



Numéro de place

5 0 8 4 7 1

Numéro d'inscription

5 3 8 9 9

Signature

Nom

S H O F F R A Y

Prénom

M I L S

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Physique - durée 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

01 / 02

I - La onde au pñino

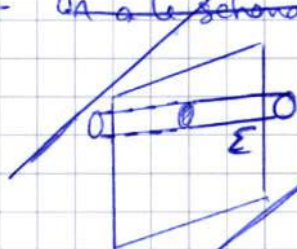
A - Un mirat par les ondes éleclromagnétiques

1. Les équations de Maxwell sont: - Maxwell Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ - Maxwell Faraday: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - Maxwell flux / Thompson: $\text{div } \vec{B} = 0$ - Maxwell Ampère: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans une zone vide de charges et de courants on a $\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$ donc:- Maxwell Gauss: $\text{div } \vec{E} = 0$ - Maxwell Ampère: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - Maxwell flux: $\text{div } \vec{B} = 0$ - Maxwell Faraday: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 2. Le champ éleclrique vérifie $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$ $\rightarrow - \Delta \vec{E} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ avec $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, où c est la vitesse de propagation.3. On a le champ éleclrique: $\vec{E}_i(t, x) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ qui se propage selon \vec{u}_x et est polarisé selon \vec{u}_y . En notation complexe: $\vec{E}_i(t, x) = E_0 \exp(i\omega t - ikx) \vec{u}_y$ et $\Delta \vec{E}_i = -k^2 \vec{E}_i = - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2}$ donc on a la relation suivante:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ puis la relation de dispersion } k = \frac{\omega}{c}$$

4. soit un conducteur de conductivité γ ce dernier est considéré comme parfait si $\gamma \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, comme d'après la loi d'Ohm locale $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ donc il n'y a pas propagation de \vec{E} dans le conducteur, $\vec{E} = \vec{0}$

5- On a la schéma suivant :



La distribution de charge est invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z et symétrique par rapport au plan contenant O et \vec{u}_x .
Donc le champ \vec{E} est symétrique par rapport au plan contenant O et \vec{u}_x .

et $\vec{E}(x, y, z) = E(x, z) \vec{u}_y$. Le théorème de Gauss donne $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$.

Le champ \vec{E}_i étudié est polarisé selon \vec{u}_y mais le vecteur normal à l'interface est \vec{u}_x . \vec{E}_i ne vérifie donc pas la relation de passage.

On a donc en considérant \vec{E}_i et \vec{E}_r que $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$

car le champ électrique des ondes \vec{E}_t est $\vec{E}_t = 0$

et on a des ondes planes progressives monochromatiques due la relation de structure suivante :

$$\vec{B}_i = \frac{k \lambda \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \lambda \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_r = \frac{E_{0r}}{c} \cos(\omega' t - k'x) \vec{u}_z$$

donc $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{u}_x = 0$ car $\vec{j} = \delta \vec{E}_i = 0$

Ainsi on trouve que $\omega = \omega'$ et $k = k'$ ou $k' = +k$ et que $E_{0r} = E_0$.

Ainsi \vec{E}_r est une onde se propageant selon les x et décroissant et polarisée selon \vec{u}_y .

$$\begin{aligned} \delta. \vec{E}_i + \vec{E}_r &= \vec{E} = E_0 (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) \vec{u}_y \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{(\omega + \omega)t + (k - k)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega - \omega)t + (k + k)x}{2}\right) \vec{u}_y = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_y \end{aligned}$$

On a donc le champ électrique résultant $\vec{E} = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_y$

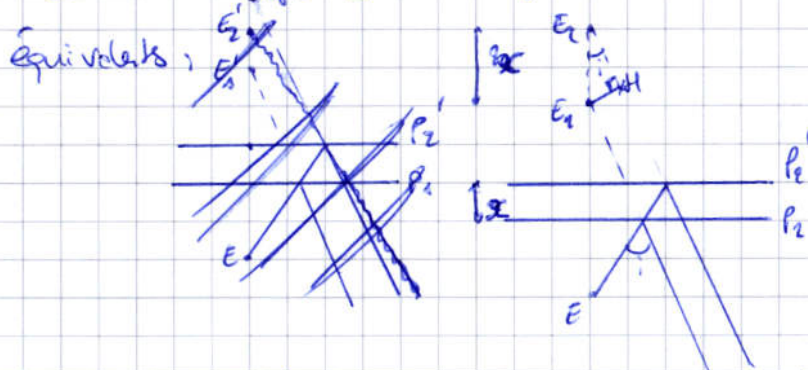
$$\text{et } \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z$$

On remarque que les progressions temporelles et spatiales sont découpées on a donc des ondes stationnaires. \vec{E} et \vec{B} sont stationnaires par les $x \in \mathbb{R}$.

7. On peut lire sur la figure 3 que la longueur d'onde de U est $\lambda = 1,4 \text{ cm}$
 et $\lambda = \frac{c}{f}$ d'où $f = \frac{c}{\lambda} = 21,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 21,4 \text{ GHz}$

9. P_1 et P_2 servent à réfléchir les ondes et S sert à séparer le faisceau émis par E .
 Ce montage est analogue au Michelson en lame d'air.

