

CONCOURS BLANC DE PHYSIQUE

MP* 2022-2023

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

✓ Ce devoir comporte trois problèmes indépendants :

- Problème 1 (Mines PSI 2022) : Fourier dans tous ses états
- Problème 2 (Banque PT 2021) : Gaz Naturel Liquéfié
- Problème 3 (Centrale II MP 2021) : La spectrométrie ICP-AES

Consignes à respecter :

Le candidat devra composer à l'encre bleue foncée ou noire non effaçable.

Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple). Pas de stylo plume ni de stylos «friction». Le candidat pourra réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, en utilisant des couleurs, sauf le vert et le turquoise. Il est également possible d'utiliser des feutres ou des surligneurs.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 : Fourier dans tous ses états(Mines PSI 2022)

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 3 parties largement indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie aborde le filtrage acoustique à travers l'étude de la transmission d'une onde sonore par une paroi mobile. La troisième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau \hat{e} , ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

- Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

I Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

- – 1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$.

On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \frac{1}{T_e}$.

- – 2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

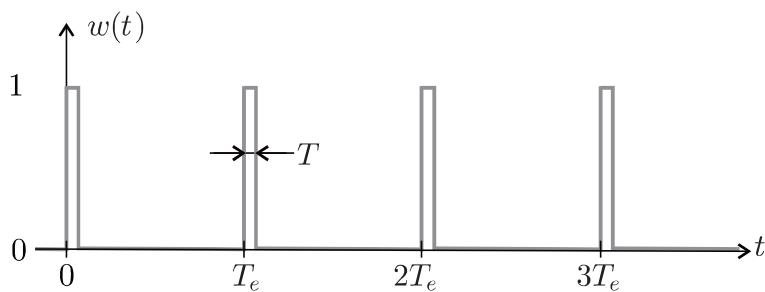


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

- – 3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

- – 4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».
- – 5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

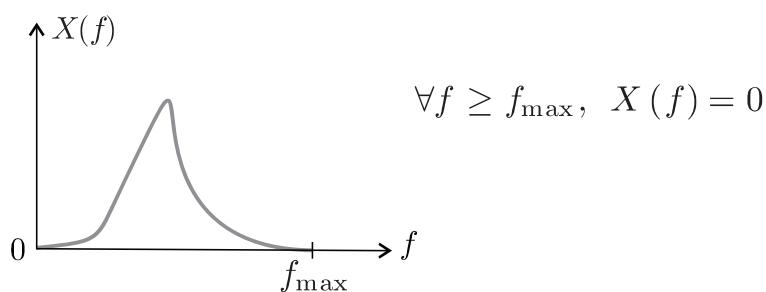


FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

- – 6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.
- – 7. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44,1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

II Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- – 8** Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

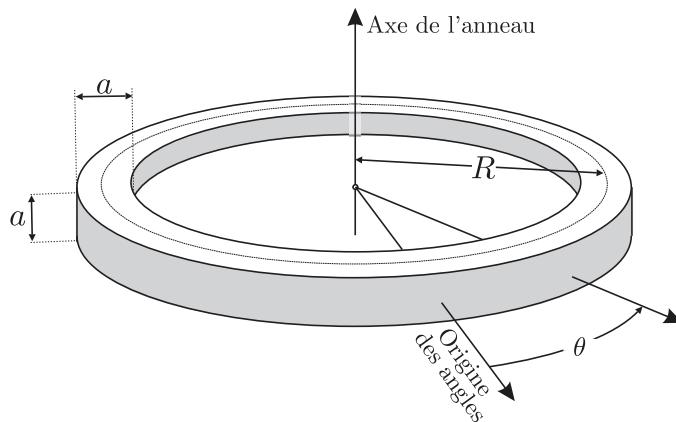


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta,t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta,t) - T_e)dS,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z.$$

- – 9 Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- – 10. Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- – 11. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .
- – 12. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{\text{th}}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

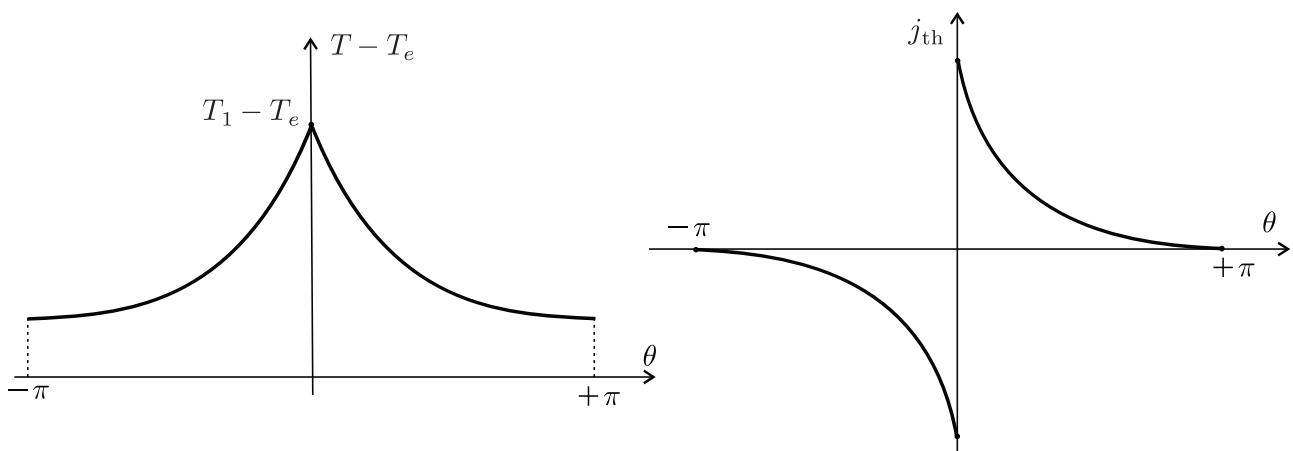


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique superficiel à droite.

- – 13. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale

de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta,t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$ par symétrie.

- – 14. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta,t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta,t) = f_n(\theta) g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta,t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta,t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}.$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

- – 15. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta,t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta,t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta,t).$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

- – 16. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta,t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

Problème 2 : Gaz Naturel Liquéfié (Banque PT 2021)

Le gaz naturel est principalement formé de méthane (dans toute la suite, on considérera que c'est du méthane pur). Son transport sous forme liquide (noté GNL dans la suite) dans les cuves de navires méthaniers, vers les pays consommateurs éloignés des gisements, est une bonne alternative aux gazoducs.

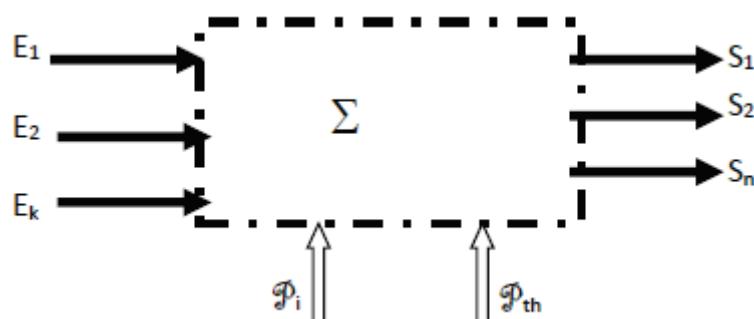


Dans la partie B, on examine une installation de liquéfaction.

Dans la partie C, on regarde la faisabilité thermique du stockage de méthane liquide dans des cuves sphériques.

Rappel :

Un système thermodynamique ouvert, délimité par une surface de contrôle Σ , fonctionne en régime permanent en échangeant avec l'extérieur la puissance indiquée (ou utile) \mathcal{P}_i et la puissance thermique \mathcal{P}_{th} .

