Mines PSI : Bien car très complet - Un peu de précipitation

Idéaux de $\mathcal{L}(E)$: Bien -

X : Bien

Sheffrey
M1S

1

Devoir maison n° 6

Exercice 1 : Mines PSI 2015

I/ Le groupe symplectique

1. $J^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$ et ${}^tJ = -J$

donc $J\,{}^tJ = I_{2n}$, l'inverse de J est donc ${}^tJ$

2. ${}^tJJJ = J$ donc $J \in S_{p2n}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = J$ donc $K(\alpha) \in S_{p2n}$

3. si $U \in \mathcal{G}_n$: $\begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tU \\ U^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = J$

donc $L_U \in S_{p2n}$ /

?? trois erreurs ici

4. $\det J = \cancel{-\det(I_n)\det(-I_n) = 1}$, ainsi si $M \in S_{p2n}$:

$\det(M)^2 = \cancel{\det J}$ c'est à dire $\det(M) = \pm 1$ /

↳ ??

5. soit $(A,B) \in S_{p2n}^2$ donc ${}^tB\,{}^tA\,J\,AB = {}^tBJB = J$ donc $AB \in S_{p2n}$ /

6 si $M \in S_{p2n}$, $\det(M) \in \{-1,1\}$, non nul donc $M \in \mathcal{G}_{2n}$

(et ${}^tMJM = J$ donc ${}^tMJ = JM^{-1}$ et $J = {}^tM^{-1}JM^{-1}$ donc $M^{-1} \in S_{p2n}$

7. si $M \in S_{p2n}$ ainsi ${}^tMJM = J$ puis $M^{-1}\,{}^tJ\,{}^tM^{-1} = {}^tJ$

↳ ? je ne comprends pas

Donc $M^{-1} J \, {}^tM^{-1} = J$ puis $J = MJ\,{}^tM$ donc ${}^tM \in S_{p2n}$

8. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} {}^tC & -{}^tA \\ {}^tD & -{}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{pmatrix}$

et $M \in S_{p2n}$ si $\begin{cases} {}^tCA = {}^tAC \\ {}^tBD = {}^tDB \\ {}^tCB - {}^tAD = -I_n \\ {}^tDA - {}^tBC = I_n \end{cases}$ redondant

II / centre de S_{p2n}

9. Si $M \in S_{p2n}$ $MI_{2n} = M = I_{2n}M$ et $-MI_{2n} = -M = -I_{2n}M$

donc $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \in Z$

10. Si $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J$ donc $L \in S_{p2n}$

et $ML = LM = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix}$ et ${}^tL \in S_{p2n}$

donc $M\,{}^tL = {}^tLM = \begin{pmatrix} A & B \\ A+C & B+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ C+D & D \end{pmatrix}$

Ainsi on a que $A+C = A$ donc $C = 0$, $A+B = B$ donc $B = 0$

et $A+C = C+D$ donc $D = A$.

$\longrightarrow$ A inversible ?

11. Comme $L_U \in Sp_{2n}$ où $U \in \mathcal{G}_n$ donc $L_U H = H L_U$

et $\begin{pmatrix} AU & 0 \\ 0 & A^t U^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1}A \end{pmatrix}$ ainsi $UA = AU$ est vrai pour tout $U \in \mathcal{G}_n$

donc A commute avec toute matrice de $\mathcal{G}_n$

si $i \neq j$ (12. soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $I_n + E_{ij}$ triangulaire et $\det(I_n + E_{ij}) = 1$

donc $I_n + E_{ij} \in \mathcal{G}_n$ et A commute avec $E_{ij} + I_n$.

Ainsi $A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A$ donc $AE_{ij} = E_{ij}A$

et $(AE_{ij})_{m\ell} = \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\delta_{ik}\delta_{j\ell} = a_{m\ell}$

et $(E_{ij}A)_{m\ell} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{im}\delta_{jk} a_{k\ell} = a_{jk}$

ou (notamment si $i = j$ donc $a_{ii} = a_{jj}$ et si $k \neq j$ $a_{ij} = 0$

donc $A = a_{11} I_n$ et $\det(M) \in \{-1, 1\}$ donc

$\det(A) = a_{11} \det I_n = a_{11} \in \{-1, 1\}$.

