Corrigé du devoir du 28/11/2020

Exercice 1 : Soit $f \,:\, x \mapsto 2\arctan\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

1. *Déterminer l'ensemble de définition noté $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.*
   La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine étant définie sur $\mathbb{R}^+$, on a :
   $$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2-1 \geq 0\} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[.$$
2. *Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée aux points de dérivation.*
   La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2-1>0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
   Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On a
   $$f'(x) = 2\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{1}{1+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x^2}$$
   donc
   $$f'(x) = 2\times\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0$$
3. *Tracer le graphe de f.*
   La fonction f est donc constante sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$. Comme f est continue en 1, on a $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = f(1) = \pi/2$. De même, comme f est continue en -1, on a $\forall x \in]-\infty,-1[,\ f(x) = f(-1) = -\pi/2$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - z + 1$.
Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
On a $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2-z+1 = z_0$ a au moins une solution complexe donc $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C})$ puis $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
On a $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2-z+1 = z_0$ a au moins une solution complexe non nulle car la somme des deux solutions vaut 1 donc $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C}^*)$ puis $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.
Par définition, $f(\mathbb{R}) = \{x^2-x+1, x \in \mathbb{R}\} = \{(x-1/2)^2+3/4, x \in \mathbb{R}\} = [3/4,+\infty[$.
Par définition $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2-z+1 \in \mathbb{C}\}$ donc $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
Par définition $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2-z+1 \neq 0\}$ donc $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}\setminus\left\{(1\pm i\sqrt{3})/2\right\}$.
Par définition $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^2-z+1 \in \mathbb{R}\}$.

Soit $z \in \mathbb{R}$, on a :
$$z^2-z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2-z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2-z = \bar{z}^2-\bar{z} \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}-1) = 0$$
donc $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \Re(z) = \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 : On souhaite démontrer que : $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ x^y + y^x \geq 1$.

1. (a) *Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1+x$.*
   On considère $f \,:\, x \mapsto e^x - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1.$$
   Donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$ et croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc un minimum en 0. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive puis que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$.

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère $f_a \,:\, t \mapsto t\ln(at)$.
   Étudier f_a : domaine de définition, de dérivation, variations, limites, valeur du minimum, tangente au point d'abscisse $1/a$ et graphe.
   La fonction ln étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_a est définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \,:\, ax > 0\} = \mathbb{R}^{+*}$ car $a > 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f_a'(x) = \ln(ax)+1$. La fonction f_a est donc décroissante sur l'intervalle $]0,\frac{1}{ae}[$ et croissante sur l'intervalle $]\frac{1}{ae},+\infty$.
   Elle admet donc un minimum en $\frac{1}{ae}$ égal à $\frac{-1}{ae}$.
   On a, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} f_a(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$.
   De plus, f s'annule en $1/a$. La tangente au point d'abscisse $1/a$ a pour équation $y = x - 1/a$.
2. On suppose que $x \in]0,1]$ et que $0 < y \leq x$. On pose $a = \frac{y}{x}$.

   (a) On suppose dans cette question que $e^{-1} \leq a \leq 1$.

   i. *Prouver que $x\ln(ax) \geq -1$ et que $ax\ln(x) \geq -e^{-1}$.*
   On a $x\ln(ax) = f_a(x) \geq \frac{-1}{ae} \geq -1$ car le minimum de f_a est $\frac{-1}{ae}$ et car $e^{-1} \leq a$.
   On a $ax\ln(x) = a^2 f_a(x/a) \geq \frac{-a^2}{ae} = \frac{-a}{e} \geq -e^{-1}$ car $a \leq 1$.

   ii. *En déduire que $x^y + y^x \geq e^{-1} + e^{-1/e} \geq 1$.*
   On a $x^y + y^x = e^{y\ln x} + e^{x\ln y} = e^{ax\ln x} + e^{x\ln(ax)} \geq e^{-1} + e^{-1/e}$.
   Or, $e^{-1/e} \geq 1 + (-1/e)$ d'après 1.b, donc $e^{-1} + e^{-1/e} \geq 1$ puis $x^y + y^x \geq 1$.

(b) On suppose dans cette question que $0 < a < e^{-1}$.

i. *Prouver que $x\ln(ax) \geq \ln(a)$ et que $ax\ln(x) \geq -ae^{-1}$.*

On a $x\ln(ax) = f_a(x)$. Comme $a < e^{-1}$, $\dfrac{1}{ae} > 1$ donc f_a est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. Son minimum sur $[0,1]$ est donc $f_a(1) = \ln a$.
Ainsi, comme $x \in]0,1]$, $x\ln(ax) = f_a(x) \geq \ln(a)$.
On a $ax\ln(x) = a^2 f_a(x/a) \geq -ae^{-1}$ car le minimum de f_a vaut $-1/(ae)$.

ii. *En déduire que $x^y + y^x \geq 1$.*

On a $x^y + y^x = e^{y\ln x} + e^{x\ln y} = e^{ax\ln x} + e^{x\ln(ax)} \geq e^{-a/e} + e^{\ln a}$.
Donc, en utilisant la question 1b, $x^y + y^x \geq e^{-a/e} + a \geq 1 - a/e + a \geq 1$.

