Corrigé du devoir du 07/11/2020

Exercice 1 : On considère A, B et C trois points distincts du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ dont on notera a, b et c les affixes respectives.

1. *Prouver que :* $M(z) \in (AB) \iff (\bar{a}-\bar{b})\,z + (b-a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0$.
   Si $M = A$, alors $z + ab\bar{z} = a + b|a|^2 = a + b$ car $a \in \mathbb{U}$ et $M \in (AB)$ donc l'équivalence est vérifiée
   Si $M = B$, alors $z + ab\bar{z} = b + a|b|^2 = a + b$ car $b \in \mathbb{U}$ et $M \in (AB)$ donc l'équivalence est vérifiée.
   Sinon, le complexe $\dfrac{z-a}{a-b}$ est bien défini et non nul. On a alors :
   $$\begin{aligned} M(z) \in (AB) &\iff Arg\left(\frac{z-a}{a-b}\right) \equiv 0[\pi] \iff \frac{z-a}{a-b} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-a}{a-b} = \overline{\frac{z-a}{a-b}} \\ &\iff z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} = z\bar{z} - b\bar{z} - \bar{a}z + b\bar{a} \\ &\iff (\bar{a}-\bar{b})\,z + (b-a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0. \end{aligned}$$

2. *Exprimer $\bar{a}$ en fonction de a. En déduire que : $M(z) \in (AB) \iff z + ab\bar{z} = a + b$.*
   Comme $a \in \mathbb{U}$, on a $\bar{a} = 1/a$.
   Comme $A \neq B$, $\bar{a} - \bar{b} \neq 0$ donc
   $$M(z) \in (AB) \iff z + \frac{b-a}{\bar{a}-\bar{b}}\bar{z} + \frac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{a}-\bar{b}} = 0.$$
   Or, $\dfrac{b-a}{\bar{a}-\bar{b}} = \dfrac{b-a}{1/a-1/b} = ab$ et $\dfrac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{a}-\bar{b}} = \dfrac{a/b-b/a}{1/a-1/b} = a+b$ donc
   $$M(z) \in (AB) \iff z + ab\bar{z} = a + b$$

3. *Soit D un point de $\mathcal{C}$ distinct de C. Prouver que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $ab + cd = 0$.*
   Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ssi $Arg\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ donc si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}$. Or :
   $$\begin{aligned} \frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{b-a}{d-c} = -\overline{\frac{b-a}{d-c}} \iff \frac{b-a}{d-c} = -\frac{1/b-1/a}{1/d-1/c} \\ &\iff \frac{b-a}{d-c} = -\frac{a-b}{c-d} \times \frac{cd}{ab} \end{aligned}$$
   Comme $\dfrac{b-a}{d-c} \neq 0$, on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $ab + cd = 0$.

4. *On note $\mathcal{H}_C$ la hauteur du triangle ABC issue de C. On note $D(d)$ le point d'intersection de $\mathcal{H}_C$ et $\mathcal{C}$ distinct de C. Exprimer d en fonction de a, b et c.*
   Comme D est un point de $\mathcal{C}$ et comme les droites (AB) et (CD) sont orthogonales, on a d'après la question précédente, $ab + cd = 0$ donc, comme $c \neq 0$, $d = -\dfrac{ab}{c}\cdot$

5. *En déduire que : $M(z) \in \mathcal{H}_C \iff z - ab\bar{z} = c - ab/c$.*
   On a $M(z) \in \mathcal{H}_C \iff M(z) \in (CD) \iff z + cd\bar{z} = c + d \iff z - ab\bar{z} = c - ab/c$

