Fonctions dérivables

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

Introduction

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in I$. On cherche la « meilleure » fonction affine approchant f au voisinage de x_0. Soit $\varphi(x) = \alpha(x - x_0) + \beta$ une telle fonction, on prend $\varphi(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \beta = f(x_0)$. Pour x voisin de x_0, on pose

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= f(x) - \varphi(x) \\ &= f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) \\ &= (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha\right)\end{aligned}$$

L'erreur $\Delta(x)$ sera minimale si on prend

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si cette limite existe, la droite $y = \alpha(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente à la courbe de f en x_0.

1 Définitions, faits généraux

Dans la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1.1 Dérivée et fonction dérivée

1.1.1 Définitions

Soit $f : I \longrightarrow K$.

(1) Soit $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si l'application

$$\mathcal{T}_{f,x_0} : \begin{array}{l} I \backslash \{x_0\} \longrightarrow K \\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

admet une limite finie $l \in K$ en x_0. On note alors $l = f'(x_0)$ et on dit que l est la dérivée de f au point x_0.

(2) f est dérivable sur I si $\forall x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Si c'est le cas, l'application $x \in I \longmapsto f'(x)$ s'appelle la dérivée de f et se note f'.

(3) On note $\mathcal{D}(I, K)$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans K.

1.1.2 Exemples

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{f,x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{x - x_0}{x - x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \\ &\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1-k} = n x_0^{n-1}\end{aligned}$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n x^{n-1}$.

(2) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \sqrt{x}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Si $x_0 > 0$, on sait que f est continue et

$$\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 2\sqrt{x_0}$$

Si $x_0 = 0$, $\forall x > x_0$, $\sqrt{x} + 0 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$. f n'est pas dérivable en 0. Cependant, f est dérivable en x et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1.2 Développements limités à l'ordre 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Alors :

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0

C'est à dire $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \longrightarrow K$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in I$,

$$f(x) = \alpha(x - x_0) + \beta + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $l = f'(x_0)$ donc pour $x \neq x_0$,

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \mathcal{T}_{f,x_0}(x)$$

Or pour $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\mathcal{T}_{f,x_0}(x) \\ &= f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)(\mathcal{T}_{f,x_0}(x) - l)\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_0 \\ \mathcal{T}_{f,x_0}(x) - l & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$. On a bien $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et, pour $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et ceci même si $x = x_0$.

$\Leftarrow$ Supposons que, pour $x \in I$, $f(x) = \alpha(x - x_0) + \beta + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Or $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ car f est continue en x_0 et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \beta$ donc $\beta = f(x_0)$. Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha$$

donc f est dérivable en x_0 et $\alpha = f'(x_0)$.

Bilan Si f est dérivable en x_0, on a donc, pour $x \in I$,

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. On voit alors que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ donc f est continue en x_0. Ainsi,

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue mais pas dérivable en 0.

1.3 Opérations sur les dérivées

1.3.1 Opérations générales

Version locale Soient $f, g : I \longrightarrow K$, $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha f + g$ est dérivable en x_0 et $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$.

(2) fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(3) Si de plus, $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$. Par conséquent $\dfrac{g}{f}$ est dérivable et x_0 et

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Version globale Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, K)$. Alors :

(1) $\forall \alpha \in K$, $\alpha f + g \in \mathcal{D}(I, K)$ et $(\alpha f + r)' = af' + g'$.

(2) $fg \in \mathcal{D}(I, K)$ et $(fg)' = f'g + fg'$.

(3) Si de plus, $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{D}(I, K)$ et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$. Par conséquent, $\dfrac{g}{f} \in \mathcal{D}(I, K)$ et

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - fg'}{f^2}$$

Démonstration Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

(1)

$$\mathcal{T}_{\alpha f + g, x_0}(x) = \alpha \mathcal{T}_{x_0, f} + \mathcal{T}_{g, x_0}$$

D'où le résultat.

(2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{fg, x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x)\mathcal{T}_{g, x_0} + g(x_0)\mathcal{T}_{f, x_0}
\end{aligned}$$

Or f et g sont continues en x_0 donc $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$. De plus, $\mathcal{T}_{f, x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ et $\mathcal{T}_{g, x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(x_0)$, d'où le résultat.

(3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\frac{1}{f}, x_0} &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \left(-\frac{1}{f(x)f(x_0)}\right) \\
&\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -f'(x_0) \cdot \frac{1}{f^2(x_0)}
\end{aligned}$$

1.3.2 Opérations pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in I$ et posons $u = \Re\mathrm{e}\,(f)$ et $v = \Im\mathrm{m}\,(f)$.

(1) f est dérivable en x_0 si et seulement si u et v sont dérivables en x_0. On a alors de plus

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0)$$

(2) f est dérivable sur I si et seulement si u et v sont dérivables sur I. On a alors de plus

$$f' = u' + iv'$$

(3) Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$, alors $\overline{f} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.

Démonstration

(1) Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$, $\mathcal{T}_{f,x_0}(x) = \mathcal{T}_{u,x_0} + i\mathcal{T}_{v,x_0}$ donc $\Re\mathrm{e}\,(\mathcal{T}_{f,x_0}) = \mathcal{T}_{u,x_0}$ et $\Im\mathrm{m}\,(\mathcal{T}_{f,x_0}) = \mathcal{T}_{v,x_0}$, d'où le résultat d'après les théorèmes généraux sur les limites.

1.3.3 Composition

Soit $f : I \longrightarrow J$ où J est un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow K$.

(1) Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en y_0, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g' \circ f(x_0)$$

(2) Si $f \in \mathcal{D}(I, J)$ et $G \in \mathcal{D}(J, K)$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, K)$ et $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$

Démonstration Pour $y \in J$, $\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{si } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{si } y = y_0 \end{cases}$. Il est clair que ψ est continue en y_0. On a pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \psi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Or f est continue en x_0 donc $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc $\psi \circ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g' \circ f(x_0)$, et $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$, d'où le résultat.

