Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, E est un espace **euclidien**, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire. On pose $n = \dim E$.

I. Matrices orthogonales

I.1. Généralités

Définition. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* ***orthogonale*** *si $A^\top A = I_n$.*

Proposition I.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, les trois énoncés suivants sont équivalents :*

- **i.** *A est orthogonale ;*
- **ii.** *la famille des colonnes de A est orthonormée pour le produit scalaire usuel ;*
- **iii.** *la famille des lignes de A est orthonormée pour le produit scalaire usuel.*

Proposition I.2. *Soient $\mathcal{B}$ une base* ***orthonormée*** *de E et $\mathcal{C}$ une autre base de E. Alors, $\mathcal{C}$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est orthogonale.*

Proposition I.3. *Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *et* $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ *où θ est un réel quelconque.*

I.2. Le groupe orthogonal

Proposition I.4. *Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.*

L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Proposition I.5. *Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1.*

Définition. *Les matrices orthogonales de déterminant 1 (resp^t -1) sont dites* ***directes*** *ou* ***positives*** *(resp^t* ***indirectes*** *ou* ***négatives****).*

Proposition I.6. *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, appelé groupe orthogonal d'ordre n.*

L'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes forme un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

I.3. Orientation de l'espace

Soit F un espace vectoriel de dimension finie $p > 0$ sur $\mathbb{R}$. Sur l'ensemble des bases de F, on définit une relation $\sim$ par : $\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$. Si $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$, on dit que $\mathcal{B}$ est de même sens que $\mathcal{C}$.

Proposition I.7. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, qui admet exactement deux classes d'équivalence.*

Définition. ***Orienter*** *l'espace F, c'est choisir l'une de ces deux classe comme ensemble des* ***bases directes*** *; les bases de l'autre classe sont alors qualifiées d'****indirectes****.*

Théorème I.8. *Soit E un espace euclidien orienté. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases orthonormées directes, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{C}}$.*

Définition. *Sous les hypothèses du théorème* **I.8**, *le déterminant dans une base orthonormée directe quelconque est appelé* ***produit mixte****.*

II. Isométries vectorielles

II.1. Généralités

Définition. *Une application f de E dans E est appelée une* ***isométrie vectorielle*** *de E, ou un* ***endomorphisme orthogonal****, si f est linéaire et vérifie $\forall x \in E \quad \big\|f(x)\big\| = \|x\|$.*

Proposition II.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est une isométrie de E si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(f(x)|f(y)\big) = \big(x|y\big)$.*

Proposition II.2. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est une isométrie si et seulement si $f(\mathcal{B}) = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base orthonormée.*

Par suite, f est une isométrie si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.

Corollaire II.3. *Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut 1 ou -1.*

II.2. Le groupe orthogonal de E

Proposition II.4. *Toute isométrie vectorielle est un isomorphisme.*

La composée de deux isométries, et la réciproque d'une isométrie, sont encore des isométries.

Proposition II.5. *L'ensemble $O(E)$ des isométries de E, muni de la loi $\circ$, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal de E.*

L'ensemble $SO(E)$ des isométries de déterminant 1 (isométries directes) forme un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.

II.3. Isométries en dimension 2

Proposition II.6. *Les isométries indirectes d'un plan vectoriel sont les symétries orthogonales par rapport à des droites.*

Définition. *Les isométries directes d'un plan vectoriel sont appelées* ***rotations (planes)****.*

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note toujours $R(\theta)$ la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition II.7. *Soit E un plan euclidien* ***orienté****.*

- **i.** *Si r est une rotation de E, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de r dans n'importe quelle base orthonormée directe de E est $R(\theta)$; θ est appelé (mesure de) l'angle orienté de la rotation r.*
- **ii.** *Si a et b sont deux vecteurs non nuls de E, il existe une unique rotation r qui transforme $a/\|a\|$ en $b/\|b\|$; l'angle de cette rotation est appelé (mesure de) l'angle orienté (a, b).*

Proposition II.8. **i.** *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\quad R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$.*

- **ii.** *L'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R})$, $\alpha \longmapsto R(\alpha)$ est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), .)$; son noyau est $2\pi\mathbb{R}$.*
- **iii.** *Il existe un isomorphisme de groupes ψ de $(\mathbb{U}, .)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), .)$ vérifiant $\psi(e^{i\theta}) = R(\theta)$ $\quad$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.*

II.4. Réduction

Lemme II.9. *Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{L}(F)$. Alors, f admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.*

Lemme II.10. *Soit $f \in O(E)$, admettant un sous-espace stable F. Alors, $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Théorème II.11. *Soit $f \in O(E)$. Alors, il existe une base* ***orthonormée*** *de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où p, q et r sont des entiers naturels éventuellement nuls, et les θ_i appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

En particulier, l'espace E est somme directe orthogonale de sous-espaces stables de dimension 1 ou 2.

