DM 2 (optionnel)

1 Première partie

Limite supérieure et inférieure d'une suite réelle bornée.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit deux suites

$$s_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$$

$$i_n = \inf\{u_k, k \geq n\}$$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies. Etudier leur monotonie et montrer qu'elles sont convergentes.

   La limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est notée $\overline{lim} u_n$. Similairement, la limite de la suite de la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est notée $\underline{lim} u_n$. Pour plus de simplicité, on pourra également noter S et I ces deux limites.

2. Deux exemples. Calculer s_n, i_n, S et I dans les deux cas suivants :
   (a) La suite (u_n) est périodique de période 3.
   (b) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$.

3. Justifier que $i_n \leq u_n \leq s_n$ puis comparer les réels S et I.

4. (a) On suppose que $S = I$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Réciproquement. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l, Montrer que $S = I = l$.

5. Démontrer les faits suivants :
   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que
   (a) Pour tout $n > n_\varepsilon$, $u_n < S + \varepsilon$.
   (b) Il existe un entier $n > n_\varepsilon$ tels que $u_n > S - \varepsilon$.

6. En déduire que
   (a) S est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) Toutes les autres valeurs d'adhérence sont plus petites que S.

   On montrerait de façon analogue que I est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'est pas demandé de le faire.

7. Etablir les propriétés suivantes :
   (a) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles bornées, $\overline{lim}(u_n + v_n) \leq \overline{lim} u_n + \overline{lim} u_v$
   (b) Si f est une fonction continue croissante $\overline{lim} f(u_n) = f(\overline{lim} u_n)$

8. Un exemple d'application : Soient a, b deux réels positifs avec $b > 1$. . On considère une suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les deux premiers termes sont positifs et qui satisfait la récurrence

   $$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + a}{u_n + b}$$

   En notant S et I ses limites supérieures et inférieures, établir les inégalités

   $$S \leq \frac{S + a}{I + b}$$

   $$I \geq \frac{I + a}{S + b}$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2 Suites sous additives

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels qui vérifie l'inégalité : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, u_{p+q} \leq u_p + u_q$.

   (a) Vérifier que pour tout triplet (b,q,r) d'entiers positifs on a $u_{bq+r} \leq bu_q + u_r$.

   (b) En déduire pour tout $n > q$ une majoration $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{A}{n}$ ou A est un réel qui dépend de q, mais pas de n. *On pourra utiliser la division euclidienne.*

   (c) On suppose la suite $(\frac{u_n}{n})_n$ minorée. Démontrer qu'elle possède une limite supérieure et que pour tout q on a :

   $$\overline{lim}\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q}$$

   (d) En déduire que $\frac{u_n}{n}$ a une limite soit finie, soit égale à $-\infty$ quand n tend vers l'infini. Donner un exemple de chaque situation.
   Ce résultat constitue le lemme de Feketé, ou lemme sous-additif.

2. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de réels positifs vérifiant la propriété suivante : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \mu_{p+q} \leq \mu_p \mu_q$.
   Démontrer que la suite $\mu_n^{\frac{1}{n}}$ est minorée et converge vers sa borne inférieure.

   Deux applications :

3. Première application : la constante de connectivité d'un réseau.
   On considère un réseau du plan, c'est à dire un graphe infini, régulier (le réseau est invariant par toutes les translations entre deux points) et connexe (deux points peuvent toujours être reliés. Par exemple, le réseau carré est constitué des points à coordonnées entières, le réseau hexagonal est constitué des sommets d'un pavage du plan par des hexagones.

   Un chemin auto évitant de longueur n est une successions de $n+1$ points dans ce réseau tels que :

   i le premier point est le point de coordonnées $(0,0)$ (on peut supposer qu'il appartient au réseau)
   ii Le chemin est constitué d'arêtes du réseau (autrement dit les points successifs sont voisins l'in de l'autre dans le réseau)
   iii Tous les points du chemin sont distincts (le chemin ne se recoupe pas).

   On note s_n le nombre de chemins de longueur n autoévitant.

   (a) Comparer s_{n+m} à $s_n.s_m$

   (b) Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que Pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour n assez grand $(a-\varepsilon)^n < s_n < (a+\varepsilon)^n$

   Qualitativement, cela signifie que s_n a une croissance géométrique de raison a. la constante a s'appelle constante de connectivité du réseau. Cette constante est inconnue, même pour des réseaux simples tels que le réseau carré. Le mathématicien français Hugo Duminil-Copin a obtenu cette année la médaille Fields, notamment pour avoir démontré que cette constante vaut $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ dans le cas du réseau hexagonal.

4. Application 2. Une définition du rayon spectral.
   (*cette question est réservée aux 5/2*)

   (a) Soit $||.||$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$. C'est à dire une norme telle que

   $$||AB|| \leq ||A||.||B||$$

   pour toutes matrices A, B. Montrer que pour toute matrice M la suite $||M^n||^{\frac{1}{n}}$ converge vers une limite $l(M)$ (c'est le rayon spectral)

   (b) Soit N une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $N(M^n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers cette même limite $l(M)$.

3 Limite supérieure et convergence en moyenne

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose $v_n = \frac{u_0+\ldots+u_n}{n+1}$

1. Montrer que (v_n) est bornée et que $\limsup v_n \leq \limsup u_n$. Que dire pour les limites inférieures ?
2. Donner un exemple de suites divergente (u_n) telle que $\limsup v_n = \limsup u_n$.