DS3 sujet niveau CCP

(d'après ENSAI 91)

I

1 : C'est du cours

2 : **a** $\chi_A = \det(XI_n - A) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$ (déterminant triangulaire)

donc les racines de χ_A sont les coefficients diagonaux de A.

b : • $A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn}^k \end{pmatrix}$ donc $A^k = 0 \Rightarrow \forall i \ a_{ii}^k = 0 \Rightarrow \forall i \ a_{ii} = 0$

• Si maintenant $\forall i \ a_{ii} = 0$. Une récurrence facile prouve que

les coefficients de A^k sont nuls si $j < i+k$ pour tout $k \le n$

(c'est à dire que A^k s'écrit :

en particulier, $A^n = 0$ et A est nilpotente

II

1 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans une base de E ($M = Mat_B(u)$)

Un calcul direct (qu'il faut faire) prouve que

$$M^2 - Tr(M)M + \det M \, I_2 = 0$$

Comme l'application $u \mapsto Mat_B(u)$ est un isomorphisme d'algèbres

on en déduit $u^2 - Tr(u)u + \det u \, Id = 0$.

II 2 a) $u\circ v\circ u^{-1} - v = (u\circ v - v\circ u)\,u^{-1} = u\circ u^{-1} = Id$

Donc $Tr(u\circ v\circ u^{-1} - v) = Tr(Id) = 2$

Mais par ailleurs $Tr(\underbrace{u\circ v}_{a}\circ \underbrace{u^{-1}}_{b}) = Tr(\underbrace{u^{-1}}_{b}\circ \underbrace{u\circ v}_{a}) = Tr(v)$

Donc $Tr(u\circ v\circ u^{-1} - v) = 0$

c'est contradictoire. Donc <u>u n'est pas inversible</u>

b) on sait que u n'est pas inversible, donc <u>$\det u = 0$</u>

Mais $Tr(u) = Tr(u\circ v - v\circ u) = Tr(u\circ v) - Tr(v\circ u) = 0$.

Donc d'après 1) <u>$u^2 = \vec{0}$</u>

II 3. <u>a</u> : comme $u \neq \vec{0}$, on peut trouver un vecteur $\vec{e_2}$ tel que $u(\vec{e_2}) \neq \vec{0}$

Posons $\vec{e_1} = u(\vec{e_2})$. Comme $u^2 = \vec{0}$ on a $u(\vec{e_1}) = \vec{0}$.

La famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est alors libre : c'est une base de E

et $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>b</u>. on note $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de v dans B. On sait que

$VU - UV = U$: En reportant on obtient $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = \alpha + 1 \end{cases}$

La matrice V est égale à $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$: c'est bien la forme souhaitée

(en renommant les paramètres)

II 3. c : Si l'on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées dans B

on cherche un vecteur tel que $v(\vec{e_3}) = (\lambda+1)\vec{e_3}$ c'est à dire

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda+1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ce système équivaut à $ay = x$. Il suffit de prendre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

~~ainsi dans la base~~ ainsi le vecteur $\underline{\vec{e_3} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}}$ convient il.

Comme on a toujours $u(\vec{e_3}) = u(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$, la matrice de u dans B'

est toujours $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$ celle de v est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$

II.4 : a : Soit W la matrice de w. De la même façon qu'au II.3.b on trouve

que $W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

c'est à dire que $W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (\alpha-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

en renommant $\alpha - \lambda$ en α, c'est exactement la forme cherchée.

b : le calcul fait au a. est une C.N.S.

II.5 : on a $V = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. En écrivant $XV - VX = X$ il vient :

$x_1 = x_3 = x_4 = 0$: ainsi $X = x_2 U$ où U est la matrice de u dans B'

ceci équivaut à : $\underline{\exists \alpha \in \mathbb{C},\ x = \alpha u}$: c'est la forme générale des

solutions cherchée : $\boxed{S = \{\alpha u,\ \alpha \in \mathbb{C}\}}$

III

1 • $u \circ v - v \circ u = u$

• $u^2 \circ v - v \circ u^2 = u(u \circ v - v \circ u) + (u \circ v - v \circ u) u$

$= 2u^2$

• On prouve par récurrence que $\underline{u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k}$ (H_k)