Corollaire II.12. *Si f est une isométrie directe d'un espace euclidien E_3 de dimension 3, alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$.*

Si de plus $f \neq \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{tr}\, f = 1 + 2\cos\theta$; on dit que f est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'angle non orienté θ.

III. Adjoint d'un endomorphisme

III.1. Définition

Proposition III.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

- **i.** *Pour tout $a \in E$, il existe un et un seul vecteur $b \in E$ vérifiant $\forall x \in E \quad \big(f(x) \,|\, a\big) = \big(x \,|\, b\big)$; posons $b = f^*(a)$.*
- **ii.** *L'application f^* est un endomorphisme de E.*

Définition. *Avec les notations précédentes, f^* est appelé l'endomorphisme* ***adjoint*** *de f.*

Proposition III.2. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^\top$.*

III.2. Propriétés

Proposition III.3. **i.** $\forall f \in \mathcal{L}(E) \quad (f^*)^* = f$.

ii. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

iii. $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E) \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Proposition III.4. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.*

Proposition III.5. *Un endomorphisme f est une isométrie si et seulement si $f^* = f^{-1}$.*

IV. Endomorphismes autoadjoints

IV.1. Définition

Définition. *Un endomorphisme f de E est dit* ***autoadjoint*** *(ou* ***symétrique****) si $f^* = f$; cela revient à dire que, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\big(x|f(y)\big) = \big(f(x)|y\big)$.*

Proposition IV.1. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base* ***orthonormée*** *de E. L'endomorphisme f est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est symétrique.*

Proposition IV.2. *L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un espace vectoriel ; on le notera $\mathcal{S}(E)$.*

Proposition IV.3. *Une projection est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si c'est une projection orthogonale.*

IV.2. Sous-espaces stables

Proposition IV.4. *Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, et F un sous-espace de E stable par f. Alors, $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Théorème IV.5. *Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont forcément orthogonaux ; les sous-espaces propres de f sont donc deux à deux orthogonaux.*

IV.3. Réduction

Lemme IV.6. *Soit $f \in \mathcal{S}(E)$; alors, f admet au moins un vecteur propre.*

Théorème IV.7 (théorème spectral)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les trois énoncés :*

i. *f est autoadjoint ;*

ii. *E est somme directe* ***orthogonale*** *des sous-espaces propres de f ;*

iii. *il existe une base* ***orthonormée*** *de E constituée de vecteurs propres pour f.*

Théorème IV.8. *Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, S est symétrique si et seulement s'il existe une matrice diagonale D et une matrice* ***orthogonale*** *P telles que $P^{-1}SP = P^\top SP = D$.*

IV.4. Endomorphismes autoadjoints positifs

Définition. *On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ est* ***positif*** *(resp^t* ***défini positif****) si*

$$\forall x \in E \quad \big(x \,|\, f(x)\big) \geqslant 0 \qquad (\textit{resp}^t \quad \forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \big(x \,|\, f(x)\big) > 0)$$

On dit qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***positive*** *(resp^t* ***définie positive****) si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top AX \geqslant 0 \qquad (\textit{resp}^t \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad X^\top AX > 0)$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp$^{\text{t}}$ définis positifs) de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$ (resp$^{\text{t}}$ $\mathcal{S}^{++}(E)$). L'ensemble des matrice symétrique positives (resp$^{\text{t}}$ définies positives) de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp$^{\text{t}}$ $\mathcal{S}_n^{++}(R)$).

Théorème IV.9. *Un endomorphisme autoadjoint est positif (resp^t défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles (resp^t toutes strictement positives).*

Une matrice symétrique réelle est positive (resp^t définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles (resp^t toutes strictement positives).