1.3.4 Dérivées à droite et à gauche

Soit $f : I \longrightarrow K$, $x_0 \in \mathrm{Int}\,(I)$.

On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en x_0 si $\mathcal{T}_{f,x_0}$ admet une limite finie à gauche (respectivement à droite) en x_0, notée alors $f'_g(x_0)$ (respectivement $f'_d(x_0)$).

On a immédiatement :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

2 Théorèmes spécifiques aux fonctions réelles

2.1 Théorème de Rolle

2.1.1 Extremum

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f présente un minimum local (respectivement maximum local) en x_0 si $\exists r > 0$ tel que :

(1) $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$

(2) $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(x_0)$).

On note que x_0 doit appartenir à l'intérieur de I pour pouvoir être un extremum.

2.1.2 Lemme

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Si f présente en x_0 un extremum local et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration Supposons que f présente en x_0 un minimum local, par exemple. Alors $\exists r > 0 / [x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

- Pour $x \in [x_0 - r, x_0[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ donc, par passage à la limite en x_0, $f'(x_0) \leqslant 0$.
- Pour $x \in]x_0, x_0 + r]$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ donc, par passage à la limite en x_0, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Ainsi, $f'(x_0) = 0$.

Piège ! La réciproque de ce lemme est fausse !

Par exemple, $f : x \longrightarrow x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$, mais f ne présente en 0 ni minimum ni maximum local.

2.1.3 Énoncé du théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors $\exists c \in]a, b[/ f'(c) = 0$.
Le théorème s'applique toujours lorsque f est dérivable sur $[a, b]$.

Démonstration

- Si f est constante, alors $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
- Supposons f non constante. f est continue sur le compact $[a, b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Posons alors $m = \min f$ et $M = \max f$. f n'est pas constante donc $m < M$ et M ou/et m est/sont différent(s) de $f(a) = f(b)$. Supposons par exemple $m \neq f(a)$, m est atteint en un point $c \in]a, b[$. Il est clair que f admet en c un minimum local donc $f'(c) = 0$ car f est dérivable en c.

2.2 Théorème des accroissements finis et conséquences

2.2.1 Théorème des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Cela signifie qu'il existe un point de la courbe de f entre a et b dont la tangente est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Démonstration Soit

$$g : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)\right] \end{array}$$

$t \longmapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$ est affine donc dérivable sur $[a, b]$. g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Or $g(a) = 0 = g(b)$, donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[$ tel que :

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Conséquence 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow K$ dérivable sur I. Alors

$$f \text{ est constante } \Leftrightarrow f' = 0$$

Il suffit en fait d'avoir f continue sur I et dérivable sur $\operatorname{Int}(I)$.

Preuve

$\Leftarrow$ Ce sens est le seul restant à démontrer, il est clair qu'une fonction constante possède une dérivée nulle.

- Si f est réelle, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Montrons que $f(a) = f(b)$. f est dérivable sur $[a, b] \subset I$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0$, d'où $f(b) = f(a)$.
- Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$, posons $u = \Re\mathrm{e}(f)$ et $v = \Im\mathrm{m}(f)$. u et v sont dérivables sur I, réelles, on a donc $f' = 0 = u' + iv' \Leftrightarrow u' = 0$ et $v' = 0$. D'après le cas précédent, u et v sont constantes donc $f = u + iv$ aussi.

2.2.2 Inégalités des accroissements finis

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit bornée. On pose $m = \inf f'$ et $M = \sup f'$. Alors, $\forall x, y \in I$:

(1)

$$m(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y-x)$$

(2) Si $\lambda = \sup |f'|$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \lambda |y - x|$$

Démonstration

(1) Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. f est dérivable sur $[x, y] \subset I$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. Or $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ donc, puisque $y - x > 0$,

$$m(y-x) \leqslant f'(c)(y-x) = f(y) - f(x) \leqslant M(y-x)$$

(2) On a $|f(y) - f(x)| = f'(c)(y-x) \leqslant \lambda(y-x) = \lambda|y-x|$. Si $y \leqslant x$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x-y| = \lambda|y-x|$.

Corollaire Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ [a]. Alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

En effet, f' est continue sur le compact $[a, b]$ donc elle est bornée. D'après le (2) du résultat précédent, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in I$, $|f(y) - f(x)| \leqslant \lambda|y - x|$.

2.2.3 Conséquences des inégalités des accroissements finis

Résultat pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $f : [a, b] \longrightarrow K$ dérivable telle que f' est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leqslant M$.

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$$

En particulier, si $f \in \mathcal{D}(I, K)$ avec f' bornée et $M \geqslant \sup f'$, on a $\forall x, y \in I$, $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.

a. C'est à dire que f est dérivable et f' est continue.

Démonstration C'est vrai pour les fonctions à valeurs réelles [a].
Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$, on veut montrer que $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.
On rappelle le lemme fantastique suivant [b] : pour $z \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathbb{R}_+$,

$$|z| \leqslant A \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C}, |\Re\mathrm{e}(uz)| \leqslant A|u|$$

Soit $u \in \mathbb{C}$, $u(f(b-a)) = uf(b) - uf(a)$. Soit $g = u \cdot f$, montrons que $|\Re\mathrm{e}(g(b)) - \Re\mathrm{e}(g(a))| \leqslant M|u|(b-a)$.
Soit $\psi = \Re\mathrm{e}(g)$, g est dérivable donc ψ aussi. De plus, $\forall t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \Re\mathrm{e}\left(g'(t)\right) \\ &\leqslant \left|g'(t)\right| = |u|\left|f'(t)\right| \\ &\leqslant |u|\,|M| \end{aligned}$$

ψ est donc une fonction réelle à dérivée bornée, donc d'après le même résultat déjà démontré pour des fonctions réelles,

$$|\psi(b) - \psi(a)| \leqslant |u|\,M(b-a)$$

Reformulation des inégalités des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ au moins.
Si $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leqslant g'(t)$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$$

On remarque que la première version du théorème n'est qu'un cas particulier de ce résultat : on l'applique à $f : [a,b] \longrightarrow K$ dérivable sur $[a,b]$ avec $|f'| \leqslant g'$ où $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ associe Mt à t. On a bien $g(b) - g(a) = M(b-a)$.

