Séries numériques

I. Généralités

I.1. Séries convergentes

Définition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) converge, si la **suite** (S_n) converge.*

*Dans ce cas, la limite S de la suite (S_n) est appelée **somme** de la série, et notée $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.*

Proposition I.1. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, le nombre $R_{n_0} = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0+1}^{p} u_k$ est bien défini. On note $R_{n_0} = \sum\limits_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k$, et R_{n_0} est appelé le **reste** de rang n_0 de la série.*

On a alors, avec les notations précédentes, $\quad S = S_n + R_n \quad$ pour tout n, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

I.2. Premières propriétés

Théorème I.2. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la **suite** (u_n) a pour limite 0.*

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge ; on dit dans ce cas qu'elle diverge **grossièrement**.

Théorème I.3. *Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors la série $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ converge, et $\quad \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k$.*

I.3. Suites et séries

Théorème I.4. *La **suite** (u_n) converge si et seulement si la **série** de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge ; dans ce cas, en notant L la limite de la suite, on a pour tout n : $\quad L - u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$.*

II. Séries à termes positifs

II.1. Convergence par comparaison

Proposition II.1. *Soit (a_n) une suite à termes réels **positifs** ; pour tout n, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.*

La série $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite (A_n) est majorée ; dans ce cas, on a pour tout $n \quad A_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Proposition II.2. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose que :*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$;*
- *la série $\sum b_n$ converge.*

Alors, la série $\sum a_n$ converge, et $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Théorème II.3. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose que :*
- *$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$;*
- *$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \geqslant 0$.*

Alors, la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum b_n$ converge.

II.2. Comparaison à une intégrale

Si f est continue par morceaux et décroissante sur $[n_0, +\infty[$, et $n \geqslant n_0 + 1$, alors $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \quad$ d'où $\quad \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$.

En sommant ces encadrements, on en déduit des encadrements des sommes partielles de la série $\sum f(n)$, ou de ses restes en cas de convergence.

II.3. Séries de Riemann

Théorème II.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; la série $\sum n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.*

III. Séries à termes quelconques

III.1. Séries à termes complexes

Théorème III.1. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles, et $(z_n) = (a_n + ib_n)$. La série $\sum z_n$ converge si et seulement si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont toutes deux convergentes.*

III.2. Convergence absolue

Définition. *On dit que la série à termes complexes $\sum a_n$ converge **absolument** si la série $\sum |a_n|$ converge.*

Théorème III.2. *Si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors elle converge, et* $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

III.3. Convergence par comparaison

Théorème III.3. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On suppose que :*
- *pour tout n, b_n est réel et $b_n \geqslant 0$;*
- *la série $\sum b_n$ converge ;*
- *$a_n = O(b_n)$ au voisinage de $+\infty$.*

Alors, la série $\sum a_n$ converge.

Théorème III.4 (règle de d'Alembert)**.** *Soient (a_n) une suite complexe. On suppose que $|a_{n+1}/a_n|$ tend vers une limite ℓ éventuellement infinie. Alors :*
- ▷ *si $\ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument ;*
- ▷ *si $\ell > 1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement ;*
- ▷ *si $\ell = 1$, cela ne suffit pas pour conclure.*

III.4. Séries alternées

Théorème III.5. *Soient (u_n) une suite réelle décroissante de limite 0. Alors :*
- *la série $\sum (-1)^n u_n$ converge ;*
- *si $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ pour tout n, alors, pour tout n, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ (donc du signe de son premier terme) et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ (qui est le module de son premier terme).*

IV. Sommation de relations de comparaison

IV.1. Cas d'une série convergente

Théorème IV.1. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On suppose que, pour tout n, $b_n \geqslant 0$, et que la série $\sum b_n$ converge. Alors :*
- ▷ *si $a_n = O(b_n)$, alors $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = O(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k)$;*
- ▷ *si $a_n = o(b_n)$, alors $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = o(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k)$;*
- ▷ *si $a_n \sim b_n$, alors $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.*

