

**Première partie**

1. Puisque  $T$  n'est pas nul, on a en fait  $r \geq 2$ .

- (a) Puisque  $T$  n'est pas nul,  $\dim \operatorname{Im} T \geq 1$ . Puisque  $\det(T^r) = 0 = (\det T)^r$ ,  $T$  n'est pas inversible et  $\dim \ker T \geq 1$ . Or le théorème du rang impose  $(\dim \ker T - 1) + (\dim \operatorname{Im} T - 1) = 0$ , donc nécessairement

$$\dim \ker T = 1 = \dim \operatorname{Im} T.$$

- (b) Comme  $r - 1 \geq 1$ ,  $\operatorname{Im} T^{r-1} \subset \operatorname{Im} T$ ; comme  $T^{r-1}$  n'est pas nul, par définition de  $r$ , on a:  $1 \leq \dim T^{r-1} \leq \dim T = 1$ , donc  $\operatorname{Im} T^{r-1} = \operatorname{Im} T$ , puisqu'on a une inclusion et égalité des dimensions. De même,  $TT^{r-1} = 0$  impose  $\operatorname{Im} T^{r-1} = \operatorname{Im} T \subset \ker T$ , donc  $\ker T = \operatorname{Im} T$  par le même argument.

Soit alors  $e_2$  un vecteur non nul de  $\operatorname{Im} T = \ker T$ , et  $e_1 \in E$  tel que  $T(e_1) = e_2$ ; comme  $e_1 \notin \ker T = Ke_2$ ,  $\{e_1, e_2\}$  est une famille libre de deux vecteurs de  $K^2$ , donc une base de  $K^2$ . Dans cette base, la matrice de  $T$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Il existe une base de  $E$  dans laquelle  $T$  est représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans cette base, la matrice de  $T^2$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $r \leq 2$  puis

$$r = 2.$$

2. Fixons  $T \in \mathcal{A}$  non nul et une base  $\{e_1, e_2\}$  dans laquelle  $T$  est représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Si un élément  $U \in \mathcal{L}(E, E)$  est représenté dans cette base par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  avec  $c \in K$ , alors  $U = cT \in \mathcal{A}$ .

Réciproquement: si  $U \in \mathcal{A}$ , alors  $U^2 = 0$  (soit que  $U$  soit nul, soit en application de la question 1. sinon). Soit donc  $U \in \mathcal{A}$ , et  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sa matrice dans  $\{e_1, e_2\}$ ; alors  $U - cT \in \mathcal{A}$ ,

donc  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $a = d = 0$ . Si  $b$  était non nul,  $T + b^{-1}(U - cT) \in \mathcal{A}$ , alors que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  de cet endomorphisme vérifie  $M^2 \neq 0$ . Au total,  $U$  est bien représenté dans  $\{e_1, e_2\}$  par une matrice du type attendu

Il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices représentant les éléments de  $\mathcal{A}$  sont exactement les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  avec  $c \in K$ .

## Deuxième partie

Ce qui suit est plus ou moins du cours. On a immédiatement  $I_E = \sum_i P_i$  et  $P_i P_j = \delta_{i,j} P_j$ .

3. Pour  $x \in E$ ,  $(T(x))_i = P_i(T(x)) = P_i T \left( \sum_j x_j \right) = \sum_j P_i T(x_j) = \sum_j P_i T_j(x_j)$  où  $T_j \in \mathcal{L}(E_j, E)$  est la restriction de  $T$  à  $E_j$ ; clairement,  $T_{i,j} = P_i T_j \in \mathcal{L}(E_j, E_i)$  convient.

La construction des  $T_{i,j}$  est effectuée.

