Devoir du 16/01/2021

Exercice 1 :

1. On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\sim\sqrt{n}\times\frac{1}{2n}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$

2. $\sqrt[3]{\ln(n+1)}=\sqrt[3]{\ln(n)+\ln(1+1/n)}=\sqrt[3]{\ln(n)}\sqrt[3]{1+\ln(1+1/n)}$
   donc $\sqrt[3]{\ln(n+1)}-\sqrt[3]{\ln(n)}=\sqrt[3]{1+\ln(1+1/n)}-1\sim\frac{\ln(1+1/n)}{3}\sim\boxed{\frac{1}{3n}}$

3. $(\cos(1/n))^{n^2}=e^{n^2\ln(\cos(1/n))}$
   On a $\cos(1/n)=1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc
   $$\ln(\cos(1/n))=\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sim\frac{-1}{2n^2}$$
   d'où $n^2\ln(\cos(1/n)))\sim\frac{-1}{2}\cdot$
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\ln(\cos(1/n)))=\frac{-1}{2}$ et, par continuité de l'exponentielle
   $$\lim_{n\to+\infty}(\cos(1/n))^{n^2}=e^{-1/2}$$
   i.e. $\boxed{(\cos(1/n))^{n^2}\sim e^{-1/2}}$

Exercice 2 :

1. *Montrer que la suite u est bien définie.*
   Pour tout entier n, on pose $H(n)$: "u_n est bien défini et $u_n>0$.
   Comme $u_0>0$, l'initialisation est vérifiée.
   Supposons $H(n)$ vraie pour un certain entier n.
   Le réel u_{n+1} est alors bien défini et strictement positif comme somme de réels strictement positifs.
   Par conséquent, <u>la suite u est bien définie</u> et strictement positive.

2. *Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geq\sqrt{2}$.*
   La fonction $f : x\mapsto\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
   $$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\quad f'(x)=\frac{x^2-2}{2x^2}\cdot$$
   La fonction f est donc décroissante sur $]0,\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2},+\infty[$. Comme $f(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$, on en déduit que
   $$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\quad f(x)\geq\sqrt{2}.$$
   En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n\geq\sqrt{2}.}$

3. *En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.*
   Montrons par récurrence que la suite u est décroissante à partir du rang 1.
   Pour tout entier n non nul, on pose $H(n)$: "$u_{n+1}\leq u_n$".
   Initialisation : On a les équivalences suivantes :
   $$u_2\leq u_1\Leftrightarrow\frac{u_1}{2}+\frac{1}{u_1}\leq u_1\Leftrightarrow\frac{u_1^2+2}{2u_1}\leq u_1\Leftrightarrow u_1^2+2\leq 2u_1^2\Leftrightarrow u_1^2\geq 2$$
   car u_1 est positif. Comme $u_1\geq\sqrt{2}$, on en déduit que $H(1)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $H(n)$ vrai pour un certain entier n non nul.
   On a donc $\sqrt{2}\leq u_{n+1}\leq u_n$ et comme f est croissante sur $[\sqrt{2},+\infty[$,
   $$f(u_{n+1})\leq f(u_n)$$
   i.e. $u_{n+2}\leq u_{n+1}$; ce qui prouve $H(n+1)$.
   Ainsi, la suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ elle <u>converge</u> donc d'après le <u>théorème de la limite monotone</u> et sa limite, notée ℓ, appartient à $[\sqrt{2},+\infty[$ donc strictement positive. Par conséquent, f est continue en ℓ donc ℓ est un point fixe de f.
   Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$, on a :
   $$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{x^2+2}{2x}=x\Leftrightarrow x^2+2=2x^2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$
   Par suite, $\boxed{\ell=\sqrt{2}.}$

Exercice 3 : Soit $f : x\mapsto\left(x(\ln x)^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition D de f.*
   On a $f=e^g$ avec $g : x\mapsto\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x(\ln x)^2\right)$.

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$.
La fonction $x \mapsto 1 + x(\ln x)^2$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et produits de telles fonctions. Elle est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par composition $x \mapsto \ln\left(1 + x(\ln x)^2\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Comme la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}}$.

