Suites réelles et complexes

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Généralités

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Suites

Soit E un ensemble non vide.
On appelle suite d'éléments de E toute application u de $\mathbb{N}$ dans E. Plus généralement, si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : A \longrightarrow E$ est toujours une suite.

1.1.2 Termes

Si $u : A \longrightarrow E$ est une suite d'éléments de E, alors on note, pour $n \in A$, u_n au lieu de $u(n)$ l'image de n par u.
La suite elle-même se note u ou $(u_n)_{n\in A}$.
Pour $n \in A$, u_n est le terme d'indice n de la suite u.

1.1.3 Sous-suites

On suppose désormais que $A = \mathbb{N}$, soit u une suite d'éléments de E.
On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite v d'éléments de E définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On rappelle que si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E.

1.2 Faits de base

1.2.1 Opérations sur les suites

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a vu que si X est un ensemble non vide, on peut définir des opérations ($+$ et $\times$) sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. En particulier, pour $X = \mathbb{N}$, les opérations sont définies sur $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

– Pour $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u + v$ est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = u_n + v_n$$
– Pour $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, uv est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = u_n v_n$$
– Pour $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u}$ est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \frac{1}{u_n}$$
– Pour $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, αu est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \alpha u_n$$
– Pour $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $|u|$ est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = |u_n|$$
Cette notation désigne soit la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.2.2 Propriétés des suites réelles et complexes

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- On note $\inf(u, v)$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \min(u_n, v_n)$$
- On note $\sup(u, v)$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \max(u_n, v_n)$$
- On note $u^+ = \sup(u, 0)$ et $u^- = -\inf(u, 0)$. 0 désigne ici la suite θ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \in \mathbb{R}_+$ et $u_n^- \in \mathbb{R}_+$ et on a les relations suivantes :
$$|u| = u^+ + u^- \quad \text{et} \quad u = u^+ - u^-$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on note $\Re\mathrm{e}(u)$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \Re\mathrm{e}(u_n)$$
- Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on note $\Im\mathrm{m}(u)$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \Im\mathrm{m}(u_n)$$
- Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on note $\overline{u}$ la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = \overline{u_n}$$
- On a les relations suivantes :
  - $u = \Re\mathrm{e}(u) + i\Im\mathrm{m}(u)$
  - $\Re\mathrm{e}(u) = \dfrac{u + \overline{u}}{2}$
  - $\Im\mathrm{m}(u) = \dfrac{u - \overline{u}}{2i}$
  - $\overline{u} = \Re\mathrm{e}(u) - i\Im\mathrm{m}(u)$
- u est réelle si et seulement si $u = \overline{u}$ ou $\Im\mathrm{m}(u) = 0$.

1.3 Notions spécifiques aux suites réelles

1.3.1 Ordre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on écrit $u \leqslant v$ pour signifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. On définit ainsi une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On écrira $u \geqslant 0$ pour signifier que tous les u_n sont positifs.

On a toujours, $\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
$$\inf(u, v) \leqslant u \leqslant \sup(u, v) \quad \text{et} \quad \inf(u, v) \leqslant v \leqslant \sup(u, v)$$

1.3.2 Suites majorées ou minorées

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- u est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ [a]. Dans ce cas, $\sup(u)$ désigne la borne supérieure de $u(\mathbb{N})$.
- u est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Dans ce cas, $\inf(u)$ désigne la borne inférieure de $u(\mathbb{N})$.

[a] Il revient au même d'exiger que $u(\mathbb{N}) = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

Caractérisation de $\inf(u)$ **et** $\sup(u)$

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) u est majorée et $\alpha = \sup(u)$ si et seulement si :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha$

(b) $\forall \varepsilon > 0$ [a], $\exists m \in \mathbb{N} / \alpha - \varepsilon < u_m$

(2) u est minorée et $\alpha = \inf(u)$ si et seulement si :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \alpha$

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} / \alpha + \varepsilon > u_m$

a. « *Les epsilons sont de retour !* »

Voir la section 8.2.2.3 du cours complet page 135 pour une démonstration de propriétés analogues.

Suites bornées

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u est bornée [a] si u est à la fois majorée et minorée. Alors, u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

a. Ou « *mijorée* », pour reprendre le terme de M. Sellès.

Extension aux suites complexes Cette dernière définition peut s'appliquer si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que u est bornée si la suite (réelle) $|u|$ est majorée : c'est-à-dire si il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

1.3.3 Suites monotones

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que :
- u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
- u est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.
- u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
- u est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
- u est monotone si u est croissante ou décroissante.
- u est strictement monotone si est strictement croissante ou strictement décroissante.

Piège ! Il y a des suites non monotones. Par exemple, la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante car [a] $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$.

a. « *Quand on est pas des croissants on est des pains...* ». Ce jeu de mots déplorable n'a pas été fini par M. Sellès, qui a préféré garder le silence pour préserver sa dignité.

2 Suites convergentes

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Soit u une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

(1) Soit $l \in \mathbb{K}$, u converge vers l si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. On écrit alors ceci :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

(2) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que u converge vers l. Dans le cas contraire, on dit que u est divergente.

2.1.2 Remarques

- Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$, u converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Ceci signifie que pour n assez grand, les termes de u approchent l à ε près.
- Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$, u converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \overline{\mathcal{D}}(l, \varepsilon)$ [a] .
- Si $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{K}$, alors u converge vers l si et seulement si la suite positive $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Soit v une suite réelle positive qui converge vers 0 et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{K}$. Si $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < v_n$, alors u converge vers l.

Démonstration de la dernière observation Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Or v converge vers 0 donc $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2, |v_n| = v_n \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $|u_n - l| \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$.

2.1.3 Exemples de suites convergentes

- Toute suite constante est convergente.
  Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constante : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda$. Alors u converge vers λ : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver du fait de l'archimédisme de $\mathbb{R}$ $n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ ($\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$).
  Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $\dfrac{1}{n} = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Alors $\left(\dfrac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $a^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ donc $\dfrac{1}{a^n} = \left|\dfrac{1}{a^n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.
- La suite $(\omega_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [b] converge vers x.

