

Semaine 1

#buffon/colles

QDC

- Loi de coulomb, énoncé et exemple
- Référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen
- Référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

Exo 1 Le pendule pas si simple

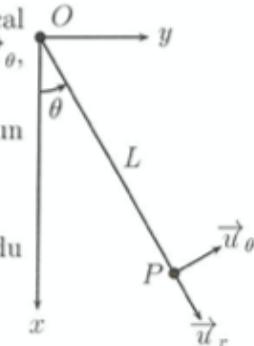
Exercice 3

Un pendule simple est formé d'un fil de masse négligeable, sans raideur, inextensible et de longueur L , reliant un point matériel P de masse m et un point d'attache O fixé au plafond. Le mouvement est limité au plan vertical (Oxy). On utilisera les coordonnées cylindriques et la base locale ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$). Le champ de pesanteur est $g \vec{u}_x$ avec $g > 0$.

- 1) Faire un bilan des forces sur P . Représenter les différentes forces sur un schéma.
- 2) Appliquer loi de la quantité de mouvement.
- 3) Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération du point P en utilisant les coordonnées cylindriques.
- 4) Établir l'équation différentielle vérifiée par θ .
- 5) Que devient l'équation précédente dans la limite des petits angles. Comment s'appelle cette équation différentielle ? Quelle est sa solution générale ?

On suppose désormais que le point P est également soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -bm \vec{v}_P$, où \vec{v}_P est la vitesse de P et b est une constante positive.

- 6) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ dans la limite des petits angles ?
- 7) Quelle valeur L_c faut-il donner à L pour que le régime transitoire soit critique ?



correction

Exercice 3:

- 1) \vec{P} poids
 \vec{T} tension fil

$$2) \frac{d(\vec{mv})}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \\ = \vec{P} + \vec{T} \\ = m \vec{a}(P)$$

$$3) \vec{OP} = L \vec{e}_\theta \quad \vec{v}(P) = L \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a}(P) = \begin{cases} -L(\dot{\theta})^2 \\ L \ddot{\theta} \end{cases}$$

base polar

- 4) PFD projeté sur \vec{e}_θ

$$m L \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

- 5) Aux petits angles, on peut linéariser le sinus
 $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \text{éqo canoniq OH parfait.}$$

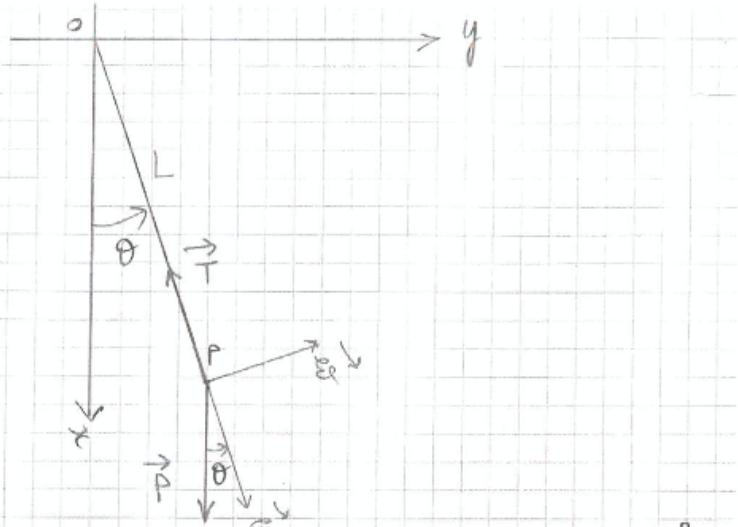
$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$6) \vec{f} = -bm L \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$m L \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - mb L \ddot{\theta}$$

$$\text{Aux petits angles} \quad \ddot{\theta} + b \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$



Exercice 3 suite.

