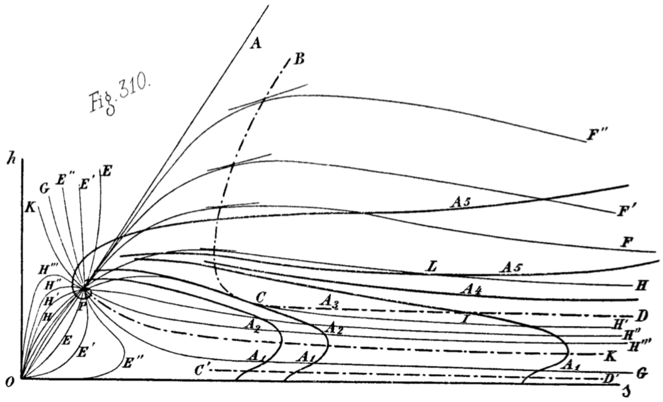
17 | Équations différentielles linéaires

« A mathematician is a device for turning coffee into theorems. »
Alfréd Rényi (1921-1970)

Plan de cours



Lignes de champ issues de la résolution d'un problème hydraulique
Massau – Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications (1878)

I | Résolution des équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

Cette première partie reprend et complète l'étude des équations différentielles menée en première année.

A – Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Commençons par résoudre les équations dites *résolues*, c'est-à-dire qui s'écrivent sur un intervalle I sous la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. On suppose les fonctions a et b continues sur I.

Théorème 17.1

Soit A une primitive de a supposée continue sur l'intervalle I.

- L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_0(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_0 est une solution particulière de l'équation complète.

Démonstration

- *Résolution de l'équation homogène par la méthode du facteur intégrant*
  Soit y une solution sur de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$. Posons alors $\varphi(t) = y(t)e^{-A(t)}$.
  φ est dérivable et $\varphi'(t) = \big(y'(t) - a(t)y(t)\big)e^{-A(t)} = 0$. φ est constante l'intervalle I et donc :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

  Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de l'équation.

- *Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante*
  On recherche les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{A(t)}$. Soit $t_0 \in I$.

$$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) &\iff \lambda'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \\ &\iff \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x + \lambda(t_0) \\ &\iff y(t) = \lambda(t_0)\mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^{t} b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

  y s'écrit bien comme la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (dont on a même donné une forme explicite). ■

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E) \qquad \text{et} \qquad a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (H)$$

On suppose $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues sur l'*intervalle* I de $\mathbb{R}$. On déduit du théorème précédent les deux résultats fondamentaux suivants.

Corollaire 17.2 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est une droite vectorielle ;
- l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) est une droite affine de direction $\mathscr{S}_H$.

Point vocabulaire : on dira « *Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions (de la forme)* $t \mapsto \ldots$ ».

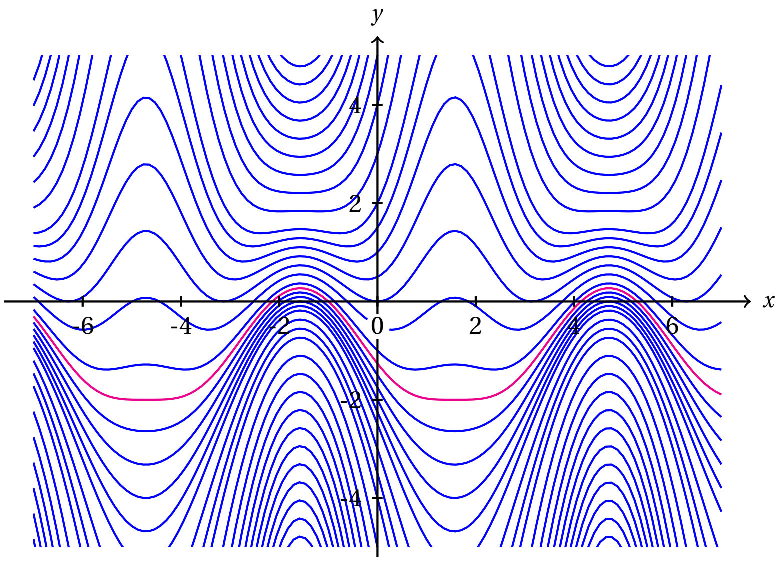
Corollaire 17.3 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

L'interprétation graphique est immédiate : par un point donné, passe une et une seule trajectoire. Autrement dit, les courbes représentatives de deux solutions ne peuvent s'intersecter. Si en revanche, a s'annule, tout est permis !