2.2 Propriétés des suites convergentes

2.2.1 Limite d'une suite convergente

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors il existe un unique $l \in \mathbb{K}$ tel que u converge vers l.
l est alors la limite de u et se note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[a]. Cette notation désigne le disque fermé de centre l et de rayon ε : $\overline{\mathcal{D}}(l, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - l| \leqslant \varepsilon\}$

[b]. Voir la section 8.2.4.2 du cours complet page 139.

Démonstration Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{K}$.
Supposons que u converge vers l_1 et l_2, et montrons que $l_1 = l_2$. Soit $\varepsilon > 0$:
- $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1,\ |u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$;
- $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2,\ |u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$.

Pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - u_n + u_n - l_2| \\ &= |l_1 - u_n + (u_n - l_2)| \\ &\leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0,\ |l_1 - l_2| \leqslant 2\varepsilon$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ |l_1 - l_2| \leqslant \varepsilon$.

Petit lemme Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon \Leftrightarrow x \leqslant 0$. En effet :
$\Leftarrow$ « *Obvious !* »
$\Rightarrow$ Si $x > 0$, alors $0 < \dfrac{x}{2} < x$, ce qui contredit l'assertion.

Ici, $|l_1 - l_2| \leqslant 0 \Rightarrow l_1 - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$.

2.2.2 Remarques

- Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, convergente et de limite $l \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < l < \beta$. Alors, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [\alpha, \beta]$.
  En effet, on choisit ε tel que $l - \varepsilon > \alpha$ et $l + \varepsilon < \beta$. Alors, $\varepsilon = \min(\beta - l, l - \alpha)$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset [\alpha, \beta]$.
  - Si $l > 0$, en choisissant $\alpha = \dfrac{l}{2} > 0$, on a $u_n \geqslant \alpha > 0$ pour n assez grand.
  - Si $l < 0$, en choisissant $\beta = \dfrac{l}{2} > l$, on voit que $u_n \leqslant \beta < 0$ pour n assez grand.
- Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{K}$, $M > 0$ et supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| < M\varepsilon$. Alors u converge vers l.
  En effet, soit $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{M}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant M\varepsilon = \varepsilon'$ donc $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon'$.

2.2.3 Propriétés qualitatives

Théorème

> Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite $l \in \mathbb{K}$. Prenons $\varepsilon = 42$ [a]. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant 42$. D'où pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - l + l| \\ &\leqslant |u_n - l| + |l| \\ &\leqslant 42 + |l| \end{aligned}$$

---

a. On peut ici prendre n'importe quel nombre positif. Pour ceux qui ne saisissent pas cette référence hautement culturelle, 42 est dans *The HitchHicker's Guide to the Galaxy* (ou H2G2 pour les intimes) la réponse à la question de la Vie, de l'Univers et du Reste. La Terre est en effet un super ordinateur biologique conçu par les souris, en fait espèce la plus évoluée de l'Univers, pour trouver l'énoncé de la susdite question correspondant à la réponse 42. On peut émettre la supposition que cette question est « Quel est le produit de 6 et de 7 ? », mais elle ne satisfait guère l'attente que l'on peut avoir vis-à-vis de la Vie, de l'Univers et du Reste.

Soit par ailleurs $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max(M, 42 + |l|)$.

Théorème

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente et de limite $l \in \mathbb{K}$, alors toute sous-suite de u converge vers l.

Démonstration Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et v telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. Montrons que v converge vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$. u converge vers l donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Prenons $n_0 = n_1$, pour $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |v_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Utilisation Ce théorème sert souvent à montrer qu'une suite est divergente : soit en exhibant une sous-suite de u divergente, soit en exhibant deux sous-suites de u convergent vers des limites différentes.

2.3 Opérations sur les suites convergentes

2.3.1 Résultats sur les opérations usuelles

Théorèmes généraux Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes respectivement vers $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

(1) $\alpha u + v$ converge vers $\alpha\lambda + \mu$.

(2) uv converge vers $\lambda\mu$.

(3) $|u|$ converge vers $|\lambda|$.

(4) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u}$ converge vers $\dfrac{1}{\lambda}$ et $\dfrac{v}{u}$ converge vers $\dfrac{\mu}{\lambda}$.

Démonstrations

(1) Soit $\varepsilon > 0$, observons que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha\lambda + \mu)| &= |\alpha(u_n - \lambda) + (v_n - \mu)| \\ &\leqslant |\alpha| |u_n - \lambda| + |v_n - \mu| \\ &\leqslant (|\alpha| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

On sait que $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|u_n - \lambda \leqslant \varepsilon|$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2$, $|v_n - \mu| \leqslant \varepsilon$ donc pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha\lambda + \mu)| &\leqslant |\alpha| |u_n - \lambda| + |v_n - \mu| \\ &\leqslant (|\alpha| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon' = \alpha\varepsilon + \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|\alpha u_n + v_n - (\alpha\lambda + \mu)| \leqslant \varepsilon'$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on effectue le calcul préliminaire [a] suivant :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \lambda\mu| &= |u_n v_n - \lambda v_n + \lambda v_n - \lambda\mu| \\ &\leqslant |u_n - \lambda| |v_n| + |\lambda| |v_n - \mu| \end{aligned}$$

v est convergente donc bornée : $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_2 \Rightarrow |v_n - \mu| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\forall n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $|u_n v_n - \lambda\mu| \leqslant (M + |\lambda|)\varepsilon$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $||u_n| - |\lambda|| \leqslant |u_n - \lambda|$. Cette dernière expression tend en effet vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

[a] Les jeux de mots de M. Sellès deviennent ici sulfureux : ce samedi matin a été particulièrement prolifique.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\lambda}\right| = \frac{|u_n - \lambda|}{|\lambda|\,|u_n|}$$

D'après (3), $|u|$ converge vers une limite strictement positive donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|v_n| \geqslant \dfrac{|\lambda|}{2} > 0$ car $\dfrac{|\lambda|}{2} < |\lambda|$. Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2$, $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$ donc pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\lambda}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \cdot \frac{2}{|\lambda|} = \frac{2\varepsilon}{|\lambda|^2}$$

Théorème spécifique aux suites réelles Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers les réels λ et μ. Alors :

(1) $\inf(u, v)$ converge vers $\min(\lambda, \mu)$.