Ainsi $A \in \{-I_n, I_n\}$ et ainsi $Z \subset \{-I_{2n}, I_{2n}\}$ donc $Z = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$

III / Déterminant d'une matrice symplectique

13. soit $(Q, U, V, W) \in \mathcal{M}_n^4$ tel que $\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

donc $V = C$, $W = D$, $QD = B$ donc $Q = BD^{-1}$

et $U + QV = A$ donc $U = A - BD^{-1}C$

→ conclure SVP

14. si $M \in S_{p2n}$ donc d'après la question 8 :

${}^tBD = {}^tDB$ donc ${}^tD^{-1}\,{}^tBD = {}^tD^{-1}\,{}^tDB = B$

donc ${}^tD^{-1}\,{}^tB = BD^{-1}$ et ${}^t(BD^{-1}) = BD^{-1}$.

BD^{-1} est symétrique ✓

De plus $\det({}^tM) = \det(M) = \det({}^tD\,{}^tA - {}^tD\,{}^tC\,{}^t(BD^{-1})) \times 1$

$= \det({}^tD({}^tAD - {}^tCB)D) = \frac{\det D}{\det D} \det({}^tAD - {}^tCB)$

$= \det({}^tAD - {}^tCB)$ et d'après 8 ${}^tAD - {}^tCB = I_n$

donc $\det(M) = 1$. ✓

détails ? explication ?

15. $(QV_1 | QV_2) = (QV_1 | s_2 PV_2) = s_2\,{}^tV_1\,{}^tQPV_1 = s_2\,{}^tV_1\,{}^tPQV_2$

$= s_2(PV_1 | QV_2)$. Ainsi $s_1(QV_1 | QV_2) = s_2(QV_1 | QV_2)$

or $s_1 \neq s_2$ donc $(QV_1 | QV_2) = 0$

16. si $X \in \ker B \cap \ker D$ donc $BX = 0$ et $DX = 0$ or $M \in S_{p2n}$

donc ${}^tCB - {}^tAD = I_n$ et ${}^tCBX - {}^tADX = X \Rightarrow X = 0$ ✓

Geoffrey
Nils

8

Devoir maison n°6

Exercice 1 : Mines PSI 2015

III / Déterminant d'une matrice symplectique

16. $\mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Ker}\, D = \{0\}$

17. On a montré que $\mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Ker}\, D = \{0\}$ ainsi :

si $DV_i = 0$ alors $s_i BV_i = 0$ et alors $V_i = 0$ or V_i non nul donc

absurde et V_i $DV_i \neq 0$, de plus comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

étant donné que D non inversible et que ${}^tBD = {}^tDB$ d'après 8.

d'après la question 15 $(DV_i \mid DV_j) = 0$ donc la famille $(DV_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

est orthogonal donc libre.

sans le vecteur nul

18. Supposons qu'il n'existe pas de réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

Alors on peut choisir $s_1 \dots s_{n+1}$ réels non nuls tel que

oui

$\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ $D - s_i B \notin \mathcal{G}_n$ car il existe des vecteurs V_i non nuls

tel que $\forall i$ $(D - s_i B)V_i = 0$, d'après la question 17, les $(V_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$

forment donc un système libre de E_n de dimension n ce qui est absurde.

19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D-\alpha B$ inversible, $K(\alpha) \in S_{p2n}$

et $\det(K(\alpha)) = 1$ de plus si $M \in S_{p2n}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

donc $K(\alpha)M \in S_{p2n}$ d'après 5, de plus $\det(K(\alpha)M) = \det M$

et $K(\alpha)M = \begin{pmatrix} A & B \\ C-\alpha A & D-\alpha B \end{pmatrix}$ et $D-\alpha B$ inversible

donc on se ramène au cas de la question 14 et

$\det(K(\alpha)M) = 1 = \det(M)$.

