DS 7 : Mesures, spatial et dépollution automobile

Les parties de cet examen sont *très largement* indépendantes. On pourra utiliser les résultats intermédiaires donnés dans le texte pour aborder les parties suivantes. Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute application numérique ou commentaire physique est le bienvenu. Les résultats doivent être *encadrés* et tout résultat numérique doit être accompagné de son *unité*.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Électromètre

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m ; leur rayon commun est suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. La boule A est fixe ; l'autre boule P est à l'extrémité d'un fil isolant de longueur b, dont le point de suspension O est sur la verticale de A. La distance OA est égale à b ; l'axe Ox est la verticale descendante du référentiel galiléen par rapport auquel on étudie le mouvement de P et g est l'accélération de la pesanteur supposée uniforme.

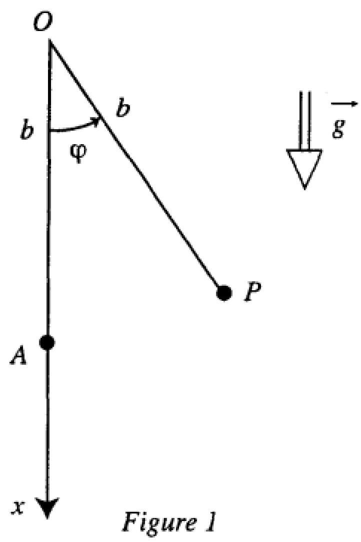


Figure 1

On donne : $b = 10\,\mathrm{cm}$; $m = 1{,}0\,\mathrm{g}$; $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $1/4\pi\varepsilon_0 = 10\cdot 10^9\,\mathrm{SI}$.

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact, on suppose que la charge est répartie de manière égale entre les deux boules. Il en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

Les résultats seront donnés en fonctions des données du problème.

1. Établir l'expression de l'intensité f de la force électrostatique qui s'exerce sur P.

2. Déterminer l'expression φ_e de φ à l'équilibre.

3. Sachant que $\varphi_e = \pi/3$, déterminer l'expression puis la valeur la charge q portée par la boule P.

Exercice 2 : Dépollution automobile

1. Donner les géométries des molécules suivantes, où N est l'atome central de l'édifice : diazote : N_2 ; monoxyde d'azote : NO ; dioxyde d'azote : NO_2 ; ammoniac : NH_3. Discuter l'éventuelle polarité des molécules.

2. Une voiture, diesel ou essence, émet du dioxyde d'azote, un gaz toxique. Si de l'ammoniac est injecté dans la ligne d'échappement, une réaction entre ces deux espèces donne de l'eau et du diazote. Donner l'équation de cette réaction.

3. À l'aide des données ci-dessous, proposer une méthode sûre pour stocker de l'ammoniac dans une bouteille sous pression, à température ambiante. On pensera en particulier à discuter les deux points suivants :
- le nombre de phase dans la bouteille ;
- la sureté de la bouteille dans le cas d'un incendie de l'entrepôt dans lequel se trouve cette bouteille.

On donne les coordonnées du point critique C : ($P_C = 112{,}8\,\text{bar}$; $T_C = 132{,}4\,°\text{C}$) et la pression de vapeur saturante à 26 °C : $P_{sat} = 1013\,\text{kPa}$.

Exercice 3 : Satellite de télédétection

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

Figure 1 – Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

Préliminaires

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$ et de centre O. L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg}$ est plane et se fait dans le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_M$ dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

On note $g_0 = 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre.

2. Donner l'expression de l'interaction exercée par la Terre sur le satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m, r et $\overrightarrow{u}_r$. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Montrer que l'interaction exercée par la Terre sur le satellite peut également s'écrire

$$\overrightarrow{F} = -mg_0 \frac{R_T^2}{r^2} \overrightarrow{u}_r \ .$$

3. Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'interaction exercée par la Terre sur le satellite.

Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\overrightarrow{F}$.

4. Définir le moment cinétique du satellite par rapport à O. Montrer que c'est un vecteur constant au cours du mouvement. Puis, déterminer son expression dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k})$, puis sa norme L_O en fonction de r, $\dot{\theta}$ et m.

Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

— phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;

— phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

5. Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_M$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a}_M$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, de r et des vecteurs de la base cylindro-polaire.

6. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r.

7. En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r. Justifier le signe de E_m.

8. Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. Rappel : $64 = 2^6$.

Étude énergétique

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

9. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - mg_0\frac{R_T^2}{r} \ .$$

10. Exprimer l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ et établir l'inégalité entre E_m et $E_{p,\text{eff}}(r)$ définissant les valeurs de rayon r accessibles.

Le graphe de $E_{p,\text{eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_O est représenté figure 2 ci-contre. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

11. À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

12. Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.

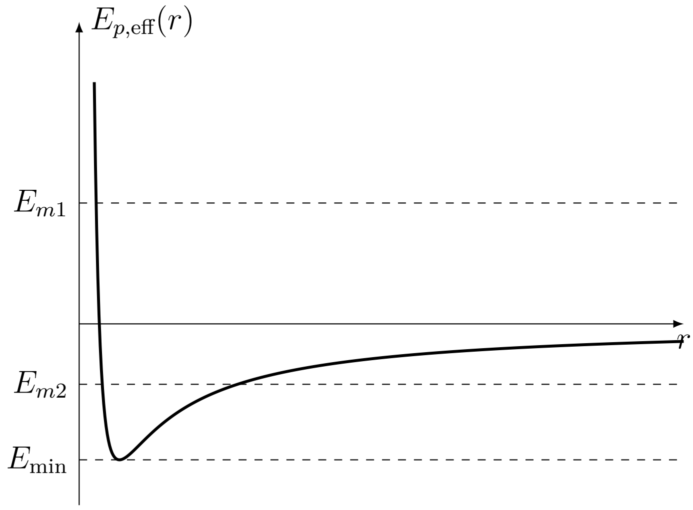


FIGURE 2 – Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8{,}0 \cdot 10^3\,\text{km}$), puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40 \cdot 10^3\,\text{km}$) comme illustré sur la figure 3 ci-contre.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute. Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

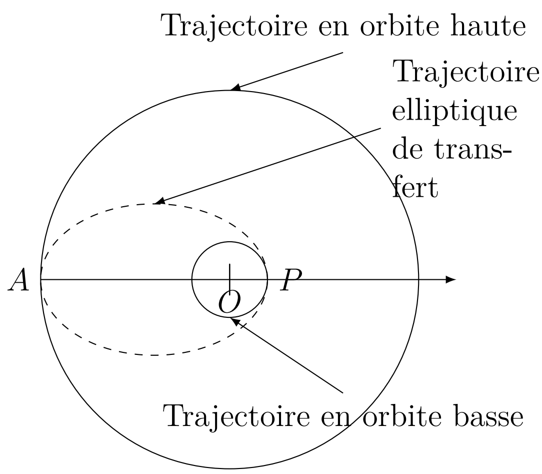


FIGURE 3 – Trajectoires du satellite

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

13. Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

14. Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m, L_O,

E_m, g_0 et R_T.