On reconnaît l'équation différentielle canonique d'un OHA

On passe en paramétrage canonique

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + b \dot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Identifions $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\frac{\omega_0}{Q} = b \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{b} = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{1}{b}$$

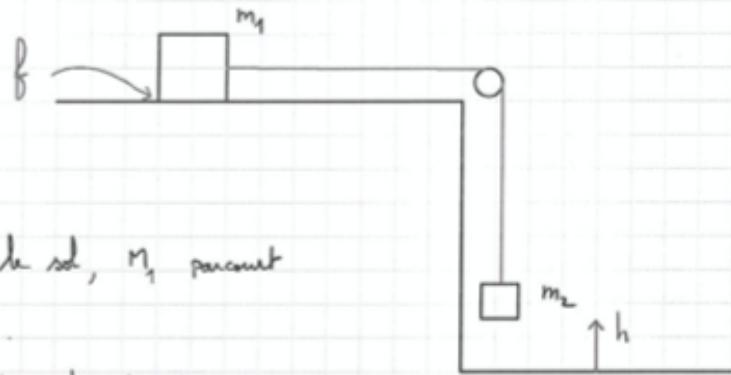
On a un régime critique si $Q = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{g}{L} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

$$L_c = \frac{4g}{b^2}$$

Exercice :



$$? : m_2 > m_1$$

Quand M_2 touche le sol, M_1 parcourt encore une distance d .

Exprimer f en fonction des données.

correction

TEC appliquée $\{M_1 + M_2\}$ pour la première phase du mouvement

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 - 0 = W_{P_i}^{T_1} + W_{R_{T_1}}^{T_2} = + m_2 gh - fm_1gh$$

TEC appliquée à $\{M_1\}$ pour la 2^e phase

$$0 - \frac{1}{2}m_1 v^2 = -fm_1gd \Rightarrow v^2 = 2f gd$$

finallement $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) 2f gd = m_2 gh - fm_1gh$

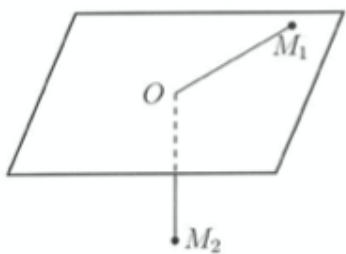
$$f((m_1 + m_2)d - m_1h) = m_2h$$

$$f = \frac{m_2h}{(m_1 + m_2)d - m_1h}$$

On peut également établir ce résultat avec plusieurs PFD mais c'est beaucoup plus long.

Exo 3 Le satellite sur une table

I.8



On considère deux points matériels M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2) accrochés l'un à l'autre par un fil inextensible de longueur L . Le point M_1 se déplace sans frottement sur un plan horizontal. Sur ce plan a été percé un trou en O par lequel passe le fil. Le point M_2 se déplace uniquement verticalement comme l'indique la figure. À l'instant initial $t = 0$, la masse m_2 est immobile et la masse m_1 a une vitesse orthogonale à OM_1 .

- 1) Quelle vitesse initiale faut-il donner à M_1 pour qu'il décrive une trajectoire circulaire de rayon R ?
- 2) Pour toute autre vitesse initiale, décrire le mouvement de M_1 . Calculer en particulier une énergie potentielle effective.

correction

Exercice 8:

1) Principe galiléen :

$$\text{à } M_2: m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 \Rightarrow m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2$$

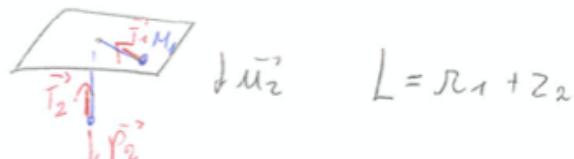
Si M_2 est immobile : $T_2 = m_2 g$

$$\text{à } M_1: m_1 (\ddot{\vec{r}}_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2) = -\vec{T}_1$$

sur \vec{r}_1 "O centre"

$$m_1 \frac{V_{M_1}^2}{R} = T_1 = m_2 g$$

$$V_{M_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} g R}$$



$$L = R_1 + z_2$$

$$2) \text{ On a } \vec{T}_2 = m_2 g - m_2 \vec{z}_2 \\ = m_2 g + m_2 \vec{r}_1$$

Principe fondamental de la dynamique: $m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R}_1$