2. *Étudier la continuité de f sur D.*
   On a $f = e^g$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}\ln\left(1 + x(\ln x)^2\right)$.
   La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$.
   La fonction $x \mapsto 1 + x(\ln x)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et produits de telles fonctions. Elle est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par composition $x \mapsto \ln\left(1 + x(\ln x)^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que f est continue sur $\boxed{\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}}$.

3. *Déterminer la limite de f en $+\infty$*
   On a $\ln\left(1 + x(\ln x)^2\right) = \ln\left(x(\ln x)^2\right) + \ln(1 + \dfrac{1}{x(\ln x)^2})$ donc
   $\ln\left(1 + x(\ln x)^2\right) = \ln x + 2\ln(\ln x) + \ln(1 + \circ(1)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.
   Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e.}$$

4. *La fonction f est-elle prolongeable par continuité ?*
   On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to0^+} 1 + x(\ln x)^2 = 1$ donc, par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(1 + x(\ln x)^2\right) = 0$.
   Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0$. Par continuité de l'exponentielle en 0, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1.}$ La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.
   On a $\lim\limits_{x\to1} 1 + x(\ln x)^2 = 0$ donc $\ln\left(1 + x(\ln x)^2\right) \underset{x\to1}{\sim} x(\ln x)^2$ puis $g(x) \underset{x\to1}{\sim} x\ln x$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to1} g(x) = 0$.
   Ainsi, par continuité de l'exponentielle en 0, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1.}$
   La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1.

5. *La prolongement par continuité est-il dérivable ?*
   On a $f = e^g$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}\ln\left(1 + x(\ln x)^2\right)$.
   La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}$.
   La fonction $x \mapsto 1 + x(\ln x)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et produits de telles fonctions. Elle est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par composition $x \mapsto \ln\left(1 + x(\ln x)^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que f est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}}$.

Exercice 4 :

1. *Montrer que si une suite w est convergente de limite ℓ, alors la suite $\left(v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Leftrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

   Ainsi, pour tout entier n supérieur à n_0, on a :

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell| \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n+1}\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| + \varepsilon
\end{aligned}$$

   Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k - \ell| \leq \varepsilon$$

   En posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_2 \Leftrightarrow |v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$$

Par conséquent la suite $(v_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro i.e. la suite v converge vers ℓ.

2. *En déduire que si une suite w vérifie $w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\in\mathbb{R}^*$, alors $w_n\sim n\ell$.*

   Soit w une suite telle que $w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\in\mathbb{R}^*$. Alors d'après la première question, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(w_{k+1}-w_k)=\dfrac{w_{n+1}-w_0}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   La suite $\left(\dfrac{w_0}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro, la suite $\left(\dfrac{w_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

   Comme $\ell\neq 0$, on a $\dfrac{w_n}{n}\sim\ell$ i.e. $\boxed{w_n\sim n\ell}$.

On considère la suite u définie par

$$u_0=1,\qquad \text{et}\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=sin(u_n)$$

3. *Montrer que la suite u est monotone.*

   L'ensemble $[0,1]$ est stable par la fonction sin. Comme $u_0=1$, on en déduit que la suite u est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.

   La fonction $x\mapsto\sin x-x$ étant de dérivée négative sur l'intervalle $[0,1]$ et s'annulant en 0, on a $\forall x\in[0,1]$, $\sin x\le x$. Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin u_n\le u_n}$

4. *Prouver que la suite u converge. Donner sa limite.*

   La suite u est décroissante et minorée par zéro donc elle converge. Soit ℓ sa limite. La fonction sin étant continue, on a $\sin\ell=\ell$. La fonction $g\,:\,x\mapsto\sin x-x$ étant de dérivée strictement négative sur l'intervalle $[0,1]$ sauf en 0, elle est strictement décroissante. Comme $g(0)=0$, on a $\forall x\in]0,1]$, $\sin x<x$. Comme $\ell\in[0,1]$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } 0.}$$

5. (a) *Énoncer le théorème de Taylor-Young.*

   Soit $n\in\mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a\in I$ alors

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o_a\left((x-a)^n\right)}$$

   (b) *En déduire qu'il existe un réel C tel que $\sin x-x\sim_0 Cx^3$.*

   On applique le théorème de Taylor-Young à la fonction sin de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o_0(x^3)$$

   donc $\boxed{\sin x-x\sim_0\dfrac{x^3}{6}}$.