6. *En déduire que les hauteurs du triangles ABC sont concourantes et déterminer l'affixe de l'orthocentre H du triangle ABC en fonction de a, b et c.*
   Un point $H(z)$ appartient aux trois hauteurs si, et seulement si,
   $$\begin{cases} (L_1) \ : \ z - ab\bar{z} &= c - ab/c \\ (L_2) \ : \ z - bc\bar{z} &= a - bc/a \\ (L_3) \ : \ z - ca\bar{z} &= b - ca/b \end{cases}$$
   Si ce système est vérifié, alors en considérant $c(L_1) - a(L_2)$, on obtient $(c-a)z = c^2 - a^2 - ab + bc = (c-a)(a+b+c)$ donc, comme $A \neq C$, $z = a + b + c$.
   Réciproquement, si $z = a+b+c$, alors $z - ab\bar{z} = a+b+c-b-a-ab\bar{c} = c - ab/c$ et par symétrie $z - bc\bar{z} = a - bc/a$ et $z - ca\bar{z} = b - ca/b$.
   Ainsi, les hauteurs du triangles ABC sont concourantes et l'affixe de l'orthocentre H du triangle ABC est $a + b + c$.

Exercice 2 : Soient E un ensemble et A une partie de E.
On note A^+ l'ensemble $\{X \in \mathcal{P}(E),\ A \subset X\}$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de E qui contiennent A. On considère l'application :
$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times A^+ \\ \quad X \mapsto (X \cap A, X \cup A) \end{cases}$$

1. *Prouver Φ est bijective.*
   Injectivité : Soient X et Y deux parties de E telles que : $\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cup A = Y \cup A \end{cases}$.
   Montrons que $X = Y$.
   Soit $x \in X$. Raisonnons par disjonction de cas :
   — Si $x \in A$, $x \in X \cap A$ et donc $x \in Y \cap A$, donc $x \in Y$.
   — Si $x \notin A$, alors, $x \in X \cup A$ et donc $x \in Y \cup A$. Or $x \notin A$, donc $x \in Y$.
   Ainsi, $X \subset Y$. Comme X et Y jouent un rôle symétrique, on a donc $X = Y$.
   Par suite, Φ est injective.
   Surjectivité : Soit $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times A^+$. Montrons que $\Phi(C \cup (D \setminus A)) = (C, D)$.

— On a $(C \cup (D \setminus A)) \cap A = (C \cap A) \cup ((D \setminus A) \cap A)$. Or, $C \in \mathcal{P}(A)$ donc $C \cap A = C$. De plus, $(D \setminus A) \cap A = \emptyset$, donc $(C \cup (D \setminus A)) \cap A = C$.

— On a $(C \cup (D \setminus A)) \cup A = (C \cup A) \cup ((D \setminus A) \cup A)$. Puisque $C \subset A$, $C \cup A = A$. De plus, $(D \setminus A) \cup A = (D \cap \bar{A}) \cup A = D \cup A$ et comme $D \in A^+$, $A \subset D$ et donc $A \cup D = D$.

Par suite $\Phi(C \cup (D \setminus A)) = (C, D)$, ce qui prouve que Φ est surjective.

Par conséquent, Φ est bijective.

2. D'après ce qui précède, on a :

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} \mathcal{P}(A) \times A^+ \to \mathcal{P}(E) \\ (C, D) \mapsto C \cup (D \setminus A) \end{cases}$$

Exercice 3 : On considère la fonction

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

   La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

2. *Étudier la dérivabilité de f et simplifier l'expression de sa dérivée.*

   La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2} - \frac{-2}{2x^3} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2x}\right)^2}$$

   donc

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} + \frac{4x}{4x^4 + 1}.$$

   Or,

$$\frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{-4x}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2} = \frac{-4x}{4x^4 + 1}$$

   donc $f'(x) = 0$.

3. *Déterminer les limites de f en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$ puis tracer le graphe de f.*

   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \arctan(x) = \pi/4$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$.

   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \arctan(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = 0$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   On obtient, de même que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\pi$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4. *Simplifier, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ et en déduire $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N$.*

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc

$$\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

   puis, par télescopage :

$$S_N = \arctan\left(\frac{N}{N+1}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{N}{N+1}\right)$$

   On en déduit que $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N = \arctan(1) = \pi/4$.