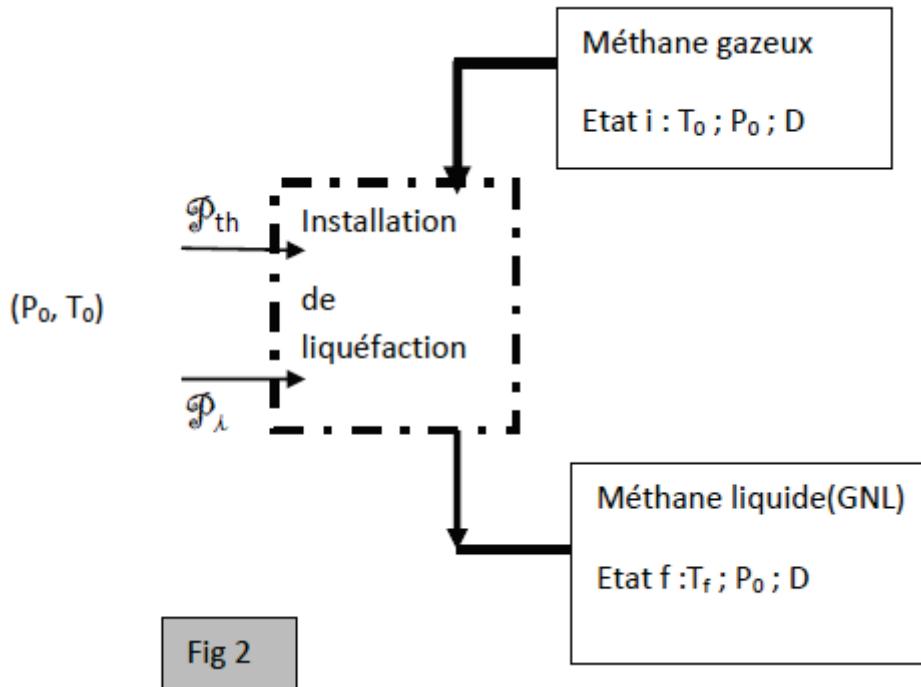


Un fluide entre dans Σ par k entrées (E_1, E_2, \dots, E_k) avec les débits massiques respectifs $D_{E1}, D_{E2}, \dots, D_{Ek}$ et sort de Σ par n sorties (S_1, S_2, \dots, S_n) avec les débits massiques respectifs $D_{S1}, D_{S2}, \dots, D_{Sn}$. Le premier principe (appelé par la suite 1^{er} principe industriel) s'écrit alors, en négligeant les termes liés à la position et à la vitesse du fluide : $\sum_{i=1}^n D_{Si} \cdot h_{Si} - \sum_{j=1}^k D_{Ej} \cdot h_{Ej} = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th}$

h_{Ej} et h_{Si} étant des enthalpies massiques.

Partie A : Taux de Performance (TP) d'une installation de liquéfaction.

Une installation de liquéfaction reçoit du méthane gazeux à la pression atmosphérique (état initial i ; température T_o ; pression P_o) et produit du méthane liquide juste saturé (GNL ; état f ; température T_f ; pression P_o), en échangeant avec l'extérieur (à la température T_o et à la pression P_o) la puissance mécanique utile \mathcal{P}_i et la puissance thermique \mathcal{P}_{th} , avec un débit massique D.



Les grandeurs massiques.

Le tableau ci-dessous (tableau I) relatif au méthane, donne les caractéristiques des points i, f et 10.

Tableau I méthane	Point N°	T (°C)	P (bar)	Enthalpie massique (kJ.kg ⁻¹)	Entropie massique (kJ.K ⁻¹ .kg ⁻¹)
Etat i (gazeux sec)	i	$T_o = 25$	1	$h_i = 0$	$s_i = 0$
Etat f (liquide juste saturé)	f	$T_f = -162$	1	$h_f = -911$	s_f
Etat v (vapeur sèche saturante)	10	$T_f = -162$	1	$h_{10} = -400$	$s_{10} = -2,1$

- 1) La valeur de s_f n'est pas facile à lire sur le diagramme P/h de la feuille réponse. Placer les points i, f et 10 sur ce diagramme et donner l'expression littérale permettant le calcul de s_f à partir des données du tableau I ci-dessus.

Taux de performance TP d'une installation de liquéfaction.

Les données sont : P_o ; T_o ; D ; h_i ; h_f ; s_i ; s_f . $[P_o = 10^5 \text{ Pa} ; T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C} (298 \text{ K}) ; D = 10 \text{ g.s}^{-1}]$.

- 2) Ecrire littéralement le premier principe industriel appliqué à l'installation, en fonction de \mathcal{P}_i , \mathcal{P}_{th} et des données, en négligeant les termes liés à la position et à la vitesse du fluide.

- 3) Ecrire littéralement le deuxième principe appliqué à l'installation, en fonction de ϑ_{th} et des données, en tenant compte d'un terme de création massique d'entropie s_c (vérifier l'homogénéité de la relation en précisant l'unité de s_c).
- 4) En déduire l'expression de la puissance ϑ_i en fonction de s_c et des données.
- 5) Les états i et f étant fixés, montrer qu'il existe une puissance utile minimale ϑ_{min} nécessaire à la liquéfaction d'un débit massique D de méthane et la déterminer littéralement [numériquement : $\vartheta_{min} = 10,6 \text{ kW}$].

