Séries entières

Feuille d'exercices #09

Partie A – Rayon de convergence

Exercice 1 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général $a_n x^n$ avec :

$$a_n = 1\ ;\quad a_n = n\ ;\quad a_n = \frac{1}{n}\ ;\quad a_n = \frac{1}{n^2}\ ;\quad a_n = \sin(n)\ ;\quad a_n = n!\ ;\quad a_n = \frac{1}{n!}\ ;$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}\ ;\quad a_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{sh}^2(n)}\ ;\quad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\ ;\quad a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\ ;$$

$$a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\ ;\quad a_n = \frac{n^2}{3^n + n}\ ;\quad a_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)\ ;\quad a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

Exercice 2 — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum n! z^{2n}\ ;\quad \sum \frac{z^{n!}}{n!}\ ;\quad \sum \sin(n) z^n\ ;\quad \sum \frac{\cos^2(n)}{n} z^n\ ;\quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{z^n}{\ln(n!)}\ ;$$

$$\sum 5^n z^{2n+1}\ ;\quad \sum a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

Exercice 3 — Quel lien entre les rayons de convergence de $\sum a_n^2 z^n$ et $\sum a_n z^n$?

Exercice 4 — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

et on note R' la rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1. Comparer $|a_n|$ et $|b_n|$. En déduire que $R' \geqslant \max(1, R)$.
2. En distinguant les cas $R' = 1$ et $R' > 1$ et en exprimant $|b_n|$ en fonction de $|a_n|$, prouver que $R' = \max(1, R)$.

Partie B – Calcul de sommes

Exercice 5 — Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes, calculer leur somme et, s'il y a lieu, étudier la convergence aux bornes.

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}\ ;\quad \sum \operatorname{ch}(n) x^n\ ;\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}\ ;\quad \sum \frac{x^n}{2n+1}$$

Exercice 6 — Déterminer le rayon de convergence et préciser la somme de :

$$\sum \frac{x^n}{n(n+2)}\ ;\quad \sum \frac{n^2+n+1}{n} x^n\ ;\quad \sum \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n\ ;\quad \sum \frac{2n+1}{2n+3} x^n\ ;$$

$$\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n\ ;\quad \sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n!} x^n\ ;\quad \sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}\ ;\quad \sum \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$$

Exercice 7 — Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 8 — On pose $a_n = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $(n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$.
2. Donner le rayon de convergence (noté R) de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Montrer que f est solution sur $]-R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera et en déduire f.

Exercice 9 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$.

1. Déterminer $\alpha, M > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M\alpha^n$.
2. En déduire que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif.
3. Calculer la somme de la série entière et en déduire l'expression de a_n.

Exercice 10 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2a_n}{n+2}$$

1. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

2. On note f sa somme. Montrer que $x \mapsto x f(x)$ est solution de l'équation :

$$(1-x)y'(x)-(2x+1)y(x)=0$$

En déduire une expression de f.

Exercice 11 — *Dérangements*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et d_n le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe.

On convient que $d_0=1$ et on considère la fonction f définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n$.

1. Montrer que f est définie sur $]-1,1[$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$.
3. En déduire $f(x)$ puis exprimer d_n en fonction de n.

Exercice 12 — *Involutions*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle involution de $[\![1,n]\!]$ toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma\circ\sigma = \mathrm{id}$. On note i_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. Par convention, $i_0=1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{i_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $i_n = i_{n-1}+(n-1)i_{n-2}$.
3. Calculer, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i_n}{n!}x^n$.
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{i_n}{n!}$ en $+\infty$.

Partie C – Comportement au bord

Exercice 13 — On pose, sous réserve d'existence, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer à l'aide d'une minoration la limite de f en 1.

Exercice 14 — On définit, sous réserve de convergence, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.

1. Donner le domaine de définition de f puis étudier la continuité de f.
2. Justifier que $(1-x)f(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}\ell$ où ℓ est un réel à déterminer.

Exercice 15 — Soit $f : x\mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 16 — On considère la série entière $\sum_{n\geqslant1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme, notée f.
2. Montrer que $f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n$.

Exercice 17 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum|a_{n+1}-a_n|$ converge.

1. Justifier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite notée par la suite ℓ.
Qu'en déduire au sujet du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
2. Montrer que $\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\ell$.

