Exercice : la loi des successions de Laplace

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. L'urne k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On procède à l'expérience suivante :

On choisit une des urne de façon équiprobable.
Ceci fait, on tire successivement des boules boules dans l'urne choisie (toujours la même-.
Pour tout p, on note B_p l'événement [les p premières boules tirées sont blanches].
Enfin note E_k l'événement [l'urne choisie est l'urne numérotée k].

1. Déterminer la probabilité de B_p en fonction de n et p.
2. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(E_k|B_p)$ ainsi que sa limite quand p tend vers l'infini. Expliquer.
3. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B_{p+1}|B_p)$, et sa limite quand n tend vers l'infini.

   Ce modèle a été inventé par Laplace pour calculer la probabilité qu'un événement déja survenu p fois survienne encore une fois, sans connaitre sa probalilité d'apparition (c'est pour cela qu'on fait un premier tirage d'urne. Le fait de faire tendre n vers l'infini consiste à simuler que la probabilité d'apparition de l'événement peut prendre uniformément toutes les valeurs du segment $[0,1]$)

4. En considérant que la terre est vieille d'environ 10 milliards d'années, estimer par cette méthode la probabilité que le soleil se lève demain.

Problème : Lemmes de Borel Cantelli et applications

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
Si $(A_n)_{n>0}$ est une suite d'événements, on note B l'ensemble "une infinité de A_n sont réalisés". B s'appelle la limite supérieure de la suite (A_n).

I. Les deux lemmes

1. Pour tout n on note $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$. Vérifier que

   $$B = \bigcap_{n>0} B_n$$

   et en déduire que B est bien un événement.

2. Dans cette question on suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.
   (a) Majorer $\mathbb{P}(B_n)$ en utilisant l'inégalité de Boole.
   (b) Démontrer que l'événement B est négligeable.

Dans Les deux questions suivantes on suppose que la série $\sum P(A_n)$ est divergente et que les événements (A_n) sont mutuellement indépendants.

3. Etablir l'inégalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(A_i)) \leq \exp(-\sum_{1}^{n}\mathbb{P}(A_i))$
4. En déduire que $\mathbb{P}(\cup_{m\geq 0}A_m) = 1$ puis que l'événement B est presque sur.

Ces deux résultats sont appelés Lemmes de Borel Cantelli. Ils établissent que l'événement B ne peut avoir que 0 ou 1 selon le comportement de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$. Ce résultat important possède de nombreuses applications. Remarquons qu'il est dissymétrique, l'hypothèse d' indépendance des événements est inutile dans le premier cas, et nécessaire dans le second

5. Montrer par un exemple que le second cas du lemme de Borel Cantelli tombe en défaut si l'on ne suppose pas les A_n indépendants.

II. Première application

Dans cette partie, on note $(p_n)_n$ la suite croissante des nombres premiers. on admet que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{p_n}$ est divergente.

On suppose qu'il existe sur $\mathbb{N}*$ une probabilité $\mathbb{P}$ telle que l'ensemble des multiples de n soit de probabilité $\dfrac{1}{n}$ pour tout entier n. Soit p_k le $k$ième nombre premier. Soit A_k le sous ensemble des multiples de p_k.

6. Déterminer explicitement l'événement B et sa probabilité.
7. Démontrer que les événements A_k sont mutuellement indépendants.
8. En déduire une contradiction : qu'a t-on démontré ?

III. Deuxième application.

On se donne une suite $(X_n)_n$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Pour tout n, on note L_n la longueur de la plus grande suite consécutives de 1 parmi les $X_0, \ldots, X_n$:

$$L_n = \sup\{k,\ \exists i \leq n-k+1,\ X_i = \ldots = X_{i+k-1} = 1\}$$

.

9. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a
$$\mathbb{P}(L_n < k) \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{[\frac{n}{k}]}$$
on pourra couper l'intervalle entier $[1, n]$ en sous intervalles de longueur k et un intervalle de longueur inférieure à k
10. Soit ε un réel strictement positif. On note A_n^ε l'événement $[L_n < (1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln 2}]$.

    (a) Soit α_n la partie entière supérieure de $(1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln 2}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^{\alpha_n}}\right)^{\frac{n}{\alpha_n}-1}$.
    On pourra chercher la limite de $n^2 u_n$

    (b) En déduire qu' avec probabilité 1, seul un nombre fini de A_n^ε sont réalisés.

11. Démontrer que pour tout entier k on a
$$\mathbb{P}(L_n \geq k) \leq \frac{n}{2^k}$$

Dans la suite de l'exercice, on garde les mêmes notations et on note $\phi(j) = [j^{\frac{4}{\varepsilon}}]$ et on note E_j l'événement

$$E_j = [L_{\phi(j)} \geq (1 + \frac{\varepsilon}{2})\frac{\ln \phi(j)}{\ln 2}]$$

12. (a) Etudier la nature de la série de terme général $\mathbb{P}(E_j)$.

    (b) Démontrer qu'il existe un entier j_0 tel que pour tout entier $j \geq j_0$ on ait

$$(1+\varepsilon/2)\ln\phi(j) \leq (1+\varepsilon)\ln\phi(j-1)$$

    (c) Montrer que pour tout n, l'ensemble $B_n^{\varepsilon} = [L_n > (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln 2}]$ est inclus dans l'un des E_j

    (d) En déduire que presque sûrement un nombre fini des événement $B_n^{\varepsilon} = [L_n > (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln 2}]$ est réalisé.

13. On définit un événement

$$C = \cap_{p>0}\left(\cup_{m\in\mathbb{N}}(\cap_{n>m}\overline{A_n^{\frac{1}{p}} \cup B_n^{\frac{1}{n}}})\right)$$

    (a) Ecrire l'événement C avec des quantificateurs portant sur la suite de terme général $\dfrac{\ln 2}{\ln n}L_n$.

    (b) En utilisant les questions précédentes, en déduire la probabilité de l'événement

$$\left[L_n \sim \frac{\ln n}{\ln 2} \text{ quand } n \to \infty\right]$$