TD 16 : Mouvements dans un champ de force conservatif

1 Paramètre gravitationnel standard de la Terre

1. Montrer que la connaissance de la période d'un satellite terrestre en orbite circulaire à l'altitude z et de la troisième loi de Kepler permet de déterminer $\mu = \mathcal{G}M_T$, le produit de la constante de gravitation universelle par la masse de la Terre.

2. L'expérience de Cavendish permet de déterminer la valeur de $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Montrer qu'on peut alors déterminer la masse de la Terre.

3. On rappelle qu'un satellite géostationnaire est en orbite à une altitude approximative de $36 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ et que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. Calculer le paramètre gravitationnel standard de la Terre, sa masse puis sa masse volumique moyenne.

4. Donner une autre méthode pour déterminer μ en utilisant la valeur de champ de gravité terrestre à la surface du globe g.

2 Vitesse d'un satellite à son périgée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1\,\mathrm{t}$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\,\mathrm{km}$ au périgée et $d_A = 35{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.

5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

3 Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite

On étudie le mouvement d'un satellite de masse m en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre, ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1. Dans quel référentiel se place-t-on pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre ?

2. Énergie d'un satellite artificiel en orbite.

2.a. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite en orbite à une distance r du centre de la Terre. En déduire son expression en fonction de son altitude z.

2.b. Retrouver l'expression de la vitesse en orbite à une altitude z.

2.c. En déduire l'expression de l'énergie cinétique puis de l'énergie mécanique E_m du satellite sur son orbite à l'altitude z.

2.d. Calculer cette énergie mécanique pour $z = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ et $m = 6{,}0\,\mathrm{t}$.

3. Énergie nécessaire au lancement d'un satellite. Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie $\Delta E_m = E_m - E_{m0}$ où E_{m0} est l'énergie qu'il a au point O.

3.a. Dans le référentiel géocentrique, la Terre peut être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe à une vitesse angulaire Ω. Préciser l'axe de rotation. Est-il fixe ? Que vaut la vitesse angulaire ?

3.b. En déduire l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen en fonction de Ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ.

3.c. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale E_{m0} du satellite posé au sol au point O.

3.d. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?
- Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$;
- Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28{,}5°$;
- Kourou en Guyane française : $\lambda = 5{,}23°$.

3.e. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.

3.f. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

4 Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite - Freinage par l'atmosphère

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

1. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.

2. En déduire que le mouvement du satellite est plan.

3. Montrer que cela permet de définir une constante des aires C dont on donnera l'expression.

4. On suppose que le satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer que son mouvement est uniforme.

5. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r le rayon de l'orbite du satellite.

6. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire. Faire l'application numérique pour un satellite situé sur une orbite basse à $1{,}0 \cdot 10^3\,\text{km}$ d'altitude.

7. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m et r.

8. Même question pour l'énergie potentielle E_p du satellite. Donner la relation entre E_c et E_p.

9. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m et les relations de E_m avec E_p et E_c.

Les satellites en orbite basses subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Un satellite situé sur une orbite à $1{,}0 \cdot 10^3\,\text{km}$ d'altitude descend d'environ $2\,\text{m}$ par jour. On cherche à modéliser ces observations. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement proportionnelle à la masse du satellite et sa vitesse au carré : $\vec{f} = -\alpha m \vec{v}$ où α est un coefficient de frottement. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des différentes énergies en fonction de r restent valables mais r varie lentement dans le temps.

10. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r.

11. Sans résoudre, montrer que r ne peut que diminuer.

12. En déduire un résultat surprenant sur l'évolution de la vitesse du satellite.

5 Caractéristique d'une météorite

On repère une météorite très éloignée du Soleil et on mesure sa vitesse $\vec{v}_0$. On observe que $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ est portée par une droite Δ qui est située à une distance b du centre O du Soleil. On suppose qu'à l'instant où on la repère (instant initial), la météorite est si éloignée que son énergie potentielle d'interaction gravitationnelle avec le Soleil est négligeable. On note m la masse de la météorite, M_S celle du Soleil, R_S le rayon du Soleil et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

1. Faites un schéma de la situation initiale.

2. Montrer que l'énergie mécanique de la météorite est une intégrale première du mouvement. Déterminer sa valeur initiale.

3. Montrer que le moment cinétique par rapport à O de la météorite est une intégrale première du mouvement. Déterminer sa valeur initiale.

4. Rappeler les conséquences de la conservation du moment cinétique.

5. Définir les coordonnées polaires adaptés et établir l'expression du moment cinétique à un instant t quelconque.

6. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective.

7. Exprimer cette énergie potentielle effective en fonction de m, v_0, b, du produit GM_S et de la distance r.

8. Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective. En déduire la nature bornée ou non de la trajectoire de la météorite.

9. Déterminer la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de v_0, b et du produit GM_S.

10. À quelle condition sur r_{min} la météorite n'ira pas toucher la surface du Soleil ?

6 Modèle de bohr de l'atome d'hydrogène

Pour expliquer le spectre de raies de l'atome d'hydrogène observées expérimentalement, N. Bohr a proposé un modèle qui s'appuie sur les hypothèses suivantes : dans un référentiel galiléen lié au noyau O,

1. l'électron décrit une trajectoire circulaire sur laquelle il ne rayonne pas d'énergie ;
2. l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de lumière lorsqu'il change de trajectoire circulaire ;
3. le module du moment cinétique de l'électron est quantifié et ne peut prendre que des valeurs discrètes vérifiant la relation :

$$L_{O_n} = n\frac{h}{2\pi} ,$$

   où n un nombre entier naturel non nul et h la constante de Planck.

Une orbitale électronique correspond à une valeur de l'entier n. Elle est caractérisée par un rayon r_n, une vitesse v_n et une énergie mécanique $E_m(n)$.

Ce modèle semi-classique n'est pas complètement satisfaisant, mais il prédit le spectre de raies de l'atome d'hydrogène. À ce titre, il a eu son heure de gloire et a permis de banaliser l'idée que la quantification des grandeurs physiques est nécessaire à l'échelle atomique.

On rappelle qu'un atome d'hydrogène est constitué d'un noyau (charge e, masse m_p) et d'un électron (charge e, masse m_e), et on donne les valeurs numériques utiles pour cet exercice : masse de l'électron : $m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$; charge du proton $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; constante de Planck : $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$; célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

1. Rappeler l'expression de la force d'interaction exercée par le noyau sur l'électron et de l'énergie potentielle dont elle dérive.

2. Utiliser le fait que les orbitales sont circulaires pour exprimer le carré v_n^2 de la vitesse de l'électron en fonction de la distance r_n.

3. Utiliser la quantification du moment cinétique pour exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de n, h, m_e, e.

4. Calculer sa valeur pour $n = 1$.

5. Exprimer l'énergie mécanique $E_m(n)$ de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme

$$E_m(n) = -\frac{A}{n^2}\ .$$

Donner l'expression et la valeur numérique de A, en électron-volts (on rappelle que $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$).

6. Sachant que le passage d'un niveau d'énergie $E_m(n_1)$ à un autre $E_m(n_2)$ se traduit par l'émission d'un photon de fréquence ν telle que $\Delta E = h\nu$, en déduire que les longueurs d'onde λ émises vérifient :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)\ .$$

On rappelle que $\nu = c/\lambda$, où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. On donnera l'expression de la constante de Rydberg R_H ainsi que sa valeur numérique.

7. Quelles sont les longueurs d'onde dans le visible pour les séries de Lyman ($n_2 = 1$) et de Balmer ($n_2 = 2$) ?