4. Puisque  $(T(x))_i = \sum_j T_{i,j}(x_j) = \sum_j T_{i,j} P_j(x)$ , on a  $T = \sum_{i,j} T_{i,j} P_j$ , et de même  $S = \sum_{i,j} S_{i,j} P_j$ . Si l'on note toujours  $U_k \in \mathcal{L}(E_k, E)$  la restriction de  $U \in \mathcal{L}(E, E)$  à  $E_k$ , on écrit  $ST = \left( \sum_{i,j} S_{i,j} P_j \right) T$ , puis

$$(ST)_k = \left( \sum_{i,j} S_{i,j} P_j \right) T_k = \sum_{i,j} S_{i,j} (P_j T_k) = \sum_{i,j} S_{i,j} T_{j,k} = \sum_i \left( \sum_j S_{i,j} T_{j,k} \right)$$

avec  $\sum_j S_{i,j} T_{j,k} \in \mathcal{L}(E_k, E_i)$  donc l'écriture précédente donne la décomposition de  $(ST)_k(x)$  suivant  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  et comme  $(ST)_{i,k} = P_i (ST)_k$  :

$$(ST)_{i,k} = \sum_j S_{i,j} T_{j,k}.$$

On retrouve là le principe des calculs matriciels par blocs.

## Troisième partie

5. Si l'on avait  $E_3 = \{0\}$ , grâce au théorème du rang, il viendrait  $E = \ker T \oplus \text{Im } T$ ; le théorème fondamental d'isomorphisme fournirait par restriction un isomorphisme  $T'$  de  $\text{Im } T$  (supplémentaire de  $\ker T$ ) sur  $\text{Im } T$ . Mais alors, puisque  $r-1 \geq 1$ , pour tout  $x \in E$ ,  $T^r(x) = T'(T^{r-1}(x)) = 0$  impliquerait  $T^{r-1}(x) = 0$ , soit  $T^{r-1} = 0$ , en contradiction avec la définition de  $r$ .

Si l'on avait  $E_3 = E$ , alors  $E \subset \ker T$  et  $E \subset \text{Im } T$ , en contradiction avec le théorème du rang.

$E_3$  est distinct de  $\{0\}$  et de  $E$ .

6. On a  $E_3 = \text{Im } T \Leftrightarrow \text{Im } T \subset \ker T \Leftrightarrow T^2 = 0$  donc puisque  $T \neq 0$  :

$$E_3 = \text{Im } T \Leftrightarrow r = 2$$

7. Puisque  $E_1 \oplus \text{Im } T = E$ , pour tout  $x \in E$ ,  $P_1(T(x)) = 0$ , la première ligne de la matrice par blocs est nulle (ou bien:  $(T(x))_1 = T_{1,1}(x_1) + T_{1,2}(x_2) + T_{1,3}(x_3)$  et comme  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ ,  $T_{1,1}(x_1) = T_{1,2}(x_2) = T_{1,3}(x_3) = 0$  pour tout  $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ ). Puisque  $E_3 \subset \ker T$ ,  $T(x) = 0$  pour tout  $x \in E_3$  et la dernière colonne de la matrice par blocs est nulle.

La vérification est effectuée.

8. On peut travailler matriciellement ou voir que, grâce à 4. :

$$(T^2)_{2,2} = \sum_{j=1}^3 T_{2,j} T_{j,2} = T_{2,2}^2$$

puis par récurrence  $(T^k)_{2,2} = T_{2,2}^k$ ; en particulier  $(T^r)_{2,2} = 0 = (T_{2,2})^r$ , donc

$$\underline{T_{2,2} \text{ est nilpotent.}}$$

On a  $T_{2,2} \in \mathcal{L}(E_2, E_2)$  et  $\text{Im } T = E_2 \oplus E_3$ ; comme  $r \geq 3$ ,  $E_2$  n'est pas nul (d'après 6.), et comme  $E_3$  n'est pas nul (d'après 5.), on voit que  $\dim E_3 = p$  est un entier strictement positif strictement inférieur à  $n$ .

Si  $T_{2,2} = 0$ , toute base adaptée à  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$  convient.

