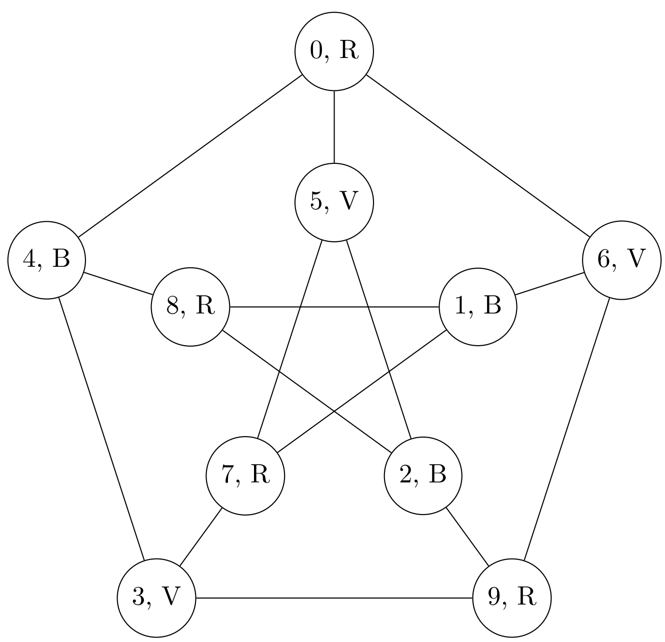
Corrigé X-ENS 2018

D'après le corrigé d'Émeric Tourniaire et Éric Détrez

1 Coloriage

Question 1 Le premier graphe admet deux sommets adjacent qui ont la même couleur ; l'étiquetage proposé n'est pas un coloriage. Cependant il admet un 3-coloriage avec l'étiquetage du second graphe donc il est colorié au sens du sujet.
Le second est colorié car l'étiquetage proposé est un 3-coloriage.

Question 2 Le graphe contient des cycles de longueur impaire, par exemple (0, 4, 3, 9, 6) : il n'est pas 2-coloriable. En effet il faudrait que les couleurs soient alternées dans le cycle et on arriverait à deux couleurs égales pour les sommets 0 et 6 qui sont reliés.
Par contre il est 3-coloriable :



Question 3

```
let est_col gphe etiq =
    let n = Array.length gphe in
    let p = Array.length etiq in
    let coloriable = ref true in
    if not (n = p)
    then coloriable := false
    else for i = 0 to (n-2) do
           for j = (i+1) to (n-1) do
               if gphe.(i).(j) && etiq.(i) = etiq.(j)
               then coloriable := false done done;
    !coloriable;;
```

Question 4 Un graphe de n sommet possède un n-coloriage, il suffit de donner une couleur distincte à chaque sommet.
Pour tester son nombre chromatique il suffit de tester, pour k variant de 2 à $n-1$ s'il admet un coloriage à k couleurs.
Pour cela on peut tester tous les coloriages : il y en a k^n.
La complexité est alors majorée par

$$An^2\left(\sum_{k=2}^{n-1} k^n\right) \leq An^2.n.n^n = A2^{(n+3)\log_2(n)} \leq B2^{n^2}$$

la complexité est exponentielle.

2 2-coloriage

Question 5 Si G est biparti, alors ses sommets peuvent se diviser en deux sous-ensembles T et U. On attribue alors la couleur 1 aux sommets de T, et 2 aux sommets de U. La propriété de coloration est alors instantanément vérifiée.
Inversement, si G possède une 2-coloration, alors on peut appeler T les sommets recevant la couleur 1 et U les sommets recevant la couleur 2. Aucune arête ne peut relier deux sommets de couleur 1 (ou 2), et les arêtes vont donc d'un sommet de T vers un sommet de U.

Question 6 Le sous-programme `explo i k` réalise le parcours en profondeur à partir du sommet `i`, en fixant sa couleur à `k`.

```
let deux_col gphe =
    let n = Array.length gphe in
    let etiq = Array.make n (-1) in
    let rec explo i k =
        etiq.(i) <- k;
        for j = 0 to n-1 do
            if gphe.(i).(j) && etiq.(j) = -1 then
                explo j (1-k) done
   in
    for i = 0 to n-1 do
        if etiq.(i) = -1 then
            explo i 0 ;
    done;
    etiq;;
```

Ici, si le graphe n'est pas 2-coloriable, alors le programme renvoie une coloration fausse (on ne détecte pas les erreurs si le sommet `j` est déjà colorié).
Le programme `explo` ne peut être lancé qu'une seule fois par sommet au maximum, et sa complexité est en $O(n)$. On arrive donc à une complexité en $O(n^2)$ dans le pire des cas.

