Endomorphismes d'un espace euclidien

Feuille d'exercices #16

Partie A – Isométries vectorielles

Exercice 1 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace F défini par les équations $x-y+z=0$, $x+y+2z=0$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

Exercice 2 — On considère un espace euclidien orienté E de dimension 2.

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? de deux réflexions ?
2. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion ?
3. Montrer que toute rotation s'écrit comme la composée de deux réflexions.
4. Montrer que ce dernier résultat se généralise en dimension 3.

Exercice 3 — Déterminer la nature géométrique des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{bmatrix} \quad C = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 — Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $i+j+k$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 — Soient E un espace euclidien et u un vecteur unitaire de E.
Pour α réel, on définit φ_α sur E par $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha\,\langle x|u\rangle\, u$.

1. Vérifier que $\varphi_\alpha \in \mathscr{S}(E)$ puis déterminer ses éléments propres.
2. Peut-on avoir φ_α orthogonal ? Caractériser alors géométriquement φ_α.

Exercice 6 — Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $f(x) = u \wedge x$ où $x \in E$ et $u \in \mathbb{R}^3$ est non nul.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ et déterminer sa matrice dans une base adaptée.
2. Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est une bijection et déterminer $(\mathrm{id}_E + f)^{-1}$.
3. Montrer que $g = (\mathrm{id}_E - f) \circ (\mathrm{id}_E + f)^{-1}$ est une rotation et préciser ses caractéristiques géométriques.

Exercice 7 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{bmatrix}$$

On supposera que le vecteur $u(a,b,c)$ est unitaire.

1. Décomposer f sous la forme $p+g$ où p est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par u et g une application à préciser.
2. En déduire la nature de f.

Exercice 8 — Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$. On note σ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

1. Montrer que $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ est une réflexion et préciser ses caractéristiques géométriques.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante φ et σ commutent-elles ?
3. Déterminer les applications ψ de $\mathrm{O}(E)$ qui vérifient pour tout $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.

Exercice 9 — Soit E un espace euclidien de dimension $N \geqslant 2$ et $f \in \mathrm{O}(E)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Vérifier que $E = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme $g = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
3. Généraliser le résultat précédent pour $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|f\|_{\mathrm{op}} \leqslant 1$.

Exercice 10 — Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien E tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant x et y.

Partie B – Adjoint, endomorphismes autoadjoints

Exercice 11 — *Méli-mélo*

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^* \circ u \in \mathscr{S}^+(E)$ puis que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im}(u^*)$. Que dire de $\operatorname{rg}(u^* \circ u)$?
2. Soit $(u, v) \in \mathscr{S}(E)^2$. Montrer que $u \circ v \in \mathscr{S}(E)$ si et seulement $u \circ v = v \circ u$.
3. Soit $(u, v) \in \mathscr{S}(E) \times \mathscr{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $w \in \mathscr{S}^{++}(E)$ tel que $v = w^2$. En déduire que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 12 — On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle X|Y\rangle = \operatorname{Tr}(X^\top Y)$.

1. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(X) = AX$. Déterminer l'adjoint de φ.
2. Donner une CNS sur A pour que φ soit une isométrie.

Exercice 13 — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Justifier l'équivalence :

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u) \quad\Longleftrightarrow\quad u + u^* \in \operatorname{GL}(E)$$

Exercice 14 — Quelles sont les matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^\top A = I_n$?

Exercice 15 — Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2023} = B^{2023}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 16 — *Endomorphismes antisymétriques*
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x)|x\rangle = 0$$

1. Montrer que f est antisymétrique, i.e. $f^* = -f$.
2. Que dire de la matrice représentative de f dans une base orthonormale ?
3. Déterminer le spectre de f. À quelle condition f est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$. En déduire la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 17 — Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un vecteur non nul. Montrer que l'endomorphisme $x \mapsto u \wedge (u \wedge x)$ est symétrique. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 18 — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 19 — Soit $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ u^* \circ u = u\}$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)	$u \in \mathscr{A}$	(ii)	$u \circ u^*$ est un proj. orthogonal
(iii)	$u^* \circ u$ est un proj. orthogonal	(iv)	$\operatorname{Ker}(u)^\perp = \{x \in E \mid \|u(x)\| = \|x\|\}$

Exercice 20 — *Quotient de Rayleigh*
Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ où E est euclidien.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0\}$ un minimum et un maximum que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de u.
2. Pour quels vecteurs x le minimum et le maximum sont-ils atteints ?
3. *Application* – Déterminer :

$$\max\left\{ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \;\middle|\; (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

Exercice 21 — Soient E un espace euclidien, A un endomorphisme symétrique défini positif et B un endomorphisme symétrique. On pose :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x|y\rangle_A = \langle A^{-1}x|y\rangle$$

1. Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ est un produit scalaire.
2. Montrer que AB est diagonalisable.
3. Si M est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(M)$ sa plus petite et $\lambda_{\max}(M)$ sa plus grande valeurs propres. Soit φ définie par :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x) = \frac{\langle Bx|x\rangle}{\langle A^{-1}x|x\rangle}$$

Montrer que l'image de $E \setminus \{0\}$ par φ est le segment $[\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$.

4. Montrer que $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_{\min}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$.

Exercice 22 — Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme défini par $u(x) = \langle b|x\rangle a + \langle a|x\rangle b$, où (a, b) une famille libre.

1. Montrer que $u \in \mathscr{S}(E)$ et déterminer ses éléments propres.
2. Calculer $\sup\limits_{\|x\|=1} \{|\langle a|x\rangle\langle b|x\rangle|\}$.

Exercice 23 — Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\langle X|Y\rangle = X^\top AY$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 24 — Soient $A \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A\Omega) \leqslant \mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 25 — Soit $S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(S)^{1/n} \leqslant \dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{n}$.

Exercice 26 — Soient $A, B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in]0,1[$,

$$(\det(A))^t(\det(B))^{1-t} \leqslant \det(tA + (1-t)B)$$

Exercice 27 — *Réduction simultanée*
Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^\top P$.
2. Soit $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle $A = P^\top P$ et $B = P^\top DP$.
3. En déduire que le polynôme $\det(B - XA)$ est scindé.

Partie C – Décompositions matricielles

Exercice 28 — *Racine carrée et décomposition polaire*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   a) Établir l'existence de $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.
   b) Justifier l'unicité de la matrice R à l'aide du lemme des noyaux.
2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $M^\top M$ admet une unique racine carrée, notée R.
   b) Montrer que $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puis que $MR^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
   c) Justifier l'existence de $(\Omega, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega R$.

Exercice 29 — *Décomposition en valeurs singulières*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que PAQ soit diagonale à coefficients positifs.

Exercice 30 — *Décomposition QR et inégalité d'Hadamard*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. On note $\mathscr{B}$ la base constituée des colonnes de A et $\mathscr{B}'$ son orthonormalisée par Gram-Schmidt.
   a) Préciser la forme de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   b) Montrer que A peut s'interpréter comme une matrice de passage.
   c) En déduire qu'il existe $(Q, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QR$.
2. Quel intérêt présente une telle décomposition dans la résolution du système linéaire $AX = Y$?
3. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(M) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \text{ où } C_i \text{ est la } i\text{-ème colonne de } M$$

   Préciser le cas d'égalité.