Exercice 2 : Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

1. Soit M un idéal de $\mathcal{L}(E)$, on le prend idéal à droite sans perte de généralité. Soit $(f,g)\in M$ et $(\lambda,\mu)\in K^2$, soit $h\in\mathcal{L}(E)$ donc $(\lambda f+\mu g)\circ h = \lambda f\circ h+\mu g\circ h$ et M sous groupe additif donc étant donné que $(\lambda f\circ h, \mu g\circ h)\in M^2$, $\lambda f\circ h+\mu g\circ h\in M$.
Ainsi M est une partie non vide, contenant $0_{\mathcal{L}(E)}$, de $\mathcal{L}(E)$ et M est un sous espace de $\mathcal{L}(E)$

2. Étant donné que si $f\in\mathcal{L}(E)$ $f\circ 0=0$ donc $0\in\Delta_f$ et si $(g,h)\in\mathcal{L}(E)^2$, $f\circ g - f\circ h = f\circ(g-h)$ donc $f\circ(g-h)\in\Delta_f$.
car $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel donc $g-h\in\mathcal{L}(E)$
Ainsi Δ_f est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(E)$.

Puis si $h\in\mathcal{L}(E)$ $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ et $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre donc $g\circ h\in\mathcal{L}(E)$ et $f\circ(g\circ h)\in\Delta_f$. Donc Δ_f est un idéal à droite. De la même manière $0\in\Gamma_f$ et si $(g,h)\in\mathcal{L}(E)^2$ $g\circ f - h\circ f=(g-h)\circ f$ et $(g-h)\circ f\in\Gamma_f$ donc Γ_f sous groupe additif de $\mathcal{L}(E)$ et si $h\in\mathcal{L}(E)$ $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ et $h\circ g\in\mathcal{L}(E)$ donc $(h\circ g)\circ f\in\Gamma_f$

3. Soit $f \in \mathcal{J}_F$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ soit $x \in E$ $g(x) \in E$ et

Sous groupe ? | $f \circ g(x) \in F$ donc $\mathrm{Im}\, f \circ g \subset F$ et $f \circ g \in \mathcal{J}_F$, il s'agit donc d'un idéal

à droite. maintenant soit $f \in K_F$, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in F$, comme $F \subset \mathrm{Ker} f$

$f(x) = 0$ et $g \circ f(x) = 0$ donc $F \subset \mathrm{Ker}\, g \circ f$ donc $g \circ f \in K_F$, qui est

idem | ainsi un idéal à gauche.

4. soit $\dim F = p \leq n$ et $(e_1, \dots, e_p)$ base de F que l'on complète

à l'aide de $n-p$ vecteurs de E $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tel que $B(e_1, \dots, e_n)$ base

CNS ? | de E. si $f \in \mathcal{J}_F$ $\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} A_{p,n} \\ 0_{n-p,n} \end{pmatrix}$

D'accord | ainsi $\dim \{ \mathrm{Mat}_B f, f \in \mathcal{J}_F \} = np$ et $f \mapsto \mathrm{Mat}_B f$ isomorphisme

de $\mathcal{J}_F$ dans $\{ \mathrm{Mat}_B f, f \in \mathcal{J}_F \}$ ainsi $\dim \mathcal{J}_F = np$

soit $f \in K_F$ $\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0_{n,p} & A_{n-p,n} \end{pmatrix}$ et de la même

manière $\dim K_F = n(n-p)$

5. $g \in \mathrm{Ker}\, \phi$ alors $f \circ g = 0$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker} f$

donc $g \in \mathcal{J}_{\mathrm{Ker} f}$ et $\dim \mathrm{Ker}\, \phi = \dim \mathcal{J}_{\mathrm{Ker} f} = n(n - \mathrm{rg}(f))$

oui | et $\Delta_f = \mathrm{Im}\, \phi$ donc d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Im}\, \phi = \dim \Delta_f$
$= n\,\mathrm{rg}(f)$

Xhoffray
Nils

8

Devoir maison n°6

Exercice 8 : Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

5. $\dim J_{\mathrm{Im} f} = n \dim \mathrm{Im} f = n\,\mathrm{rg}(f)$ d'après la question 4

et si $g \in \mathcal{L}(E)$ $\mathrm{Im}\, f\circ g \subset \mathrm{Im} f$ donc $\cancel{\Delta_f \subset \mathrm{Im} f}$ $\Delta_f \subset J_{\mathrm{Im} f}$

et $\dim \Delta_f = \dim J_{\mathrm{Im} f}$ donc $\Delta_f = J_{\mathrm{Im} f}$

~~6. Posons $\varphi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g\circ f$ donc $\Gamma_f = \mathrm{Im}\,\varphi$~~

~~et si $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ donc $g\circ f = 0$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc $g \in K_{\mathrm{Ker} f}$~~