Démonstration

- On suppose $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Posons pour $t \in [a,b]$, $\psi(t) = g(t) - f(t)$. ψ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\forall t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= g'(t) - f'(t) \\ &\geqslant \left|f'(t)\right| - f'(t) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, ψ est croissante sue $[a,b]$ donc

$$\psi(b) \geqslant \psi(a) \Leftrightarrow g(b) - f(b) \geqslant g(a) - f(a) \Leftrightarrow g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a)$$

  En considérant $t \longmapsto g(t) + f(t)$, on obtient

$$g(b) - g(a) \geqslant f(a) - f(b)$$

  d'où $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$.
- Supposons $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Montrons que $\forall u \in \mathbb{C}$,

$$|\Re\mathrm{e}(u(f(b) - f(a))) \leqslant |u|(g(b) - g(a))|$$

  Posons $\varphi = \Re\mathrm{e}(uf)$, on sait que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ donc φ aussi et $\forall t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (\Re\mathrm{e}(uf))'(t) \\ &= \Re\mathrm{e}\left(uf'(t)\right) \\ &\leqslant \left|uf'(t)\right| \\ &\leqslant |u|\,g(t) \end{aligned}$$

a. *« Djàvu ! »*
b. *« The magic lemma ! »* : voir section 4.3.2.2 du cours complet page 56

Posons alors $h(t) = |u|\, g(t)$. φ et h sont réelles, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et $\forall t \in [a,b]$, $|\varphi'(t)| \leqslant h'(t)$ donc, d'après le cas réel,

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant h(b) - h(a)$$

Application : approximation de $\ln(1+x)$ par série entière Pour $x \in \,]-1,1]$, montrons que

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Soit $x \in \,]-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour $t \in \,]-1,1]$ $h_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k}(-1)^{k-1}$. h_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $t \longmapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, par conséquent posons $f_n(t) = \ln(1+t) - h_n(t)$ et montrons que f_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $t > -1$,

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= \frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \\ &= \frac{1}{1+t} - \frac{1-(-t)^n}{1+t} \\ &= \frac{(-t)^n}{1+t} \end{aligned}$$

- Supposons que $x \in \,]0,1]$, pour $t \in [0,x]$,

  $$\left|f_n'(t)\right| = \frac{|t|^n}{1+t} \leqslant t^n = g'(t)$$

  où $g : \begin{array}{l} [0,x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $[0,x]$, $|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant g(x) - g(0)$, c'est-à-dire

  $$|\ln(1+x) - h_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Si $x \in \,]-1,0[$, pour $t \in [x,0]$:

  $$\left|f_n'(t)\right| \leqslant \frac{(-t)^n}{1+t} \leqslant \frac{(-t)^n}{1+x} = g'(t)$$

  avec $g : \begin{array}{l} [x,0] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \end{array}$. D'après le théorème des accroissements finis reformulé,

$$|f_n(0) - f_n(x)| \leqslant g(0) - g(x) \Leftrightarrow |\ln(1+x) - h_n(x)| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(1+n)(1+x)} \leqslant \frac{1}{(n+1)(1+x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En particulier, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2$.

2.2.4 Variations des fonctions

Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. – Si $f' \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors f est croissante. – Si $f' > 0$ sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante.

Démonstration Soient $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)\underbrace{(y-x)}_{>0}$$

- Si $f'(c) \geqslant 0$, alors $f(y) \geqslant f(x)$.
- Si $f'(c) > 0$, alors $f(y) > f(x)$.

Variante Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

(1) f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

(2) Si $\forall t \in I$, $f'(t) > 0$, alors f est strictement croissante.

(3) Posons $A = \{t \in I | f'(t) = 0\}$. f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ et $\operatorname{Int} A = \varnothing$ [a].

Un énoncé analogue existe pour les fonctions décroissantes.

Démonstrations

(1) $\Rightarrow$ Soit $x \in I$, montrons que $f'(x) \geqslant 0$. Soit $x \in I \backslash \{x\}$. Si $y > x$, $f(y) \geqslant f(x)$ donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$. Si $x > y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$ donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$. Finalement, $\forall y \in I \backslash \{x\}$, $\mathcal{T}_{f,x}(y) \geqslant 0$ donc par passage à la limite lorsque $y \to x$, $f'(x) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$ Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. f est dérivable sur $[x, y]$ et $f' \geqslant 0$ donc, d'après le résultat sur la variation des fonctions, f est croissante sur $[x, y]$ donc $f(x) \leqslant f(y)$.

(2) Si de plus, $f' > 0$ sur I on a, toujours d'après le résultat sur la variation des fonctions, f strictement croissante sur $[x, y]$ donc $f(x) > f(y)$.

(3)

$\Rightarrow$ D'après (1), $f' \geqslant 0$ car f est croissante sur I. Supposons $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, et soit $\omega \in \operatorname{Int} A$. $A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\omega)$ donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $[\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon] \subset A \subset I$. Alors $\forall t \in [\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon]$, f est dérivable en t et $f'(t) = 0$ donc f est constante sur $[\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon]$. Or f est strictement croissante donc $\omega - \varepsilon < \omega + \varepsilon$, ce qui est impossible.