Représentation de solutions de $y' - \cos(x)y = \sin(2x)$

On notera en particulier que toute solution d'une équation différentielle de la forme $y'(t) + b(t)y(t) = 0$ qui s'annule une fois sur un intervalle donné y est « automatiquement » entièrement nulle !

Plan de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

❶ *Identification de l'équation.*

❷ *Mise sous forme résolue (ou normalisée)* en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
Ex. : $t\,y' - t^2 y + \sin t = 0$. On résoudra l'équation $y' - t\,y + \dfrac{\sin t}{t} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

❸ *Résolution de l'équation homogène : $y' = f(t)y$* avec f continue sur l'intervalle de résolution I.
La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

❹ *Résolution de l'équation avec second membre.*
On recherche pour cela une solution particulière y_p de (E). S'il n'y a pas de solution évidente, on utilisera la méthode de la variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{F(t)}$. En réinjectant y dans l'équation, on obtient une expression de λ' que l'on peut (généralement) primitiver.
La solution générale de l'équation (E) est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{F(t)} + y_p(t)$.
Ex. : Résoudre $y' - x\,y = x$ en cherchant une solution particulière de deux façons différentes.

❺ *Raccordement éventuel des solutions.*
Ex. : $y' + a(x)y = b(x)$ avec y_1 solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $y \mapsto \begin{cases} y_1(x) \text{ si } x < 0 \\ y_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}^*$. Elle est solution sur $\mathbb{R}$ si elle est prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui nous conduit à deux conditions :

$$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)$$

❻ *Utilisation des conditions initiales.*

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $t\,y' + |t|y = t^2\mathrm{e}^{-|t|}$.

- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\mathscr{E}) \iff t\,y' + t\,y = t^2\mathrm{e}^{-t} \iff y' + y = t\,\mathrm{e}^{-t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)\mathrm{e}^{-t}$ où $C_1 \in \mathbb{R}$.

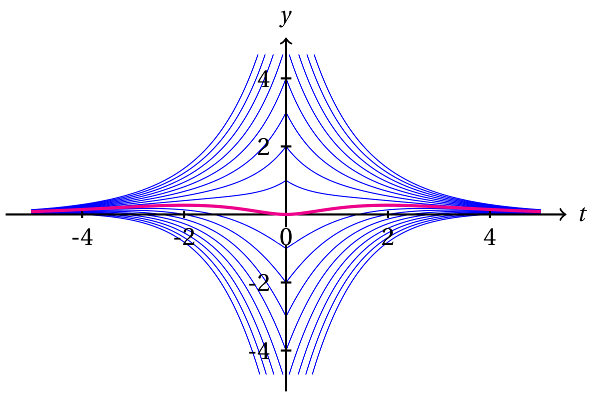
- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$

$$(\mathscr{E}) \iff t\,y' - t\,y = t^2\mathrm{e}^{-t} \iff y' - y = t\,\mathrm{e}^{t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)\mathrm{e}^{t}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

- Recollement des solutions
Supposons que y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E})$. L'application y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}^*,\ y(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1\right)\mathrm{e}^{-t} \text{ si } t > 0 \\ \left(\dfrac{t^2}{2} + C_2\right)\mathrm{e}^{t} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$



Cela donne *a priori* de très nombreuses solutions ! On peut en visualiser certaines sur le graphe ci-contre.

y est dérivable sur $\mathbb{R}_*$ et le sera sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$y(t) \underset{t\to 0}{=} C_1 - C_1 t + \mathrm{o}(t) \underset{t\to 0}{=} C_2 + C_2 t + \mathrm{o}(t)$$

Par unicité du DL, on trouve $C_1 = C_2 = 0$. Il y a donc une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

B – Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

1 – Généralités

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E) \qquad \text{et} \qquad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ continues sur un *intervalle* I. Les résultats suivants sont provisoirement admis.

Théorème 17.4 : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0\ ;\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Théorème 17.5 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un plan vectoriel ;
- l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) est un plan affine de direction $\mathscr{S}_H$.

Le plan de résolution d'une équation linéaire du second ordre ne différera pas de celui du premier ordre.

