Premier problème : développement de cotangente et application

I : une série entière.

On pose, pour $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x}$$

1. n étant un entier fixé au moins égal à 1 montrer que la fonction $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 - x}$ est développable en série entière.
2. Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$,
3. Déterminer une relation entre les dérivées $f^{(p)}(0)$ et les sommes $\alpha_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$.

II : equation fonctionnelle de la cotangente

Dans cette partie on determine une autre expression de la série précédente

4. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On suppose que g vérifie la condition (C) suivante :

$$(C)\left\{\begin{array}{lll} g(x+1) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} & (1) \\ g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x) & \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} & (2) \\ \lim\limits_{0} g(x) = 0 & & (3) \end{array}\right.$$

   (a) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (qu'on note encore g).
   (b) Soit M la borne supérieure de la fonction g sur le segment $[0,1]$.On note E l'ensemble des nombres t de ce segment qui vérifient $g(t) = M$. Démontrer que E est non vide et que si t est élément de E alors $\dfrac{t}{2}$ l'est également.
   (c) Montrer que $M = 0$. En déduire que g est la fonction nulle.

5. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{-n}^{n} \frac{1}{k+x}$.Montrer que la suite $S_n(x)$ converge simplement vers la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x} - 2xf(x^2)$, f étant la fonction étudiée dans la première partie.

6. Démontrer que h vérifie les propriétés (1) et (2) de la condition (C) .
   on commencera par donner une expression simplifiée de $S_n(x+1) - S_n(x)$ *et de* $S_n(\frac{x}{2}) + S_n(\frac{x+1}{2}) - 2S_{2n}(x)$

7. On peut montrer en utilisant des formules de trigonométrie que la fonction $k(x) = \pi\text{cotan}\,(\pi x)$ vérifie également les propriétés (1) et (2) de la condition (C) . Il n'est pas demandé de le faire.

   En déduire que l'on a pour tout x élément de $]-1,1[\backslash\{0\}$,
   $\pi\text{cotan}(\pi x) = \dfrac{1}{x} - 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^{2n+1}$

8. Application : il est facile de vérifier que la fonction cotangente possède le développement limité généralisé suivant :

$$\frac{1}{\tan u} = u^{-1} - \frac{1}{3}u - \frac{1}{45}u^3 - \frac{2}{945}u^5 + O(u^7).$$

   Déterminer la valeur des sommes α_1, α_2 et α_3.

III : optionnel

Dans cette partie on explicite davantage les coefficients α_p.

9. (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_n$ de nombres rationnels telles que $b_0 = 1$ et pour $n > 0$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} b_i = 0$.

(b) Calculer b_1, b_2.

(c) Etablir que $|b_n| \leq n!$.

10. En déduire que l'on a , pour tout z tel que $|z| < 1$, $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$.

    Montrer que le rayon de convergence R de cette série ne peut excéder π.

11. On pose $\psi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$, montrer que $\psi(-z) = \psi(z) + z$; en déduire que $b_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$. Retrouver b_1.

12. Démontrer que pour tout réel $u \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$ on a l'égalité $u \cot an(u) = iu + \psi(2iu)$.

13. A l 'aide des résultats précédents établir l'égalité : $\alpha_p = (-1)^{p-1} b_{2p} \dfrac{\pi^{2p} 2^{2p-1}}{(2p)!}$.

    Finalement combien vaut R ?

Second problème

Dans ce problème, α et λ sont deux réels non nuls, $\alpha > 0$ et $|\lambda| < 1$. On considère l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x) \qquad (E)$$

On se propose de résoudre cette équation à l'aide de séries entières.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) développable en série entière et vérifiant $f(0) = c$. Déterminer le rayon de convergence de cette série.

   Préciser la condition (C) pour que cette série soit un polynôme.

2. On suppose la condition (C) non satisfaite. On écrit $f(x) = \displaystyle\sum_0^\infty a_n x^n$.

   On se propose de trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   (a) Un lemme de comparaison :
   On considère deux séries entières $u(x) = \sum u_n x^n$ et $v(x) = \sum v_n x^n$ de rayon $+\infty$.
   On fait en outre l'hypothèse que $v_n = o(u_n)$ et que u_n est strictement positif.

      i. Soit ε un réel positif. Par hypothèse il existe N tel que pour $n > N$ on ait $|v_n| \leq \varepsilon u_n$
      Démontrer qu'il existe un polynôme P_ε tel que l'on ait pour tout x positif

      $$|v(x)| \leq \varepsilon u(x) + P_\varepsilon(x)$$

      ii. Démontrer que $P_\varepsilon(x)$ est négligeable devant $u(x)$ quand x tend vers l'infini.

      iii. Conclure que $v(x) = o(u(x))$ quand x tend vers l'infini.

   (b) Démontrer la convergence de la suite de terme général $(n)!\alpha^{-n} a_n$.

   (c) Déduire des deux question précédentes qu'il existe une constante k telle que la fonction f vérifie l'équivalent

   $$f(x) \sim k e^{\alpha x}$$

   quand x tend vers l'infini. Il n'est pas demandé de déterminer la constante k.

3. Soit g une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g(0) = c$

   (a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $g^{(p)}(x)$ en fonction de $g^{(p-1)}, \alpha, \lambda$.

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}^+$.
   Démontrer l'existence d'une constante κ_a telle que l'on ait pour tout $x \in [-a, a]$ et tout p,

   $$|g^{(p)}(x)| \leq \kappa_a |\alpha|^p$$

   On pourra éventuellement se contenter montrer le résultat plus faible mais suffisant suivant

   $$|g^{(p)}(x)| \leq \kappa_a (|\alpha| + 1)^p$$

   (c) En déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

4. Qu'a t'on finalement prouvé pour les solutions de l'équation différentielle (E) ?