Sinon, si l'on admet que tout endomorphisme non nul nilpotent de  $\mathbb{R}^d$  avec  $0 < d < n$  admet une base dans laquelle il est représenté par une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle, le résultat s'applique à  $T_{2,2}$  (à un isomorphisme près entre  $E_2$  et  $\mathbb{R}^{\dim E_2}$ ). La concaténation d'une base de  $E_1$ , de la base construite, et d'une base de  $E_3$  donne alors une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $T$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle.

Comme l'initialisation pour  $n = 2$  a été vue dans la première partie, le résultat attendu est acquis par récurrence (le cas  $n = 1$  ne se pose pas, il n'y a pas d'endomorphisme nilpotent non nul de  $\mathbb{R}$ .)

Il existe une base de  $E$  dans laquelle  $T$  est représenté  
par une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle.

9. On peut considérer une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle représentant  $T$ , et voir comment l'augmentation de  $k$  dans le calcul de  $T^k$  augmente le nombre de termes nuls jusqu'à obtenir  $T^n = 0$ , donc  $n \geq r$ , ou plus généralement introduire  $e_r$  non nul dans  $\text{Im } T^{r-1}$ , puis, considérant  $e_1$  tel que  $e_r = T^{r-1}(e_1)$ , poser  $e_i = T^{i-1}(e_1)$  pour  $i = 1, \dots, r$ , et vérifier que  $\{e_1, \dots, e_r\}$  est libre dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui garantira

$$\boxed{r \leq n.}$$

Voyons ce dernier point: si  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = 0$ , alors  $T^{r-1}(x) = 0 = \alpha_1 e_r + \sum_{i=2}^r \alpha_i T^r(T^{i-2}(e_1)) = \alpha_1 e_r$ , donc  $\alpha_1 = 0$ ; supposons  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ , avec  $1 \leq k \leq r-1$ ; alors  $T^{r-k-1}(x) = 0 = T^{r-k-1}\left(\sum_{i=k+1}^r \alpha_i T^{i-1}(e_1)\right) = \alpha_{k+1} e_r + \sum_{i=k+2}^r \alpha_i T^r(T^{i-k-2}(e_1)) = \alpha_{k+1} e_r$ , donc  $\alpha_{k+1} = 0$ ; par récurrence, tous les  $\alpha_i$  sont bien nuls.

10. Si  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est la base canonique de  $K^4$ , la matrice de  $T$  dans la base  $(e_1, e_3, e_4, e_2)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que  $T^4 = 0$  et  $T^3 \neq 0$ , donc  $r = 4 \leq n = 4$ . Cette base provient naturellement de l'étude précédente; ici  $\ker T = Ke_2$ ,  $\text{Im } T = \text{vect}(e_2, e_3, e_4)$ ,  $E_3 = Ke_2$ , et l'on peut prendre  $E_1 = Ke_1$  et  $E_2 = \text{vect}(e_3, e_4)$ . La base  $(e_1, e_3, e_4, e_2)$  est adaptée à  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$  et donne la matrice précédente.

### Quatrième partie

11. Considérons  $r - 1$  éléments  $T_1, \dots, T_{r-1}$  de  $\mathcal{A}$ , et  $P = T_1 \dots T_{r-1} \in \mathcal{A}$ ; pour tout  $T \in \mathcal{A}$ ,  $\text{Im } T \subset \ker P$  car  $PT = 0$  puisque ce produit comporte  $r$  éléments de  $\mathcal{A}$ ; par définition même, on en déduit  $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subset \ker P$  car  $\ker P$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient toutes les images des éléments de  $\mathcal{A}$ ; si l'on avait  $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = E$ , on aurait  $\ker P = E$ , donc  $P = T_1 \dots T_{r-1}$  serait nul quels que soient les éléments  $T_1, \dots, T_{r-1}$  de  $\mathcal{A}$ , en contradiction avec la minimalité de  $r$ .

$$\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}) \neq E.}$$

Comme  $E_3$  est contenu dans  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ ,  $E_3$  n'est pas égal à  $E$ .