$\Leftarrow$ $f' \geqslant 0$ donc f est croissante d'après (1). Si f n'est pas strictement croissante, alors $\exists x, y \in I$ avec $x > y$ et $f(x) \geqslant f(y)$. Pour $t \in [x, y]$, $f(x) \geqslant f(t) \geqslant f(y) \geqslant f(x)$ car f est croissante. Ainsi, f est constante sur $[x, y]$ et $\forall t \in [x, y]$, $f'(t) = 0$. Ainsi $[x, y] \subset A$ donc $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, ce qui est impossible.

Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \backslash \{x_0\}$ au moins. On suppose que $f' : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0. Alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$ [a]. Si $l \in \{\pm\infty\}$, f n'est pas dérivable en x_0.

[a] f est alors définie sur I et continue en x_0.

[a] Cette condition ce produit lorsque A est fini ou même dénombrable. A ne doit en fait pas contenir d'intervalle non trivial.

Démonstration On suppose $l \in \mathbb{R}$ [a]. Montrons que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} l$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| \leqslant \varepsilon$. On sait que pour $x \neq x_0 f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$: $\exists \beta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \beta \Rightarrow |f'(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Prenons $\alpha = \beta$, et soit $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$. f est continue sur $\underset{\leftrightarrow}{[x_0, x]}$, dérivable sur $\underset{\leftrightarrow}{]x_0, x[}$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c_x \in \underset{\leftrightarrow}{]x_0, x[}$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$. Ainsi,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| = \left| f'(c_x) - l \right|$$

or $c \in \underset{\leftrightarrow}{]x_0, x[}$ donc $|c_x - x_0| \leqslant |x - x_0| \leqslant \beta = \alpha$ donc $|f'(c_x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Piège ! Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et si f' n'admet pas de limite en x_0, on ne peut pas en conclure que f n'est pas dérivable.

Par exemple, soit

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- Pour $x_0 = 0$ et $x \neq 0$,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

  Donc pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- Pourtant, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. $2x \sin \left(\dfrac{1}{x} \right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ mais $\cos \left(\frac{1}{x} \right)$ n'admet pas de limite en 0, $f'(x)$ n'admet donc pas de limite en 0 mais f est dérivable en 0 [b].

2.3 Dérivée d'une réciproque

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue t strictement monotone, alors :

(1) f induit une bijection de I dans $J = f(I)$ notée encore f. $g = f^{-1}$ est continue strictement monotone de J dans I de même monotonie que f.

(2) Soit $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors $g = f^{-1}$ est dérivable en y_0 et

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration

(1) Ce résultat est connu, voir le théorème de la bijection section 12.4.2.5 du cours complet page 198.

(2) Pour $y \in J \setminus \{y_0\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{g, y_0}(y) &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} \end{aligned}$$

a. Les cas où $l \in \{\pm\infty\}$ sont laissés au courageux lecteur !

b. En fait, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$: sa dérivée n'est pas continue.

g est injective donc $g(y) \neq g(y_0)$ pour $y \in J \setminus \{x_0\}$. Ainsi :

$$\mathcal{T}_{g,y_0}(y) = \frac{1}{\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}}$$

g est continue donc $g(y) \underset{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}}{\longrightarrow} g(y_0)$ et on sait que $\mathcal{T}_{f,x_0}(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} f'(x_0)$ donc, par composition des limites, pour $y \in J \setminus \{x_0\}$:

$$\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y)) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y))} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si $f'(x_0) = 0$, supposons par exemple f strictement croissante. Alors $\forall x \neq x_0$, $\mathcal{T}_{f,x_0}(x) > 0$ car c'est le quotient de deux nombres négatifs ou positifs simultanément. Ainsi, pour $x \neq x_0$, $\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y)) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0^+$ donc g admet une tangente verticale en 0.

Reformulation Soit $f : I \longrightarrow K$ continue, strictement monotone et dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$, $g = f^{-1}$ est dérivable sur J et $\forall y \in J$,

$$g'(y) = \frac{1}{f' \circ g(y)}$$

Application : étude de la racine n-ième Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$. f est strictement croissante et $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ donc f est bijective et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt[n]{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = nx^{n-1} > 0$. Ainsi, $\forall y \in f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, g est dérivable en y et

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ &= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Or $\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1} = y^{1-\frac{1}{n}}$ donc $g'(y) = \frac{1}{n} y^{1-\frac{1}{n}}$.

3 Dérivées d'ordre supérieur

3.1 Définitions, faits de bases

3.1.1 Définitions

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit (si possible) l'application $f^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ par :

(1) $f^{(0)} = f$.

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)}$ est bien définie et dérivable, alors $f^{(k+1)} = f'^{(k)}$ est bien définie. Sinon, $f^{(k+1)}$ n'est pas bien définie.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est n fois dérivable sur I si $f^{(n)}$ est bien définie. On note $\mathcal{D}^n(I, K)$ l'ensemble des fonctions dérivable n fois de I dans K.
- f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I, K)$ l'ensemble des telles fonctions.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Lorsque f est dérivable n fois sur I, $f^{(n)}$ s'appelle la dérivée n-ième de f sur I.

3.1.2 Remarques, exemples

Remarques

- $\mathcal{D}^0(I,K) = \mathcal{F}(I,K)$
- $\mathcal{D}^1(I,K) = \mathcal{D}(I,K)$ et si $f \in \mathcal{D}(I,K)$, $f^{(1)} = f'$.
- $\mathcal{C}^0(I,K) = \mathcal{C}(I,K)$ est l'ensemble des fonctions continues de I dans K.
- Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^{n+1}(I,K) \subset \mathcal{C}^n(I,K) \subset \mathcal{D}^n(I,K)$.
- $\mathcal{C}^\infty(I,K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I,K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I,K)$
- $f \in \mathcal{C}^\infty(I,K) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{D}^n(I,K)$
- Si $f \in \mathcal{D}^2(I,K)$, on note $f^{(2)} = f''$ et si $f^{(3)}$ existe, on la note f'''.
- Supposons que $f \in \mathcal{D}^n(I,K)$, alors $\forall k \in [[0,n]]$, $f^{(k)}$ est bien définie et $f^{(k)}$ est dérivable $n-k$ fois. De plus, pour $j \in [[0,n-k]]$, $\left(f^{(k)}\right)^{(j)} = f^{(j+k)}$.
- Soit $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{D}(I,K)$. Alors
$$f \in \mathcal{D}^n(I,K) \Leftrightarrow f' \in \mathcal{D}^{n-1}(I,K)$$

