

Corrigé du devoir à rendre le 16/11/2020

Exercice 1 :

1. La fonction \ln_a est dérivable sur \mathbb{R}^{++} car la fonction \ln l'est et que $\ln(a) \neq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, on a $\ln'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.

Ainsi, si $a > 1$ alors \ln_a est de dérivée positive sur l'intervalle \mathbb{R}^{++} donc croissante et si $a < 1$ alors \ln_a est de dérivée négative sur l'intervalle \mathbb{R}^{++} donc décroissante.

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \ln_a(x) + \ln_a(y)$$

$$\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \frac{-\ln(x)}{\ln(a)} = -\ln_a(x)$$

$$\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)} (\ln x - \ln y) = \ln_a(x) - \ln_a(y)$$

$$\ln_a(x^n) = \frac{\ln(x^n)}{\ln(a)} = \frac{n \ln(x)}{\ln(a)} = n \ln_a(x)$$

$$\ln_a(a^n) = n \ln_a(a) = n$$

3. Si $a > 1$ alors la fonction \ln_a est de dérivée strictement positive sur l'intervalle \mathbb{R}^{++} donc établit une bijection de \mathbb{R}^{++} dans $\ln_a(\mathbb{R}^{++})$. Comme $\ln(a) > 0$ et comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln = +\infty,$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln_a = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln_a = +\infty,$$

donc \ln_a établit une bijection de \mathbb{R}^{++} dans \mathbb{R}

Si $a < 1$ alors la fonction \ln_a est de dérivée strictement négative sur l'intervalle \mathbb{R}^{++} donc établit une bijection de \mathbb{R}^{++} dans $\ln_a(\mathbb{R}^{++})$. Comme $\ln(a) < 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln_a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln_a = -\infty,$$

donc \ln_a établit une bijection de \mathbb{R}^{++} dans \mathbb{R}

4. Par définition, \exp_a établit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{++} . Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$, on a

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow \ln_a(y) = x \Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a) \Leftrightarrow y = \exp(x \ln(a)) = a^x$$

Ainsi, on a

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++}, \quad x \mapsto a^x$$

Exercice 2 :

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(*) = \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y)$. On a

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \boxed{\text{sh}(x+y)} \end{aligned}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\sum_{k=0}^n \text{sh}(kx + y) = \sum_{k=0}^n \frac{(e^{kx+y} - e^{-kx-y})}{2} = \frac{e^y}{2} \sum_{k=0}^n e^{kx} - \frac{e^{-y}}{2} \sum_{k=0}^n e^{-kx}$$

Si $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}$ et $\sum_{k=0}^n e^{-kx} = \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$ puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \text{sh}(kx + y) &= \frac{e^y}{2} \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} - \frac{e^{-y}}{2} \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \\ &= \frac{e^y}{2} \frac{e^{(n+1)x/2} (e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2})}{e^{x/2} (e^{-x/2} - e^{x/2})} \\ &\quad - \frac{e^{-y}}{2} \frac{e^{-(n+1)x/2} (e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2})}{e^{-x/2} (e^{x/2} - e^{-x/2})} \\ &= \frac{e^y e^{nx/2}}{2} \frac{\text{sh}((n+1)x/2)}{\text{sh}(x/2)} - \frac{e^{-y} e^{-nx/2}}{2} \frac{\text{sh}((n+1)x/2)}{\text{sh}(x/2)} \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 0$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \text{sh}(kx + y) = \text{sh}(y + nx/2) \frac{\text{sh}((n+1)x/2)}{\text{sh}(x/2)}}.$$

et si $x = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^n \text{sh}(kx + y) = (n+1)\text{sh}(y)$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{sh}(kx + y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(e^{kx+y} - e^{-kx-y})}{2} \\ &= \frac{e^y}{2} (1 + e^x)^n - \frac{e^{-y}}{2} (1 + e^{-x})^n \\ &= \frac{e^y}{2} e^{nx/2} 2^n \text{ch}^n(x/2) - \frac{e^{-y}}{2} e^{-nx/2} 2^n \text{ch}^n(x/2) \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{sh}(kx + y) = 2^n \text{sh}(y + nx/2) \text{ch}^n(x/2)$$

Exercice 3 :

Soit $f : x \mapsto \arccos(\text{th}x) + 2 \arctan(e^x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}x \in]-1, 1[$ et la fonction \arccos est définie sur $[-1, 1]$ donc la fonction $x \mapsto \arccos(\text{th}x)$ est définie sur \mathbb{R} .

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \arctan x$ sont définies sur \mathbb{R} donc la fonction $x \mapsto 2 \arctan(e^x)$ est définie sur \mathbb{R} .

Par suite, la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

2. La fonction th est dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]-1, 1[$ et la fonction \arccos est dérivable sur $[-1, 1]$ donc la fonction $x \mapsto \arccos(\text{th}x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \arctan x$ sont dérivables sur \mathbb{R} donc la fonction $x \mapsto 2 \arctan(e^x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Par suite, la fonction f est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - \text{th}^2 x) \frac{-1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = \sqrt{1 - \text{th}^2 x} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2 x}} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \end{aligned}$$

Comme $\text{ch}x \geq 0$, on en déduit que

$$f'(x) = -\frac{1}{\text{ch}x} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} = 0$$

Comme \mathbb{R} est un intervalle, on en déduit que la fonction f est constante. Or,

$$f(0) = \arccos(0) + 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{4} = \pi$$

Le graphe de f est donc la droite d'équation $\boxed{y = \pi}$.