DM 3. Premier Problème. Idéaux de L(E)

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n. On note $L(E)$ l'algèbre des endomorphisme de E.

On dit qu'un sous groupe additif M de $L(E)$ est un idéal à droite (resp.à gauche) de $L(E)$ si $\forall g \in L(E), \forall f \in M, f \circ g \in M$ (resp. $g \circ f \in M$)

une partie M qui est à la fois un idéal à droite et à gauche est appelée un idéal bilatère.

1. Montrer qu'un idéal (à droite, à gauche, bilatère) est un sous espace vectoriel de $L(E)$
2. Soit $f \in L(E)$. Montrer que l'ensemble $\Delta_f = \{f \circ g, g \in L(E)\}$ est un idéal à droite et que $\Gamma_f = \{g \circ f, g \in L(E)\}$ est un idéal à gauche.
3. Pour tout sous espace F de E , on note J_F l'ensemble des élémets de $L(E)$ dont l'image est contenue dans F. De même on note K_F l'ensemble des endomorphismes dont le noyau contient F. Montrer que J_F est un idéal à droite, et que K_F est un idéal à gauche.
4. Déterminer, en fonction de la dimension de F les dimension de J_F et K_F. On pourra pour cela examiner les matrices des éléments de J_F et K_F dans une base convenablement choisie.
5. Soit $f \in L(E)$. On considère l'endomorphisme Φde $L(E)$. défini par $\Phi(g) = f \circ g$. Déterminer, en fonction du rang de f, la dimension du noyau de Φ. En déduire la dimension de Δ_f. Montrer que $\Delta_f = J_{\mathrm{Im} f}$.
6. Montrer que $\Gamma_f = K_{\ker f}$
7. Soit F un sous espace vectoriel de E montrer qu'il existe f tel que $\Delta_f = J_F$ et h tel que . $\Gamma_h = K_F$.
8. On considère deux sous espaces vectoriels F et G de E
   (a) Montrer que $J_F \cap J_G = J_{F \cap G}$ et $K_F \cap K_G = K_{F+G}$.
   (b) Montrer que $J_F + J_G = J_{F+G}$ et $K_F + K_G = K_{F \cap G}$
9. Soit M un idéal à droite. On considère un élément f de M dont le rang est maximal parmi les rangs des éléments de M.
   (a) Justifier l'existence d'un tel f et vérifier que $\Delta_f \subset M$.
   (b) Soit h un élément de M, montrer que $\mathrm{Im} h \subset \mathrm{Im} f$ (on pourra etudier $\Delta_f + \Delta_h$ à l'aide des deux questions précédentes).
   (c) En déduire que pour tout idéalà droite M, il existe un unique sev F de E tel que $M = J_F$
10. Montrer de la même manière que si M est un idéal à gauche, alors il existe un unique G sev de E tel que $M = K_G$.
11. (a) Soient F, G deux sous espaces vecoriels de E. déterminer la dimension de $J_F \cap K_G$.
    (b) En déduire que les seuls idéaux bilatères sont $\{0\}$ et $L(E)$.