Séries entières

I. Série entière d'une variable complexe

I.1. Définition

Définition. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On appelle* ***série entière*** *de coefficients (a_n), la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n z^n$.*

I.2. Rayon de convergence

Proposition I.1 (Lemme d'Abel)**.** *Soit (a_n) une suite complexe.S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Définition. *Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; soit $B = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. Si B est majoré, alors $\sup B$ est appelé le* ***rayon de convergence*** *de la série entière $\sum a_n z^n$; si B n'est pas majoré, on dit que ce rayon de convergence est $+\infty$.*

Proposition I.2. *Soit (a_n) une suite complexe ; soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Soit enfin $z \in \mathbb{C}$.*
- ▹ *Si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
- ▹ *Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

I.3. Détermination du rayon de convergence

Proposition I.3 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit (a_n) une suite complexe. Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et si $|a_{n+1}/a_n|$ a une limite ℓ éventuellement infinie, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $1/\ell$ (avec, par convention, $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$).*

En particulier, si Q est une fraction rationnelle, alors $\sum Q(n) z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Proposition I.4. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes ; soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.*

Si $|a_n| = O(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$; et donc, si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

I.4. Opérations sur les séries entières

Proposition I.5. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes ; soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs, et A et B les fonctions sommes respectives, des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors :*
- ○ *pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le rayon de convergence de la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$ est égal à R_a, et sa fonction somme est λA ;*
- ○ *le rayon de convergence R_1 de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_1 \geqslant \min\{R_a, R_b\}$, avec égalité si $R_a \neq R_b$; et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = A(z) + B(z)$ pour tout z tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$;*
- ○ *si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors le rayon de convergence R_2 de la série $\sum c_n z^n$ vérifie $R_2 \geqslant \min\{R_a, R_b\}$; et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = A(z)B(z)$ pour tout z tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$.*

I.5. Continuité de la somme

Dans la suite, on pose, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ et $D'(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$.

Proposition I.6. *Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R strictement positif. Alors :*
- ○ *la série converge absolument sur le disque ouvert $D(0,R)$, et normalement sur tout disque fermé $D'(0,r)$ tel que $r < R$;*
- ○ *la fonction somme est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$;*
- ○ *si de plus $\sum |a_n| R^n$ converge, alors la série converge normalement sur le disque fermé $D'(0,R)$, et sa somme y est continue.*

II. Série entière d'une variable réelle

Soit (a_n) une suite complexe ; soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. D'après ce qui précède, la série entière **d'une variable réelle** $\sum a_n t^n$ converge absolument sur $]-R, R[$, et normalement donc uniformément sur tout $[-r, r] \subset\,]-R, R[$; sa somme est continue sur $]-R, R[$.

II.1. Continuité radiale

Théorème II.1 (Théorème d'Abel radial)**.** *Si la série entière $\sum a_n t^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, et si $\sum a_n R^n$ converge, alors la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est continue sur $[0, R]$, et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \underset{t \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.*

II.2. Primitivation

Proposition II.2. *Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, et de somme S. Alors, la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{p\geqslant 1} a_{p-1}\frac{t^p}{p}$ *converge sur $]-R,R[$, et sa somme est la primitive de S qui s'annule en 0.*

II.3. Dérivation

Proposition II.3. *Soit (a_n) une suite complexe. Alors, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

Proposition II.4. *Soit (a_n) une suite complexe ; on suppose que le rayon R de la série entière associée est strictement positif. Soit S la fonction somme sur $]-R,R[$. Alors, S est de classe C^1 sur $]-R,R[$, et*

$$\forall t\in\,]-R,R[\quad S'(t)=\sum_{n\geqslant 1} n a_n t^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}t^n$$

De plus, la série entière définissant S' a aussi R pour rayon de convergence.

Théorème II.5. *Soit (a_n) une suite complexe ; on suppose que le rayon R de la série entière associée est strictement positif. Soit S la fonction somme sur $]-R,R[$. Alors, S est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, et, pour tout $p\geqslant 0$ et tout $t\in\,]-R,R[$,*

$$\begin{aligned} S^{(p)}(t) &= \sum_{n\geqslant p} n(n-1)\dots(n-p+1)t^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}t^{n-p} \\ &= \sum_{k\geqslant 0}(k+1)(k+2)\dots(k+p)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+p)!}{k!}t^n \end{aligned}$$

II.4. Unicité du développement en série entière

Proposition II.6. *S'il existe $r>0$ tel que $\forall t\in\,]-r,r[\quad f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$ alors $f^{(p)}(0)=p!a_p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.*

Corollaire II.7. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. S'il existe $r>0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n t^n$ pour tout $t\in\,]-r,r[$, alors $a_n=b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Corollaire II.8. *Si une fonction paire (respectivement impaire) est la somme d'une série entière sur un intervalle de la forme $]-r,r[$, alors cette série entière ne comporte que des termes de degré pair (respectivement impair).*

III. Développement et sommation

III.1. Fonctions développables en série entière

Définition. *Soit $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$; soit $t_0\in I$. On dit que f est **développable en série entière** au voisinage de t_0 s'il existe une suite complexe (a_n) et $r\in\mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$\forall t\in\,]t_0-r,t_0+r[\quad f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(t-t_0)^n$$

Proposition III.1. *Si une fonction f est développable en série entière au voisinage de t_0, alors f est de classe C^∞ sur ce voisinage, et la série entière est la série de Taylor de f en t_0.*

III.2. Exemples de développement

Proposition III.2. *Soit $R\in\mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, n'ayant pas 0 pour pôle. Alors, la fonction $z\longmapsto R(z)$ est développable en série entière au voisinage de 0, et le rayon de convergence de cette série est le plus petit des modules des pôles complexes de R.*

III.3. Exemples de sommation

IV. Développements usuels

$$e^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\,;\quad R=+\infty.\qquad\qquad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\,;\quad R=1.$$

$$\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\,;\quad R=1.\qquad\qquad \operatorname{Arctan} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}\,;\quad R=1.$$

$$\operatorname{ch} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\quad\text{et}\quad \operatorname{sh} t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;\quad R=+\infty.$$

$$\cos t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\quad\text{et}\quad \sin t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;\quad R=+\infty.$$

$$(1+t)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n\,;\quad R=1.$$