DM 7 : algèbre linéaire sans réduction

Ce sujet est composé de divers exercices indépendants.
Il est demandé de traiter au moins 3 des 4 premiers (et obligatoirement le 2).
L'exercice 5 est sensiblement plus difficile.

Exercice 1. Le théorème de Cayley Hamilton : méthode des comatrices.

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $P(x) = \det(xI - A)$ son polynôme caractéristique.

2. Démontrer que P est bien un polynôme de la variable x de degré n et de coefficient dominant 1.

   Désormais, on note $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$.
   Soit aussi $C(x)$ la matrice transposée de la comatrice de $xI - A$.

3. Etablir une relation simple entre $A, C(x)$ et $P(x)$.

4. Montrer qu'il existe des matrices $C_i, i = 0..n-1 \in M$ telles que pour tout x on ait $C(x) = C_0 + C_1 x + ... + C_{n-1}x^{n-1}$.

   Calculer les C_i en fonction de A et des a_i.
5. En déduire que $A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_n I_n = 0$. (théorème de Cayley-Hamilton)

Exercice 2. Trace et commutateurs.

N est un entier au moins égal à 2. M désigne l'algèbre $M_n(K)$.
La base canonique de M est notée $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
On rappelle que $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ pour tout couple de matrices $A, B \in M$.

1. Calculer pour $i \neq j$ les produits, $E_{i,j}E_{j,i}$, $E_{j,i}E_{i,j}$, $E_{i,i}E_{i,j}$, $E_{i,j}E_{i,i}$.

2. Soit f une forme linéaire sur M ayant la propriété $f(AB) = f(BA)$ pour tout couple de matrices $A, B \in M$.
   Montrer que f est proportionnelle à la trace (on montrera que $f(E_{i,j})$ s'exprime simplement en fonctionde $f(E_{1,1})$.

3. Une matrice C est appelée commutateur s'il existe A, B telles que $C = AB - BA$.
   On note F le sous espace vectoriel engendré par les commutateurs.
   Montrer que F est l'ensemble des matrices de trace nulle.

4. Soit A une matrice telle que $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB)$ pour tout B, C.
   (a) Montrer que si X est une matrice de trace nulle, $\operatorname{tr}(AX) = 0$.
   (b) En déduire que pour toute matrice X on a $\operatorname{tr}(AX) = \dfrac{1}{n}\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(X)$
   (c) Déterminer les matrices M telles que pour tout X on ait $\operatorname{tr}(MX) = 0$
   (d) Montrer enfin que A est une matrice scalaire.

5. Dans cette question on améliore le résultat de la question 3.
   (a) Soit $D \in M$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont distincts. Montrer que si $B \in M$ à coefficients diagonaux nuls il existe $A \in M$ telle que $B = AD - DA$.
   On pourra étudier le rang de l'endomorphisme de M défini par $A \mapsto AD - DA$

(b) Montrer par récurrence sur n que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

(c) en déduire que toute matrice de trace nulle est un commutateur (et pas seulement une combinaison linéaire de commutateurs).

Exercice 3. Exemples d' utilisation de projecteurs.

Les question qui suivent sont indépendantes.

1. Un lemme de factorisation :

   (a) Soit v un automorphisme et p un projecteur. Quelle est l'image de $p \circ v$ le noyau de $p \circ v$?

   (b) Soit u un endomorphisme. Construire un projecteur p et un automorphisme v tels que $u = p \circ v$.

   (c) Application : On se propose d'établir que pour deux endomorphismes f, g on a toujours $\chi_{fg} = \chi_{gf}$.

      i. Montrer que c'est vrai si f est un automorphisme.

      ii. Montrer que c'est vrai si f est un projecteur (on pourra raisonner matriciellement)

      iii. Conclure.

2. Quand la somme de projecteurs est elle un projecteur ?

   Soient $p_1, ..., p_r$ des projecteur d'un espace de dimension finie. On pose $p = \displaystyle\sum_1^r p_i$.

   (a) On suppose que p est un projecteur.
   i) Montrer que $\operatorname{Im} p = \oplus_1^r \operatorname{Im} p_i$ (indication : on rappelle que pour un projecteur, le rang est égal à la trace).
   ii)En déduire que $p(x) = p_i(x)$ pour x dans $\operatorname{Im} p_i$. Que vaut $p_i \circ p_j$ pour $i \neq j$?

