Séries numériques

I. Généralités

Définition. *Soit* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On appelle série de terme général* u_n *la suite* $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On la note $\sum u_n$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée suite des sommes partielles associée à la série.*
La série $\sum u_n$ *est dite convergente si la suite des sommes partielles converge et divergente sinon.*
Lorsque la série $\sum u_n$ *converge, sa limite est notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et appelée somme de la série.*

Proposition. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *alors la série* $\sum \lambda^n$ *converge si et seulement si* $|\lambda| < 1$ *et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Proposition. *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors pour tout entier* n, *on note*

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{n=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k - Sn.$$

Le scalaire R_n *est appelé le reste d'ordre* n *et on note* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. *La suite* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers zéro. Elle est appelée suite des restes.*

Proposition. *Soit* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *alors* u *est la série de terme général* $v_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } n = 0 \\ u_n - u_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition. *Une suite* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *est de même nature que la série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$

Théorème. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $\lim u = 0$.

Définition. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On dit que la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement si* $\lim u \neq 0$.
Dans ce cas, la série $\sum u_n$ *diverge.*

Remarque : La divergence grossière est une condition suffisante mais non nécessaire de divergence comme le montre l'exemple suivant

Proposition. *La série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

Proposition. *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors, pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *la série* $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge.*

Proposition. *Si la série* $\sum u_n$ *converge, alors les séries* $\sum v_n$ *et* $\sum (u_n + v_n)$ *sont de même nature.*

Proposition. *La série* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si, les séries* $\sum \mathrm{Re} u_n$ *et* $\sum \mathrm{Im} u_n$ *convergent. Dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im} u_n$

Proposition. *Si les suites* u *et* v *sont égales à partir d'un certain rang, alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

II. Séries à termes positifs

Proposition. *Soit* u *une suite réelle positive alors la série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite des sommes partielles* $\displaystyle\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Proposition. *Soient* u *et* v *deux suites réelles* ***positives*** *telles que* $u \leq v$ *alors*
- *si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *aussi*
- *si la série* $\sum u_n$ *diverge alors la série* $\sum v_n$ *aussi*

Les résultats sont conservés si l'inégalité est vraie à partir d'un certain rang.

Proposition. *Soient* u *et* v *deux suites réelles* ***positives*** *telles que* $u = O(v)$ *alors*
- *si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *aussi*
- *si la série* $\sum u_n$ *diverge alors la série* $\sum v_n$ *aussi*

Proposition. *Soient* u *et* v *deux suites réelles* ***positives*** *telles que* $u \sim v$ *alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Remarque : La positivité (ou le signe constant) est indispensable.
Par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ mais $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge alors que $\sum \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

Proposition. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

Corollaire. *Critère de Riemann*
Soit u *une suite positive.*
- *Si* $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *avec* $\alpha > 1$, *alors le série* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ *avec* $\alpha \leq 1$, *alors le série* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice. *Nature des séries* $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ *et* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

Proposition. *Critère de d'Alembert*
Soit u *une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang telle que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *alors*
- *si* $\ell < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge*
- *si* $\ell > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge*
- *si* $\ell = 1$ *alors on ne peut pas conclure.*

III. Séries à termes quelconques

1. Convergence absolue

Définition. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Théorème. *Une série absolument convergente est convergente.*
De plus, si la série $\sum u_n$ *est absolument convergente alors* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Proposition. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* v *une suite réelle* ***positive****.*
Si $u = O(v)$ *et si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Remarque : La positivité (ou le signe constant) de v est indispensable.
Par exemple, $\dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{(1)^n}{n}\right)$ mais $\sum \dfrac{(1)^n}{n}$ converge alors que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Proposition. *Soit* $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si* $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *et si* $\alpha > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Remarque : Si $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ et si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum |u_n|$ diverge mais la série $\sum u_n$ peut quand même converger. Par exemple $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Proposition. *Critère de d'Alembert*
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang et vérifiant* $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ *alors*
- *si* $\ell < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge*
- *si* $\ell > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge*
- *si* $\ell = 1$ *alors on ne peut pas conclure.*

2. Séries alternées

Définition. *Soit* u *une suite réelle. On dit que la série* $\sum u_n$ *est alternée si la suite* $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de signe constant.*

Théorème. *Théorème des séries alternées*
Soit $\sum u_n$ *une série alternée telle que* $|u|$ *soit décroissante et de limite nulle alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
De plus, pour tout entier n*, le reste* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est du signe de* u_{n+1} *et* $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$.

Proposition. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$.

3. Comparaison séries-intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et monotone alors pour tout entier n non nul, on a
- $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f \leq f(n) \leq \int_{n}^{n+1} f$ si f est croissante
- $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f$ si f est décroissante

Cet encadrement peut permettre de connaître la nature de la série $\sum f(n)$, de trouver un équivalent des sommes partielles lorsque la série $\sum f(n)$ diverge ou des restes lorsque la série $\sum f(n)$ converge.

Exercice. *Soit* $\alpha \in]1, +\infty[$. *La série de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge et*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Exercice. *Soit* $\beta \in \mathbb{R}$. *La série de Bertrand* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$ *et dans ce cas*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \sim \frac{1}{(\beta-1)(\ln n)^{\beta-1}}$$