Formulaire : mécanique

3 avril 2013

1 Torseurs

❒ Moment d'un pointeur par rapport à un point – Le moment par rapport à O du pointeur $(A,\overrightarrow{v})$ est

$$\boxed{\overrightarrow{M}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{v}} \tag{1.1}$$

❒ Moment d'un pointeur par rapport à un axe – Soit Δ un axe orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et $O \in \Delta$. On définit le moment du pointeur $(A,\overrightarrow{v})$ par rapport à Δ comme

$$\boxed{M_\Delta = \overrightarrow{M}(O).\overrightarrow{u}} \tag{1.2}$$

❒ Formule du changement de point – Pour un système de pointeurs de résultante $\overrightarrow{R}$, le moment peut s'exprimer aux points O et O' et ces valeurs sont reliées par

$$\boxed{\overrightarrow{M}(O') = \overrightarrow{M}(O) + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{R}} \tag{1.3}$$

2 Cinématique du point

❒ Vitesse en coordonnées cartésiennes – De manière triviale, on a

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M) = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}} \tag{2.1}$$

❒ Vitesse en coordonnées cylindriques – Dans la base cylindrique $(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})$,

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}} \tag{2.2}$$

❒ Accélération en cylindriques – De même (et cette formule est bien à apprendre par cœur),

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}} \tag{2.3}$$

❒ Vitesse dans la base de Frénet – Pour tout mouvement projeté dans la base de Frénet, on a

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{T}} \tag{2.4}$$

❒ Accélération dans la base de Frénet – La dérivation de (2.4) donne

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}} \tag{2.5}$$

❒ Mouvement à accélération centrale – Le moment cinétique $\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ d'un point M soumis à une accélération centrale est constant :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O) = \text{cte}} \tag{2.6}$$

3 Cinématique du solide

❒ Formule de Varignon – Pour des points P et Q d'un même solide de vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ on a

$$\boxed{\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}} \tag{3.1}$$

❒ Dérivée d'un vecteur lié au solide – Si $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ où P et Q sont des points liés à un solide, alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}} \tag{3.2}$$

❒ Caractérisation de la translation d'un solide – Pour un solide,

$$\boxed{\text{mouvement de translation} \Leftrightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}} \tag{3.3}$$

❒ Expression de $\vec{\Omega}$ – Pour un solide en rotation autour d'un axe dirigé et orienté par $\vec{u_z}$ et paramétrée par θ,

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u_z}} \tag{3.4}$$

❒ Caractérisation du mouvement de précession – Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque et $\vec{\Omega}$ un vecteur de direction fixe porté par $\vec{u_z}$. Alors $\vec{A}$ a un mouvement de précession autour de l'axe dirigé par $\vec{u_z}$ si la condition suivante est réalisée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}} \tag{3.5}$$

❒ Vitesse de glissement – Si deux solides S_1 et S_2 sont en contact ponctuel sur I, on peut définir les points cinématiques I_1 et I_2 géométriquement confondus avec I mais cinématiquement liés à leurs solides respectifs. Alors la vitesse de glissement $\vec{v_g}$ s'exprime

$$\boxed{\vec{v_g} = \vec{v_a}(I_1) - \vec{v_a}(I_2)} \tag{3.6}$$

❒ Condition de non-glissement – Elle s'exprime par $\vec{v_g} = \vec{0}$ soit d'après (3.6) :

$$\boxed{\vec{v_a}(I_1) = \vec{v_a}(I_2)} \tag{3.7}$$

❒ Engrenages – Pour deux roues de rayons R_1 et R_2 en rotation autour d'axes parallèles et en contact ponctuels, on a

$$\boxed{R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2} \tag{3.8}$$

4 Composition des vitesses et des accélérations

❒ VITESSE D'ENTRAÎNEMENT – La vitesse d'entraînement d'un point M s'exprime

$$\boxed{\overrightarrow{v_e}(M) = \overrightarrow{v_a}(O') + \overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{O'M}} \tag{4.1}$$

❒ POINT COÏNCIDENT – On introduit le point C coïncident à M à l'instant t : il est géométriquement confondu avec M mais est cinématiquement lié au mouvement du référentiel relatif. On a alors une expression de la vitesse d'entraînement :

$$\boxed{\overrightarrow{v_e}(M) = \overrightarrow{v_a}(C)} \tag{4.2}$$

❒ DÉRIVATION COMPOSÉE – Pour un vecteur $\overrightarrow{A}$ en mouvement dans des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{A}} \tag{4.3}$$

❒ ACCÉLÉRATION DE CORIOLIS – Elle a pour expression

$$\boxed{\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{v_r}(M)} \tag{4.4}$$

