Devoir du 19/09/2020

Exercice 1 :

1. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ "$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$".

   Initialisation : comme $u_0 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$, $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

   Par définition, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ donc, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

   donc $P(n+1)$ est vérifiée.

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}.}$

2. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n!$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ "$v_n = n!$".

   Initialisation : Comme $v_0 = 1 = 0!$ et $v_1 = 1 = 1!$, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.

   Par définition, on a $v_{n+2} = (n+1)\left(V_n + V_{n+1}\right)$ donc, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$v_{n+2} = (n+1)\left(n! + (n+1)!\right)(n+1)\,n!\,(1+n+1) = (n+2)!$$

   donc $P(n+2)$ est vérifiée.

   Ainsi, par récurrence double, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n!.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ "$w_n \geq 2^{n-1}$".

   Initialisation : Comme $w_0 = 1 \geq 2^{-1}$, $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ soient vraies.

   Par définition, on a $w_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k w_{n-k}$ donc, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$v_{n+2} \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}2^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-2} = (n+1)2^{n-2}.$$

   Or, $(n+1)2^{n-2} \geq 2^n \Leftrightarrow (n+1) \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 3$.

   Ainsi, on a prouvé que $\forall n \geq 3,\ (P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

   Il suffit de vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies pour pouvoir conclure.

   Comme $w_1 = 1 \geq 2^0$, $w_2 = 2 \geq 2^1$ et $w_3 = 5 \geq 2^2$, on a, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq 2^{n-1}.}$$

Exercice 2 :

1. Supposons $P_0 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))$ et montrons par récurrence forte que l'on a $P(n)$ pour tout entier n.

   Initialisation : Par hypothèse $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ soient vraies. Distinguons deux cas.

   • Si $n+1$ est impair, alors il est égal à $2p+1$ avec $p = \dfrac{n}{2}$. Comme $\dfrac{n}{2} \leq n$, $P(n/2)$ est vraie donc on a $P(n+1)$.

   • Si $n+1$ est pair, alors il est égal à $2p$ avec $p = \dfrac{n+1}{2}$. Or $\dfrac{n+1}{2} \leq n \Leftrightarrow n \geq 1$.

   Donc si $n > 0$, alors $P\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ est vraie donc $P(n+1)$ aussi.

   Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (P(0) \wedge P(1) \wedge ... \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

   Comme $P(0)$ est vraie et implique $P(1)$, on en déduit que, pour tout entier n, $P(n)$ est vraie.

2. Supposons $P_0 \ \wedge\ P_1 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N}^*\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))$.

   L'implication $P_0 \Rightarrow (P_0 \wedge P_1)$ étant alors vraie, on a $\forall n \in \mathbb{N}\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$.

   D'après la question précédent, on a donc $P(n)$ pour tout entier n.

3. L'implication

$$(P_0 \ \wedge\ P_1 \ \wedge\ P_2 \ \wedge\ (\forall n \geq 2,\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

   n'est pas forcément vraie.

   Par exemple, si l'on pose, pour tout entier n, $P(n) =$ "$n \neq 3$", alors P_0, P_1 et P_2 sont vraies et $\forall n \geq 2,\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$ mais on n'a pas $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

4. Supposons $P_1 \ \wedge \ (\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_n \Rightarrow P_{n-1}) \ \wedge \ (\forall n\in\mathbb{N},\ P_n\Rightarrow P_{2n})$ et montrons par récurrence forte que l'on a $P(n)$ pour tout entier n.

   Initialisation : Par hypothèse $P(1)$ est vraie puis $P(0)$ l'est aussi.
   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ soient vraies. Distinguons deux cas.
   • Si $n+1$ est pair, alors il est égal à $2p$ avec $p=\dfrac{n+1}{2}$. Or $\dfrac{n+1}{2}\leq n \Leftrightarrow n\geq 1$.
   Donc si $n>0$, alors $P\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ est vraie donc $P(n+1)$ aussi.
   • Si $n+1$ est impair, alors il est égal à $2p+1$ avec $p=\dfrac{n}{2}$.
   Si $p+1\leq n$, alors on a $P(2p+2)$ et, comme $2p+2\in\mathbb{N}^*$, $P(2p+1)$ est vraie.
   Or, $p+1\leq n \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}+1\leq n\Leftrightarrow n\geq 2$.

   Ainsi, on a $\forall n\geq 2$, $(P(0)\wedge P(1)\wedge ...\wedge P(n)\Rightarrow P(n+1))$.
   Comme $P(1)$ est vraie et implique $P(0)$ et $P(2)$, on en déduit que, pour tout entier n, $P(n)$ est vrai.

