DS DE PHYSIQUE N°3

Mesures optiques de propriétés mécaniques (Mines I PC 2022)

I. Les étoiles binaires et leur mesure

I.A) Un premier modèle très simple

I.A.1) Un premier modèle très simple

☐ - 1. Loi de gravitation de Newton: $\boxed{\vec{F_B} = -\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2}\vec{e_r} = -\vec{F_A}.}$

On suppose que $\vec{F_B}$ désigne la force subie par B et pas celle exercée par B : notations ambiguës.

- Travail élémentaire des forces de gravitation:

$$\delta W = \vec{F_B}d\vec{B} + \vec{F_A}d\vec{A} = \vec{F_B}d\vec{AB} = -\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2}d(2r) = -dE_P$$

$$\Rightarrow \boxed{E_P = -\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)}}$$

On choisit l'origine des énergies potentielle à l'infini.

☐ - 2. On applique, dans le référentiel galiléen d'étude, le théorème de la quantité de mouvement à l'étoile B, en mouvement circulaire uniforme:

$$-Mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}M^2}{(2r)^2} \text{ d'où } \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M}{4r^3} = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \sqrt{\frac{16\pi^2r^3}{\mathcal{G}M}}}$$

- Application numérique : $2r = 1UA$, $M = M_{\odot}$. Pour la Terre en orbite autour du soleil, la 3éme loi de Kepler s'écrit $\frac{(1UA)^3}{1an^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}$.

$$\Rightarrow \frac{T_1}{1an} = \sqrt{\frac{16\pi^2(1UA)^3}{GM_{\odot}8(1an)^2}} = \sqrt{4/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71 \text{ soit } \boxed{T_1 \approx 0{,}71an}$$

☐ - 3. Énergie mécanique : $E = 2\times\frac{1}{2}M(r\dot{\theta})^2 + E_P = Mr^2\frac{GM}{4r^3} - \frac{GM^2}{(2r)}$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{\mathcal{G}M^2}{4r}}$$

L'énergie mécanique est négative, on est donc dans un **état lié**.

I.A.2) Généralisation partielle du modèle

☐ - 4. Force subie par B : $\boxed{\vec{F_B} = -\frac{\mathcal{G}m_Am_B}{R^3}\vec{R} = -\vec{F_A}}$

Ces forces sont **indépendantes du référentiel.**

☐ - 5. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système des deux étoiles, isolé, dans le référentiel galiléen (Ωxyz) s'écrit:

$$(m_A + m_B)\frac{d^2\vec{\Omega G}}{dt^2} = \vec{0}$$

G est donc, dans (Ωxyz), en mouvement rectiligne uniforme.

Conclusion :

Le référentiel $(Gxyz)$ est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à (Ωxyz) galiléen, il est donc lui-même galiléen.

☐ - 6. - Par définition du barycentre G, on a $m_A\vec{GA} + m_B\vec{GB} = \vec{0}$. On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{R} \text{ et } \vec{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{R}}$$

- Le théorème de la quantité de mouvement appliqué successivement aux étoiles A et B dans $(Gxyz)$galiléen donne:

$$\begin{cases} m_A\frac{d^2\vec{GA}}{dt^2} = \vec{F_A} & (1) \\ m_B\frac{d^2\vec{GB}}{dt^2} = \vec{F_B} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{m_A} - \frac{(1)}{m_A} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\vec{GB} - \vec{GA}) = \vec{F_B}\left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -G(m_A + m_B)\frac{\vec{R}}{R^3} \quad et\ n = 3\ ;\ K = \mathcal{G}(m_A + m_B)}$$

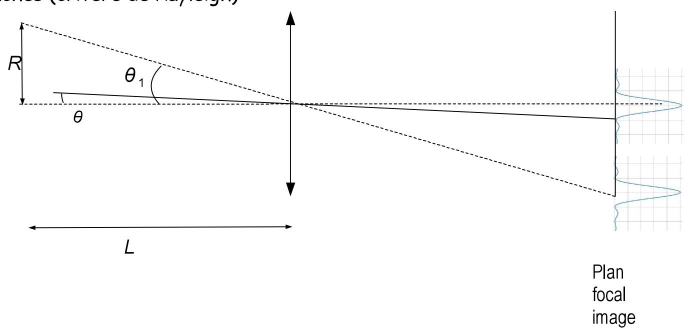
☐ - 7. Soit P le point tel que $\vec{GP} = \vec{R}$. Supposons que P est en mouvement circulaire uniforme dans $(Gxyz)$. Son accélération vaut alors $-R\dot{\theta}^2\vec{e_R}$, et la relation de la question précédente donne alors $\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}(m_A+m_B)}{R^3}$, d'où l'on tire la période

$$\boxed{T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{\mathcal{G}(m_A + m_B)}}}$$

Question peu claire : l'énoncé suppose R variable, donc le cas elliptique, or la démonstration de la 3éme loi n'est pas au programme dans le cas elliptique.