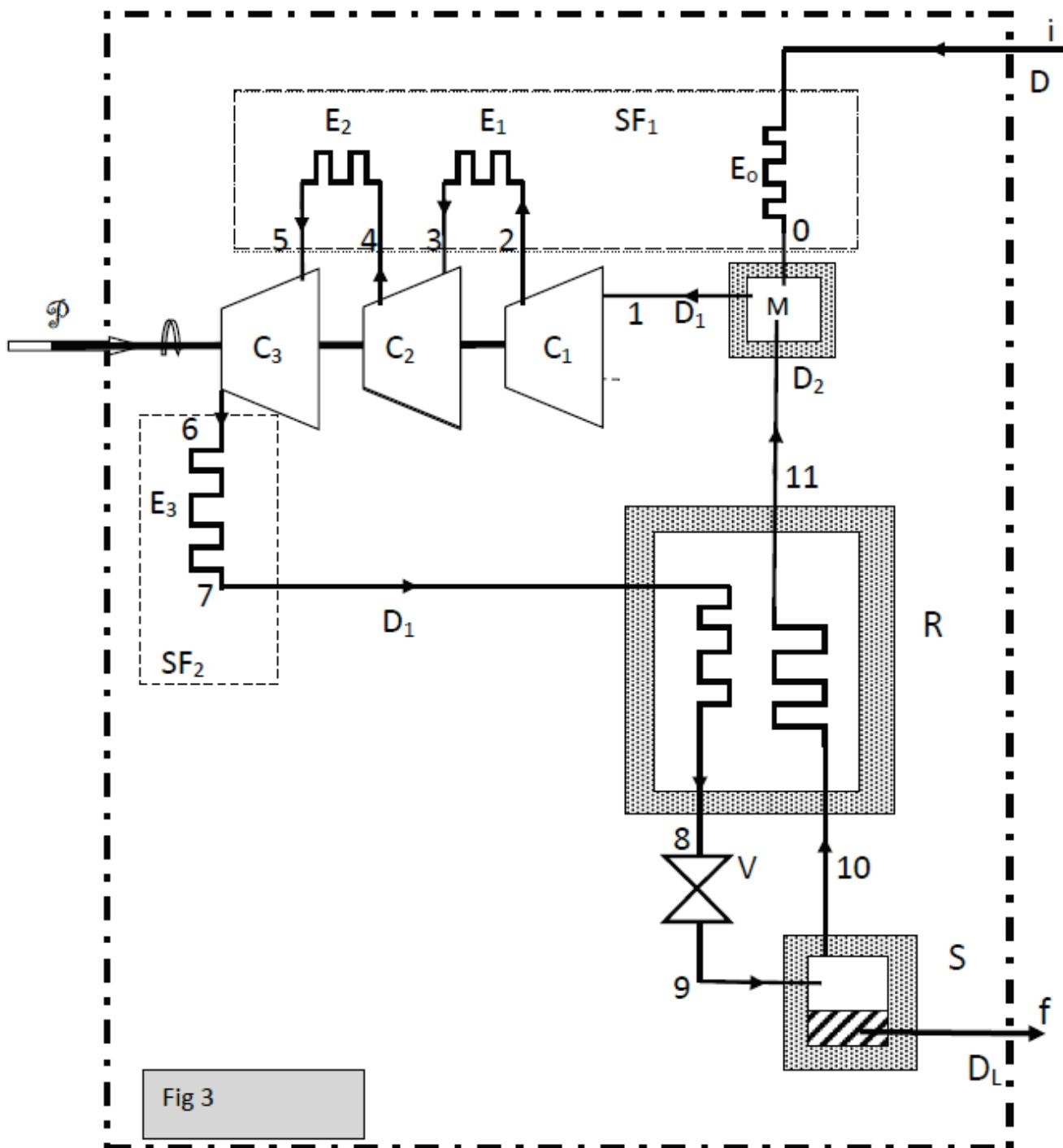
- 6) On définit le taux de performance TP d'une installation de liquéfaction par : $TP = \frac{\vartheta_{min}}{\vartheta_i}$. En respectant le domaine de définitions des grandeurs, représenter graphiquement TP puis ϑ_i en fonction de s_c ; commenter.

Partie B : cycle de LINDE.

L'installation comprend (Fig 3) :

- Un échangeur E_0 qui amène le méthane gazeux de l'état i à l'état 0 à la température $T(0) = 7 \text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Un ensemble de 3 compresseurs couplés au même arbre permettant d'augmenter progressivement la pression jusqu'à la pression de 100 bars (au point 6); les paliers intermédiaires de pression sont de 5 bars puis 25 bars.
- Les échangeurs E_0 , E_1 et E_2 échangent de la chaleur avec la source froide SF_1 d'un réfrigérateur ditherme REF_1 (SF_1 est représenté par ----- sur la figure 3; le réfrigérateur n'est pas représenté sur la figure 3). La température du méthane en sortie de chacun de ces échangeurs est celle de la source froide SF_1 : $T(0) = 7 \text{ }^{\circ}\text{C}$.
- L'échangeur E_3 échange de la chaleur avec la source froide SF_2 d'un deuxième réfrigérateur REF_2 et permet l'abaissement de température du fluide « haute pression ». Cet abaissement se termine dans l'échangeur R.
- La vanne de détente V abaisse la pression à 1 bar et permet la liquéfaction partielle du méthane : la fraction massique de gaz en sortie de V est x_g .
- Le séparateur S contient un mélange de méthane diphasé (de fraction massique de gaz x_g) à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$.
- La partie gazeuse est reprise de S pour alimenter R avec un débit massique D_2 .
- La partie liquide est soutirée de S avec un débit massique D_L (point f).
- **L'installation, fonctionnant en régime permanent, est calibrée pour obtenir $x_g = 0,6$.**
Le tableau ci-dessous résume les renseignements utiles.