Soit  $T \in \mathcal{A}$  non nul; alors  $\ker T \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$  et  $\text{Im } T \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , donc  $E'_3 = \text{Im } T \cap \ker T \subset E_3$ ; or  $T^r = 0$  et d'après la question 5.,  $E'_3$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , donc  $E_3$  n'est pas nul non plus.

$$\underline{E_3 \text{ est distinct de } \{0\} \text{ et de } E.}$$

12. On a, puisque  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , par définition de  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$  :

$$E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall T \in \mathcal{A}, \text{Im } T \subset \mathcal{K}(\mathcal{A}) = \bigcap_{U \in \mathcal{A}} \ker U.$$

En particulier, si  $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , en prenant  $T \in \mathcal{A}$  non nul (et donc  $T^r = 0$ ), on a  $\text{Im } T \subset \ker T$ , et nécessairement  $r = 2$  d'après la question 6.

Réciproquement, si  $r = 2$ , pour  $T \in \mathcal{A}$ , on a  $UT = 0$  pour tout  $U \in \mathcal{A}$ , donc  $\text{Im } T \subset \ker U$  pour tout  $U \in \mathcal{A}$ , donc  $\text{Im } T \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ , et finalement  $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ .

$$\boxed{E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \iff r = 2.}$$

13. (a) Puisque l'énoncé donne que  $\mathcal{A}_{2,2}$  est un espace vectoriel inclus dans  $\mathcal{L}(E_2, E_2)$ , vérifions la stabilité pour le produit et la commutativité de ce dernier. Avec des notations évidentes, puisque  $TU = V = UT \in \mathcal{A}$  si  $(T, U) \in \mathcal{A}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ U_{2,1} & U_{2,2} & 0 \\ U_{3,1} & U_{3,2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V_{2,1} & V_{2,2} & 0 \\ V_{3,1} & V_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$$

On a<sup>1</sup> donc que  $T_{2,2}U_{2,2} = U_{2,2}T_{2,2} = V_{2,2}$  est un élément de l'espace  $\mathcal{A}_{2,2}$ . Puisque le produit de  $r$  éléments de  $\mathcal{A}$  est nul, ces calculs montrent qu'a fortiori le produit de  $r$  éléments de  $\mathcal{A}_{2,2}$  est nul, donc l'algèbre est nilpotente d'indice  $r' \leq r$ .

$$\underline{\mathcal{A}_{2,2} \text{ est une sous-algèbre commutative nilpotente de } \mathcal{L}(E_2, E_2).}$$

---

<sup>1</sup>cette égalité traduit que  $T \rightarrow T_{2,2}$  est un morphisme d'algèbres, les algèbres étant ici non unitaires

Si  $r > 3$ , alors par minimalité de  $r$ , on peut trouver  $(S, T, U) \in \mathcal{A}^3$  tel que le produit

$$STU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_{2,2}T_{2,2}U_{2,1} & S_{2,2}T_{2,2}U_{2,2} & 0 \\ S_{3,2}T_{2,2}U_{2,1} & S_{3,2}T_{2,2}U_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$$

soit non nul, ce qui impose  $T_{2,2} \neq 0$ , et donc  $\mathcal{A}_{2,2}$  non nulle. Ainsi  $\mathcal{A}_{2,2}$  nulle implique  $r \leq 3$  (donc si l'on suppose  $r \geq 3$ ,  $r = 3$ ).