I.B)Mesure de l'écartement angulaire des étoiles doubles

☐ - 8. Pour que les deux images soient séparées, il faut que la distance entre les centres des tâches de diffraction des deux étoiles soit plus grande que la demi-largeur de chacune des taches (critère de Rayleigh) :

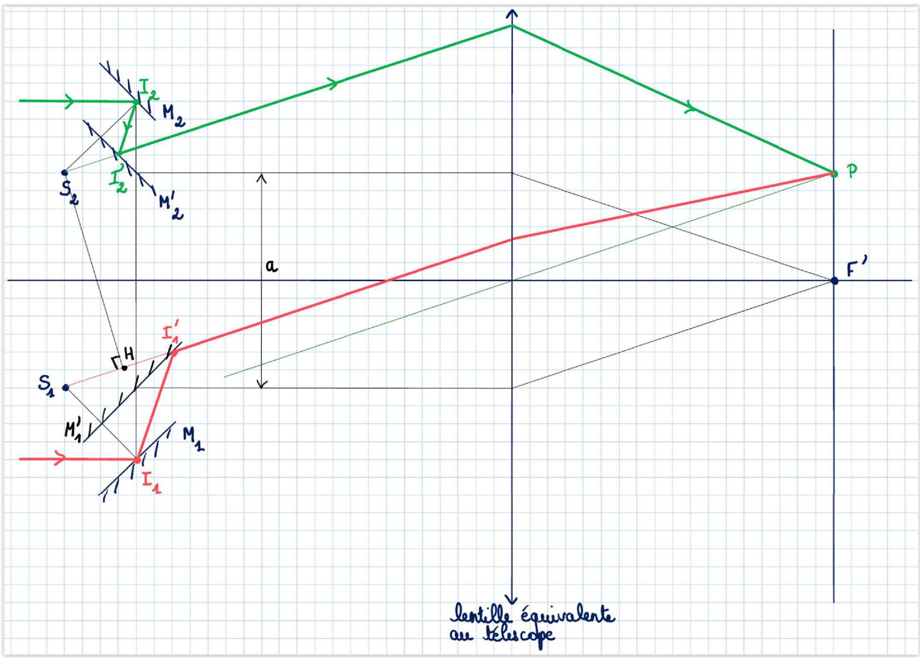


Si on note θ_1 la distance angulaire entre les deux étoiles, il faut donc que $sin\theta_1 > sin\theta \approx \frac{\lambda_0}{d}$. Or en supposant les angles petits, $sin\theta_1 \approx tan\theta_1 = \frac{R}{L}$. Il faut donc que $\frac{R}{L} > \frac{\lambda_0}{d}$, soit

$$\boxed{L < L_{max} = \frac{dR}{\lambda_0}}$$

A.N. : $\boxed{L_{max} = 143AL.}$

9) - **Théorème de Malus :** La surface d'onde est perpendiculaire au rayon lumineux en chacun de ses points.



S_2 est l'image de I_2 par réflexion sur (M'_2), S_1 est l'image de I_1 par réflexion sur (M'_1).
Construction effectuée dans l'ordre suivant:
- on choisit arbitrairement I'_2, point de réflexion sur (M'_2) ; la direction $S_2I'_2$ donne alors la direction des rayons avant traversée de la lentille
- le rayon parallèle à $(S_2I'_2)$ (de vecteur unitaire $\vec{u}$) et passant par le centre optique de la lentille, non dévié, donne le point P
- le rayon parallèle à $(S_2I'_2)$ et passant par S_1 donne le point I'_1

On a $I_1I'_1 = I_1S_1$ et $I_2I'_2 = I_2S_2$, ainsi que $(AI_1) = (AI_2)$, donc $\delta_A = (I_1I'_1P) - (I_2I'_2P) = (S_1I'_1P) - (S_2I'_2P)$.

