TD 29 - Matrices

Ex 1:

1) Comme $rg(A)=1$, $Im(A)$ de dim 1, il existe donc $C \in M_{n1}(\mathbb{K})$ tq :

$$Im(A) = \mathbb{K}C$$

Comme $(c_1, \dots, c_p) \in (Im\, A)^p$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad C_i(A) = \lambda_i C$$

Donc :

$$A = C\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)}_{L \in M_{p1}(\mathbb{K})}$$

$$CL = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} (\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 & \cdots & a_1\lambda_p \\ a_2\lambda_1 & & a_2\lambda_p \\ \vdots & & \\ a_n\lambda_n & \cdots & a_n\lambda_p \end{pmatrix}$$

3) $\mu = Tr(LC)$

$= Tr(CL)$

$= Tr(A)$

Ex 2:

1) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

<u>Analyse:</u>

Supp qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{K})$ tq

$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(M) = Tr(AM)$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$\varphi(E_{ij}) = Tr(AE_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & | & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \begin{matrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad Tr(AE_{ij}) = a_{ji}$$

$$AE_{ij} = \left(\sum_{1\leq k,\ell\leq n} A_{k\ell} E_{k\ell}\right) E_{ij}$$

$$= \sum_{1\leq k,\ell\leq n} A_{k\ell} \underbrace{E_{k\ell} E_{ij}}_{\sigma_{\ell i} E_{kj}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ki} E_{kj}$$

$$\underset{\varphi(E_{ij})}{\underset{\shortparallel}{Tr(AE_{ij})}} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \underbrace{Tr(E_{kj})}_{\sigma_{kj}} = A_{ji}$$

Ainsi $A = \left(A_{ij} = \varphi(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\right)$

Synthèse :

Soit $A = \left(A_{ij} = \varphi(E_{ji})\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Mq $\forall M \in M_n(\mathbb{K}) : \varphi(M) = Tr(AM)$

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$

On a : $M = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} M_{k\ell} E_{k\ell}$

On a : $\varphi(M) = \varphi\left(\sum_{1\leq k,\ell\leq n} M_{k\ell} E_{k\ell}\right)$

$$= \sum_{1\leq k,\ell\leq n} M_{k\ell}\, \varphi(E_{k\ell}) \quad \varphi \text{ lin}$$

$$= \sum_{1\leq k,\ell\leq n} M_{k\ell} A_{\ell k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} M_{k\ell} A_{\ell k}\right)$$

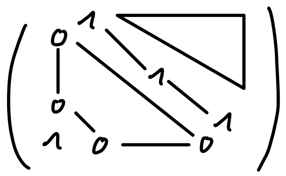
$$= \sum_{k=1}^{n} (MA)_{kk}$$

$$= Tr(MA)$$

$$= Tr(AM)$$

$Tr(J_r M) = 0$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en prenant 

$r = 2 \quad n = 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$

Il existe $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ tq

$$\varphi \neq 0 \text{ et } H = \operatorname{Ker} \varphi$$

D'après 1, il existe $A \in M_n(\mathbb{K})$ tq :

$$\varphi : M \mapsto Tr(AM)$$

càd $H = \{ M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tq } Tr(AM) = 0 \}$

Soit r le rang de A

A et J_r sont équivalents alors il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = Q^{-1} J_r P$

Ainsi :

$$H = \{ M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tq } Tr(Q^{-1} J_r P M) = 0 \}$$

Or $Tr(Q^{-1} J_r P M) = 0$

$\Leftrightarrow Tr(J_r P M Q^{-1}) = 0$

Or il existe $R \in GL_n(\mathbb{K})$ tq : $Tr(J_r R) = 0$

Donc $P^{-1} R Q \in H$

De plus $P^{-1} R Q \in GL_n(\mathbb{K})$ car $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par $\times$.

Ex 3 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $\begin{cases} f^3 + f = 0 \\ f \neq 0 \\ f \text{ non bijective} \end{cases}$

1) Evident

2) Mq $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + Id) = E$

. $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$

. $\mathrm{Ker}(f^2 + Id) \neq \{0\}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f^2 + Id)$

On a : $f(x) = 0$

$f^2(x) + x = 0$

donc $f^2(x) = 0$ (f lin)

$f^2(x) = -x$

donc $x = 0$

$\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}(f^2 - Id)$ sont en somme directe.

Soit $x \in E$

On cherche $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, f \times \mathrm{Ker}(f^2 + Id)$ tq $x = x_1 + x_2$

$f(x) = f(x_2)$ car $x_1 \in \mathrm{Ker}\, f$

De plus $f^2(x_2) = -x_2$

donc $f^2(x) = f^2(x_1) = -x_2$

On pose $x_2 = f(x)$

$x_1 = f^2(x) + x$

On a $x = x_2 + x_1$

Mq $x_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ et $x_2 \in$

Ex 4:

3) Soit $e_2 \in \mathrm{Ker}(f^2+Id)$ tq $e_2 \neq 0$

Mq $(e_2, f(e_2))$ libre

On la suppose liée

Comme $e_2 \neq 0$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tq

$$f(e_2) = \lambda e_2$$

puis $f^2(e_2) + e_2 = 0 = \lambda^2 e_2 + e_2$

$$= (\lambda^2+1) e_2$$

$e_2 \neq 0$ donc $\lambda^2+1 = 0$ IMPOSSIBLE car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