(2) $\sup(u, v)$ converge vers $\max(\lambda, \mu)$.

En particulier, u^+ converge vers $\max(\lambda, 0)$ et u^- converge vers $-\min(\lambda, 0)$.

Démonstration

$$\inf(u, v) = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|) \longrightarrow \frac{1}{2}(\lambda + \mu - |\lambda - \mu|) = \min(\lambda, \mu)$$

Et de façon analogue,

$$\sup(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|) \longrightarrow \frac{1}{2}(\lambda + \mu + |\lambda - \mu|) = \max(\lambda, \mu)$$

Théorème spécifique aux suites complexes Soit $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $l = \alpha + i\beta$. Posons $u = \Re\mathrm{e}(z)$ et $v = \Im\mathrm{m}(z)$. Alors :

$$z \text{ converge vers } l \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ converge vers } \alpha \\ v \text{ converge vers } \beta \end{cases}$$

On remarque que si $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors $\overline{z}$ converge vers $\overline{l}$.

Démonstration

$\Leftarrow$ Supposons que u et v convergent respectivement vers α et β. Or $z = u + iv$ donc z converge vers $\alpha + i\beta = l$.

$\Rightarrow$ Si z converge vers $\alpha + i\beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &= |\Re\mathrm{e}(z_n - l)| \\ &\leqslant |z_n - l| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

De même, v converge vers β.

Limite d'un produit de suites Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u converge vers 0 et que v est bornée. Alors, uv converge vers 0.

Démonstration Soit $M > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| < M$. Soit $\varepsilon > 0$, u converge vers 0 donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$. D'où, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$.

2.3.2 Comportement des suites de référence

Suite géométrique de raison q Soit $q \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$.

- Si $|q| > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |q|^n$. Soit $a > 1$, alors $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}/a^n \geqslant M$ donc ici $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}/ |u_n| \geqslant M$ donc u n'est ni bornée ni convergente.
- Si $|q| < 1$, alors u converge vers 0. En effet :
  - Si $q = 0$, alors $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 0$.
  - Si $q \neq 0$, alors $a = \dfrac{1}{|q|}$ est bien défini et $a > 1$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, a^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} a^n &= a^{n-n_0}a^{n_0} \\ &\geqslant a^{n_0} \\ &\geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n - 0| &= |q|^n \\ &= \frac{1}{|a|^n} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Théorème : convergence d'une suite u par l'étude du quotient de deux termes consécutifs Soit u une suite de réels strictement positifs. Si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l < 1$, alors u converge vers 0.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < l + \varepsilon < 1$ [a] . $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Donc pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant l + \varepsilon$ donc on a les inégalités suivantes :

$$0 < \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} < l + \varepsilon, 0 < \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} < l + \varepsilon, \dots, 0 < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \varepsilon,$$

En multipliant toutes ces inégalités entre elles, les termes se simplifient deux à deux et on obtient :

$$0 < \frac{u_n}{u_{n_0}} < (l + \varepsilon)^{n-n_0}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{(l + \varepsilon)^{n_0}} (l + \varepsilon)^n$$

Soit $\alpha > 0$, on a $(l + \varepsilon)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{u_{n_0}}{(l + \varepsilon)^{n_0}} (l + \varepsilon)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_1$,

$$\frac{u_{n_0}}{(l + \varepsilon)^{n_0}} (l + \varepsilon)^n \leqslant \alpha$$

Donc $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $0 < u_n \leqslant \alpha$.

Suite puissance sur factorielle Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$. Alors u converge vers 0.

---

[a]. On peut prendre par exemple $\varepsilon = \dfrac{1 - l}{2}$.

Démonstration

- Si $z = 0$, u converge vers 0 car $u_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors on pose $v = |u|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{|z|^n}{n!} > 0$$

Or, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ donc, d'après le théorème énoncé ci-dessus, u converge vers 0.

3 Notions spécifiques aux suites réelles et théorèmes afférents

3.1 Suites tendant vers l'infini

3.1.1 Définitions

(1) Soit [a] $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant M$$

(2) u tend vers $-\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant M$$

a. On ne peut ici qu'admirer la richesse du vocabulaire employé par M. Sellès, qui éblouit du phare triomphant de sa connaissance les pauvres ignorants que nous sommes. *« Eh m'sieur ça veut dire quoi afférent ? T'as qu'à regarder dans le dico ! Oh je suis en forme aujourd'hui... »*.

On remarque aisément que u tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u$ tend vers $-\infty$.

3.1.2 Remarques

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(1) Si u tend vers $\pm\infty$, alors u n'est pas convergente et u n'est pas majorée ou minorée selon le cas.

(2) La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini. Si $a > 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

(3) Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. Alors :
   - Si u tend vers $+\infty$, alors v aussi.
   - Si v tend vers $-\infty$, alors u aussi.

3.1.3 Théorèmes généraux

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que u tend vers $+\infty$ et v une autre suite de réels.

(1) Si v est minorée, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.

(2) On suppose que $\exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, v_n \geqslant k$ [b]. Alors uv tend vers $+\infty$.

(3) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ alors $\dfrac{1}{u}$ tend converge 0.

(4) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et si v converge vers 0, alors $\dfrac{1}{v}$ tend vers $+\infty$.

b. Cette condition se produit notamment si v converge vers une limite strictement positive ou si v tend vers $+\infty$.

Démonstrations

(1) Soit $m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant m$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant M - m$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$u_n + v_n \geqslant M - m + m = M$$

(2) Soit $M \in \mathbb{R}_+$, alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, u_n \geqslant \dfrac{M}{k}$ d'où, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$u_n v_n \geqslant \frac{M}{k} \cdot k = M$$

Donc $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$.

Remarques

– Si v converge, v est minorée.
– On ne peut rien affirmer de général sur $u + v$ lorsque v n'est pas minorée.
– Si v converge vers 0, on ne peut rien affirmer de général sur uv.
– Des théorèmes analogues existent lorsque u tend vers $-\infty$.

