Intégrales à paramètre

Feuille d'exercices #13

Exercice 1 — *Intégrale de Gauss*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Vérifier que $f+g^2$ est une fonction constante (à déterminer) sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^2}$.
4. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 2 — Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$.
4. En déduire une expression de f à l'aide de l'exercice précédent.

Exercice 3 — *Transformée de Fourier*
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt$$

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit désormais la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $\hat{f}'$ puis en déduire $\hat{f}$ en admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 — Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1+x\sin^2 t)\,dt$.

1. Montrer que f est continue sur $I =]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
   On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.
4. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 5 — *Intégrale de Dirichlet*
On pose, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

1. Montrer que ces deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}_+$.
2. Exprimer $\psi(x)$ sous la forme $a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ avec $a(x)$ et $b(x)$ définies par des intégrales sur l'intervalle $[x,+\infty[$.
3. Étudier la continuité de φ et ψ.
4. Démontrer que φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Exercice 6 — *Transformée de Laplace*
Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout $p \geqslant 0$, $L_f(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt$.

1. Montrer que L_f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que L_f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. On suppose dorénavant f bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) \neq 0$.
   a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} pe^{-pt}\left[f(t)-f(0)\right]\,dt \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.
   b) En déduire le *théorème de la valeur initiale* : $L_f(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{p}$.

Exercice 7 — *Fonction Γ d'Euler*

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.
6. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ puis tracer le graphe de Γ.
7. a) Justifier que pour tout $x>0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, \mathrm{d}t$.
   b) En déduire la *formule de Gauss* :

$$\forall x>0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Exercice 8 — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \, \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

1. Démontrer que $\psi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $I =]0,+\infty[$.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.
4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$.
5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}F(x)$.
   Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$,

$$G(x) = C - K\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

Exercice 9 — Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f.
3. Déduire de $f'(x)$ une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 10 — On note f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer de deux manières différentes que f est convexe.
3. Déterminer les limites puis des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

Exercice 11 — On note f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\pi/4} \tan^x(t) \, \mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Établir la continuité puis la monotonie de f. Donner sa limite en $+\infty$.
3. Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 12 — *Indice d'un point par rapport à un lacet*

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1])$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

1. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$,

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, \mathrm{d}t \in \mathbb{Z}$$

2. Montrer que pour z_0 suffisamment grand en module, $I(\gamma, z_0) = 0$.