

PROBLÈME B RADIOACTIVITÉ α

B.1. Généralités

B.1.1. Il s'agit d'un noyau chargé positivement. Cette particule est donc sensible au champ électrique.

B.1.2. C'est la conservation de la charge. Le nombre de protons dans le noyau fils est donc de $\boxed{Z - 2}$

B.1.3. On applique la conservation de l'énergie mécanique à l'électron. Son énergie potentielle a pour expression $E_p = -e.V$ avec V le potentiel électrique. Par conséquent :

$$0 - e.V_B = E_{c(A)} - e.V_A \text{ d'où l'énergie cinétique acquise } E_{c(A)} = e.(V_A - V_B) = e.U_{AB}$$

$$\text{Soit } \boxed{1 \text{ eV} = 1,6.10^{-19} \text{ J}}$$

B.1.4. On fait l'hypothèse la masse volumique uniforme.

$$\text{Alors } \rho = \frac{3.A.m_{nucleon}}{4.\pi.R^3} \text{ soit } \boxed{R = \left(\frac{3 m_{nucleon}}{4.\pi. \rho} \right)^{\frac{1}{3}} . A^{\frac{1}{3}}}$$

Pour le noyau d'Hélium 4, le faible nombre de nucléons rend difficile la modélisation par une répartition uniforme des masses à l'intérieur d'une sphère.

B.2. Estimation de la probabilité de désintégration α

B.2.1. Il s'agit de l'effet tunnel. La largeur de la barrière à franchir doit être finie. Ce ne sera le cas que si $\boxed{E_\alpha > 0}$

B.2.2. C'est l'interaction forte, à très faible distance permettant la cohésion entre deux entités de même charge.

B.2.3. On néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique entre la particule α de charge $2.e$ et l'extérieur à cette particule de charge $(Z - 2).e$. L'énergie potentielle d'interaction a donc pour expression

$$V = \frac{(Z - 2).2.e^2}{4.\pi.\epsilon_0.r} \text{ soit } \boxed{K = \frac{(Z - 2).2.e^2}{4.\pi.\epsilon_0}}$$

B.2.4.

B.2.4.1- On définit R_2 tel que $V(R_2) = E_\alpha$

$$\text{On en déduit } R_2 = \frac{(Z - 2).2.e^2}{4.\pi.\epsilon_0.E_\alpha} = \frac{82.2.1,6.10^{-19}.9.10^9}{5,4.10^6} = 4,4.10^{-14} \text{ m et } V_2 = \frac{R_2}{R_1}.E_\alpha = 31 \text{ MeV}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{R_2 = 4,4.10^{-14} \text{ m et } V_2 = 31 \text{ MeV}}$$

On recherche la largeur de la barrière $a = R_2 - R_1 = 4,8.R_1$.

On remarque ici que l'épaisseur de la barrière est largement supérieure à la largeur du puits. Afin de discuter de l'hypothèse de la barrière épaisse, l'idéal serait d'avoir l'expression de P pour discuter des conditions de simplification de l'expression.

On pourrait aussi utiliser le résultat mis en place en cours sur la barrière de potentiel avec la condition $K.a \gg 1$ (avec $K = \frac{\sqrt{2.m.(V_2 - E_\alpha)}}{\hbar}$) correspondant à la barrière épaisse. Cela donne ici $K.a \approx 60$, on peut donc valider l'hypothèse de la barrière épaisse.

$$\text{B.2.4.2- } \gamma = \frac{82.1,6^2.10^{-38}.36.\pi.10^9}{10^{-34}} \cdot \sqrt{\frac{4.1,6.10^{-27}}{2.5,4.1,6.10^{-13}}} \cdot \left[1 - \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{5,8}} \right] = 64,8 \text{ soit } \boxed{P \approx 7.10^{-29}}$$

B.2.4.3- La particule a une énergie $E_\alpha = E_{c\alpha} + E_{p\alpha}$ or dans le puits $E_{p\alpha} = -V_1$

Un aller-retour correspond à une distance $2.R_1$ effectuée à une vitesse $v = \sqrt{\frac{2.(E_\alpha + V_1)}{m_\alpha}}$ correspondant à une

durée $\Delta t = \frac{1}{f}$ donc :

$$\boxed{f = \frac{1}{2.R_1} \cdot \sqrt{\frac{2.(E_\alpha + V_1)}{m_\alpha}}} \text{ A.N. : } f = 1,8.10^{21} \text{ s}^{-1}$$

B.2.4.4- Après 1 choc, la probabilité de trouver la particule dans le puits est égale à $(1 - P)$. Cela correspond donc à la probabilité d'existence du second choc. A l'issue de ce second choc, la probabilité de trouver à nouveau la particule dans le puits sera donc égale à $(1 - P) \cdot (1 - P) = (1 - P)^2$

Au bout de N chocs, on aura donc une probabilité de trouver la particule dans le puits égale à $(1 - P)^N$.