Montrons que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que, puisqu'une implication est plus ou moins déjà établie:

$$\forall T \in \mathcal{A}, \quad (T_{2,2} \neq 0) \iff \exists (S, U) \in \mathcal{A}^2, \quad STU \neq 0.$$

Cette propriété permettra, si  $\mathcal{A}_{2,2}$  est non nulle, de trouver trois éléments de  $\mathcal{A}$  dont le produit est non nul, et ainsi  $r > 3$ . On aura donc

$$\underline{\mathcal{A}_{2,2} \text{ est nulle si et seulement si } r \leq 3.}$$

(donc si  $r = 3$  puisque l'on suppose  $r \geq 3$ , mais cette formulation me sert au 16.)

Montrons donc la partie manquante du lemme<sup>2</sup> énoncé, à savoir:

$$\forall T \in \mathcal{A}, \quad (T_{2,2} \neq 0) \implies \exists (S, U) \in \mathcal{A}^2, \quad STU \neq 0.$$

Si l'on suppose  $T_{2,2}$  non nul, on peut considérer  $x \in E_2$  tel que  $T_{2,2}(x) \neq 0$ . Comme  $E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$ ,  $x$  est du type  $x = \sum_k \alpha_k U_k(y_k)$  ou mieux, puisque  $x \in E_2$ ,  $x = \sum_k P_2 U_k(\alpha_k y_k)$  avec  $U_k \in \mathcal{A}$ ; comme  $T_{2,2}(x) \neq 0$ , il existe  $k$  tel que  $T_{2,2}P_2 U_k(\alpha_k y_k) \neq 0$ ; notons plutôt  $y$  à la place de  $\alpha_k y_k$  et  $U = U_k$ ; on a trouvé  $y$  tel que  $T_{2,2}P_2 U(y)$  soit non nul; comme cet élément non nul est dans  $E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , il ne saurait être aussi dans  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  (puisque  $E_2 \cap E_3 = \{0\}$ ) et l'on peut trouver  $S \in \mathcal{A}$  tel que  $ST_{2,2}P_2 U(y)$  soit non nul. Il reste à vérifier que  $STUP(y) = ST_{2,2}P_2 U(y)$  pour conclure que l'on a trouvé  $(S, T)$  tel que  $STU \neq 0$ .

Calculons matriciellement :  $TP_2 U(y)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 U(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{2,2}P_2 U(y) \\ T_{3,2}P_2 U(y) \end{pmatrix}$$

puis  $ST_{2,2}P_2 U(y) = SP_2 TP_2 U(y)$ , sachant que  $P_2 T_{3,2} P_2 U(y) = 0$  car  $T_{3,2}$  est à valeurs dans  $E_3$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & S_{2,2} & 0 \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_{2,2}P_2 U(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{2,2}T_{2,2}P_2 U(y) \\ S_{3,2}T_{2,2}P_2 U(y) \end{pmatrix}$$

Comparons au calcul matriciel de  $STUP(y)$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_{2,2}T_{2,1} & S_{2,2}T_{2,2} & 0 \\ S_{3,2}T_{2,1} & S_{3,2}T_{2,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 U(y) \\ P_2 U(y) \\ P_3 U(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{2,2}T_{2,1}P_1 U(y) + S_{2,2}T_{2,2}P_2 U(y) \\ S_{3,2}T_{2,1}P_1 U(y) + S_{3,2}T_{2,2}P_2 U(y) \end{pmatrix}$$

L'égalité annoncée tient au fait que  $P_1 U(y) = 0$ , puisque  $U(y) \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$  et que  $P_1$  est une projection sur un supplémentaire de  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ .

---

<sup>2</sup>Ce résultat mériterait de faire l'objet d'une question spécifique. Il s'énonce aussi en disant que  $T_{2,2}$  est nul ssi pour tout  $U \in \mathcal{A}$ ,  $\text{Im}(TU) \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ , ou ssi pour tout  $S \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subset \ker(ST)$ .

