Théorème du point fixe

1

a) $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$

Par récurrence sans difficulté : $0 \leq \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$.

b) La série $\sum_{n\geq 1} k^n \|x_1 - x_0\|$ converge donc par théorème de comparaison

$$\sum_{n\geq 1} \|x_{n+1} - x_n\| \quad cv.$$

Comme E est complet, $\sum_{n\geq 1} x_{n+1} - x_n$ cv. c'est à dire que $(x_n)_n$ cv.

c) $x_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$ et f continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(\ell)$. Mais $f(x_n) = x_{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$

donc par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$: ℓ est un point fixe

Soit ℓ' un point fixe :

$\|\ell' - \ell\| = \|f(\ell') - f(\ell)\| \leq k\|\ell' - \ell\|$. Donc puisque $k<1$

ce qui impose $\|\ell' - \ell\| = 0$ $\quad \ell' = \ell$ et l'unique point fixe.

2.

a) $$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)^2$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\right] = k^2 \|x\|^2$$

b) Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Le système proposé s'écrit :

$X_{n+1} = f(X_n)$ avec :

$f(X) = AX + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

Comme $\forall X, Y \quad \|f(X) - f(Y)\| = \|A(X-Y)\| < k\|X-Y\|$

où $k = 0.4^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.4^2 < 1$, le résultat du 1 s'applique.

c) Si $k < 1$ l'applicati $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \longmapsto AX+B$ est k contractante, donc par 1)

possède un unique point fixe.

3 : a) $\forall x \in [0,1]$ on a :

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left| \int_0^x \frac{\cos f(t) - \cos g(t)}{2} \right| dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^x |f(t) - g(t)| \, dt \quad \text{(car cosinus est 1-lip)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty$$

On passe au sup et il vient :

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty$$

b) Soit y le point fixe de Φ. y est une fonction continue telle que

$$y(x) = \alpha + \int_0^x \left(\frac{\cos y(t)}{2} + t\right) dt.$$

On évalue en 0 : $y(0) = \alpha$.

De plus par le TFA, y est $\mathcal{C}^1$ et en dérivant $y'(x) = \frac{\cos(y(x))}{2} + x$.

Réciproquement, si y est $\mathcal{C}^1$ et $y'(x) = \frac{1}{2}\cos y(x) + x \quad \forall x \in [0,1]$

alors $\quad y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\cos y(t) + t\,dt.$

Par conséquent si $y(0) = \alpha$ on a bien $\quad y = \Phi(y)$.

Ceci prouve l'existence et l'unicité de la fonction y cherchée. ☒