Or d'après le théorème de Malus et le principe du retour inverse de la lumière, on a : $(S_2P) = (HP)$.
Donc: $\delta_A = S_1H = a\sin\alpha$ où $\alpha = (\widehat{S_1S_2H})$. Dans l'approximation de Gauss, $\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{x}{f'}$.

$$\Rightarrow \boxed{\delta_A = \frac{ax}{f'}}$$

- Question : on tient compte de la diffraction par (M_1) et (M_2) mais pourquoi ne tient-on pas compte de celle par (M'_1) et (M'_2) ?

- La frange brillante d'ordre p a une abscisse x_p telle que $\delta_A = p\lambda_0 = \frac{ax_p}{f'}$, d'où $x_p = \frac{p\lambda_0 f'}{a}$. L'interfrange vaut donc

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 f'}{a}}$$

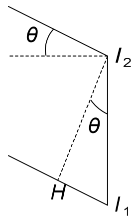
A.N. : $\boxed{i = 7{,}3\mu m}$: non visible à l'œil nu, il faut probablement une loupe pour l'observer.

- 10. Formule de Fresnel :

$$\boxed{I_A(P) = 2I_{0A}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{f'}\right)\right)}$$

Résultat discutable : il ne tient pas compte du caractère non isotrope de la diffraction par les miroirs. De plus, I_{0A} est l'intensité "issue de A et parvenant sur un des miroirs", mais probablement pas celle qui arriverait en F' en occultant une des deux voies de l'interféromètre.

- 11. Les deux étoiles sont deux sources distinctes, elles ne sont pas cohérentes entre elles : il faudra donc sommer l'intensité issue de A et celle issue de B.



D'après le théorème de Malus, $(BI_2) = (BH)$. On a donc $(BI_1) - (BI_2) = HI_1 = I_1I_2 sin\theta = bsin\theta$.

Donc, $\boxed{\delta_B = \delta_A + bsin\theta}$

- 12. On somme les intensités, chacune donnée par la formule de Fresnel :

$$I(P) = 2I_{0A}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_A\right)\right) + 2I_{0B}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta_A + bsin\theta)\right)\right)$$

Avec la formule de l'énoncé, elle se met sous la forme:

$$I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B}) + acos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f'} + \frac{b}{2}sin\theta\right) + \varphi\right)$$

avec $a = 2(I_{0A} + I_{0B})\sqrt{1 - m^2 sin^2\left(\frac{\pi bsin\theta}{\lambda_0}\right)}$ et $m = 2\frac{\sqrt{I_{0A}I_{0B}}}{I_{0A}+I_{0B}}$.

$$\Rightarrow \quad I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B})\left(1 + \sqrt{1 - m^2 sin^2\left(\frac{\pi bsin\theta}{\lambda_0}\right)}\, cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f'} + \frac{b}{2}sin\theta\right) + \varphi\right)\right)$$

qui est bien de la forme $I(P) = K\left(1 + cos\left(2\pi\frac{x - x_0}{\Delta x}\right)V(\theta)\right)$avec

$$\boxed{K = 2(I_{0A} + I_{0B}), \Delta x = \frac{\lambda_0 f'}{a} \quad \text{et} \quad V(\theta) = \sqrt{1 - m^2 sin^2\left(\frac{\pi bsin\theta}{\lambda_0}\right)}}$$

☐ - 13. x_0 est l'abscisse de la frange centrale, Δx est l'interfrange. $|V(\theta)|$ est le contraste.

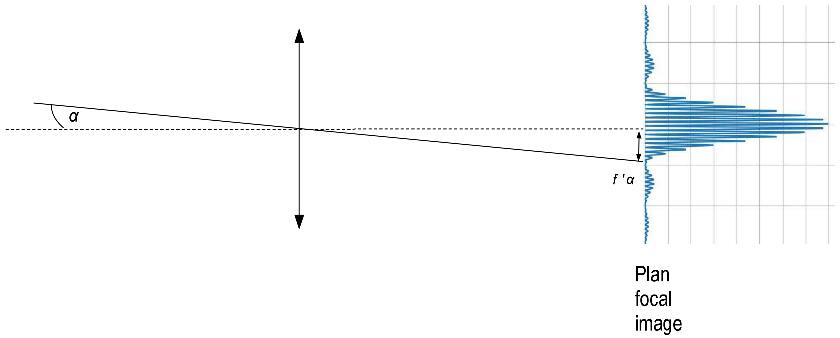
- On part d'une valeur de b suffisamment faible pour que $V(\theta) \approx 1$: les franges sont bien contrastées.
- On augmente progressivement la valeur de b, $V(\theta)$ diminue. Le contraste passe par un minimum pour $sin^2\left(\frac{\pi b sin\theta}{\lambda_0}\right) = 0$, donc pour $\sin\theta = \frac{\lambda_0}{b}$.
- S'il s'agit d'un vrai système binaire, l'angle θ varie au cours du temps. Mais si la période de rotation est très longue, il faut un suivi sur une durée équivalente pour s'en rendre compte…