Exercice 18 — *Théorème de convergence radiale d'Abel - cas complexe*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence égal à 1.
On suppose que $\sum a_n$ converge.

1. On fixe $\theta_0\in[0,\pi/2[$. Représenter l'ensemble :

$$\Delta_{\theta_0}=\left\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1 \text{ et } \exists r>0,\ \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ z=1-r\mathrm{e}^{i\theta}\right\}$$

Représenter graphiquement l'ensemble Δ_{θ_0}.
2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. On note R_n le reste au rang n de $\sum a_n$.
Montrer que $f(z)-\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=(z-1)\sum_{n=0}^{+\infty}R_nz^n$.

3. Montrer que pour $z = 1 - re^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$, $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \dfrac{2}{2\cos(\theta_0) - r}$.

4. En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 19 — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, que le rayon de convergence de $\sum v_n x^n$ vaut 1 et que $\sum v_n$ diverge.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

2. En déduire un équivalent en 1^- de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

Exercice 20 —

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante supposée intégrable.
Montrer que pour tout $h > 0$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(nh)$ converge et que :
$$\lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En posant $x = \mathrm{e}^{-h}$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \to 1^-$.

Partie D – Développements en série entière

Exercice 21 — Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)\ ; \quad g(x) = \mathrm{sh}(x)\cos(x)\ ; \quad h(x) = \ln^2(1+x)\ ;$$
$$j(x) = \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)\ ; \quad k(x) = \frac{1}{x^2+x+1}\ ; \quad l(x) = \arcsin(x)$$

Exercice 22 — Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :
$$f(x) = \ln(x^2-5x+6)\ ; \quad g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)\ ; \quad h(x) = \cos(x)\mathrm{ch}(x)\ ;$$
$$k(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)\ ; \quad l(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ ; \quad m(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}\ ;$$
$$p(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t\ ; \quad r(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$$

Exercice 23 — Pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, déterminer le développement en série entière de :
$$x \mapsto \mathrm{sh}(\arcsin x)\ ; \quad x \mapsto \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)$$

Exercice 24 — Soit $a \in]-1,1[$.

1. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$ est définie puis de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $|f^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{1-|a|}$.
En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 — *Inverse d'une série entière*

Soient $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

1. On suppose dans cette question l'existence d'une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R' > 0$ et dont la somme $g(x)$ vérifie $f(x)g(x) = 1$.
Exprimer alors b_n en fonction de a_n.

2. a) Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant \alpha^n$.
b) En déduire l'existence de la série entière introduite dans la première question. On vérifiera en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant \beta^n$ pour un certain réel $\beta > 0$.

Exercice 26 — On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^n$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1.
4. Trouver un équivalent de a_n, où (a_n) est définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 27 — *Analycité de la somme d'une série entière*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme f.
Montrer que pour tout $z_0 \in D(0,R)$, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z \in D(z_0, R-|z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$$

Exercice 28 — *Principe des zéros isolés*

1. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose de plus développable en série entière sur $D(0,R)$, où $R>0$. Montrer que si f s'annule une infinité de fois au voisinage de 0, alors f est nulle.
2. Retrouver le principe d'unicité du développement en série entière.
3. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs. On suppose que :
$$\exists r>0, \quad \forall z \in D(0,r), \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 0$$
Montrer que l'une des deux séries est nulle.

Partie E – Intégration terme à terme

Exercice 29 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe sommable.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.
2. En notant f la somme de la série, montrer que pour tout $x \in D_f(0,1)$,
$$\int_0^{+\infty} f(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exercice 30 — On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le développable en série entière de f.
2. Prouver que $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 31 — Soit $a \in]0,1[$. On pose $I_a = \displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Établir la convergence de I_a puis justifier que :
$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$$
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 32 — *Inégalité de Cauchy*
Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$.

1. Calculer, pour $r \in [0,R[$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
En déduire que $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.
2. Montrer que si $R=+\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Exercice 33 — Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$. Soit r un réel tel que $0<r<R$. On pose :

$$g(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{i\theta}))}{r - z\mathrm{e}^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que g est développable en série entière et exprimer $g(z)$ en fonction de $f(z)$ et $f(0)$.
2. Qu'en déduire pour une fonction f qui ne prendrait que des valeurs réelles sur $\mathscr{C}(0,r)$ pour un certain réel $r>0$?