Initiation à la topologie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Olivier SELLÈS, transcrit par Denis MERIGOUX

Table des matières

1 Voisinages

cns la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

1.1.1 Notations

Si $x \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors on note

$$\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{K} | \, |y - x| \leqslant \varepsilon\}$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$, alors $\overline{V_{\mathbb{K}}}(z, \varepsilon) = \overline{\mathcal{D}}(z, \varepsilon)$ [a].

1.1.2 Définition

Soit $x \in \mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$. On dit que A est un voisinage de x dans $\mathbb{K}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \subset A$$

1.1.3 Exemples

- $[0, 1[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ car $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] \subset [0, 1[$. Par contre, $[0, 1[$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ car $\forall \varepsilon > 0$, $[-\varepsilon, \varepsilon]$ contient des réels strictement négatifs donc n'est pas inclus dans $[0, 1[$.
- $[-1, 1]$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ car $\forall \varepsilon > 0$, $i\varepsilon \in \overline{\mathcal{D}}(0, \varepsilon)$ mais $i\varepsilon \notin [-1, 1]$.
- Un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.
  En effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c \in]a, b[$. Posons $\alpha = \min(c - a, b - c)$, alors $\left[c - \frac{\alpha}{2}, c + \frac{\alpha}{2}\right]$ est inclus dans $]a, b[$.

1.2 Propriétés

1.2.1 Réunions, intersection

On notera $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{K}$.

- Si $A \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$.
- Une réunion quelconque de voisinages de x est également voisinage de x.
- Une intersection finie de voisinages de x reste un voisinage de x.
  En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un $\varepsilon_i > 0$ tel que $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon_i) \subset A_i$. Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i | i \in [\![1, n]\!]\}$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i$ donc $\overline{V_k}(x, \varepsilon) \subset \overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon_i) \subset A_i$ donc

$$\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Piège ! Une intersection infinie de voisinages peut ne pas être un voisinage.
En effet, $\bigcap_{n \geqslant 1} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(0)$.

[a]. C'est le disque fermé (bord compris) de centre z et de rayon ε, en assimilant les nombres complexes à des affixes de points dans le plan complexe.

1.2.2 Formulation topologique de la convergence des suites

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{K}$. u converge vers l si et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l), \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \in V$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(l)$, alors $\exists \varepsilon > 0, \overline{V_{\mathbb{K}}}(l, \varepsilon) \subset V$. De plus u converge vers l donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ donc $u_n \in \overline{V_{\mathbb{K}}}(l, \varepsilon) \subset V$.

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$ et $V = \overline{V_{\mathbb{K}}}(l, \varepsilon)$. V est un voisinage de l dans $\mathbb{K}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in V \Leftrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

2 Parties ouvertes et fermées

2.1 Définitions, exemples

2.1.1 Définitions

Soit $A \subset \mathbb{K}$.

(1) A est un ouvert de $\mathbb{K}$ si A est voisinage de chacun de ses points.

(2) A est fermé si $\mathbb{K} \backslash A$ est ouvert.

2.1.2 Exemples

- $\varnothing$ est toujours ouvert et fermé dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}$ est toujours ouvert et fermé dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé car $[0, 1[$ n'est pas voisinage de 0 et $\mathbb{R} \backslash [0, 1[=]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas voisinage de 1 donc pas ouvert.
- Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert.
- $\forall x \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $V_{\mathbb{C}}(x, \varepsilon)$ [a] est un ouvert de $\mathbb{C}$.
  En effet, soit $y \in \mathcal{D}(x, \varepsilon)$, alors $|x - y| < \varepsilon$. Posons $r = \varepsilon - |x - y| > 0$. Soit $z \in \mathcal{D}(y, r)$, alors $|y - z| < r$ d'où :

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x - y + y - z| \\ &\leqslant |x - y| + |y - z| \\ &\leqslant |x - y| + r = \varepsilon \end{aligned}$$

  Ainsi $\mathcal{D}(y, r) \subset \mathcal{D}(x, \varepsilon)$ d'où $\overline{\mathcal{D}}\left(y, \dfrac{r}{2}\right) \subset \mathcal{D}(x, \varepsilon)$ donc $\mathcal{D}(x, \varepsilon)$ est un voisinage de y. $\mathcal{D}(x, \varepsilon)$ est un voisinage de chacun de ses points donc c'est un ouvert.
- Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A \subset \mathbb{K}$. Alors A est voisinage de x dans $\mathbb{K}$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0 / V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon) \subset A$$

  En effet :

  $\Leftarrow$ $\overline{V_{\mathbb{K}}}\left(x, \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \subset V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon) \subset A$.

  $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \subset A$ d'où $V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon) \subset A$.
- $\overline{\mathcal{D}}(x, \varepsilon)$ est un fermé dans $\mathbb{C}$.

a. $V_{\mathbb{C}}(x, \varepsilon)$ est le disque ouvert $\mathcal{D}(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - x| < \varepsilon\}$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}(x,\varepsilon)$ et $r = |y-x| > 0$. Soit $z \in \mathcal{D}(y,r)$. Montrons que $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}(x,\varepsilon) \Leftrightarrow |x-y| \geqslant \varepsilon$.

$$\begin{aligned}|x-z| &= |x-y+y-z| \\ &\geqslant ||x-y|-|y-z|| \\ &\geqslant |y-x|-|y-z| \\ &> |x-y|-r=\varepsilon\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}(y,r) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}(x,r)$.