☐ - 14. S'agit-il d'une limitation par la diffraction (franges sous le pic central de diffraction) ? Ou par échappement géométrique des rayons diffractés par(M_i) sur les bords de (M'_i) ? Et dans ce cas, ne faut-il pas la valeur de $b - a$ pour répondre ?

Supposons que le facteur limitant soit la diffraction, et que donc on veut avoir 10 franges sur la demi-largeur du pic de diffraction, dont la valeur angulaire est$\sin\alpha \approx \frac{\lambda_0}{l}$:

Il faut donc qu'on ait $\alpha f' > 10i$, soit $\frac{\lambda_0 f'}{l} > 10\frac{\lambda_0 f'}{a}$:

$$\Rightarrow \boxed{l < a/10 = 25cm}$$



II. La raie rouge de l'hydrogène

II.A) Les raies d'émission de l'atome d'hydrogène

II.A.1) Le modèle de Bohr et les raies de Balmer

☐ - 15. - L'électron subit la force centrale $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 OM^3}\overrightarrow{OM}$. D'après le théorème du moment cinétique (en O fixe), $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\sigma} = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}$$

Le plan contenant O et orthogonal à $\vec{\sigma}$ est donc un plan fixe. Or $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{OM}$et à la vitesse $\vec{v}$, ces deux vecteurs sont donc dans le plan fixe suscité.

Conclusion : le mouvement est plan.

- On peut alors travailler en coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$, $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, et donc $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v} = m_e r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$. On a donc

$$\boxed{\sigma = m_e r^2\dot{\theta}}$$

☐ - 16. La force coulombienne dérive de $E_P = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{m_e r^2}$. Le système n'est soumis qu'à la force coulombienne conservative donc l'énergie mécanique se conserve

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = cte \text{ avec } U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

☐ - 17. Lorsque $U_{eff}(r)$est minimale, une seule valeur de r est possible, la trajectoire est circulaire.

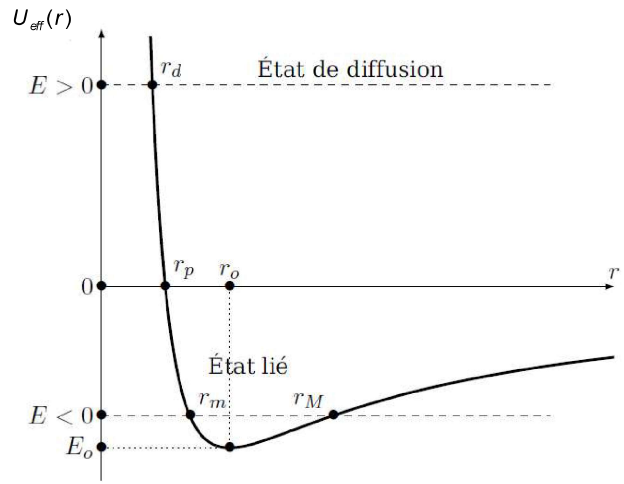
Le rayon de cette trajectoire s'obtient donc par : $\left(\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$

$$\boxed{r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\sigma^2}{m_e e^2}}$$

On reporte dans l'expression de l'énergie mécanique et on obtient :

$$\boxed{E_0 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\sigma^2}}$$

On omettra l'indice 0 dans la suite.



☐ - 18. Le photon emporte la différence d'énergie entre les deux niveaux :

$$\boxed{\Delta E = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \text{ d'où } \lambda_0 = \frac{288\epsilon_0^2 h^3 c}{5m_e e^4}}$$

II.A.2) Une correction relativiste

☐ - 19. $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{r}{\hbar c}$. Or $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ est une énergie. $\hbar$ est un moment cinétique (règle de quantification de Bohr), donc $\frac{\hbar}{r}$ est une quantité de mouvement, et $\frac{\hbar c}{r}$ est donc une énergie.

Conclusion : La constante de structure fine est donc sans dimension.