Exemples

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ constante. On sait que f est dérivable et $f' = 0$. On montre par récurrence que $\forall n \in 1$, $f^{(n)}$ existe et $f^{(n)} = 0$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(I,K)$.
- L'application $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow K \\ x \mapsto x \end{array}$ est dérivable et $f' = 1$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(I,K)$ d'après le cas précédent.
- ◦ exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  ◦ ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  ◦ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  ◦ sin, cos sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  ◦ tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$.

3.1.3 Théorèmes généraux

Théorème 1 Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$). Alors :

(1) $\forall \alpha \in K$, $\alpha f + g \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$) et
$$(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$$

(2) $fg \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$) et, d'après la formule de Leibnitz,
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(3) On suppose de plus $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$. Alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$) [a]. De plus, $\dfrac{g}{f} \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$).

(4) Si $K = \mathbb{C}$, $\overline{f} \in \mathcal{D}^n(I,K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I,K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,K)$) et
$$\left(\overline{f}\right)^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$$

Démonstrations

(1) Soit H_n : « $\forall f, g \in \mathcal{D}^n(I,K)$, $\alpha f + g \in \mathcal{D}^n(I,K)$ et $(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$ ».
- H_0 est trivialement vraie.

a. Il n'existe pas de formule simple pour la dérivée n-ième d'un quotient.

– Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$, soient $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I, K)$. $n+1 \geqslant 1$ donc f et g sont au moins dérivables, on sait alors que $\alpha f + g$ est dérivable et $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$. Or $f', g' \in \mathcal{D}^n(I, K)$ donc $\alpha f' + g' \in \mathcal{D}^I(I <, K)$, c'est-à-dire que $\alpha f + g \in \mathcal{D}^{n+1}(I, K)$. De plus

$$\begin{aligned}(\alpha f + g)^{(n+1)} &= \left(\alpha f' + g'\right)^{(n)} \\ &= \alpha f'^{(n)} + g'^{(n)} \\ &= \alpha f^{(n+1)} + g^{(n+1)}\end{aligned}$$

(2) Soit H_n : « $\forall f, g \in \mathcal{C}^n(I, K)$, $fg \in \mathcal{C}^n(I, K)$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

– H_0 est vraie : si $f, g \in \mathcal{C}^0(I, K)$, on sait que fg est continue de I dans K. De plus

$$\begin{aligned}(fg)^{(0)} &= fg \\ &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}\end{aligned}$$

– Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que H_n est vraie et montrons H_{n+1}. Soient $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$, on sait que f et g sont au moins dérivables et $f', g' \in \mathcal{C}^n(I, K)$. fg est alors dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$. Or f' est de classe $\mathcal{C}^n$ et $g \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $f'g \in \mathcal{C}^n(I, K)$. De même, $fg' \in \mathcal{C}^n(I, K)$. Ainsi, $f'g + fg' \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc $fg \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$. De plus :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)'\right)^{(n)} \\ &= \left(f'g + fg'\right)^{(n)} \\ &= \left(f'g\right)^{(n)} + \left(fg'\right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{\binom{n+1}{k}} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

(3) Soit H_n : « $\forall f \in \mathcal{C}^n(I, K \setminus \{0\})$, $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ ».

– H_0 est vraie, c'est trivial.

– Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que H_n est vraie. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K^*)$, f est déjà au moins dérivable, on sait alors que $\dfrac{1}{f}$ est aussi dérivable et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$. Or $f' \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc $-f' \in \mathcal{C}^n(I, K)$ et f^2 aussi d'après (2). D'après H_n, $\frac{1}{f^2}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ donc $-\frac{f'}{f^2} \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$.

(4) Soit H_n : « $\forall f \in \mathcal{C}^n(I, K\mathbb{C})$, $\overline{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\left(\overline{f}\right)^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$ ».

– H_0 est vraie : si f est continue, on sait que $\overline{f}$ est continue et $\overline{f} = \overline{f}$!

– Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$. f est au moins dérivable donc $\overline{f}$ est aussi dérivable et $\overline{f}' = \overline{f'}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\overline{f}' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ car $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ d'où $\overline{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ et

$$\begin{aligned}\left(\overline{f}\right)^{(n+1)} &= \left(\overline{f}'\right)^{(n)} \\ &= \overline{f'^{(n)}} \\ &= \overline{f^{(n+1)}}\end{aligned}$$

Théorème 2 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u = \Re\mathrm{e}\,(f)$ et $v = \Im\mathrm{m}\,(f)$. Alors

$f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$) $\Leftrightarrow u, v \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$)

Démonstration

$\Leftarrow$ On sait que $f = \Re\mathrm{e}\,(f) + i\Im\mathrm{m}\,(f)$. Si $\Re\mathrm{e}\,(f) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\Im\mathrm{m}\,(f) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, le résultat est vrai d'après le théorème 1 et

$$f^{(n)} = (\Re\mathrm{e}\,(f))^{(n)} + i\,(\Im\mathrm{m}\,(f))^{(n)}$$

$\Rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$, alors $\overline{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ donc $\Re\mathrm{e}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\Im\mathrm{m}\,(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Exemples

- $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ car cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty$.
- $t \longmapsto t$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $t \longmapsto \alpha t^n \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Par somme, toute fonction polynômiale et $\mathcal{C}^\infty$. Par quotient, toute fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur toute intervalle où elle est définie.