~~et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim K_{\mathrm{Ker} f} = \cancel{n(n-\mathrm{rg}(f))}\ n(n-n+\mathrm{rg}(f)) = n\,\mathrm{rg}(f)$~~

~~donc $\dim K_{\mathrm{Ker} f} = n\,\mathrm{rg}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \Gamma_f =$~~

6. On pose $\varphi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g\circ f$ ainsi $\Gamma_f = \mathrm{Im}\,\varphi$ et si $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$g\circ f = 0$ donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g \iff g \in K_{\mathrm{Im} f}$ et ainsi

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim K_{\mathrm{Im} f} = n(n-\mathrm{rg}(f))$ d'après la question 4

Puis d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \Gamma_f = n^2 - n(n-\mathrm{rg}(f))$

$= n(n-n+\mathrm{rg}(f)) = n(n-\dim \mathrm{Ker} f) = \dim K_{\mathrm{Ker} f}$.

et $\Gamma_f \subset K_{\mathrm{Ker} f}$ donc $\Gamma_f = K_{\mathrm{Ker} f}$

7. soit F un sous espace vectoriel de E et H ~~un~~ supplémentaire de F ainsi $F \oplus H = E$, soit f et h les projecteurs :

ok f sur F parallèlement à H et h sur H parallèlement à F.

Alors $\mathrm{Im} f = F$ et $\mathrm{Ker} f = H$ donc d'après 5. $\Delta_f = J_F$

et $\mathrm{Im}\, h = H$ et $\ker h = F$ donc d'après 6 $\Gamma_h = K_F$

8. a) si $g \in J_F \cap J_G$ alors $\mathrm{Im}\, g \subset F$ et $\mathrm{Im}\, g \subset G$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset F \cap G$ et $g \in J_{F \cap G}$. De même si $g \in J_{F \cap G}$ alors $\mathrm{Im}\, g \subset F \cap G$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset F$ et $\mathrm{Im}\, g \subset G$ d'où $g \in J_F \cap J_G$

Et ainsi $J_F \cap J_G = J_{F \cap G}$

Si $g \in K_F \cap K_G$ alors $F \subset \ker g$ et $G \subset \ker g$ si $z \in F + G$ alors on a $(x, y) \in F \times G$ $z = x + y$ et $g(z) = g(x) + g(y) = 0$ donc $F + G \subset \ker g$, $g \in K_{F+G}$. De même si $g \in K_{F+G}$ alors $F + G \subset \ker g$ ~~$(x, y) \in F \times G$~~ comme $F \subset F + G \subset \ker g$

ok et $G \subset F + G \subset \ker g$ donc $g \in K_F \cap K_G$. Ainsi $K_F \cap K_G = K_{F+G}$

b) $\dim(J_F + J_G) = \dim J_F + \dim J_G - \dim(J_F \cap J_G)$

$= \dim J_F + \dim J_G - \dim J_{F \cap G} = n \dim F + n \dim G - n \dim(F \cap G)$

et $\dim J_{F+G} = n(\dim F+G) = n\dim F + n\dim G - n\dim(F\cap G) = \dim(J_F+J_G)$

si $h \in J_F+J_G$, $h = f+g$ avec $f\in J_F$ et $g\in J_G$

et $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ donc $\mathrm{Im}\, h \subset F+G$ car

$f\in J_F$ c'est-à-dire $\mathrm{Im} f \subset F$ idem pour $\mathrm{Im}\, g \subset G$ donc $\mathrm{Im}\, h \subset F+G$.

Donc $J_F+J_G \subset J_{F+G}$ et de même dimension donc $J_F+J_G = J_{F+G}$.

si $h \in K_F+K_G$ donc $h = f+g$ avec $f\in K_F$ et $g\in K_G$

donc $F\subset \ker f$ et $G\subset \ker g$, donc si $x\in F\cap G$ $f(x)+g(x) = 0 = h(x)$

donc $F\cap G \subset \ker h$. $K_F+K_G \subset K_{F\cap G}$

et $\dim(K_F+K_G) = n(n-\dim F)+n(n-\dim G) - n(n-\dim(F\cap G))$

$= n(n-\dim F) + n(n-\dim G) - n(n-\dim F - \dim G + \dim F\cap G)$

$= n^2 - n\dim(F\cap G) = n(n-\dim F\cap G)$

et $\dim K_{F\cap G} = n(n-\dim F\cap G)$ donc $K_F+K_G = K_{F\cap G}$.

