Devoir du 20/03/2021

Exercice : Déterminer les développements limités suivants :

1. A l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+3)(1-x)}$.
2. A l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-\sin x}{\ln(1+x)}$.
3. A l'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.
4. A l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$.
5. A l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

Problème 1 :

Dans la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
On dit que u est nilpotent s'il existe un entier k tel que $u^k = 0$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $u_F : F \to F$, $x \mapsto u(x)$ est un endomorphisme appelé endomorphisme induit par u sur F.
Pour tout entier n, on note $I_n = \mathrm{Im}\,(u^n)$ et $K_n = \mathrm{Ker}\,(u^n)$.
Enfin, on note $I = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $I_{n+1} \subset I_n$ et $K_n \subset K_{n+1}$.
2. (a) Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont stables par u.
   (b) Prouver que u est injectif si, et seulement si, $K = \{0\}$.
   (c) Prouver que u est surjectif si, et seulement si, $I = E$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Prouver les équivalences suivantes :
$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$$
$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \iff \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = E$$
4. On suppose dans cette question uniquement qu'il existe un entier n_0 tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$.
   (a) Prouver que pour tout entier p, on a $K_{n_0+p} = K_{n_0}$.
   (b) Justifier qu'il existe un plus petit entier s tel que $K_s = K_{s+1}$.
   (c) Prouver que u_K est nilpotent, que $I_s \cap K = \{0\}$ et que u_I est injectif.
   (d) Déterminer le plus petit entier p tel que $u_K^p = 0$.
5. On suppose dans cette question uniquement qu'il existe un entier n_1 tel que $I_{n_1} = I_{n_1+1}$.
   (a) Prouver que pour tout entier p, on a $I_{n_1+p} = I_{n_1}$.
   (b) Soit r le plus petit entier tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que u_I est surjectif et que $E = I + K_r$.

On dit que u est de caractère fini s'il existe des entiers r et s tels que $I_r = I_{r+1}$ et $K_s = K_{s+1}$. Dans la suite, on supposera ces entiers choisis les plus petits possibles.

6. Montrer que si u est de caractère fini, alors $E = I \oplus K$, u_K est nilpotent et u_I est un automorphisme.
7. (a) Montrer les implications suivantes :
$$\left\{\begin{array}{rl} I_n & = I_{n+1} \\ K_{n+1} & = K_{n+2} \end{array}\right. \Rightarrow K_{n+1} = K_n \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rl} K_n & = K_{n+1} \\ I_{n+1} & = I_{n+2} \end{array}\right. \Rightarrow I_{n+1} = I_n$$
   (b) Prouver que si u est de caractère fini, alors $r = s$.
8. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E vérifiant :
   — $E = F + G$,
   — F et G sont stables par u,
   — u_G est nilpotent et u_F est bijectif,

   alors u est de caractère fini, $G = K$ et $F = I$.

Problème 2 :

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :
$T_0(X)=1$, $T_1(X)=X$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)$.

I. Étude de la suite des polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m\in\mathbb{N}^*$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(T_0,T_1,\cdots,T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Établir par récurrence $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n(\cos(x))=\cos(nx)$
4. (a) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, résoudre dans $[0,\pi]$, l'équation $T_n(\cos(x))=0$.
   (b) En déduire la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II. A. Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

À tout couple (P,Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on associe l'intégrale suivante :

$$\phi(P,Q)=\int_0^\pi P(\cos(x))\,Q(\cos(x))\ \mathrm{d}x.$$

1. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\neq q$. Calculer $\phi(T_p,T_q)$.
2. En déduire que pour tout $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\phi(T_n,Q)=0$.
3. En déduire que $\phi(T_n,X^n)=\dfrac{\pi}{2^n}$.

II. B. Calcul exact d'une intégrale :

Dans toute la suite, on fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $x_k=\dfrac{2k-1}{2n}\pi$.
À tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, on associe

$$I(P)=\int_0^\pi P(\cos x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(P)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}P(\cos(x_k))$$

1. (a) Pour $p\in[\![0,n-1]\!]$, calculer $I(T_p)$ et $S_n(T_p)$.
   (b) En déduire que pour tout $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $I(P)=S_n(P)$.
2. Soit $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R le quotient et le reste de la division Euclidienne de P par T_n.
   (a) Montrer que $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en déduire à l'aide de II.A que $I(P)=I(R)$.
   (b) En déduire que, $I(P)=S_n(P)$.

III. Calcul approché d'une intégrale :

A tout fonction f continue sur $[-1,1]$, on associe

$$I(f)=\int_0^\pi f(\cos x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(f)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\cos(x_k))$$

On admet (théorème sur les sommes de Riemann) que $I(f)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f)$.
Soit $f\ :\ t\mapsto\ln(a^2-2at+1)$ où $a\in\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$.

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
2. Déterminer la factorisation en irréductibles de $X^{2n}+1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire celle de $X^{2n}+1$ dans $\mathbb{R}[X]$. On fera apparaître les réels x_k.
4. Montrer que $S_n(f)=\dfrac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}+1\right)$.
5. En déduire la valeur de $I(f)$. On distinguera les cas $a\in]0,1[$ et $a>1$.
6. Donner, suivant les cas, un équivalent de $S_n(f)-I(f)$ quand n tend vers $+\infty$.