Complexes (suite)

Exercice 1 : Résoudre

1. $z^2-(3+i)z+2+6i=0$
2. $z^4-(5-14i)z^2-24-10i=0$.

Exercice 2 : Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes

1. z, i et iz soient alignés
2. z, j et jz soient alignés
3. 1, z et $1+z^2$ soient alignés

Exercice 3 :
Interpréter géométriquement la transformation $z'=\dfrac{1+i}{1-i}z+i$.

Exercice 4 : Résoudre

1. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n=\dfrac{1+i}{1-i}$
2. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n+\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n=1$

Exercice 5 : Simplifier

1. $S_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x+e^{2ik\pi/n})^n$
2. $S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$

Exercice 6 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier k, on pose $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Factorisez le polynôme X^n-1.
2. Simplifiez le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z_k^2-2z_k\cos\theta+1)$.

Exercice 7 : Soit n un entier non nul et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ème de l'unité

1. Pour tout entier k calculer $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^k$
2. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ un polynôme à coefficients complexes.
   (a) Simplifiez $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}P(\omega)$.
   (b) Simplifiez $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega P(\omega)$.
   (c) Montrer que les coefficients de P sont majorés par
   $$M=\operatorname*{Max}_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)|$$
3. Retrouver
$$\sum_{k=0,\ k\equiv 0[3]}^{n}\binom{n}{k}\qquad\sum_{k=0,\ k\equiv 1[3]}^{n}\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad\sum_{k=0,\ k\equiv 2[3]}^{n}\binom{n}{k}$$

Exercice 8 :

1. Prouver que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{ik\pi/n}\right)$.
2. En admettant que le résultat est encore vrai pour $z=1$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$