9.8 / 20

Numéro de place | 5 0 2 4 7 1

Numéro d'inscription | 5 3 8 9 9

Signature

Nom | X H O F F R A Y

Prénom | N I L S

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Mathématique 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 01 / 02

I - Resultats préliminaire

A - Calcul d'une intégrale classique

1. On a $n \in \mathbb{N}$ non nul et $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ on pose $u = 1+t^2$ on a donc que $t = \sqrt{u-1}$ et $dt = \frac{du}{2\sqrt{u-1}}$.

Ainsi on trouve que $I_n = \int_1^2 \frac{du}{2u^n\sqrt{u-1}} = \left[\frac{\sqrt{u-1}}{u^n}\right]_1^2 + n\int_1^2 \frac{\sqrt{u-1}}{u^{n+1}} du$

or $\forall u \in [1,2]$ $u \mapsto n\frac{\sqrt{u-1}}{u^{n+1}} \geq 0$ donc $\int_1^2 n\frac{\sqrt{u-1}}{u^{n+1}} du \geq 0$

Ainsi on trouve que $I_n \geq \left[\frac{\sqrt{u-1}}{u^n}\right]_1^2 = \frac{1}{2^n}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul on a que : $\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t^{2n}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$

or $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère de Riemann et positive

donc $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a donc que K_n bien définie.

De plus $K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

3. $\forall t \in [1,+\infty[$ $1+t^2 \geq 2t$ et donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(2t)^n}$ de la même manière $\frac{n2^n}{(1+t^2)^n} \leq \frac{n2^n}{(2t)^n} = \frac{n}{t^n}$.

Ainsi on trouve que $\int_1^{+\infty} \frac{n2^n}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{n}{t^n} dt = -[t^{-n+1}]_1^{+\infty} = 1$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{n2^n}{(1+t^2)^n} dt \leq 1$ on a donc bien que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{n2^n}$

et la suite qui : $n \mapsto 1$ est bornée sur $\mathbb{N}$ donc : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$

9.8 / 20

Ne rien écrire dans la partie barrée

4. On a $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} + \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

donc $I_n = K_n - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$

donc $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{n2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} K_n + 0 = \lim_{n\to+\infty} K_n$

On a donc que $\frac{I_n}{K_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et finalement que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n$

5. On a $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ en posant $u = 1+t^2$ on trouve $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{du}{2u^n\sqrt{u-1}}$

$= \left[\frac{\sqrt{u-1}}{u^n}\right]_1^{+\infty} + n\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u-1}}{u^{n+1}} du = n\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u-1}}{u^{n+1}} du$

or $K_n - K_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ et en effectuant $u = 1+t^2$

on trouve que $K_n - K_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{u-1}{2\sqrt{u-1}\,u^{n+1}} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u-1}}{2u^{n+1}} du$

finalement on a que $K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$ donc que $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$

6. ~~On a trouvé que $K_{n+1} = K_n - \frac{1}{2n} K_n$ c'est à dire que $K_{n+1} = f(K_n)$~~

~~avec $f : t \mapsto 1 - \frac{1}{2t}$, f croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$~~

~~donc $K_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puis $K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$~~ (voir page d'après)

7. $\sqrt{n} I_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{n}}{(1+t^2)^n} dt$ on pose le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ avec $dt = \frac{du}{\sqrt{n}}$

et $\sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \frac{du}{\sqrt{n}} = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}$

8. Soit $u \in [0, \sqrt{n}]$ $\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n\left(\frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-u^2 + o(1)\right)$ donc $\frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-u^2}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ non nul et $u \in [0, \sqrt{n}]$ $\left|\dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}\right| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ intégrable sur $[0, \sqrt{n}]$

donc par convergence dominée : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$

6. On a trouvé que $K_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) K_n = \frac{2n-1}{2n} K_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \ldots \times 2} K_n$

$= \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}} \sqrt{4\pi n} \times \dfrac{1}{2^{2n} \frac{n^{2n}}{e^{2n}} 2\pi n} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{\pi n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$

donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} K_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

9. On a donc que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$

et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ en posant $t = \sqrt{2}u$ on a $du = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \dfrac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est paire car $e^{-\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{(-u)^2}{2}}$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{4\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

B- Comportement asymptotique de $1 - \phi$

10- On a $x > 0$ si pour tout $t \geq x$ $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$ donc $0 \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)\, dt$

et $\int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)\, dt = \left[-\frac{\varphi(t)}{x}\right]_x^{+\infty}$ car $\frac{d\varphi(t)}{dt} = -t\varphi(t)$ puis $\int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\varphi(t)dt = \frac{\varphi(x)}{x}$