La probabilité de ne pas trouver la particule dans le puits au bout des N chocs, c'est à dire qu'elle ait traversé la barrière au cours de la durée δt est donc $\delta P = 1 - (1 - P)^N$

En supposant $N \cdot P \ll 1$, on peut donc écrire $(1 - P)^{N-1} \sim [1 - (N - 1) \cdot P]$

Or pour une durée δt temps il y aura $N = \delta t \cdot f$ chocs, et $\lambda = \frac{\delta P}{\delta t}$ d'où

$$\boxed{\lambda = P \cdot f} \quad \text{AN : } \lambda = 3,9 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

B.2.5.

B.2.5.1-

- **Région I :** $\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot (E_\alpha + V_1) \cdot \phi = 0$ avec les racines de l'équation caractéristique :

$$p = \pm j \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot (E_\alpha + V_1)}. \text{ On notant } \boxed{k_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot m_\alpha \cdot (E_\alpha + V_1)}}{\hbar}} \text{ on retrouve bien la forme proposée.}$$

- **Région II :** $\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot (V_2 - E_\alpha) \cdot \phi = 0$ avec les racines de l'équation caractéristique :

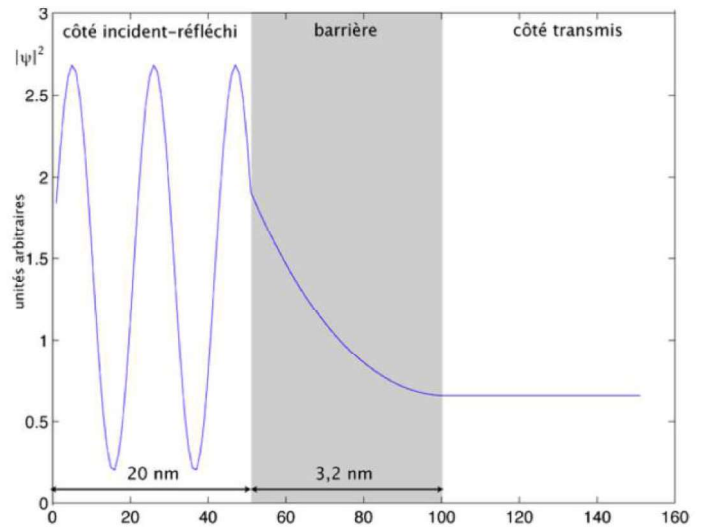
$$p = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot (V_2 - E_\alpha)}. \text{ Donc } \boxed{k_2 = \frac{\sqrt{2 \cdot m_\alpha \cdot (V_2 - E_\alpha)}}{\hbar}}$$

- **Région III :** $\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot E_\alpha \cdot \phi = 0$ avec les racines de l'équation caractéristique :

$$p = \pm j \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{\hbar^2} \cdot E_\alpha}. \text{ Donc } \boxed{k_3 = \frac{\sqrt{2 \cdot m_\alpha \cdot E_\alpha}}{\hbar}}$$

On rappelle que pour les solutions stationnaires, la fonction d'onde est du type $\varphi = \Phi(r) \cdot e^{\frac{-j \cdot E_\alpha \cdot t}{\hbar}}$. Dans la région II, on reconnaît donc la forme de la solution pour une onde évanescente.

Je choisis ici de représenter la densité de probabilité associée à la fonction d'onde à un instant donné.



B.2.5.2- On a $\varphi_3 = \underbrace{F \cdot \exp^{j \cdot (k_3 r - \frac{E_\alpha \cdot t}{\hbar})}}_{\text{OPPH croissant}} + \underbrace{G \cdot \exp^{j \cdot (-k_3 r - \frac{E_\alpha \cdot t}{\hbar})}}_{\text{OPPH décroissant}}$

Or rien ne permet d'imaginer ici l'existence d'une onde se propageant selon le sens décroissant de l'axe . Par conséquent on doit poser $G = 0$.

