Résumé 8 – Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

→ Modes de convergence

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition : Convergence simple

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Établir la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à montrer la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in I$.

Définition : Convergence uniforme

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

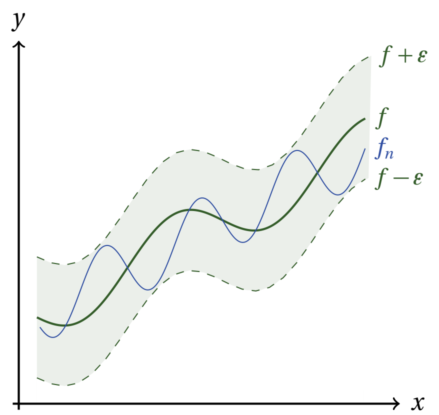

Illustration de la convergence uniforme

Proposition : CVU $\Longrightarrow$ CVS

Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.

Méthode : établir la convergence uniforme

On commence par déterminer la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'offrent deux possibilités :

❶ La borne supérieure sur I de $|f_n - f|$ s'obtient parfois par simple étude de fonction. Il suffit dans ce cas de passer à la limite.

❷ Le calcul explicite de la borne sup est malaisé, on majore alors en cherchant $M_n \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n \quad \text{avec} \quad M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Méthode : établir la non-convergence uniforme

Les possibilités sont multiples. On peut justifier :

❶ la non-convergence simple (condition *minimale*) ;

❷ le non-respect des théorèmes de continuité et de double limite.

❸ l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$|f_n(u_n) - f(u_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

→ Convergence uniforme, continuité et double limite

En cas de convergence uniforme, la continuité se transmet par passage à la limite.

Théorème : Continuité de la limite uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

La continuité étant une propriété locale, on peut se contenter de travailler seulement au voisinage de a.

Théorème : Théorème de la double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Ce résultat généralise le précédent.

→ Convergence uniforme, intégration sur un segment

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Si l'intervalle n'est pas borné, on cherchera à exploiter le théorème de convergence dominée.

Proposition : Convergence uniforme et primitives

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Soit $x_0 \in I$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

→ Convergence uniforme et dérivation

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- (f_n) converge simplement sur I vers f.
- (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément vers f sur (tout segment de) I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

La convergence uniforme de la suite des dérivées s'établira sur l'intervalle I ou, si nécessaire, seulement sur tout segment inclus dans I.

Corollaire

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.
- Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction f_k.
- $\left(f_n^{(p)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f_p.

Alors (f_n) converge uniformément vers $f = f_0$ sur tout segment de I. La fonction f est de plus de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = f_k$.

Séries de fonctions

→ Modes de convergence

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle :

- somme partielle au rang n la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$;
- série de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : Convergence simple, uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I.
En cas de convergence, on pose :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

La convergence uniforme d'une série entraîne sa convergence simple.

Proposition

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Il n'est souvent pas commode de justifier la convergence uniforme d'une série de fonctions : il faut au préalable montrer la convergence simple pour ensuite étudier la convergence uniforme du reste vers 0.

Définition : Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Pour justifier la convergence normale, on établit souvent la majoration $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ convergente.

Théorème

Si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Dans ce cas, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty,I} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,I}$.

$$\boxed{\text{CV normale}} \implies \boxed{\text{CV uniforme}} \implies \boxed{\text{CV simple}}$$

Toute série convergeant uniformément ne converge pas nécessairement normalement. La majoration uniforme du reste est souvent aisée lorsqu'une série $\sum (-1)^n u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées :

$$\forall x \in I, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x) \right| \leqslant |u_{n+1}(x)|$$

Sous condition, $\|R_n\|_\infty \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

→ Continuité et double limite

Théorème

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

En pratique, la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur I. Cette condition s'avère pratique lorsqu'il n'y pas convergence uniforme (ou mieux, normale) sur I.

Théorème : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

→ **Dérivation et intégration d'une série de fonctions**

Théorème : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniform. sur tout segment de I.

Alors, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

On généralise alors aux séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$.

Corollaire : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.
- Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et,

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Théorème : Intégration terme à terme (segment)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

Les théorèmes qui précèdent sont encore valables pour $f_n : I \to F$ avec F un espace normé de dimension finie. Les théorèmes de continuité et de double limite sont même encore vérifiés pour $f_n : A \subset E \to F$ avec A une partie d'un espace normé E de dimension finie.

Approximation uniforme

Définition : Fonctions continues par morceaux

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si pour une certaine subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

- $f_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- $f_{]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}

La subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ est dite adaptée à f.

Les fonctions en escalier et les fonctions continues sont continues par morceaux.

Proposition

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Théorème : Approximation uniforme (segment)

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Théorème : Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales.