TD23 - Polynôme

Ex 1 :

1) $P = (X-a)(X-b)Q + R$
$\deg R \leqslant 1$

$R = \alpha X + \beta$

On a : $P(a) = \alpha a + \beta$

$P(b) = \alpha b + \beta$

Système 2 équations 2 inconnues de déterminant $a-b$

Si $a \neq b$, calculs.

Si $a = b$, $P = (X-a)^2 Q + R \longrightarrow P(a) = R(a)$

$P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q' + R' \longrightarrow P'(a) = R'(a)$

Donc $R = P(a) + P'(a)(X-a)$

3) Reste de la div eucl de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $\underset{\underset{(X-i)(X+i)}{\shortparallel}}{(X^2+1)}$

Calcul à finir

Ex 2 :

1) $\{P \in \mathbb{K}[X] \quad P(0) = 1 \quad P(1) = 2\} = \varphi^{-1}\{(1,2)\}$ où $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{array}$

$X+1 \in S$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

$P \in S \iff \begin{cases} (P-X-1)(0) = 0 \\ (P-X-1)(1) = 0 \end{cases}$

$\iff X(X-1) \,/\, (P-X-1)$

$\iff P = X+1 + X(X-1)\mathbb{K}[X]$

Donc $S = X+1 + X(X+1)\mathbb{K}[X]$ ou $S = \{X+1 + X(X-1)Q(X),\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$

2) Même méthode A Faire

2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

. Solution homogène :

$$\begin{cases} P(0)=0 \\ P(1)=0 \\ P'(0)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases} \iff X^2(X-1)^2 / P$$

Cherchons une solution particulière

$$\begin{array}{l} P(0)=1 \\ P(1)=2 \\ P'(0)=-1 \\ P(1)=0 \end{array}$$

$$P=aX^3+bX^2-X+1$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-3 \\ b=5 \end{cases}$$

$\boxed{-3X^3+5X^2-X+1}$ est une solution particulière

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P \in \mathcal{S} \iff \begin{cases} P(0)=Q(0) \\ P(1)=Q(1) \\ P'(0)=Q'(0) \\ P'(1)=Q'(1) \end{cases} \iff X^2(X-1)^2 / (P-Q)$$

Ccl : $\mathcal{S}=\{-3X^3+5X^2-X+1+X^2(X-1)^2Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$

Rq :

Structure de $A=\{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P = 7\}$?

Est-ce un sea de $\mathbb{K}[X]$

Supp A soit un sea de $\mathbb{K}[X]$

alors : il existerait un sev F de $\mathbb{K}[X]$ tq $A=X^7+F$

puis $F = \{ P - X^7,\ P \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } \deg P = 7 \}$

$\lambda(P - X^7) = \lambda P + \lambda X^7 = \underbrace{\lambda P + (1-\lambda)X^7}_{\deg 7 ?} - X^7$

$P = 2X^7 \qquad \lambda = 1$

$X^7 = 2X^7 - X^7 \in F$

$-X^7 = \underbrace{0}_{\deg \neq 7} - X^7 \notin F$

Absurde car F sev

Cce : A n'est pas un sea de $\mathbb{K}[X]$

Ex3: Même dem que dans $\mathbb{Z}$

Ex 4:

On cherche à mq l'existence de P et Q tq $X^nP + (1-X)^nQ = 1$

$\hat{c}$ 2 $\left(P-(1-X)^nR\right)$ $\left(Q+X^nR\right)$

on $1 = (1-X+X)^n$ et utilise binôme de Newton

Unicité:

Supp qu'il existe $(P, Q, R, S) \in \mathbb{K}[X]^4$

$(1-X)^n P_n(X) + X^n Q_n(X) = 1 = (1-X)R_n + X^n S_n(X)$

$(1-X)^n\left(P_n(X) - R_n(X)\right) = X^n\left(S_n(X) - Q_n(X)\right)$

$X^n / (1-X)^n(P-R)$

et $X^n \wedge (1-X)^n = 1$

donc $X^n / (P-R)$

On $\deg(P-R) \leq n-1$

donc $P - R = 0$

d'où $P = R$

Puis $X^n(S-Q) = 0$

Comme $\mathbb{K}[X]$ intègre, $S - Q = 0$ donc $S = Q$

Existence:

Comme $(1-X)^n \wedge X^n = 1$, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq :

$$(1-X)^n U + X^n V = 1$$

$\forall Q \in \mathbb{K}[X]$: $\underbrace{(1-X)^n(U - X^nQ)}_{} + \underbrace{X^n(V - (1-X)^nQ)}_{} = 1$

m̂ degré → Sinon Absurde

Prenons Q le quotient de la div eucl de U par X^n

On a alors: $U - X^nQ \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Reste à mq $V + (1-X)^nQ \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

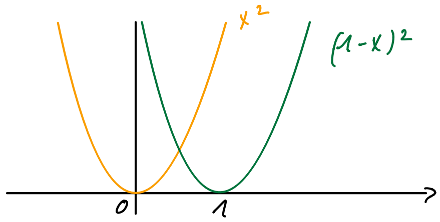
On a :

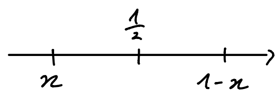
$$\left(V+(1-X)^nQ\right)\underbrace{X^n}_{\deg n} = \underbrace{1-(1-X)^n(U-X^nQ)}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}$$

