Devoir à rendre le 01/03/2021

Problème 1 :
Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2\,y'=(2-x)\,y$. On note $I=\left]-\infty,1\right[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x)=\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.
2. Intégrer (E) sur I. On notera f la fonction définie sur I par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}$.
3. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$.

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
4. Préciser P_0,P_1,P_2 et P_3.
5. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n : $P_{n+1}(X)=\left[(2n+1)X+X^2\right]P_n(X)-n^2X^2P_{n-1}(X)$.

   Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n=f^{(n)}(0)$.
6. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n,a_n et a_{n-1}.
7. Préciser : a_0,a_1,a_2,a_3 et a_4.
8. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p=\displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}$.

   En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.

   Soit p et n des entiers naturels quelconques, on pose :$S_p(n)=\displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
9. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p\geqslant 1$.

   (b) Prouver que les suites $p\mapsto S_p(0)$ et $p\mapsto S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
10. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :
$$S_p(n+1)-(2n+2)\,S_p(n)+n^2S_p(n-1)=S_{p-1}(n)-S_p(n)$$
11. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p\mapsto S_p(n)$ converge.
12. Prouver que : $a_n=\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}=\lim_{p\to+\infty}n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}$

Problème 2 :
On note $p:x\mapsto e^x$, $q:x\mapsto e^{2x}$ et $r:x\mapsto e^{x^2}$.
On note $\mathcal{B}=(p,q,r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$

On note ψ l'application qui, à $f\in\mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0),f'(0),f(1)\big)$.

2. Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer ψ^{-1}.

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f\in\mathcal{E}$, associe $\varphi(f)=Ap+Bq+Cr$ où
$$\begin{cases} A=\dfrac{2}{e-1}f(0)+f'(0)+\dfrac{2}{e(e-1)}f(1)\\ B=-\dfrac{1}{e-1}f(0)-\dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\\ C=\dfrac{e-2}{e-1}f(0)-f'(0)-\dfrac{1}{e(e-1)}f(1)\end{cases}$$

4. On note $\mathcal{P}=\{f\in\mathcal{E}:\varphi(f)=f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f.

   (a) Montrez que $\mathcal{P}=\{f\in\mathcal{E}:f(1)=0\}$.

   (b) Déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$, i.e. trouver $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall(A,B,C)\in\mathbb{R}^3,\quad Ap+Bq+Cr\in\mathcal{P}\iff\alpha A+\beta B+\gamma C=0$.

   (c) Exhibez une base (e_1,e_2) de $\mathcal{P}$.
5. On note $\mathcal{D}=\{f\in\mathcal{E}:\varphi(f)=-f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f.

   (a) Déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$

   (c) Donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.
6. Montrez que $\mathcal{E}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{D}$.
7. Prouver que $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de terme constant est nul.

8. Montrez que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Soit $(P_k)_{1\leq k\leq q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :
$$\forall k\in[\![1,q]\!],\qquad \lim_{x\to+\infty}P_{k+1}(x)-P_k(x)=+\infty$$
Pour tout $k\in[\![1,q]\!]$, on pose $f_k\ :\ x\mapsto\exp\big(P_k(x)\big)$.

9. Montrez que la famille $(f_k)_{1\leq k\leq q}$ est libre.