Continuité

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et f est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I. Continuité en un point

Définition. *Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a*

Proposition. *Caractérisation séquentielle*
Soit $a \in I$ alors f est continue en a si et seulement si

$$\forall u \in I^{\mathbb{N}},\ \lim u = a \Rightarrow \lim f(u_n) = f(a)$$

Définition. *Soit $a \in (\overline{I} \setminus I) \cap \mathbb{R}$.*
On dit que f est prolongeable par continuité en a par ℓ si f admet une limite finie ℓ en a.
Dans ce cas la fonction

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

Remarque : Soit a un point intérieur de I et f définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit aussi que est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a. On peut alors définir son prolongement par continuité :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

qui est continue en a.

Exemple. *$x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue en 0.*

Définition. *On dit que f est continue à droite en $a \in I \cap \mathbb{R}$ si $f_{|I \cap [a,+\infty[}$ est continue en a i.e. si f admet une limite à droite en a et si $\displaystyle\lim_{x \to a,\, x > a} f(x) = f(a)$.*

Définition. *On dit que f est continue à gauche en $a \in I \cap \mathbb{R}$ si $f_{|I \cap]-\infty,a]}$ est continue en a i.e. si f admet une limite à gauche en a et si $\displaystyle\lim_{x \to a,\, x < a} f(x) = f(a)$.*

Proposition. *Soit a un point intérieur de I alors f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.*

Proposition. *Soit $a \in I$. L'ensemble des fonctions réelles définies sur I et continue en a est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Proposition. *Si f et g sont deux fonctions continues en $a \in I$, alors*
– *$|f|$ est continue en a,*
– *$Max(f,g)$ et $Min(f,g)$ sont continues en a.*

Proposition. *Si f est une fonction continue en a telle que $f(a) \neq 0$ alors la fonction $1/f$ est définie au voisinage de a et continue en a.*

Théorème. *Soient f et g respectivement définies sur les intervalles I et J telles f soit à valeurs dans J alors la fonction $g \circ f$ est bien définie sur J. De plus, si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

II. Continuité sur un intervalle

Définition. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*
On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition. *L'ensemble $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Proposition. *Si f et g sont deux fonctions continues sur I, alors*
– *$|f|$ est continue sur I,*
– *$sup(f,g)$ et $inf(f,g)$ sont continue sur I.*

Proposition. *Si f est une fonction continue sur I et qui ne s'annule pas sur I, alors la fonction $1/f$ est définie et continue sur I.*

Théorème. *Soient f et g respectivement définies sur les intervalles I et J telles f soit à valeurs dans J alors la fonction $g \circ f$ est bien définie sur J. De plus, si f est continue sur I et si g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Remarque : On peut aussi s'intéresser à la continuité d'une fonction définie sur une union d'intervalles.

III. Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème. *(*) Soit f une fonction continue sur I. Soient a et b dans I et tels que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Corolaire. *Soit f une fonction continue sur I. Si f ne s'annule pas alors f est de signe constant.*

Théorème. *Théorème des valeurs intermédiaires (*) :*
Soit f une fonction continue sur I. Soient a et b dans I et tels que $a < b$ soit γ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corolaire. *(*) Soit f une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème. *(*) Soit f une fonction monotone sur I.*
Alors f est continue si, et seulement si, $f(I)$ est un intervalle.

IV. Image d'un segment par une fonction continue

Théorème. *(*) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème. *(*) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*
Plus précisément, si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

V. Continuité, stricte monotonie et injectivité

Proposition. *Toute fonction strictement monotone est injective.*

Théorème. *de la bijection continue (*)*
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, $f(I)$ est un intervalle et f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Théorème. *(*) Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone*

Corolaire. *Si f est continue sur un intervalle. Il y a équivalence entre f est strictement monotone et f est injective.*

VI. Extension aux fonctions complexes

Définition. *Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a*

Proposition. *f est une fonction continue sur I si, et seulement si, ses parties réelles et imaginaires le sont.*

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

Proposition. *L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.*

Proposition. *Si f est continue, alors $|f|$ aussi.*

Proposition. *Si f est une fonction continue sur I et ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $1/f$ est définie et continue sur I.*

Attention : le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus valable.
Par exemple, la fonction : $f : x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $[0, \pi]$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$ mais $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) \neq 0$.

Proposition. *Si f est une fonction continue sur un segment, alors la fonction f est bornée.*

Remarque : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ alors les quantités $m = \min\limits_{[a,b]} |f|$ et $M = \max\limits_{[a,b]} |f|$ sont définies.