Géométrie affine

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Notion d'espace affine

Un espace affine est un triplet (X, E, φ) où :
– X est un ensemble non-vide dont les éléments sont appelés les points [a] ;
– E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en pratique de dimension finie 2 ou 3 [b] ;
– φ est une application de $X \times E$ dans X notée de manière infixe $\dot{+}$ telle que

(1) $\forall A \in X$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $(A \dot{+} \overrightarrow{u}) \dot{+} \overrightarrow{v} = A \dot{+} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$,

(2) $\forall A \in X$, $\overrightarrow{u} \in E \longmapsto A \dot{+} \overrightarrow{u} \in X$ est une bijection.

E s'appelle la direction de X, et on dira souvent que X est un espace affine de direction E en sous-entendant φ.

a. Qu'on note en général par des lettres latines majuscules.
b. Dont les éléments se notent usuellement à l'aide de lettres latines minuscules surmontées d'une flèche.

Exemple standard Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, prenons $X = V = E$ et définissons pour $A, \overrightarrow{u} \in V$, $A \dot{+} \overrightarrow{u} = A + \overrightarrow{u}$ où u est l'addition vectorielle de V.

Alors on a bien $\forall A \in V$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$,

$$\begin{aligned} (A \dot{+} \overrightarrow{u}) \dot{+} \overrightarrow{v} &= A + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \\ &= A \dot{+} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

et $\forall A \in X$, $\overrightarrow{u} \in X \longmapsto A \dot{+} \overrightarrow{u} \in V$ est bijective de réciproque $\overrightarrow{u} \longmapsto A - \overrightarrow{u}$.

On dit que l'on a muni l'espace vectoriel V de sa structure affine naturelle.

1.1 Faits de base

Soit (X, E, φ) un espace affine.
❒ Pour $A \in X$, $A \dot{+} \overrightarrow{0} = A$.
Soit $O \in X$, alors $\forall A \in X$, $\exists! \overrightarrow{u} \in E / A = O \dot{+} \overrightarrow{u}$ car $\overrightarrow{u} \in E \longmapsto O \dot{+} \overrightarrow{u} \in X$ est une bijection. Ainsi

$$\begin{aligned} A \dot{+} \overrightarrow{0} &= (O \dot{+} \overrightarrow{u}) \dot{+} \overrightarrow{0} \\ &= O \dot{+} \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}\right) \\ &= O \dot{+} \overrightarrow{u} \\ &= A \end{aligned}$$

❒ Pour $\overrightarrow{u} \in E$, on note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de X dans X définie par $\forall A \in X$, $t_{\overrightarrow{u}}(A) = A \dot{+} \overrightarrow{u}$.
On remarque que $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $\forall A \in X$,

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(A) &= t_{\overrightarrow{v}}(A) \dot{+} \overrightarrow{u} \\ &= (A \dot{+} \overrightarrow{v}) \dot{+} \overrightarrow{u} \\ &= A \dot{+} (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) \\ &= t_{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}(A) \end{aligned}$$

Ainsi $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$. Or $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$ donc $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective de réciproque $t_{-\overrightarrow{u}}$.
❒ Soient $A, B \in X$, on sait que $\overrightarrow{u} \in E \longmapsto A \dot{+} \overrightarrow{u} \in X$ est bijective donc $\exists! \overrightarrow{u} \in E / B = A \dot{+} \overrightarrow{u}$. Par définition, on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
On a toujours $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ car $A \dot{+} \overrightarrow{0} = A$ et $\forall A, B, C \in X$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. En effet,

$$\begin{aligned} \left(A \dot{+} \overrightarrow{AB}\right) \dot{+} \overrightarrow{BC} &= B \dot{+} \overrightarrow{BC} \\ &= C \\ &= A \dot{+} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall A, B \in X$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$.

❒ Supposons que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi on dit que X est un espace affine de dimension n. Si $n = 2$, X est un plan affine et si $n = 3$, X est « l'espace ».

Un repère cartésien $\mathcal{R}$ de X est un couple $(O, \mathcal{B})$ où $O \in X$ est l'origine du repère et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E.
Dans ce cas, si $M \in X$, on appelle coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ le n-uple $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$ que l'on note $M \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i}$.

Il y a donc, une fois le repère choisi, identification entre X et $\mathbb{R}^n$ [a]. Si $A \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right.$, alors $\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \overrightarrow{e_i} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} \beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_n - \alpha_n \end{array} \right.$. En effet, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

1.2 Barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $f : M \in X \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \in E$. Pour $M, N \in X$,

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i} \right) \\ &= s\overrightarrow{MN} + f(N) \end{aligned}$$

- Si $s = 0$, f est constante égale à un certain vecteur $\overrightarrow{u} \in E$:
  - si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\forall M \in X$, $f(M) = \overrightarrow{0}$;
  - si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\forall M \in X$, $f(M) \neq \overrightarrow{0}$.
- Si $s \neq 0$, soit $O \in X$, alors pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} f(M) = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow s\overrightarrow{MO} + f(O) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow s\overrightarrow{OM} = f(O) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{s} f(O) \\ &\Leftrightarrow M = O + \frac{1}{s} f(O) \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes et l'hypothèse $\boxed{s \neq 0}$, $\exists! G \in X / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$. G s'appelle le barycentre de la famille de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on note $G = \mathrm{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \right)$.

a. Via la bijection $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_n \longmapsto M \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right.$

1.2.1 Vocabulaire

- $\mathrm{Bar}\left((A_i,1)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ s'appelle l'isobarycentre de la famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.
- Lorsque $n = 2$, l'isobarycentre de $(A, B) \in X^2$ est le milieu de A et B et se note $\mathrm{mil}\,(A, B)$.
- Pour $A, B \in X$, le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $\left\{A + \overrightarrow{AB} | t \in [0,1]\right\}$. On peut aussi montrer [a] que

$$[AB] = [BA] = \{\mathrm{Bar}\left((A,\alpha),(B,\beta)\right) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+, \alpha+\beta > 0\} = \{\mathrm{Bar}\left((A,\alpha),(B,1-\alpha)\right) | \alpha \in [0,1]\}$$

1.2.2 Coordonnées du barycentre

En supposant $s \neq 0$, si G est le barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors $\forall M \in X,\ f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = f(G) + s\overrightarrow{MG} = s\overrightarrow{MG}$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{MG} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}}$$

Ainsi, si E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(O, (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}))$ un repère cartésien et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $A_j \left| \begin{array}{l} \beta_{1,j} \\ \vdots \\ \beta_{p,j} \end{array}\right.$.

Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overrightarrow{OA_j} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{i=1}^{p}\beta_{i,j}\overrightarrow{e_i} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_i\beta_{i,j}}{s}\overrightarrow{e_i} \end{aligned}$$

Donc $G \left| \begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1\beta_{1,1}+\cdots+\alpha_n\beta_{1,n}}{s} \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha_1\beta_{p,1}+\cdots+\alpha_n\beta_{p,n}}{s} \end{array}\right.$. Dans le cas particulier de deux points, $G = \mathrm{Bar}\left((A,\alpha),(B,\beta)\right)$ avec $\alpha+\beta \neq 0$, en notant $A \left| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{array}\right.$ et $B \left| \begin{array}{l} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{array}\right.$ alors $G \left| \begin{array}{l} \dfrac{\alpha a_1+\beta b_1}{\alpha+\beta} \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha a_p+\beta b_p}{\alpha+\beta} \end{array}\right.$ et donc $\mathrm{mil}\,(A,B) \left| \begin{array}{l} \dfrac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{a_p+b_p}{2} \end{array}\right.$.

Remarque Soit $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Alors $\mathrm{Bar}\left((A_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = \mathrm{Bar}\left((A_i,\lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

En effet, soit $G_1 = \mathrm{Bar}\left((A_i,\lambda\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$, alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i\overrightarrow{G_1A_i} \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{G_1A_i} \end{aligned}$$

a. « *Left to the reader !* »

donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G_1 A_i} = 0$ donc $G_1 = \text{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ donc, en prenant $\lambda = \dfrac{1}{s}$, on peut toujours supposer que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

1.2.3 Associativité du barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Supposons que $\exists r \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \neq 0$. Soit $G = \text{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ et $G' = \text{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,r]\!]}\right)$.
Alors $G = \text{Bar}\left((G', \sigma), (A_i, \alpha_i)_{i\in[\![r+1,n]\!]}\right)$

En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \\
&= \sigma \overrightarrow{GG'} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exemple Soient $A, B, C \in X$, G l'isobarycentre de (A, B, C). Alors, si $I = \text{mil}(A, B)$, alors $G = \text{Bar}((I, 2), (C, 1))$. De même, avec $J = \text{mil}(B, C)$ et $K = \text{mil}(A, C)$, on a $G = \text{Bar}((J, 2), (A, 1)) = \text{Bar}((K, 2), (B, 1))$.

1.3 Sous-espaces affines

Soit X un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace affine de X toute partie du type $A \dotplus F$ où $A \in X$ et F est un sous-espace vectoriel de E. On a $A \dotplus F = \{A \dotplus \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u} \in F\}$.

1.3.1 Direction d'un sous-espace affine

Soient $A, B \in X$, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $A \dotplus F = B \dotplus G$ si et seulement si $F = G$ et $\overrightarrow{AB} \in F$.

- $\Rightarrow$ Soit $\overrightarrow{v} \in F$, $A \dotplus \overrightarrow{v} \in A \dotplus F = B \dotplus G$ donc $\exists \overrightarrow{u} \in G$ tel que $A \dotplus \overrightarrow{v} = B \dotplus \overrightarrow{u} = A \dotplus \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}\right)$ d'où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$. Montrons que $\overrightarrow{AB} \in G$. $A = A \dotplus \overrightarrow{0} \in A \dotplus F$ car $\overrightarrow{0} \in F$ donc $\exists \overrightarrow{w} \in G$ tel que $A = B \dotplus \overrightarrow{w}$ donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BA} \in G$ donc $\overrightarrow{AB} \in G$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u} \in G$ donc $F \subset G$. On montre de même en échangeant les rôles de F et G que $G \subset F$ donc $F = G$ et $\overrightarrow{AB} \in G$.
- $\Leftarrow$ Supposons $\overrightarrow{AB} \in F$, montrons que $A \dotplus F = B \dotplus F$. Soit $M \in A \dotplus F$, $\exists \overrightarrow{u} \in F$ tel que $M = A \dotplus \overrightarrow{u}$ d'où $M = B \dotplus \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{u}\right)$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{u} \in F$ donc $M \in B \dotplus F$ donc $A \dotplus F \subset B \dotplus F$. L'inclusion inverse se montre de manière toute à fait analogue d'où le résultat.

Ainsi, si $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel affine de X, il existe un unique sous-espace vectoriel F de E et au moins un point A tel que $\mathcal{F} = A \dotplus F$. F s'appelle la direction de $\mathcal{F}$.

Avec ces notations, $\forall M \in X$, $M \in \mathcal{F} = A \dotplus F \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F$. Les autres points $B \in X$ tels que $\mathcal{F} = B \dotplus F$ sont les points de $\mathcal{F}$, tels que $\overrightarrow{AB} \in F$.

1.3.2 Droites et plans

Si $A \in X$, alors $\{A\}$ est un sous-espace affine de direction $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Soit $A \in X$ et $\overrightarrow{u} \in E\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est la droite affine passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Une droite affine de X est un sous-espace affine du type $A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec $A \in X$ et $\overrightarrow{u} \in E\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On dira que des points sont alignés s'ils sont sur une même droite affine.

Étant donné $A, B \in X$ avec $A \neq B$, il y a une unique droite affine passant par A et B : $A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{AB}$. Traditionnellement, la droite passant par A et B se note (AB).

Soit $A \in X$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille libre de E. Alors $\mathcal{P} = A \dotplus \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est le plan affine passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Un plan affine est un sous-espace affine du type précédent.

On dira que des points sont coplanaires s'ils appartiennent tous au même plan affine. Étant donné trois points A, B et C non-alignés, il existe un unique plan passant par A, B et C : $\mathcal{P} = A \dotplus \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1.3.3 Hyperplans affines

Ici E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan affine de X est un sous-espace affine de X dont la direction est un hyperplan vectoriel de E, c'est-à-dire un ensemble du type $A \dotplus H$ où $A \in X$ et H est un hyperplan de E.

Équation cartésienne d'un hyperplan affine Soit $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère cartésien de X.

