Dérivation

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

I. Dérivabilité

Définition. *Soit $a \in I$.*
On définit la fonction taux d'accroissement de f en a notée τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition. *Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$.*

Remarque. *Graphiquement, le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ est égal à la pente de la droite qui joint les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet en a une tangente d'équation*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Remarque. *f est dérivable en a si et seulement s'il existe un nombre réel ℓ tel que*

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o(x - a)$$

Remarque. *Le caractère dérivable d'une fonction en a est une propriété locale :*
si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a, alors f est dérivable en a si et seulement si g l'est.

Remarque. *Si f est dérivable en a, alors la fonction taux d'accroissement de f en a, τ_a, est prolongeable par continuité en a.*

Proposition. *Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a.*

Définition. *Soit $a \in I$ tel que l'ensemble $I \cap [a, +\infty[$ n'est ni vide ni réduit à un point.*
On dit que f est dérivable à droite en a si la restriction de la fonction f à l'ensemble $I \cap [a, +\infty[$ est dérivable en a, ce qui est équivalent au fait que la fonction τ_a admette une limite à droite finie en a.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(a)$.

Définition. *Soit $a \in I$ tel que l'ensemble $I \cap]-\infty, a]$ n'est ni vide ni réduit à un point.*
On dit que f est dérivable à gauche en a si la restriction de la fonction f à l'ensemble $I \cap]-\infty, a]$ est dérivable en a, ce qui est équivalent au fait que la fonction τ_a admette une limite à gauche finie en a.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'_g(a)$.

Proposition. *Soit $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité de I. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Corollaire. *Soit f une fonction dérivable à droite (resp. à gauche) en $a \in I$. Alors f est continue à droite (resp. à gauche) en a.*

Définition. *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application*

$$I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$$

est appelée fonction dérivée de f sur I et notée f'.
L'ensemble des fonctions dérivables sur D est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

Remarque : On pourra aussi s'intéresser à la dérivabilité de fonctions définies sur des unions d'intervalles non triviaux. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction tan est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
Dans la suite, on notera D un tel ensemble.

II. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition. *Soient f et g deux fonctions dérivables en a, alors la fonction $f + g$ est dérivable en a et*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Proposition. *Soit f une fonction dérivable en a et λ un nombre réel, alors la fonction λf est dérivable en a et*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

Corollaire. *$\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.*

Proposition. *(*) Soient f et g deux fonctions dérivables en a, alors la fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Corollaire. *$\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ est stable par produit.*

Proposition. *(*) Soit f une fonction dérivable en a telle que $f(a) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est définie au voisinage de a et dérivable en a et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Corollaire. *(*) Soient f et g deux fonctions dérivables en a et telles que $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est définie au voisinage de a et dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

Corollaire. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur D et telles que g ne s'annule pas sur D, alors la fonction f/g est dérivable sur D.*

Proposition. *Soient f définie sur D et g définie sur D' tel que $f(D) \subset D'$.*
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\,(g' \circ f)(a)$$

Corollaire. *Soient f définie sur D et g définie sur D' tel que $f(D) \subset D'$.*
Si f est dérivable sur D et si g est dérivable sur D', alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur D.

Théorème. *de la bijection dérivable (*)*
Soit f dérivable sur un intervalle I et établissant une bijection de I dans $f(I)$.
La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $a \in f(I)$ si, et seulement si, $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$.
Dans ce cas,

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

Remarque. *La fonction f^{-1} peut être dérivable en $f(a)$ sans que f ne soit dérivable en a. Par exemple $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais $f^{-1} : x \mapsto x^2$ l'est en $f(0) = 0$. Ce résultat se généralise lorsque le taux d'accroissement de f en a a une limite infinie en a.*

III. Extremum

Définition. *On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que*

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap I, \quad f(x) \leq f(a)$$

Définition. *On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que*

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap I, \quad f(x) \geq f(a)$$

Définition. *On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

Proposition. *(*) Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$.*
Si f admet un extremum local en a et si a n'est pas une extrémité de I alors $f'(a) = 0$.