9.a) l'ensemble $\{rg(f), f\in M\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{N}$

car $\dim E = n$ donc $\forall f\in \mathcal{L}(E)$ $rg(f)\le n$, ainsi $\{rg(f), f\in M\}$ possède

un maximum d'où l'existence d'un élément f de rg maximal. De plus si $f\circ g\in \Delta_f$

donc comme M idéal à droite $f\circ g\in M$ donc $\Delta_f \subset M$

b) Soit $h \in M$ supposons que $\mathrm{Im}\,h \not\subset \mathrm{Im}\,f$

alors $\mathrm{Im}\,f \subsetneq \mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,h$ puis $\Delta_f \subsetneq \Delta_f + \Delta_h = J_{\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,h}$

d'après la 8.b. d'après la question 7 il existe g tel que $\Delta_g = J_{\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,h}$

M est un sous espace donc $g \in M$ et $rg(g) > rg(f)$

donc $rg(g) > rg(f)$ ce qui est absurde car f est définie par maximalité du rang donc $\mathrm{Im}\,h \subset \mathrm{Im}\,f$

strict

c) On vient de montrer que $\Delta_f \supset M$ donc $\Delta_f = M = J_{\mathrm{Im}\,f}$

f n'est pas unique

Supposons que f n'est pas unique donc il existe g tel que $rg(g) = rg(f)$

et $\mathrm{Im}\,g \subset \mathrm{Im}\,f$ donc $\mathrm{Im}\,g = \mathrm{Im}\,f$ et $M = \Delta_g = J_{\mathrm{Im}\,g} = \Delta_f$

donc il existe unique F sev de E tel que $M = J_F = J_{\mathrm{Im}\,f}$.

c'est F qui l'est

10. si M est un idéal à gauche, soit f tel que la dimension du noyau de f soit minimum. Si $g \circ f \in \Gamma_f$ $\mathrm{Ker}\,f \subset \mathrm{Ker}\,g$ donc $g \circ f \in M$ et $\Gamma_f \subset M$. Si $\mathrm{Ker}\,f \not\subset \mathrm{Ker}\,h$

$\mathrm{Ker}\,f \subsetneq \mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Ker}\,h$ donc $K_{\mathrm{Ker}\,f} \subsetneq K_{\mathrm{Ker}\,f} + K_{\mathrm{Ker}\,h} = K_{\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Ker}\,h}$

et il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $K_{\mathrm{Ker}\,f} \subset K_{\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Ker}\,h} = K_{\mathrm{Ker}\,g} = \Gamma_g$

ainsi $n(n - \dim \mathrm{Ker}\,f) \leq n(n - \dim \mathrm{Ker}\,g)$ et $\dim \mathrm{Ker}\,f \geq \dim \mathrm{Ker}\,g$

ce qui est absurde d'après f. Donc $\mathrm{Ker}\,f \subset \mathrm{Ker}\,h$ et $M \subset \Gamma_f$ puis

$M = \Gamma_f = K_{\mathrm{Ker}\,f}$ de la même manière on trouve que l'on a un unique G tel que

$M = K_G$.

Haffray
MLS

4

Devoir maison n°6

Exercice 3, X 1996

Première partie

1. a) T endomorphisme nilpotent non nul de E, donc $r \notin \{1, 0\}$

et donc $r = 2$. Si $\dim \ker T = 2$ alors T ~~est la matrice nulle~~ et nulle
car $\dim E = 2$

or $T \neq 0$ donc absurde. On a donc que $\dim \ker T = 1$ et $rg(T) = 1$

b) $rg(T) = 1$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e_1)$, si $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$ tel que

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 T(e_1) = 0$ alors $\lambda_1 T(e_1) = 0$ et $T(e_1)$ non nul donc $\lambda_1 = 0$

puis e_1 non nul donc $\lambda_2 = 0$, la famille $(e_1, T(e_1))$ est libre c'est

donc une base de E et $\mathrm{Mat}_{(e_1, T(e_1))} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. si $T \in A$ alors $T^r = 0$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ donc $T^2 = 0$,

car T nilpotent et $\dim E = 2$. Donc tout élément de A est nilpotent

d'ordre 2. et A algèbre commutative donc si $(P, Q) \in A^2$

$P + Q \in A$ et $(P+Q)^2 = 0 = P^2 + Q^2 + 2PQ = 2PQ$

ainsi $PQ = 0$. On a donc que l'ordre de nilpotence de A est 2.