Exercice 4 : On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

1. *Déterminer l'ensemble de définition noté $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.*

   La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f est celui de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}^* : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 0[\cup]0, 1]$.

2. *Quelle propriété possède le graphe Γ_f de f ?*

   La fonction arctan étant impaire, la fonction f aussi. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine.

3. *Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée aux points de dérivation.*

   La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est dérivable sur :

$$\{x \in \mathbb{R}^* : 1 - x^2 > 0\} =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

   Soit $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On a :

$$f'(x) = \frac{-2x \times \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \times x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}}$$

   donc

$$f'(x) = \frac{-x^2 - (1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \times x^2 = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. *En déduire l'expression de f à l'aide d'une fonction usuelle f_0.*

On remarque que $\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ f'(x) = \arccos'(x)$. Par conséquent, il existe deux réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall x \in]-1,0[,\ f(x) = \arccos x + C_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \arccos x + C_2.$$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ donc $C_2 = 0$.

De même, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{-\pi}{3}$ et $\arccos\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ donc $C_1 = -\pi$.

Enfin, $f(-1) = f(1) = 0$, $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$ donc :

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[,\ f(x) = \begin{cases} \arccos x - \pi & \text{si } x < 0 \\ \arccos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5. *Tracer le graphe de f_0 et celui de f.*

6. *Soit $\theta \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$. Simplifier $f(\cos\theta)$ et retrouver le lien entre f et f_0.*

On a $f(\cos\theta) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}\right) = \arctan\left(\dfrac{|\sin\theta|}{\cos\theta}\right)$.

Comme $\theta \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$, $\sin\theta > 0$ donc $f(\cos\theta) = \arctan(\tan\theta)$.

Ainsi, $f(\cos\theta)$ est l'unique réel ϕ appartenant à $]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $\tan\phi = \tan\theta$. Par suite, si $\theta \in]0,\pi/2[$, alors $f(\cos\theta) = \theta$ et si $\theta \in]\pi/2,\pi[$, alors $f(\cos\theta) = \theta - \pi$.

Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. En posant $\theta = \arccos x$, on a $\theta \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$ et $x = \cos\theta$. De plus, $\theta \in]0,\pi/2[$ si, et seulement si, $x > 0$ donc on retrouve que :

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x - \pi & \text{si } x < 0 \\ \arccos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 5 : Soit $\mathcal{R}$ une partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{R}$ est rectangulaire si :

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \quad [(x,y)\in\mathcal{R} \text{ et } (x',y')\in\mathcal{R}] \Longrightarrow [(x,y')\in\mathcal{R} \text{ et } (x',y)\in\mathcal{R}].$$

1. *Prouver que $\mathcal{R}$ est un ensemble rectangulaire si, et seulement s'il existe deux parties de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, telles que $\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$.*

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ est un ensemble rectangulaire.

Soient $(x,y)\in\mathcal{R}$ et $(x',y')\in\mathcal{R}$, c'est-à-dire, $(x,x')\in\mathcal{A}^2$ et $(y,y')\in\mathcal{B}^2$. Alors, $(x,y')\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ et $(x',y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, d'où, $(x,y')\in\mathcal{R}$ et $(x',y)\in\mathcal{R}$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est un ensemble rectangulaire.

Réciproquement, supposons $\mathcal{R}$ rectangulaire.

Si $\mathcal{R} = \emptyset$, alors, $\mathcal{R} = \emptyset\times\emptyset$.

Sinon, considérons un élément (a,b) de $\mathcal{R}$ et les deux parties de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \{x\in\mathbb{R},\ (x,b)\in\mathcal{R}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \{y\in\mathbb{R},\ (a,y)\in\mathcal{R}\}.$$

Montrons que $\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$

— Soit $(x,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Alors, $(x,b)\in\mathcal{R}$ (car $x\in\mathcal{A}$) et $(a,y)\in\mathcal{R}$ (car $y\in\mathcal{B}$). Ainsi, comme $\mathcal{R}$ est rectangulaire, $(x,y)\in\mathcal{R}$. Par suite, $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\mathcal{R}$.

