ELECTROMAGNETISME

Chapitre 9 : Rayonnement d'un dipôle oscillant

Exercice 1 : Atome de Thomson

A la suite de ses travaux sur les rayons cathodiques et sa découverte de l'électron en 1897, Joseph John Thomson, physicien anglais, émis l'hypothèse que les électrons étaient contenus dans les atomes. Il proposa un modèle de l'atome qu'il surnomma lui-même « plum pudding model ». Les atomes de Thomson sont constitués :

- d'une sphère pleine et positivement chargée dont le rayon est de l'ordre du nanomètre ;
- d'électrons ponctuels qui peuvent vibrer librement à l'intérieur de la sphère.

L'atome reste électriquement neutre. Ainsi l'atome d'hydrogène est représenté dans cet exercice par une sphère de rayon R (charge $+e$), de centre O et un électron (charge $-e$, masse m_e).

$$e = 1{,}6.10^{-19}\ C$$

1) Exprimer le moment dipolaire de l'atome d'hydrogène à un instant où l'électron se trouve en M tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$.

2) Montrer que le champ électrique auquel l'électron est soumis est :

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\overrightarrow{u_r}$$

3) L'électron est initialement à la position $\overrightarrow{OM}(0) = z_0\overrightarrow{u_z}$ et n'a pas de vitesse initiale. Exprimer la loi horaire de son mouvement $z(t)$. Calculer la pulsation ω_0 du mouvement sachant que $R = 0{,}10\ nm, m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg, \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F.m^{-1}$. A quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ? Exprimer l'énergie mécanique E de l'électron en fonction de z_0, m_e et ω_0.

4) Le mouvement de l'électron est amorti du fait des pertes par rayonnement. On se propose de déterminer le temps caractéristique d'amortissement, temps supposé très supérieur à la période d'oscillation. On rappelle que la puissance rayonnée par un dipôle oscillant de pulsation ω et d'amplitude p_0 est :

$$\mathcal{P}_{rayonnée} = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

a) Exprimer la puissance rayonnée par l'électron en fonction de l'amplitude de ses oscillations z_0, puis en fonction de l'énergie mécanique E.

b) En déduire que E décroît exponentiellement avec un temps caractéristique que l'on déterminera et que l'on calculera.

Donnée :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ F.m^{-1}$$

Exercice 2 : Antenne demi-onde

Une antenne filiforme de longueur l, colinéaire à l'axe Oz, centrée sur l'origine O, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t) = I_0\cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)\exp j\omega t$ avec $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. On suppose que $l = \frac{\lambda}{2}$ (antenne demi-onde) et que la distance d'observation $r = OM$ vérifie $r \gg \lambda$.

1) Quelle condition doit vérifier le courant sur les extrémité de l'antenne ? Est-ce le cas ici ?

2) Quelle est la différence dans la situation décrite avec le dipôle oscillant ? Dans quelle zone est-on ?

Electromagnétisme *Chapitre 9 : Rayonnement d'un dipôle oscillant*

3) Justifier que la dérivée temporelle du moment dipolaire dp associé à un morceau élémentaire d'antenne entre z et $z + dz$ s'exprime comme $d\dot{p} = I(z,t)dz$.

4) Justifier à l'aide de l'expression du cours :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\underline{\ddot{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

que le champ électrique rayonné par un élément dz situé autour d'un point P de l'antenne vaut :

$$d\underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} j\omega I_0 \cos\frac{2\pi z}{\lambda}\exp j\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\overrightarrow{u_\theta}dz$$

5) Comme M est très éloigné, on supposera, pour intégrer, que les champs rayonnés par chaque élément dz sont émis dans la même direction θ. Exprimer dans le terme de phase de $d\underline{\vec{E}}$, PM en fonction de $r = OM$ au premier ordre. En déduire, sous forme intégrale, $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$.

6) Calculer explicitement les champs électriques et magnétiques rayonnés. On donne :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \exp(j\alpha x)\,dx = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}$$

7) Préciser le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et sa moyenne temporelle $\langle\vec{R}\rangle$.

8) Calculer la puissance moyenne ρ rayonnée par l'antenne demi-onde par unité de surface dans la direction (θ,φ), à distance r fixée. Tracer la courbe représentant les variations de ρ en fonction de θ (indicatrice de rayonnement).

9) Sachant que

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta \sim 1{,}22,$$

calculer la puissance moyenne p_m totale rayonnée par l'antenne. On définit la résistance de rayonnement par $p_m = R_r I_{eff}^2$. Est-ce une véritable résistance ? Calculer R_r.

10) Pour une antenne de taille $l \ll \lambda$, on peut montrer que $R_r \sim 1000\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$. Quel genre d'antenne doit-on choisir pour émettre un signal électromagnétique ?