3.2 Ordre et limites

3.2.1 Conservation des inégalités larges par passage à la limite

Soient u, v deux suites réelles convergentes. On suppose que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$. Alors,

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n \leqslant \lim_{n \mapsto +\infty} v_n$$

Démonstration Soit $\lambda = \lim u_n$ et $\mu = \lim v_n$, supposons que $\mu < \lambda$.

Soit $\gamma \in]\mu, \lambda[$, $\gamma > \mu$ et v converge vers μ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, v_n \leqslant \gamma$. De même, $\gamma < \lambda$ et u converge vers λ donc $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2, u_n \geqslant \gamma$. Mais alors [a], pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, $u_n \leqslant v_n$ et $v_n < \gamma < u_n$, ce qui est impossible.

Piège ! Les inégalités strictes ne se conservent en général pas par passage à la limite.

3.2.2 Théorème des gendarmes

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
(2) $\exists l \in \mathbb{R} / \lim u_n = \lim w_n = l$
Alors v converge vers l.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.

u converge vers l donc $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.
w converge vers l donc $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2, w_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.
Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$,

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant l + \varepsilon$$

Donc $v_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

a. « *Mézalors !* »

3.3 Suites monotones

3.3.1 Théorèmes

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(1) Si u est croissante et majorée, alors u converge vers $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si u n'est pas majorée, alors u tend vers $+\infty$.

(2) Si u est décroissante et minorée, alors u converge vers $l = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si u n'est pas minorée, alors u tend vers $-\infty$.

Démonstration

(1) Supposons que u est majorée et croissante et soit $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / l - \varepsilon < u_{n_0}$. Pour $n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l$ car u est croissante et l majore tous les termes. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$$

Si u n'est pas majorée, soit $M \in \mathbb{R}$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geqslant M$. Pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M$.

(2) Démonstration analogue [a].

Remarques Si u est strictement croissante et majorée, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \lim u_n$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leqslant \lim u_n = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

3.3.2 Exercices et résultats classiques

Étude de la série harmonique étendue Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Montrons que si $\alpha > 1$, u converge et que si $\alpha \leqslant 1$, u tend vers $+\infty$.

Il est clair que u est croissante. De plus, $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante. On cherche maintenant à encadrer chaque terme de la suite par des intégrales : c'est la méthode de la série intégrale.

On voit que pour $t \in [k, k+1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \quad & \Leftrightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{k^\alpha} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

En sommant toutes les inégalités obtenues pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant u_n$$

Donc, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$ et $u_{n+1} \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$, ce qui équivaut à $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$. Cette égalité est *a posteriori* valable pour $n = 1$: en effet, $u_1 \leqslant 1$. On obtient donc finalement, $\forall n \geqslant 1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}$$

a. « *But left to the reader !* »

– Supposons que $\alpha > 1$. On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 1 + \int_1^n t^{-\alpha}\mathrm{d}\,t \quad &\Leftrightarrow \quad u_n \leqslant 1 + \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{-\alpha+1}\right]_1^n \\ &\Leftrightarrow \quad u_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^\alpha - 1}\right)}_{\leqslant 1} \\ &\Rightarrow \quad u_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

u_n est majorée et croissante, elle converge.

– Supposons que $\alpha = 1$. Alors

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant u_n \Leftrightarrow \ln(n+1) \leqslant u_n$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc u_n tend vers $+\infty$.

– Pour $0 < \alpha < 1$, on a, pour $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$ car $\alpha < 1$. D'où

$$u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc u_n tend vers $+\infty$.

Suites et moyennes Soient $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k v_k} \quad \text{et} \quad v_{k+1} = \frac{u_k + v_k}{2}$$

Montrons que les suites u et v sont bien définies. Soit H_k : « u_k et v_k existent et appartiennent à $\mathbb{R}_+$ ».

– H_0 est vrai.
– Supposons que H_k est vrai pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors de par leur expression, u_k et v_k sont bien définis et appartiennent à $\mathbb{R}_+$.

Petit lemme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, on a [a] :

$$\sqrt{\alpha\beta} \leqslant \frac{\alpha + \beta}{2}$$

, effet, $\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2 \geqslant 0$.

---

a. Les expressions de u_k et v_k sont ceux des moyennes arithmétiques et géométrique de 2 réels. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, On rappelle que :

– La moyenne arithmétique de ces réels est définie par :

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

– La moyenne géométrique de ces réels est définie par :

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

– Et pour ceux que ça intéresse, voici la moyenne harmonique, qui est en fait l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses :

$$m_h = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

Ici, $\forall k \geqslant 1$, $u_k \leqslant v_k$. Cette relation est *a posteriori* vraie pour $k = 0$. Ainsi,

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k v_k} \geqslant u_k \quad \text{et} \quad v_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + v_k) \leqslant v_k$$

Donc u et croissante et v est décroissante. On a même, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0$$

u est croissante e tmajorée par v_0 donc elle converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, v est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers $\mu \in \mathbb{R}$.

Il est clair que $(v_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers μ [a]. Or, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$v_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + v_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$$

Par unicité de la limite d'une suite convergente, $\mu = \dfrac{1}{2}(\lambda + \mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$. u et v convergent donc vers la même limite.

Je note ici le programme Maple donné par le génial M. Sellès pour calculer le n-ième terme des suites$u$ et v :

```
suite:=proc(a,b,n)
local u,v,k,temp:
u:=a:
v:=b:
for k from 1 to n do
   temp:=u:
   u:=sqrt(u*v):
   v:=(temp+v)/2:
end do:
u,v;
end proc;
```

3.3.3 Raisonnement à retenir

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Alors u est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$.
De même, v est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers $\mu \in \mathbb{R}$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ donc $\lambda \leqslant \mu$ par passage à la limite de l'inégalité large.

---

a. On gardera ici en mémoire une magnifique citation :

« C'est quand c'est plus facile que c'est plus dur »

Adrien O., aussi connu sous le nom d'Aménofis
Lycée Saint-Louis, le 4/11/2011 à environ 11h15 en salle M069

3.3.4 Théorème des segments emboîtés

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments [a] telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$. Alors :
Par conséquent,
(1) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un segment non vide.
(2) Si de plus on suppose que la longueur [b] du segment I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

a. Un segment est un intervalle du type $[a, b]$ avec $a \leqslant b$.
b. La longueur du segment $[a, b]$ est bien sûr $b - a$.