❒ Soit $A \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right. \in X$ et H un hyperplan de E : $\exists\, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tels que H est l'ensemble d'équation cartésienne relativement à $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. Soit $M \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right. \in X$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} = A \dotplus H \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k - \alpha_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\exists a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\mathcal{H}$ est l'ensemble d'équation cartésienne $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$.

❒ Réciproquement, soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et tels que $\mathcal{H}$ est l'ensemble d'équation cartésienne $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. Montrons que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine. Soit H l'ensemble d'équation cartésienne $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, c'est un hyperplan de E. Soient maintenant

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n + b = 0$ [a], $A \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right.$, alors $A \in \mathcal{H}$ et pour $M \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right. \in X$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + b = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k - \alpha_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{H} = A \dotplus H$ est un hyperplan affine de X.

❒ Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b, a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b' \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \neq (0, \dots, 0)$ et supposons que les hyperplans affines d'équations cartésiennes $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ et $a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n + b' = 0$ soient identiques et égaux à $\mathcal{H}$. La direction de $\mathcal{H}$ est l'hyperplan d'équation cartésienne $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ mais aussi $a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = 0$. On sait alors que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a'_i = \lambda a_i$. Soit $M \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right. \in \mathcal{H}$, alors

$$\begin{aligned} b' &= -(\lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \cdots + \lambda a_n x_n) \\ &= -\lambda (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \\ &= \lambda b \end{aligned}$$

Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \forall i \in [\![1, n]\!]$, $a'_i = \lambda a_i$ et $b' = \lambda b$. Réciproquement, deux équations cartésiennes proportionnelles désignent le même hyperplan affine.

1.3.4 Représentation classique des sous-espaces affines

En dimension 2 Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère cartésien de X.

❒ Toute droite $\mathcal{D}$ de X admet une équation cartésienne du type $ax+by+c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La direction D de $\mathcal{D}$ est alors la droite vectorielle d'équation cartésienne $ax + by = 0$ dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} -b \\ a \end{array} \right. \in D \setminus \{0\}$ donc $D = \text{Vect}(\overrightarrow{u})$. D est « verticale » si et seulement si $D = \text{Vect}(\overrightarrow{e_2}) \Leftrightarrow b = 0$. Dans le cas contraire, $b \neq 0$ et $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne du type $y = mx + p$ où m est la pente de $\mathcal{D}$ et p son ordonnée à l'origine. $\mathcal{D}$ passe alors par $A \left| \begin{array}{l} 0 \\ p \end{array} \right.$ et est dirigée par $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} 1 \\ m \end{array} \right.$.

❒ Soient $A, B \in X$, $A \neq B$, $A \left| \begin{array}{l} x_A \\ y_A \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} x_B \\ y_B \end{array} \right.$. Pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in X$,

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right) \\ &\Leftrightarrow \det_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \end{aligned}$$

[a] Il en existe toujours : soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$, il suffit de prendre $\alpha_j = -\dfrac{b}{a_j}$ et $a_i = 0$ pour $i \neq j$.

Si $x_B \neq x_A$, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble d'équation cartésienne

$$\boxed{y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)}$$

❒ Soit $A \in X$, $\overrightarrow{u} \in E \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. On obtient une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ en écrivant $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \det_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$.

Plan en dimension 3 Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un repère cartésien de X et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

❒ On sait que tout plan affine de X admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit $A \in X$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ libre dans E et $\mathcal{P} = A \dotplus \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de direction $P = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On a

$$\begin{aligned}
M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in P \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}\right) \text{ est liée} \\
&\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - x_A \\ u_2 & v_2 & y - y_A \\ u_3 & v_3 & z - z_A \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

❒ Par définition, $\mathcal{P}$ est aussi l'ensemble $\{A \dotplus t\overrightarrow{u} \dotplus s\overrightarrow{v} | t, s \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des $M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \in X$ de la forme

$$\begin{cases} x = x_A + tu_1 + sv_1 \\ y = y_A + tu_2 + sv_2 \\ z = z_A + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathcal{P}$. Il faut savoir passer d'une représentation à l'autre.

❒ Soit $\mathcal{P} : x + y - z + 1 = 0$,

$$\begin{aligned}
M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow x = -1 - y + z \\
&\Leftrightarrow M \left| \begin{matrix} -1 - y + z \\ y \\ z \end{matrix} \right.
\end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc $\begin{cases} x = -1 - s + t \\ y = s \\ z = t \end{cases} (s, t \in \mathbb{R})$. $\mathcal{P}$ est le pan passant par $A \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ est dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ et $\overrightarrow{v} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$.

Droites en dimension 3 Soit $A \in X$, $\overrightarrow{u} \in E \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est l'ensemble de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2 \\ z = z_A + tu_3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

❒ $\mathcal{D}$ peut aussi être décrite à l'aide d'un système de deux équations cartésiennes [a]. Dans $X = \mathbb{R}^3$ [b], on obtient un tel système d'équation cartésiennes en écrivant $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = 0$. Les trois équations obtenues se réduisent en fait à 2.

❒ Soit $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, alors

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (S) : \begin{cases} 1+t = x \\ 2-t = y \\ 1+t = z \end{cases} \quad \text{admet des solutions en } t$$

Or

$$(S) : \begin{cases} t = x-1 \\ -t = y-2 \\ t = z-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = x-1 \\ 0 = x+y-3 \\ 0 = z-x \end{cases}$$

Donc $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x+y-3 = 0$ et $z-x = 0$, ce qui nous donne un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

1.3.5 Intersection de deux sous-espaces affines

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de X, on peut avoir $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_1 : x+y+1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : x+y+2 = 0$, on a bien $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$.

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de X de directions F et G.

(1) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

(2) Si $F + G = E$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

(3) Si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

Démonstration

(1) Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, montrons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = A \dotplus (F \cap G)$.
   - Si $M \in A \dotplus (F \cap G)$, $\overrightarrow{AM} \in F \cap G$ d'où $M \in \mathcal{F}$ et $M \in \mathcal{G}$ donc $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
   - Si $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, alors $M \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{AM} \in F$ et $M \in \mathcal{G}$ donc $\overrightarrow{AM} \in G$ donc $M \in A \dotplus (F \cap G)$.

(2) On écrit $\mathcal{F} = A \dotplus F$ et $\mathcal{G} = B \dotplus G$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$ d'après l'hypothèse. On a alors $A \dotplus \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$ or

$$\begin{aligned} A \dotplus \overrightarrow{u} &= \left(B \dotplus \overrightarrow{BA}\right) \dotplus \overrightarrow{u} \\ &= B \dotplus (-\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) \\ &= B \dotplus (-\overrightarrow{v}) \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Donc $A \dotplus \overrightarrow{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

(3) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$ donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

[a]. Elle est alors vue comme l'intersection de deux plans.