3 Algorithmes gloutons

Question 7 Avec le premier ordre, on trouve comme colorations pour les sommets : $(0;0;0;0;1;1;1;2;2;2)$, donc trois couleurs.
Avec le second, on trouve comme colorations : $(0;3;0;2;1;1;1;0;2;3)$, donc quatre couleurs.

Question 8

```
let min_couleur_possible gphe etiq s =
    let n = Array.length gphe in
    let coul = Array.make n false in
    for i = 0 to (n-1) do
        if gphe.(s).(i) && etiq.(i) <> -1
        then coul.(etiq.(i)) <- true done;
    let c = ref 0 in
    while coul.(!c) do c := !c + 1 done;
    !c;;
```

Question 9

```
let glouton gphe num =
    let n = Array.length gphe in
    let coul = Array.make n (-1) in
    for i = 0 to (n-1) do
        let k = num.(i) in
        coul.(k) <- min_couleur_possible gphe coul k done;
    coul;;
```

Question 10 La fonction `min_couleur_possible` renvoie une couleur qui n'a pas été affectée aux voisins du sommet passé en paramètre. Lorsqu'une couleur est affectée à un sommet elle ne pourra plus être affectée aux voisins qui suivent dans l'ordre de numération. De plus chaque sommet reçoit une couleur lorsque `num` est un ordre de numération.
On a bien construit un coloriage du graphe.

Dans l'algorithme glouton chaque sommet est colorié par la couleur minimale non employée par ses voisins déjà coloriés. Comme il admet au plus $d(G)$ voisins, la plus grande valeur de cette couleur minimale est atteinte quand il y a $d(G)$ voisins, dont les couleurs vont de 0 à $d(G)-1$, et vaut alors $d(G)$. La couleur choisie est donc majorée par $d(G)$.
Ainsi la coloration construite admet au plus $d(G)+1$ couleurs (de 0 à $d(G)$).

Question 11 Soit L un coloriage de G. On considère une numération des sommets qui les classe par numéro de couleur croissante.
Comme deux sommets de même couleur ne sont pas adjacents, lors de l'appel de `min_couleur_possible`, aucun voisin du sommet s considéré ne sera de couleur $L(s)$. la couleur choisie $L'(s)$ sera donc au maximum $L(s)$ (cas atteint si chaque couleur strictement inférieure à $L(s)$ apparaît chez un voisin de s).
Si on part d'un coloriage optimal pour construire la numération des sommets on aboutit donc à un coloriage dont le maximum est majoré par celui du coloriage optimal : ce sera donc aussi un coloriage optimal.

Question 12 Comme l'algorithme `glouton` est de complexité quadratique on peut choisir un algorithme lui-même quadratique pour construire une numération des sommets sans augmenter la complexité.

```
let degres gphe =
    let n = Array.length gphe in
    let deg = Array.make n 0 in
    for i = 0 to (n-1) do
        for j = 0 to (n-1) do
            if gphe.(i).(j)
            then deg.(i) <- deg.(i) + 1 done done;
    deg;;
```

```
let echanger tab i j =
    let temp = tab.(i) in
    tab.(i) <- tab.(j);
    tab.(j) <- temp;;


let tri_degre gphe =
    let n = Array.length gphe in
    let deg = degres gphe in
    let num = range n in
    for i = 0 to (n-2) do
        let max = ref i in
        let deg_max = ref deg.(num.(i)) in
        for j = (i+1) to (n-1) do
        let d = deg.(num.(j)) in
            if d > !deg_max
            then (max := j; deg_max := d) done;
        echanger num i !max done;
    num;;
```

Il suffit alors de tout rassembler.

```
let welsh_powell gphe =
    glouton gphe (tri_degre gphe);;
```

4 Algorithme de Widgerson

Question 13 Supposons que le graphe G est $(k+1)$-coloriable, et soit s un de ses sommets. On considère une $(k+1)$-coloration de G. Alors aucun sommet de $V(s)$ n'est de la même couleur que s (ce serait contradictoire). Sur le sous-graphe induit par $V(s)$, cette coloration reste valide, et n'utilise donc que k couleurs au maximum (celle de s n'est pas employée).
Notons au passage qu'on a forcément $s \notin V(S)$, sans quoi aucune coloration ne serait possible.

