Matrices du type $M(a,b) = aI_n + b\sum_{i\neq j} E_{i,j}$

Pour $n \geqslant 2$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$M(a,b) = aI_n + b\sum_{i\neq j} E_{i,j} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

1) La matrice $M(1,1)$.

On pose $J_n = M(1,1)$. On observe que $J_n^2 = M(n,n) = nJ_n$. Montrons alors par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_n^p = n^{p-1}J_n$.

- $J_n^1 = J_n = n^0 J_n$. Donc, l'égalité est vraie quand $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $J_n^p = n^{p-1}J_n$. Alors, $J_n^{p+1} = J_n \times J_n^p = J \times n^{p-1}J_n = n^{p-1}J_n^2 = n^{p-1}.nJ_n = n^p J_n$.

Le résultat est démontré par récurrence. On note que le résultat est faux quand $p = 0$ car $I_n \neq \dfrac{1}{n}J_n$.

2) Structure de $\{M(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

a) Structure d'espace vectoriel.

Soit $\mathscr{E} = \{M(a,b),\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$. Soit $K_n = M(0,1) = \sum_{i\neq j} E_{i,j}$. Alors,

$$\mathscr{E} = \{aI_n + bK_n,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}\,(I_n, K_n)\,.$$

Donc, $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +, .)$, de dimension inférieure ou égale à 2. De plus, la matrice K_n n'est pas une matrice scalaire et donc la famille (I_n, K_n) est libre. Finalement,

$\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +, .)$ de dimension 2.

(I_n, J_n) est une autre famille libre de $\mathscr{E}$ (car J_n n'est pas une matrice scalaire), de cardinal 2. Donc,

Une base de $\mathscr{E}$ est (I_n, J_n).

On note que $K_n = J_n - I_n$ et donc, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $M(a,b) = aI_n + bK_n = aI_n + b\,(J_n - I_n) = (a-b)I_n + bJ_n$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ M(a,b) = (a-b)I_n + bJ_n$.

b) Structure d'algèbre.

Vérifions que $\mathscr{E}$ est stable pour le produit matriciel. Tout d'abord, $K_n = J_n - I_n$ (ou encore $J_n = I_n + K_n$) puis, puisque les matrices J_n et $-I_n$ commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$K_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)\,(I_n + K_n) + I_n = (n-1)I_n + (n-2)K_n.$$

Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(a',b') &= (aI_n + bK_n)\,(a'I_n + b'K_n) = aa'I_n + (ab' + ba')K_n + bb'K_n^2 \\ &= aa'I_n + (ab' + ba')K_n + bb'\,((n-1)I_n + (n-2)K_n) \\ &= (aa' + (n-1)bb')\,I_n + (ab' + ba' + (n-2)bb')\,K_n \\ &= M\,(aa' + (n-1)bb', ab' + ba' + (n-2)bb') \in \mathscr{E}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{E}$ est stable pour le produit matriciel. En tenant compte de $I_n = M(1,0) \in \mathscr{E}$, on a montré que

$\mathscr{E}$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +, ., \times)$.

4) Inversibilité et inverse.

a) Déterminant de $M(a,b)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\det(M(a,b)) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \dots & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \ \text{(par linéarité par rapport à la première colonne)}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \ (\forall i \in [\![2,n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \ \text{(déterminant triangulaire).}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \det(M(a,b)) = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

b) Inversibilité et inverse de $M(a,b)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$M(a,b) \notin GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -(n-1)b.$$

Donc,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ M(a,b) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow a \neq b \text{ et } a \neq -(n-1)b.$$

Pour déterminer l'inverse de $M(a,b)$, on détermine un polynôme annulateur de $M(a,b)$ dont le coefficient constant n'est pas nul. On profite des égalités $J_n^2 = nJ_n$ et $M(a,b) = (a-b)I_n + bJ_n$ de sorte que $bJ_n = M(a,b) - (a-b)I_n$. Puisque les matrices $(a-b)I_n$ et bJ_n commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$\begin{aligned}(M(a,b))^2 &= ((a-b)I_n + bJ_n)^2 = (a-b)^2 I_n + 2b(a-b)J_n + b^2J_n^2 = (a-b)^2I_n + 2b(a-b)J_n + nb^2J_n \\ &= (a-b)^2I_n + (2(a-b)+nb)bJ_n = (a-b)^2I_n + (2a-(n-2)b)\,(M(a,b) - (a-b)I_n) \\ &= (2a-(n-2)b)\,M(a,b) - (a-b)(a+(n-1)b)I_n\end{aligned}$$

et donc

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (M(a,b))^2 - (2a-(n-2)b)\,M(a,b) + (a-b)(a+(n-1)b)I_n = 0_n.$$

