Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

I. Produit scalaire

1. Définitions et exemples classiques

Définition. *On appelle forme bilinéaire sur E, toute application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*
– pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \phi(x,y)$ soit linéaire,
– pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \phi(x,y)$ soit linéaire.

Définition. *On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute forme bilinéaire S sur E telle que : $\forall (x,y) \in E^2,\ S(x,y) = S(y,x)$.*

Définition. *Soit ϕ une forme bilinéaire sur E.*
On dit que ϕ est positive si $\forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0$.
On dit que ϕ est définie positive si ϕ est positive et vérifie : $\forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Définition. *On appelle produit scalaire toute forme bilinéaire symétrique définie positive.*

Exemples classiques à connaître :
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (X,Y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
• Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'application $M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est le produit scalaire canonique sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'application $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ \left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k, \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k\right) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k$ est un produit scalaire classique sur $\mathbb{R}[X]$.
• Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'application

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_a^b fg$$

est un produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
• Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'application

$$\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ (P,Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire classique sur $\mathbb{R}[X]$.
Remarque : On admet le lemme suivant : si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$.

Exemple. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base $(e_i)_{i\in I}$.*
L'application $E \times E \to \mathbb{R}$, $\left(\displaystyle\sum_{i\in I} a_i e_i, \sum_{i\in I} b_i e_i\right) \mapsto \sum_{i\in I} a_i b_i$ est un produit scalaire sur E.

Définition. *On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'espace vectoriel euclidien.*

2. Norme euclidienne associée

Dans la suite, E est un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$.

Définition. *On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ l'application :*

$$E \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Proposition. *Pour tout $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$, on a :*
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- $\|x\| = 0$ *si, et seulement si,* $x = 0$.

Définition. *On appelle vecteur normé, ou unitaire, tout vecteur de norme* 1.

Corollaire. *Soit x un vecteur non nul. Alors* $\dfrac{x}{\|x\|}$ *est unitaire.*

Proposition. *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad \textit{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

Corollaire (égalité du parallélogramme)**.** *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Proposition (Formules de polarisation)**.** *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*
- $2\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$;
- $2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$;
- $4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*
- $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.
- *Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont proportionnels, i.e. si, et seulement si,*

  $$\exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x \quad \textit{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

  si, et seulement si,

  $$\exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda x \quad \textit{ou} \quad x = 0.$$

Théorème (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- *Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont positivement proportionnels, i.e. si, et seulement si,*

  $$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : y = \lambda x \quad \textit{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : x = \lambda y.$$

  si, et seulement si,

  $$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : y = \lambda x \quad \textit{ou} \quad x = 0.$$

II. Orthogonalité

1. Vecteurs orthogonaux

Définition. *Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.*
On note alors $x \perp y$.

Théorème (de Pythagore)**.** *Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Définition. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si elle est constituée de vecteurs orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j\rangle = 0.$$

Proposition. *Une famille orthogonale de vecteurs* ***non nuls*** *est libre*

Théorème. *Procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt*
Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille libre de E.
Il existe une famille orthogonale $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ de E telle que :

$$\forall k\in [\![1,p]\!],\quad \mathrm{Vect}(f_1,\cdots,f_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k).$$

Il suffit de prendre $f_1 = e_1$ *et* $\forall k \in [\![2,p]\!],\ f_k = e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, f_j\rangle}{\|f_j\|^2} f_j.$

Définition. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale ou orthonormée si elle est constituée de vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j)\in I^2,\quad \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Proposition. *Une famille orthonormale est libre*

Proposition. *Procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt*
Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille libre de E.
Il existe une famille orthonormale $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ de E telle que :

$$\forall k\in [\![1,p]\!],\quad \mathrm{Vect}(f_1,\cdots,f_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k).$$

Il suffit de prendre $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ *et* $\forall k \in [\![2,p]\!],\ f_k = \dfrac{e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\langle e_k, f_j\rangle f_j}{\|e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\langle e_k, f_j\rangle f_j\|}.$

2. Orthogonal d'un ensemble

Définition. *Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A de E, l'ensemble*

$$A^{\perp} = \{x\in E\,:\, \forall a\in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Proposition. *L'orthogonal d'une partie de E est un sev de E.*

Proposition. *Soient A et B deux parties de E. On a $A\subset B \Rightarrow B^{\perp}\subset A^{\perp}$.*

Proposition. *Soit A une partie de E. On a $A^{\perp} = (\mathit{Vect}A)^{\perp}$.*

Proposition. *Soit A un sev de E engendré par la famille $(a_i)_{i\in I}$ et $x\in E$.*
On a $x\in A^{\perp} \Longleftrightarrow \forall i\in I,\ \langle x, a_i\rangle = 0$.