[b]. De repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée directe.

1.3.6 Parallélisme

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de X de directions F et G. On dit que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ et on écrit $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$ si $F \subset G$. Si E est de dimension finie et $\dim F = \dim G$, on a tout de suite $F = G$ et $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G} \mathbin{/\!/} \mathcal{F}$.

Remarques ❒ Si $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors pour $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = A \dotplus (F \cap G) = A \dotplus \mathcal{G} = \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Ainsi si $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$.

❒ Si $\dim E = 2$ et que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est un singleton. En effet, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre dans E donc c'est une base de E donc $E = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ donc, d'après le théorème sur l'intersection de deux sous-espaces affines, $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est un singleton.

1.3.7 Stabilité par passage au barycentre

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de X, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Alors $G = \operatorname{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right) \in \mathcal{F}$.

En effet, si $O \in \mathcal{F}$, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \in F$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\overrightarrow{OA_i} \in F$.

En particulier, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont alignés sur $\mathcal{D}$, $G \in \mathcal{D}$. *Si* $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont coplanaires sur $\mathcal{P}$, alors $G \in \mathcal{P}$. Si $A \neq B$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$, $\operatorname{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)) \in (AB)$.

1.4 Application au cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa structure affine naturelle

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa structure affine naturelle.

Faits de base

- Si $(a, \overrightarrow{u}) \in V \times V$, alors $a \dotplus \overrightarrow{u} = a + \overrightarrow{u}$.
- Si $a, b \in V$, alors $\overrightarrow{ab} = b - a$. En effet, $a \dotplus (b - a) = b$.
- Pour $a \in V$, $a = a - 0_V = \overrightarrow{0_V a}$.

Barycentre Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $g = \operatorname{Bar}\left((a_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$. Alors $\forall m \in V$,

$$\overrightarrow{mg} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}$$

En prenant $m = 0_V$, $g = \dfrac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. En particulier, $\operatorname{mil}(a, b) = \dfrac{a + b}{2}$.

Sous-espaces affines Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de V, il existe $a \in V$ et F un sous-espace vectoriel de V tels que $\mathcal{F} = a \dotplus F$. Les sous-espaces affines de V sont les translatés des sous-espaces vectoriel et les sous-espaces vectoriels de V sont les sous-espaces affines de V passant par 0_V.

2 Applications affines

2.1 Définition et exemples

2.1.1 Faits de base

Soient (X,E) et (Y,F) deux espaces affines, $f : X \longrightarrow Y$. On dira que f est affine s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall (A,B) \in X^2$, $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.
φ est en fait unique et s'appelle la partie linéaire de f.

En effet, si ψ et φ conviennent, alors $\forall (A,B) \in X^2$, $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \psi\left(\overrightarrow{AB}\right)$. Or lorsque (A,B) décrit X^2, $\overrightarrow{AB}$ décrit E donc $\varphi = \psi$.

Critère privilégiant un point Soit $f : X \longrightarrow Y$, $\Omega \in X$, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\forall B \in X$, $\overrightarrow{f(\Omega)\,f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$, alors f est affine de partie linéaire φ.

En effet, soit $(A,B) \in X^2$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(A)\,f(B)} &= \overrightarrow{f(A)\,f(\Omega)} + \overrightarrow{f(\Omega)\,f(B)}\\
&= \varphi\left(\overrightarrow{\Omega B}\right) - \varphi\left(\overrightarrow{\Omega A}\right)\\
&= \varphi\left(\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}\right) \text{ car } \varphi \text{ est linéaire}\\
&= \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)
\end{aligned}$$

Remarque Si $f : X \longrightarrow Y$ est affine de partie linéaire φ, alors :
- $\forall (A,B) \in X^2$, $f(B) = f(A) \dotplus \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$;
- $\forall A \in X$, $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $f\left(A \dotplus \overrightarrow{u}\right) = f(A) \dotplus \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$.

2.1.2 Applications constantes

❒ Soit $M \in X$ et $f : A \in X \longrightarrow M \in X$ l'application constante égale à M. Alors pour $(A,B) \in X^2$, $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0_F} = 0_{\mathcal{L}(E,F)}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. La partie linéaire de f est donc $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

❒ Réciproquement, si $f : X \longrightarrow Y$ est affine de partie linéaire $0_{\mathcal{L}(E,F)}$, alors f est constante car $\forall (A,B) \in X^2$, $f(B) = f(A) + 0_{\mathcal{L}(E,F)}\left(\overrightarrow{AB}\right) = f(A)$.

2.1.3 Translations

❒ Soit $\overrightarrow{u} \in E$ et $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ A \mapsto A \dotplus \overrightarrow{u} \end{array}$. Soit $(A,B) \in X^2$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(A)\,f(B)} &= \overrightarrow{f(A)\,A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)}\\
&= -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}\\
&= \overrightarrow{AB}\\
&= \mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{AB}\right)
\end{aligned}$$

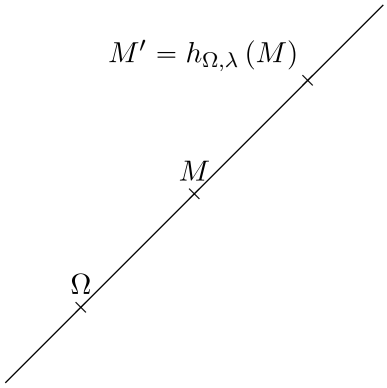
Ainsi $t_{\overrightarrow{u}}$ est affine de partie linéaire Id_E.

❒ réciproquement, soit $f : X \longrightarrow X$ affine de partie linéaire Id_E. Soit $\Omega \in X$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$. Montrons que $f = t_{\overrightarrow{u}}$, soit $A \in X$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Af(A)} &= \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(\Omega)} + \overrightarrow{f(\Omega)\,f(A)}\\
&= \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{A\Omega}\\
&= \overrightarrow{u}
\end{aligned}$$

En particulier, $t_{\overrightarrow{0_E}} = \mathrm{Id}_X$ est affine.