4) Comme $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f^2+Id) \neq \{0\}$,

il existe $e_1 \in \mathrm{Ker} f \setminus \{0\}$

$e_2 \in \mathrm{Ker}(f^2+Id) \setminus \{0\}$

On pose $e_3 = -f(e_2)$

Mq (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

Comme $\#(e_1, e_2, e_3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Mq (e_1, e_2, e_3) est libre

On a (e_1) famille libre de $\mathrm{Ker} f$

(e_2, e_3) famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2+Id)$

Mq $e_3 \in \mathrm{Ker}(f^2+Id)$

$(f^2+Id)(f(e_2)) = f((f^2+Id)(e_2)) = 0$

Comme $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker}(f^2+Id) = \{0\}$, (e_1, e_2, e_3) est libre

A FAIRE : le faire à la main

On a : $\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = -e_3$ car $e_3 \in \mathrm{Ker}(f^2+Id)$

Ex 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Inverser A_2, A_3, A_4 à faire

$$f : M_{n1}(\mathbb{K}) \to M_{n1}(\mathbb{K})$$
$$X \mapsto AX$$

En notant $(X_1, \dots, X_n)$ la base canonique de $M_{n1}(\mathbb{K})$

On a :

$$f(E_1) = E_1$$
$$f(E_2) = 2E_1 + E_2$$
$$f(E_3) = 3E_1 + 2E_2 + E_3$$

$$f^{-1}(E_1) = E_2$$
$$E_2 = f(E_1) - 2E_1$$
$$= f(E_2 - 2E_1)$$

$$f^{-1}(E_2) = E_2 - 2E_1$$
$$E_3 = f(E_3) - 3E_1 - 2E_2$$
$$= f(E_3) - 3f(E_1) - 2f(E_2 - 2E_1)$$
$$= f(E_1 - 2E_2 + E_3)$$

Mq $\forall k \in [\![3;n]\!] : f^{-1}(E_k) = E_k - 2E_{k-1} + E_{k-2}$

Soit $k \in [\![3;n]\!]$

$$f(E_k - 2E_{k-1} + E_{k-2}) = \sum_{\ell=1}^{k} (k+1-\ell) E_\ell - 2\sum_{\ell=1}^{k-1} (k-\ell) E_\ell + \sum_{\ell=1}^{k-2} (k-1-\ell) E_\ell$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k-1} \Big(k+1-\ell-2(k-\ell)+(k-1-\ell) \Big) E_\ell$$

$$+ E_k + 2E_{k-1} - 2E_{k-1} = E_k$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

2)

$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$P_k = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^k$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} X^{i-1}$$

$$\mathcal{B}_c = (\underbrace{X^0}_{e_1}, \underbrace{X^1}_{e_2}, \underbrace{X^2}_{e_3}, \ldots, \underbrace{X^{n-1}}_{e_n})$$

$P_0 = e_1$

$P_1 = \binom{1}{0} e_1 + \binom{1}{0} e_0$

$P_2 = \binom{1}{0} e_1 + \binom{2}{1} e_2 + \binom{3}{2} e_3$

$\vdots$

$P_k = \binom{1}{0} e_1 + \binom{2}{1} e_2 + \cdots + \binom{k}{k-1} e_k$

$P_{B_c, (P_0, \dots P_{n-1})}$

Donc $A' = P_{(P_0, \dots, P_{n-1}), B_c}$

$$e_{j+1} = X^j = (1 + X - 1)^j$$
$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (1+X)^k (-1)^{j-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P_k$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-k} P_k$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_j = \sum^{j-1} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} e'_{k+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{j-i} (-1)^{j-i} e'_i$$

Ex 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$f(e_1) = 0$
$f(e_2) = e_1$
$f(e_3) = e_2$
$f(e_4) = e_3$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A et B sont semblables, alors $A - I_3$ et $B - I_3$ aussi

$B = P^{-1} A P$

$$\begin{aligned} B - I_4 &= P^{-1} A P - I_4 \\ &= P^{-1} A P - P^{-1} P \\ &= P^{-1} (A - I_4) P \end{aligned}$$

Or $A - I_4$ est de rang 2

$B - I_4$ est de rang 3

Donc pas semblables.

Soit f l'endo canoniquement associé à B

càd $f : M_{41}(\mathbb{K}) \to M_{41}(\mathbb{K})$

$X \mapsto BX$

On cherche une base $(X_1, X_2, X_3, X_4) \in M_{41}(\mathbb{K})$

tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On veut : $\begin{cases} f(X_1) = X_1 \\ f(X_2) = X_1 + X_2 \\ f(X_3) = X_2 + X_3 \\ f(X_4) = X_3 + X_4 \end{cases}$

$f(X_1) = X_1$

$(f - Id)(X_2) = X_1$

$(f - Id)(X_3) = X_2$

$(f - Id)(X_4) = X_3$

Nécessairement $X_1 \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(f - Id)$

$$(B - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

$$= (2N + 3N^2 + 4N^3)^3$$

$$= 8N^3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\,(B - I_4)^3 = \mathrm{Vect}\left(\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X_1 est nécessairement proportionnel à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On prend $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= (B - I_4)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

On prend :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = (B - I_4)(X_4)$$

$$X_2 = (B - I_4)(X_3)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que (X_1, X_2, X_3, X_4) libre

Ce sera alors une base de $M_1(\mathbb{K})$

Par construction :

$$f(X_3) = X_3 + X_2$$

$$f(X_4) = X_4 + X_3$$

$$f(X_2) = ?$$

$$\underset{\substack{\| \\ X_1}}{f(X_1)} = ?$$

$$(f - Id)(X_2) = (f - Id)^3(X_3) = X_1$$

$$f(X_2) = X_2 + X_1$$