Théorème 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}^n(I, J)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I, J)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, J)$) et $g \in \mathcal{D}^n(J, K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(J, K)$ et $\mathcal{C}^\infty(J, K)$).

Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, K)$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I, K)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, K)$) [a].

Démonstration Soit H_n : « $\forall f \in \mathcal{C}^n(I, J)$, $\forall g \in \mathcal{C}^n(J, K)$, $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, K)$ ».

- H_0 est vraie : si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J, K)$. On sait que f et g sont au moins dérivables sur I et J, donc $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$. Or $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $g' \in \mathcal{C}^n(J, K)$ donc $g' \circ f \in \mathcal{C}^n(I, K)$ d'après H_n. Par produit, $(g \circ f)' \in \mathcal{C}^n(I, K)$ d'où $g \circ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$.

Théorème 4 Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ ou $\forall x \in I$ S$f'(x) < 0$. Alors :

(1) f induit une bijection notée encore f sur $J = f(I)$.

(2) f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

(3) Si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$), alors f^{-1} aussi.

Démonstration

(1) *« Djàvu ! »*

(2) *« Djàvu ! »* [b]

(3) Soit H_n : « Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f^{-1} aussi ».
   - H_1 est vraie car $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \in \mathcal{C}^1(I, K)$ est continue par composition et quotient.
   - Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$. $f \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(I, K)$. $f' \in \mathcal{C}^n(I, K)$ donc $f \circ f^{-1}$ aussi donc $\left(f^{-1}\right)'$ aussi, d'où $f^{-1} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$.

---

a. Commentant les résultats d'un DS particulièrement vicieux sur les suites, M. Sellès s'adressa en ces termes à notre ami Willy de Picardie qui avait eu le malheur de vouloir démontrer par récurrence qu'une suite était bornéeSt

« *– Mais pourquoi t'as pas barré si tu savais que ça marcherait pas ?*

– Bah je sais pas, j'ai oublié.

– Quand il y a des bouses dans la rue, les mecs ils les ramassent. Toi, tu fais pareil. »

b. Il est ici à noter une déclaration solennelle de M. Sellès : *« Le petit 1 et le petit 2 font partie du patrimoine immatériel de l'humanité ».*

3.1.4 Vocabulaire

Soient I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow J$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme [a] (respectivement $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme) si f est bijective, $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, I)$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(I, J)$).

a. Désolé pour ce langage grossier.

Dans les hypothèses du théorème 4, f induit un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme de I sur $f(I)$.

3.2 Formules de Taylor

3.2.1 Étude préliminaire

Dérivée n-ième de $(t-a)^n$ Soient $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$, on sait que $f_n : t \longrightarrow (t-a)^n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. *Quid* de $f_n^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$?

Soit H_n : « Pour $t \in \mathbb{R}$,$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f_n^{(k)}(t) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(t-a)^{n-k}$. Pour $k \geqslant n$, $f_n^{(k)}(t) = 0$ ».

- H_0 est vraie ; $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ donc pour $k \in [\![0, 0]\!]$, $k = 0$ et $f_0^{(0)}(t) = \dfrac{0!}{(0-0)!}(t-0)^0$. Pour $k \geqslant 1$, $f_0^{(k)}(t) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie, montrons que H_{n+1} est vraie. Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$:
  - Pour $k = 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}^{(0)}(t) = (t-a)^{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-0)!}(t-a)^{n+1-0}$ donc c'est bon.
  - $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(t) &= (n+1)(t-a)^n \\ &= (n+1) f_n(t) \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(k)}(t) &= \left(f'_{n+1}\right)^{(k+1)}(t) \\ &= \left[f_n^{(k-1)}(t)\right](n+1) \\ &= (n+1)\frac{n!}{(n-k+1)!}(t-a)^{n-(k-1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(t-a)^{n+1-k} \end{aligned}$$

En particulier $f_{n+1}^{(n+1)}$ est constante donc $\forall k > n+1$, $f_{n+1}^{(k)} = 0$.

Écriture des polynômes en fonction de leur dérivées Soit P polynômiale, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$et $a_m \neq 0$:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![0, m]\!]$, soit $f_k(t) = t^k$. On a alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^{m} a_j f_j^{(k)}(t) \\ &= \sum_{j=k}^{m} a_j \frac{j!}{(j-k)!} t^{j-k} \\ &= k! a_k + \sum_{j=k+1}^{m} a_j \frac{j!}{(j-k)!} t^{j-k} \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{(k)}(0) = k!a_k$ d'où $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} t^k$. De même, pour $b \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (t+b-b)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \lambda_k (t-b)^k \quad \text{avec } \lambda_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On aura par un calcul similaire au précédent, $\forall k \in [\![0,m]\!]$, $\lambda_k = \dfrac{p^{(k)}(b)}{k!}$ d'où pour $t \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{P^{(k)}(b)}{k!}(t-b)$$

3.2.2 Définition

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I,K)$ avec $n \in \mathbb{N}$, et $a \in I$. Le polynôme de Taylor pour f à l'ordre n au point a est définit pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$T_{n,f,a}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$$

3.2.3 Polynômes de Taylor des fonctions classiques

- exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{dexp}^{(k)}(0) = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$T_{n,\exp,a}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

- Pour $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, pour $t \in]-1,+\infty[$, on montre par récurrence que

$$(\ln(1+t))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(1+t)^k}(k-1)!$$

  Ainsi pour $k \geqslant 1$, $(\ln(1+t))^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. De plus, $\ln(1+0) = 0$ donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n,t\longmapsto\ln(1+t),0} &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k \end{aligned}$$

- Soit $\forall t > -1$, $f(t) = (1+t)^\alpha$ avec $\alpha \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$ donc pour $t \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+t)^{\alpha-k}$. D'où $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ donc pour $t \in \mathbb{R}$:

$$T_{n,f,0}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} t^k$$

  Par analogie avec les entiers, on note pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. On a donc $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ et $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$:

$$T_{n,f,0}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} t^k$$

– De même, on a

$$\begin{aligned} T_{2n+1,\sin,0} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2n,\cos,0} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \end{aligned}$$

– Les polynômes de sinh et cosh aux ordres $2n+1$ et $2n$ sont les mêmes que ceux de cos et sin, en enlevant le $(-1)^k$.

