Devoir de révision (à rendre le jour de la rentrée)

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants : le premier est un sujet d'arithmétique théorique. Le travailler vous permettra non seulement d'établir un joli et célèbre résultat, mais aussi de consolider vos connaissances de bases sur les entiers. Le second regroupe des questions sur les polynômes, l'algèbre linéaire, et l'analyse. Seul le second problème sera noté. Ce devoir est à remettre le jour de la rentrée.

Problème 1

Pour tout nombre entier strictement positif n , on note D_n l'ensemble des diviseurs positifs de n. On rappelle que 1 et n sont des diviseurs de n . On se propose d'examiner quelques propriétés de cet ensemble D_n.

On note $s(n)$ le nombre d'éléments de D_n

Partie I - Caractérisation des carrés

1. Déterminer les ensembles D_n lorsque $n = 4, 5, 6$. Que dire de D_n si n est un nombre premier ?

   Corrigé : $D_4 = \{1, 2, 4\}$, $D_5 = \{1, 5\}$ et $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. n est premier si et seulement si D_n a deus éléments.

2. Montrer que si d est un élément de D_n il en est de même de $\frac{n}{d}$.
   Immediat.
3. On définit une application de D_n dans lui même en posant $\varphi(d) = \frac{n}{d}$. Prouver que cette application φ est une bijection.

   Il suffit de remarquer que $\varphi(\varphi(d)) = d$ ce qui prouve que φ est bijective et est sa propre inverse.

   Soit $D-$ (resp. $D+$), l'ensemble des diviseurs de n qui sont strictement plus petit que $\sqrt{n}$ (resp. strictement plus grand que $\sqrt{n}$).
4. Montrer que φ envoie bijectivement $D-$ sur $D+$.

   Evident également car $d < \sqrt{n}$ équivaut à $\frac{n}{d} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

5. En déduire que n est un carré parfait si et seulement si $s(n)$ est un nombre impair.

   De la question précédente on déduit que les ensembles $D+$ et $D-$ on le même cardinal notons le p. . Leur réunion est donc de cardinal pair égal à $2p$. Si n n'est pas un carré, alors $\sqrt{n}$ n'est pas un entier donc D est la réunion de $D+$ et $D-$, par conséquent son cardinal est égal à p. Si n est un carré, $\sqrt{n}$ est un entier. Donc $D = D+ \cup D- \cup \{\sqrt{n}\}$ est de cardinal impair égal à $2p + 1$.

Partie II - Multiplicativité

On écrit la décomposition de n en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$.

6. Donner sans justification la forme générale de la décomposition en facteurs premiers des diviseurs de n.
   Les diviseurs sont exactement les nombres de la forme $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$, pour les lesquels les exposants vérifient l'inégalité $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i.

7. En déduire que $s(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$

   Pour chaque valeur de i il y a $\alpha_i + 1$ choix possibles pour β_i vérifiant l'inégalité de la question précédente. Les choix sont indépendants, donc par le principe de multiplication, $s(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$

8. Retrouver le résultat de la question 5.
   Pour que $s(n)$ soit impair il faut et il suffit que tous les $\alpha_i + 1$ soient impairs.,c'est à dire que tous les α_i soient pairs. Cela signifie exactement que n est un carré.

9. Déterminer le plus petit entier qui possède 10 diviseurs.
   10 n'a que deux décompositions en produits d'entiers au moins égal à 2 : $10 = 10$ ou $10 = 2x5$. Ceci prouve qu'un eniter ayant 10 diviseurs est soit de la forme p^9 avec p premier, soit de la forme p^4q avec p et q premiers. Le plus petit de la première forme est $2^9 = 512$ le plus petit de la seconde forme est $2^4.3 = 48$. Le nombre cherché est donc 48.

Partie III - Nombres parfaits

On note $\sigma(n)$ la somme des éléments de D_n. Le nombre n est dit parfait si $\sigma(n) = 2n$.

10. Calculer $\sigma(n)$ pour $n = 2$ à 8. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
Sans difficulté.

11. Dans cette question on suppose que q est un nombre premier de la forme $q = 2^p - 1$, et l'on pose $n = 2^{p-1}q$.
Dresser la liste des diviseurs de n et montrer que n est un nombre parfait.

Les diviseurs sont $1, 2, \ldots, 2^{p-1}$ *et* $q, 2q, \ldots, 2^{p-1}q$. *Leur somme est* $(1+q)(1+2+\ldots 2^{p-1}) = (1+q)(2^p - 1) = 2n$

12. Réciproquement, on suppose que n est un nombre parfait **pair**. On peut donc l'écrire $n = 2^{p-1}q$ avec $p > 1$.
a) Montrer que $\sigma(n) = (2^p - 1)\sigma(q) = 2^p q$
On remarquera que tout diviseur de n s'écrit de façon unique $2^t m$ avec $t < p$ et m diviseur de q.