Proposition. *Soit A une partie de E. On a $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.*

Remarque : On a pas forcément $A^{\perp\perp} = A$.
Par exemple si l'on considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g)\mapsto \int_0^1 fg$ et $F = \{f\in E\,:\, f(0) = 0\}$, alors $F^{\perp} = \{0\}$ donc $F^{\perp\perp} = E \neq F$.

3. Bases orthonormales

Définition. *Soit F un sev de E. On appele base orthonormale de F toute base de F qui est aussi une famille orthonormale.*

Théorème. *Tout espace euclidien possède une base orthonormale.*

Corollaire. *Soit F un sev de E.*
Si F est de dimension finie, alors il possède une base orthonormale.

Théorème. *Théorème de la base orthonormale incomplète*
Si E est euclidien, alors toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Corollaire. *Soit F un sev de E.*
Si F est de dimension finie, alors toute famille orthonormale de F peut être complétée en une base orthonormale de F.

Proposition. *Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale*
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E.
Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

Proposition. *Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale*
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. On a alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Proposition. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ deux bases orthonormales de E. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ vérifie $P^{-1} = {}^tP$.*

Proposition. *(théorème de Riesz) Soit f une forme linéaire sur E euclidien.*
Il existe un unique vecteur a tel que $\forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x \rangle$.

Corollaire. *Toute forme linéaire sur E est de la forme $x \mapsto \langle a, x \rangle$, avec $a \in E$.*

III. Projection orthogonale sur un espace vectoriel de dimension finie

1. Supplémentaire orthogonal

Définition. *Deux sev F et G sont dits orthogonaux si $\forall (x, y) \in F \times G,\ \langle x, y \rangle = 0$, ce qui est équivalent à $F \subset G^\perp$ ou à $G \subset F^\perp$.*

Proposition. *Soit F un sev de E. Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$.*
Le sev $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Proposition. *Si E est euclidien et si F est un sev de E, alors*

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Proposition. *Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.*

Le supplémentaire orthogonal de la droite $\mathbb{R}u$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Autrement dit, $(\mathbb{R}u)^\perp = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0 \right\}$

Proposition. *Soit E euclidien de dimension n et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul .*
Le supplémentaire orthogonal de l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ dans une bon $(e_1, ..., e_n)$ est la droite engendrée par le vecteur $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

2. Projection orthogonale

Définition. *Soit F un sev de E de dimension finie. On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition. *Soit F est un sev de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F*
Si $(e_1, ..., e_p)$ est une bon de F, alors $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$

Proposition. *Soit F est un sev de E de dimension finie.*
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice de F et $x \in E$, alors

$$\forall y \in F,\ y = p_F(x) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \langle x - y, e_i \rangle = 0.$$

Proposition. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur non nul de E. La projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}u$ est l'application*

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

La projection orthogonale sur l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est l'application

$$E \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

3. Distance à un sev de dimension finie

Proposition. *Soit F est un sev de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F et $x \in E$. On a : $\forall y \in F$, $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$ avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.*
Ainsi, le vecteur $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x, i.e.

$$\|x - p_F(x)\| = \min\{\|x - y\|,\ y \in F\}$$

On dit que $\|x - p_F(x)\|$ est la distance du vecteur x au sev F, et on note $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

4. Distance à un sea de dimension finie

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ un sea de dimension finie et $x \in E$.*
Il existe un unique $y \in \mathcal{F}$ tel que $\|x - y\| = \min\{\|x - t\|,\ t \in \mathcal{F}\}$
Le point y est appelé le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$. On note $d(x, \mathcal{F}) = \|x - y\|$.

Définition. *Soit E euclidien et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de direction H. On appelle vecteur normal à $\mathcal{H}$ tout vecteur non nul de $H^\perp$.*

Proposition. *Soit E euclidien de dimension n, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul et $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ dans une bon $(e_1, ..., e_n)$.*
Les vecteurs normaux à $\mathcal{H}$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

Proposition. *Soit E euclidien et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine passant par a et de vecteur normal n. Pour tout $x \in E$ on a* $d(x, \mathcal{H}) = \dfrac{|\langle n, x-a\rangle|}{\|n\|}$

Corollaire. *Si l'on considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $\mathcal{P}$ le plan affine passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors pour tout point M on a* $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{\left|\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM}\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}$

Proposition. *Soit E euclidien.*
Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ dans une bon, alors, pour tout x de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, on a $d(x, \mathcal{H}) = \dfrac{\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - b\right|}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$.

Corollaire. *Si l'on considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation $ax + by = c$, alors pour tout point $M(x, y)$, on a* $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Corollaire. *Si l'on considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $\mathcal{P}$ le plan affine d'équation $ax + by + cz = d$, alors pour tout point $M(x, y, z)$, on a* $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$