A.N. : $\boxed{\alpha \approx 7{,}3.10^{-3} \approx \frac{1}{137}}$

- 20. Développement liité à l'ordre 4 :

$$E = mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-(1/2)} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

On a donc bien $E = E_0 + \kappa v^2 + \mu v^4$ avec :

$E_0 = mc^2$ qui est l'énergie de masse,
$\kappa = \frac{m}{2}$ (κv^2 est l'énergie cinétique non relativiste)
$\mu = \frac{3}{8}\frac{m}{c^2}$.

- 21. Question pas du tout guidée.

- D'après la question et la règle de quantification de Bohr $\sigma = n\hbar$, l'énergie du niveau n vaut, dans le cas non relativiste $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2}$. En outre, l'orbite étant circulaire, le principe fondamental donne, toujours dans le cas classique, $m_e\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ et donc $E_c = -\frac{1}{2}E_p$, donc $E = -E_c$. Donc finalement, on a dans le cas classique $v^2 = \frac{e^4}{16\ {}^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2} = \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2}$.

- On injecte alors cette expression classique (qui est donc approchée dans le cas relativiste, mais à quel ordre ?) dans l'énergie relativiste développée à l'ordre 4: $\Delta E_{relat} = \kappa\Delta(v^2) + \mu\Delta(v^4) = \Delta E + \mu\left(\frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2\Delta\left(\frac{1}{n^4}\right) = \Delta E + \mu\left(\frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2\frac{65}{1296}$.

$$\boxed{\frac{\Delta E_{relar} - \Delta E}{\Delta E} = \frac{\frac{3}{8}\frac{m_e}{c^2}\left(\frac{e^4}{4\epsilon_0^2 h^2}\right)^2\frac{65}{1296}}{\frac{5}{36}\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}} = \frac{13}{12}\frac{e^4}{\epsilon_0^2 h^2 c^2} = \frac{13}{3}\alpha^2 \sim \alpha^p \text{ avec } p = 2}$$

Elle est donc de l'ordre de 10^{-4}.

II.B) Spectrométrie interférentielle

II.B.1) La méthode de Michelson

- 22. - La face réfléchissante de (S) est la face 1.

- La compensatrice (C) permet d'avoir le même nombre de traversées de lame (ici 3) pour les deux rayons. En son absence, le rayon se réfléchissant sur (M_f) effectuerait une traversée de lame, tandis que l'autre en effectuerait 2 : il y aurait une différence de marche supplémentaire, fonction en plus de la longueur d'onde si le verre est dispersif.

- 23. L'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air et éclairé avec une source étendue : on obtient des franges d'égale inclinaison (= anneaux concentriques), localisées à l'infini, et généralement ramenées à distance finie en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

- 24. On se place donc au centre des anneaux. La différence de marche vaut donc simplement $\delta = 2e$ où e est l'épaisseur de la lame d'air équivalente, qui vaut donc ici $v.t$. On a donc $\delta(t) = 2.v.t$.

La formule de Fresnel donne alors

$$\boxed{I(t) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}2.v.t\right)\right)}$$

II.B.2) La mesure de la structure fine de la raie rouge

- 25. - Les deux raies sont incohérentes entre elles, on somme les intensités :

$$I(t) = 2I_1\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}2.v.t\right)\right) + 2I_2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}2.v.t\right)\right)$$

On obtient donc avec la formule de l'énoncé : $I(t) = 2(I_1+I_2) + a\cos\left(2\pi vt\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)+\varphi\right)$ avec $a = 2(I_1+I_2)\sqrt{1-m^2\sin^2\left(2\pi vt\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\right)}$ et $m = 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}$. Soit encore $I(t) = 2(I_1+I_2)\left(1+C(t)\cos\left(2\pi vt\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)+\varphi\right)\right)$ avec $C(t) = \sqrt{1-m^2\sin^2\left(2\pi vt\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\right)}$. Or $\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$. Le contraste s'écrit donc :

$$\boxed{C(t) = \sqrt{1-\frac{4I_1 I_2}{(I_1+I_2)^2}\sin^2\left(2\pi vt\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)}}$$

- On a donc $\boxed{C_{max} = 1 \text{ et } C_{min} = \sqrt{1-\frac{4I_1I_2}{(I_1+I_2)^2}} = \frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}}$.

- 26. On a donc $C_{min} = 0{,}15 = \frac{1-I_2/I_1}{1+I_2/I_1}$, d'où

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{1-C_{min}}{1+C_{min}} = 0{,}74}$$

Le premier minimum du contraste se produit lorsque $2\pi\Delta x\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{4\Delta x} = 1{,}9.10^{-5}}$$