Remarque. *La réciproque est fausse. Prendre $x \mapsto x^3$ en 0.*

Définition. *On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$.*

IV. Étude globale des fonctions dérivables

1. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème. *de Rolle (*)*
Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. *Le point c n'est pas forcément unique.*

Remarque. *Si un mobile se déplace se long d'un axe de façon dérivable et s'il revient à son point de départ, alors il existe au moins un instant où sa vitesse instantanée est nulle.*

Théorème. *des accroissements finis (*)*
Soit f continue sur un segment $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque. *Si un mobile se déplace se long d'un axe de façon dérivable, alors il existe au moins un instant où sa vitesse instantanée est égale à sa vitesse moyenne.*

Remarque. *L'inégalité des accroissements finis permet de démontrer des inégalités sans étude de fonctions. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.*

2. Conséquences

2.1. Monotonie et dérivée

Proposition. *(*) Si f est continue sur I et dérivable sur I privé de ses extrémités alors f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si la dérivée de f sur I privé de ses extrémités est positive (resp. négative).*

Proposition. *(*) Si f est continue sur I et dérivable sur I privé de ses extrémités alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si :*
- *la dérivée de f sur I privé de ses extrémités est positive (resp. négative)*
- *et s'il n'existe aucun intervalle inclus dans I et contenant au moins deux points sur lequel f' est identiquement nulle.*

Corollaire. *Soit f est continue sur I et dérivable sur I privé de ses extrémités.*
Si f' est positive sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Remarque. *Le corollaire donne une condition plus simple mais il ne s'agit que d'une condition suffisante de stricte croissance.*
La dérivée peut s'annuler en un nombre infini de points mais ses zéros doivent être isolés.

Exemple. *La fonction $x \mapsto x - \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.2. Inégalité des accroissements finis

Corollaire. *(*) Soit f continue sur un segment $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ telle que*

$$\forall x \in]a,b[,\ m \le f'(x) \le M$$

alors

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

Corollaire. *(Inégalité des accroissements finis)(*) Si f est continue sur I et dérivable sur I privé de ses extrémités et si sa dérivée est bornée sur I par M alors*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \le M|x-y|$$

Définition. *On dit que f est k-lipschitzienne sur I si*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \le k|x-y|$$

Définition. *On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne sur I.*

Remarque. *f est k-lipschitzienne sur I si, et seulement si, pour tout $a \in I$, le graphe de f est compris entre les droites d'équation $y = f(a) - k(x-a)$ et $y = f(a) + k(x-a)$.*
Avec cette interprétation graphique, on visualise que les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $\exp$ ne sont pas lipschitziennes.

Proposition. *Une fonction lipschitzienne est continue.*

Proposition. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Proposition. *Si f est dérivable sur I alors f est lipschitzienne si, et seulement si, f' est bornée.*

Remarque. *Une fonction lipschitzienne n'est pas forcément dérivable. Par exemple $x \mapsto |x|$*

2.3. Théorème de la limite de la dérivée

Théorème. *(de la limite de la dérivée) (*)*
Soit f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Proposition. *(*) Soit f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite finie ℓ en a alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a*

Exemple. *La fonction $x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$ est un primitive sur $[-1, 1]$ de* arcsin.

Proposition. *(*) Soit f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite infinie en a alors f n'est pas dérivable en a.*

Remarque. *Soit f continue sur I dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' n'admet pas de limite en a alors on ne peut pas savoir si f est dérivable en a.*
On peut néanmoins affirmer que si f est dérivable en a alors f' est discontinue en a.

Exemple. $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *et* $x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

V. Dérivées d'ordre supérieurs. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition. *Soit f fixée. On définit, sous réserve d'existence, les dérivées successives de f par*
- $f^{(0)} = f$,
- *pour tout entier k, si la dérivée k-ième de f, $f^{(k)}$, est définie sur I et si $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on appelle dérivée $(k+1)$-ième de f la dérivée de $f^{(k)}$ et on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.*
  On dit alors que f est $k+1$ fois dérivable sur I.