Proposition 17.6 : Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.

2 – Cas des équations différentielles à coefficients constants

On suppose dans ce paragraphe les fonctions a, b et c constantes, $a \neq 0$. On écrit désormais (E) sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad (E)$$

Théorème 17.7 : Cas de l'équation homogène à coefficients constants

Soient l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ et Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, on note r la racine réelle double. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, on note $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 3y' + 2y = 0\ ; \quad y'' - 2y' + y = 0\ ; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ est obtenu en recherchant une solution particulière de cette équation.

On détermine souvent une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t)=P(t)$ avec $P\in\mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P. Ex. : $y''-2y'+y=t^2$.
- $d(t)=P(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $P\in\mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme $Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $\deg(Q)=\deg(P)+k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t)=\cos(\omega t)$ ou $d(t)=\sin(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent [1].

3 – Cas des équations différentielles à coefficients non constants

Lorsque l'équation n'est pas à coefficients constants, il n'y a pas de méthode de résolution systématique. Voici cependant quelques techniques à connaître. On se laissera guider par l'énoncé dans la plupart des cas.

- **Recherche de solutions à l'aide de séries entières**

Exemple

Résolvons l'équation $(x^2+x)y''+(3x+1)y'+y=0$ en posant $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ puis en dérivant terme à terme la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (inconnu pour le moment).
En injectant dans l'équation,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
\iff&\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
\iff&\sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)a_n+(n+1)na_{n+1}+3na_n+(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=0\\
\iff&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2(a_{n+1}+a_n)x^n=0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient $a_{n+1}=-a_n$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. On trouve alors $a_n=(-1)^na_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_0(-x)^n=\frac{a_0}{1+x}$$

On obtiendra systématiquement des solutions sur un intervalle centré en 0. Toutes les solutions de l'équation n'étant pas nécessairement développables en série entière, il se peut que l'on obtienne qu'une partie des solutions. Dans l'exemple précédent, il y a bien une infinité de solutions mais les solutions développables en série entière ne forment qu'une droite vectorielle.

- **Recherche de solutions de type polynomiales**
  On pourra commencer par rechercher le degré d'une fonction polynomiale éventuellement solution, des conditions sur son coefficient dominant, sur ses racines...

Exemple

Considérons l'équation différentielle $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$ et cherchons une solution polynomiale de la forme $P(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ où $n=\deg(P)$, c'est-à-dire $a_n\neq 0$.
Si $n>0$, le terme dominant de $x(x+1)P''(x)+(x+2)P'(x)-P(x)$ est $(n^2-1)a_nx^n$, donc $n\leqslant 1$. On peut donc poser $P(x)=ax+b$ et en injectant dans l'équation on trouve $b=2a$, c'est-à-dire $P(x)=a(x+2)$.

1. Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $y_p(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$.

- **Factorisation par une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange)**

  Cette technique n'est rien d'autre qu'une adaptation de la méthode de variation de la constante. Si on connaît une solution y_0 de l'équation différentielle, on peut chercher une solution sous la forme $y = y_0 z$. Une telle écriture nous ramène alors à la résolution d'une équation différentielle dont l'ordre est abaissé.

  Exemple

  Reprenons l'exemple de l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$. Posons $y(x) = (x+2)z(x)$.

  $$\begin{aligned} x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0 &\Longleftrightarrow x(x+1)(x+2)z''(x) = -(3x^2+6x+4)z'(x) \\ &\Longleftrightarrow x(x+1)(x+2)Z'(x) = -(3x^2+6x+4)Z(x) \end{aligned}$$

  en notant $Z(x) = z'(x)$. Z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme :

  $$Z'(x) = \left(-\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right) Z(x)$$

  Ainsi, $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2 x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, et donc, $z(x) = B\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}\right) + C$ avec $A, B, C \in \mathbb{R}$.
  Enfin, $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ avec $A'', B \in \mathbb{R}$. On a obtenu l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ (et non $\mathbb{R}^*$).

- **Changements de variable ou d'inconnue** (en principe fournis par l'énoncé)

  Exercice 2

  Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ en posant $t = \ln(x)$.

II | Étude générale des équations différentielles linéaires

A – Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n(t)}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K}^n); \quad A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathscr{F}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K})); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K}^n)$$

On supposera par la suite que les fonctions vectorielles A et B sont continues sur l'intervalle I.