point	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	f
T (°C)	25	7	-43		7		7		-63			-162		-162
P (bar)	1	1	1	5	5	25	25	100	100	100	1	1	1	1
état	gaz											gaz		L



- On mène l'étude de l'installation avec les hypothèses suivantes :
 - Les fluides circulent sans perte de charge dans des tuyaux supposés parfaitement calorifugés.
 - Dans les bilans énergétiques, les termes liés à la position et à la vitesse des fluides seront négligés.
 - Les éléments R , V , M et S sont parfaitement isolés thermiquement et sans parties mobiles.
 - Les compresseurs sont idéaux : ils sont parfaitement isolés thermiquement, les rendements de leurs moteurs sont égaux à 1 et les compressions se font sans irréversibilité.

B-I) Tracé du cycle.

- 7) Préciser, en justifiant, les caractéristiques thermodynamiques des transformations ayant lieu dans :
- les compresseurs.

b) la vanne de détente V.

c) les éléments M, S et R.

On demande ici de justifier les caractéristiques thermodynamiques de transformation par les termes : isobare, isotherme, isenthalpique, isentropique.

8) Déterminer littéralement l'enthalpie massique h_9 en fonction de x_g , h_{10} et h_f . Calculer numériquement h_9 ($x_g = 0,6$; $h_{10} = -400 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_f = -911 \text{ kJ.kg}^{-1}$).

9) Porter les différents points du cycle (sauf le point 11) sur le diagramme P/h de la feuille réponse et compléter le tableau d'état de la feuille réponse (à joindre à la copie).

10) Déterminer l'enthalpie massique de vaporisation L_v du méthane sous $P_o = 1 \text{ bar}$: littéralement en fonction des enthalpies massiques utiles, puis numériquement.

B-II) Bilans en régime permanent.

Dans toutes les questions demandant des expressions littérales en fonction des grandeurs massiques, il n'est pas demandé de lire ces valeurs sur le diagramme (sauf à la question 16).

Le tableau ci-dessous fixe les notations des débits massiques :

Fluide	Méthane gazeux introduit	Méthane gazeux prélevé en S	Méthane gazeux injecté dans les compresseurs	Méthane liquide prélevé en S
Débit massique	D	D_2	D_1	D_L

11) Etablir le bilan massique de M et S. En déduire le lien entre D_L et D.

12) A partir d'un bilan énergétique de S, démontrer que, **dans le cas où S est parfaitement isolé thermiquement**, $x_g = \frac{D_2}{D_1}$.

13) En déduire, en fonction de D et x_g , les expressions littérales de D_1 et D_2 . Calculer numériquement D_1 et D_2 avec $D = 10 \text{ g.s}^{-1}$ et $x_g = 0,6$.

14) Déterminer **littéralement** (en fonction des enthalpies et débits massiques utiles) la puissance \mathcal{P} à fournir à l'ensemble des 3 compresseurs pour produire un débit $D_L = 10 \text{ g.s}^{-1}$ de méthane liquide (on trouve $\mathcal{P} = 19,2 \text{ kW}$).

Calcul du point 11.

15) Déterminer littéralement l'enthalpie massique h_{11} au point 11, en fonction de h_0 , h_1 et x_g .

16)

- Lire sur le diagramme les valeurs de h_0 et h_1 puis faire le calcul numérique de h_{11} .
- Positionner le point 11 sur le diagramme P/h de la feuille réponse (à joindre à la copie) et compléter le tableau d'état ci-dessous (à reproduire sur la copie).

Pression P_{11}	Température T_{11}	Enthalpie massique h_{11}	Etat

Problème 3 : La spectrométrie ICP-AES (Centrale II MP 2021)

Cette partie s'intéresse à quelques aspects de la spectrométrie ICP-AES, acronyme de *Inductively Coupled Plasma - Atomic Emission Spectrometry* (plasma à couplage inductif - spectrométrie d'émission atomique). Il s'agit d'une technique d'analyse de grande précision permettant la mesure de la nature et de la concentration des éléments qui se trouvent dans les matières solides, les liquides ou les gaz. On peut notamment déterminer grâce à celle-ci l'abondance des métaux lourds dans l'eau du circuit primaire d'une centrale nucléaire ou encore contrôler l'efficacité des résines échangeuses d'ions.