6. *Pour tout α non nul, donner un équivalent de $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$.*

   Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On a

$$u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha=\sin^\alpha u_n-u_n^\alpha=u_n^\alpha\left(\left(1-\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^2)\right)^\alpha-1\right)$$

   donc

$$\boxed{u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha\sim-\frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2}}$$

7. *Déterminer un équivalent de u_n.*

   D'après la question précédente, en prenant $\alpha=-2$, on a

$$u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2}\sim\frac{1}{3}.$$

   La question 2 permet donc de conclure que $u_n^{-2}\sim\dfrac{n}{3}$ donc

$$\boxed{u_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Exercice 5 : L'objectif de cet exercice est de généraliser le théorème des accroissements finis en prouvant que, pour tout entier n, si $f\in\mathcal{C}^n\left([a,b],\mathbb{R}\right)\cap\mathcal{D}^{n+1}\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$, alors :

$$\exists c\in]a,b[:\ f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

1. *On peut démontrer ce résultat facilement sous des hypothèses plus faibles.*

   – *Rappeler le théorème de Taylor reste intégral avec ses hypothèses.*

   Soit $n\in\mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a\in I$ alors

$$\forall b\in I,\ f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

   – *Inégalité de la moyenne*

   Soit g continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\exists c\in[a,b]\ :\ g(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt$$

   La fonction g est continue sur le segment $[a,b]$; elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc deux réels m et M tels que $g\left([a,b]\right)=[m,M]$.

Pour tout réel t, on a $m \leq g(t) \leq M$ donc (les bornes étant dans le bon sens), on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \in [m, M] = g([a,b])$. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que :

$$\boxed{g(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$$

– *On suppose ici que $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\exists c \in]a,b[:\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

On pourra s'inspirer de l'inégalité de la moyenne.
D'après le théorème de Taylor reste intégral, on a :

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée sur le segment $[a,b]$. Posons

$$m = \min_{[a,b]} f^{(n+1)} \qquad \text{et } M = \min_{[a,b]} f^{(n+1)}$$

La fonction $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$ étant positive sur le segment $[a,b]$, on a

$$\forall t \in [a,b], \quad \frac{(b-t)^n}{n!} m \leq \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{(b-t)^n}{n!} M$$

donc

$$m\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \leq M\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\,.$$

Comme $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, on en déduit que

$$m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Le réel $\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ appartient donc à $[m, M]$. Comme la fonction $f^{(n+1)}$ est continue et atteint les valeurs m et M, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de $c \in\in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}.}$$

2. *On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$*

   (a) *Étudier la dérivée de la fonction*

   $$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

   La fonction f étant $n+1$-fois dérivables, pour tout k in $[\![0,n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a,b]$.
   La fonction g est donc dérivable sur $[a,b]$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.
   Soit $x \in [a,b]$, on a par telescopage :

   $$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} k(b-x)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \end{aligned}$$

   (b) *Trouver des constantes A et B telles que la fonction*

   $$h : x \mapsto g(x) + A + B\frac{(b-x)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

   s'annule en a et b.
   Si on prend

   $$\boxed{A = -g(b) \text{ et } B = \frac{(n+1)!\,(g(b)-g(a))}{(b-a)^{(n+1)}},}$$

   alors h s'annule en a et b.