10. Comme ce dispositif est analogue au Michelson à lame d'air on a le schéma



le théorème de Malus et
 le principe de retard
 (max de la lumière nous)

d'où on se ~~donne~~ $\delta(\varphi) = 2x \cos i$ Ainsi que $U(x) = U_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(\varphi) \right) \right) =$
 $U_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2x \cos i \right) \right)$ où U_0 est l'amplitude de U et λ la longueur d'onde.

À l'aide des mesures on peut déterminer que $U_0 = 4,4 \text{ V}$ et $\lambda = 1,35 \text{ cm}$
 ainsi on trouve que $f \approx 22 \text{ GHz}$

11. le contraste $C = \frac{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}$ ici $U_{\text{max}} = 6,6 \text{ V}$ et $U_{\text{min}} = 2,2 \text{ V}$

où d'où $C = \frac{1}{2}$ ceci peut être due au fait que les plaques P_1 et P_2 ne sont pas
 des conducteurs parfaits.

12. dans le cas de la figure 1 on a un conducteur parfait où $\vec{J}_s = \gamma \vec{E}$ d'après
 la loi d'ohm locale, or $\gamma \rightarrow \infty$ d'où $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{J}_s = \vec{0}$.

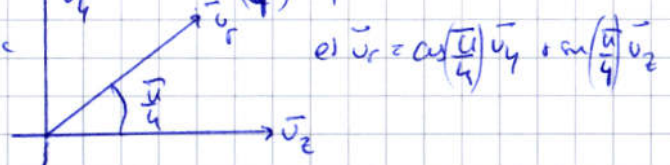
La source physique de \vec{E}_r est la densité surfacique de charge σ .

13. Dans le cas n°1 le champ électrique présent pour $x > 0$ est identique à \vec{E} d'où
 pour $x > 0$ $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$

Dans le cas n°2 pour les $x > 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ car les barreaux sont perpendiculaires à la
 polarisation de \vec{E} .

Dans le cas n°3 pour les $x > 0$ $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y$

à effet les barreaux sont orientés selon \vec{u}_r avec



ainsi $\vec{E} = \frac{E_0}{r^2} (\cos(\omega t - kr) \vec{u}_r + \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta)$ pour $\cos \omega t > 0$

14. Ce dispositif est analogue aux filtres polarisateurs utilisés en travaux pratiques.

B- L'origine des péchies

16. Le plasma reste localement neutre à l'absence de l'onde la densité volumique de électrons du plasma est constante.

17. on considère un électron [e] soumis à $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ dans un référentiel supposé galiléen

avec le principe fondamental de la dynamique nous avons : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$

puis on a $m_e i\omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$ et $\vec{j} = -ne e \vec{v}_e = \frac{ne e^2}{im_e \omega} \vec{E} = \underline{\underline{\Theta_B}} \vec{E}$

avec $\underline{\underline{\Theta_B}} = \frac{ne e^2}{im_e \omega} = -i \frac{ne e^2}{m_e \omega}$

18. On a les équations de Maxwell : Maxwell Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, Maxwell Gauss : $\vec{\text{div}} \vec{E} = 0$

et Maxwell Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

qui donnent : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \underline{\underline{\Theta_B}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{ne e^2}{im_e \omega} i\omega \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 (\omega)^2 \vec{E}$

$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{ne e^2}{m_e \omega} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$

Ainsi on trouve que $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{ne e^2}{m_e \omega} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} = (ik)^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

puis $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne e^2}{m_e \epsilon_0}}$ la pulsation plasma.

19. l'onde se propage dans le plasma si et seulement si k est réel donc si

$\omega^2 - \omega_p^2 > 0$ c'est à dire $\omega > \omega_p$

20. Dans ce cas on trouve que $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ et $v_g = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

ainsi $v_g = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

21. La vitesse de groupe dépend de ω , le plasma est donc un milieu dispersif

Ainsi on ne peut émettre une onde car l'onde n'est pas forcée d'entrer jusqu'à la Terre

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

I- La chose aux périodes

B- L'origine des périodes

$$22. v_g(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1-0}} = c \quad \text{car} \quad t(\omega) = \frac{L}{c}$$

On peut interpréter cela comme le temps mis par l'onde, dans le vide, pour faire la distance astre - Terre.

$$23. \text{Dans le cas d'une propagation } t(\omega) = \frac{L}{v_g(\omega)} - \frac{L}{c} = \frac{L}{c} \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\omega c} - 1 \right)$$

on a la propagation dans $\omega^2 > \omega_p^2$ et $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1$

$$\text{puisque } t(\omega) = \frac{L}{\omega c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1 \quad \text{donc} \quad t(\omega) < 0$$

$$\text{dans le cas d'une propagation } t(\omega) = \frac{L}{v_g(\omega)} - \frac{L}{c} \quad \text{or} \quad v_g(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$\text{Dans le cadre d'une propagation } t(\omega) = \frac{L}{v_g(\omega)} - \frac{L}{c} = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \right)$$

$$\text{or } \omega^2 > \omega_p^2 \quad \text{car} \quad 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 < 0$$

donc $t(\omega) < 0$ et $t(\omega)$ représente l'écart de temps entre une propagation dans le vide et une dans un plasma pour une pulsation ω .