Démonstration Notons $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n \leqslant b_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$ donc $I_{n+1} \subset I_n \subset I_0$ donc

$$a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0$$

Alors a est croissante et majorée par b_0 donc elle converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, b est décroissante et minorée par a_0 donc elle converge vers $\mu \in \mathbb{R}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$ donc $\lambda \leqslant \mu$ par passage à la limite de l'inégalité large. Montrons que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\lambda, \mu]$$

$\Leftarrow$ Si $\nu \in [\lambda, \mu]$, on $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \lambda$ et $b_n \geqslant \mu$ donc

$$a_n \leqslant \lambda \leqslant \nu \leqslant \mu \leqslant b_n$$

Donc $\nu \in [a_n, b_n] = I_n$ donc $\nu \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

$\Rightarrow$ Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $x \in I_m$ donc $a_m \leqslant x \leqslant b_m$ donc $\lambda \leqslant x \leqslant \mu$ donc $x \in [\lambda, \mu]$.

On suppose maintenant que $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, d'après les théorèmes généraux, $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda - \mu$. Par unicité de la limite, $\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Ainsi, $[\lambda = \mu] = \{\lambda\}$.

3.4 Suites adjacentes

3.4.1 Définition

On dit que $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :
(1) u est croissante et v est décroissante.
(2) $u - v$ converge vers 0.

3.4.2 Théorème

Deux suites adjacentes sont toujours convergentes de même limite.

Démonstration Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ adjacentes et on suppose u croissante et v décroissante.

Lemme $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $u_p \leqslant v_q$.
En effet , supposons le contraire : $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $v_q < u_p$. Pour $n \geqslant \max(p, q)$,

$$v_n \leqslant v_q < u_p \leqslant u_n \Rightarrow u_n - v_n \geqslant u_p - v_q > 0$$

Si n tend vers $+\infty$, $0 \geqslant u_p - v_q > 0$, ce qui est impossible [b].

b. Pour citer l'illustre M. Sellès, « *aïe aïe aïe !* ».

Ici, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Alors u est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, v est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers $\mu \in \mathbb{R}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ donc $\lambda \leqslant \mu$ par passage à la limite de l'inégalité large. Or $u - v$ converge vers 0 mais aussi [a] vers $\lambda - \mu$ d'après les théorèmes généraux. Par unicité de la limite d'une suite convergente, $\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$.

3.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

3.5.1 Cas réel

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une sous suite de u qui converge. Ceci signifie que $\exists l \in \mathbb{R}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

Démonstration Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. On construit par récurrence deux suites a et b avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, b_n]\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Initialisation : On prend tout d'abord $a_0 = m$ et $b_0 = M$. Soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Il est clair que

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_0, c]\}}_{A} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c, b_0]\}}_{B} = \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ est infini donc A ou B sont infinis. Si A est infini, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$. Si B est infini, on prend $a_1 = c_0$ et $b_0 = b_1$.

Dans tous les cas :

- $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
- $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$
- $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_1, b_1]\}$ est infini.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'on a construit

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$$

tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $b_{k+1} - a_{k+1} = \dfrac{1}{2}(b_k - a_k)$ et que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_k, b_k]\}$ est infini. Construisons a_{n+1} et b_{n+1}. Soit $c_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. Alors

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, c_n]\}}_{A_n} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c_n, b_n]\}}_{B_n}$$

est infini donc A_n ou B_n est infini. Si A_n est infini, on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Si B_n est infini, on prend $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On a bien dans tous les cas :

- $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

---

a. « *mézossi !* »

– $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est infini.

Les deux suites sont maintenant construites. On construit alors par récurrence l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$:

Initialisation : On prend $\varphi(0) = 0$. En effet, $u_0 \in [m, M] = [a_0, b_0]$.

Hérédité : Supposons avoir construit $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est infini donc il contient des éléments strictement plus grand que $\varphi(n)$. On prend par exemple pour $\varphi(n+1)$ le plus petit de ces éléments.

a et croissante, b est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites a et b sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(n)}$ converge vers λ.

3.5.2 Cas complexe

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, alors il existe une sous-suite de u qui converge.

Lemme Soient $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites bornées. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

En effet, x est bornée donc d'après le cas réel du théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite définie y' définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $y'_n = y_{\psi(n)}$ est bornée, donc il existe $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(y'_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y'_{\theta(n)} = y_{\psi\circ\theta(n)}$ et $\varphi = \psi \circ \theta$ est strictement croissante donc $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De même, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_{\varphi(n)} = x_{\psi\circ\theta(n)} = x'_{\theta(n)}$$

Où $\forall k \in \mathbb{N}$, $x'_k = x_{\psi(k)}$. Ainsi $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même convergente, donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration du théorème Soient $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $x = \Re\mathrm{e}(u)$ et $y = \Im\mathrm{m}(u)$. u est bornée donc $\exists M \geqslant 0 / \forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| = |\Re\mathrm{e}(u)| \leqslant |u_n| \leqslant M \quad \text{et} \quad |y_n| = |\Im\mathrm{m}(u)| \leqslant |u_n| \leqslant M$$

Donc x et y sont bornées. D'après le lemme, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + i y_{\varphi(n)}$ donc u converge vers $\alpha + i\beta$.

3.5.3 Suites de Cauchy

Définition

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une suite de Cauchy ou que u vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0, |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Théorème

Une suite converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, u converge vers l donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p \geqslant n_0$, $|u_p - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$,

$$\begin{array}{rcl} |u_n - u_m| & = & |u_n - l - (u_m - l)| \\ & \leqslant & |u_n - l| + |u_m - l| \\ & \leqslant & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{array}$$

$\Leftarrow$ Soit u une suite de Cauchy.

Étape 1 : Soit $\varepsilon = 42$[a]. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0$, $|u_n - u_m| < 42$. Pour $n \geqslant n_0$, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} |u_n| & = & |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \\ & \leqslant & |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ & \leqslant & 42 + |u_{n_0}| = M_1 > 0 \end{array}$$

Donc u est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max\left(M_1, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|\right)$.