Question 14 Fixons les notations.
On pose $G_0 = G$ de taille n.
L'étape (a) se décompose en étapes.

1. Si G_i admet un sommet de degré supérieur à $\sqrt{n}$,
2. on choisit un tel sommet, s_i, par exemple celui de degré maximum,
3. on colorie avec les couleurs $2i$ et $2i+1$ $V(s_i)$, ce qui est possible d'après la question précédente. En effet G_i est induit d'un graphe 3-coloriable donc est 3-coloriable d'où $V(s_i)$ est 2-coloriable.
4. On définit G_{i+1} comme le graphe induit de G_i en enlevant les sommets appartenant à $V(s_i)$.

Après au plus $\sqrt{n}$ itérations G_p n'admet plus de sommet de degré supérieur à $\sqrt{n}$ et on le colorie par l'algorithme glouton.
On a ainsi partitionné l'ensemble des sommets : $S = S_0 \cup S_1 \cup \cdots S_p$,
où $S_i = V(s_i)$ pour $i < p$ et S_p est l'ensemble des sommets de G_p.
Chaque S_i admet un coloriage :

1. pour $i < p$, $V(s_i)$ est colorié par $2i$ et $2i+1$,
2. G_p est colorié par q couleurs qui sont supérieures ou égales à $2p$. De plus, d'après la question **10**, on a $q \leq \sqrt{n} + 1$.

Comme chaque partie est coloriée par des couleurs distinctes on obtient un coloriage de G avec $2p+q$ couleurs qui vérifient $2p + q \leq 2\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Question 15

```
let sous_graphe gphe sg =
    let p = Array.length sg in
    let ss_gphe = Array.make_matrix p p false in
    for i = 0 to (p-1) do
        let si = sg.(i) in
        for j = 0 to (p-1) do
            let sj = sg.(j) in
            ss_gphe.(i).(j) <- gphe.(si).(sj) done done;
    ss_gphe;;
```

Question 16

```
let voisins_non_colories gphe etiq s =
  let n = Array.length gphe in
  let vnc = ref [] in
  for j = 0 to (n-1) do
      if gphe.(s).(j) && etiq.(j) = -1
      then vnc := j :: !vnc done;
  !vnc;;

let degre_non_colories gphe etiq s =
    List.length (voisins_non_colories gphe etiq s);;
```

Question 17 A-t-on besoin du graphe ?

```
let non_colories gphe etiq =
  let n = Array.length gphe in
  let nc = ref [] in
  for i = 0 to (n-1) do
      if etiq.(i) = -1
      then nc := i :: !nc done;
  !nc;;
```

Question 18 Pour ne pas écrire un programme démesurément long, je sors quelques fonctions. La première détermine le degré en sommets non coloriés maximal. Le test de majoration de $\sqrt{n}$ est renvoyé par le type optionnel : la fonction renvoie `None` s'il n'existe pas de sommets avec suffisamment de voisins non coloriés et sinon elle renvoie un sommet k vérifiant cette proprité sous la forme `Some k`.

```
let sous_degre_maximum gphe etiq =
    let n = Array.length gphe in
    let r = int_of_float (sqrt (float_of_int n)) in
    let deg_max = ref (degre_non_colories gphe etiq 0) in
    let ind_max = ref 0 in
    for i = 1 to (n-1) do
        let d = degre_non_colories gphe etiq i in
        if d > !deg_max
            then (deg_max := d; ind_max := i) done;
if !deg_max > r then Some !ind_max else None;;
```

La seconde modifie le tableau des couleurs (`etiq`) à partir des couleurs calculées (`ss_etiq`) pour un sous-graphe (`sg`)

```
let ajouter_couleurs etiq sg ss_etiq =
    let p = Array.length sg in
    for i = 0 to (p-1) do
        etiq.(sg.(i)) <- ss_etiq.(i) done;;
```

