Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, rg(A) son rang, tr(A) sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et sp(A) l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.
2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
4. Soit λ une valeur propre de ${C_Q}^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C. Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

On prendra pour p le plus petit entier tel que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^p(x))$ *est liée.*

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
On pourra noter g l'endomorphisme induit par f $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ *et démontrer matriciellement que* $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ *est le polynôme caractéristique de g.*
11. En déduire que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B.

Dans cette sous partie II.B, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.
On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \ : \ \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(\mathrm{F}_k)$?
16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.
    On pourra remarquer qu'avec notre hypothèse χ_f est le polynôme minimal de f
17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0$.
    On pourra démontrer que pour un polynome Q, *on a* $\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0$ *si et seulement si pour tout* k, *on a* $\mathrm{Q}(f)(u_k) = 0$.
19. Justifier que f est cyclique.

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $\mathrm{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) /\ f \circ g = g \circ f\}$.

20. Montrer que $\mathrm{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in \mathrm{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

21. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
23. Établir que $g \in \mathrm{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $g = \mathrm{R}(f)$.

La fin du problème est plus difficile et optionnelle.

III.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.
cette question peut être admise

On note d le degré de π_f.

25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.
Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $\mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] /\ \mathrm{P}(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, …, $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

26. Montrer que E_1 est stable par f et que $\mathrm{E}_1 = \{\mathrm{P}(f)(x_1) /\ \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,

$$\psi_1 \ : \ \begin{cases} \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} /\ \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in \mathrm{E}$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
30. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{F}$.
31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$, tous stables par f, tels que :
    - $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_r$;
    - pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
    - si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Montrer que la dimension de $\mathrm{C}(f)$ est supérieure ou égale à n.
33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $\mathrm{C}(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.