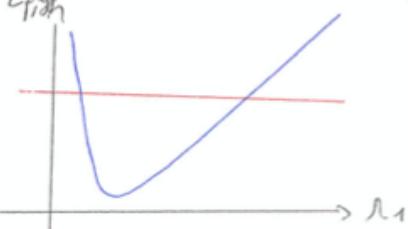
$$\text{Sur } \vec{r}_1: m_1 (\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2) = -\vec{T}_1 = -m_2 (g + \ddot{r}_1)$$

$$m_1 \left(\ddot{r}_1 - \frac{C^2}{r_1^3} \right) = -m_2 (g + \ddot{r}_1)$$

$$\ddot{r}_1 \left((m_1 + m_2) \ddot{r}_1 \right) = \left(m_1 \frac{C^2}{r_1^3} - m_2 g \right) \ddot{r}_1 \quad \downarrow \text{on intègre}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{C^2}{r_1^2} + m_2 g r_1 = \text{cste}$$

$$\text{On pose } E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2} m_1 \frac{C^2}{r_1^2} + m_2 g r_1$$



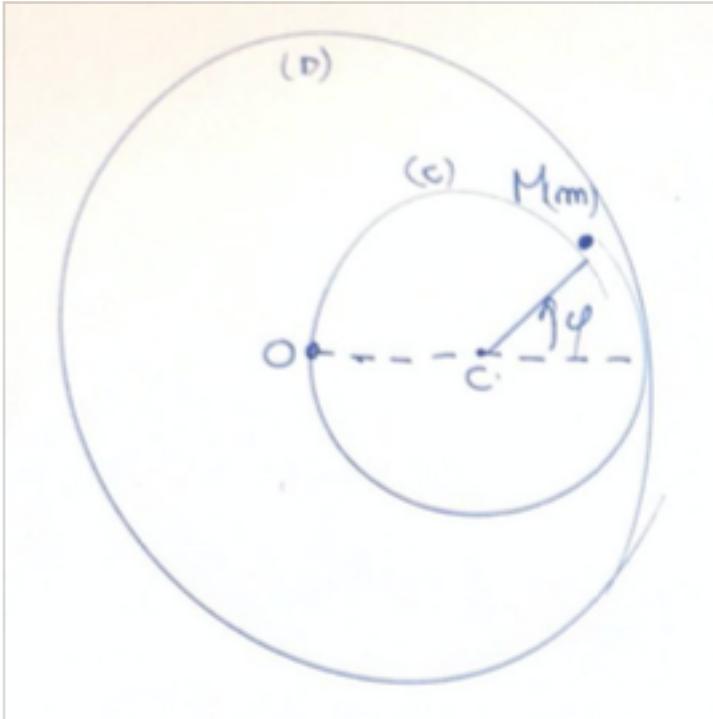
2^e méthode (+):

Th de l'énergie mécanique à $\{M_1, M_2\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - m_2 g z_2 \right) = \vec{S}_{\vec{T}_1} + \vec{S}_{\vec{T}_2} \\ = -T_1 \dot{r}_1 - T_2 \dot{z}_2 = 0$$

(Rq) $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$ car on a négligé les frottements entre le fil et le support, et, la masse du fil

Exo 4 La routourne tournera



Le disque (D) tourne autour de l'axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante ω .

Le point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottement sur la circonference (C) liée à (D).

Établir l'équation du mouvement de M par deux méthodes différentes. Trouver les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

$$OC = R, OA = 2R$$

correction

I- 2.1:

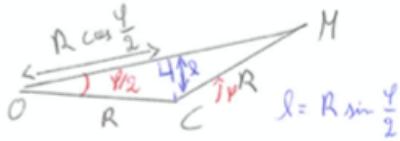
1^e méthode: TMC $\dot{r}_a(C_2)$ dans le référentiel (Δ) en rotation uniforme
 / $\dot{r}_a(O_2)$ since dans R galiléen:

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{p}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}}) + M_\Delta(\vec{f}_{\text{int}})$$

$$mR^2\ddot{\varphi} = \pm R \sin\frac{\varphi}{2} m w^2 2R \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\ddot{\varphi} = \pm w^2 \sin\varphi$$

Position d'éq: $\varphi=0$ stable
 $\varphi=\pi$ instable



2^e méthode: Méthode énergétique

Dans R' non galiléen: $\vec{P}, \vec{f}_{\text{ext}}, \vec{R}$ ne travaillent pas
 \vec{f}_{int} qui dérive de $E_p = -\frac{m}{2} w^2 OM^2$

$$E_M = \frac{1}{2} m (\dot{R} \dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2} m w^2 (4R^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) = \text{cste}$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} w^2 \dot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + w^2 \sin \varphi = 0$$