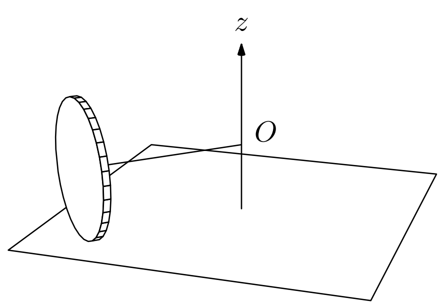
❒ COMPOSITION DES VECTEURS INSTANTANÉS DE ROTATION – Pour tout mouvement décomposé dans un référentiel relatif et un référentiel absolu,

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_a} = \overrightarrow{\Omega_e} + \overrightarrow{\Omega_r}} \tag{4.5}$$

❒ DÉPLACEMENT D'UNE ROUE SUR UN AXE – Si une roue de rayon R donc le centre est repéré par l'abscisse x et la rotation paramétrée par θ roule sans glissement sur l'axe (Ox), on a alors

$$\boxed{\dot{x} = -R\dot{\theta}} \tag{4.6}$$

❒ LA ROUE : LE RETOUR – On a le système suivant : un disque de rayon R roule sur sa tranche sur un plan, il est rattaché à un axe fixe (Oz) par une tige de longueur ℓ de sorte que le centre du disque décrive vu de haut une trajectoire circulaire sur le plan lors du roulement du disque.



La rotation propre du disque est paramétrée par φ, la rotation autour de (Oz) par ψ. La condition de roulement sans glissement impose :

$$\boxed{\ell\dot{\psi} = -R\dot{\varphi}} \tag{4.7}$$

5 Cinétique

❒ Définition du barycentre – Le barycentre G du système $\mathcal{S}$ des points (P_i,m_i) et de masse totale $M = \sum mi_i$ est définit par

$$\boxed{M\overrightarrow{OG} = \sum m_i\overrightarrow{OP_i}} \tag{5.1}$$

❒ Relation barycentrique – Il découle de (5.1) que

$$\boxed{\sum m_i\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}} \tag{5.2}$$

❒ Théorème de Huygens – Soit un système $\mathcal{S}$ quelconque, Δ un axe quelconque et Δ_G l'axe parallèle à Δ passant par G, d la distance entre Δ et Δ_G. Alors

$$\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + Md^2} \tag{5.3}$$

❒ Moment d'inertie d'une sphère – Pour une sphère homogène de masse M et de rayon R et un axe Δ passant par le centre de la sphère,

$$\boxed{J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2} \tag{5.4}$$

❒ Moment d'inertie d'un cylindre de révolution – Soit un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R. Alors

$$\boxed{J_{(Oz)} = \frac{1}{2}MR^2} \tag{5.5}$$

❒ Résultante cinétique – Pour un système quelconque, la quantité de mouvement d'un système s'exprime simplement

$$\boxed{\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{v}(G)} \tag{5.6}$$

❒ Résultante dynamique – De même, la résultante du torseur dynamique d'un système s'exprime

$$\boxed{\overrightarrow{D} = M\overrightarrow{a}(G)} \tag{5.7}$$

❒ Relation entre résultantes dynamiques et cinétiques – On a pour un système $\mathcal{S}$ *fermé* :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{D}} \tag{5.8}$$

❒ Relation générale entre moments cinétiques et dynamiques – Dans le cas général,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(A)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{K}(A) + M\overrightarrow{v}(G) \wedge \overrightarrow{v}(A)} \tag{5.9}$$

❒ Moments cinétiques et dynamiques par rapport à un axe – Considérons l'un des deux cas particuliers suivants : Δ est fixe ou Δ est de direction fixe et passe par G à tout instant. Alors dans ces cas particuliers *seulement*,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = K_\Delta} \tag{5.10}$$

❒ 1^ER^ THÉORÈME DE KOENIG – Pour un système S fermé,

$$\boxed{\vec{\sigma_a}(G) = \vec{\sigma}_{\text{rb}}(G)} \tag{5.11}$$

❒ 3^E^ THÉORÈME DE KOENIG – Pour un système $\mathcal{S}$ fermé,

$$\boxed{E_{\text{c},a} = E_{\text{c,rb}} + \frac{1}{2}Mv^2(G)} \tag{5.12}$$

❒ GRANDEURS CINÉTIQUES D'UN SOLIDE POUR CERTAINS MOUVEMENTS – On a le tableau récapitulatif suivant :

