Une suite de fractions rationnelles

1 : $A_1(x) = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$

$A_2(x) = (x^2+3)\operatorname{sh} x - 3x \operatorname{ch} x$

Par récurrence sans difficulté, on montre que :

- A_n est impaire
- A_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$

2 : La relation (R) est vérifiée au rang 2 par vérification directe. Soit $n \geq 2$

Supposons la vraie au rang n : En multipliant par x et en intégrant il vient

$$A_{n+1}(x) = \int_0^x -(2n-1)\, t A_{n-1}(t) + \int_0^x t^3 A_{n-2}(t)\, dt$$

$$= -(2n-1) A_n(x) + \int_0^x t^2 A'_{n-1}(t)\, dt$$

$$= -(2n-1) A_n(x) + x^2 A_{n-1}(x) - \int_0^x 2t A_{n-1}(t)\, dt$$

$$= -(2n+1) A_n(x) + x^2 A_{n-1}(x)$$

On a donc prouvé la relation (R) au rang $n+1$. Ceci conclut la récurrence

3 | Soit H_k l'hypothèse de récurrence :

$$\forall k, \quad \forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq A_k(x) \leq \frac{x^{2k}}{2^k k!} \operatorname{sh} 1$$

(H_0) est vraie.

Soit $k \geq 0$ supposons (H_k) vraie, alors $\forall x \in [0,1]$

$$0 \leq A_{k+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{2^k k!} \operatorname{sh} 1\, dt = \frac{x^{2k+2}}{2^{k+1}(k+1)!} \operatorname{sh} 1.$$

Ainsi $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ et donc (H_k) est vraie pour tout k.

4) Soit $b>0$, comme A_k est impaire, on a

$$\forall x \in [-b,b] \qquad |A_k(x)| \leq \frac{x^{2k}}{2^k k!} \operatorname{sh} b \leq \frac{b^{2k}}{2^k k!} \operatorname{sh} b.$$

le majorant $\alpha_k = \frac{b^{2k}}{2^k k!} \operatorname{sh} b$ ne dépend pas de x et par croissances

comparées $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (par exemple en utilisant $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

Ainsi $\quad \underline{A_k \xrightarrow[n\infty]{CVU} \tilde{0} \text{ sur tout } [-b,b] \ , b>0.}$

Comme $A_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

5) Soient (U_n) et (V_n) les suites de polynômes définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = -1 \\ U_n = -(2n-1)U_{n-1} + x^2 U_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = x \\ V_n = -(2n-1)V_{n-1} + x^2 V_{n-2} \end{cases}$$

(Ce sont clairement des polynômes par récurrence)

on a clairement $\quad A_0(x) = U_0(x) \operatorname{sh} x + V_0(x) \operatorname{ch} x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad A_1(x) = U_1(x) \operatorname{sh} x + V_1(x) \operatorname{ch} x$

La relation (R) montre alors que si

$$A_{n-2}(x) = U_{n-2}(x) \operatorname{sh}(x) + V_{n-2}(x) \operatorname{ch} x$$

$$\text{et } A_{n-1}(x) = U_{n-1}(x) \operatorname{sh} x + V_{n-1}(x) \operatorname{ch} x$$

Alors on a $\quad A_n(x) = U_n(x) \operatorname{sh} x + V_n(x) \operatorname{ch}(x) \qquad (*)$

Par récurrence forte, la formule $(*)$ est donc vraie $\forall n$.

<u>Pour l'unicité</u> : si $(\tilde{U}_n, \tilde{V}_n)$ conviennent aussi alors

$$\underbrace{(\tilde{U}_n - U_n)(x)}_{P_n(x)} \operatorname{sh} x + \underbrace{(\tilde{V}_n - V_n)(x)}_{Q_n(x)} \operatorname{ch} x = 0$$

soit encore : $(P_n(x) + Q_n(x))e^{x} + (-P_n(x) + Q_n(x))e^{-x} = 0$

Comme la famille $(x \mapsto x^n e^{mx})_{n,m \in \mathbb{N}^2}$ est libre, ceci implique

$$\begin{cases} P_n + Q_n = 0 \\ -P_n + Q_n = 0 \end{cases}$$

Donc $P_n = Q_n = 0 \iff \tilde{U}_n = U_n$ et $\tilde{V}_n = V_n$.

<u>6</u> : On montre par récurrence les propriétés suivante

(i) $(-1)^n U_n$ est à coefficient positifs

(ii) $|U_n(0)| = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)}$

De plus, par imparité de A_n on a

$$-A_n(x) = -U_n(-x)\operatorname{sh} x - V_n(-x)\operatorname{ch} x$$

Ce qui assure, par unicité, que le polynôme <u>U_n est pair</u>

7. <u>a)</u> D'après la question <u>6</u> on a $\forall x \quad |U_n(x)| \geq |U_n(0)| > 0$ donc U_n ne s'annule pas et Q_n est bien définie.

<u>b)</u> $\operatorname{th} x - Q_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x \, U_n(x)} \left[\operatorname{sh} x \, U_n(x) - \operatorname{ch} x \, V_n(x) \right]$

$$= \frac{A_n(x)}{\operatorname{ch} x \, U_n(x)}$$

Soit $b>0$. $\forall x \in [-b,b]$ on a :

$$|th\,x - G_n(x)| = \frac{|A_n(x)|}{ch\,x\,|U_n(x)|}$$

$$\leq \frac{|A_n(b)|}{1\cdot|U_n(0)|} \quad \left(|A_n(x)| \leq A_n(b),\ ch\,x \geq 1 \quad |U_n(x)| \geq U_n(0) \right)$$

$$\leq \frac{b^{2n}}{(2n)!}\,sh\,b = \beta_n \text{ (d'après 3] et 6])}$$

on a de nouveau

$$\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} \xrightarrow[k\infty]{} 0 \text{ ce qui implique que } \beta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

et comme $\|th - Q_n\|_{\infty,[-b,b]} \leq \beta_n$

on a prouvé la convergence uniforme souhaitée.

8 a] est une conséquence de b]

b] Supposons que $(F_n)_n$ est une suite de fractions rationnelles qui cvu vers th sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists N_0,\ \|F_{N_0} - th\|_\infty < \frac{1}{2}$

Comme th est bornée ($th(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et th impaire) ceci assure

que $\|F_{N_0}\| \leq \frac{1}{2} + \|th\|_\infty = \frac{3}{2}$ ainsi F_{N_0} est bornée

les fractions rationnelles bornées ont une partie entière constante

on écrit $F_{N_0} = C + Q$ avec $d^\circ Q(x) < 0$.

Alors $\lim\limits_{+\infty} th(x) - F_{N_0}(x) = 1 - C$ et $\lim\limits_{-\infty} th(x) - F_{N_0}(x) = -1 - C$

Ceci est incompatible avec l'hypothèse $\|f_n - F_{n0}\|_\infty < \frac{1}{2}$

<u>8-c et 9</u> :

On montre que toute fonction continue sur $[0,+\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$ est limite d'une suite de fractions rationnelles.

Supposons $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} L$

Comme l'application $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{1}{x+1}$ est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$

considérons la fonction g définie sur $]0,1]$ par $g(y) = f(\varphi^{-1}(y))$

$= f(\frac{1}{y} - 1)$

Alors g <u>est continue</u>. De plus $\lim\limits_{y\to0^+} g(y) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = L$

Par suite, g possède un prolongement continu $\hat{g}$ sur $[0,1]$.

Par le théorème de Weierstrass :

$$\exists (P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}, \quad P_n \xrightarrow{CVU} \hat{g} \text{ sur } [0,1]$$

a fortiori $P_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{CVU}} g$ sur $]0,1]$

et en posant $F_n(x) = P_n\left(\frac{1}{x+1}\right)$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |F_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| P_n\left(\frac{1}{x+1}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right| = \sup_{]0,1]} |P_n(y) - g(y)|$$

Donc $\|F_n - f\|_{\infty,[0,\infty[} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ $\square$