Lycée Buffon — DS 6
MPSI — Année 2020-2021

Devoir du 16/02/2021

Exercice 1 : Donner un équivalent des quantités suivantes :

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \quad b_n = \sqrt[3]{\ln(n+1)} - \sqrt[3]{\ln(n)} \quad \text{et} \quad c_n = (\cos(1/n))^{n^2}.$$

Exercice 2 : On considère la suite u définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
3. En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 : Soit $f : x \mapsto \left(x(\ln x)^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Étudier la continuité de f sur D.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité ?
5. La prolongement par continuité est-il dérivable ?

Exercice 4 :

1. Montrer que si une suite w est convergente de limite ℓ, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ.
2. En déduire que si une suite w vérifie $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $w_n \sim n\ell$.

   On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
3. Montrer que la suite u est monotone.
4. Prouver que la suite u converge. Donner sa limite.
5. (a) Énoncer le théorème de Taylor-Young.
   (b) En déduire qu'il existe un réel C tel que $\sin x - x \sim_0 Cx^3$.
6. Pour tout α non nul, donner un équivalent de $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$.
7. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut prouver que si $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$, alors :

$$(*) : \exists c \in]a,b[: f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

1. On peut démontrer ce résultat facilement sous des hypothèses plus faibles.
   (a) Rappeler le théorème de Taylor reste intégral avec ses hypothèses.
   (b) Inégalité de la moyenne :
   soit g continue sur $[a,b]$. Montrer que :
   $$\exists c \in [a,b] : g(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
   (c) On suppose ici que $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer $(*)$.
   On pourra s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de la moyenne.
2. On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$
   (a) Déterminer une expression simple de la dérivée de la fonction
   $$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$
   (b) Prouver l'existence de constantes A et B telles que la fonction
   $$h : x \mapsto g(x) + A + B\frac{(b-x)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$
   s'annule en a et b.
   (c) Conclure et expliquer en quoi ce résultat généralise le théorème des accroissements finis.
3. Utilisation : soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et telle que $f' > 0$ sur $[a,b]$.
   (a) Prouver que f s'annule en un unique point $\alpha \in [a,b]$ et que le réel $K = \dfrac{\max_{[a,b]}|f"|}{2\min_{[a,b]}|f'|}$ est bien défini.
   (b) Soit $x \in [a,b]$. On pose $y = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Donner une interprétation graphique de y et montrer que $|y - \alpha| \leq K|x-\alpha|^2$.
   (c) Prouver l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que la suite définie par $u_0 \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ est bien définie et converge vers α.
   On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \dfrac{(K\varepsilon)^{2^n}}{K}$.