Résumé 16 – Endomorphismes d'un espace euclidien

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera par la suite un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme

Théorème : Représentation des formes linéaires

Pour toute forme linéaire φ, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a|x\rangle$$

Définition : Adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle$$

On l'appelle adjoint de u et on le note u^*.

Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

De plus, $u \mapsto u^*$ est linéaire et involutive.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors, $F^\perp$ est stable par u^*.

Proposition : Matrice de l'adjoint dans une b.o.n.

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = M^\top$.

Isométries vectorielles

→ Matrices orthogonales

Définition : Matrices orthogonales

On dit que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si $M^\top M = M M^\top = I_n$.

Une matrice orthogonale est inversible, d'inverse $M^\top$ et de déterminant ± 1.

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) et on note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 (groupe spécial orthogonal). $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des groupes.

Théorème : Caractérisation

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ses colonnes forment une famille orthonormale.
- ses lignes forment une famille orthonormale.

Une matrice orthogonale s'interprète comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée. Lorsque les bases de départ et d'arrivée ont même orientation, son déterminant vaut $+1$.

→ Isométries vectorielles

Définition

Soit u un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u conserve la norme : $\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|$

(ii) u conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$$

(iii) $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$

On dit alors que u est une isométrie vectorielle de E (ou un endomorphisme orthogonal).

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme. La composée d'isométries (positives) reste une isométrie (positive) : $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ sont des groupes.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors, $F^\perp$ est stable par u.

Théorème : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- l'image d'une b.o.n. est une b.o.n.
- sa matrice dans une b.o.n. est orthogonale.

$u \in \mathrm{SO}(E)$ ssi l'image d'une b.o.n.d. est une b.o.n.d.

→ Symétries orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, $E = F \oplus F^\perp$.

Définition : Symétries orthogonales

- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Expression analytique d'une réflexion σ par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(a)^\perp$:

$$\forall x \in E, \quad \sigma(x) = x - 2\frac{\langle x|a\rangle}{\|a\|^2}a$$

Théorème : Caractérisation

Une symétrie vectorielle est orthogonale ssi sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

→ Classification des isométries planes

- Les isométries positives du plan sont les rotations.

$$M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Cas particuliers : id_E $(\theta = 0)$, $-\mathrm{id}_E$ $(\theta = \pi)$.

- Les isométries négatives de l'espace sont les réflexions.

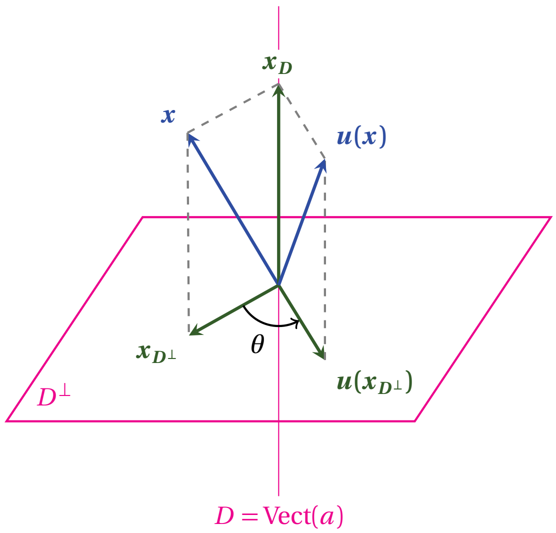
$$M \in O_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

→ Classification des isométries de l'espace

- Les isométries positives de l'espace sont les rotations.
Si $u \in SO(\mathbb{R}^3)$, il existe une b.o.n. $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Cas particuliers : id_E $(\theta = 0)$, demi-tour $(\theta = \pi)$.



Représentation d'une rotation de l'espace

$\operatorname{Tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta)$; $\sin(\theta) = [a, b, u(b)]$ où $\|a\| = \|b\| = 1$, $b \in \operatorname{Vect}(a)^\perp$.

- Les isométries négatives de l'espace sont les composées (commutatives) de rotation et de réflexion.
Si $u \in O^-(\mathbb{R}^3)$, il existe une b.o.n. $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Cas particuliers : réflexion $(\theta = 0)$, $-\mathrm{id}_E$ $(\theta = \pi)$.

→ Réduction des isométries

Théorème : Réduction des isométries

Soit $u \in O(E)$. Alors, il existe une base orthonormale de E telle que la matrice représentative de u est :

$$\operatorname{Mat}(u) = \begin{bmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{bmatrix}$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2r = \dim(E)$,

$$R(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Endomorphismes autoadjoints

Définition : Endomorphisme autoadjoint

On appelle endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) tout endomorphisme u vérifiant $u^* = u$, i.e. :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$$

L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints, ce sont même les seuls projecteurs à l'être.

Proposition

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- pour une/toute b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ de E,

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \langle u(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | u(e_j) \rangle$$

- sa matrice dans une b.o.n. est symétrique.

Théorème : Théorème spectral

Si $u^* = u$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u.

Théorème : Théorème spectral – version matricielle

Toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \quad P^{-1} M P = P^\top M P \text{ diagonale}$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Définition : Endomorphisme autoadjoint positif

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Les trois assertions sont équivalentes :

(i) pour tout $x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle \geqslant 0$

(ii) $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

(iii) il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = v^* \circ v$

On dit alors que u est positif.

Définition : Endomorphisme autoadjoint déf. positif

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Les trois assertions sont équivalentes :

(i) pour tout $x \neq 0_E$, $\langle u(x) | x \rangle > 0$

(ii) $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

(iii) il existe $v \in GL(E)$ tel que $u = v^* \circ v$

On dit alors que u est défini positif.

On note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints (définis) positifs.