Un spectromètre ICP-AES utilise une torche à plasma (figure 7). À la base de la torche sont introduits de l'argon, ainsi que l'échantillon à analyser à l'état d'aérosol (microgouttelettes d'un diamètre maximum de l'ordre de 100 µm). Le plasma est initié par l'envoi d'une décharge électrique et doit ensuite être entretenu à l'aide d'un bobinage qui crée un champ magnétique variable à haute fréquence.

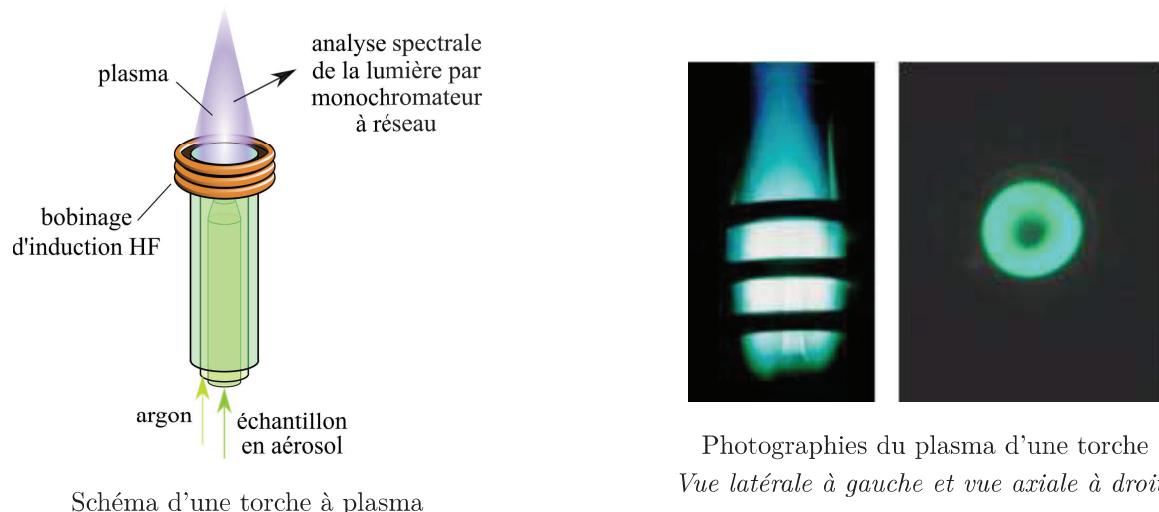


Figure 7

Dans le plasma, à plusieurs milliers de kelvins, l'échantillon est vaporisé, désolvaté, atomisé voire ionisé. Les atomes sont ionisés si leur énergie d'ionisation est inférieure à celle de l'argon, ce qui est le cas de la plupart des éléments chimiques.

Chaque atome ou ion excité émet plusieurs photons (rayonnement lumineux) à des longueurs d'onde qui lui sont propres lors de son retour à l'état fondamental. La lumière est envoyée vers un monochromateur à réseau dont la résolution spectrale en longueur d'onde est très élevée, voisine de 20 pm. Les signaux lumineux sont mesurés par un capteur qui permet l'analyse de longueurs d'onde allant de 166 à 847 nm, l'intensité des pics émis étant fonction de la concentration de l'échantillon initial.

Nous allons dans un premier temps étudier un modèle simple de la partie optique du dispositif. Ensuite, nous nous intéresserons aux effets du champ magnétique variable sur le plasma.

A – Spectroscopie et résolution

A.1) Interférences à deux ondes

On considère le dispositif de la figure 8. Une pupille dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est percée de deux trous d'Young identiques espacés de la distance a . Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (dans l'air, assimilé au vide) éclaire cette pupille en incidence normale. On observe la figure obtenue dans le plan focal image d'une lentille de centre optique O et d'axe optique (Oz). On repère un point M de l'écran recevant les ondes issues des deux trous par ses coordonnées cartésiennes (x, y, f') .

