DROT : Correction

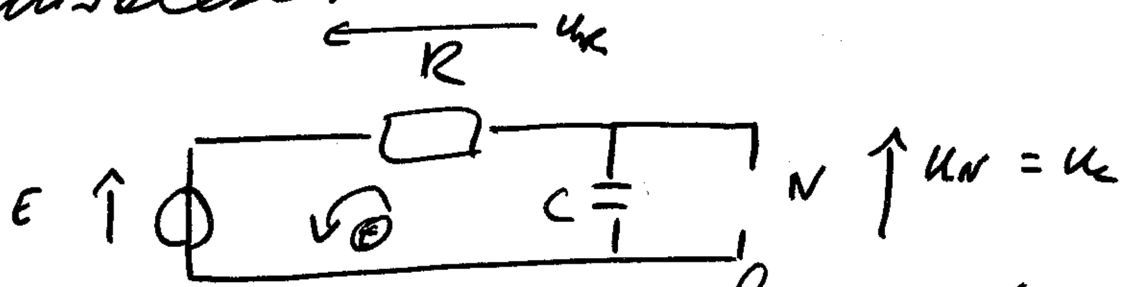
Exercice 1 : Lampe au néon

A $t=0$, le condensateur est déchargé, alors $u_C(t=0^-)=0$.

et par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a :

$$u_C(t=0^+)=u_C(t=0^-)=0,$$

et ici, $u_C(t=0) < u_E$, la lampe est éteinte, on a alors le schéma équivalent :



On étudie alors la charge du condensateur entre $t=0$ et t_A.

La loi des mailles nous donne :

$$E = u_R + u_C$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC},$$

$$\frac{du_N}{dt} + \frac{1}{RC}u_N = \frac{E}{RC}.$$

On sait que la solution d'une telle

équation est :

$$\begin{cases} u_N(t) = E + A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right), \quad A \in \mathbb{R}, \tau = RC, \\ u_N(t=0) = 0, \end{cases}$$

alors $A = -E$, $\boxed{u_N(t) = E\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)}$

entre $t = 0$ et t_A.

On détermine t_A avec :

$u_N(t_A) = 90{,}0\,V = u_A$ d'une part,

$u_N(t_A) = E\left(1 - \exp\left(\frac{-t_A}{\tau}\right)\right)$ d'autre part.

On en déduit : $\boxed{t_A = \tau \ln\left(\frac{E}{E - u_A}\right) = 0{,}897\ s}$

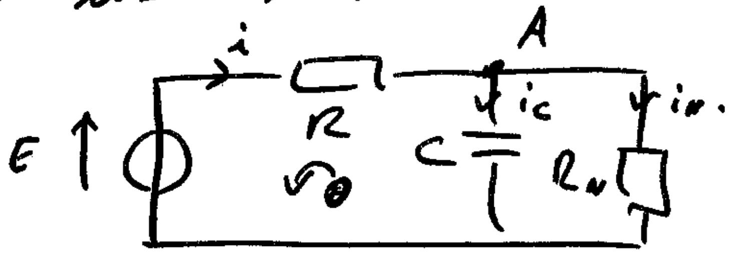
Le condensateur emmagasine une certaine énergie :

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t_A} u_c\, i\, dt = \int_{t=0}^{t_A} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c^2(t)\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} C u_c^2(t)\right]_{t=0}^{t_A} = \frac{1}{2} C u_A^2,$$

$$\boxed{\mathcal{E}_C = 6{,}08 \cdot 10^{-4}\ J.}$$

Une fois la lampe atteinte, le dipôle N devient une résistance R_N.



On applique la loi des noeuds en A :

$$i = i_C + i_N .$$

et la loi des mailles fournit :

$$E = u_R + u_N = u_R + u_C .$$

$$E = Ri + u_N = R i_C + R i_N + u_N$$

$$E = RC\frac{du_N}{dt} + \frac{R}{R_N}u_N + u_N$$

d'où $$\boxed{\frac{du_N}{dt} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R}\right)u_N = \frac{E}{RC}} .$$

On en déduit, en comparant les valeurs de R_N et de R, que :

$$\frac{1}{R_N} \gg \frac{1}{R} ,$$ soit :

$$\boxed{\frac{du_N}{dt} + \frac{1}{R_N C}u_N = \frac{E}{RC}} .$$

On a alors la solution avec sa condition en t_A, sachant que u_C et donc u_N est continue en t_A :

$$\begin{cases} u_N(t) = E\dfrac{\tau'}{\tau} + B\exp\left(\dfrac{-t}{\tau'}\right), \quad B \in \mathbb{R}, \quad \tau' = R_N C \\ u_N(t_A^-) = u_N(t_A^+) = u_A . \end{cases}$$

alors $B = -E\dfrac{\tau'}{\tau} + u_A$,

on en déduit que :

$$u_N(t) = E\frac{\tau'}{\tau} + \left(u_A - E\frac{\tau'}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{(t-t_A)}{\tau'}\right)$$

pour $t \geq t_A$.