3.2.4 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : \underset{\leftrightarrow}{[a,b]} \longrightarrow K$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ [a] sur $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$, alors :

$$|f(b) - T_{n,f,a}(b)| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a. Avec les hypothèses du théorème, $f^{(n+1)}$ est continue sur le compact $\underset{\leftrightarrow}{[a,b]}$ donc bornée...

Démonstration

1^er cas On suppose $a < b$, procédons par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Soit H_n : « Pour tout $a < b$, $\forall f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], K)$, pour tout majorant M de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$, $|f(b) - T_{f,n,a}(b)| \leqslant M \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ »

– H_0 est vraie : soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], K)$ et M un majorant de f' sur $[a,b]$, alors $T_{0,f,a}(b) = f(a)$. D'après les inégalités des accroissements finis,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a) = M \frac{(b-a)^1}{1!}$$

– Supposons que H_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b], K)$ et M un majorant de $\left|f^{(n+2)}\right|$ sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - T_{n+1,f,a}(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ donc φ est au moins dérivable et $\forall x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k\,(x-a)^{k-1} \\
&= f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \\
&= f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k} \\
&= f'(x) - T_{n,f',a}(x)
\end{aligned}$$

Or $f' \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x],K)$ et $\forall t \in [a,x]$, $\left|f'^{(n+1)}(t)\right| = \left|f^{(n+2)}(t)\right| \leqslant M$. D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient pour tout $x > a$:

$$\left|f'(x) - T_{n,f',a}(x)\right| \leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

C'est vrai *a posteriori* pour $x = a$. Or $M\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = g'(x)$ où pour $x \in [a,b]$, $g(x) = M\dfrac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!}$. φ est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $|\varphi'(x)| \leqslant g'(x)$ donc, d'après les inégalités des accroissements finis :

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant g(b) - g(a) = M\frac{(b-a)^{n+2}}{(n+2)!}$$

– Or $\varphi(a) = 0$ d'où :

$$|f(b) - T_{n+1,f,a}(b)| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+2}}{(n+2)!}$$

2ème est Supposons $a > b$.

Soit $\psi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [b,a] \\ t & \longmapsto & a + t(b-a) \end{array}$, ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, bijective. Soit $f : [b,a] \longrightarrow K$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[b,a]$. Pour $t \in [0,1]$, posons $g(t) = f(\psi(t))$. g est également de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ car $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,1],[b,a])$. De plus, $\forall t \in [0,1]$ et $\forall k \in [\![0,n+1]\!]$, on montre par une récurrence immédiate que $g^{(k)} = (b-a)^k f^{(k)}(\psi(t))$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\left|g^{(n+1)}(t)\right| &= |b-a|^{k+1} f^{(n+1)}(\psi(t)) \\
&\leqslant M\,|b-a|^{n+1} = M'
\end{aligned}$$

D'après le premier cas appliqué à g sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
|g(1) - T_{n,g,0}(1)| &\leqslant M'\frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|g(1) - T_{n,g,0}(1)| &= \left|f(\psi(1)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}1^k\right| \\
&= \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k f(\psi(0))}{k!}\right| \\
&= \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} (b-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right| \\
&= |f(b) - T_{n,f,a}(b)|
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Applications

Développement en série entière de l'exponentielle complexe Montrons que $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et posons pour $t \in [0,1]$, $f(t) = \exp(tz)$. $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ comme composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, en posant $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= a\mathrm{e}^{ta}\mathrm{e}^{itb} + \mathrm{e}^{ta}(-b\sin(tb) + ib\cos(tb)) \\ &= a\mathrm{e}^{ta}\mathrm{e}^{itb} + \mathrm{e}^{ta}ib\mathrm{e}^{itb} \\ &= (a+ib)\,\mathrm{e}^{t(a+ib)} \\ &= z\exp(tz) \end{aligned}$$

De même, on montez par une récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f^{(k)}(t) = z^k \exp(tz)$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} T_{n,f,0}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} t^k \end{aligned}$$

En particulier, $T_{n,f,0}(1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \left|f^{(n+1)}(t)\right| &= |z|^{n+1} |\exp(tz)| \\ &\leqslant \left|z^{n+1}\right| \mathrm{e}^{|a|} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|f(1) - T_{n,f,0}(1)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|a|}|z|^{n+1}}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \Leftrightarrow \left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|a|} \underbrace{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

D'où le résultat.

Développement en série entière de sin et cos Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier cos est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\underset{\leftrightarrow}{[0,x]}$. De plus $\forall t \in \underset{\leftrightarrow}{[0,x]}$, $\left|\cos^{(2n+1)}(x)\right| = |\sin(x)| \leqslant 1$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange [a],

$$|\cos x - T_{2n,\cos,0}(x)| \leqslant 1 \cdot \underbrace{\frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

a. En effet on aura auparavant remarqué que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n,\cos,0}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2n+1,\sin,0}(x)$$

Développement en série entière de $\ln(1+x)$ Montrons que $\forall x \in]-1,1]$:

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

Posons pour $t \in]-1,+\infty]$, $f(t) = \ln(1+t)$. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty],\mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, une récurrence immédiate donne que pour tout $t \in]-1,+\infty]$:

$$f^{(k)}(t) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+t)^k}$$

En particulier, $f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)!$. Pour $n \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{n,f,0}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k} \end{aligned}$$

Soit $x \in]-1,1]$:

– Si $x \in [0,1]$, soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([0,x],\mathbb{R})$ et $\forall t \in [0,x]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \dfrac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant n!$ car $1+t \geqslant 1$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned} |f(x) - T_{n,f,0}(x)| &\leqslant n! \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &\leqslant \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \quad \text{car } x \leqslant 1 \end{aligned}$$

– Si $x \in]-1,0]$, $\forall t \in [x,0]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \\ &\leqslant n! \cdot \sup_{x \leqslant t \leqslant 0} \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Or $f \in \mathcal{C}^{n+1}([x,0],\mathbb{R})$ donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|f(x) - T_{n,f,0}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}$$

- Si $\dfrac{|x|}{1-|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| > 1-|x| \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{2}$ donc si $x \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right]$, alors $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc on ne peut pas conclure de cette manière.
- Par contre, si $x \in \left[-\frac{1}{2},0\right]$, $\dfrac{|x|}{1-|x|} \leqslant 1$ d'où le résultat.

Ainsi, on a montré que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},1\right]$,

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

3.2.5 Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow K$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. On suppose de plus que $f$est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors :

$$f(x) - T_{n,f,a}(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Soit encore :

$$\frac{f(x) - T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration

- Pour $n = 0$ et $\forall t \in I$, $T_{0,f,a}(t) = f(a)$. On a bien $\dfrac{f(x) - f(a)}{1} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, car f est continue en a.
- Pour $n = 1$ et $x \in I$, $f(x) - T_{1,f,a}(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$. Donc pour $x \in I \backslash \{a\}$:

$$\frac{f(x) - T_{1,f,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0$$

  car f est dérivable sur I.
- Soit H_n : « $\forall g \in C^n(I, K)\, , \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - T_{n,g,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$ ».
  - On a vu que H_0 et H_1 sont vraies.
  - Supposons H_n vrai pour un entier n. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$. On veut montrer que :

$$\delta(x) = \frac{f(x) - T_{n+1,f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0$$

    Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \backslash \{a\}$, $|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - T_{n+1,f,a}(x)| \leqslant \varepsilon |x-a|^{n+1}$. On sait que f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. D'après H_n, $\dfrac{f'(x) - T_{n,f',a}(x)}{(x-a)^n} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0$ donc il existe β tel que $\forall x \neq a$, $\left|f'(x) - T_{n,f',a}(x)\right| \leqslant |x-a|^n$. Prenons $\alpha = \beta$: soit alors $x \in I \backslash \{a\}$, tel que $|x - a| \leqslant \beta$.

    → Supposons $x > a$. Pour $t \in [a, x]$ on pose $\varphi(t) = f(t) - T_{n+1,f,a}(t)$. L'application φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ donc est au moins dérivable : $\forall t \in [a, x]$, $\varphi'(t) = f'(t) - T_{n,f',a}(t)$ [a]. Donc $|\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon |t-a|^n = \underbrace{\varepsilon (t-a)^n}_{\psi'(t)}$. On a $\psi : t \in]a, x[\longrightarrow \dfrac{\varepsilon}{(n+1)}(t-a)^{n+1}$ D'après le théorème des accroissements finis (II) :

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \psi(x) - \psi(a)$$

    et comme $\varphi(a) = T_{n+1,f,a}(a) - f(a) = 0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - T_{n+1,f,a}(x)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{n+1}(x-a)^{n+1} \\ &\leqslant \varepsilon (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

    → Supposons $x < a$: *« Left to the reader ! »*.

Remarque TAYLOR-YOUNG affirme que si f est de classe C^nsur I et si $a \in I$, on peut écrire au voisinage de a : $f(x) = T_{n,f,a}(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, ce qui s'écrit aussi :

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

---

[a]. Ce calcul a été effectué précédemment, voir page 19.

Applications

- On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, trouvons un équivalent de $\sin x - x$ en 0. sin est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\sin x &= T_{3,\sin,0}(x) + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ donc $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, K)$ et $a \in I$. Au voisinage de a,

$$\begin{aligned}f(x) &= T_{n,f,a}(x) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}_{\lambda_k} x^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)\end{aligned}$$

Si $\exists k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$, alors on peut poser $m = \min\{k \in [\![0, n]\!] \,|\, \lambda_k \neq 0\}$. Par conséquent, au voisinage de a,

$$f(x) = \lambda_m (x-a)^m + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k (x-a)^k}_{\underset{a}{=}\mathrm{o}((x-a)^m)} + \underbrace{\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)}_{\underset{a}{=}\mathrm{o}((x-a)^m)}$$

Ainsi $f(a) \underset{a}{\sim} \lambda_m (x-a)^m$.

3.2.6 Exercice

Pour $x \in]0, 1]$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$. Montrons que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

- Il est clair que $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(]0, 1], \mathbb{R})$.
- Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &\equiv 0 \quad \frac{x^3}{6x^2} \\ &\equiv 0 \quad \frac{x}{6} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On pose alors $\tilde{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$. Il est clair que $\tilde{\varphi}$ est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1]$ et $\forall x \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x} \\ &\equiv 0 \quad \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^4}\end{aligned}$$

$\cos \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc, au voisinage de 0, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}\cos x &= T_{2,\cos,0}(x) + \mathrm{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= T_{4,\sin^2,0}(x) + \mathrm{o}\left(x^4\right)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $\sin^2 x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sin^2 x - x^2\cos x &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \frac{x^4}{6} + \underbrace{\mathrm{o}\left(x^4\right) - \mathrm{o}\left(x^4\right)}_{\mathrm{o}(x^4)}\end{aligned}$$

Donc $\sin^2 x - x^2\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^4}{6}$ donc $\varphi'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$. D'après le théorème « Limite de la dérivée [a] », $\tilde{\varphi}$ est dérivable en 0, $\tilde{\varphi}(0) = \frac{1}{6}$ et $\tilde{\varphi}$ est continue en 0.

a. Voir page 10.