soit $T \in A$ et $\in K$, d'après la question 1 b on construit une base de E, où $e_1 \notin \ker T$ et $\mathcal{B} = (e_1, T(e_1))$

ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Maintenant soit $P \in A$ quelconque

comme vecteur de nilpotence de A est 2, $PT = 0$ et

et $TP = 0$

$P(ce_1) = cP(e_1)$ et $PT(e_1) = 0$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Finalement les endomorphismes de A sont représentés par les matrices

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{K}$.

<u>Deuxième partie</u>

3. On pose $T_{ij} : E_j \to E_i$

$x_j \mapsto T(x_j)_i = p_i(T(x_j))$

T_{ij} linéaire et $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} T(x_j)_i$

$= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_i = T(x)_i$

$ST_{ij}(x_j)$

4. $(ST)_{ij} = p_i \circ S \circ T(x_j) = p_i \circ S \circ \sum_{k=1}^{n} p_k \circ T(x_j)$

$= \sum_{k=1}^{n} p_i \circ S \circ T_{kj}$ et $T_{kj} : x_j \mapsto T(x_j)_k$ $\text{Im}\, T_{kj} \subset E_k$

peut être plus clair

donc $(ST)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} \circ T_{kj}$

<u>Troisième partie</u>

5. Soit T nilpotent non nul et r le plus petit entier tel que $T^r = 0$

Ainsi il existe $x \notin \ker T^{r-1}$, $T^{r-1}(x) \neq 0 = T(T^{r-1}(x))$

et $T^{r-1}(x) \in \text{Im}\, T$

Ok (et $T^{r-1}(x) \in \ker T$ et non nul donc $E_3 \neq \{0\}$

Ok (de même $E_3 \neq E$.

6. On cherche à ce que $\mathrm{Im}(T) \subset \ker T$ c'est à dire $T^2 = 0$

donc $E_3 = \mathrm{Im}\,T$ si $r \in \{1, 2\}$, $r \neq 1$ car T non nul

7. On a $E_1 \oplus \mathrm{Im}\,T$ ainsi si $x \in E_1$ $T(x) \in \mathrm{Im}(T)$ et $T(x) \notin E_1$

donc $T(x)_1 = 0$ ainsi $T_{1,1} = T_{2,1} = T_{3,1} = 0$

~~De la même manière $T_{2,3} : x_3 \mapsto T(x_3)_2$~~ De plus $E_3 = \mathrm{Im}\,T \cap \ker T$

$\subset \ker T$ donc $T(E_3) = \{0\}$.

Et donc T est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} = A$

8. T est nilpotent d'indice r donc $A^r = 0 = \begin{pmatrix} & & \\ & T_{2,2}^r & \\ & & \end{pmatrix}$

Donc $T_{2,2}$ est au plus nilpotente d'indice r.

ce n'est pas l'idée attendue !!

Alors $T_{2,2}$ possède per polynôme annulateur X^r, d'après Cayley

Hamilton $\chi_{T_{2,2}}$ annulateur car endomorphisme fini, donc $\pi_{T_{2,2}}$ divise $\chi_{T_{2,2}}$

donc $\mathrm{Sp}(T_{2,2}) = \{0\}$ et $T_{2,2}$ semblable à une matrice triangulaire

supérieure stricte. Soit $\mathcal{B}(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2), \mathcal{B}(E_3))$ une base de E tel que ce soit

$\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2), \mathcal{B}(E_3)$ des bases de E_1, E_2, E_3

le cas des $\mathrm{mat}_{B'} T_{22}$ où $B' = (B(E_3), B(E_2), B(E_1))$ est triangulaire infér ... avec

stricte et $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta & \mathrm{mat}_{B'} T_{2,2} & 0 \\ \delta & \delta & 0 \end{pmatrix}$ G T_n ...