3. *Conclure.*

On a prouvé le résultat si $x \in]0,1]$ et si $0 < y \leq x$. Par symétrie, on a donc prouvé le résultat si x et y appartiennent à $]0,1]$.
Reste à prouver le résultat lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x = y = 0$, alors $x^y + y^x = 2 \geq 1$.
Si $x = 0$ et $y \in]0,1]$, alors $x^y + y^x = 1 \geq 1$.
Ainsi, par symétrie le résultat est prouvé lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.
On a donc démontré que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ x^y + y^x \geq 1$.

Pour tout complexe $z = a + ib$ et pour tout réel x strictement positif, on définit l'exponentielle complexe x^z par $x^z = e^{z\ln(x)} = x^a\left(\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x))\right)$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $f_z : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C},\ x \mapsto x^z$

(a) *Démontrer que la fonction f_z est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa dérivée.*

Par définition, la fonction f_z est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si, Réf et Imf le sont.
On a Ré$f : x \mapsto e^{a\ln x}\cos(b\ln(x))$. La fonction ln étant dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et les fonctions cos et exp l'étant sur $\mathbb{R}$, Réf est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De même, Imf est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$(\text{Ré}f)'(x) = e^{a\ln x}\left(\frac{a}{x}\cos(b\ln(x)) - \frac{b}{x}\sin(b\ln(x))\right)$$

et

$$(\text{Im}f)'(x) = e^{a\ln x}\left(\frac{a}{x}\sin(b\ln(x)) - \frac{b}{x}\cos(b\ln(x))\right)$$

donc

$$f'(x) = (\text{Ré}f)'(x) + i(\text{Im}f)'(x) = e^{a\ln x}\frac{a+ib}{x}\left(\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x))\right)$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{z}{x}x^z = zx^{z-1}.$$

(b) *Justifier que f_z admet des primitives sur $\mathbb{R}^{+*}$ et les déterminer.*

La fonction f_z est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $z \neq -1$, $x \mapsto \dfrac{x^{z+1}}{z+1}$ est une primitive de f_z donc les primitives de f_z sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^{z+1}}{z+1} + C$ avec $C \in \mathbb{C}$.
Si $z = -1$, alors ln est une primitive de f_z donc les primitives de f_z sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln x + C$ avec $C \in \mathbb{C}$.

(c) *En déduire une primitive de $f, : t \mapsto t\cos(\ln(t))$.*

On a $f = \text{Ré}(f_{1+i})$. Une primitive de f est donc :

$$t \mapsto \text{Ré}\left(\frac{t^{2+i}}{2+i}\right) = \text{Ré}\left(\frac{(2-i)t^{2+i}}{5}\right) = \frac{t^2}{5}\left(2\cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t))\right)$$

(d) *Retrouver ce résultat de deux façons : grâce à un changement de variable puis à l'aide d'intégrations par parties.*

La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \int_1^x t\cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminons $F(x)$ à l'aide d'un changement de variable.
La fonction $u \mapsto e^u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$F(x) = \int_0^{\ln x} e^u\cos(u)\,e^u\mathrm{d}u = \text{Ré}\left(\int_0^{\ln x} e^{(2+i)u}\mathrm{d}u\right) = \text{Ré}\left[\frac{e^{(2+i)u}}{2+i}\right]_0^{\ln x}$$

Comme $\left[\dfrac{e^{(2+i)u}}{2+i}\right]_0^{\ln x} = \left[\dfrac{(2-i)e^{(2+i)u}}{5}\right]_0^{\ln x}$, on obtient :

$$F(x) = \left[e^{2u}\frac{2\cos u + \sin u}{5}\right]_0^{\ln x} = \frac{x^2}{5}\left(2\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x) - 2)\right)$$

On retrouve qu'une primitive de f est $t \mapsto \dfrac{t^2}{5}\left(2\cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t))\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminons $F(x)$ à l'aide d'intégrations par parties.
Les fonctions $t \mapsto t^2/2$ et $t \mapsto \cos(\ln(t))$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2}\cos(\ln(t))\right]_1^x + \int_1^x \frac{t}{2}\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

et, de même :

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2}\cos(\ln(t))\right]_1^x + \left[\frac{t^2}{4}\sin(\ln(t))\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{4}\cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, $\dfrac{5}{4}F(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x) - 2))$.