- (b) Comme à la question 8., on raisonne par récurrence sur  $n \geq 2$ . Pour  $n = 1$ , c'est trivial; pour  $n = 2$ , le résultat est établi à la question 2. Si le résultat s'applique à tout sous-algèbre nilpotente commutative de  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $1 \leq d \leq n - 1$ , il s'applique à  $\mathcal{A}_{2,2}$  puisque  $1 \leq d = \dim E_2 \leq n - 1$  ( $\dim E_2 = 0$  imposerait  $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ , or  $r \geq 3$ ;  $\dim E_2 = n$  imposerait  $E \subset E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$  en contradiction avec la question 11.) Par concaténation d'une base de  $E_1$ , d'une base obtenue par hypothèse de récurrence, et d'une base de  $E_3$ , on obtient une base dans laquelle tout élément de  $\mathcal{A}$  est représenté par une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle.

L'existence d'une base ad hoc est établie.

- (c) On reprend la première idée de la question 9: vérifions que pour tout  $k = 1, \dots, n$ , le produit de  $k$  éléments de  $\mathcal{A}$  est représenté dans la base précédente par une matrice  $(m_{i,j})$  dont les termes  $m_{i,j}$  sont nuls lorsque  $i \leq j + k - 1$ .

Pour  $k = 1$ , cela résulte de la question précédente.

Supposons le résultat vrai pour  $k$  avec  $1 \leq k \leq n - 1$ , et considérons  $T_1, \dots, T_k, T_{k+1}$  dans  $\mathcal{A}$ ; l'hypothèse de récurrence assure que  $T = T_1 \cdots T_k$  est représenté par  $(t_{i,j})$  avec  $t_{i,j} = 0$  si  $i \leq j + k - 1$ ; la question précédente assure que  $T_{k+1}$  est représenté par  $(u_{i,j})$  avec  $u_{i,j} = 0$  si  $i \leq j$ ; alors  $TT_{k+1}$  est représenté par  $(m_{i,j})$  avec  $m_{i,j} = \sum_{r=1}^n t_{i,r} u_{r,j}$ .

Si  $i \leq j + k$ , donc  $i - k \leq j$ : pour  $1 \leq r \leq n$ , soit  $r \leq j$ , alors  $u_{r,j} = 0$ , soit  $r \geq j + 1 \geq i - k + 1$ , alors  $t_{i,r} = 0$ ; donc  $m_{i,j} = 0$ , ce qui est le résultat attendu.

Comme pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a toujours  $i \leq j + n - 1$  (soit  $i \leq n - 1$ , et c'est clair, soit  $i = n$ , mais  $j \geq 1$ ), le produit de  $n$  éléments quelconques de  $\mathcal{A}$  est toujours nul. Par définition de  $r$ , on a donc

$$\boxed{r \leq n.}$$

14. Montrons, à l'aide du résultat intermédiaire de la question 13.a, que

$$\boxed{r' = r - 2}$$

Si  $r' > r - 2$ , on peut trouver  $r - 2$  éléments de  $\mathcal{A}_{2,2}$  dont le produit n'est pas nul, donc  $r - 2$  éléments  $T_1, \dots, T_{r-2}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $(T_1)_{2,2} \cdots (T_{r-2})_{2,2} = (T_1 \cdots T_{r-2})_{2,2} \neq 0$ . Posons  $T = T_1 \cdots T_{r-2} \in \mathcal{A}$ ; d'après le résultat évoqué précédemment, on peut trouver  $S$  et  $U$  dans  $\mathcal{A}$  tels que  $STU$  soit non nul; or  $STU$  est le produit de  $r$  éléments de  $\mathcal{A}$ , c'est contradictoire. Si  $r' + 2 < r$ , on peut trouver  $r' + 2$  éléments  $T_1, \dots, T_{r'+2}$  de  $\mathcal{A}$  dont le produit est non nul; posons  $S = T_1$ ,  $T = T_2 \cdots T_{r'+1}$  et  $U = T_{r'+2}$ . Le même résultat montre, puisque  $STU \neq 0$ , que  $T_{2,2} = (T_2)_{2,2} \cdots (T_{r'+1})_{2,2}$  est non nul, alors qu'il s'agit du produit de  $r'$  éléments de  $\mathcal{A}_{2,2}$ ; c'est également contradictoire, et le résultat est acquis.