Ainsi on a bien que $\int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt \leq \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

12. On a que $\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$ donc $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \geq \phi(x) \geq -\frac{\varphi(x)}{x}$

et finalement $1 - \frac{x}{x^2+1} \geq 1 - \phi(x) \geq 1 - \frac{\varphi(x)}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ et

~~par croissance comparée~~ $\frac{\varphi(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ donc par encadrement $1 - \phi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

C- une inégalité maximale

13. l'évènement $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

14. les $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux ~~indépendants~~ incompatibles et forment un système quasi complet d'évènements et $P(A_n \cap \{|R_n|<x\}) = 0$

donc $P(A) = \sum_{p=1}^{n} P(A_p) = P(A_n) + \sum_{p=1}^{n-1} P(A_p \cap \{|R_n|<x\})$

car pour tout $p \le n-1$ $P(A_p) = P(A_p\cap\{|R_n|<x\})$

donc $P(A) = P(A_n) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p\cap\{|R_n|<x\}) \le P(\{|R_n|\ge x\}) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p\cap\{|R_n|<x\})$

15. soit $p\in[\![1,n]\!]$ si on considère $A_p\cap\{|R_n|<x\}$ vérifié alors on a

$|R_n|<x$ et $|R_p|\ge 3x$ et $|R_n-R_p| \ge \big||R_n|-|R_p|\big| > |-2x| = 2x$

donc on a $|R_n-R_p| > 2x$ donc on a bien que $A_p\cap\{|R_n|<x\}\subset A_p\cap\{|R_n-R_p|>2x\}$

16. Par croissance de la probabilité on a que $P(A)\le P\{|R_n|\ge x\} + \sum_{p=1}^{n} P(A_p\cap\{|R_n|<x\})$

$\le P\{|R_n|\ge x\} + \sum_{p=1}^{n} P(A_p\cap\{|R_n-R_p|>2x\})$

II- Étude d'une suite de fonctions

A-

18. soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$ $x_{n,k}+x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}}$

$= -2\sqrt{n} + 2\sqrt{n} = 0$ donc $x_{n,n-k} = -x_{n,k}$

19. soit $n\in\mathbb{N}^*$ B_n est définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ et plus précisément constante sur ses intervalles de définition, donc B_n majorée sur $\mathbb{R}$ car elle est bornée.

et $\frac{d}{dx}\varphi(x) = -x\varphi(x)$ car φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) > 0$

donc on a :

$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
	0 ↗	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘ 0

donc $\varphi(x)$ admet un maximum global en 0 de valeur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

ainsi comme $|B_n(x)-\varphi(x)| = |\varphi(x)-B_n(x)|$ $\forall x\in\mathbb{R}$, et que la fonction $x\mapsto\varphi(x)-B_n(x)$ est majorée ~~et atteint ses bornes~~,

Ainsi on a bien l'existence de $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)-B_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|B_n(x)-\varphi(x)| = \Delta_n$

9.8 / 20

Numéro de place: 5 0 2 4 7 1

Numéro d'inscription: 5 3 8 9 3

Signature

Nom: X H O F F R A Y

Prénom: N I L S

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve: Mathématique 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 02 / 02

II- Étude d'une suite de fonctions

A-

20- La fonction $x \mapsto B_n(x) - \rho(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\sup\limits_{u \leq 0} |B_n(u) - \rho(u)| = \sup\limits_{u \geq 0} |B_n(u) - \rho(u)|$

ainsi $\sup\limits_{u \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \rho(x)| = \Delta_n = \sup\limits_{u \geq 0} |B_n(u) - \rho(u)|$.

B-

22. $k!\,(n-k)! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\ \frac{(n-k)^{(n-k)}}{e^{n-k}} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ pour $k \in I_n$

$\underset{n\to+\infty}{=} 2\pi\, k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-k} e^{-n+k} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\underset{n\to+\infty}{=} 2\pi\, k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

23. $B_n(u_{n,k}) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{n^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{1}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2^{k+\frac{1}{2}} \times 2^{n-k+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}} \times n^{n-k+\frac{1}{2}}}} \times \frac{1}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}}$

24. $B_n(u_{n,k}) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{\Lambda}{n}\right)}{\sqrt{n}^{k+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{n}^{-k-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}}$

$\underset{n\to+\infty}{=}$

9.8 / 20

Ne rien écrire dans la partie barrée