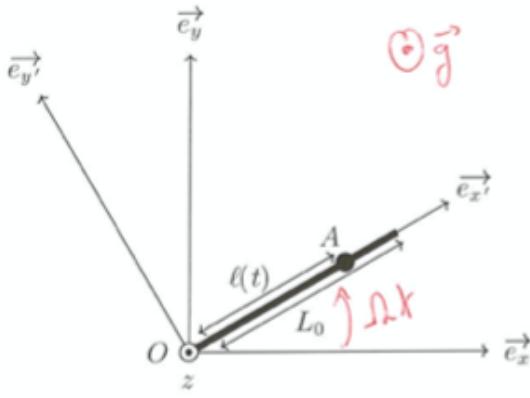
Stabilité:

$$\cdot \varphi = 0 + \varepsilon \rightarrow \ddot{\varphi} + w^2 \varepsilon = 0 \quad \text{OH donc stable}$$

$$\cdot \varphi = \pi + \varepsilon \rightarrow \ddot{\varphi} - w^2 \varepsilon = 0 \quad \text{instable}$$

Exo 5 Le pistolet imprécis

I · 20



Dans le référentiel terrestre, une barre horizontale tourne autour de l'axe vertical (Oz), O étant l'intersection de la barre et de l'axe. La vitesse de rotation de la barre Ω est supposée constante. L'angle (\vec{e}_x, \vec{e}_x') vaut Ωt . Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère lié au référentiel terrestre. Le vecteur \vec{e}_x' est dirigé selon la barre. Le vecteur \vec{e}_y' est tel que la base $(\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z)$ soit directe. Un anneau A de masse m coulisse sans frottement le long de la barre. La longueur de la barre est notée L_0 . On note $\ell = OA$. À l'instant initial $t = 0$, $\ell(0) = \frac{L_0}{2}$ et $\frac{d\ell}{dt}(0) = 0$. L'accélération de la pesanteur sera notée g .

- 1) Déterminer l'expression de $\ell(t)$.
- 2) À l'instant $t = T$, l'anneau quitte la barre. Quelle est l'équation vérifiée par T ?
- 3) Soient $R_{y'} = \vec{R} \cdot \vec{e}_{y'}$ et $R_z = \vec{R} \cdot \vec{e}_z$ les coordonnées de la réaction de la barre. Exprimer R_z et $R_{y'}$.

correction

Ex 20:

1) Principe gal des R' projete sur \vec{e}_x' :

$$m \ddot{\vec{l}} = m \vec{l} \Omega^2 - 2m (\vec{R} \vec{e}_z \cdot \vec{l}) \vec{e}_x' + \vec{P} \cdot \vec{e}_x' + \vec{R} \cdot \vec{l}$$
$$= m \vec{l} \Omega^2$$

$$\ddot{\vec{l}} - \Omega^2 \vec{l} = 0$$

$$P(x) = (x + \omega)(x - \omega)$$

$$\vec{l} = A e^{-\omega t} + B e^{\omega t}$$

$$CI: \begin{cases} A + B = \frac{L_0}{2} \\ B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{L_0}{4}$$

$$\vec{l} = \frac{L_0}{4} (e^{-\omega t} + e^{\omega t}) = \frac{L_0}{2} \cos(\omega t)$$

$$2) On a \quad \cos(\omega T) = 2$$

3) Principe gal projete sur \vec{e}_z' :

$$0 = mg + R_z + \vec{f}_{ie} \cdot \vec{e}_z + \vec{f}_{ic} \cdot \vec{e}_z$$

$$Donc R_z = mg$$

Principe gal sur \vec{e}_y' :

$$0 = \vec{f}_{ie} \cdot \vec{e}_y' - 2m \Omega^2 + \vec{P} \cdot \vec{e}_y' + Ry'$$

$$0 = -2m \Omega^2 + Ry'$$

$$Ry' = 2m \Omega^2 = 2m \Omega^2 \sin(\omega t) \frac{L_0}{2}$$

$$Ry' = L_0 m \Omega^2 \sin(\omega t)$$

I - 25 Pendule de Foucault

Un pendule simple de longueur L est attaché à un point fixe du référentiel terrestre en rotation autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen. Le lieu de l'expérience est à la latitude λ .