Mouvement :	σ	K	E_c
Translation	$\vec{\sigma}(G) = \vec{0}$	$\vec{K}(G) = \vec{0}$	$\frac{1}{2}Mv^2(G)$
Rotation autour de Δ fixe	$\sigma_\Delta = J_\Delta\dot{\theta}$	$K_\Delta = J_\Delta\ddot{\theta}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$
Rotation autour de Δ de direction fixe et passant par G	$\sigma_\Delta = J_\Delta\dot{\theta}$	$K_\Delta = J_\Delta\ddot{\theta}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mv^2(G)$

6 Actions subies par un système matériel

❒ CONSTANTE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE – Elle vaut

$$\boxed{G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2}} \tag{6.1}$$

❒ CONSERVATION DE LA CIRCULATION GRAVITATIONNELLE – Le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ est à circulation conservative. Ceci implique :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{G}} = \vec{0} \text{ et il existe un potentiel scalaire } V \text{ tel que } \vec{\mathcal{G}} = -\vec{\nabla}V} \tag{6.2}$$

❒ NON-CONSERVATION DU FLUX GRAVITATIONNEL – Le flux gravitationnel n'est pas conservatif. Plus précisément,

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\mu \text{ d'où } \iint \vec{\mathcal{G}}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G \iiint \mu \mathrm{d}\tau} \tag{6.3}$$

❒ RUPTURE DE CONTACT – Lorsqu'un solide S_1 glisse sur un solide S_2, la rupture de contact se traduit mathématiquement par

$$\boxed{\vec{N}_{2\to1} = \vec{0}} \tag{6.4}$$

❒ 2^E^ LOI DE COULOMB – Lorsqu'un solide S_1 se déplace en glissant sur S_2 avec un seul point de contact, $\vec{T}$ est opposée à $\vec{v_g}$ et, avec f le coefficient de frottement dynamique,

$$\boxed{\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|} \tag{6.5}$$

❒ GLISSEMENT SANS FROTTEMENT DANS UNE ARTICULATION ROTOÏDE – Si un solide S_1 tourne sur lui même autour d'un axe Δ, encastré dans un solide S_2 qui l'englobe de manière à former une liaison pivot, l'hypothèse de glissement sans frottements donne

$$\boxed{M_\Delta = 0} \tag{6.6}$$

7 Principe fondamental de la dynamique

❒ Théorème de l'action et de la réaction – Pour deux systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, on a l'égalité torsorielle

$$\boxed{\left[\overrightarrow{F}_{2\to1}\right] = -\left[\overrightarrow{F}_{1\to2}\right]} \tag{7.1}$$

❒ Théorème de la résultante dynamique – Pour un système $\mathcal{S}$ quelconque de centre d'inertie G,

$$\boxed{m\,\overrightarrow{a}(G) = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}} \tag{7.2}$$

❒ Théorème de la résultante cinétique – Pour un système $\mathcal{S}$ fermé,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}} \tag{7.3}$$

❒ Chocs et quantité de mouvement – Si deux solides S_1 et S_2 indéformables s'entrechoquent, alors on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie thermodynamique :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{p} = \Delta\overrightarrow{p_1} + \Delta\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{0} \text{ et } \Delta U + \Delta E_{\text{c}} = 0} \tag{7.4}$$

❒ Théorème du moment dynamique – Sans aucune restriction,

$$\boxed{\overrightarrow{K}(A) = \overrightarrow{M}(A) \text{ et } K_\Delta = M_\Delta} \tag{7.5}$$

❒ Théorème du moment cinétique – Pour un système $\mathcal{S}$ fermé, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(A)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M}(A) + m\,\overrightarrow{v}(G) \wedge \overrightarrow{v}(A)} \tag{7.6}$$

❒ Cas particuliers – Lorsque $A \equiv G$ ou que l'axe Δ est fixe ou de direction fixe passant par G, alors le théorème du moment cinétique s'exprime

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(A)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M}(A) \text{ et } \frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = M_\Delta} \tag{7.7}$$

❒ Solide en rotation – Si cette rotation paramétré par θ s'effectue autour d'un axe fixe ou de direction fixe passant par G, alors

$$\boxed{J_\Delta \ddot{\theta} = M_\Delta} \tag{7.8}$$

❒ Équation de la statique des fils – On effectue un bilan des forces sur une petite section élémentaire d'un fil parfaitement flexible. Celui ci est soumis à des forces extérieures $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ et à la force de tension du fil, de moment nul car le fil est parfaitement flexible. Il vient alors

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{T} + \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}} \tag{7.9}$$

8 Puissance et travail

❒ Puissance des actions extérieures – Si les actions extérieures sont assimilées à un torseur $[\overrightarrow{F}]$ de résultante $\overrightarrow{F}$ et de moment $\overrightarrow{M}$, alors pour point A du solide,

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(A) + \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{M}(A)} \tag{8.1}$$

❒ Cas particuliers – Lorsque le solide est respectivement en translation ou en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$, on a