2.1.4 Homothéties



❐ Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $\Omega \in X$ et $h_{\Omega,\lambda}$ l'application de X dans X définie par $\forall M \in X$, $h_{\Omega,\lambda}(M) = \Omega \dotplus \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. On a aussitôt $\overrightarrow{\Omega h_{\Omega,\lambda}(M)} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. On dit que $h_{\Omega,\lambda}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

En effet, $h_{\Omega,\lambda}(\Omega) = \Omega$ donc Ω est un point fixe de $h_{\Omega,\lambda}$ et pour $M \in X$, $h_{\Omega,\lambda}(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow \Omega = M$ car $\lambda \neq 1$. Ω est donc l'unique point fixe de $h_{\Omega,\lambda}$.

Pour $A \in X$, notons $A' = h_{\Omega,\lambda}(A)$, alors $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A}$ donc $\overrightarrow{\Omega A'} = \lambda\overrightarrow{\Omega A} = \lambda\mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{\Omega A}\right)$ donc $h_{\Omega,\lambda}$ est une application affine de partie linéaire $\lambda\mathrm{Id}_E$.

❐ Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et f une application affine de X dans X de partie linéaire $\lambda\mathrm{Id}_E$. Soit $O \in X$, alors pour $M \in X$,

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\Leftrightarrow f(O) \dotplus \lambda\mathrm{Id}_E\left(\overrightarrow{OM}\right) = O \dotplus \overrightarrow{OM} \\
&\Leftrightarrow f(O) \dotplus \lambda\overrightarrow{OM} = O \dotplus \overrightarrow{OM} \\
&\Leftrightarrow f(O) \dotplus \lambda\overrightarrow{OM} = f(O) \dotplus \left(\overrightarrow{f(O)\,O} + \overrightarrow{OM}\right) \\
&\Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)\,O} + \overrightarrow{OM} \\
&\Leftrightarrow (\lambda-1)\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)\,O} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{f(O)\,O}}{\lambda-1}
\end{aligned}$$

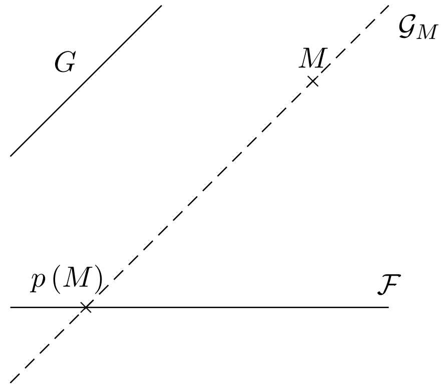
f admet dont un unique point fixe Ω déterminé par la relation ci-dessus. D'où, pour $A \in X$, $\overrightarrow{f(\Omega)\,f(A)} = \lambda\overrightarrow{\Omega A} \Rightarrow f(A) = f(\Omega) + \lambda\overrightarrow{\Omega A} = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega A}$ donc $f = h_{\Omega,\lambda}$, c'est une homothétie.

Remarques

- $h_{\Omega,-1}$ est la symétrie centrale de centre Ω.
- Si $M' = h_{\Omega,-1}(M)$, alors $\Omega = \mathrm{mil}(M, M')$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

2.1.5 Projecteurs et symétries

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de X, de direction F un sous-espace vectoriel de E. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$.



❒ Soit $M \in X$. Notons $\mathcal{G}_M = M \dotplus G$ [a], on a $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_M$ est un singleton $\{p(M)\}$. Ceci définit une application $p : X \longrightarrow X$ qu'on appelle le projecteur sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Propriétés

– Si $M \in \mathcal{F}$, $p(M) = M$ (en effet $M \in \mathcal{G}_M \cap \mathcal{F} = \{p(M)\}$)

– Si $p(M) = M$, alors $M \in \mathcal{F}$ (on sait que $p(M) \in \mathcal{F}$)

Donc $\mathcal{F} = \{M \in X, p(M) = M\}$.

❒ Soit maintenant $A \in \mathcal{F}$, pour $M \in X$, $\overrightarrow{p(A)\,p(M)} = \overrightarrow{Ap(M)}$. Or $\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{Ap(M)}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{p(M)\,M}}_{\in G}$. Donc $\overrightarrow{Ap(M)} = p_{F,G}\left(\overrightarrow{AM}\right)$, où $p_{F,G}$ est le projecteur vectoriel sur F, parallèlement à G. Donc $\forall M \in X$, $\overrightarrow{p(A)\,p(M)} = p_{F,G}\left(\overrightarrow{AM}\right)$.

❒ Pour $M \in X$, notons alors $s(M)$ définie par $\overrightarrow{p(M)\,s(M)} = -\overrightarrow{p(M)\,M}$.

Ceci définit une application $s : X \longrightarrow X$. Pour $A \in \mathcal{F}$, $p(A) = A$ alors $s(A) = \mathrm{mil}(A, A) = A$ et réciproquement si A vérifie $s(A) = A$ alors $\overrightarrow{p(A)\,s(A)} = -\overrightarrow{p(A)\,A} = \overrightarrow{p(A)\,A}$, donc $p(A) = A$ et $A \in \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} = \{M \in X, s(M) = M\}$.

❒ Soit $A \in \mathcal{F}$, pour $M \in X$: $\overrightarrow{s(A)\,s(M)} = \overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{Ap(M)} + \overrightarrow{p(M)\,s(M)} = \underbrace{\overrightarrow{Ap(M)}}_{\in F} - \underbrace{\overrightarrow{p(M)\,M}}_{\in G}$. Or $\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{Ap(M)}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{p(M)\,M}}_{\in G}$ donc $\overrightarrow{Ap(M)} - \overrightarrow{p(M)\,M} = s_{F,G}\left(\overrightarrow{AM}\right)$, où $s_{F,G}$ est la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G. Ainsi, $\forall M \in X$, $\overrightarrow{s(A)\,s(M)} = s_{F,G}\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Donc s est affine de partie linéaire $s_{F,G}$.

Remarques

– On a aussi $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_X$ [b].

– Si on prend $\Omega \in X$, $\mathcal{F} = \{\Omega\} = \Omega \dotplus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, et $G = E$ alors pour $M \in X$, $p(M) = \Omega$ et $s(M) = h_{\Omega,-1}(M)$.

2.1.6 Affinités

Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $a(M) \in X$ défini par $\overrightarrow{p(M)\,a(M)} = k\overrightarrow{p(M)\,M}$.

a s'appelle l'affinité de rapport k, par rapport à $\mathcal{F}$, parallèlement à G. Le courageux lecteur est prié de démontrer que a est affine de partie linéaire $x = y + z \in F + G \longmapsto y + kz$.