B.2.5.3- L'équation de Schrödinger doit être vérifiée en tout point de l'espace. $\frac{d^2 \Phi}{dr^2}$ doit donc être définie en tout point. Cela implique que Φ et $\frac{d\Phi}{dr}$ soient continues. De plus il n'y a pas de discontinuité infinie du potentiel dans le modèle proposé.

$$\begin{aligned} \text{En } r = R_1 : & \begin{cases} \text{pour } \Phi : & A.e^{j.k_1.R_1} + B.e^{-j.k_1.R_1} = C.e^{k_2.R_1} + D.e^{-k_2.R_1} \\ \text{pour } \frac{d\Phi}{dr} : & j.k_1.(A.e^{j.k_1.R_1} - B.e^{-j.k_1.R_1}) = k_2.(C.e^{k_2.R_1} - D.e^{-k_2.R_1}) \end{cases} \\ \text{En } r = R_2 : & \begin{cases} \text{pour } \Phi : & C.e^{k_2.R_2} + D.e^{-k_2.R_2} = F.e^{j.k_3.R_2} \\ \text{pour } \frac{d\Phi}{dr} : & j.k_3.F.e^{j.k_3.R_2} = k_2.(C.e^{k_2.R_2} - D.e^{-k_2.R_2}) \end{cases} \end{aligned}$$

B.2.5.4- \vec{J}_1 représente le courant de probabilité associé à une particule α située dans le puits et se dirigeant vers la barrière.

Par définition, $P = \frac{|\vec{J}_3|}{|\vec{J}_1|}$ donc $P = \frac{k_3 \cdot |F|^2}{k_1 \cdot |A|^2}$

B.2.5.5- Je ne vois pas comment déduire a des grandeurs fournies... sans reprendre la valeur trouvée au B.2.4

En reprenant cette valeur, on trouve $P = 2,6 \cdot 10^{-71}$, très inférieure à la valeur précédente. On peut expliquer cela par le modèle choisi où le potentiel reste constant sur toute la largeur de la barrière.

B.3. Estimation de l'énergie cinétique de la particule α loin du noyau

B.3.1. $\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}}$ donne $\vec{p}_X = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha$

En partant du noyau initialement au repos, on doit donc obtenir $\vec{p}_Y = -\vec{p}_\alpha$. On retrouve bien les sens opposés mais pas l'égalité des normes.

La conservation de la quantité de mouvement donne pour les normes $v_\alpha = \frac{m_Y}{m_\alpha} \cdot v_Y = 53 \cdot v_Y$.

Ce sont donc probablement les vecteurs vitesses représentés sur le schéma.

B.3.2. La conservation de l'énergie donne $m_X \cdot c^2 = E_{c\alpha} + E_{cY} + E_\alpha^* + E_Y^* + m_\alpha \cdot c^2 + m_Y \cdot c^2$

Soit $E_{c\alpha} + E_{cY} + E_\alpha^* + E_Y^* - Q_\alpha = 0$

Cela donne donc $E_{c\alpha} + E_{cY} = Q_\alpha - E_\alpha^* - E_Y^*$. En supposant la particule α dans son premier état excité, on obtient alors $E_{c\alpha} + E_{cY} < 0$, ce qui n'est pas possible. Le bilan énergétique n'est donc pas suffisamment élevé pour amener le noyau d'Hélium dans l'un de ses niveaux excités.

Alors $E_{c\alpha} + E_{cY} + E_Y^* - Q_\alpha = 0$

B.3.3. On a montré que $p_Y = p_\alpha$, or $p = \sqrt{2 \cdot E_c \cdot m}$, par conséquent $E_{cY} \cdot m_Y = E_{c\alpha} \cdot m_\alpha$, donc : $E_{c\alpha} + \frac{m_\alpha}{m_Y} \cdot E_{c\alpha} +$

$E_Y^* - Q_\alpha = 0$, ce qui donne $E_{c\alpha} = \frac{Q_\alpha - E_Y^*}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}}$

Cette énergie doit bien sur être positive, on doit donc avoir $Q_\alpha > E_Y^*$. La question B.2.1 a permis de donner la condition $E_{c\alpha} > -V_1$

On vient donc de trouver une condition nécessaire mais non suffisante $E_{c\alpha} > 0$, à rapprocher de la condition $E_{c\alpha} > V_1$ trouvée dans la partie précédente.

