6.3 / 20

Numéro de place 5 0 2 4 7 1

Numéro d'inscription 5 3 8 9 3

Signature

Nom XHOFFRAY

Prénom WILS

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Mathématiques 1

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 01 / 02

I- Etude d'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$

I.A1. soit $a \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, tout d'abord on a $E_a p = p(X+a) \in \mathbb{K}[X]$ donc $E_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$. De plus si on considère $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{K}[X]$ $E_a(\lambda p + \mu q) = \lambda p(X+a) + \mu q(X+a) = \lambda E_a p + \mu E_a q$ donc E_a est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ donc ~~$E_a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$~~ E_a endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Soit $p \in \operatorname{Ker} E_a$ c'est à dire que $E_a p = 0$ si et seulement si $\deg E_a p = -1$ si et seulement si $\deg p = -1$ donc p est le polynôme nul et E_a est injectif.

considérons $q \in \mathbb{K}[X]$ ainsi $q(X) = E_a q(X-a)$ donc $\forall q \in \mathbb{K}[X]$ il existe q' tel que $q = E_a q'$ donc E_a est surjective et donc bijective et on a bien que $E_a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X]$

I.B.2. soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(p,q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, soit $x \in \mathbb{R}$ $\int_x^{x+1} (\lambda p(t) + \mu q(t))\,dt$
$= \lambda \int_x^{x+1} p(t)\,dt + \mu \int_x^{x+1} q(t)\,dt = \lambda J p(x) + \mu J q(x) = J(\lambda p + \mu q)(x)$

de plus étant donné que $\int_x^{x+1} p(t)\,dt \in \mathbb{R}[X]$ on a donc que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

I.B.3. si $p \in \mathbb{K}[X]$ où $p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ alors $Jp(x) = \int_x^{x+1} \sum_{k=0} a_k t^k\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $Jp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} \right)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ $(x+1)^{k+1} - x^{k+1}$
$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j - x^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} x^j$ et $\deg((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = k$

donc on peut en déduire que J conserve le degré

~~de plus $J \circ D\, p(x) = \int_x^{x+1} p'(t)\,dt = p(x+1) - p(x)$~~

I.C4. pur tout $k \in \mathbb{N}$ $t \mapsto e^{-t}t^k$ est définie et continue en 0 et $t^2e^{-t}t^k = e^{-t}t^{k+2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $e^{-t}t^k \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de plus l'infini et positive

sur $\mathbb{R}_+$ donc par comparaison $t \mapsto e^{-t}t^k$ est intégrable au voisinage de plus l'infini et

donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$. on a donc bien que $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt$ est définie pour tout k

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt = -[e^{-t}t^k]_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k-1}dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -[e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

I.C.5. pour tout $(p,q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$L(\lambda p + \mu q)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}[\lambda p + \mu q]'(x+t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t}[\lambda p'(x+t) + \mu q'(x+t)]dt$

$= -\lambda\int_0^{+\infty} e^{-t}p'(x+t)dt - \mu\int_0^{+\infty} e^{-t}q'(x+t)dt = \lambda Lp(x) + \mu Lq(x)$ et vrai pour tout $x \in \mathbb{K}$

donc L est linéaire. De plus si $p(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ alors $Lp(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}k\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x+t)^{k-1}dt$

$= -\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}\int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^k dt$ or $\int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^k dt = -[e^{-t}(x+t)^k]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ke^{-t}(x+t)^{k-1}dt$

$= x^k + \int_0^{+\infty} ke^{-t}(x+t)^{k-1}dt = \sum_{k=0}^{k}\prod_{j=0}^{i-1}(k-j)x^{k-i}$ donc $Lp \in \mathbb{K}[X]$

On a donc bien que Lp est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$

II- Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

II.A.6. soit $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ I = E_a = I \circ E_a$ donc I est bien shift-invariant et si $p \in \mathbb{K}[X]$

$E_a \circ D(p) = E_a p' = p'(X+a)$ et $D \circ E_a(p) = D(p(X+a)) = p'(X+a) = E_a \circ D(p)$

donc D est aussi shift-invariant.