On retrouve qu'une primitive de f est $t \mapsto \dfrac{t^2}{5}(2\cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t)))$.

Exercice 4 : On considère l'équation différentielle

$(E)\ :\ y''' - (4+i)y'' + (1-5i)y' + (2+6i)y = (2+6i)x^2 - 16ix - 9 + 3i - (2+7i)e^x$

dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note (E_0) l'équation homogène associée dont on note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions.

1. *Soit $r \in \mathbb{C}$. Prouver que la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) si et seulement si r est racine du polynôme $P = X^3 - (4+i)X^2 + (1-5i)X + 2 + 6i$.*
   Soit $f\ :\ t \mapsto e^{rt}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f'''(t) - (4+i)f''(t) + (1-5i)f'(t) + (2+6i)f(t) = P(r)f(t).$$
   Comme f ne s'annule pas, on en déduit que f est solution de (E_0) si et seulement si r est racine du polynôme $P = X^3 - (4+i)X^2 + (1-5i)X + 2 + 6i$.
2. *Déterminer les racines complexes de P. On les note r_1, r_2 et r_3. On pourra remarquer que P possède une racine réelle simple et factoriser*
   Comme 1 est racine de P on factorise P par $X - 1$:
   $$P = (X-1)\left(X^2 - (3+i)X - 2 - 6i\right)$$
   Le discriminant de $X^2 - (3+i)X - 2 - 6i$ est égal à $\Delta = 16 + 30i$. On cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Cela implique $|\delta|^1 = |\Delta| = 30^2 + 16^2 = 4 \times 289$. On résout donc le système
   $$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 16 \\ 2ab & = 30 \\ a^2 + b^2 & = 34 \end{cases}$$
   On prend $\delta = 5 + 3i$. Les racines de P sont donc 1, $4 + 2i$ et $-1 - i$.
3. *Prouver que $\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \nu e^{r_3 t},\ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3\right\}$*
   Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ et $f\ :\ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \nu e^{r_3 t}$. On a
   $$f'''(t) - (4+i)f''(t) + (1-5i)f'(t) + (2+6i)f(t) = \lambda P(r_1)e^{r_1 t} + \mu P(r_2)e^{r_2 t} + \nu P(r_3)e^{r_3 t} = 0.$$
   Donc $\left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \nu e^{r_3 t},\ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3\right\} \subset \mathcal{S}_0$.

   Soit $f \in \mathcal{S}_0$. Posons $g\ :\ t \mapsto f(t)e^{-r_1 t}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{cases} f(t) = e^{r_1 t}g(t) \\ f'(t) = e^{r_1 t}\left(g'(t) + r_1 g(t)\right) \\ f''(t) = e^{r_1 t}\left(g''(t) + 2r_1 g'(t) + r_1^2 g(t)\right) \\ f'''(t) = e^{r_1 t}\left(g'''(t) + 3r_1 g''(t) + 3r_1^2 g'(t) + r_1^3 g(t)\right) \end{cases}$$
   Comme $f'''(t) - (4+i)f''(t) + (1-5i)f'(t) + (2+6i)f(t) = 0$ et $e^{-r_1 t} \neq 0$, on obtient :
   $$g'''(t) + (3r_1 - 4 - i)g''(t) + (3r_1^2 - 2(4+i)r_1 + 1 - 5i)g'(t) + P(r_1)g(t) = 0$$
   La fonction g' est donc solution de l'équation différentielle d'ordre 2
   $$(E')\ :\ y''(t) + (3r_1 - 4 - i)g'(t) + (3r_1^2 - 2(4+i)r_1 + 1 - 5i)y = 0$$
   En prenant $r_1 = 1$, on a $(E')\ :\ y''(t) + (-1-i)g'(t) + (-4-7i)y = 0$ L'équation caractéristique associée $r^2 - (1+i)r - 4 - 7i = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 + 30i$. Ses solutions sont $3 + 2i$ et $-2 - i$ donc il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = Ae^{(3+2i)x} + Be^{-(2+i)x}$$
   Il existe donc $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda + \mu e^{(3+2i)x} + \nu e^{-(2+i)x}$
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^x + \mu e^{(4+2i)x} + \nu e^{-(1+i)x}$
   Par conséquent, $\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \nu e^{r_3 t},\ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3\right\}$.
4. *Démontrer que si $f_p \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S} = \{f_p + f_0,\ f_0 \in \mathcal{S}_0\}$*
   On vérifie que si $f_0 \in \mathcal{S}_0$, alors $f_p + f_0 \in \mathcal{S}$ et que si $f \in \mathcal{S}$, alors $f - f_p \in \mathcal{S}_0$.
5. *Déterminer $\mathcal{S}$.*
   On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c + dxe^x$.
   On trouve $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ et $d = 1$.