En utilisant l'indication :

$$\sigma(n) = \sum_{0 \le t \le p-1} \sum_{m|q} 2^t m = \sum_{0 \le t \le p-1} 2^t \left(\sum_{m|q} m \right) = \sum_{0 \le t \le p-1} 2^t \sigma(q)$$

Comme $\sigma(q)$ *ne dépend pas de* t *on peut le factoriser ce qui donne le résultat voulu. la seconde égalité exprime juste que* n *est parfait.*

b) En déduire qu'il existe un entier r tel que $\sigma(q) = 2^p r$

L'égalité de la question précédente prouver que 2^p *divise* $(2^p - 1)\sigma(q)$. *Mais* 2^p *est premier avec* $(2^p - 1)$, *donc selon le théorème de Gauss il divise* $\sigma(q)$. *C'est le résultat voulu.*

c) Monter qu'alors $q = (2^p - 1)r$, puis montrer que si r est différent de 1, q a 3 diviseurs dont la somme est plus grande que $2^p r$.

$q = (2^p - 1)r$ *est immédiat. Supposons que* r *n'est pas égal à* 1, q *a au moins les* 3 *diviseurs distincts* $1, r$ *et* $(2^p - 1)r$. *La somme des* 3 *est* $2^p r + 1$. *C'est trop, puisque la somme de tous les diviseurs doit etre égale à* $2^p r$ *! il y a donc une contradiction et* $r = 1$

d) En déduire que n est l'un des nombres examinés à la question 11.

L'hypothèse $r > 1$ *conduit à une contradiction. on a donc* $q = 2^p - 1$. *En reportant dans la formule du a) on a donc* $\sigma(q) = 2^p$. *Ceci prouve que* $\sigma(q) = q + 1$. *Ainis les deux seuls diviseurs de* q *sont* 1 *et* q, *donc* q *est premier. C'est ce qu'il fallait démontrer.*

On a donc déterminé tous les nombres parfaits pairs. On ignore aujourd'hui s'il existe des nombres parfaits impairs.

Problème 2

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.* Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.
   Question sans difficulté. On trouve $L_0 = 1$ *et* $L_1 = X$

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

   Corrigé : U_n *est de degré* $2n$. *Comme dériver fait baisser le degré de* 1 *unité,* L_n *est de degré* $2n-n=n$. *Le coefficient dominant de* $U_n^{(n)}$ *est* $2n(2n-1)\dots(n+1) = \dfrac{(2n)!}{n!}$. *Donc le coefficient dominant de* L_n *est* $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Corrigé : La famille est libre puisque c'est une famille de polynômes échelonnée en degré. De plus elle contient $n+1 = dim\mathbb{R}_n[X]$ *polynômes. C'est donc une base.*

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle.

   Corrigé : U_n *a deux racines* $1, -1$ *de multiplicité* n. *Par dérivation, le théorème de Rolle assure que* U_n' *s'annule sur* $]-1,1[$. *Notons* α *ce zéro. Par ailleurs,* 1 *et* -1 *sont toujours racines de* U_n' *avec multiplicité* $n-1$. *On dipose donc donc de* $2(n-1)+1 = 2n-1$ *racines comptées avec multiplicité pour le polynôme* U_n'. *Comme c'est aussi le degré de* U_n' *on a toutes les racines, ce qui justifie la factorisation donnée par l'énoncé.*

5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

   Indication : on pourra s'inspirer de la question précédente et utiliser à nouveau le théorème de Rolle.
   C'est exactement la même chose : La multpilicité des racines 1 *et* -1 *diminue par dérivation. De plus par le théorème de Rolle,*$U_n^{(k+1)}$ *s'annule sur chacun des intervalles* $]-1,\alpha_1[,]\alpha_1,\alpha_2[\dots]\alpha_k,1[$ *qui sont au nombre de* $k+1$. *Ceci assure l'existence de* $\beta_1,\dots,\beta_{k+1}$. *On a donc dénombré, avec multiplicité :* $2(n-k-1)+k+1$ *racines de* $U_n^{(k+1)}$. *Ce nombre est aussi égal à* $2n-(k+1)$ *qui est le degré de* $U_n^{(k+1)}$. *On a donc toutes les racines, ce qui justifie la factorisation proposée.*

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$.

   Dans les questions 4 *et* 5 *on a montré par récurrence (dans* 4 *: initialisation, dans* 5 *induction) que pour tout* $k \leq n$ *on a* $U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$. *En appliquant pour* $k=n$ *on obtient directement que* $U_n^{(n)}$ *possède* n *racines distinctes dans* $]-1,1[$.

