = A(t)X$. Alors, pour tout t_0 dans I, l'application $\Phi : X \mapsto X(t_0)$ réalise un isomorphisme de S_0 dans $\mathbb{K}^n$; S_0 est donc un espace vectoriel de dimension n.*

I.4. Système complet

Proposition I.5. *Soient A une fonction continue d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B_1 et B_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}^n$. Si X_1 est une solution sur I du système $(\Sigma_1) : X' = A(t)X + B_1(t)$ et X_2 est une solution sur I du système $(\Sigma_2) : X' = A(t)X + B_2(t)$, et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est solution sur I du système $X' = A(t)X + \big(\lambda B_1(t) + \mu B_2(t)\big)$.*

Corollaire I.6. *Soit A et B deux fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. Si X_0 est une solution sur I du système (Σ) : $X' = A(t)X + B(t)$, alors les solutions de (Σ) sur I sont exactement les fonctions de la forme $X_0 + Y$, où Y est une solution sur I du système homogène (Σ_0) associé à (Σ).*

Corollaire I.7. *Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble S des solutions sur I du système (Σ) est un sous-espace affine de l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}^n$, dont la direction est l'espace vectoriel S_0 des solutions du système homogène associé.*

II. Équation linéaire scalaire d'ordre 1 et 2

II.1. Équation d'ordre 1

Proposition II.1. *Soit a une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continues sur I. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est une droite vectorielle ; elle est engendrée par la fonction $t \longmapsto e^{-A(t)}$ où A est une primitive quelconque de a sur I.*

Théorème II.2. *Soient a et b deux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continues sur I. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors, le problème de Cauchy $y' + a(t)y = b(t)$, $y(t_0) = y_0$ admet une et une seule solution sur I ; cette solution f est donnée par*

$$\forall t \in I \quad f(t) = e^{-A(t)}\Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)} b(u)\, du\Big)$$

où A est la primitive de a qui s'annule en t_0.

II.2. Traduction d'une équation d'ordre n

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n toute équation de la forme

$$(E) : \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

dans laquelle les a_i et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit y une solution de (E) sur un intervalle J inclus dans I. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pose $x_k = y^{(k-1)}$; on a en particulier $x_1 = y$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& x_2 \\ x_2' &=& x_3 \\ & \cdots & \\ x_{n-1}' &=& x_n \\ x_n' &=& a_{n-1}x_n + \cdots + a_1 x_2 + a_0 x_1 + b \end{array}\right.$$

Autrement dit, la fonction X, de J dans l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, dont les composantes sont les fonctions x_i, est solution du système $(\Sigma) : X' = A(t)X + B(t)$, dans lequel les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont définies, pour tout t de I, par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si X est une solution du système (Σ), on vérifie immédiatement que la première fonction composante x_1 de X est solution de l'équation (E). Il est donc équivalent de résoudre l'équation (E) scalaire d'ordre n et de résoudre le système (Σ) d'ordre 1, à n inconnues.

De plus, (E) est homogène si et seulement si (Σ) l'est ; dans ce cas, l'application $X \longmapsto x_1$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre leurs espaces de solutions.

II.3. Équation d'ordre 2

II.3.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème II.3. *Soient a, b et c des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continues sur I. Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$. Alors, le problème de Cauchy*

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

admet une et une seule solution sur I.

II.3.2. Équation homogène

Soient a et b des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continues sur I. On étudie l'équation homogène $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Proposition II.4. *L'ensemble S_0 des solutions sur I de (E_0) est un plan vectoriel.*

Définition. *Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de (E_0), on appelle **wronskien** du couple (y_1, y_2), la fonction* $w = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Proposition II.5. *Soit (y_1, y_2) un couple de solutions de (E_0) sur I, et w leur wronskien. Alors :*

- ▷ *soit (y_1, y_2) est liée, et dans ce cas* $\forall t \in I \quad w(t) = 0$ *;*
- ▷ *soit (y_1, y_2) est libre (et donc est une base de l'espace des solutions), et dans ce cas* $\forall t \in I \quad w(t) \neq 0$.

II.3.3. Variation des constantes

Soient a, b et c trois fonctions de I dans $\mathbb{K}$, continues sur I. On étudie l'équation $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et l'équation homogène associée $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Théorème II.6. *Soit (y_1, y_2) une base de l'espace S_0 des solutions de l'équation homogène (E_0). Pour toute solution y de l'équation complète (E), il existe deux fonctions λ et μ de classe C^1 sur I, vérifiant le système*

$$\begin{cases} \lambda y_1 + \mu y_2 = y \\ \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \end{cases}$$

Proposition II.7. *Si y_0 est une solution de l'équation homogène (E_0) qui ne s'annule pas sur un intervalle $J \subset I$, on peut chercher les solutions de l'équation complète (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où λ est une fonction de classe C^1 sur J.*

III. Système à coefficients constants

III.1. Système homogène

Proposition III.1. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(t_0) = X_0$ est la fonction $t \longmapsto e^{(t-t_0)A} X_0$.*

Corollaire III.2. *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.*

- *Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.*
- *La matrice e^A est inversible, d'inverse e^{-A}.*

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, alors $e^{(t+u)A} = e^{tA} e^{uA}$.

III.2. Cas diagonalisable

Proposition III.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, et si V est une colonne vérifiant $AV = \lambda V$, alors $t \longmapsto e^{\lambda t} V$ est une solution sur $\mathbb{R}$ du système $X' = AX$.*

Proposition III.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable, et si $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de colonnes propres associées respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors les fonctions $X_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t} V_i$ où i décrit $[\![1, n]\!]$, forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.*

III.3. Cas trigonalisable

Proposition III.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient P une matrice inversible et T une matrice triangulaire telles que $P^{-1}AP = T$. Une fonction $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de classe C^1 est solution du système $X' = AX$, si et seulement si la fonction $Y : t \longmapsto P^{-1}X(t)$ est solution du système $Y' = TY$.*