Or, ici, $E\frac{\tau'}{\tau} \ll u_A$, on simplifie dans l'expression :

$$\underline{u_N(t) = E\frac{\tau'}{\tau}} + u_A \exp\left(\frac{-(t-t_A)}{\tau'}\right).$$

$$\boxed{u_N(t) = u_A \exp\left(-\frac{(t-t_A)}{\tau'}\right), \; t \geq t_A.}$$

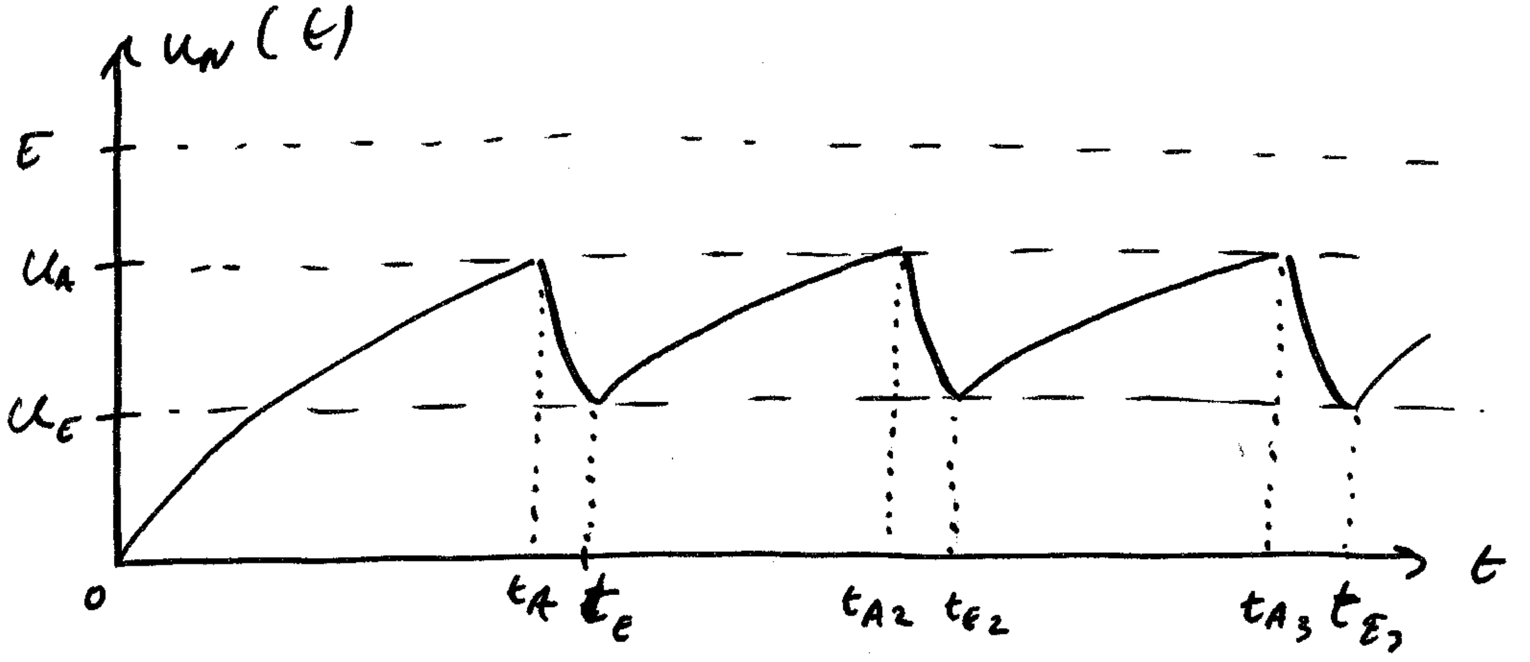
Une fois la lampe allumée, le condensateur se décharge jusqu'à l'instant t_E tel que :

$$u_N(t_E) = u_E = 70{,}0\,V$$

et $u_N(t_E) = u_A \exp\left(\frac{-(t_E - t_A)}{\tau'}\right)$.

d'où $\boxed{t_E - t_A = \tau' \ln\left(\frac{u_A}{u_E}\right) = 3{,}77 \cdot 10^{-4}\,s.}$