– $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$, de même que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
En effet, $\mathbb{Q}$ n'est voisinage d'aucun de ses points dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{Q}$ ne peut contenir aucun intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$. De même, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est voisinage d'aucun de ses points.

2.2 Propriétés, exemple

2.2.1 Propriétés

(1) Une réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ouvert.

(2) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

(3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

(4) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstrations

(1) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{K}$ et $O = \bigcup_{j\in I} O_j$. Soit $x \in O$, alors $\exists i \in I$ tel que $x \in O_i$. O_i est ouvert donc est voisinage de x. De plus $O_i \subset O$ donc O est voisinage de x. O est voisinage de chacun de ses points donc O est ouvert.

(2) S $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés dans $\mathbb{K}$. Alors $O_i = \mathbb{K}\backslash F_i$ est ouvert pour $i \in I$, et $\mathbb{K}\backslash\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} O_i$ est ouvert.

2.2.2 Exemple

Tout ensemble fini de $\mathbb{K}$ est un fermé.

En effet, soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{K}$. Si $x \in \mathbb{K}$, alors $\{x\}$ est fermé car $\mathbb{K}\backslash\{x\}$ est ouvert. $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ est une réunion finie de fermés donc A est fermé.

3 Adhérence, intérieur

3.1 Définitions, remarques

3.1.1 Définitions

(1) Soit $A \subset \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$. x est intérieur à A si A est voisinage de x.

(2) L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\operatorname{Int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$.

(3) x est un point adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$.

(4) L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence de A et se note $\operatorname{Adh}(A)$ ou $\overline{A}$.

3.1.2 Remarques

- $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \mathrm{Adh}(A)$
- $$\begin{aligned} x \text{ est adhérent à } A &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / |x - a| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

  En effet :

  $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon)$ est un voisinage de x donc $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ si $x \in \mathrm{Adh}(x)$.

  $\Leftarrow$ Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\overline{V_{\mathbb{K}}}(x, \varepsilon) \subset V$ et $A \cap V \supset \underbrace{V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon) \cap A}_{\neq \varnothing}$

3.1.3 Exemples

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$. Alors $\mathrm{Int}(A) =]0, 1[$ car A n'est pas voisinage de 0, mais est voisinage de chacun de ses autres points. $\mathrm{Adh}(A) = [0, 1]$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$.
  - Si A est majorée, alors $\sup A \in \mathrm{Adh}(A)$.
  - Si A est minorée, alors $\inf A \in \mathrm{Adh}(A)$.

3.2 Théorèmes

3.2.1 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $A \subset \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$. Alors :
$$x \in \mathrm{Adh}(A) \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } x$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que $x \in \mathrm{Adh}(A)$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tel que $|x - a_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A$ tel que $|x - a_n| \leqslant 2^{-n}$. Ainsi a est une suite de points de A qui converge vers x.

$\Leftarrow$ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x et $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $a_n \in V$. Pour $n \geqslant n_0 \mathrm{De} a_n \in V \cap A \neq \varnothing$.

3.2.2 Caractérisation de l'intérieur et l'adhérence

Soit $A \subset \mathbb{K}$.

(1) $\mathrm{Int}(A)$ est ouvert dans $\mathbb{K}$, c'est même le plus grand ouvert contenu dans A.
$$A \text{ est ouvert } \Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$$

(2) $\mathrm{Adh}(A)$ est fermé dans $\mathbb{K}$. C'est le plus petit fermé de $\mathbb{K}$ qui contient A.
$$A \text{ est fermé } \Leftrightarrow A = \mathrm{Adh}(A)$$

Démonstration

(1)
- Si $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, il est ouvert.
- Supposons que $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$, montrons que $x \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$. A est voisinage de x donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\underbrace{V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon)}_{\text{ouvert}} \subset A$. Si $y \in V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon)$, $V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon)$ est un voisinage de y donc A aussi [a]. Ainsi, $y \in \mathrm{Int}(A)$ donc $V_{\mathbb{K}}(x, \varepsilon) \subset A$ et $\mathrm{Int}(A)$ est au voisinage de x.

a. *« Comme Félicie »*. Ce trait d'esprit de la part de M. Sellès se passe de commentaire.

- Soit O [a] un ouvert de $\mathbb{K}$ tel que $O \subset A$. Si $x \in O$, O est un voisinage de x donc A aussi et $x \in \text{Int}(A)$ donc $O \subset \text{Int}(A)$.
- $\Rightarrow$ Si A est ouvert, A est un ouvert contenu dans A donc il est contenu dans son intérieur. De plus, $\text{Int}(A)$ est toujours inclus dans A.

  $\Leftarrow$ $\text{Int}(A)$ est ouvert...