On suppose de plus $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$. Dans ce cas, $(a-b)(a+(n-1)b) \neq 0$ (et $M(a,b) \in GL_n(\mathbb{C})$ d'après le paragraphe précédent) puis

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\left(-(M(a,b))^2 + (2a-(n-2)b)\,M(a,b)\right) \\ &= \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\left(-M(a,b) + (2a-(n-2)b)\,I_n\right) \times M(a,b).\end{aligned}$$

Donc, pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$,

$$(M(a,b))^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\left(-M(a,b) + (2a-(n-2)b)\,I_n\right).$$

Plus explicitement, $(M(a,b))^{-1} = \dfrac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a-(n-2)b & 2a-(n-1)b & \dots & 2a-(n-1)b \\ 2a-(n-1)b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2a-(n-1)b \\ 2a-(n-1)b & \dots & 2a-(n-1)b & a-(n-2)b \end{pmatrix}$

4) Valeurs propres et sous-espaces propres de $M(a,b)$

Dans le cas où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $M(a,b)$ est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. Dans le cas où $(a,b) \notin \mathbb{R}^2$, on ne dispose d'un tel résultat préliminaire.

$\text{rg}\,(M(a,b)-(a-b)I_n) = \text{rg}\,(bJ_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } b \neq 0 \\ 0 \text{ si } b = 0 \end{cases}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}\,(M(a,b)-(a-b)I_n)) = \begin{cases} n-1 \text{ si } b \neq 0 \\ n \text{ si } b = 0 \end{cases}$. Dans tous les cas, $\text{Ker}\,(M(a,b)-(a-b)I_n)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (puisque $n \geqslant 2$) et donc $a-b$ est valeur propre de $M(a,b)$. L'ordre de multiplicité de $a-b$ est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé, elle-même supérieure ou égale à $n-1$. Donc, dans tous les cas, $a-b$ est valeur propre d'ordre $n-1$ au moins.

Il manque une valeur propre λ. Celle-ci est fournie par la trace :

$$\lambda + (n-1)(a-b) = \text{Tr}(M(a,b)) = na$$

et donc $\lambda = a+(n-1)b$. Dans tous les cas,

$$\text{Sp}(M(a,b)) = (\underbrace{a-b,\dots,a-b}_{n-1}, a+(n-1)b).$$

Plus précisément, $a-b = a+(n-1)b \Leftrightarrow nb = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Donc,

Si $b \neq 0$, $M(a,b)$ admet $a-b$ pour valeur propre d'ordre $n-1$ et $a+(n-1)b$ pour valeur propre d'ordre 1
et si $b = 0$, $M(a,b)$ admet a pour valeur propre d'ordre n.

On note que dans tous les cas, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ M(a,b) \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Déterminons enfin les sous-espaces propres de $M(a,b)$. Si $b = 0$, $M(a,b) = aI_n$ et donc $M(a,b)$ admet a pour unique valeur propre d'ordre n et le sous-espace propre associé est $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Dorénavant, $b \neq 0$ de sorte que $M(a,b)$ admet $a-b$ pour valeur propre d'ordre $n-1$ et $a+(n-1)b$ pour valeur propre simple.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $M(a,b)U = (a+(n-1)b)U$ et donc, puisque $U \neq 0$, U est (pour tout choix de (a,b)) un vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $a+(n-1)b$. Puisque le sous-espace propre correspondant est une droite vectorielle, on a donc $E_{a+(n-1)b}(M(a,b)) = \text{Vect}(U)$.

Si a et b sont réels, on sait que les sous-espaces propres de $M(a,b)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc, $E_{a-b}(M(a,b))$ est l'hyperplan de vecteur normal U ou encore l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ (dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans le cas général, on est obligé de faire explicitement le calcul.
Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(M(a,b)-(a-b)I_n)\,X = 0 \Leftrightarrow bJ_nX = 0 \Leftrightarrow J_nX = 0 \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_n = 0.$$

$$\text{Si } b \neq 0,\ E_{a+(n-1)b}(M(a,b)) = \text{Vect}(U) \text{ où } U = (1)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ et } E_{a-b}(M(a,b)) = \left\{(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \,/\, x_1 + \ldots + x_n = 0\right\}.$$