- (H_1) est vraie
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons (H_k) vraie :

$$u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = u^k (u \circ v - v \circ u) + u^k v \circ u - v \circ u^{k+1}$$

$$= u^k (u \circ v - v \circ u) + (u^k v - v \circ u^k) u$$

$$= u^{k+1} + k u^{k+1} \quad (H_k \text{ et } H_1)$$

$$= (k+1) u^{k+1} \quad \square$$

2 : (a) : C'est immédiat

(b) : D'après 1 : $\varphi(u^k) = k u^k$: Comme $u^k \neq 0$ ceci prouve que k est valeur propre de φ. (et u^k le $\vec{vp}$ associé)

(c) Si tous les u^k sont non nuls, le spectre de φ est infini ! c'est faux car φ a au plus $n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$ valeurs propres.

3 : - $\forall x \in \operatorname{Ker} u^k$ on a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ donc $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$

- La suite $(\dim \operatorname{Ker} u^k)_k$ est une suite croissante majorée d'entiers elle est donc non strictement croissante : $\exists p$, $\dim \operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$

- On a alors par récurrence (à faire) : $\forall k \geqslant p$ $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^k$.

- Si $p > n$ alors on a $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^? \subsetneq \operatorname{Ker} u^p$ Mais comme les dimension sont strictement croissantes ceci implique $\dim \operatorname{Ker} u^p > n$: c'est impossible car $\operatorname{Im} u^p \subset E$. Donc $p \leqslant n$. On a donc $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^n (= E$ car u est nilpotent)

4 : a : On choisit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ (Un tel x_0 existe)

alors $(u^{n-1}(x_0), u^{n-2}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$ est libre (vu un exercice).

Comme cette famille compte $n = \dim E$ vecteurs, c'est une base.

b : La liste des images par u^k des vecteurs de la base précédente est :

$(\vec{0}, \dots, \vec{0}, u^{n-1}(x_0), \dots, u^k(x_0))$. Ainsi $\mathrm{Im}\, u^k$ a pour base $(u^k(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$

Ceci prouve que $\mathrm{rg}(u^k) = n-k$ et donc $\dim \mathrm{Ker}\, u^k = k$.

les k vecteurs $(u^{n-1}(x_0), \dots, u^{n-k}(x_0))$ forment une base de cet espace

(Ils sont bien dedans, et ils sont indépendants)

c. Supposons $x \in \mathrm{Ker}\, u^k$

alors d'après l'égalité établie en III 1)

$u^k(v(x)) = v(u^k(x)) + k u^k(x) = 0$ Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\, u^k$.

Pour tout k, v stabilise l'espace vectoriel engendré par les k premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$: cela veut exactement dire que la matrice de V est triangulaire supérieure

5 a : Par construction $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ b : Facilement $\boxed{UV_0 - V_0 U = U}$

c] Comme V est triangulaire et V_0 diagonale, V est triangulaire.

d] On sait que $\begin{cases} U V_0 - V_0 U = U \\ U V - V U = U \end{cases}$ donc $U(V-V_0) = (V-V_0)U$ (*)

On écrit $V - V_0 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & * & \vdots \\ (0) & & & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$

en reportant dans (*) il vient : $\forall i,j \quad b_{ij} = b_{i+1,j+1}$: ceci signifie que tous les coefficients le long d'une même diagonale sont égaux. par suite :

$$V - V_0 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{13} \\ & & & & b_{12} \\ 0 & & & & b_{11} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ & v_{11}+1 & \ddots & \\ & & \ddots & v_{12} \\ (0) & & & v_{11}+n-1 \end{bmatrix}$$

e] V est triangulaire. les termes diagonaux sont donc les valeurs propres. Ils sont tous distincts : Ainsi V a n vp distinctes : Elle est diagonalisable

~~6]~~

6] Notons $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u'. L'équation $u' \circ v_0 - v_0 \circ u' = u'$

s'écrit $MV_0 - V_0 M = M$

en développant il vient $m_{ij}(j - i) = m_{ij} \quad \forall i,j$

cette équation équivaut à $\boxed{m_{ij} = 0 \ \forall i,j, \ j \neq i+1}$

Les matrices solution sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & m_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & m_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & & & & m_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$

Elles forment un EV de dimension $n-1$. Elles sont nilpotentes, donc non diagonalisables (sauf 0)

IV

1 : Il suffit de prendre $u' = u + \frac{\beta}{\alpha} v$.

2 : Il suffit de prendre $v' = \frac{1}{\alpha} v$.