Étape 2 : D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut considérer qu'il existe une sous-suite de u qui converge, donc que $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $l \in \mathbb{K}$ tels que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Montrons que u converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, \geqslant n_1$, $|u_n - u_m| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. De plus, $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2$, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{array}{rcl} |u_n - l| & = & \left|u_n - u_{\varphi(n)} + \left(u_{\varphi(n)} - l\right)\right| \\ & \leqslant & \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - l\right| \\ & \leqslant & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{car } n \geqslant n_2 \text{ et } \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_2 \end{array}$$

4 Complément : suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

4.1 Problème et angle d'attaque

On se donne $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application au moins continue. On s'intéresse aux suites définies par $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u_0 = a \in D$ (condition initiale) et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a alors $u_1 = f(a)$, $u_2 = f \circ f(a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{\circ n}(a)$[b].

Piège ! Il n'est pas toujours possible de définir une suite ainsi. On peut sortir du domaine de définition de f au bout d'un certain nombre de termes. Par exemple, si $D = [2, \infty[$ et $f(t) = \sqrt{t-2}$, pour $a = 18$: $u_1 = \sqrt{16} = 4$ est bien défini, mais $u_2 = \sqrt{2} \notin D$ donc on ne peut définir u_3.

Si $f(D) \subset D$, il n'y a pas de problème de définition : $\forall a \in D$, la suite $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est bien définie. En particulier, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il n'y a pas de problème de définition.

On supposera maintenant que $f(D) \subset D$. En pratique, D est une réunion finie d'intervalles.

---

a. On peut bien entendu prendre ici n'importe quel nombre positif. Mais 42 étant la réponse à la question de la Vie, de l'Univers et du Reste et les suites de Cauchy faisant partie du Reste, il était nécessaire que 42 apparaisse quelque part. Voir la note *a* page 7 pour plus d'explications.

b. Cette notation signifie : $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(a)$

Problème Quelle est la nature de la suite u suivant les valeurs de a ?

Recherche des points fixes de f On dit que $x \in D$ est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.

Si f admet un point fixe x, alors $f(x) = x$ puis $f \circ f(x) = x$, la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est constante et converge bien sûr vers x.

De même, si $y \in D$ vérifie $f^{\circ k}(y) = x$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ [a], alors la suite $\begin{cases} u_0 = y \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est constante à partir du rang k.

Parties stables par f Soit $X \subset D$, tel que $f(X) \subset X$, X est donc stable par f.

- Si $a \in X$, alors tous les termes de la suite $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ sont dans X. Ceci permet de réduire le domaine d'étude.
- Si $a \in D \backslash X$, posons u la suite $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Supposons que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \in X$. Alors $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in X$. Le comportement de u à l'infini sera le même que celui de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

4.2 Comportement à l'infini

4.2.1 Limites éventuelles en cas de convergence

Soit $a \in D$ et u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Supposons que u converge vers $l \in D$ [b]. Alors $f(l) = l$, c'est-à-dire que l est un point fixe par f.

Démonstration La suite (u_{n+1}) converge aussi vers l et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. u converge vers l et f est continue donc $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$, donc , par unicité de la limite d'une suite convergente, $l = f(l)$.

Bilan Si u converge vers $l \notin D$, alors $l \in \text{Adh}(D)$ donc les limites éventuelles d'une telle suite sont à rechercher parmi :
- Les points fixes de D.
- Les points adhérents à D qui ne lui appartiennent pas.

4.2.2 Représentation graphique des termes de la suite

On commence par dessiner Γ_f et la première bissectrice d'équation $y = x$. Soit $x \in D$, on commence par tracer la verticale passant par $(x, 0)$. L'ordonnée du point d'intersection de Γ_f avec cette verticale donne u_1, que l'on reporte sur la première bissectrice en traçant l'horizontale passant par le point d'ordonnée u_1. Puis on trace la verticale passant par le point de coordonnées (u_1, u_1),... Les points de la suite sont les abscisses successives des points de cette construction.

Voir figures 1 page suivante et 2 page 22 pour des exemples.

4.2.3 Monotonie éventuelle de u

Soit u : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = f(u_k) - u_k$.

Propriétés
- Si $\forall x \in D$, $f(x) - x \leqslant 0$, alors u est décroissante.
- Si $\forall x \in D$, $f(x) - x \geqslant 0$, alors u est croissante.

---

a. y est un antécédent plus ou moins lointain de x par f.
b. Si $u \in D^{\mathbb{N}}$ converge vers l avec D fermé, alors $l \in D$.

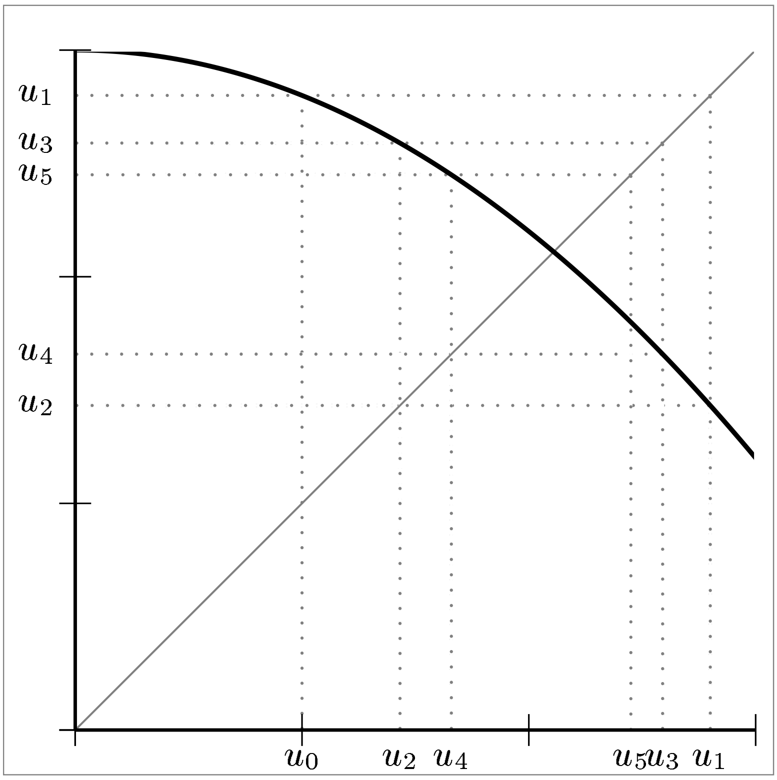

FIGURE 1 – Représentation d'une convergence dite en « escargot »