Exemple

$\begin{cases} x' = 3\cos(t)x - y + 2 \\ y' = x + ty - t^2 \end{cases}$ peut s'écrire $X' = AX + B$ avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 3\cos(t) & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t^2 \end{bmatrix}$.

On appelle solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ toute fonction vectorielle $u \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ vérifiant $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ sur l'intervalle I.

On peut écrire le système $X' = AX + B$ sous une forme vectorielle, moins commode que la forme matricielle :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathscr{C}(I, \mathscr{L}(E)) \quad \text{et} \quad b \in \mathscr{C}(I, E)$$

B – Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy

À l'exception de quelques cas particuliers comme les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. section suivante) ou les équations scalaires d'ordre 1 (cf. section précédente), il n'est pas possible de résoudre de manière générale un système en explicitant ses solutions. Ce qui n'empêche nullement d'établir l'existence de telles solutions, leur éventuelle unicité si l'on rajoute des contraintes, et plus généralement leurs propriétés.

Théorème 17.8 : Théorème de Cauchy-Lipschitz (linéaire)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues sur I, alors, le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution.

La démonstration de ce résultat phare est hors programme. Une preuve classique consiste à s'appuyer sur la formulation intégrale du problème :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,\mathrm{d}s$$

et à introduire la suite vectorielle définie sur I par :

$$\forall t \in I, \quad X_0(t) = X_0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X_n(s) + B(s))\,\mathrm{d}s$$

Elle converge vers l'unique point fixe de l'application $T : u \mapsto T(u)$ avec $T(u)(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + B(s))\,\mathrm{d}s$.

Exemple

Si X est une solution de l'équation homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$,

$$\exists t_0 \in I, \quad X(t_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad X(t) = 0$$

Théorème 17.9 : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dim. n ;
- l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $\mathscr{S}_H$.

Démonstration

- *Cas du système homogène*
  La fonction nulle (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) est évidemment solution du système et si X_1 et X_2 sont deux solutions, λ un scalaire, alors $\lambda X_1 + X_2$ est encore solution :
  $$A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda X_1' + X_2' = (\lambda X_1 + X_2)'$$
  L'application $X \mapsto X(t_0)$ établit un isomorphisme entre $\mathscr{S}_H$ et $\mathbb{K}^n$ en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, version linéaire. $\mathscr{S}_H$ est donc un espace vectoriel de dimension n.
- *Cas du système avec second membre*
  Supposons que X_p est une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$.
  $$\begin{aligned} \tilde{X} \text{ solution du système complet} &\Longleftrightarrow \tilde{X}' = A\tilde{X} + B \\ &\Longleftrightarrow \tilde{X}' = A\tilde{X} + X_p' - AX_p \Longleftrightarrow (\tilde{X} - X_p)' = A(\tilde{X} - X_p) \\ &\Longleftrightarrow \tilde{X} - X_p \text{ solution du système homogène} \end{aligned}$$
  $\tilde{X}$ est bien la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène. ■

C – Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1} x^{(n-1)} \iff X' = AX \ \text{ avec } \ X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \ \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sous réserve de continuité de A, c'est-à-dire lorsque les fonctions $a_1, \ldots, a_n$ sont continues,

- L'ensemble des solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle donné est un espace vectoriel de dimension n. Toute solution s'écrira comme combinaison linéaire de n fonctions formant une base de l'espace des solutions. Ces dernières sont qualifiées de *système fondamental des solutions*.
- Le problème de Cauchy $\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$ admet une et une seule solution.

D – Méthode de variation des constantes

Revenons au système différentiel à coefficients continus $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathbb{K}^n$. Supposons connue une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de solutions (ou *système fondamental*) de l'équation homogène. Toute solution de l'équation homogène s'écrira ainsi sous la forme :

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{où} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

On cherche désormais les solutions de l'équation complète sous la forme $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$ où les fonctions λ_i sont supposées dérivables sur l'intervalle de résolution I.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Fait intéressant : pour tout $t \in I$, $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, soient $t_0 \in I$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $\mu_1 X_1(t_0) + \cdots + \mu_n X_n(t_0) = 0$. Par unicité, la solution $\mu_1 X_1 + \cdots + \mu_n X_n$ de l'équation $X' = AX$ est identiquement nulle sur I. Puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'ensemble des solutions, les μ_i sont nuls ! Pour t fixé, les coefficients $\lambda_1'(t), \ldots, \lambda_n'(t)$ s'interprètent alors comme les coordonnées du vecteurs $B(t)$ dans la base $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$.