2.2 Forme générale des applications affines

2.2.1 Cas standard où $X = E$

Soient V, W deux sous-espaces vectoriels munis de leur structure affine naturelle. Soit $f : V \longrightarrow W$ affine, notons $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ sa partie linéaire. Pour $x \in V$, $f(x) = f(0_V) + \varphi\left(\overrightarrow{0_V x}\right) = f(0_V) + \varphi(x)$. Ainsi il existe $y \in W$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ tels que $\forall x \in V$, $f(x) = y + \varphi(x)$.

---

a. C'est le sous-espace affine passant par M, dirigé par G.

b. En fait, ceci caractérise le fait que p est un projecteur (respectivement une symétrie). Preuve laissée au courageux lecteur !

❒ Réciproquement, soient $b \in W$ et $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ et posons pour $x \in V$, $f(x) = b + \varphi(x)$. Alors $f(0_V) = b + \varphi(0_V) = b$, et $f(x) = f(0_V) + \varphi(x) = f(0_V) + \varphi(x - 0_V)$. Donc f est affine de partie linéaire φ.

❒ Cas particulier : $V = W = \mathbb{R}$. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont celles du type $x \longmapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$. Donc les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont celles du type $x \longmapsto ax + b$ [a]

❒ Prenons à présent $V = \mathbb{R}^p$, $W = \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ affine. Il existe $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $f(x) = \omega + \varphi(x)$. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{bcn},\mathrm{bcp}}(\varphi)$. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, notons $f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

ce qui donne la forme analytique de f.

2.2.2 Cas général

Soient (X, E) et (Y, F) deux espaces affines avec $\dim E = p$, $\dim F = n$, $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ un repère cartésien de X, $(\Omega, \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ un repère cartésien de Y, $f : X \longrightarrow Y$ affine de partie linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p}),(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})}(\varphi)$.

Pour $M \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{array} \right. \in X$, on a $f(M) = f(O) + \varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$ avec $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i}$. Si on note $f(O) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \overrightarrow{\varepsilon_i} \Leftrightarrow$ $f(O) \left| \begin{array}{l} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{array} \right.$ dans $(\Omega, \overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$, alors $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{\Omega f(O)} + \varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)$ et pour $f(M) \left| \begin{array}{l} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{array} \right.$, on a

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}$$

Ce qui donne l'expression analytique de f.

2.3 Propriétés des applications affines

2.3.1 Image directe

Soient X, Y deux espaces affines de directions E, F, $f : X \longrightarrow Y$ affine de partie linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de X.
Alors $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de Y, et si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est la direction de $\mathcal{F}$, alors $\varphi\left(\overrightarrow{\mathcal{F}}\right)$ est la direction de $f(\mathcal{F})$.

En effet, soit $A \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} = A \dotplus \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Montrons que $f(\mathcal{F}) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{\mathcal{F}}\right)$.

- Soit $M \in f(\mathcal{F})$, $\exists B \in \mathcal{F}$ tel que $M = f(B)$, or $B = A \dotplus \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ d'où $M = f(B) = f(A \dotplus \overrightarrow{u}) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{u}) \in f(A) \dotplus \overrightarrow{\mathcal{F}}$.
- Réciproquement, soit $M \in f(A) \dotplus \varphi\left(\overrightarrow{\mathcal{F}}\right)$, alors M s'écrit $M = f(A) \dotplus \varphi(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} \in \mathcal{F}$ donc $M = f(A \dotplus \overrightarrow{u}) \in f(\mathcal{F})$.

Conséquences Soit $f : X \longrightarrow Y$ affine de partie linéaire φ.

(1) f conserve le parallélisme : si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de X tels que $\mathcal{F} /\!/ \mathcal{G}$, alors $f(\mathcal{F}) /\!/ f(\mathcal{G})$. En effet, $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$ donc $\varphi\left(\overrightarrow{\mathcal{F}}\right) \subset \varphi\left(\overrightarrow{\mathcal{G}}\right)$ d'où le résultat.

[a] Le lecteur perspicace reconnaitra ici la forme des fonctions affines telles qu'on les lui a enseignées en troisième...

(2) Si $A, B, C \in X$ sont alignés, alors $f(A), f(B), f(C)$ aussi.
En effet, supposons que $A, B, C \in \mathcal{D} = \Omega \dotplus \text{Vect}(\overrightarrow{u})$. Alors $f(A), f(B), f(C) \in f(\mathcal{D}) = f(\Omega) \dotplus \text{Vect}(\varphi(\overrightarrow{u}))$. Si $\varphi(\overrightarrow{u}) = 0$, $f(A) = f(B) = f(C)$ donc les trois points sont alignés. Sinon, $f(\mathcal{D})$ est la droite dirigée par $\varphi(\overrightarrow{u})$ passant par $f(\Omega)$ et les trois points appartiennent à cette droite.

2.3.2 Image du barycentre

Soit $f : X \longrightarrow Y$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Alors $f\left(\text{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)\right) = \text{Bar}\left((f(A_i), \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$. On dit que f conserve le barycentre. En particulier, f conserve le milieu, c'est-à-dire $f(\text{mil}(A, B)) = \text{mil}(f(A), f(B))$.

En effet, soit $G = \text{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$ et φ la partie linéaire de f. $\overrightarrow{0_E} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ d'où

$$\varphi\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\overrightarrow{GA_i}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{0_F} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G) f(A_i)}$$

Illustration : théorème des milieux Soit X un plan affine, $A, B, C \in X$ non-alignés et formant un vrai triangle. Alors :

(1) si $I = \text{mil}(A, B)$, alors la parallèle à (BC) qui passe par I coupe (AC) en $\text{mil}(A, C)$;

(2) si $I = \text{mil}(A, B)$ et $j = \text{mil}(A, C)$, alors $(IJ) /\!/ (BC)$.

En effet, soit p le projecteur sur (AC) parallèlement à $\text{Vect}\left(\overrightarrow{BC}\right)$. On a bien $E = \mathbb{R}\overrightarrow{AC} + \mathbb{R}\overrightarrow{BC}$, et p est affine et conserve le milieu donc $p(I) = \text{mil}(A, C)$ d'où le premier résultat. On sait que $p(I) = J$ donc, avec les hypothèses de (2), $(Ip(I)) /\!/ (BC)$.

