Résumé 15 – Équations différentielles linéaires

Équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

→ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et l'équation homogène associée :

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (E) \qquad y' = a(t)y \quad (H)$$

Théorème

On suppose $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues sur l'*intervalle* I. Soit A une primitive de a sur I.

- L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation complète.

On peut même écrire :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(x) e^{-A(x)} \, dx \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

On considère maintenant l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et son équation homogène associée, où les fonctions $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur l'*intervalle* I :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad \text{et} \quad a(t)y' + b(t)y = 0$$

Théorème : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Corollaire : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est une droite vectorielle;
- l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) est une droite affine de direction $\mathscr{S}_H$.

Plan de résolution :

- Identification de l'équation.
- Mise sous forme résolue/normalisée en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
- Résolution de l'équation homogène $y' = f(t)y$.
  $y(t) = \lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Résolution de l'équation avec second membre.
  On recherche une solution particulière y_0 de (E). S'il n'y a pas de solution évidente, on utilise la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)e^{F(t)}$.
  La solution générale est $y(t) = \lambda e^{F(t)} + y_p(t)$.
- Recollement éventuel des solutions (souvent via un DL).
- Utilisation des conditions initiales.

→ Équations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et on note (H) l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E)$$

On suppose $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ continues sur l'*intervalle* I.

Théorème : Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \,;\; y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un plan vectoriel;
- l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) est un plan affine de direction $\mathscr{S}_H$.

Proposition : Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.

Résolution de (H) lorsque les coefficients sont constants :
On résout l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
  $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r.
  $y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
  $y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On peut déterminer une solution particulière de (E) lorsque le second membre $d(t)$ est de la forme :

- $d(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.
- $d(t) = \cos(\omega t)$, on passe en complexe.

On pourra utiliser le principe de superposition.

Résolution lorsque les coefficients ne sont pas constants :
(on se laisse guider par l'énoncé)

- Recherche de solutions polynomiales (on commence par l'étude du degré).
- Recherche de solutions développables en série entière.
- Recherche d'une solution sous la forme $y(t) = z(t)y_0(t)$ où y_0 est une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange).
- Changement de variables ou d'inconnues.

Systèmes différentiels linéaires

→ Systèmes différentiels à coefficients continus

Soit le système linéaire à coefficients continus suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n(t)}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Il se réécrit sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)\,; \quad A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))\,; \quad B \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K}^n)$$

De manière équivalente,

$$x' = a(t)(x) + b(t) \text{ avec } a \in \mathscr{C}(I, \mathscr{L}(E)) \text{ et } b \in \mathscr{C}(I, E)$$

Théorème : Cauchy-Lipschitz linéaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues sur I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues sur l'intervalle I,

- l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de $X' = A(t)X$ est un s.e.v. de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n ;
- l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $\mathscr{S}_H$.

→ Équations différentielles linéaires scalaires

On peut transformer une équation linéaire scalaire d'ordre n en un système différentiel linéaire d'ordre 1.

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \iff X' = A(t)X$$

$$\text{avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle est donc un e.v. de dimension n.
- Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

→ Méthode de variation des constantes

Il s'agit de trouver les solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ connaissant une base $(X_1, \dots, X_n)$ de l'équation homogène $X' = A(t)X$. La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est alors qualifiée de système fondamental des solutions.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour l'équation scalaire $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda' x_1 + \mu' x_2 = 0 \\ \lambda' x_1' + \mu' x_2' = c \end{cases}$$

→ Wronskien d'une équation linéaire d'ordre 2

Définition : Wronskien

On appelle wronskien de deux solutions x_1 et x_2 de $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, l'application :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$$

Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, avec a ne s'annulant par sur I.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions

(ii) $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$ (iii) $\exists t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$

→ Résolution des systèmes à coefficients constants

Lorsque le système différentiel linéaire est à coefficients constants, on sait le résoudre explicitement.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation homogène $X' = AX$ admet pour solution générale $X : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.

Théorème : Cas diagonalisable

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, éventuellement multiples. Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} X_n \text{ avec } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$$

Lorsque le système est à coefficients réels et que l'on diagonalise A dans $\mathbb{C}$, il suffit d'extraire les parties réelles et imaginaires de $\mathrm{e}^{\lambda t}X$ pour trouver les solutions.

On retrouve le résultat du théorème en écrivant :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X \end{aligned}$$

Le calcul de P^{-1} est inutile.

Cette méthode fonctionne également lorsque A est seulement trigonalisable ou bien lorsque le système comporte un second membre.