1) Établir les équations du mouvement du pendule dans l'approximation harmonique (petites oscillations à deux dimensions) mais en tenant compte de la force d'inertie de Coriolis : Ox sera choisi horizontal vers l'est, Oy vers le nord, Oz vertical ascendant. On négligera les dérivées de la côte z .

2) Résoudre le système en posant $\xi = x + iy$ et déterminer $\xi(t)$ en supposant $\Omega \ll \omega_0$ (ω_0 pulsation propre du pendule).

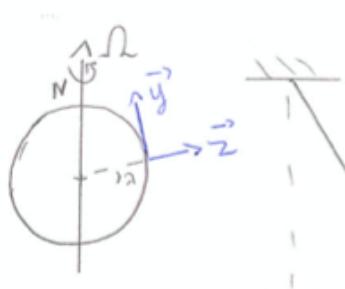
3) En se plaçant dans le repère tournant autour de Oz à la vitesse angulaire $\omega_e = -\Omega \sin(\lambda)$ décrire le mouvement dans ce repère puis dans le repère terrestre $Oxyz$.

Conditions initiales : $x(0) = a$, $y(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

T - 25

correction

I - 25 :



\vec{T} verticale (pendule fixe de fixe)

$$m\ddot{\vec{a}} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

$$\text{Mé: } \vec{T} = -T \frac{\vec{OH}}{L} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PFD}}} \approx -mg \frac{\vec{OH}}{L}$$

1) Principe fondamental du géocentrisme supposé galiléen :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = mg \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} - \frac{T}{L} \begin{vmatrix} x \\ y \\ -L \end{vmatrix} - 2m\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Sum } \ddot{x}, \ddot{y}: 0 = -mg + T + 2m\Omega \cos\lambda \ddot{z}$$

$$T = m(g - 2\Omega \cos\lambda \ddot{z}) \quad \text{AN: } \begin{cases} g \approx 10 \text{ m.s}^{-2} \\ \dot{z} \approx 1 \text{ m.s}^{-1} \\ \cos\lambda \approx 1 \end{cases} \Rightarrow g \gg 2\Omega \text{ coriolis} \\ T \approx mg \quad \Omega \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$(*) : \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = - \left[\frac{g}{L} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -L \end{bmatrix} + 2\Omega \sin\lambda \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

2) On pose $\xi = x + iy$

$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{L} \xi - 2i\Omega \sin \vartheta \dot{\xi}$$

$L = w_0^2$ ordre 2 en $\frac{\Omega}{w_0}$

Donc solutions : $\begin{cases} \omega_1 \approx i(-\Omega \sin \vartheta - w_0) \\ \omega_2 \approx i(-\Omega \sin \vartheta + w_0) \end{cases}$

$$P(X) = X^2 + 2i\Omega \sin \vartheta X + w_0^2$$

$$\Delta = -4\Omega^2 \sin^2 \vartheta - 4w_0^2 < 0. \text{ On a } \Delta \approx (2iw_0)^2$$

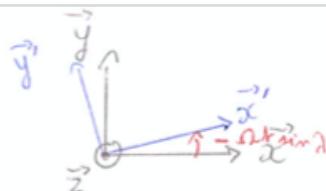
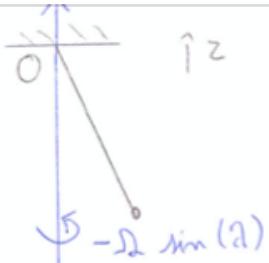
car $w_0 \gg \Omega$

$$\xi = A e^{i\omega_1 t} + B e^{i\omega_2 t} \quad \text{CI: } \begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A + B = a$$

$$\xi = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{i\omega_1 t} + \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{i\omega_2 t} \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A - B = -a \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta$$

$$\xi = e^{-i\Omega \sin \vartheta t} \left(\frac{a}{2} \left(1 - \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{-i\omega_1 t} + \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{i\omega_2 t} \right)$$