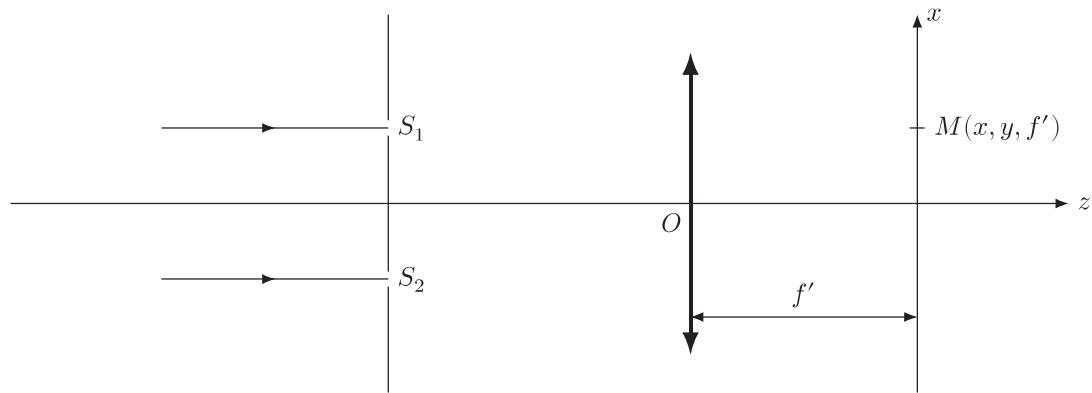


Figure 8

Q 1 . Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a , x et f' , en faisant les approximations jugées utiles.

Q 2 . Établir l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$. Décrire la figure que l'on observe sur l'écran.

Q 3 . Calculer numériquement l'interfrange pour $a = 100 \mu\text{m}$, $f' = 20 \text{ cm}$ et $\lambda = 499,3 \text{ nm}$ (longueur d'onde associée à une raie du nickel présent dans un échantillon).

Q 4 . La résolution d'un spectromètre est le plus petit écart entre deux longueurs d'onde que l'on peut séparer. Expliquer pourquoi le dispositif précédent à deux trous d'Young ne peut permettre d'atteindre la résolution voisine de 20 pm d'un spectromètre ICP-AES.

A.2) Interférences à N ondes

On considère à présent un réseau constitué de N ouvertures identiques ($N > 2$), distantes de a suivant l'axe parallèle à (Ox) . Ces N ouvertures sont éclairées par une onde plane progressive monochromatique en incidence normale de longueur d'onde λ . Sur la figure 9, l'angle θ , orienté selon le sens trigonométrique, indique une direction des interférences à l'infini à N ondes.

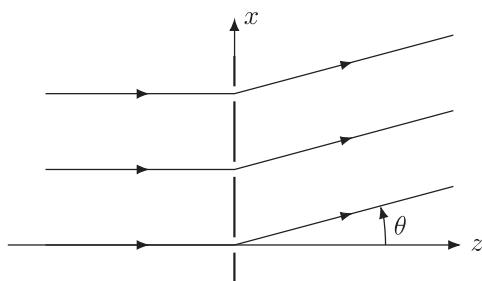


Figure 9

Q 5 . Expliciter le déphasage φ entre deux ondes issues de trous successifs en fonction de λ , a et θ .

Q 6 . Justifier qu'on observe un maximum d'intensité si on a $\varphi = 2p\pi$ avec p un entier relatif accessible. Comment appelle-t-on l'entier p ? Exprimer l'angle θ_1 correspondant au pic $p = 1$.

Q 7 . Le réseau utilisé dans certains spectromètres ICP-AES comporte 1800 ouvertures par millimètre. Calculer numériquement θ_1 pour $\lambda = 499,3 \text{ nm}$. Pourquoi n'est-il plus envisageable d'utiliser le dispositif de projection (lentille et écran) décrit en III.A.1 ?

Q 8 . Établir que la demi-largeur d'un pic d'intensité lumineuse est donnée par $\Delta\varphi = 2\pi/N$ et en déduire la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic observé dans la direction θ_1 . Évaluer numériquement $\Delta\theta$, sachant que les N ouvertures éclairées du réseau occupent une largeur $\ell = 5 \text{ cm}$.

Q 9 . On considère que la source émet une deuxième longueur d'onde λ' très proche de λ . On note θ'_1 l'angle d'observation du premier pic ($p = 1$) correspondant à la longueur d'onde λ' . On admet que l'on peut séparer les deux pics seulement si $|\theta'_1 - \theta_1| \geq \Delta\theta$. Obtenir l'expression de la résolution du dispositif en fonction des grandeurs utiles λ , N et a .

Q 10 . Évaluer numériquement la résolution du réseau utilisé. Proposer des raisons visant à expliquer la différence entre cette valeur et celle, voisine de 20 pm, d'un spectromètre ICP-AES.