Exercice 5 : Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t$.

1. *Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $I_{p,0}$ et trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.*
   On a $I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 t^p \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.
   Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (1-t)^q$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a :
   $$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}.$$

2. *Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Proposer une formule pour $I_{p,q}$ et la prouver.*

Montrons que $I_{p,q}=\dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$.

Pour tout $q\in\mathbb{N}$, on pose $H(q)=$ "$\forall p\in\mathbb{N},\ I_{p,q}=\dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$"

D'après l'initialisation $H(0)$ est vraie.

Soit $q\in\mathbb{N}$ tel que $H(q)$ soit vraie.

Soit $p\in\mathbb{N}$, on a $I_{p,q+1}=\dfrac{q+1}{p+1}I_{p+1,q}$ grâce à la question précédente puis, par hypothèse de récurrence $I_{p,q+1}=\dfrac{q+1}{p+1}\dfrac{q!(p+1)!}{(p+q+2)!}=\dfrac{(q+1)!p!}{(p+q+2)!}$.

Ainsi, $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ I_{p,q}=\dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$.

3. Soit n un entier. On pose, $P_n : x\mapsto \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^x t^n(1-t)^n\mathrm{d}t$.

   (a) *Prouver que $P_n(1)=1$.*

   On a $P_n(1)=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}I_{n,n}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}\dfrac{n!n!}{(2n+1)!}=1$

   (b) *Prouver que $\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)+P_n(1-x)=1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de la fonction P_n ?*

   Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $u\mapsto 1-u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\int_0^x t^n(1-t)^n\mathrm{d}t=\int_1^{1-x}(1-u)^n u^n\times(-1)\mathrm{d}u$$

   donc $\displaystyle\int_0^x t^n(1-t)^n\mathrm{d}t=-\int_0^{1-x}(1-u)^nu^n\mathrm{d}u+\int_0^1(1-u)^nu^n\times\mathrm{d}u$ Avec la question précédent, on obtient $P_n(x)+P_n(1-x)=1$.

   On en déduit que le graphe de P_n est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1/2,1/2)$.

Exercice 6 : On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ (4-x^2)y'-(4+x)y=2+x$

1. *Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur $I=]-2,2[$.*

Sur $I=]-2,2[$, on a $(E_0)\Leftrightarrow y'-\dfrac{4+x}{4-x^2}y=0$.

Pour tout $x\in I$, on a $\dfrac{4+x}{4-x^2}=\dfrac{x}{4-x^2}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}$.

Une primitive de $x\mapsto\dfrac{x}{4-x^2}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}$ est

$$x\mapsto\frac{-1}{2}\ln(4-x^2)-\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln\left(\sqrt{\frac{2+x}{(2-x)^3}}\right)$$

donc $\mathcal{S}_0=\{I\to\mathbb{R},\ x\mapsto C\sqrt{\dfrac{2+x}{(2-x)^3}},\ C\in\mathbb{R}\}$

2. *Déterminer les solutions de (E) sur $I=]-2,2[$.*

On cherche une solution particulière de la forme $x\mapsto C(x)\sqrt{\dfrac{2+x}{(2-x)^3}}$ avec C dérivable sur I. On est ramené à primitiver $g : x\mapsto\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$. Comme g est continue sur l'intervalle I, une primitive est $G : t\mapsto\displaystyle\int_0^t\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\mathrm{d}x$.

Soit $t\in I$, on a :

$$G(t)=\int_0^t\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x-\int_0^t\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^t\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{t/2}\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=[2\arcsin u]_0^{t/2}$ et $\displaystyle\int_0^t\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^t=4-\sqrt{4-t^2}$ donc

$$G(t)=2\arcsin(t/2)+4+\sqrt{4-t^2}$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\left\{I\to\mathbb{R},\ x\mapsto\left(C+2\arcsin(t/2)+\sqrt{4-t^2}\right)\sqrt{\dfrac{2+x}{(2-x)^3}},\ C\in\mathbb{R}\right\}$.

Remarque : On pouvait aussi procéder à un changement de variable $x=2\cos u$ ou $u=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

3. *Prouver que parmi les solutions de (E), il y en a au plus qui possède une limite finie en 2.*

Comme $\lim\limits_{x\to2}C+2\arcsin(t/2)+\sqrt{4-t^2}=C+\pi$ et comme $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{2+x}{(2-x)^3}}=+\infty$, il existe au plus une solution de (E) possédant une limite finie en 2 ; il s'agit de

$$x\mapsto\left(2\arcsin(x/2)+\sqrt{4-x^2}-\pi\right)\sqrt{\frac{2+x}{(2-x)^3}}$$