Corrigé - Marches aléatoires

I Loi de X_n

1 : $Z_n(\Omega) = \{-1, 1\}$
$\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$
$\mathbb{P}(Z_n = -1) = 1 - p = q$

$\frac{1+Z_n}{2}$ suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

2 (a)
Notons $Y_n = \frac{1+Z_n}{2}$. Les VA $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(p)$

donc selon le cours

$$\tilde{X}_n = \frac{n+X_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

(b) Comme $X_n = 2\tilde{X}_n - n$ on en déduit

$$\boxed{\begin{array}{l} X_n(\Omega) = \{2k-n,\ k\in[\![0,n]\!]\} = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} \\ \mathbb{P}(X_n = 2k-n) = p^k q^{n-k}\binom{n}{k} \quad \forall k\in[\![0,n]\!] \end{array}}$$

(c)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_n) = 2\,\mathbb{E}(\tilde{X}_n) - n = (2p-1)n \\ V(X_n) = 4\,V(\tilde{X}_n) = 4npq \end{array}}$$

3 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } n \text{ est impair } \pi_n = 0 \\ \text{Si } n = 2m, m\in\mathbb{N} \quad \pi_n = (pq)^m\binom{2m}{m} \end{array}}$$

4 : En appliquant la formule de Stirling à $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$ on trouve $\boxed{\pi_{2m} \underset{m\infty}{\sim} \frac{(4pq)^m}{\sqrt{\pi m}}}$

II

1.(a) On a $A_1 = \coprod_{n=1}^{\infty} [S=n]$. Les événements $[S=n]$ étant incompatibles

Il vient par σ-additivité :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S=n)}$$

Ceci prouve en particulier que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S=n)$ converge

Par conséquent, <u>F est définie en 1 et $\mathbb{P}(A_1) = F(1)$</u>

1.(b) Posons $u_n(s) = s^n\, \mathbb{P}(S=n)$

<u>Alors</u> $\|u_n\|_\infty = \sup_{s\in[0,1]} |s^n\, \mathbb{P}(S=n)| = \mathbb{P}(S=n)$

Donc $\sum \|u_n\|_\infty$ cv, c'est à dire : $\sum_{n\geq 1} u_n$ cvnormalement sur $[0,1]$.

2.(a) La série Π est lacunaire : on applique la règle de d'Alembert

à $\sum_{m\geq 0} \Pi_{2m} s^{2m}$.

$$\left|\frac{\Pi_{2m+2}\, s^{2m+2}}{\Pi_{2m}\, s^{2m}}\right| \underset{m\infty}{\longrightarrow} 4pqs^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}}$$

2.(b) On sait que $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \underbrace{\frac{\left(-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times \cdots \times \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)}{k!}}_{\beta_k} x^k$$

un calcul facile prouve que $\beta_k = \binom{2k}{k}(-1)^k$

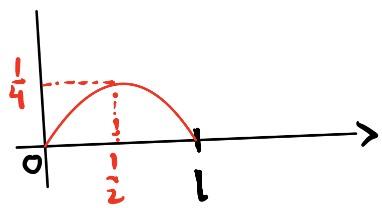
Par suite, $\forall s \in [0,1[$, on peut écrire (puisque $pqs^2 < \frac{1}{4}$)

$$(1-4pqs^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k}(4pq)^k s^{2k} = \Pi(s) \qquad (1)$$

2.(c) : on a déjà utilisé que $4pq \leq 1$

Plus précisément

L'application $p \longmapsto p(1-p)$ possède le graphe suivant :



Le rayon $R = \dfrac{1}{2\sqrt{p(1-p)}}$ et donc $\begin{cases} = 1 & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ > 1 & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

On en déduit :

Si $p \neq \frac{1}{2}$ l'égalité (1) est valable pour $s = 1$

De plus.