(2)
- Si $\text{Adh}(A) = \mathbb{K}$, $\text{Adh}(A)$ est fermé.
- Supposons que $\text{Adh}(A) \subsetneq \mathbb{K}$ et montrons que $\mathbb{K}\backslash\text{Adh}(A)$ est ouvert. Soit $x \notin \text{Adh}(A)$, alors il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(x)$ tel que $V \cap A = \varnothing$. Soit $\varepsilon > 0$, $\underbrace{V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon)}_{\text{ouvert}} \subset V$. Si $y \in V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon)$, $V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon)$ est un voisinage de y tel que $(V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon) \cap A) \subset (V \cap A) = \varnothing$ donc y n'est pas adhérent à A donc

$$V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon) \subset \mathbb{K}\backslash\text{Adh}(A)$$

  Donc $\mathbb{K}\backslash\text{Adh}(A)$ est voisinage de x, donc $\mathbb{K}\backslash\text{Adh}(A)$ est ouvert.
- Soit F un fermé qui contient A. $O = \mathbb{K}\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Si $x \in O$, O est voisinage de x donc $O \cap F = \varnothing$ donc $O \cap A = \varnothing$: x n'est pas adhérent à A donc $O \subset \mathbb{K}\backslash\text{Adh}(A)$ donc $\text{Adh}(A) \subset F$.
- $\Rightarrow$ Si A est fermé, A est un fermé de $\mathbb{K}$ qui contient A donc il contient son adhérence. L'inclusion inverse est toujours vraie.

  $\Leftarrow$ Si $A = \text{Adh}(A)$, A est toujours fermé car $\text{Adh}(A)$ est fermé.

Remarques
- $\text{Adh}(\text{Adh}(A)) = \text{Adh}(A)$ et $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$.
- $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$, $\text{Adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ alors

$$]a,b[= \begin{cases} \text{Int}(]a,b[) \\ \text{Int}([a,b[) \\ \text{Int}(]a,b]) \\ \text{Int}([a,b]) \end{cases} \quad \text{et} \quad [a,b] = \begin{cases} \text{Adh}(]a,b[) \\ \text{Adh}([a,b[) \\ \text{Adh}(]a,b]) \\ \text{Adh}([a,b]) \end{cases}$$

- $\text{Adh}(V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon)) = \overline{V_{\mathbb{K}}}(x,\varepsilon)$ et $\text{Int}\left(\overline{V_{\mathbb{K}}}(x,\varepsilon)\right) = V_{\mathbb{K}}(x,\varepsilon)$
- Si $A \subset B$, alors $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.

3.2.3 Fermeture et convergence

Soit $A \subset \mathbb{K}$, A est fermé si et seulement si pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in \mathbb{K}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in A$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $a \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, et posons $x = \lim a_n$. Alors x est limite d'une suite de points de A donc x adhère à A donc $x \in A$ car $\text{Adh}(A) = A$ (A est fermé).

$\Leftarrow$ Soit $x \in \text{Adh}(A)$, x est limite d'une suite de points de A donc $x \in A$ donc $\text{Adh}(A) \subset A$. L'inclusion inverse étant toujours vraie, $\text{Adh}(A) = A$ donc A est fermé.

3.3 Parties compactes de $\mathbb{K}$

3.3.1 Définition

Soit $\Lambda \subset \mathbb{K}$. Λ est compacte si pour toute suite $(x_n) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément de Λ.

a. *« O comme Olivier. Merveilleux prénom, n'est-ce pas ? »*. Il est inutile de préciser que M. Sellès allie l'humilité à l'humour.

3.3.2 Théorème

Soit $\Lambda \subset \mathbb{K}$. Λ est compacte si et seulement si Λ est fermée et bornée.

Démonstration

$\Rightarrow$ – Montrons que Λ est bornée. Supposons qu'elle ne l'est pas. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\,(x_n) \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ telle que $|x_n| > n$. (x_n) est une suite d'éléments de Λ. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|x_{\varphi(n)}\right| \geqslant |x_n| > n$eronc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ n'est pas bornée donc par convergente. Ce qui voudrai dire qu'aucune sous-suite de x n'est convergente, ce qui est impossible.

– Montrons que Λ est fermé. Soit a une suite convergente d'éléments de Λ. Montrons que $\lim a_n \in \Lambda$. Soit $x = \lim a_n \in \mathbb{K}$, Λ est compacte donc il existe une sous-suite de a qui converge vers vers un élément $y \in \Lambda$. Mais comme a converge, cette sous-suite converge aussi vers x donc $x = y \in \Lambda$ par unicité de la limite d'une suite convergente.

$\Leftarrow$ Soit $x \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, Λ est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \Lambda$, $|n| \leqslant M$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \Lambda$ donc $|x_n| \leqslant M$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$. l est limite d'une suite d'éléments de Λ donc $l \in \operatorname{Adh}(\Lambda)$or Λ est fermé donc $l \in \Lambda$.

Exemples

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\overline{\mathcal{D}}(z, r)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.
- Une réunion finie de parties compactes est une partie compacte.