- Si $X \subset D$ est f-stable, $f(x) - x$ est de signe constant sur X et $a \in X$, alors u est monotone. Si de plus, X est borné, alors u est monotone bornée donc converge.
- En pratique, la recherche de points fixes de f conduit à l'étude de $g : x \in D \longmapsto f(x) - x$. Généralement, il y a un nombre fini de points fixes par f dans D. g est continue et s'annule un nombre finie de fois, donc g est de signe constant sur certains sous-intervalles de D. Il faut regarder si ces sous intervalles sont stables par f.

Exemple Étudier $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$. On a $D = \mathbb{R}$ et $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) - t = t\left(\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$, donc

$$\begin{aligned} f(t) - t = 0 &\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-t} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \end{aligned}$$

0 est donc l'unique point fixe par f de $\mathbb{R}$.
- Pour $t < 0$, $f(t) - t < 0$.
- Pour $t > 0$, $f(t) - t < 0$.

$\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont donc stables par f. Supposons que u converge. Alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $a = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
- Si $a > 0$, alors $\mathbb{R}_+$ est stable par f donc $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $\forall t > 0$, $f(t) - t < 0$ donc u est décroissante minorée, elle converge vers 0.
- Si $a < 0$, $\mathbb{R}_-$ est stable par f donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$. De plus $\forall t \leqslant 0$, $f(t) - t \leqslant 0$ donc u est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 0$ donc (u_n) ne peut pas converger vers 0 donc elle diverge. Comme u est décroissante, elle tend vers $-\infty$.

Retour au cas général Supposons que f est monotone sur X où$X \subset D$ est f-stable, et $a \in X$.
- Si f est croissante, alors :

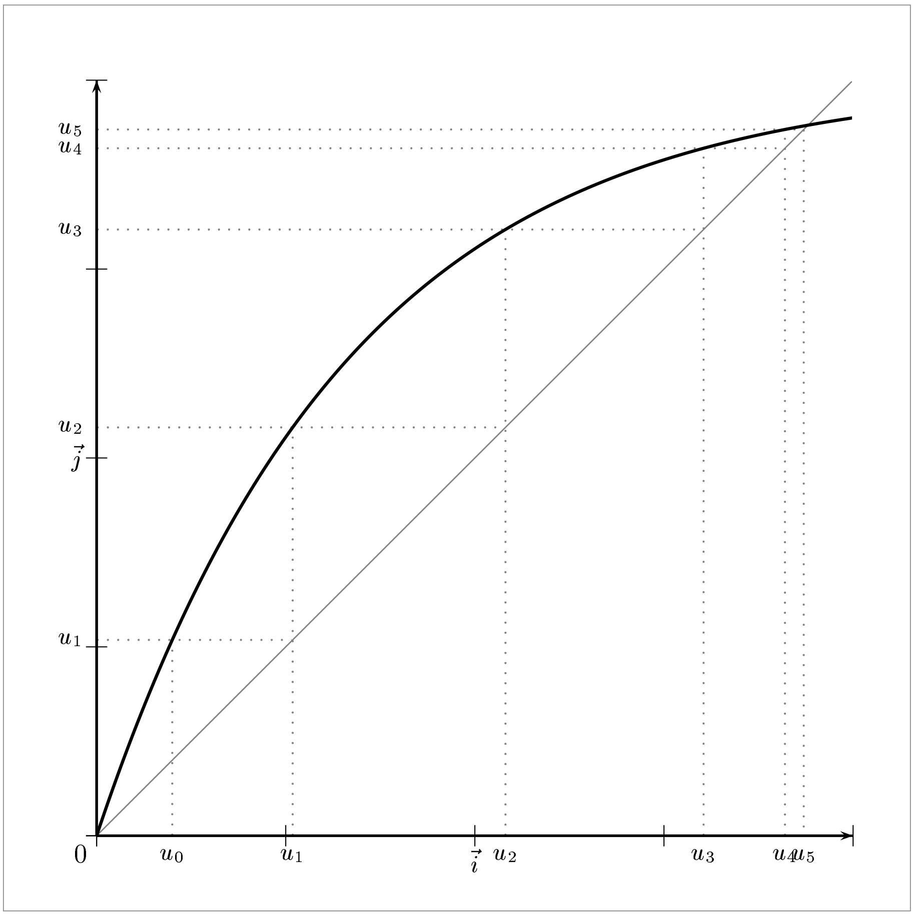

FIGURE 2 – Représentation d'une convergence dite « en escalier ».

- ○ Si $a \leqslant f(a) \Rightarrow u_0 \leqslant u_1$ donc $u_1 \leqslant u_2$ car f est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc u est croissante.
- ○ Si $a \geqslant f(a)$, alors u est décroissante.

– Si f est décroissante, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. $v_0 = a$ et $w_0 = f(a)$, et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = f \circ f(v_n) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f \circ f(w_n)$$

Si on pose $g = f \circ f$, alors g est croissante donc v et w sont monotones. De plus

$$\begin{aligned} v_n \leqslant v_{n+1} &\Leftrightarrow u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \\ &\Leftrightarrow f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) \\ &\Leftrightarrow u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3} \\ &\Leftrightarrow w_n \geqslant w_{n+1} \end{aligned}$$

v et w sont donc de monotonies opposées.

4.2.4 Cas où f est contractante et où D est un segment

On a donc $D = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ contractante [a]. Alors :

(1) f admet un unique point fixe $l \in [a, b]$.

(2) do$x \in D$, alors $u : \begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers l.

a. Ces notions seront définies dans le chapitre traitant des fonctions continues. Voir la section 11.1.1 du cours complet page 176 pour la définition de ces différents termes.