IV.2. Cas d'une série divergente

Théorème IV.2. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On suppose que, pour tout n, $b_n \geqslant 0$, et que la série $\sum b_n$ diverge. Alors :*
- ▷ *si $a_n = O(b_n)$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\sum_{k=0}^{n} b_k)$;*
- ▷ *si $\sum_{k=0}^{n} a_k = o(\sum_{k=0}^{n} b_k)$;*
- ▷ *si $a_n \sim b_n$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$.*

V. Familles sommables

V.1. Familles sommables de réels positifs

Définition. *Soit I un ensemble d'indices, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs ou nuls, indexée par I. On dit que cette famille est sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} a_i$, où F décrit l'ensemble des parties **finies** de I, est majoré.*

*La borne supérieure de ces sommes est alors appelée **somme** de la famille, et notée $\sum_{i\in I} a_i$.*

Théorème V.1 (Sommation par paquets, cas positif)**.** *On suppose que $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, où les parties I_j sont deux à deux disjointes. La famille de réels positifs $(a_i)_{i\in I}$ est alors sommable si et seulement si elle vérifie les deux conditions :*
- *pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i\in I_j}$ est sommable, de somme $S_j = \sum_{i\in I_j} a_i$;*
- *la famille $(S_j)_{j\in J}$ est sommable.*

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} S_j = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)$.

En particulier :
- ◦ avec $I = \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-^*$, la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ convergent ;
- ◦ avec $I = \mathbb{N}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} I_p$ où, pour tout p_0, $I_{p_0} = \big\{(p_0, q) ; q \in \mathbb{N}\big\}$: la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si :
  - pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ converge, de somme $S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$;
  - la série $\sum_{p=0}^{+\infty} S_p$ converge.

  Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$. Les rôles de p et q sont interchangeables.

V.2. Familles sommables de nombres complexes

Définition. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ l'est.*

Si la famille est sommable et si les a_i sont réels, la famille de réels positifs $(|a_i| + a_i)_{i\in I}$ est sommable ; on pose $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I}\big(|a_i| + a_i\big) - \sum_{i\in I} |a_i|$.

Si la famille est sommable et si les a_i sont complexes, les familles de réels $\big(\mathrm{Re}(a_i)\big)_{i\in I}$ et $\big(\mathrm{Im}(a_i)\big)_{i\in I}$ sont sommables ; on pose $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(a_i) + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(a_i)$.

Dans le cas $I = \mathbb{N}$, la famille de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum a_n$ est **absolument** convergente ; sa somme est alors la somme de la série.

Théorème V.2 (Sommation par paquets, cas général)**.** *On suppose que $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, où les parties I_j sont deux à deux disjointes. Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ de complexes est sommable, alors :*

- *pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i\in I_j}$ est sommable, de somme $S_j = \sum_{i\in I_j} a_i$;*
- *la famille $(S_j)_{j\in J}$ converge ;*
- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} S_j = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} a_i\Big)$.

Proposition V.3. *Si les famille de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est aussi, et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Proposition V.4. *Si les famille de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables, et si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, alors la famille $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda\sum_{i\in I} a_i + \mu\sum_{i\in I} b_i$$

Proposition V.5. *Soient $(a_i)_{i\in I}$ une familles de complexes, et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, et si $|a_i| \leqslant b_i$ pour tout i, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, et* $\displaystyle\Big|\sum_{i\in I} a_i\Big| \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

En particulier, si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\displaystyle\Big|\sum_{i\in I} a_i\Big| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i|$.

V.3. Applications

Théorème V.6 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes. Si la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}|a_{p,q}|$ est définie, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}$ le sont aussi, et ont la même valeur.*

Définition. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, la série $\sum c_n$ dont le terme général est défini par $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_ka_{n-k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Théorème V.7. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. Si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy de ces deux séries converge absolument, et, en utilisant les notations précédentes,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big)$.