Ainsi, si l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène (ce qui n'est pas acquis !), on peut résoudre l'équation complète en déterminant les fonctions λ_i par primitivation directe des coordonnées de B. En pratique, les calculs sont néanmoins vite pénibles et nous n'en n'abuserons pas... Explicitons cependant la cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 de la forme $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, seul cas à connaître. Cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$$

Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de l'équation d'ordre 2, d'après ce qui précède,

$$(\heartsuit) \qquad \begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Connaissant $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il s'agit alors de résoudre un système linéaire avant de primitiver.

Exercice 3

(i) Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = \tan(t)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(ii) Donner une expression intégrale des solutions de l'équation $y''(t) + y(t) = f(t)$ où $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E – Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et wronskien

Poursuivons avec le cas particulier des équations différents linéaires d'ordre 2 à coefficients continus. Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$. On montre que, de manière équivalente, $\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2' \end{bmatrix}\right)$ est un système fondamental de solutions du système différentiel associé. Ceci motive la définition suivante.

Définition 17.10 : Wronskien

On appelle wronskien de deux solutions x_1 et x_2 de $a(t)x'' + b(t)x' + x(t)y = 0$, l'application :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

Cette définition s'étend sans difficulté aux équations différentielles linéaires d'ordre n.

Proposition 17.11

Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation différentielle $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, avec a ne s'annulant par sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions.

(ii) $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$.

(iii) $\exists t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$.

Démonstration

Formons une équation différentielle vérifiée par W (dérivable).

$$\begin{aligned} a(t)W'(t) &= a(t)x_1(t)x_2''(t) - a(t)x_2(t)x_1''(t) = x_1(t)\big[-b(t)x_2'(t) - c(t)x_2(t)\big] - x_2(t)\big[-b(t)x_1'(t) - c(t)x_1(t)\big] \\ &= -b(t)\big(x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)\big) = -b(t)W(t) \end{aligned}$$

Ainsi, $W : t \mapsto W(t_0)\exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{-b(s)}{a(s)}\,\mathrm{d}s\right)$ est nulle sur I, ou bien ne s'annule jamais. ∎

Exemple

$(\cos(\ln), \sin(\ln))$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t^2y'' + ty' + y = 0$ puisque les deux fonctions sont (avant tout!) bien solutions et, par exemple, $W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Ce n'est pas là le seul intérêt du wronskien. Étant solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on peut essayer d'en chercher une expression explicite. Si l'on connaît une solution x_1 de l'équation homogène, il suffira alors de résoudre l'équation d'ordre 1 $x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = W(t)$ pour trouver une solution x_2 linéairement indépendante de x_1. Cela reste un atout mineur (cf. méthode de Lagrange).

III | Résolution effective des systèmes linéaires à coefficients constants

On restreint désormais notre étude aux système différentiels linéaires à coefficients constants, pour lesquels nous serons en mesure de déterminer des solutions explicites.

A – Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme $a \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ainsi que la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

L'équivalence des normes en dimension finie nous assure, grâce à une norme bien choisie, la convergence absolue des séries sous-jacentes, donc l'existence de l'exponentielle. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp(a))$. C'est peut-être une évidence, mais faisons observer que l'application $\exp(a)$ est bien linéaire.

Théorème 17.12 : Dérivation de $\exp(tA)$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A \times \exp(tA)$.

De même, si $a \in \mathscr{L}(E)$ et E de dimension finie, $t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto a \circ \exp(ta)$.

Démonstration

Appliquons le théorème de dérivation terme à terme d'une série vectorielle en travaillant sur un segment. Pour cela, soient $a \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n A^n}{n!}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$ et pour tout $t \in [-a, a]$, $f_n'(t) = \dfrac{n t^{n-1} A^n}{n!}$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $[-a, a]$ (vers la fonction $t \mapsto \exp(tA)$).
- Établissons la convergence normale (donc uniforme) de $\sum f_n'$ en travaillant avec une norme sous-multiplicative :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\| \frac{n t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leqslant \frac{|t|^{n-1} \|A^n\|}{(n-1)!} \leqslant \frac{a^{n-1} \|A\|^n}{(n-1)!}$$

  La série numérique $\sum \dfrac{a^{n-1}\|A\|^n}{(n-1)!}$ converge donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$.