$$24. \text{ pour } f \sim 10^9 \text{ Hz} \quad \text{donc} \quad \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{ainsi} \quad t(\omega) = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1 \right)$$

$$= t(f) = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{f^2}} - 1 \right) \quad \text{or} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{donc} \quad \frac{\omega_p^2}{f^2} \ll 1$$

$$\text{et} \quad t(f) \approx \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{f^2} - 1 \right) = \frac{L}{2c} \frac{\omega_p^2}{f^2} = \frac{L}{2c} \frac{\omega_p^2}{\frac{4\pi^2}{f^2}} = \frac{A}{f^2} = \frac{L}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{10e^2}{\epsilon_0} \approx \frac{1}{f^2}$$

$$\text{or } Df = \int_{f_0}^L \text{red} = \epsilon L \quad \text{donc} \quad t(f) = \frac{\epsilon^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{A M}{f^2} = A \frac{DM}{f^2}$$

$$\text{avec} \quad A = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_0}$$

25. on a trouvé que $A = \frac{e^2}{8\pi^2 c m_e \epsilon_0} = 1,34 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \mu^{-1} \text{ cm}^3$

26. On observe une décroissance de la fréquence avec ce qui semble être du $\frac{1}{f_0}$ car cela semble coïncider avec la figure 6.

27. on mesure pour $f = 1480 \text{ MHz}$ $\tau(f) = 200 \text{ ns}$

donc $DH = \frac{\tau(f) f^2}{A} = 3,7 \cdot 10^{24} \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3} = 1,06 \cdot 10^3 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}$

28. ici on a la densité $DH \gg 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ donc on peut exclure l'énergie extra-galactique des pénétrations.

C- Le feu à micro onde

29. Les champs E_x , E_y et E_z sont des champs réels et les fonctions cos et sin se conjuguent mais ne divergent au voisinage de l'infini que k_x , k_y et k_z doivent prendre des valeurs discrètes.

30. l'espace des la cavité étant omniballé au vide on a la relation de structure entre \vec{E} et \vec{B} : $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z$ avec l'amplitude maximale $B_0 = \frac{E_0}{c}$

31. on a le vecteur de Poynting : $\vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et la puissance totale reçue :

$$P = \langle \vec{T} \cdot \vec{u}_x \rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

on mesure que l'énergie transmise dépend de la position des la cavité.

32. Dans le cas où $\epsilon_0 f \ll \sigma$ Maxwell Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{et en simplifiant : } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ or } f \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ donc } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \mu_0 \vec{J}$$

pour le jour micro-ondes $\omega = 9,45 \text{ GHz}$ et $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$
 or $\epsilon_0 = 0,021 \ll 10^6$ donc la conductivité est négligée.

35. on a des $\vec{\text{rot rot}} \vec{B} = -\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{J} = \mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 donc \vec{B} vérifie $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ cette équation est analogue à celle
~~de l'équation de Schrödinger~~ de l'équation de Schrödinger qui ~~modélise~~ et l'énergie d'un
 phénomène ondulatoire car les ondes sphériques et cylindriques sont présentes.

36. $\vec{B}(u, t) = \underline{f}(u) \exp(iut) \vec{u}_z$ donc $\Delta \vec{B} = \exp(iut) \frac{\partial^2 \underline{f}(u)}{\partial u^2} \vec{u}_z$

$$\text{et } \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \mu_0 \sigma \underline{f}(u) \exp(iut) \vec{u}_z$$

$$\text{donc on a } \frac{\partial^2 \underline{f}(u)}{\partial u^2} = i \mu_0 \sigma \underline{f}(u) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\delta} \underline{f}(u) \text{ avec } \delta = \frac{1}{\omega \mu_0 \sigma}$$

en u .

$$37. \underline{f}(u) = A \exp\left(+\frac{(1-i)u}{\sqrt{2}\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{(1-i)u}{\sqrt{2}\delta}\right)$$

on ne peut pas avoir deux fois $A=0$ et $\underline{f}(u) = B \exp\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}\delta} u\right)$

$$\text{et } \vec{B}(u, t) = B \exp\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}\delta} u\right) \exp(iut) \vec{u}_z \text{ puis } B = B \exp\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}\delta} u\right) \exp(iut) \vec{u}_z$$

\vec{B} est une onde stationnaire et δ est la distance présente par onde des la conductivité.

II- Le mystère de l'éclat à éruptions de potassium

44. Le potassium a pour structure électronique $K: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$

on peut donc attendre le nombre d'oxydation $+1$ souvent associé à l'hydrogène.

47. Le chlorure A est celui de Cl_2

le D de Cl^-