9. $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \delta & \ddots & \\ \delta & \cdots & \delta\, 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{mat}_{B'} T^n = 0$

or r plus petit entier tel que $\mathrm{mat}_{B'} T^r = 0$ donc $r \leq n$

10. si $(e_1 \ldots e_4)$ base canonique de $\mathbb{K}^4$ dans $\ker T = \mathrm{vect}(e_3)$

et $T(e_4) = e_2$ donc ~~$E_3 = \mathrm{vect}(e_1) \cap \mathrm{vect}(e_4)$~~ $E_3 = \mathrm{vect}(e_4)$

$E_1 = \mathrm{vect}(e_2)$ et $E_2 = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ de plus $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$

et $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $B' = (e_4, e_1, e_3, e_2)$ (on a utilisé

la même construction de base que dans la 9 en inversant l'a ~~...~~ concaténation des

bases de E_1, E_2 et E_3).

Quatrième partie

11. Comme A est d'ordre de nilpotence r on a $\exists (T_1 \ldots T_{r-1}) \in \mathcal{L}(E)$

tel que $T_1 \circ \ldots \circ T_{r-1} \neq 0$ ainsi $\ker(T_1 \circ \ldots \circ T_{r-1}) \neq E$

et si $y \in I(A)$ $y = \sum_{T_i \in A} \lambda_i T_i(x_i)$ et $T_1 \circ \ldots \circ T_{r-1}(y) = 0$

donc $I(A) \subset \ker(T_1 \ldots T_{r-1}) \neq E$ donc $I(A) \neq E$

$E_2 = I(A) \neq E$ et par une méthode analogue à la question 5.

$E_3 \neq \{0\}$

oui

Devoir maison n°6

Exercice 3 : X 1996

Quatrième partie

12. Soit $T \in \mathcal{I}(A)$, $T = \sum_{T_i \in A} \lambda_i T_i$, $E_3 = \mathcal{I}(A)$ si $\mathcal{I}(A) \subset K(A)$

$\mathcal{I}(A) \subset K(A)$, $\forall T' \in A$ $T'T = 0$ c'est à dire $\sum_{T_i \in A} \lambda_i T' T_i = 0$

et ainsi comme $E_3 \neq \{0\}$ on obtient que $r = 2$.

13.a) Soit ~~$T_1 \in \mathcal{I}(A)$~~ $T \in A$ $\det_{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \times & \det T_{2,2} & \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$

Soit $(T_1, \dots, T_r) \in A^r$ $\det_{\mathcal{B}} T_1 \dots T_r = 0 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \times & \prod_{i=1}^{r} (\det T_{2,2,i}) & \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$

donc $\prod_{i=1}^{r} (\det (T_{2,2,i})) = 0$ et ainsi $\prod_{i=1}^{r} T_{2,2,i} = 0$.

Puisque $T_{2,2,i} \in A_{2,2}$ on obtient que $A_{2,2}$ est nilpotente d'ordre au plus r. A est commutative donc $A_{2,2}$ l'est aussi de manière assez évidente. Supposons que $A_{2,2}$ nulle donc les éléments de T s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \times & 0 & \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$ ainsi si $x \in E_1$, $(f, h, p) \in A$

donc $f(x) \in E_2$ ou $f(x) \in E_3$, si $f(x) \in E_2$ donc $hf(x) \in E_3$

et $phf(x) = 0$, ~~donc~~ si $f(x) \in E_3$ $pf(x) = 0$ ainsi $r \leq 3$ et $r \geq 3$ donc $r = 3$. Ainsi $A_{2,2}$ est nulle si $r = 3$.

b) On réitère le processus pour les endomorphismes de $A_{2,2}$ jusqu'à ce que l'ordre de nilpotence soit inférieur à 2. D'après la partie 2 on peut trouver une base de cette sous algèbre de $A_{2,2}$ dans laquelle toutes les endomorphismes peuvent s'écrire à l'aide d'une matrice triangulaire inférieure stricte. Cette base convient pour $A_{2,2}$ et les autres matrices de $A_{2,2}$ peut s'écrire avec une triangulaire inférieure stricte.

Toute matrice de A peut s'écrire de la forme (t_{ij}) t_{ij} nul si $i \le j$.

c) Tout élément de A s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \times & \ddots & \\ \times & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ il existe $k \le n$ tel que $T^k = 0$ et donc $r \le n$.