Mathématiques : exercices importants

4 octobre 2014

Sommaire

Exercice 1 Moyennes

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$. On pose alors

$$\mathscr{A}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} a_k \quad \mathscr{G}(a_1, \dots, a_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \quad \mathscr{H}(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

1. Montrer que $\mathscr{A}(a_1, \dots, a_n) \geqslant \mathscr{G}(a_1, \dots, a_n) \geqslant \mathscr{H}(a_1, \dots, a_n)$ avec égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.
2. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$, et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Montrer que u_n et v_n sont convergentes de même limite.

Solution de l'exercice 1

1. Par concavité de ln, il vient

$$\ln\left(\mathscr{A}(a_1, \dots, a_n)\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\mathscr{G}(a_1, \dots, a_n)\right).$$

   On a donc démontré, en appliquant exp, que $\mathscr{A}(a_1, \dots, a_n) \geqslant \mathscr{G}(a_1, \dots, a_n)$ En appliquant ce résultat avec la famille des $\left(\dfrac{1}{a_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$, on obtient l'autre inégalité. La fonction ln étant strictement concave sur $\mathbf{R}_+^*$, le cas d'égalité dans les deux inégalités équivaut bien au fait que les a_i soient tous égaux.
2. Montrer que les deux suites sont respectivement croissantes majorées et décroissantes minorées grâce à l'exercice 1. Conclure par un passage à la limite de la relation de récurrence.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 Inégalité de Landau

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$ telle que f et f'' sont bornées. Alors f' est bornée et on a l'inégalité

$$\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

Solution de l'exercice 2

Soient $x, y \in I$, f'' est bornée sur $[x, y]$ (ou $[y, x]$) donc, d'après la formule de Lagrange, $\exists z \in [x, y]$ tel que

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \frac{(x-y)^2}{2} f''(z).$$

En appliquant la formule précédente avec $x = y+1$, on obtient $|f'(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_\infty$ dont f' est bornée. Soit maintenant $h > 0$, on applique ce qui précède à $y+h$, $y \in \mathbf{R}$:

$$f'(y) = \frac{1}{h}\left(f(y+h) - f(y) - \frac{h^2}{2} f''(y)\right) \Rightarrow |f'(y)| \leqslant \frac{2}{h}\|f\|_\infty + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty .$$

Une petite étude de fonction permet de conclure.

⋆⋆⋆

Exercice 3 Caractère scindé et dérivée logarithmique

Soit $a \in \mathbf{R}$, $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors $P' - aP$ aussi.

Solution de l'exercice 3

Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_q$ les racines réelles de P, $P = K \prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{m_i}$ avec $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $m_i \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\varphi = \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{q} \frac{m_i}{X - \alpha_i},$$

donc φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R} \setminus \{\alpha_i \mid i \in [\![1, q]\!]\}$ et $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\alpha_i \mid i \in [\![1, q]\!]\}$,

$$\varphi'(x) = -\sum_{i=1}^{q} \frac{m_i}{(x - \alpha_i)^2} < 0.$$

On a alors les variations suivantes pour φ :

x	$-\infty$		α_1		α_2	$\cdots$	α_q		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$\cdots$	$\Vert$	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert$	$\cdots$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	0

Soit $a \in \mathbf{R}$, on supposera $a > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = a$ admet au moins une solution sur chaque intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ pour $k \in [\![1, q-1]\!]$ et sur l'intervalle $]\alpha_q, +\infty[$. On a donc q racines réelles de $P' - aP$ distinctes des α_i et $\forall i\, [\![1, q]\!]$ $(X - \alpha_i)^{m_i - 1} \mid P' + aP$ donc le compte des multiplicités est bon : $P' + aP$ est scindé sur $\mathbf{R}$.

Les cas $a < 0$ et $a = 0$ sont analogues.

⋆⋆⋆

Exercice 4 Étude d'une suite récurrente

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{x(1-x)}{1+x}$.