   (b) Prouver que p est un projecteur si et seulement si $p_i \circ p_j = 0$ dès que i et $j$sont distincts.

Exercice 4. Matrices de rang 1.

$\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

Convention de notation : si X et Y sont deux vecteurs colonne, alors la matrice $X^T Y$ est de taille $(1, 1)$ on l'identifie à un scalaire. On fait la remarque suivante : comme c'est un scalaire, il commute avec les matrices dans le produit.

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$.

   (a) Démontrer que le rang de la matrice A est égal à 1 si et seulement si il existe L et N matrices colonnes telles que $A = LN^T$.

   (b) Préciser, en fonction de L et N l'image et le noyau de l'endomorphisme associé à A.

   (c) Etudier l' unicité de l'écriture $A = L.N^T$.

   (d) Caractériser les couples L, N pour lesquels A est une matrice de projecteur (resp. nilpotente).

2. Soient $C_1, .., C_n$ et $L_1, ..., L_n$ des lignes et des colonnes indépendantes. Démontrer que la famille des matrices $M_{i,j} = C_i L_j$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$

3. Soit M de rang r. Montrer qu'existent $C_1, .., C_r$ et $L_1, ..., L_r$ telles que $M = \displaystyle\sum_1^r C_i L_i$. Montrer que $C_1, .., C_r$ et $L_1, ..., L_r$ sont des familles libres. Caractériser à l'aide de ces deux familles l'image et le noyau de M.

4. Etablir pour toute matrice M que $rg(M) = \min\{k \in \mathbb{N}, \exists M_1, \ldots M_k, \text{ matrices de rang } 1, M = \displaystyle\sum_{i=1}^k M_i\}$.

Exercice 5. Sous algèbres irréductibles de L(E).

Ce problème est sensiblement plus difficile. Il utilise de façon indirecte l'exercice précédent qu'il est conseillé d'avoir cherché avant.

E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
Soit A une sous algèbre de $L(E)$. Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par A si pour tout $u \in A$ on a $u(F) \subset F$.
La sous algèbre A est dite irréductible, si les seuls sous espaces stables par A sont $\{0\}$ et E.
On se propose d'établir dans cet exercice que la seule sous algèbre irréductible de $L(E)$ est $L(E)$ lui même (théorème de Burnside).

1. Démontrer que $L(E)$ est irréductible.

   Dans la suite, on se donne une sous algèbre A irréductible.
2. Soit maintenant u un endomorphisme qui commute avec tous les éléments de A. Prouver que u est une homothétie.
3. a) Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que le sous espace vectoriel $F = \{v(x), v \in A\}$ est égal à E
   b) (difficile) Soit l une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que l'ensemble $F' = \{l \circ v, v \in A\}$ est égal à E^*.
4. On considère un endomorphisme v de rang 1. Etablir qu'il existe une forme linéaire l et un vecteur x tels que pour tout y on ait $v(y) = l(y)x$.
5. Déduire des question précédentes que si l'algèbre A contient un endomorphisme de rang 1 , alors elle les contient tous. Etablir alors que $A = L(E)$
6. Dans cette question, on suppose que A contient un endomorphisme de rang $r > 1$ et on démontre qu'il existe un endomorphisme $u' \in A$ non nul et de rang strictement plus petit que r.
   a) Démontrer l'existence de $(x, y) \in E^2$ et de $v \in A$ tels que $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $v \circ u(x) = y$.
   b)Démontrer alors qu'il existe un nombre complexe λ tel que la restriction de l'endomorphisme $u \circ v - \lambda Id$ à l'image de u ne soit ni nulle ni injective.
   indication (pour les 3/2) : démontrer que pour tout endomorphisme f de tout espace de dimension finie, il existe un nombre complexe λ tel que $\det(f - \lambda Id) = 0$

   c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = u \circ v \circ u - \lambda u$ convient.
7. Démontrer finalement que $A = L(E)$.
8. Soit B une sous algèbre unitaire stricte de $L(E)$. On note n la dimension de E. Montrer que dim$B \leq n^2 - n + 1$ et donner un exemple d'une algèbre de dimension $n^2 - n + 1$