2.3.3 Composée

Soient X, Y et Z trois espaces affines de directions E, F et G, $f : X \longrightarrow Y$ affine de partie linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g : Y \longrightarrow Z$ affine de partie linéaire $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est affine de partie linéaire $\psi \circ \varphi$.

En effet, $\forall A, B \in X$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g \circ f(A)\, g \circ f(B)} &= \psi\left(\overrightarrow{f(A)\, g(B)}\right) \\ &= \psi \circ \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

2.3.4 Inverse

Soient X, Y deux espaces affines de directions E et F, $f : X \longrightarrow Y$ affine de partie linéaire φ. Alors :

(1) f est bijective si et seulement si φ est un isomorphisme ;

(2) si f est bijective, alors f^{-1} est affine de partie linéaire φ^{-1}.

(1) $\Rightarrow$ Soit $\overrightarrow{u} \in \text{Ker}\,\varphi$, montrons que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Soit $A \in X$, $B = A \dotplus \overrightarrow{u}$, $f(B) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{u}) = f(A)$. f est injective donc $A = B$ donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_F}$. Soit $\overrightarrow{v} \in F$, $C \in Y$, $D = C \dotplus \overrightarrow{v}$. f est surjective donc $\exists A, B \in X$ tels que $C = f(A)$ et $D = f(B)$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{f(A) f(B)} \\ &= \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \end{aligned}$$

donc φ est surjective donc bijective.

- $\Leftarrow$ Si φ est un isomorphisme, soient $A, B \in X$ tels que $f(A) = f(B)$, montrons que $A = B$. On a $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$ donc $\overrightarrow{AB} \in \operatorname{Ker}\varphi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ donc $A = B$. Soit maintenant $C \in Y$, on cherche $A \in X$ tel que $f(A) = C$. Soit $O \in X$, $\Omega = f(O) \in Y$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega C} \in F$. φ est surjective donc $\exists \overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{\Omega C} = \varphi(\overrightarrow{u})$. Alors

$$\begin{aligned} f(O \dotplus \overrightarrow{u}) &= f(O) \dotplus \varphi(\overrightarrow{u}) \\ &= \Omega \dotplus \overrightarrow{v} \\ &= C \end{aligned}$$

(2) Supposons que f est bijective, alors φ est un isomorphisme. Montrons que $\forall C, D \in Y$, $\overrightarrow{f^{-1}(C)f^{-1}(D)} = \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{CD}\right)$, ce qui revient à montrer que, φ étant bijective, $\forall C, D \in Y$, $\overrightarrow{CD} = \varphi\left(\overrightarrow{f^{-1}(C)f^{-1}(D)}\right)$. Soient alors $C, D \in X$,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overrightarrow{f^{-1}(C)f^{-1}(D)}\right) &= \overrightarrow{f \circ f^{-1}(C) f \circ f^{-1}(D)} \\ &= \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

Exemples Pour $X = Y$ et $E = F$, les translations, homothéties et symétries sont des applications linéaires bijectives de X dans X car Id_E est bijective.

2.3.5 Groupe affine

Soit X un espace affine, on note $\mathrm{GA}(X)$ l'ensemble des applications affines bijectives de X dans X.

❒ $\mathrm{GA}(X) \neq \varnothing$ car $\forall \overrightarrow{u} \in E$, $t_{\overrightarrow{u}} \in \mathrm{GA}(X)$.

❒ Si $f, g \in \mathrm{GA}(X)$, $f \circ g$ est affine et bijective par composition et f^{-1} est affine donc $f \circ g \in \mathrm{GA}(X)$ et $f^{-1} \in \mathrm{GA}(X)$ donc $\mathrm{GA}(X)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(X), \circ)$ donc $(\mathrm{GA}(X), \circ)$ est un groupe, le groupe affine.

❒ Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations. Alors $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(X)$ appelé groupe des homothéties-translations.

En effet considérons le cas de la composition de deux homothéties, le reste étant assez clair [a]. Soit $h_1 = h_{\Omega_1,\lambda_1}$ et $h_2 = h_{\Omega_2,\lambda_2}$ des homothéties avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. a partie linéaire de $h_2 \circ h_1$ est $\lambda_2 \mathrm{Id}_E \circ \lambda_1 \mathrm{Id}_E = \lambda_2\lambda_1 \mathrm{Id}_E$.

- Si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors $h_2 \circ h_1$ a pour partie linéaire Id_E donc c'est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. De plus,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{\Omega_1 h_2 \circ h_1(\Omega_1)} \\ &= \overrightarrow{\Omega_1 h_2(\Omega_1)} \\ &= \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 h_2(\Omega_1)} \\ &= \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} + \lambda_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} \\ &= (1-\lambda_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \end{aligned}$$

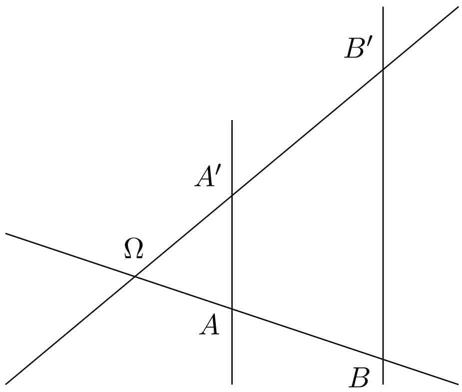
- Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors $h_2 \circ h_1$ a pour partie linéaire $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \notin \{0,1\}$ donc c'est une homothétie donc $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

a. *« C'est trivial avec des égalités ! »*

3 Complément : démonstration de quelques théorèmes connus en géométrie plane

3.1 Théorèmes de Thalès

Soit X un plan affine, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ des droites de X sécantes en un point Ω, A, B distincts sur $\mathcal{D}_1 \setminus \{\Omega\}$, A', B' distincts sur $\mathcal{D}_2 \setminus \{\Omega\}$.



Alors

$$(AA') \mathbin{/\!\!/} (BB') \Leftrightarrow \frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega B}} = \frac{\overline{\Omega A'}}{\overline{\Omega B'}}$$

Mesure algébrique

Soit $\mathcal{D}$ une droite de X, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $A, B \in \mathcal{D}$, $\overline{AB}$ est l'unique scalaire $\lambda_{\overrightarrow{u}}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{u}$.

