TD 24 - Polynômes

Ex 3 :

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! \, P_n - P_n' = X^n$

Unicité :

Supp qu'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $P - P' = X^n = Q - Q'$

$P - Q + Q' - P' = 0$

$P - Q = (P - Q)'$

$\deg(P - Q) = \deg((P - Q)')$

Donc $P - Q = cst$

Puis $(P - Q)' = 0$

Donc $P - Q = 0$

Puis $P = Q$

Existence :

$X^0 = P - P'$ avec $P = 1$

$X^1 = P - P'$

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$P - P' = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} X^k$$

$$P - P' = X^n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0 ; n-1]\!] \\ a_k = (k+1) a_{k+1} \\ a_n = 1 \end{cases}$$

$a_0 = a_1$

$a_1 = 2a_2$

$a_2 = 3a_3$

$\vdots$

$a_{n-2} = (n-1) a_{n-1}$

$a_{n-1} = n a_n$

$a_n = 1$

$a_{n-1} = n = \frac{n!}{(n-1)!}$

$a_{n-2} = n(n-2) = \frac{n!}{(n-2)!}$

$a_{n-3} = n(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-3)!}$

$\vdots$

$a_k = \frac{n!}{k!}$

On pose : $P_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$

(Vérifier que ça marche)

__Compléments :__

Considérons $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
$x \longmapsto P - P'$

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$

$\operatorname{Ker} \varphi \subset \{0\}$

donc φ inj

Mq φ surjective

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(X^n) = X^n - nX^{n-1}$

$\varphi(X^0) = 1$

$(\varphi(X^n))_{n \in \mathbb{N}} = (1, X-1, X^2 - 2X, \dots, X^n - nX^{n-1}, \dots)$

(Famille libre grâce aux degrés)

$\forall n \in \mathbb{N} : \deg(\varphi(X^n)) = n$

"donc" $(\varphi(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$ une base de $\mathbb{K}[X]$

__Ex 4 :__

__Rappel :__

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$

$$\varphi^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sea de } E \text{ de direction } \operatorname{Ker}(\varphi) \end{cases}$$

Soit $\varphi^{-1}(\{y\}$ est vide $\to$ OK

Soit il existe $x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) = y$

Mq $\varphi^{-1}(\{y\}) = x_0 + \operatorname{Ker}(\varphi)$

Soit $x \in E$ tq $x \in \varphi^{-1}(\{y\}) \Leftrightarrow \varphi(x) = y$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow x \in x_0 + \operatorname{Ker} \varphi$

1) $x^{10}-1 = x^4(x^6-1)+(x^4-1)$

$x^6-1 = x^2(x^4-1) + x^2-1$

$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1)$

Remontée :

$x^2-1 = (x^4-1) - x^2(x^2-1)$

$x^2-1 = (x^4-1) - x^2\left((x^6-1) - x^2(x^4-1)\right)$

$x^2-1 = (x^4-1)(1+x^4) - x^2(x^6-1)$

$x^2-1 = (1-x^4)\left[(x^{10}-1) - x^4(x^6-1)\right] - x^2(x^6-1)$

$x^2-1 = (x^{10}-1)(1-x^4) - x^4(1-x^4)(x^6-1) - x^2(x^6-1)$

$= (x^{10}-1)(1-x^4) - (x^6-1)\left[x^4(1-x^4)+x^2\right]$

$- x^6\left(x^4(1-x^4) + x^6x^2\right) - x^4(1-x^4) + x^2$

$- \left[x^6(x^4-x^8) + x^8\right] - x^4 + x^8 + x^2$

$\cancel{x^{10}} - \cancel{x^{14}} - 1 + \cancel{x^4} \quad - \left[\cancel{x^{10}} - \cancel{x^{14}} + \cancel{x^8}\right] - \cancel{x^4} + \cancel{x^8} + x^2$

$= (x^6-1)(x^6+1) + (x^{10}-1)(-x^2)$

3)a) $x^{pq}-1 =$

Ex 5:

Analyse :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq P' divise P

Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = QP'$

On a donc $\deg P = \deg(QP') = \deg P' + \deg(Q)$

. Si P est cst alors $P = 0$

. Sinon $\deg(Q) = \deg P - \deg P + 1 = 1$

donc il existe $(\alpha, z_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ tq $Q = \alpha(X - z_0)$

Donc z_0 est racine de Q

Puis z_0 est racine de P

Supp que P possède une deuxième racine z_1

$P(z_1) = \underbrace{Q(z_1)}_{\neq 0 \text{ car } \deg Q = 1 \text{ et } z_0 \text{ racine de } Q} P'(z_1) = 0$

Donc $P'(z_1) = 0$

Puis z_1 est racine de P'

Soit m_1 la multiplicité de z_1 en tant que racine de Q

On a $(m_1 - 1)$ la multiplicité de z_1 en tant que racine de P'

Or $P = QP'$ et z_1 n'est pas racine de Q

donc est racine de multiplicité $m_1 - 1$ en tant que racine de QP' Absurde

Donc z_0 est la seule racine de P

Donc $P = \lambda(X - z_0)^{\deg(P)}$ $\lambda \in \mathbb{C}^*$

CCl: Si P est solution, soit $P = 0$

Soit $P = \lambda(z_0 - n)^n$ avec $(\lambda, z_0, n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}$

Autre :

Notons $d = \deg P$

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (X - z_0)^k$$

$$P = \alpha \, (X - z_0) P'$$

dom P

$\alpha \times 1 \times d \times \mathrm{dom}(P)$

$\hookrightarrow \alpha = \frac{1}{d}$

$$P = \frac{1}{d} (X - z_0) P'$$

Or $P' = \sum_{k=1}^{d} \frac{k\, P^{(k)}(z_0)}{k!} (X - z_0)^{k-1}$

donc $\frac{1}{d} (X - z_0) P' = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{P^{(k)}(z_0)}{(k-1)!} (X - z_0)^k$

Or : $((X - z_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ libre

$P(z_0) = 0$

$$\forall k \in [\![1, d]\!] \quad \underbrace{\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{d} \frac{P^{(k)}(z_0)}{(k-1)!}}_{*}$$

$$P^{(k)}(z_0) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{d} \right) = 0$$

$$\forall k \in [\![1 ; d-1]\!] \quad P^{(k)}(z_0) = 0$$

Ccl : z_0 est racine de multiplicité $\geqslant d$

z_0 est l'unique racine de P

Ex 6 :

Taylor : $P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$

$$P(a+1) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

$P(X+1)$ et $\sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$ coïncident en une infinité de points