Marches aléatoires

On considère un point mobile qui se déplace sur une droite. Il part du point d'abscisse 0 en $t = 0$ et on choisit à chaque instant, $t = 1, 2, 3, ...$ de se déplacer de $+1$ (vers la droite) avec une probabilité égale à p ou de -1 (vers la gauche) avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que le choix d'aller vers la droite ou vers la gauche à l'instant $t = n$ est indépendant de tous les choix précédents.

On modélise cette marche aléatoire par une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
la variable aléatoireX_n est égale à la position du mobile à l'instant $t = n$. Lorsque $p = \dfrac{1}{2}$ la marche aléatoire est dite symétrique.

I. Loi de X_n

1. On écrit $X_n = Z_1 + ... + Z_n$, où chaque Z_i représente le saut fait à l'instant i.
   Préciser la loi de la variable aléatoire Z_n. En déduire que $\dfrac{1 + Z_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2. (a) Préciser la loi de $\dfrac{n + X_n}{2}$.
   (b) En déduire l'ensemble $X_n(\Omega)$ et la loi de X_n.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_n
3. Calculer selon n et en fonction de p, la probabilité, notée π_n dans tout le problème, pour que X_n soit égale à zéro. On distinguera selon que n est pair ou non.
4. Donner un équivalent de π_n quand n tend vers l'infini.

II. Etude du retour en zéro

On note S la variable aléatoire égale au premier retour en zéro.

Autrement dit l'événement "$S = n$" est $X_n = 0, X_{n-1} \neq 0, ..., X_1 \neq 0$.

On pose $\Pi(s) = \sum_{0}^{\infty} \pi_n s^n$ et $F(s) = \sum_{1}^{\infty} P(S = n)s^n$
(F est donc la fonction génératrice de S)

Ce sont deux séries entières de rayon au moins égal à 1.

1. (a) Soit A_1 l'événement $\exists n > 0, X_n = 0$. Etablir l'égalité $F(1) = \mathbb{P}(A_1)$
   (b) En déduire que la série F est normalement convergente sur le segment $[0, 1]$
2. (a) Préciser le rayon de convergence de la série $\Pi(s)$ en fonction de p.
   (b) En utilisant les résultats classiques sur les séries entières, vérifier qu'on a
   $$\Pi(s) = (1 - 4pqs^2)^{\frac{-1}{2}}$$
   pour tout $s \in [0, 1[$
   (c) En étudiant les variation de l'application $p \mapsto p(1 - p)$ préciser pour quelles valeurs de p l'égalité de la question précédente reste vraie lorsque $s = 1$.
3. Montrer pour tout $s \in [0, 1[$ on a l'égalité
   $$\Pi(s) = 1 + \Pi(s)F(s)$$
   indication : établir $\pi_n = \sum_{1}^{n} \pi_{n-k} P(S = k)$ *pour* $n > 1$

4. En déduire la fonction F, puis démontrer que
$$P(A_1) = 2\min(p,q)$$
Préciser à quelle condition sur p l'événement A_1 est presque sûr.

5. Déterminer la probabilité de l'événement Soit $A_n = [$ on revient n fois en zéro$]$. (On pourra justifier par un argument qualitatif que $P(A_n|A_1) = P(A_{n-1})$).

6. Soit A l'événement : on revient une infinité de fois en zéro. Montrer que A est presque sur ou négligeable selon la valeur de p.

   Dans le premier cas, on dira que 0 est un état récurrent de la marche aléatoire. Dans le second cas, on dira que c'est un état transient.

7. Soit R la variable aléatoire égale au nombre de retour en zéro. Lorsque p n'est pas égal à $\frac{1}{2}$ reconnaitre la loi de cette variable et donner son espérance.

III. Etude du passage en 1

Soit T_1 la variable aléatoire égale au premier instant n pour lequel $X_n = 1$. Soit F_1 sa fonction génératrice.

1. Calculer $F_1(0)$ et $F_1'(0)$.
2. On note T_2 la variable aléatoire égale au premier instant n tel que $X_n = 2$.
   (a) Prouver l'égalité
   $$\mathbb{P}(T_2 = n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_1 = k)\mathbb{P}(T_1 = n-k)$$
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(T_1 = n+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(T_2 = n)$
   (c) Etablir enfin que $F_1(s) = qsF_1^2(s) + ps$.

3. En déduire que $F_1(s) = \dfrac{F(s)}{2qs}$
4. Montrer finalement que la probabilité de l'événement : $\exists n, X_n = 1$ est égale à : $\min(1, \dfrac{p}{q})$
5. A quelle condition sur, p, q la marche aléatoire prend elle presque sûrement :
   i toutes les valeurs positives ?
   ii toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$?
   iii toutes les valeurs un nombre (nul ou) fini de fois ? (tous les états sont transients)
   iv toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$ une infinité de fois ?(tous les états sont récurrents).