B.3.4. $E_{c\alpha} = \frac{Q_\alpha - E_Y^*}{1 + \frac{4}{A-4}}$. Pour le Polonium 210, $E_Y^* = 0$, alors $E_{c\alpha} = \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{4}{A-4}} = \frac{5,4}{1 + \frac{4}{206}} = 5,3 \text{ Mev}$

B.3.5. Dans le premier modèle mis en place, on a obtenu une expression de l'énergie cinétique de la particule α , ne dépendant pas d'une condition sur le niveau d'énergie du noyau Y.

On s'aperçoit ici que si $E_Y^* \neq 0$, cela entraîne une diminution de l'énergie cinétique de la particule α . Il s'agit donc ici d'une limite du modèle précédent.

B.4. Radioprotection associée à la radioactivité α

B.4.1.

B.4.1.1- On calcule l'ordre de grandeur de L : $L_{max} \equiv 0,32 \cdot (9)^{1,5} = 8,6 \text{ cm}$ ce qui limite leur existence dans un environnement proche de la source.

B.4.1.2- Pour l'eau : $L_{M,eau} = L_{M,air} \cdot \frac{1}{1,3 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{29}{18}} = 8,4 \text{ km}$. L'irradiation externe est alors possible et donc détectable... tant que l'on reste dans l'eau. On peut supposer que l'air saturé en eau confèrera une portée intermédiaire entre l'air sec et l'eau qui permettra la détection.

B.4.2. Il s'agit d'une évolution affine pour $\log[N(t)] = f(t)$. Par conséquent l'évolution est du type $N(t) = N_0 \cdot e^{-C^{te} \cdot t}$.

Or l'activité correspond au nombre de désintégrations par seconde $\frac{-dN}{dt}$ donc $\frac{-dN}{dt} = \lambda \cdot N(t)$, ce qui amène à une solution du type $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, cohérente avec l'observation du graphe.

On a donc $\ln N(t) = \ln N_0 - \lambda t$ soit $\log N(t) = \log N_0 - \frac{\lambda}{\ln 10} \cdot t$. Le coefficient directeur de la droite est donc $a = -\frac{\lambda}{\ln 10} = \frac{9 \cdot 10^{20} - 3 \cdot 10^{21}}{(250 - 0) \cdot 86400}$ soit $\lambda = 2,2 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} = 220 \text{ TBq}$

On a initialement $N_0 = 3 \cdot 10^{22}$ noyaux radioactifs, avec une masse molaire $M = 210 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, soit $m = \frac{N_0}{N_A} \cdot M = 10,5 \text{ g}$

B.4.3. On doit avoir $N(t+T) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$ soit $\ln N(t+T) = \ln(t) - \ln 2$, ce qui donne $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$

C'est l'activité de l'échantillon qui est importante. Au bout de 10 périodes, elle dépendra certes de l'activité initiale, mais celle-ci aura été divisée par $2^{10} = 1024$, ce qui est très important.

B.4.3.1-

- Les portées des particules α seront sensiblement les mêmes. Ce n'est donc pas cette caractéristique qui justifiera une différence entre les deux
- Quelque soit l'isotope, l'uranium a une activité massique beaucoup plus faible que le plutonium. Cela va dans le sens de l'affirmation.
- Cependant la période radioactive est beaucoup plus grande pour l'uranium que pour le plutonium (avec un rapport de 10^4 à 10^7). L'uranium restera donc une source radioactive sur des durées beaucoup plus longues que le plutonium.

B.4.4. Un émetteur α est peu détectable à grande distance comme on l'a vu. De plus sa faible période radioactive fait qu'il devient probablement très rapidement non décelable dans le corps mais par autopsie.

B.4.5. Il s'agit de dissipation d'énergie au cours de la désintégration non prise en compte dans le bilan réalisé dans ce problème. Un combustible est donc susceptible de s'échauffer car cette émission thermique constitue une source interne d'énergie pour un bilan thermique du combustible.

Cet échauffement sera beaucoup plus important au fur et à mesure des désintégrations de l'uranium. Il faudra donc adapter le refroidissement du combustible au cours du temps.