15. (a) Soit  $T \in \mathcal{A}$ ; pour tout  $U \in \mathcal{A}$ ,  $TU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,2}U_{2,1} & T_{2,2}U_{2,2} & 0 \\ T_{3,2}U_{2,1} & T_{3,2}U_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$  donc  $(TU)_{2,1} = T_{2,2}U_{2,1}$ ; ainsi, pour tout  $x \in E_1$ ,  $T_{2,2}(U_{2,1}(x)) = (TU)_{2,1}(x) \in \text{Im}(TU)_{2,1} \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ ; comme tout  $y \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  est combinaison linéaire d'éléments du type  $U_{2,1}(x)$  avec  $x \in E_1$ , il en résulte que  $T_{2,2}(y) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  (par linéarité de  $T_{2,2}$  et stabilité de  $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ ), ce qui établit bien que

$$\boxed{\forall T \in \mathcal{A}, \quad T_{2,2}(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}).}$$

- (b) Par définition de  $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ , on a bien sûr  $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}) \subset E_2$ . S'il n'y a pas égalité, on peut introduire (en dimension finie) un supplémentaire  $E'$ , de sorte que  $E_2 = E' \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ . Cela permet de considérer les projecteurs  $P_1, P, P', P_3$  associés à  $E = E_1 \oplus E' \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}) \oplus E_3$ . Considérons  $(e_k)_k$  une base adaptée à la somme directe  $E_2 = E' \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ , avec  $e_k \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  si  $k \geq p$  et  $e_k \in E'$  sinon. D'après la question précédente, si  $T \in \mathcal{A}$ , pour  $k \geq p$ ,  $T_{2,2}(e_k)$  a des composantes nulles suivant les  $e_j$  tels que  $j < p$ , donc la matrice de  $T_{2,2}$  dans cette base est du type  $\begin{pmatrix} A_T & 0 \\ C_T & D_T \end{pmatrix}$ .

Il en résulte alors le lemme suivant:

$$\forall y \in E, \quad PT(y) = PT_{2,2}P(y).$$

♣ En effet,

$$PT(y) = P[(T(y))_2] = P(T_{2,1}(y_1) + T_{2,2}(y_2)) = PT_{2,2}(y_2)$$

car  $T_{2,1}(y_1) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  a une projection nulle, par définition de  $P$ . Alors

$$PT(y) = PT_{2,2}(Py) + PT_{2,2}(P'y) = PT_{2,2}(Py)$$

car  $P'y \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ , donc, avec 15.a,  $T_{2,2}(P'y) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  est d'image nulle par  $P$ . ♣

Soit alors  $x$  dans  $E'$ ; comme  $E' \subset E_2 \subset \mathcal{I}(\mathcal{A})$ ,  $x$  est de la forme  $x = \sum_k U_k(x_k)$  avec  $U_k \in \mathcal{A}$ ; donc

$$x = Px = \sum_k PU_k(x_k) = \sum_k P(U_k)_{2,2}(Px_k) = \sum_k P(U_k)_{2,2}(y_k)$$

en vertu du lemme précédent, avec  $y_k = Px_k$ . Mais  $y_k \in E'$ , on peut donc recommencer:  $y_k$  peut s'écrire  $\sum_{i_k} P(T_{i_k})_{2,2}(z_{i_k})$ , donc

$$x = \sum_k \sum_{i_k} P(U_k)_{2,2} P(T_{i_k})_{2,2} (Py_{i_k})$$

Cette formule se simplifie, car  $PU_{2,2}PT_{2,2} = PU_{2,2}T_{2,2} = P(UT)_{2,2}$ , puisque