Exercice 3 :

1. L'assertion est vraie. En effet, soit $x\in]0,1]$. Posons $y=x/2$. On a $0<x\leq 1$ donc $y\in]0,1]$. De plus, comme $x>0$, $y<x$. Ainsi, $\boxed{\forall x\in]0,1],\ \exists y\in]0,1]\ :\ y<x.}$
   La négation de $\forall x\in]0,1],\ \exists y\in]0,1]\ :\ y<x$ est $\boxed{\exists x\in]0,1],\ \forall y\in]0,1]\ :\ y\geq x}$
2. L'assertion est fausse. En effet, si l'on prend $x=1$, alors $\forall y\in]0,1]$, $y\leq x$.
   La négation de $\forall x\in]0,1],\ \exists y\in]0,1]\ :\ y>x$ est $\boxed{\exists x\in]0,1],\ \forall y\in]0,1]\ :\ y\leq x}$
3. L'assertion est fausse. En effet, si l'on prend $p=0$ et $q=1$, alors $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ et $p<q$ mais il n'existe aucun entier appartenant à $]0,1[$.
   La négation de $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p<q\Rightarrow\exists r\in\mathbb{N}\ :\ p<q<r$ est
   $$\boxed{\exists(p,q)\in\mathbb{N}^2 : (p<q \quad \text{et} \quad \forall r\in\mathbb{N}\ :\ r\leq p \text{ ou } r\geq q)\,.}$$
4. L'assertion est vraie. En effet, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$. Posons $z=\dfrac{x+y}{2}$.
   Comme $x<y$, $2x<x+y<2y$ donc $x<z<y$.
   La négation de $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y\Rightarrow\exists z\in\mathbb{R}\ :\ x<z<y$ est :
   $$\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y \text{ et } \forall z\in\mathbb{R}, z\leq x\ \vee\ y\leq z.$$

Exercice 4 :
On a

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i+\sum_{j=i+1}^{n} j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+\frac{(n-i)(n+i+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i+n(n+1)\right)$$

donc $\boxed{S_1=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{12}\cdot}$

On a $S_2=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}=\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(2j^2+3j+1\right)$ donc

$$S_2=\frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\right)=\boxed{\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}\cdot}$$

On a $S_3=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}2^i\right)=\boxed{3^n.}$

On a

$$S_4=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\left(\binom{n}{i}\binom{i}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}2^j$$

donc $S_4=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}2^j\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i=\boxed{4^n.}$

On a $P=\displaystyle\prod_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{j}2^{i!j}=\prod_{i=0}^{n}\frac{2^{i!(i+1)}-1}{2^{i!}-1}=\prod_{i=0}^{n}\frac{2^{(i+1)!}-1}{2^{i!}-1}=\boxed{2^{(n+1)!}-1.}$

Exercice 5 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. D'après le binôme de Newton, si $n\geq 2$, on a :
   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=1+\binom{n}{1}\times\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k=2+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k.$$
   Comme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\geq 0$, on en déduit que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geqslant 2$.
   Si $n=1$, alors $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2^1=2\geqslant 2$ donc le résultat est vérifié.

Dans tous les cas, on obtient $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.}$

2. – Si $k=0$, alors, $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = 1$ et $\frac{1}{0!} = 1$, on a donc bien le résultat souhaité.
   – Supposons donc $k \geqslant 1$. Alors, puisque $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, et que chacun des k termes $n,\ n-1, \cdots,\ n-k+1$ est inférieur ou égal à n, on a : $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leqslant \frac{n^k}{n^k} \leqslant 1$ et donc le résultat souhaité en découle.

   Ainsi, dans tous les cas, on obtient $\boxed{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!}.}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.
   Puisque $k!$ est le produit des $(k-1)$ facteurs $k(k-1)\times\cdots\times 2$, et que chacun de ces $(k-1)$ facteurs est supérieur ou égal à 2, on a $k! \geqslant 2^{k-1}$, et donc,

$$\boxed{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}.}$$

4. – Si $n=1$, le résultat est immédiat.
   – Si $n \geqslant 2$, alors, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$.

   De plus, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, d'où :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

   Or, comme $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

   Dans tous les cas, on a $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.}$

Exercice 6 :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a,

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \times 1^{n+1-k} = (-1+1)^{n+1} = \boxed{0.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\ &= \frac{n!\times(n+1)}{k\times(k-1)!(n+1-k)!}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\\ &\boxed{= \binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}}\end{aligned}$$

   (c) Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$P(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\text{"}$$

   – Initialisation : On a $\sum_{k=1}^{1}\binom{1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^0}{1} = 1$ et $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
   – Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
     Alors, puisque, pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, on a :

$$S = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

     donc $S = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

     En utilisant ce qui précède, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}.$$

     Or, comme $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = 0$, on en déduit que

$$\frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \frac{-1}{n+1}\left(-1-(-1)^{n+1}\right)$$

     et ainsi, on obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

et donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$P(n) : \text{“} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ .”}$$

– Initialisation : on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{1+0} + \frac{-1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ donc $P(1)$ soit vraie.

– Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. On a

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

et, grâce à l'hypothèse de récurrence, on a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

donc, $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$

3. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}(n-p+1) = (n+1) \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} 1 \\
&= (n+1)H_n - n
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kH_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} \right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{k}{p} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=p}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}(n-p+1)(n+p) = \frac{n(n+1)}{2} H_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} (1-p) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} H_n + \frac{n(1-n)}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe $(h, g) \in L \times N$ tel que $f = h + g$.
Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $h(x) = ax$.
De plus, on a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 ax\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}$.
Ainsi, $a = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et g est définie par $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - ax$.

Synthèse : posons $a = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et considérons les fonctions h et g définies par

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) = ax \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - ax$$

On a clairement $f = h + g$ et $h \in L$. Il reste à prouver que $g \in N$.
On a $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 ax\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a}{2} = 0$ donc $g \in N$.
On a donc prouvé que $\boxed{\exists!(h, g) \in L \times N\ ,\ f = h + g.}$