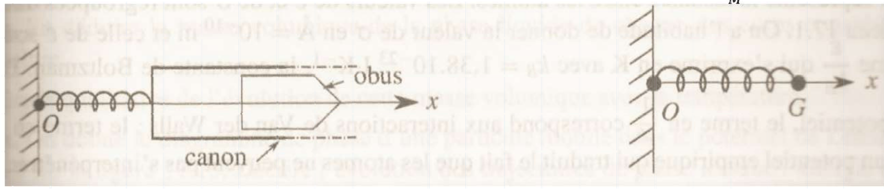
Recul d'un canon

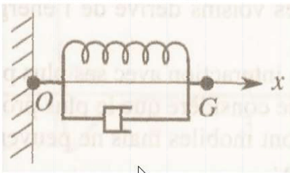
On considère un canon de masse $M = 800\,kg$. Lors du tir horizontal d'un obus de masse $m = 2\,kg$ avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$ ($v_0 = 600\,m.s^{-1}$), le canon acquiert une vitesse de recul $\vec{v_c} = -\frac{m}{M}\vec{v_0}$.



Pour limiter la course du canon, on utilise un ressort de raideur k_1, de longueur à vide L_0 dont l'une des extrémités est fixe et l'autre lié au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox. Dans la suite, le canon est assimilé à son centre de gravité G.

1) Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?
2) En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la distance de recul d. En déduire la raideur k_1 pour avoir un recul au maximum égal à d. Application numérique pour $d = 1\,m$.
3) Retrouver la relation entre k_1 et d en appliquant la loi de la quantité de mouvement.
4) Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ?

Pour pallier ce problème, on ajoute au système un dispositif amortisseur, exerçant une force de frottement visqueux $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse du canon.



5) Le dispositif de freinage absorbe une fraction $E_a = 778\,J$ de l'énergie cinétique initiale. Calculer la nouvelle valeur k_2 de la constante de raideur du ressort avec les données numériques précédentes. Déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.
6) Déterminer λ pour que le régime soit critique. Application numérique.
7) Déterminer l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort, ainsi que celle de la vitesse $\dot{x}(t)$. En déduire l'instant t_m pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors de recul en fonction de m, v_0 et λ. L'application numérique redonne-t-elle la valeur de d précédente ?

1) longueur du ressort lorsque le canon est au repos : l_0

2) * Canon juste après le tir : $l = l_0$

$E_c = \frac{1}{2} M v_c^2$ $\qquad E_p = 0$

* Canon lorsque le recul vaut d :

$E_c = 0$ $\qquad E_p = \frac{1}{2} k (\cancel{l_0} - d - \cancel{l_0})^2 = \frac{1}{2} k d^2$

Système conservatif : $\Delta E_m = 0$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} M v_c^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k_1 d^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{M}{k_1}}\, v_c}$

Constante de raideur : $\boxed{k_1 = M\left(\frac{v_c}{d}\right)^2 = 1800\ N.m^{-1}}$

3) Système : {canon}
Référentiel : terrestre galiléen
Bilan des forces : poids $\vec{P}$
réaction du support $\vec{R}$
tension du ressort $\vec{T} = -k_1(l - l_0)\vec{u_x}$

PFD : $M\ddot{x} = -k_1(x - l_0)$ $\qquad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + l_0$, $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$

CI $\begin{cases} x(0) = l_0 \\ \dot{x}(0) = -v_c = -\frac{m}{M} v_0 \end{cases}$ $\qquad A = 0$, $\dot{x}(t) = +B\omega\cos(\omega t)$

$\dot{x}(0) = -v_c = B\omega \Rightarrow B = -\frac{v_c}{\omega} = -v_c\sqrt{\frac{M}{k_1}}$

$$\boxed{x(t) = -v_c\sqrt{\frac{M}{k_1}}\sin(\omega t) + l_0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}}}$$

Pour $x(t_1) = l_0 - d$ on a $\dot{x}(t_1) = 0$ (1e annulation)

$\Rightarrow \omega t_1 = \pi/2 \Rightarrow \cancel{l_0} - d = -v_c\sqrt{\frac{M}{k_1}} + \cancel{l_0}$

$\Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{M}{k_1}}\, v_c}$

4) Avec un ressort seul, après le tir, le canon oscille indéfiniment.

5) $\Delta E_m = -E_a = \frac{1}{2} k_2 d^2 - \frac{1}{2} M v_c^2$

$\Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{M v_c^2 - 2E_a}{d^2} = 244\ N.m^{-1}}$

Pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{M}} = 0{,}55 \text{ rad.s}^{-1}}$

6) <u>Nouveau bilan des forces</u> :
(sur le canon)

- ⁎ Poids $\vec{P}$
- ⁎ Réaction $\vec{R}$
- ⁎ Tension $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$
- ⁎ Frottements $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$

<u>PFD</u> : $M\ddot{x} = -k_2(x - \ell_0) - \lambda\dot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

Polynôme caractéristique $\quad r^2 + \frac{\lambda}{M} r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \frac{\lambda^2}{M^2} - 4\omega_0^2 \qquad$ régime critique : $\quad \Delta = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\omega_0}{M} = 1{,}4.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}}$$

7) Solution générale $\quad x(t) = e^{-} \quad -t + B) + \ell_0$

Elongation $\quad X(t) = x(t) - \ell_0$

$X(t) = e^{-\omega_0 t}(At + B) \qquad \begin{cases} X(0) = 0 = B \\ \dot{X}(0) = -v_c \end{cases}$

$\dot{X}(t) = e^{-\omega_0 t}\left(A - \omega_0(At + B)\right)$

$\dot{X}(0) = A - B = -v_c \qquad \Rightarrow \qquad A = -v_c$

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= -v_c\, t\, e^{-\omega_0 t} \\ \dot{X}(t) &= (-v_c + \omega_0 v_c t)\, e^{-\omega_0 t} \end{aligned}}$$

Recul maximal : $\quad \dot{X}(t_m) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_m = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M}{k_2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(t_m) = -\frac{v_c}{\omega_0 e} = -1 \text{ m}}$$

On retrouve bien la valeur de d !