   (c) *Conclure.*
   La fonction h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'annule en a et b. Le théorème de Rolle permet donc d'affirmer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$h'(c)=0$. Or,

$$h'(c)=g'(c)-B\frac{(b-c)^n}{n!}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n-\frac{(n+1)!\,(g(b)-g(a))}{(b-a)^{(n+1)}}\frac{(b-c)^n}{n!}$$

Comme $b\neq c$, on en déduit que :

$$f^{(n+1)}(c)=\frac{(n+1)!\,(g(b)-g(a))}{(b-a)^{(n+1)}}$$

Or, $g(b)-g(a)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ donc

$$\boxed{f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}.}$$

3. Utilisation : soit $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)<0<f(b)$ et telle que $f'>0$ sur $[a,b]$.

(a) *Prouver que f s'annule en un unique point $\alpha\in[a,b]$ et que le réel $K=\dfrac{\max\limits_{[a,b]}|f"|}{2\min\limits_{[a,b]}|f'|}$ est bien défini*

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $[a,b]$, il existe $\alpha\in[a,b]$ tel que $f(\alpha)=0$.
Comme f' est strictement positive, f est strictement croissante donc f ne s'annule qu'en α.
Les fonctions $|f'|$ et $|f"|$ sont continues sur le segment $[a,b]$ elles y sont donc bornées et atteignent leurs bornes. Les réels $\max\limits_{[a,b]}|f"|$ et $\min\limits_{[a,b]}|f'|$ sont donc bien définies et $\min\limits_{[a,b]}|f'|>0$. Le réel K est donc bien défini.

(b) *Soit $x\in[a,b]$. On pose $y=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Donner une interprétation graphique de y et montrer que $|y-\alpha|\leq K|x-\alpha|^2$.*

La tangente de f en x est le graphe de la fonction $t\mapsto f(x)+f'(x)(t-x)$.
Cette fonction s'annule en $t=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Le réel y est donc l'abscisse du point d'intersection de la tangente de f en x et de l'axe des abscisses.
On a $y-\alpha=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha$.
D'après la question 1, il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$f(\alpha)=f(x)+f'(x)(\alpha-x)+\frac{(\alpha-x)^2}{2}f"(c)$$

Comme $f(\alpha)=0$ et $f'(x)\neq0$, on en déduit que

$$0=\frac{f(x)}{f'(x)}+\alpha-x+\frac{(x-\alpha)^2}{2f'(x)}f"(c)$$

i.e.

$$y-\alpha=\frac{(x-\alpha)^2}{2f'(x)}f"(c)$$

donc

$$\boxed{|y-\alpha|\leq K|x-\alpha|^2}$$

(c) *Prouver l'existence de $\varepsilon>0$ tel que le suite définie par $u_0\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=u_n-\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ est bien définie et converge vers α.*

On pourra montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha|\leq\dfrac{(K\varepsilon)^{2^n}}{K}$.

Soit $\varepsilon=\min\left(\dfrac{1}{K},|\alpha-a|,|\alpha-b|\right)$.
On a alors $\varepsilon>0$ et $[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]\subset[a,b]$.
Montrons que si $u_0\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$, alors la suite u est bien définie.
Pour cela, montrons par récurrence que $u_n\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$.
Pour $n=0$, c'est le cas par hypothèse.
Supposons que pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait $u_n\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$, alors, d'après la question précédente, on a

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq K|u_n-\alpha|^2\leq K\varepsilon^2$$

Comme $K\varepsilon<1$, on en déduit que

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\varepsilon$$

i.e. $u_{n+1}\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$.
La suite u est donc bien définie.
Montrons par récurrence que $|u_n-\alpha|\leq\dfrac{(K\epsilon)^{2^n}}{K}$.
Pour $n=0$, c'est le cas car, par hypothèse, $|u_0-c|\leq\varepsilon$.
Supposons que pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait $|u_n-\alpha|\leq\dfrac{(K\epsilon)^{2^n}}{K}$, alors, d'après la question précédente, on a

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq K|u_n-\alpha|^2\leq K\left(\frac{(K\epsilon)^{2^n}}{K}\right)^2=\frac{(K\epsilon)^{2^{n+1}}}{K}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n-\alpha|\leq\frac{(K\epsilon)^{2^n}}{K}}$$

Comme $K\varepsilon<1$, on en déduit que la suite u converge vers α.