— Soit $(x,y)\in\mathcal{R}$. Puisque $(x,y)\in\mathcal{R}$ et $(a,b)\in\mathcal{R}$, alors, comme $\mathcal{R}$ est rectangulaire, $(x,b)\in\mathcal{R}$ et $(a,y)\in\mathcal{R}$, c'est-à-dire $x\in\mathcal{A}$ et $y\in\mathcal{B}$. D'où, $\mathcal{R}\subset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

On a donc prouvé que $\mathcal{R}$ est un ensemble rectangulaire si, et seulement s'il existe deux parties de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, telles que $\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

2. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ un ensemble rectangulaire non vide. On définit sur $\mathcal{R}$ la relation $\sim$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathcal{R},\ \forall (x',y')\in\mathcal{R}, \quad (x,y)\sim(x',y') \iff x = x' \text{ ou } y = y'.$$

Prouver que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est de cardinal égal à 1.

Réflexivité : soit $(x,y)\in\mathcal{R}$, on a $x = x$ donc $(x,y)\sim(x,y)$. Donc $\sim$ est réflexive.

Symétrie : Soit $(x,y)\in\mathcal{R}$ et $(x',y')\in\mathcal{R}$ tels que $(x,y)\sim(x',y')$. On a $x = x'$ ou $y = y'$ donc $x' = x$ ou $y' = y$. d'où $(x',y')\sim(x,y)$; ce qui prouve la symétrie de $\sim$.

Transitivité :

• Si $\mathcal{A}$ est de cardinal 1, alors, en considérant $a\in A$, on a $\mathcal{R} = \{a\}\times\mathcal{B}$. Par conséquent, $\forall (x,y)\in\mathcal{R},\ \forall (x',y')\in\mathcal{R},\ x = x'$ donc :

$$\forall (x,y)\in\mathcal{R},\ \forall (x',y')\in\mathcal{R}, \quad (x,y)\sim(x',y')$$

ce qui implique la transitivité de $\sim$.

• De même, si $\mathcal{B}$ est de cardinal 1, alors $\sim$ est transitive.

• Si ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$ ne sont des singletons, alors ils sont tous les deux de cardinal supérieur à 2 car $\mathcal{R}$ est non vide. Il existe donc $(a,a')\in\mathcal{A}^2$ et $(b,b')\in\mathcal{B}^2$ tels que $a\neq a'$ et $b\neq b'$. On a alors (a,b), (a,b') et (a',b) qui sont trois éléments de $\mathcal{R}$ tels que :

$$(a',b)\sim(a,b), \quad (a,b)\sim(a,b') \quad \text{et} \quad (a',b)\not\sim(a,b')$$

donc $\sim$ n'est pas transitive.

Ainsi $\sim$ est transitive si, et seulement si, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est de cardinal égal à 1.

Par suite, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est de cardinal égal à 1.

3. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ un ensemble rectangulaire. On définit sur $\mathcal{R}$ la relation $\lesssim$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{R},\ \forall (x',y') \in \mathcal{R}, \quad (x,y) \lesssim (x',y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Montrer que la relation $\lesssim$ est une relation d'ordre. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il s'agisse d'une relation d'ordre totale.