Si $p = \frac{1}{2}$ on a d'après I.4

$$\Pi_{2n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Donc $\sum \Pi_{2n}$ diverge. En particulier

Si $p = \frac{1}{2}$ l'égalité (1) n'est pas valable pour $s = 1$

3) $\mathbb{P}(X_n=0) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_n=0 \mid S=k)\,\mathbb{P}(S=k)$

on doit donc justifier que $\mathbb{P}(X_n=0 \mid S=k) = \pi_{n-k}$

Faisons cette preuve de façon détaillée (les suivantes analogues seront faites plus rapidement)

$\mathbb{P}(X_n=0 \mid S=k) = \mathbb{P}(Z_{k+1}+Z_{k+2}+\dots+Z_n=0 \mid S=k)$

Mais l'événement $S=k$ s'écrit $[X_1\neq 0]\cap\dots[X_{k-1}\neq 0]\cap[X_k=0]$

ou encore $[Z_1\neq 0]\cap[Z_1+Z_2\neq 0]\cap\dots\cap[Z_1+\dots+Z_k=0]$

Par le lemme des coalitions il est indépendant de $[Z_{k+1}+\dots+Z_n=0]$

Ainsi $\mathbb{P}(X_n=0 \mid S=k) = \mathbb{P}(Z_{k+1}+\dots+Z_n=0)$

Mais les variables $Z_1,\dots,Z_{n-k}$ et $Z_{k+1},\dots,Z_n$ ont même loi (car les Z_i sont iid). Par conséquent :

$\mathbb{P}(X_n=0 \mid S=k) = \mathbb{P}(Z_1+\dots+Z_{n-k}=0) = \mathbb{P}(X_{n-k}=0)$. $\square$

Ainsi $\pi_n = \sum_{k=1}^{n} \pi_{n-k}\,\mathbb{P}(S=k)$ (avec la convention $\pi_0=1$)

Comme $\mathbb{P}(S=0)=0$ on peut faire commencer la somme à $k=0$

Il suffit alors de faire le produit de Cauchy des séries $\Pi(s)$ et $F(s)$ (de rayon $R>0$) et d'identifier.

4. : De l'égalité précédente on déduit

$$\forall s \in [0,1[\quad F(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$$

Mais F est continue en 1 (par 1.(b)))

Donc cette égalité se prolonge en $s = 1$: Il vient donc

$$F(1) = 1 - \sqrt{(1 - 4p(1-p))} = 1 - |1 - 2p| = \mathbb{P}(A_1)$$

Si $p \geq q$ $\quad |1 - 2p| = 2p - 1$ $\quad$ Donc $F(1) = 2 - 2p = 2q$

Si $q \geq p$ $\quad |1 - 2p| = 1 - 2p$ $\quad$ Donc $F(1) = 2p$

Finalement $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = 2\operatorname{Min}(p, q)}$

On en déduit immédiatement

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = 1 \iff p = \frac{1}{2}}$$

5) $$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \mid S = k)\, \mathbb{P}(S = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{A}_{n-1} \mid S = k)\, \mathbb{P}(S = k)$$

où $\tilde{A}_{n-1}$ est l'évènement $\left[\begin{array}{l} \text{la suite } \tilde{X}_p = Z_{k+1} + \dots + Z_{k+p} \text{ prend } n-1 \text{ fois la} \\ \text{valeur } 0 \end{array}\right]$

Mais $\tilde{X}_p$ a la même loi que X_p et par indépendance de Z_i

$\tilde{A}_{n-1}$ est indépendant de $S = k$.

Ainsi $\quad \mathbb{P}(\tilde{A}_{n-1} \mid S = k) = \mathbb{P}(\tilde{A}_{n-1}) = \mathbb{P}(A_{n-1})$

Par suite $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1}) \cdot \sum_0^{\infty} \mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(A_{n-1})\, \mathbb{P}(A_1)$

Par récurrence immédiate $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)^n}$

<u>6</u> : Par continuité décroissante

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\infty} \mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>7</u> : L'événement $[R = k]$ est égal à $A_k \setminus A_{k+1}$

Par suite $\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(A_1)^k - \mathbb{P}(A_1)^{k+1} = \mathbb{P}(A_1)^k (1 - \mathbb{P}(A_1))$

Ceci prouve que la VA $R+1 = \tilde{R}$ suit la loi $\mathcal{G}(1 - \mathbb{P}(A_1))$

Ainsi $\mathbb{E}(R) = -1 + \mathbb{E}(\tilde{R}) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{1 - \mathbb{P}(A_1)}$.