Le programme consiste alors à répéter la recherche de sommets avec suffisamment de voisins non coloriés tant qu'il en existe.

```
let wigderson gphe =
    let n = Array.length gphe in
    let etiq = Array.make n (-1) in
    let rec aux () =
        match sous_degre_maximum gphe etiq with
        |None -> let sg = Array.of_list (non_colories gphe etiq) in
                 let ss_gphe = sous_graphe gphe sg in
                 let ss_etiq = glouton ss_gphe (range (Array.length
                    ss_gphe)) in
                 ajouter_couleurs etiq sg ss_etiq
        |Some i -> let sg = Array.of_list (voisins_non_colories gphe etiq
            i) in
                   let ss_gphe = sous_graphe gphe sg in
                   let ss_etiq = deux_col ss_gphe in
                   ajouter_couleurs etiq sg ss_etiq;
                   aux ()
    in aux (); etiq;;
```

Toutes les fonctions auxiliaires sont de complexité polynomiale en la taille du graphe et elles sont appelées au plus $\sqrt{n}$ fois : la complexité est polynomiale.
Je ne comprends pas la demande de justification des propriétés, c'est ce qui a été fait à la question **14**.

Question 19 Comme on sait définir un coloriage dans le cas d'un graphe 3-coloriable on peut poursuivre le raisonnement de manière semblable.
Si un graphe est 4-coloriable, les voisins d'un sommets sont 3-coloriables ; on va donc pouvoir définir un coloriage pour les "gros" voisinages puis conclure par un algorithme glouton.
On considère la propriété $\mathcal{P}(k)$: on peut définir un coloriage de $A_k.n^{a_k}$ couleurs d'un graphe k-coloriable avec $a_k < 1$.
$\mathcal{P}(2)$ est vraie avec $a_2 = 1$ et $A_2 = 2$.
$\mathcal{P}(3)$ est vraie avec $a_2 = \frac{1}{2}$ et $A_3 = 3$.
On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie. G est un graphe $k+1$-coloriable.
Pour chaque sommet s de G ayant au moins n^r voisins pas encore coloriés on colorie ceux-ci avec au plus $A_k.n^{a_k}$ couleurs non encore utilisées. On colorie le reste avec au plus $n^r + 1$ couleurs non utilisées.
Le nombre de sommets avec plus de n^r voisins est au plus $\frac{n}{n^r}$ donc on a utilisé au plus $n^{1-r}.A_k.n^{a_k} + n^r$ couleurs.
On peut choisir r tel que l'expression ci-dessus devienne homogène : $1 - r + a_k = r$ donc $r = \frac{1+a_k}{2}$.
On obtient ainsi un coloriage avec au plus $(A_k + 1).n^r$ couleurs.
La récurrence $a_{k+1} = \frac{1+a_k}{2}$ avec $a_2 = 0$ donne $a_k = 1 - 2^{2-k}$. donc
la propriété $\mathcal{P}(k)$ est donc vraie avec $A_k = k$ et $a_k = 1 - 2^{2-k}$.

Dans le calcul ci-dessus on n'a pas tenu compte du fait qu'on appliquait $\mathcal{P}(k)$ à des graphes de tailles inférieures à n.
Si les tailles auxquelles on applique $\mathcal{P}(k)$ sont m_1, m_2, ..., m_p, le nombre de couleurs employées est en fait majoré par $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_k.m_i^{a_k} + n^r$

La fonction $x \mapsto n^{a_k}$ est concave donc $\displaystyle\frac{\sum_{i=1}^{p} m_i^{a_k}}{p} \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{p}\right)^{a_k}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_k.m_i^{a_k} + n^r \leq p^{1-a_k} A_k \left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)^{a_k} + n^r$.

Comme on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} m_i \leq n$ et $p \leq n^{1-r}$, le nombre de couleurs utilisées est majoré par $n^{(1-r)(1-a_k)} A_k n^{a_k} + n^r$.
On choisit $a_{k+1} = r$ tel que $(1-r)(1-a_k) + a_k = r$ d'où $r = \frac{1}{2-a_k}$.
$a_2 = 0$ donne bien $a_3 = \frac{1}{2}$.
On calcule ensuite $a_4 = \frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{3}{4}$ et, par récurrence, $a_k = \frac{k-2}{k-1} = 1 - \frac{1}{k-1}$ qui donne moins de couleurs que la valeurs $1 - 2^{2-k}$.