IV. Estimation asymptotique des marches aléatoires symétriques

Dans ce paragraphe, $p = \dfrac{1}{2}$. On sait donc que $X_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} Z_k$ où Z_k prend les valeurs 1 et -1 avec équiprobabilité.

On se propose de démontrer un cas de la loi des grandes déviations qui estime la "vitesse de divergence" de la suite X_n.

1. En comparant les développements en série entière de ces deux fonctions, démontrer l'inégalité valable pour tout réel t :
$$\operatorname{ch} t \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

2. Soit a un réel positif.
   (a) Démontrer pour tout réel positif u l'inégalité $\mathbb{P}(e^{uX_n} > e^{ua}) \leq \dfrac{(\operatorname{ch} u)^n}{e^{ua}}$
   (b) En déduire, par un choix judicieux de u que l'on a $P(X_n > a) \leq e^{\frac{-a^2}{2n}}$.

3. Soit c un nombre réel strictement supérieur à 1. Démontrer que la série de terme général $P(X_n > c\sqrt{2n\ln n})$ est convergente.

4. En déduire que l'événement " $X_n \leq c\sqrt{2n\ln n}$ à partir d'un certain rang" est de probabilité 1.
on pourra utiliser le lemme de Borel Cantelli

5. Terminer cette partie en dessinant un graphe plausible pour une marche aléatoire symétrique.

Le sujet se termine ici : la partie suivante est optionnelle et plus difficile.

V. Extension aux marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}^d$

Soit d un entier supérieur ou égal à 1. Soit $\mathbb{Z}^d$ l'ensemble des $d-$uplets d'entiers relatifs.
On note, pour tout i, e_i l'élément $(0,..,1,..,0)$ de $\mathbb{Z}^d$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle en $i$ème place.
On donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(Z_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ prenant les $2d$ valeurs $\pm e_i$ avec équiprobabilité.
Enfin on pose $X_n = Z_1 + ... + Z_n$.
Ainsi X_n modélise la position après n sauts d'un point mobile se situant initialement à l'origine, et se déplacant de façon équiprobable d'un point à l'un de ses voisins directs.

On cherche à répondre à la question suivante : l'origine est elle un point récurrent de la marche aléatoire X_n ?

Résultats admis :

— si x désigne un vecteur variable $x = (x_1, ..., x_n)$ et f une fonction sur $[0, 2\pi]^d$, on notera $\int_{[0,2\pi]^d} f(x)dx$ pour l'intégrale multiple $\int (\int ... \int f(x_1, .., x_d)dx_1)dx_2)....)dx_d$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur l'existence de ces intégrales.

— les théorèmes classiques du cours (continuité des séries de fonctions, $\sum\int ||$....., convergence dominée......) sont valables pour les familles sommables et les intégrales multiples.

— l'intégrale $\int_{[0,2\pi]^d} \frac{1}{||x||^a}dx$ est convergente si et seulement si $a < d$ (intégrale de Riemann en zéro)

1. Transformée de Fourier.

   Soit f une fonction de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est sommable, c'est à dire que $\sum_{x\in Z^d} |f(x)| < +\infty$. Pour $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ on pose $\widehat{f}(t) = \sum_{Z^d} f(x)e^{i<t,x>}$, où par définition, $<t, x>= \sum t_i x_i$

   Montrer que cette formule définit une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

2. Pour f et g sommables, on pose $f * g(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f(y)g(x - y)$. Montrer que $f * g$ est sommable, et que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$

3. Démontrer la formule d'inversion de Fourier, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[0,2\pi]^d} \widehat{f}(t)e^{-i<t,x>}dt$$

4. Soit μ la fonction qui vaut $\frac{1}{2d}$ pour $\pm e_i$ et zéro sinon.

   (a) Montrer que $\widehat{\mu}(t) = \frac{1}{d}\sum_1^d \cos t_k$

   (b) En déduire que l'on a $1 - \widehat{\mu}(t) \sim \frac{||t||^2}{2d}$ quand t tend vers 0 dans $\mathbb{R}^d$

5. Pour $|\lambda| < 1$, et $x \in \mathbb{Z}^d$, on pose $u_\lambda(x) = \sum_0^\infty \lambda^n P(X_n = x)$.

(a) Expliquer pourquoi ceci est bien défini

(b) Montrer que $u_\lambda(x)$ tend vers $u_1(x) = \sum_0^\infty P(X_n = x)$ quand λ tend vers 1. Cette limite étant aussi valable si cette dernière somme est infinie.

(c) Démontrer que $\sum_0^\infty P(X_n = x)$ est aussi égal à l'espérance du nombre de passage au point x de la marche aléatoire X_n.

6. Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors u_λ est sommable sur $\mathbb{Z}^d$ et montrer qu'alors $\widehat{u_\lambda}(t) = \dfrac{1}{1 - \lambda\widehat{\mu}(t)}$ (on commencera par interpréter la fonction μ^{*n} à l'aide de la variable aléatoire X_n)
7. En déduire la condition sur d pour que $u_1(0)$ soit fini. Interpreter le résultat trouvé.