Réflexivité : Soit $(x,y) \in \mathcal{R}$, alors, puisque $x \leqslant x$ et $y \leqslant y$, $(x,y) \lesssim (x,y)$.
Donc $\lesssim$ est réflexive.
Transitivité : Soient $(x,y) \in \mathcal{R}$, $(x',y') \in \mathcal{R}$, $(x'',y'') \in \mathcal{R}$ tels que :

$$(x,y) \lesssim (x',y') \quad \text{et} \quad (x',y') \lesssim (x'',y'')$$

alors, ($x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$) et ($x' \leqslant x''$ et $y' \leqslant y''$), d'où par transitivité de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, $x \leqslant x''$ et $y \leqslant y''$, c'est-à-dire, $(x,y) \lesssim (x'',y'')$. Ainsi, $\lesssim$ est transitive.
Antisymétrie : Soient $(x,y) \in \mathcal{R}$, $(x',y') \in \mathcal{R}$ tels que :

$$(x,y) \lesssim (x',y') \quad \text{et} \quad (x',y') \lesssim (x,y)$$

alors, ($x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$) et ($x' \leqslant x$ et $y' \leqslant y$), d'où par antisymétrie de $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, $x = x'$ et $y = y'$, c'est-à-dire, $(x,y) = (x',y')$. Donc $\lesssim$ est antisymétrique.
Par conséquent, la relation $\lesssim$ est une relation d'ordre.

• Si $\mathcal{A}$ est de cardinal 1, alors, en considérant $a \in A$, on a $\mathcal{R} = \{a\} \times \mathcal{B}$.
Soit $(x,y) \in \mathcal{R}$ et $(x',y') \in \mathcal{R}$, on a $x = x' = a$. La relation $\leq$ étant totale sur $\mathbb{R}$, on a $y \leq y'$ ou $y' \leq y$ donc $(x,y) \lesssim (x',y')$ ou $(x',y') \lesssim (x,y)$.
La relation d'ordre $\lesssim$ est donc totale.
• De même, si $\mathcal{B}$ est de cardinal 1, alors $\lesssim$ est totale.
• Si ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$ ne sont des singletons, alors ils sont tous les deux de cardinal supérieur à 2 car $\mathcal{R}$ est non vide. Il existe donc $(a,a') \in \mathcal{A}^2$ et $(b,b') \in \mathcal{B}^2$ tels que $a < a'$ et $b < b'$. On a alors (a,b') et (a',b) qui ne sont pas comparables.
Ainsi $\lesssim$ n'est pas totale.
Par suite, la relation $\lesssim$ est une relation d'ordre totale si, et seulement si, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est de cardinal égal à 1.

Exercice 8 : Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A une partie de E telle que la restriction de f à A, $f_{|A} : A \to F$, $x \mapsto f(x)$ soit injective.
On dit que A est maximale s'il n'existe pas de partie B de E contenant strictement A telle que la restriction de f à B soit injective.
Prouver que A est maximale si, et seulement si, $f(A) = f(E)$.
• Supposons que A soit maximale. Montrons que $f(A) = f(E)$.
Puisque $A \subset E$, on a $f(A) \subset f(E)$. Montrons que $f(E) \subset f(A)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $y \in f(E)$ et $y \notin f(A)$.
Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$, avec $x \notin A$ car $y \notin f(A)$. Considérons $B = A \cup \{x\}$. Alors, A est strictement incluse dans B. Montrons que $f|_B$ est injective.
Soit $(u,v) \in B^2$ tel que $f(u) = f(v)$.
Si u et v appartiennent à A, alors puisque $f|_A$ est injective, $u = v$.
Sinon, si l'on suppose $u \neq v$, on a $u = x$ et $v \in A$ (ou $u \in A$ et $v = x$), puis $f(u) = f(v) = f(x) = y$ et donc $y \in f(A)$, ce qui est impossible.
Donc, on a $u = v$, ce qui contredit la maximalité de A
Ainsi, $f(A) = f(E)$
• Réciproquement, supposons $f(A) = f(E)$ et montrons la maximalité de A.
Raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe une partie B de E telle que A soit strictement incluse dans B et $f|_B$ est injective.
Soit $x \in B \setminus A$, on a alors $f(x) \in f(E)$ donc $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme $A \subset B$, on a $(x,a) \in B^2$, $f(x) = f(a)$ et $x \neq a$ (car $x \notin A$), ce qui contredit l'injectivité de $f|_B$. Par suite, A est maximale.