Donc $\left((V+(1-X)^nQ)\right)\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$

$$(1-X)^nP_n + X^nQ_n = 1$$

$$(1-X)^nQ_n(1-X)+X^nP_n(1-X)=1$$





car $\frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}$

$$(1-(1-X))^nP_n(1-X)+(1-X)^nQ_n(1-X)=1$$

$$X^n\underbrace{P_n(1-X)}_{\in\mathbb{K}_{n-1}[X]}+(1-X)^n\underbrace{Q_n(1-X)}_{\in\mathbb{K}_{n-1}[X]}=1$$

Comme unicité : $P_n = Q_n(1-X)$

$Q_n = P_n(1-X)$

$$\boxed{(1-X)^nP_n + X^nQ_n = 1}$$

$$-n(1-X)^{n-1}P_n+(1-X)^nP_n'+nX^{n-1}Q_n+X^nQ_n'=0$$

Donc $(1-X)^{n-1}\left((1-X)P_n'-nP_n\right) = -X^{n-1}\left(nQ_n+XQ_n'\right)$

$X^{n-1} \mid (1-X)^{n-1}\left((1-X)P_n'-nP_n\right)$

$X^{n-1}\wedge(1-X)^{n-1}=1$

D'après le lemme de Gauss : $X^{n-1}\mid\left((1-X)P_n'-nP_n\right)$

càd qu'il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tq : $\underbrace{(1-X)P_n'-nP_n}_{\in\mathbb{K}_{n-1}[X]} = X^{n-1}\underbrace{Q}_{cst}$

Il existe donc $c_n \in \mathbb{K}$ tq $(1-X)P_n' - nP_n = c_n X^{n-1}$

On pose : $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

$$(1-X)\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} - n\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = c_n X^{n-1}$$

càd $\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) a_{k+1} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} k a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} n a_k X^k = c_n X^{n-1}$

$\forall k \in [\![1 ; n-2]\!]$ $\underbrace{(k+1)a_{k+1} - k a_k - n a_k = 0}_{(k+1)\, a_{k+1} = (k+n)\, a_k}$

. $a_1 - n a_0 = 0$

. $(n-1)\, a_{n-1} = c_n$

$a_1 = n a_0$

$a_2 = \frac{n+1}{2} a_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} a_0$

$a_k = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k} a_0$

Conjecture

ou → Récurrence finie

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+n}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_p}{a_0} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{k+n}{k+1} = \frac{n \times \cdots (n+p-1)}{p!}$$

Ex5 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

1) a) Supp a racine

càd $P(a) = 0$

et $P(a^2) = P(a)(a-1)$

Or $P(a) = 0$

donc $P(a^2) = 0$

donc a^2 est racine de P

b)

Calcul $P(x^2)$
et $P(x-1)$

Réciproque à faire

Ex7:

1) Unicité:

Supp que de tel polynômes existent

Soient P et Q tq ça fonctionnent.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

On a donc $P\left(z+\frac{1}{z}\right) - Q\left(z-\frac{1}{z}\right) = 0$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left(z+\frac{1}{z}\right)$ est une racine de $P-Q$

Déterminer $\left\{z+\frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}^*\right\}$

Soit $(z_0, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$z_0 = z + \frac{1}{z} \iff z_0 z = z^2+1$$

$$\iff z^2 - z_0 z + 1 = 0$$

$$\iff z \text{ racine de } \underbrace{X^2 - z_0 X + 1}_{P(X)}$$

$X^2 - z_0X+1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}^*$

$S = \left\{z \mapsto z+\frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}^*\right\}$

Existence:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$H(n)$: " $\exists P_n \in \mathbb{K}[X]$ tq $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ "

. I: $H(0)$ et $H(1)$

$$z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)$$

. H: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $H(n-1)$ et $H(n)$

Mq $H(n+1)$

Par HR, il existe $(P_n, P_{n-1}) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $\forall z \in \mathbb{C}^*$ $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$

$P_{n-1}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}$

Soit $z \in \mathbb{Z}^*$

On a : $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)$

On pose : $P_{n+1} = X P_n - P_{n-1}$

P_{n+1} est donc un polynôme tq $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$

2) On pose $z = e^{i\theta}$

Donc $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$

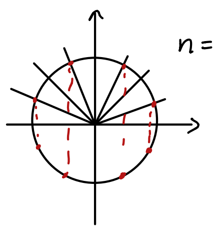
Donc $P_n(2\cos\theta) = e^{in\theta} + \frac{1}{e^{in\theta}} = 2\cos(n\theta)$

3) $P_n(2\cos\theta) = 0 \iff 2\cos(n\theta) = 0$

$\iff \cos(n\theta) = 0$

$\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n}\right]$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{2n}\right)$ racines de P_n



$n = 4$

Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{2n} \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n} + (n-1)\frac{\pi}{2n}\right]$

Or cos est stt ↘ sur $[0;\pi]$, les $2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ sont distincts.

Il existe donc n-racines distincts pour P_n

De plus, on montrerait par récurrence que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \deg P = n \\ \forall n \in \mathbb{N} : \text{dom } P = 1 \end{cases}$

Ainsi $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{2n}\right)\right)$