On a évidement que $E_a \circ E_a = E_a^2$ donc que E_a est shift invariants

Puis que $E_a \circ J(p)(x) = \int_x^{x+1} p(t+a)dt = J \circ E_a(p)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et finalement que $L\circ E_a(p)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}p'(x+t+a)\,dt = E_a\circ L(p)(x)$.

Donc I, D, E_a, J et L sont ~~shifts~~-invariants.

Or comme $I(X) = X$, $D(X) = 1$, $E_a(X) = X+a$, $J(X)(x) = \int_x^{x+1} t\,dt = \frac{(x+1)^2 - x^2}{2}$
$= \frac{2x+1}{2}$ et $L(X)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = -1$, alors D et L sont des endomorphismes delta.

II.A.7. Comme on a assez évidemment que $E_a\circ O = O\circ E_a$ et en appelant S l'ensemble des ~~poly~~ endomorphismes shift-invariants donc $O\in S$, de même on vient de montrer que $I\in S$ et pour tout ~~$(p,q)\in(\mathbb{K}[X])^2$ et $T\in S$~~ $(T,U)\in S^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ alors si on considère $a\in\mathbb{K}$ $(\lambda T+\mu U)\circ E_a = \lambda T\circ E_a + \mu U\circ E_a$ et $E_a\circ(\lambda T+\mu U) = \lambda E_a\circ T + \mu E_a\circ U = \lambda T\circ E_a + \mu U\circ E_a$ donc $\lambda T+\mu U\in S$

pour finir $T\circ U\circ E_a = T\circ E_a\circ U = E_a\circ T\circ U$ donc $T\circ U\in S$, et finalement on a effectivement que S est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.

Si on appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des ~~polynômes delta~~ endomorphismes delta donc pour tout T et U dans $\mathcal{D}$ il existe t et u dans $\mathbb{K}^*$ tel que $TX = t$ et $UX = u$

Ainsi comme S est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ $T+U\in S$ et $[T+U](X) = t+u$ avec $t+u\in\mathbb{K}^*$ donc $T+U\in\mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}$ stable par addition. Cependant on remarque que si $T\in\mathcal{D}$ avec $t\in\mathbb{K}^*$ tel que $TX = t$ alors $L\circ T(X)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\times 0\,dt = 0$ donc $L\circ T\notin\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ pas stable par composition.

II.B.8. Soit $p\in\mathbb{K}[X]$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $p(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ donc par définition d'un polynôme il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ $a_n = 0$. Ainsi l'expression $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$ à $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ a un sens car il s'agit d'une somme finie, de plus $p\in\mathbb{K}[X]$ donc p de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cette expression désigne un polynôme de degré $\deg(p)$ et de coefficient ~~directeur~~ dominant $a_0\,\mathrm{dom}(p)$.

II.B.9. Comme E_a et D sont des linéaires si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ alors $E_a\circ\sum a_k D^k = \sum a_k E_a\circ D^k$ et D shift-invariant donc $D\circ E_a = E_a\circ D$

supposons trouvé $k\in\mathbb{N}$ tel que ~~pour tout~~ $D^k\circ E_a = E_a\circ D^k$ ainsi $D^{k+1}\circ E_a = D^k\circ D\circ E_a$
$= D^k\circ E_a\circ D = E_a\circ D^{k+1}$ donc D^{k+1} est shift-invariant

On a donc que D^k shift-invariant pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k E_a \circ D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a$
donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est effectivement shift-invariant

II.B.10. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suites d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$
c'est à dire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - b_k) D^k = 0$ or pour tout $k \in \mathbb{N}$ $D^k \neq 0$ ~~donc~~
~~pour tout $k\in\mathbb{N}$ $a_k - b_k = 0$ c'est à dire $a_k = b_k$~~ et les $(D^k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base donc
une famille libre des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ $a_k - b_k = 0$ puis $a_k = b_k$

II.B.11. dans un premier temps supposons que T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ soit égale à :
$T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k$ comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $Tq_k(0) \in \mathbb{K}$ en prenant $b_k = Tq_k(0)$
donc $T = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$ et on a montré que $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$ était shift-invariant donc T l'est
aussi.