3)



$$x' = \cos(\pm \Omega \sin \vartheta t)x + \sin(-\Omega \sin \vartheta t)y$$

$$y' = \cos(\pm \Omega \sin \vartheta t)y - \sin(-\Omega \sin \vartheta t)x$$

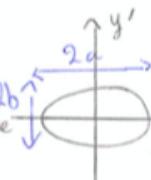
$$\xi' = \xi e^{i\Omega \sin \vartheta t}$$

$$\xi' = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{-i\omega_1 t} + \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \right) e^{i\omega_2 t}$$

$$\xi' = a \cos(w_0 t) + i \left(\frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \sin(w_0 t) \right)$$

D'où $\begin{cases} x' = a \cos(w_0 t) \\ y' = a \frac{\Omega}{w_0} \sin \vartheta \sin(w_0 t) \end{cases}$

Le mouvement est elliptique avec $b \ll a$

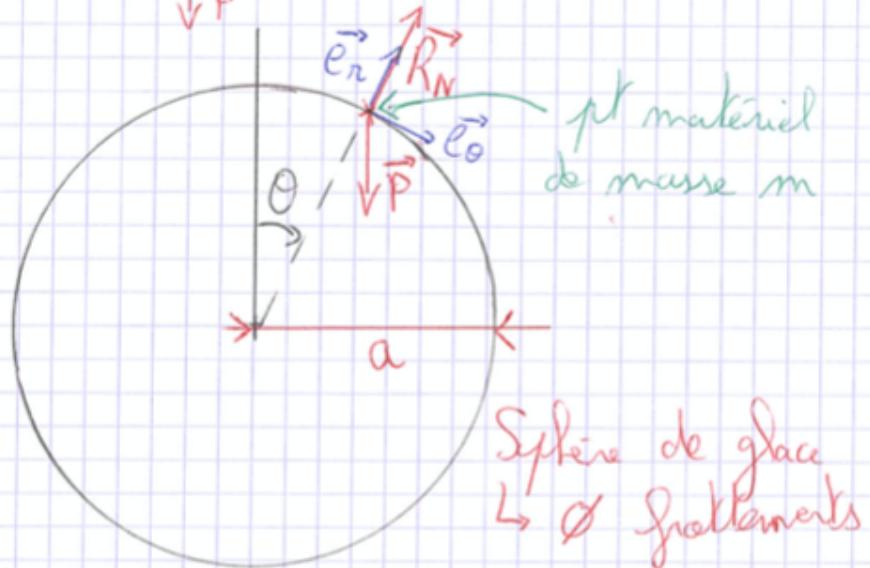
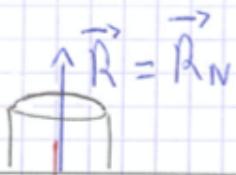


Dans Oxyz, le mouvement est comparable à une ellipse qui tourne lentement.

Exo 7 Le pingouin sur une sphère de glace

Un pingouin se trouve sur une boule de glace (on néglige tous les frottements)

$$\boxed{\vec{V} = \vec{0}}$$



On se donne les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta^+ \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Correction :

Réf: labo supposé ga

Syst: $\{M\}$

Bdf: $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{R} = \vec{R}_N$

PFD: $\boxed{\boxed{m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N}}$

(base adaptée = base polaire)

$$\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(\dot{\theta})^2 \\ a\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{V^2}{a} \\ a\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

$r = a = \text{cste}$

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \vec{R}_N = R_N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{-m a(\dot{\theta})^2 = -mg \cos\theta + R_N} \quad (1)$

$$\boxed{a\ddot{\theta} = g \sin\theta} \quad (2)$$

On fait $(2) \times \dot{\theta}$ et on $\int_{\theta=0}^{\theta}$

$$\int_{\theta=0}^{\theta} a\ddot{\theta}\dot{\theta} dt = \int_{\theta=0}^{\theta} g\dot{\theta} \sin\theta dt$$

$$\left[\frac{a(\dot{\theta})^2}{2} \right]_0^\theta = \left[-g \cos\theta \right]_0^\theta$$