15. En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $E_{m,t} = -mg_0R_T^2/(2a)$.

16. Relever sur la figure 4 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

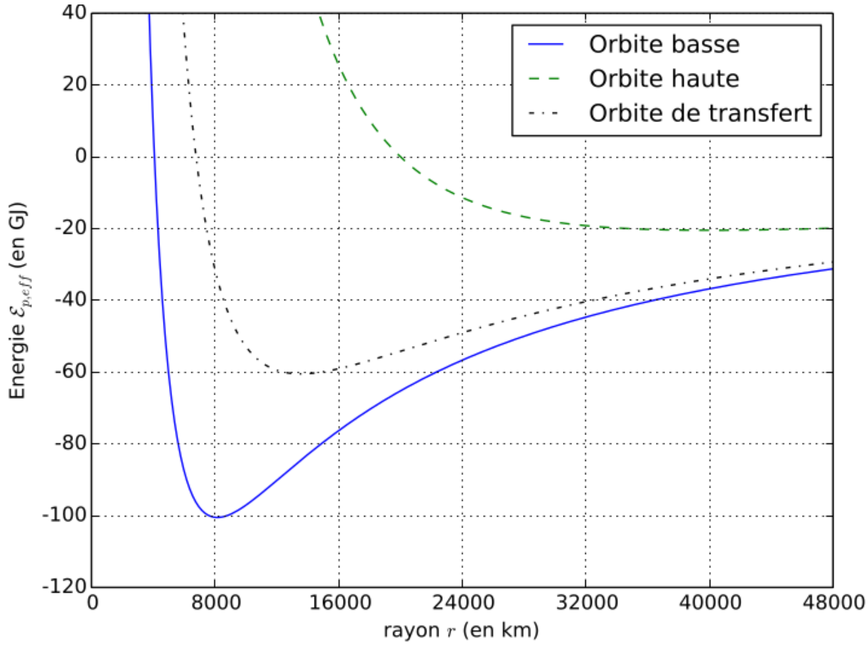


FIGURE 4 – $E_{p,\text{eff}}(r)$ pour les trois orbites

17. Relever sur la figure 4 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8{,}0 \cdot 10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.

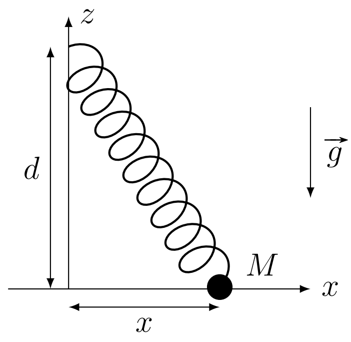
18. En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta E_{m,P}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert.

Exercice 4 : Un oscillateur

On étudie un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de k, l_0 et l (la longueur instantanée) et d'une constante C que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Considérons le système ci-contre, où une masse m, astreinte à se déplacer selon l'axe horizontal sans frottements, est attachée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est située à une distance d de l'axe horizontal.



2. Exprimer l'énergie potentielle élastique en fonction de k, d, l_0, x, on choisira pour l'origine de l'énergie potentielle $x = 0$: $E_p(x = 0) = 0$.

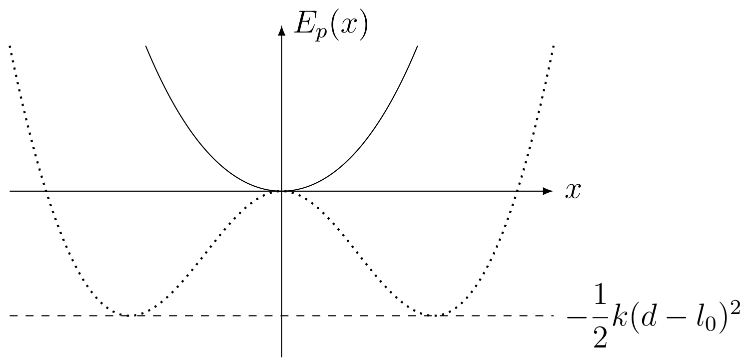
3. Définir ce qu'est une position d'équilibre. Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre ?

4. Déterminer les positions d'équilibre du système étudié, deux cas devront être distingués (en fonction des valeurs respectives de l_0 et d).

Deux courbes représentatives de l'énergie potentielle ont été tracées : l'une pour $d > l_0$ et l'autre pour $d < l_0$.

5. En vous aidant de la question précédente, attribuer les courbes aux deux cas.

6. Comment définit-on une position d'équilibre stable ? instable ? Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre stable ? instable ?



7. Dans les deux cas $d < l_0$ et $d > l_0$, préciser la stabilité des différentes positions d'équilibre.

On s'intéresse aux différents mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique, dans le cas où $d < l_0$.

8. Quels sont les mouvements possibles si $E_m < 0$? si $E_m > 0$? Décrire les positions accessibles.

9. On se place dans le cas où M est initialement en $x_{e2} = \sqrt{l_0^2 - d^2}$ avec une vitesse v_0. À quelle condition sur v_0, le point M peut-il atteindre $x = 0$ et passer dans l'autre puits ?

On s'intéresse aux petits mouvements au voisinage de l'équilibre stable $x_e = 0$ quand $d > l_0$.

10. Montrer que l'énergie potentielle s'écrit au voisinage de cette position d'équilibre stable

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{l_0}{d}\right)x^2 \ .$$

11. Établir l'équation du mouvement de l'oscillateur au voisinage de l'équilibre stable précédent. À quel type de système correspond-elle ? Quelle en est la pulsation propre ?