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_U & 0 \\ C_U & D_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_T & 0 \\ C_T & D_T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_U A_T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_U & 0 \\ C_U & D_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_T & 0 \\ C_T & D_T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$x = \sum_k \sum_{i_k} P(U_k T_{i_k})_{2,2} (Py_{i_k})$$

En réitérant le procédé, on peut écrire  $x$  comme somme de termes du type  $PV_{22}(Pz)$  où  $V_{2,2}$  est le produit d'autant de termes que l'on veut du type  $U_{2,2}$ , c'est-à-dire d'éléments de  $\mathcal{A}_{2,2}$ . Si l'on en prend  $r'$  au moins, on obtient que  $x$  est nul, ceci pour tout  $x \in E'$ , ce qui est contradictoire.

On peut maintenant conclure que

$$\boxed{\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}) = E_2.}$$

16. (a) Si  $T = 0$ , on a  $T_{2,2} = 0$  et  $T_{3,2} = 0$ . Supposons maintenant  $T$  non nul; c'est un élément nilpotent de  $\mathcal{A}$ ; soit  $s$  le plus petit entier vérifiant  $T^s = 0$ , avec donc  $s \geq 2$ .

Considérons  $\mathcal{A}'$  l'espace vectoriel engendré par les  $T^k$  avec  $k \geq 1$ . La stabilité par le produit étant claire, c'est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{A}$ . Le produit de  $s$  éléments de  $\mathcal{A}'$  est une combinaison linéaire de  $T^k$  avec  $k \geq s$ , donc est nul. L'ordre de nilpotence de  $\mathcal{A}'$  est donc inférieur à  $s$ , mais pas strictement puisque  $T^{s-1}$  n'est pas nul. Donc  $\mathcal{A}'$  est d'ordre  $s$  exactement.

Si  $s \geq 4$ , introduisons les espaces  $E'_1, E'_2, E'_3$  associés à  $\mathcal{A}'$  analogues à  $E_1, E_2, E_3$ ; d'après

$$15.b, E'_2 = \mathcal{I}(\mathcal{A}'_{2,1}); \text{ or pour tout entier } k \geq 2, T^k \text{ est représenté par } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{2,2}^k & 0 \\ 0 & T_{3,2}T_{2,2}^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $T$  est représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$ ; il est clair que  $\mathcal{I}(\mathcal{A}'_{2,1})$  est nul (car

$T_{2,1} = 0$ ), donc par définition de  $E'_2, E'_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}')$ , ce qui impose, d'après la question 12., que  $s = 2$ , ce qui est contradictoire. Donc  $s \leq 3$ . D'après la question 13.a,  $\mathcal{A}'_{2,2}$  est nulle, en particulier

$$\boxed{T_{2,2} = 0}$$

et l'on voit que  $T^k = 0$  pour  $k \geq 2$ , donc  $T^2 = 0$  également. Finalement,  $T^2 = 0, s = 2$ . Puisque  $T_{2,2}$  et  $T_{2,1}$  sont nuls, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & S_{2,2} & 0 \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i.e. que pour tout  $S \in \mathcal{A}$ ,  $ST = 0$ ; mais l'algèbre  $\mathcal{A}$  est commutative, donc pour tout  $S \in \mathcal{A}$ ,  $TS = 0$ , soit  $\text{Im } S \subset \ker T$ . Il en résulte que  $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subset \ker T$ , et a fortiori que  $E_2 \subset \ker T$ , donc

$$\boxed{T_{3,2} = 0}$$

puisque pour  $a \in E_2$ , le calcul de  $T(a)$  est représenté matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{3,2}a \end{pmatrix}.$$

- (b) Prenons  $T$  comme défini dans la question 8.; avec les notations de cette question,  $T$  est

représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $U = T^3$  est représenté par  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , avec

ici  $U_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $U_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ , mais  $U_{3,1} = (1)$  non nul.

$T_{3,1}$  n'est pas nécessairement nul.