Définition. *Pour tout entier k non nul, on note $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivable sur I.*

Définition. *Soit k un entier non nul. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k-fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième, $f^{(k)}$, est continue sur I.*
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Proposition. $\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 ...$

Exemples : $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto x \sin(1/x)$ peut être prolongée par continuité en 0 mais ce prolongement n'est pas dérivable en 0.
$x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ peut être prolongée par continuité en 0 ; ce prolongement est dérivable en 0 mais de dérivée discontinue.

Définition. *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est k-fois dérivable sur I pour tout entier k non nul. On dit aussi que f est indéfiniment dérivable.*
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Proposition. *Soit k un entier non nul, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})^2$ alors $\lambda f + \mu g$ est k-fois dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.*

Proposition. *Pour tout entier k non nul, les ensembles $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ sont stables par combinaisons linéaires.*

Proposition. *Formule de Leibniz (*)*
Soit n un entier non nul et $(f,g) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})^2$ alors fg est n-fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Proposition. *Pour tout entier k non nul, les ensembles $\mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ sont stables par produit.*

Proposition. *(*) Soit k un entier non nul et $f \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$) ne s'annulant pas sur I alors la fonction $1/f$ appartient à $\mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$).*

Proposition. *(*) Soit k un entier non nul, $f \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$) et $g \in \mathcal{D}^k(J,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$) telles que f soit à valeurs dans J alors la fonction $g \circ f$ appartient à $\mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$).*

Proposition. *(Réciproque de classe $\mathcal{C}^k$) (*)*
Soit k un entier non nul. Si f est bijective et k fois dérivable sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I) telle que f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est k fois dérivable sur l'intervalle $J = f(I)$ (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$ sur J).

Théorème. *(Prolongement de classe $\mathcal{C}^k$) (*)*
Soit k un entier non nul et f continue sur I et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ telle que pour tout $i \in [\![0,k]\!]$ la fonction $f^{(i)}$ admette une limite finie ℓ_i en a alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} \ : \ I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\tilde{f}^{(i)}(a) = \ell_i$

VI. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans cette partie f est une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition. *Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction taux d'accroissement de f en a, τ_a, définie par*

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a que l'on notera $f'(a)$.

Théorème. *Soit $a \in I$ alors la fonction f est dérivable en a si et seulement si les fonctions $Re\, f$ et $Im\, f$ sont dérivables en a. Dans ce cas, $f'(a) = (Re\, f)'(a) + i(Im\, f)'(a)$.*

Tout ce qui a été fait dans les deux premières sections est conservé. La notion d'extremum n'a plus de sens, le théorème de Rolle est donc perdu ainsi que toute la section IV. On conserve néanmoins l'inégalité des accroissements finis sous la forme suivante :

Théorème. *(Inégalité des accroissements finis)*
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors sa dérivée est bornée sur I par M et

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

On conserve aussi la caractérisation des fonctions dérivables constantes

Proposition. *Si f est continue sur I et dérivable sur I privé de ses extrémités alors f est constante sur I si et seulement si la dérivée de f sur I privé de ses extrémités est nulle sur I.*

La section V est intégralement conservée.

VII. Formules de Taylor

Théorème. *(Formule de Taylor avec reste intégral) **(*)***
Soit $n \in \mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$ alors

$$\forall b \in I,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exercice. *Si n est pair, alors* $\ln(1+x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$, *sinon* $\ln(1+x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

Corollaire. *(Inégalité de Taylor-Lagrange) **(*)***
Soit $n \in \mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

Exercice. *Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1]$,* $\ln(1+x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

Théorème. *(Formule de Taylor-Young) **(* dans le cas f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$)***
Soit $n \in \mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)$$

Proposition. ***(*)***

- $\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$,
- $\mathrm{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$,
- $\mathrm{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$,
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$.