B – Interaction champs – plasma dans la torche

L'étude analytique du plasma de la torche de la figure 7 est complexe en raison notamment de la géométrie cylindrique du dispositif, de la forme du bobinage d'induction haute fréquence, de l'écoulement du gaz, des effets thermiques... On va néanmoins chercher à dégager quelques aspects physiques à l'aide d'une approche simplifiée en géométrie unidimensionnelle cartésienne.

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante.

Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 10). On néglige les effets de bords selon les directions y et z .

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique. Cette hypothèse permet d'écrire les équations de Maxwell sous la forme approchée suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Q 11 . Donner, sans démonstration, l'expression, sous forme intégrale, des quatre équations de Maxwell écrites ci-dessus dans une formulation locale.

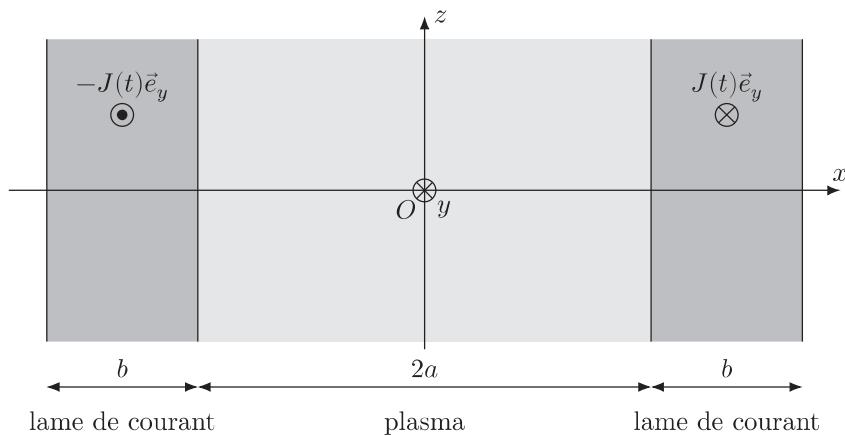


Figure 10

B.1) Champ magnétique produit par les lames

Q 12 . Déterminer, en explicitant soigneusement l'argumentation, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma).

Q 13 . En déduire le champ magnétique produit dans tout l'espace par l'ensemble des deux lames, sans tenir compte du plasma. Représenter en fonction de x , pour une valeur donnée de $J(t)$ non nulle, le profil de ce champ magnétique.

B.2) Propriétés dans le plasma

Q 14 . Expliquer qualitativement pourquoi il peut exister dans le plasma un champ électrique dû aux courants dans les lames. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{E}(x, t) = E(x, t)\vec{e}_y$ et justifier que $E(x, t)$ est une fonction impaire de la variable x .

Q 15 . Le champ magnétique qui règne dans le plasma ne correspond pas à celui produit par les lames calculé précédemment. Expliquer qualitativement pourquoi. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{B}(x, t) = B(x, t)\vec{e}_z$ et justifier que $B(x, t)$ est une fonction paire de la variable x .

Q 16 . Le vecteur densité de courant électrique dans le plasma s'écrit $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{e}_y$. Expliciter, d'une part, l'équation aux dérivées partielles reliant $E(x, t)$ et $B(x, t)$ et, d'autre part, celle reliant $B(x, t)$ et $j(x, t)$.

À ce stade, il manque une loi de réponse du plasma (c'est-à-dire une relation liant $\vec{j}(x, t)$ et $\vec{E}(x, t)$) afin d'accéder aux profils des divers champs en son sein.

Données

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Extrait du tableau périodique (masses molaires en g·mol⁻¹)

Numéro atomique	1	8	11	94
Symbol	H	O	Na	Pu
Masse molaire	1,01	16,0	23,0	244

Formulaire

- On note i l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.
- Pour deux grandeurs $a(M, t)$ et $b(M, t)$ variant sinusoïdalement en fonction du temps avec une pulsation commune ω , on pose

$$a(M, t) = \operatorname{Re}[\underline{a}(M, t)] = \operatorname{Re}[\underline{a}_0(M)e^{i\omega t}] \quad \text{et} \quad b(M, t) = \operatorname{Re}[\underline{b}(M, t)] = \operatorname{Re}[\underline{b}_0(M)e^{i\omega t}]$$

La moyenne temporelle du produit de $a(M, t)$ et $b(M, t)$ est

$$\langle a b \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\underline{a} \underline{b}^*] \quad \text{où } \underline{b}^* \text{ désigne le complexe conjugué de } \underline{b}.$$

- Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique à variable \underline{z} complexe sont définies par

$$\cosh(\underline{z}) = \frac{\exp(\underline{z}) + \exp(-\underline{z})}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(\underline{z}) = \frac{\exp(\underline{z}) - \exp(-\underline{z})}{2}$$

• • • FIN • • •