$$\boxed{\frac{a\dot{\theta}^2}{2} - 0 = g(1 - \cos\theta)}$$

$$\boxed{\frac{d(\theta)}{2}^2 = g(1-\cos\theta)} \quad (2')$$

Réponse : Bonne ✓

Signe ✓

Cohérence $\theta=0$ ✓

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2') \end{array} \right\} \text{donnent } -2mg(1-\cos\theta) = -mg\cos\theta + R_N$$

$$\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2) = \|\vec{R}_N\|}$$

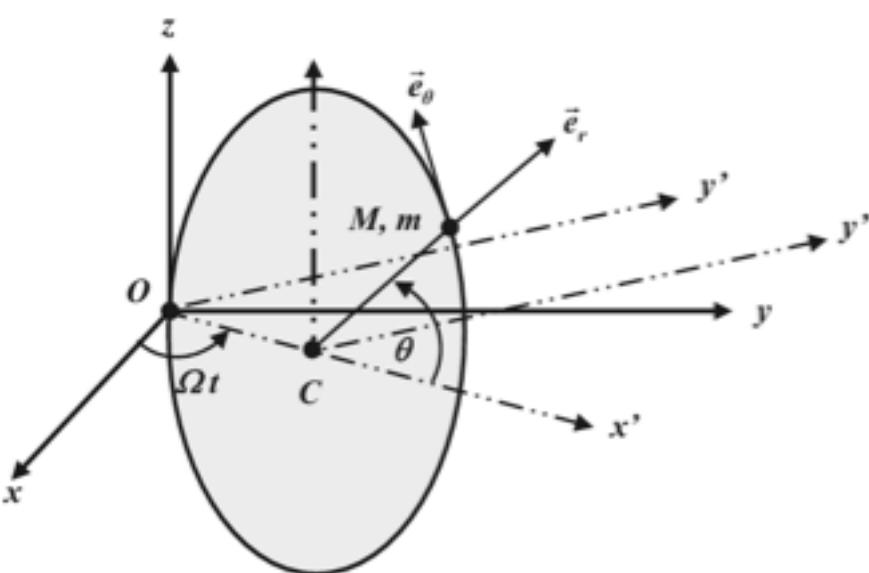
$R_N \propto \cos\theta$, $R_N \searrow$ de θ ds $[0, \frac{\pi}{2}]$

Décollage dès que $R_N(\theta_d) = 0$

$$\Rightarrow 3\cos\theta_d = 2$$

$$\boxed{\cos\theta_d = \frac{2}{3}}$$

Exo 8 Ça tourne (bis)



Un anneau de masse m glisse, sans frottements, sur un cerceau de rayon R , lié au référentiel tournant $\mathcal{R}' = (O, x', y', z')$.

Le référentiel \mathcal{R}' tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire Ω constante.

Les calculs seront menés dans la base de projection $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, -\vec{e}_{y'})$.

1) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau dans le référentiel \mathcal{R}' .

2) En déduire que θ vérifie une équation du type :

$$R\ddot{\theta} = f(\theta),$$

où $f(\theta)$ est une fonction de θ à déterminer.

3) Trouver une condition sur la vitesse angulaire Ω pour que $\theta = \theta_e$ soit une position d'équilibre. Cette position est-elle stable ou instable ?

correction

1) et 2)
On se place dans le référentiel tournant non galiléen

$$\text{LFD: } \vec{e}_\theta \cdot mR\ddot{\theta} = \left(\sum \vec{F} \right) \cdot \vec{e}_\theta \\ = (\vec{P} + \vec{R}_c + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}) \cdot \vec{e}_\theta$$

Donc, $mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + \vec{O} - m\Omega^2 R(1+\cos\theta)\sin\theta$

puis, $R\ddot{\theta} = -g\cos\theta - \Omega^2 R(1+\cos\theta)\sin\theta$

Ainsi, $R\ddot{\theta} = f(\theta)$ avec $f(\theta) = -g\cos\theta - \Omega^2 R(1+\cos\theta)\sin\theta$

3) Equilibre si $\dot{\theta} = 0$

$$\ddot{\theta} = 0$$

Donc $\boxed{f(\theta_e) = 0}$

Puis discuter de la stabilité...