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} \text{ ou } \mathcal{P} = \dot{\theta} M_\Delta} \tag{8.2}$$

❒ Puissance des actions de contact – La puissance globale de toutes les actions de contact entre deux solides est égale à

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{v_g}} \tag{8.3}$$

❒ Travail des actions de contact résistant – Le signe de la puissance de (8.3) est dans tous les cas

$$\boxed{\mathcal{P} \leqslant 0} \tag{8.4}$$

9 Énergie

❒ Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel – Il s'écrit

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c} = W} \tag{9.1}$$

❒ Théorème de l'énergie cinétique pour un systèmes de points matériels – Il s'écrit

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c} = W_\mathrm{ext} + W_\mathrm{int}} \tag{9.2}$$

❒ Théorème de l'énergie cinétique pour un solide – Il s'exprime :

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c,macro} = W_\mathrm{ext,macro}} \tag{9.3}$$

❒ Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solide – Toutes les grandeurs suivantes sont macroscopiques :

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{c} = W_\mathrm{ext} + W_\mathrm{int}} \tag{9.4}$$

❒ Force dérivant d'une énergie potentielle – Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle, il existe un champ scalaire $E_\mathrm{p}(\overrightarrow{r})$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla} E_\mathrm{p}} \tag{9.5}$$

❒ Travail d'une force conservative – Il s'exprime avec l'énergie potentielle associée à cette force :

$$\boxed{W = -\Delta E_\mathrm{p}} \tag{9.6}$$

❒ Travail de l'opérateur au cours d'un déplacement quasistatique – Pour un déplacement quasistatique seulement, le travail fourni par l'opérateur pour déplacer un objet soumis à la force conservative d'énergie potentielle E_p est :

$$\boxed{W_\mathrm{op} = +\Delta E_\mathrm{p}} \tag{9.7}$$

❒ Énergie potentielle gravitationnelle – L'énergie potentielle associée à un système de deux masses m_1 et m_2 séparées d'une distance r est

$$\boxed{E_\mathrm{p} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \mathrm{cte}} \tag{9.8}$$

❒ Énergie potentielle électrostatique – L'énergie potentielle associée à un système de deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r est

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{cte}} \tag{9.9}$$

❒ Énergie potentielle élastique – L'énergie potentielle associée aux forces exercées par le ressort de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et de longueur courant ℓ est

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \mathrm{cte}} \tag{9.10}$$

❒ Énergie potentielle de torsion – L'énergie potentielle associée aux forces exercées par un fil de torsion de constante de torsion C et d'angles de torsion aux extrémités θ_1 et θ_2 est

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2 + \mathrm{cte}} \tag{9.11}$$

❒ Théorème de conservation de l'énergie mécanique – Pour un système de solides tel que toutes les actions intérieures et extérieures soit ne travaillent pas, soit dérivent d'une énergie potentielle, alors

$$\boxed{E_\mathrm{m} = \mathrm{cte}} \tag{9.12}$$

❒ Condition de stabilité de l'équilibre – Pour qu'une position d'équilibre soit stable, il suffit que

$$\boxed{E_\mathrm{p} \text{ soit minimale}} \tag{9.13}$$

10 Le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non-galiléen.

❒ Force d'inertie de Coriolis – Elle a pour expression

$$\boxed{F_\mathrm{ic} = -2m\overrightarrow{\Omega_e} \wedge \overrightarrow{v_r}} \tag{10.1}$$

❒ Relation rayon-période pour un satellite – Si un satellite orbite à la distance r autour d'un astre attracteur de masse M à la vitesse angulaire ω, on a

$$\boxed{\omega^2 r^3 = GM} \tag{10.2}$$

11 Oscillateur

❒ Équation du mouvement – Pour un oscillateur harmonique à une dimension non amorti où un point de masse m est soumis à une force $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{r}$, le paramètre de position x vérifie

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{11.1}$$

❒ Théorème du viriel – Pour un point matériel soumis à une force $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})$ dont la trajectoire et la vitesse sont bornées, on a

$$\boxed{<\overrightarrow{F}.\overrightarrow{r}>= -2 < E_{\mathrm{c}} >} \tag{11.2}$$

❒ Équation d'un oscillateur harmonique – Pour un oscillateur harmonique dont le seul degré de liberté est ρ, on a

$$\boxed{\ddot{\rho} + \omega^2\rho = \lambda} \tag{11.3}$$

❒ Intégrale première d'un oscillateur harmonique – Sous les mêmes hypothèses que (11.3), en intégrant il vient

$$\boxed{\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 = \alpha\rho + \beta} \tag{11.4}$$

Bon courage pour apprendre ces 75 formules !