Maintenant supposons que T est shift-invariant, les $(D^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de l'espace des
endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ donc il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$
or $\forall p \in \mathbb{K}[X]\, T(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0)\, p^{(k)}$ donc on a bien que $\forall T \in S$ $T = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) D^k$

II.C.13. On a montré que E_a était shift-invariant donc d'après la question 11. ~~E_a~~ :
$E_a = \sum_{k=0}^{+\infty} (E_a q_k)(0) D^k$ et donc pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ $E_a p = p(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X+a)^k(0)}{k!} p^{(k)}$
$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(0+a)^k}{k!} p^{(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$ or $p \in \mathbb{K}[X]$ donc $\forall k > \deg(p)$ $p^{(k)} = 0$
aussi $E_a p = p(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}$ le polynôme de Taylor de p

II.C.14. Comme J est shift-invariant donc $J = \sum_{k=0}^{+\infty} (Jq_k)(0) D^k$ et pour $k \in \mathbb{N}$
$x \in \mathbb{R}$, $Jq_k(x) = \int_x^{x+1} \frac{t^k}{k!} dt = \frac{-x^{k+1} + (x+1)^{k+1}}{(k+1)!}$ aussi $Jq_k(0) = \frac{1}{(k+1)!}$
donc $J = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{(k+1)!}$ donc pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ $Jp = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{p^{(k)}}{(k+1)!}$

II.C.15. L est shift-invariant donc $L = \sum_{k=0}^{+\infty} (Lq_k)(0) D^k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $Lq_k(x) =$
$\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{k(x+t)^{k-1}}{k!} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{(x+t)^{k-1}}{(k-1)!}$ et $Lq_k(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!} = 1$
donc $L p = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{(k)}$ pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$

6.3 / 20

Numéro de place 5 0 2 4 7 1

Numéro d'inscription 5 3 8 9 9

Signature

Nom J H O F F R A Y

Prénom N I L S

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve Mathématique 1

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 0 2 / 0 2

II formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

II.C.15 comme $D = \sum_{k=0}^{+\infty} (Dq_k)(0) D^k$

II.D.16. soit $p \in \mathbb{K}[X]$ si $p \in \ker(T)$ dans $\deg Tp = -1$ sinon comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\deg p^{(k)} \leq \deg p$ dans $\deg(Tp) \leq \deg p$ et donc il existe $n(T)$ tel que $\forall p \in \mathbb{K}[X]$ $\deg(Tp) - \deg(p) = n(T)$ ainsi $\deg(Tp) = \max\{-1, \deg p - n(T)\}$

II.D.17 $\ker T = \{p \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Tp) = -1\} = \{p \in \mathbb{K}[X] \mid \deg p - n(T) = -1\}$

$= \{p \in \mathbb{K}[X] \mid \deg p = n(T) - 1\}$ ~~$= \mathbb{K}_{n(T)}$~~

II.D.18. dans un premier temps supposons que T est inversible, dans $\ker T = \{0\}$ et donc $T1 \neq 0$.

maintenant supposons que $T_1 \neq 0$ dans pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ $Tp = \sum_{k=0}^{+\infty} (Tq_k)(0) p^{(k)}$

~~et $\deg T$~~ $= T1p + Tq_0(0) I + \sum_{k=2}^{+\infty} Tq_k(0) p^{(k)}$ or $T1 \neq 0$ donc ici $\deg Tp = \deg p$ car pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ $\deg p^{(k)} \leq \deg p$.

~~finalement $\deg(Tp) = \deg p$ $\forall p \in \mathbb{K}[X]$~~

~~II.D.19. supposons vérifiées les conditions précédentes~~

II.E.20. supposons trouvés $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $a_0 = 0 = b_0$, $a_1 \neq 0$ et $b_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k D^k$, d'après la question 10 on a pour tout k $a_k = b_k$ et T shift-invariant donc $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0) D^k$ comme T est un endomorphisme delta $TX \neq 0$ et l'ensemble des endomorphismes delta est stable par composition donc T pas inversible c'est à dire $T1 = 0$ ainsi $Tq_0(0) = 0$ et $Tq_1(0) \neq 0$

6.3 / 20

Ne rien écrire dans la partie barrée

en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\alpha_k = Tq_k(0)$ on a bien $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k$ et que $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est unique.

II.E.Q1. supposons trouvé U et V shift-invariants et inversibles tel que $T = D \circ U = D \circ V$

dans le cas $T = D$ $U = I$.