Démonstration

(1) f est contractante donc lipschitzienne donc continue. L'application

$$g:\begin{array}{rcl}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & f(t)-t\end{array}$$

est continue et $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ et $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois donc $\exists l\in[a,b]/f(l)=l$. Supposons que $l'\in[a,b]$ est un autre point fixe par f. Or f est contractante donc $\exists k\in[0,1[$ tel que $\forall s,t\in[a,b]$, $|f(s)-f(t)|\leqslant k|s-t|$ donc

$$\begin{array}{rcl}|l-l'| & = & |f(l)-f(l')|\\ & \leqslant & k|l-l'|\end{array}$$

Donc $(1-k)|l-l'|\leqslant 0$ et $1-k>0$ donc $l-l'=0\Leftrightarrow l=l'$.

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}|u_{n+1}-l| & = & |f(u_n)-l|\\ & \leqslant & |f(u_n)-f(l)|\\ & \leqslant & k|u_n-l|\end{array}$$

On montre donc par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-l|\leqslant k^n|u_0-l|$. Or $k^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc u converge vers l.

Exemple Soit $a\in[0,1]$. Étudier la suite définie par $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=\cos u_n\end{cases}$

- cos est continue, décroissante sur $[0,1]$ et $\cos([0,1])=[\cos 1,\cos 0]\subset[0,1]$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.
- cos est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1]$,

$$|\cos' t|=|\sin t|\leqslant\sin 1\leqslant 1$$

Ainsi, pour $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl}|\cos x-\cos y| & = & \left|\int_x^y\sin t\,\mathrm{d}t\right|\\ & \leqslant & \int_x^y\sin 1\,\mathrm{d}t\\ & \leqslant & \sin 1\,(y-x)\\ & \leqslant & \sin 1\,|y-x|\end{array}$$

Donc $\forall x,y\in[0,1]$, $|\cos x-\cos y|\leqslant\sin 1\,|x-y|$ et $\sin 1\in[0,1]$ donc cos est contractante donc cos admet un unique point fixe l par f et u converge vers l.

4.3 Exemple développé

Soit $a\in\mathbb{R}$, on étudie la suite u définie par

$$\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=\frac{4-u_n^2}{3}\end{cases}$$

Étude préliminaire Soit

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{4-t^2}{3} \end{array}$$

définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable, donc u est bien définie. Étudions f. Il est clair que f tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $\pm\infty$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\dfrac{2}{3}t$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.

Soit

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - t \\ &= -\frac{1}{3}t^2 - t + \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\left(t^2 + 3t - 4\right) \\ &= -\frac{1}{3}(t-1)(t+4) \end{aligned}$$

Les points fixes de g sont donc 1 et -4. f est paire donc $f(-1) = 1$ et $f(4) = -4$. Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l \in \{1, -4\}$.

t	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		2		4		$+\infty$
$f(t)-t$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f'(t)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Différenciation selon les valeurs de a

- On note que $[0,2]$ est stable par f : $f([0,2]) = \left[0, \frac{4}{3}\right] \subset [0,2]$ et f est décroissante sur $[0,2]$. Si $a \in [0,2]$ alors (u_{2n+1}) et (u_{2n}) sont monotones de monotonies opposées et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$. Les deux suites sont de plus bornées donc elles convergent toutes les deux. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. v et w convergent vers un point fixe de $f \circ f$ appartenant à $[0,2]$. Quels sont les points fixes de $f \circ f$? Soit $P(t) = f \circ f(t) - t$. Tout point fixe de f est aussi un point fixe de $f \circ f$ donc, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{3}\left(4 - \left(\frac{4-t^2}{3}\right)^2\right) - t \\ &= \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{9}\left(16 - 8t^2 + t^4\right)\right) - t \\ &= \frac{1}{27}\left(36 - \left(16 - 8t^2 + t^4\right) - 27t\right) \\ &= \frac{1}{27}\left(-t^4 + 8t^2 - 27t + 20\right) \\ &= \frac{1}{27}(t-1)(t+4)\left(-t^2 + 3t - 5\right) \end{aligned}$$

  Or $-t^2 + 3t - 5$ n'admet pas de racines réelles donc les points fixes de $f \circ f$ sont 1 et -4. Or $-4 \notin [0,2]$ et $1 \in [0,2]$ donc v et w convergent vers 1, donc u converge vers 1.
- Si $a \in [-2,0]$, alors $f(a) \in [0,2]$ donc on est ramené au cas précédent. u converge vers 1.
- Supposons que $a \in \left]-\infty, -4\right[$. $\left]-\infty, -4\right]$ est stable par f et $\forall t \in \left]-\infty, -4\right]$, $f(t) - t \leqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-\infty, -4\right]$ et u décroît donc $u_n \leqslant a < -4$ donc u ne peut converger vers -4 ou 1. Donc u diverge et u est décroissante donc elle tend vers $-\infty$.

- Si $a \in]4,+\infty[$, alors $f(a) \in]-\infty,-4[$ donc :
  - Si $f(a) = -4$, alors u converge vers -4.
  - Si $f(a) \neq -4$, alors u tend vers $-\infty$.
- Si $a \in \{\pm 1\}$, u converge vers 1.
- Si $a \in \{\pm 4\}$, alors u converge vers -4.
- Si $a \in]-4,-2[\subset [-4,2]$, alors $f([-4,2]) = \left[-4, \frac{4}{3}\right] \subset [-4,2]$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-4,2]$. Montrons que $\exists N \in \mathbb{N},\ u_n \in [-2,2]$. Si cela est vrai, alors $(u_{N+k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 donc u converge vers 1. Supposons au contraire que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \notin [-2,2]$. On a donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in [-4,-2]$. Or $\forall t \in [-4,-2],\ f(t) - t \geqslant 0$ donc u est croissante majorée par -2 donc elle converge vers 1 ou -4. Ces deux cas étant impossibles, l'hypothèse est fausse donc u converge vers 1.
- Si $a \in]2,4[$, $u_1 = f(a) \in]-4,0[$ donc, d'après le cas précédent, u converge vers 1.