On a alors l'allure suivante :



On cherche maintenant la durée jusqu'à la nouvel mise en service de la lampe :

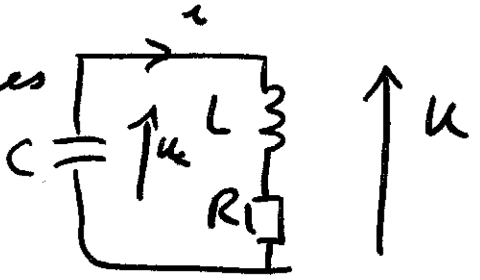
$$\boxed{t_{A_2} - t_E = \tau \ln\left(\frac{E-u_E}{E-u_A}\right) = 0,25\ s}.$$

On remarque que $t_E - t_A \ll t_{A_2} - t_E$, alors, la durée entre deux flashes, très courts, est de $T = t_{A_2} - t_E$. À cette période il est possible d'associer une fréquence,

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = 3,98\ Hz}.$$

Exercice 2 : Régime critique.

1) On a les caractéristiques suivante :



$$i = -C\frac{du}{dt}, \quad u_L = L\frac{di}{dt}.$$

et $u = u_C = u_L + u_R = L\frac{di}{dt} + Ri$,

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0},$$

2) On cherche alors R tel que le discriminant du polynôme associé soit nul.

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - 4\cdot\frac{1}{LC} = 0,$$

$$\boxed{R = 2\sqrt{L/C}}, \quad R = 600\ \Omega.$$

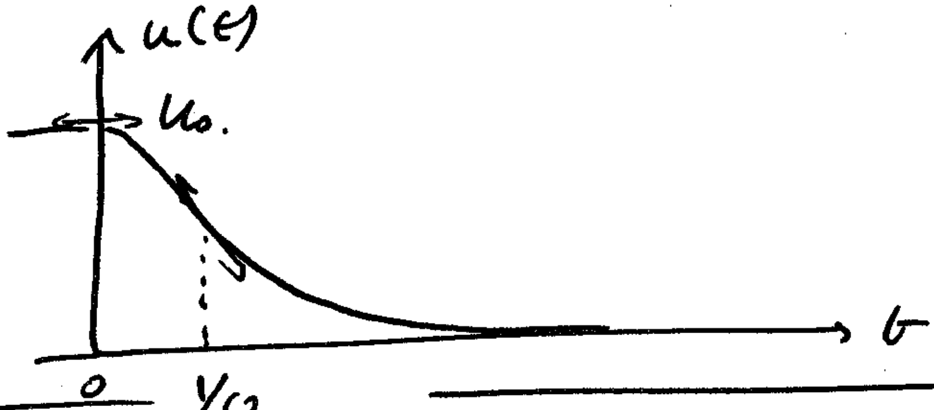
On a alors la solution suivante :

$$u(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t), \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

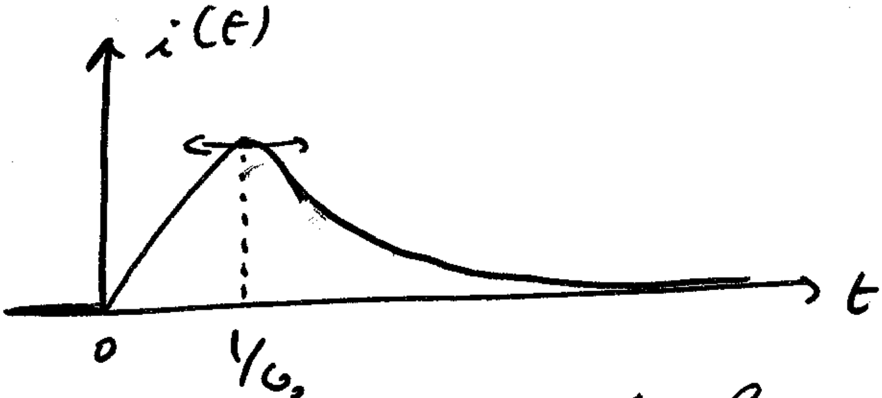
et $\begin{cases} u(0) = U_0 & \text{par continuité de } u. \\ \dfrac{du}{dt}(0) = -\dfrac{i(0)}{dt} = 0, \end{cases}$

alors $B = 0$, $A = \omega_0 U_0$,

d'où $\boxed{u(t) = U_0(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t).}$



3) et $\boxed{i(t) = -C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{U_0}{L}\, t \exp(-\omega_0 t).}$



4) Toute l'énergie initialement dans C est dissipée dans R par effet Joule :

$$\boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C U_0^2 = 180\,\mu J}.$$