Solution de l'exercice 4

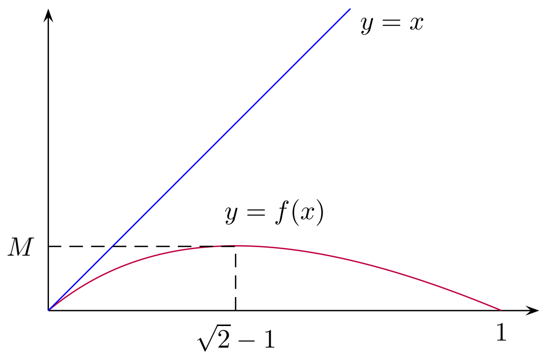
On étudie dans l'ordre :
- les variations de f ;
- le signe de $f(x) - x$;
- la monotonie, les parties stables.

f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(1+x) - x + x^2}{(1+x^2)} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}.$$

Le discriminant du numérateur est 8, deux racines $-1 \pm \sqrt{2}$ et $f(x) - x = -\frac{2x^2}{1+x} < 0$ sur $]0,1[$ donc on dresse le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0
$f(x)-x$	0	$-$		$-$	



Et $M = (\sqrt{2}-1)\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^2$. On voit en traçant le parcours de la suite sur le graphe que (u_n) décroit vers 0.

$[0,1[$ est stable par f et f est bien définie sur cet intervalle car $0 < M < 1$ donc u_n est bien définie et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $f(x) - x < 0$ donc u_n est décroissante. u_n est décroissante minorée par 0 donc converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ et $f(\ell) = \ell \Rightarrow \ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Déterminons maintenant un équivalent de u_n. On cherche $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $(u_{n+1} - \ell)^\alpha - (u_n - \ell)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$ et ici $\ell = 0$. Or $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= u_n^\alpha \left(\left(\frac{1-u_n}{1+u_n} \right)^\alpha - 1 \right) \\ &= u_n^\alpha \left(\left(1 - \alpha u_n + O\left(u_n^2\right)\right) \left(1 - \alpha u_n + O\left(u_n^2\right)\right) - 1 \right) \\ &= -2\alpha u_n^{\alpha+1} + O\left(u_n^{\alpha+2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi en prenant $\alpha = -1$, on a $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc, d'après le lemme de Césaro,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{uk+1} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{un+1} - \frac{1}{u_0} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \Rightarrow (n+1)u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5 Riemann généralisé

Soit $(u_n) \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ le terme général d'une série divergente et $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ S_n > 0$. Montrer que la série de terme général $\left(\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Solution de l'exercice 5

$\Leftarrow$ Supposons $\alpha > 1$, on utilise des intégrales. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$, $\forall n > n_0$,

$$v_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = w_n \quad \text{car } \forall t \in [S_{n-1}, S_n],\ t^\alpha > S_n^\alpha > S_n.$$

Or la série de terme général (w_k) converge : en effet, $\forall n > n_0$,

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} w_k = \int_{S_{n_0}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{S_{n_0}}^{S_n} \leqslant \frac{S_{n_0}^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

car $\alpha - 1 > 0$. Les w_k étant positifs, on a majoré les sommes partielles donc la série de terme général (w_k) converge donc par domination la série de terme général (v_n) aussi.

$\Rightarrow$ Supposons $\alpha \leqslant 1$, il suffit par minoration de montrer que la série de terme général $\left(v_n = \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Pour cela, supposons qu'elle converge. Alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, ce qui veut dire que $S_{n-1} \sim S_n$ donc la série de terme général $\left(\dfrac{u_n}{S_{n-1}}\right)$ converge aussi par équivalence avec v_n. Or $\dfrac{u_n}{S_{n-1}} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \geqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}} \geqslant \int_{S_{n_0}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n_0}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$

ce qui est impossible.

⋆⋆⋆

* Exercice 6 Approximation d'une intégrale (*Centrale 2009*)

Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty]$ dans $\mathbf{R}$, intégrable sur $\mathbf{R}_+$. On suppose de plus qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que ϕ décroisse sur $[t_0,+\infty]$.

1. Établir que ϕ est positive sur $[t_0,+\infty]$.
2. