# Sous groupes de $\mathbb{R}$

## I

**1** : $G \neq \{0\}$ Donc $\exists x \neq 0$, $x \in G$. Comme $G$ est un sous-groupe $-x \in G$

Ainsi $G_+$ est non vide.

**2(a)**
- Supposons $x, y \in ]a, 2a[$. On peut supposer $y > x$

Alors $0 < y - x < a$ et $y - x \in G$. Ceci contredit la définition de $a$.

- Si $a \notin G$ : $\exists (a_n)_n \in G^{+\mathbb{N}}$ $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$. $\exists n_0, \forall n > n_0$ $a_n < 2a$

Alors $\forall n > n_0$ $a < a_{n_0} < 2a$. Ceci contredit le premier point.

**2(b)** : $\forall n \in \mathbb{Z}$ $x - na \in G$ car $G$ est un sous groupe.

C'est en particulier vrai pour $n = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$.

on a par propriété de la partie entière : $0 \leq x - \lfloor \frac{x}{a} \rfloor a < a$.

Comme $x - \lfloor \frac{x}{a} \rfloor a < a$ on a $x - \lfloor \frac{x}{a} \rfloor a \notin G^+$

Mais $G \cap \mathbb{R}^+ = G^+ \cup \{0\}$ donc $x - \lfloor \frac{x}{a} \rfloor a = 0$ ie $\underline{x \in a\mathbb{Z}}$

Réciproquement : comme $a \in G$, $a\mathbb{Z} \subset G$

on a prouvé $\underline{G = a\mathbb{Z}}$

**3** (a) C'est immédiat par définition de la borne inférieure

(b) Soit $I = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$

- Si $a < 0 < b$ alors $0 \in I \cap G$.
- Sinon, comme $x \in G \Leftrightarrow -x \in G$ il suffit d'étudier le cas où $]a, b[ \subset ]0, +\infty[$

Soit $\varepsilon = \frac{b - a}{2}$.

Soit $x_0 \in G^+$, $x_0 < \varepsilon$.

Soit enfin $n = \min\{k, k x_0 > a\}$

Alors $n x_0 \in G$ et $n x_0 > a$.

Mais on a aussi $(n-1) x_0 \leq a$ donc $n x_0 \leq a + x_0 < b$

Donc $\underline{n x_0 \in ]a, b[ \cap G}$

(c) C'est juste ce qu'on a montré en (b)

## II

**1** : Soit $\mathcal{T} = \{ t \in \mathbb{R}, \forall x, f(x+t) = f(x) \}$

- $\mathcal{T} \neq \emptyset$ ($0 \in \mathcal{T}$)
- Si $(t, t') \in \mathcal{T}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+t'-t) \overset{t' \in \mathcal{T}}{=} f(x-t) \overset{t \in \mathcal{T}}{=} f(x-t+t) = f(x)$$

Donc $t - t' \in \mathcal{T}$

Ainsi $\mathcal{T}$ satisfait les axiomes des sous-groupes $\mathbb{R}$.

Comme $f$ est continue $\mathcal{T}$ est fermé (si $f(x+t_n) = f(x)$ $\forall n$ et $t_n \underset{n \infty}{\to} t$ alors $f(x+t) = f(x)$ $\forall x$)

Par suite, si $\mathcal{T}$ est dense, on a $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ : ceci prouve que $f$ est constante.

Ainsi, si $f$ n'est pas constante, $\mathcal{T}$ n'est pas dense.

D'après le I : $\exists T \in \mathbb{R}_+^*$ $\mathcal{T} = T\mathbb{Z} = \{ nT, T \in \mathbb{Z} \}$

T est la plus petite période.

**2** : $G_{\alpha,\beta}$ est un sous-groupe de façon immédiate.

Supposons que $G$ n'est pas dense :

$$\exists a > 0, \quad G = a\mathbb{Z}$$

$$\alpha \in G \Rightarrow \exists \; p \in \mathbb{Z} \quad \alpha = pa$$

$$\beta \in G \Rightarrow \exists \; q \in \mathbb{Z} \quad \beta = qa$$

Alors $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Supposons $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ Alors $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ $m\alpha + n\beta = (mp + nq)\frac{\beta}{q} \in \frac{\beta}{q}\mathbb{Z}$

Donc $G \subset a\mathbb{Z}$ ($a = \frac{\beta}{q}$) et $G$ n'est pas dense

3.

a) Comme $G$ est compact, il est borné (par $M$)

Soit $z \in G$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $z^n \in G$ donc $\forall n$ $|z|^n \leq M$

Ceci impose $|z| \leq 1$

Mais $\forall z \in G$, $\frac{1}{z} \in G$ aussi et donc $\frac{1}{|z|} \leq 1$.

Finalement $\forall z \in G$, $\underline{|z| = 1}$

b) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ x \mapsto e^{ix} \end{cases}$

$\varphi$ est continue, donc $\underline{H = \varphi^{-1}(G) \text{ est fermé}}$ ($G$ est fermé)

$\forall x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ $x = 2\pi k$. $\varphi(x) = e^{2ik\pi} = 1 \in G$

Donc $x \in \varphi^{-1}(G) = H$. : $\underline{H \text{ contient } 2\pi\mathbb{Z}}$

Comme exp <u>est surjective</u>, on a $\varphi(\varphi^{-1}(G)) = G$.

c) <u>Si $H$ est dense</u>, il est égal à $\mathbb{R}$ (fermé) et donc $G = \varphi(H) = \mathbb{U}$

<u>Sinon</u> $\exists a > 0$ $H = a\mathbb{Z}$

Mais $2\pi \in H$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$, $2\pi = na$ et $H = \{\frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\}$

On a donc $G = \varphi(H) = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$.