Partie II - Etude de l'endomorphisme ϕ

7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   Sans difficulté mais il faut savoir précisément ce qui est demandé : il faut montré que ϕ est linéaire d'une part, et que ϕ envoie tout élément de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

   Cela revient à prouver que si P est un polynôme de degré $d \leq n$ alors $\phi(P)$ est aussi de degré inférieur ou égal à n. C'est clair.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice M. On verifiera en particulier que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

   Corrigé : Pour tout entier k, $\phi(X^k) = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2X(kX^{k-1} = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ (le second terme disparait si $k = 0, 1$). Ceci fournit directement les formules :

$$m_{k,k} = k(k+1)\,\forall k \geq 0$$

$$m_{k,k-2} = k(k-1)\,\forall k \geq 2$$

$$m_{i,j} = 0 \textit{ dans tous les autres cas}$$

10. Discuter selon le réel a le rang et la dimension du noyau de la matrice $M - aI_{n+1}$.
    Cette matrice est triangulaire avec pour coefficients diagonaux $m_{k,k} - a$. Il y a donc deux situations : Si a n'est pas l'un des $m_{k,k}$ la matrice $M - aI_{n+1}$ est inversible et donc de rang $n+1$. Si a est l'un des $m_{k,k}$, le déterminant de $M - aI_{n+1}$ est nul, donc elle n'est pas inversible et son rang est strictement inférieur à sa taille $n+1$. Cependant elle dispose de n colonnes échelonnées, donc son rang est au moins égal à n. Finalement le rang est égal à n.

    En déduire les valeurs du réel a pour lesquelles l'équation différentielle

$$(x^2-1)y" + 2xy' - ay = 0$$

    possède des solutions polynômiales.

    L'équation proposée est équivalent à $\phi(P) = aP$ qui s'écrit $(\phi - aId)(P) = 0$. Elle possède une solution non nulle si et seulement si $\phi - aId$ n'est pas injective, ce qui équivant à dire que l'un des endomorphismes $M - aI_{n+1}$ n'est pas injectif. D'après ce qui précède, ceci équivant à l'existence de k dans $\mathbb{N}$ tel que $a = k(k+1)$.

11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
    sans difficulté.

12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

    C'est une application directe de la formule de Leibniz.

13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, , $\phi_n(L_k) = \lambda_k L_k$ où λ_k est un réel qu'on précisera.
    La question précédente donne directement $\lambda_k = k(k+1)$. Ce n'est pas une surprise au vu de la question 10.

14. Déduire de ce qui précède qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit la matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont les réels λ_k trouvés à la question précédente. Déterminer explicitement les matrices P et P^{-1} lorsque $n = 2$.
    Δ est la matrice de ϕ_n dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$. Par conséquent, on poue choisir pour P la matrice de passage de la base canonique à la base $(L_0, \ldots, L_n)$. Les colonnes de cette matrice sont consituées des coordonnées des L_i dans la base canonique, c'est à dire de leurs coefficients. Comme on a $L - 0 = 1, L_1 = X$ et $L_2 = \dfrac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ un choix possible pour P est donc :$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ *dont l'inverse est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Partie III - Représentation intégrale

15. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u} du = 0$.

    On pourra utiliser un changement de variable défini par $v = \pi - u$.

    Le changement de variable proposé change l'intégrale en son opposé : elle est donc nulle

16. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+a^2\cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

    On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.

    Comme l'arctangente n'est pas défini en $\frac{\pi}{2}$ on intégre entre 0 et X. On pose $v = \tan u$, donc $du = \frac{dv}{1+v^2}$ et $\cos^2 u = \frac{1}{1+v^2}$. En reportant il vient : $\int_0^X \dfrac{du}{1+a^2\cos^2 u} = \int_0^{\tan X} \frac{dv}{v^2+(1+a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan(\dfrac{\tan X}{\sqrt{1+a^2}})$. On prend alors la limite quand X tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ de cette expression pour obtenir le résultat voulu.

17. En déduire que :

$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}.$$

Soit I l'intégrale proposée. On peut déjà noter, par parité du cosinus, que $I = 2\int_0^{\pi} \dfrac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$. En multipliant le dénominateur sour l'intégrale par sa quantité conjuguée on trouve $I = 2\int_0^{\pi} \dfrac{1-t\cos\theta+it\sin\theta\cos u du}{(1-t\cos\theta)^2+(t\sin\theta\cos u)^2}$. En choisissant le réel a tel que $a = \frac{t\sin\theta}{1-t\cos(\theta)}$ (qui est bien une constante par rapport à la variable d'intégration u. de plus ce réel est bien défini puisque t est entre -1 et 1 et donc le dénominateur ne peut pas s'annuler) on obtient d'après la question 15. la partie imaginaire de l'intégrale est nulle et que sa partie réelle est égale à $\frac{2}{1-t\cos\theta}\int_0^{\pi} \dfrac{du}{1+a^2\cos^2 u} = \frac{4}{1-t\cos\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{du}{1+a^2\cos^2 u}$. On termine en substituant la valeur de l'intégrale trouvée à la question16.

On peut démontrer que cette formule permet d'obtenir l'expression intégrale suivante :

$$L_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n du.$$