❒ Il est clair que $\overline{AB}$ dépend de $\overrightarrow{u}$, mais si $\overrightarrow{v}$ est un autre vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{AB} = \lambda_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{v} = \lambda_{\overrightarrow{v}} \alpha \overrightarrow{u}$ donc $\lambda_{\overrightarrow{u}} = \alpha \lambda_{\overrightarrow{v}}$.

❒ Soient A, B, C distincts sur $\mathcal{D}$, alors $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ne dépend pas du choix de $\overrightarrow{u}$. En effet, si $\overrightarrow{AB} = \lambda_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{u} = \lambda_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \mu_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{u} = \mu_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{v}$, alors $\exists \alpha \neq 0 / \lambda_{\overrightarrow{u}} = \alpha \lambda_{\overrightarrow{v}}$ et $\mu_{\overrightarrow{u}} = \alpha \mu_{\overrightarrow{v}}$ d'où $\dfrac{\lambda_{\overrightarrow{u}}}{\lambda_{\overrightarrow{v}}} = \dfrac{\alpha \mu_{\overrightarrow{u}}}{\alpha \mu_{\overrightarrow{v}}} = \dfrac{\mu_{\overrightarrow{u}}}{\mu_{\overrightarrow{v}}}$.

❒ En fait, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est l'unique scalaire qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \omega \overrightarrow{AC}$. En effet, $\overrightarrow{AC} = \overline{AC}\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \overrightarrow{AC}$.

Démonstration du théorème de Thalès Les points Ω, A et A' ne sont pas alignés donc $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right)$ est libre, c'est une base de E. On a $\overrightarrow{\Omega B} = \dfrac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} \overrightarrow{\Omega A} = \alpha \overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = \dfrac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}} \overrightarrow{\Omega A'} = \alpha' \overrightarrow{\Omega A'}$. $(AA') \mathbin{/\!\!/} (BB') \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right)$ est liée, or $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega A'} - \overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\Omega B'} - \overrightarrow{\Omega B} = \alpha' \overrightarrow{\Omega A'} - \alpha \overrightarrow{\Omega A}$. Donc, enfin,

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right) \text{ liée } &\Leftrightarrow \det_{\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right)} \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ 1 & \alpha' \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha = \alpha'
\end{aligned}$$

3.2 Résultats concernant les parallélogrammes

Soient A, B, C et D distincts dans X tels que A, B et D soient non-colinéaires. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Propriétés Montrons les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rlll} (1) & ABCD \text{ est un parallélogramme} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad (2) \\ & & \Leftrightarrow & (AD) \mathbin{/\!/} (BC) \text{ et } (AB) \mathbin{/\!/} (CD) \quad (3) \\ & & \Leftrightarrow & \operatorname{mil}(B,D) = \operatorname{mil}(A,C) \quad (4) \end{array}$$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où les deux parallélismes.

(3) $\Rightarrow$ (1) Plaçons nous dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$: $\overrightarrow{AD} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$, $\overrightarrow{AB} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $C \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ et $\overrightarrow{BC} \left| \begin{matrix} \alpha - 1 \\ \beta \end{matrix} \right.$. $\overrightarrow{BC} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{AD}\right)$ donc $\alpha = 1$. $\overrightarrow{CD} \left| \begin{matrix} -\alpha \\ 1-\beta \end{matrix} \right.$ et $\overrightarrow{CD} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ donc $\beta = 1$ donc $C \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(1) $\Rightarrow$ (4) Soit $I = \operatorname{mil}(A, C)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} &= \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{0}} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

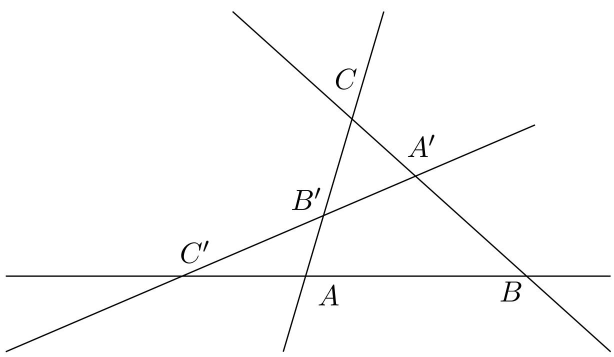
Donc $I = \operatorname{mil}(B, D)$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Soit $I = \operatorname{mil}(A, C) = \operatorname{mil}(B, D)$, montrons que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID} \\ &= \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

3.3 Théorème de Ménélaus

Soient A, B et C non-alignés dans X, $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (AC) \setminus \{A, C\}$ et $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$.



Alors

$$A', B', C' \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Démonstration On se place dans le repère cartésien $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$: $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$, $C'\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right.$ et $B'\left|\begin{matrix}0\\\beta\end{matrix}\right.$ avec $\alpha,\beta\notin\{0,1\}$. Une équation cartésienne de (BC) est $x+y=1$ d'où $A'\left|\begin{matrix}\gamma\\1-\gamma\end{matrix}\right.$ avec $\gamma\notin\{0,1\}$.

$\overrightarrow{A'B}\left|\begin{matrix}1-\gamma\\\gamma-1\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{A'C}\left|\begin{matrix}-\gamma\\\gamma\end{matrix}\right.$ d'où, puisque $\overrightarrow{A'B}=\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\overrightarrow{A'C}$, $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}$. On trouve de même $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\dfrac{\beta-1}{\beta}$ et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1 &\Leftrightarrow \alpha\left(\beta-1\right)\left(\gamma-1\right)=\beta\gamma\left(\alpha-1\right)\\ &\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma+\alpha=\beta\gamma\alpha-\beta\gamma\\ &\Leftrightarrow \beta\gamma-\alpha\left(\gamma+\beta-1\right)=0\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{A'B'}\left|\begin{matrix}-\gamma\\\beta+\gamma-1\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{B'C'}\left|\begin{matrix}\alpha\\-\beta\end{matrix}\right.$ d'où

$$\begin{aligned}A',B',C'\text{ alignés} &\Leftrightarrow \det_{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\gamma & \alpha\\ \beta+\gamma-1 & -\beta\end{vmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \beta\gamma-\alpha\left(\beta+\gamma-1\right)=0\end{aligned}$$

Il existe une autre démonstration plus élégante n'utilisant que des considérations géométriques, mais la recopier ici me prendrait trop de temps, surtout pour les figures. Veuillez agréer mes plus plates excuses pour cet acte de fumisterie !