$\varphi : t \mapsto \exp(ta)$ est ainsi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$ et donc plus globalement sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A \times \exp(tA)$$ ■

Lemme 17.13

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors A et $\exp(B)$ commutent.

Démonstration

En revenant aux sommes finies (polynômes de matrices) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A \times \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \times A$$

Un passage à la limite est concluant, en utilisant la continuité du produit (app. bilinéaire en dim. finie). ■

Proposition 17.14

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On pourrait s'appuyer sur un produit de Cauchy de séries matricielles (pas vraiment dans les clous vis-à-vis du programme). Choisissons un chemin de traverse.

Démonstration

Considérons l'application $\phi : t \mapsto \exp(t(A+B))\exp(-tA)\exp(-tB)$. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme les matrices A, B et $A+B$ commutent avec nos trois exponentielles,

$$\phi'(t) = (A+B)\phi(t) - A\phi(t) - B\phi(t) = 0$$

ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$. $\phi(0) = I_n$ donc $\phi(1) = \exp(A+B)\exp(-A)\exp(-B) = I_n$

- Pour $B = 0$, on a $\exp(A)\exp(-A) = I_n$. On vient d'établir que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(-A) \times \exp(A) = \exp(0) = I_n$$

- De l'égalité $\exp(A+B)\exp(-A)\exp(-B) = I_n$, on tire $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$. ■

En pratique, les calculs d'exponentielles ne sont pas toujours aisés. On dispose néanmoins du résultat suivant.

Proposition 17.15

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Alors, $\exp(A)$ est diagonalisable et :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})P^{-1}$$

$\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{\mathrm{e}^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on remarquera que A et $\exp(A)$ partagent les mêmes vecteurs propres : si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad \exp(A)X = \mathrm{e}^{\lambda}X$$

Plusieurs options sont donc envisageables pour calculer des exponentielles de matrices : calcul direct de $A^n/n!$ puis de la somme dans un contexte qui s'y prête, diagonalisation de la matrice pour appliquer le résultat ci-dessus, réduction de Dunford de la matrice en cas de non-diagonalisabilité ($A = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $DN = ND$) puisqu'alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$...

Exercice 4

Calculer l'exponentielle des trois matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

Exercice 5

Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

B – Application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1 – Résolution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$

Théorème 17.16

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation homogène $X' = AX$ admet pour solution générale $X : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.

Démonstration

Il suffit de dériver $\varphi : t \mapsto X(t)\mathrm{e}^{-tA}$ sur l'intervalle I : $\varphi'(t) = (X'(t) - AX(t))\mathrm{e}^{-tA} = 0$. D'où le résultat. ■

Le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ et $X(t_0) = X_0$ admet comme unique solution $X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0$.

On peut facilement en déduire l'unique solution de l'équation complète $X' = AX + B$ en faisant varier la constante (l'expression n'est pas à retenir) :

$$X'(t) = AX(t) + B \iff \mathrm{e}^{tA}C'(t) = B \iff C(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA}B\,\mathrm{d}s + C(t_0) \iff X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0 + \mathrm{e}^{tA}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA}B\,\mathrm{d}s$$

2 – Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Les solutions de l'équation homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n$$

En notant $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, on peut écrire $C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ avec $C_i \in \mathbb{K}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(tA)X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i t)X_i$$

On vient d'établir LE résultat que l'on utilisera en pratique pour résoudre un système différentiel à coefficients constants dans le cas diagonalisable :

Théorème 17.17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, éventuellement multiples.
Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} X_n \quad \text{avec} \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{K}$$

On peut retrouver ce résultat rapidement, sans recours à l'exponentielle de matrices, comme on l'a fait dans le premier chapitre de réduction :

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ donc $y_i(t) = C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ avec $C_i \in \mathbb{R}$. D'où le résultat suivant :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} X_n$$

On notera l'inutilité de calculer $\exp(tA)$. Cela reste vrai dans le cas où la matrice serait (seulement) trigonalisable. On se reportera au premier chapitre de réduction pour les détails pratiques.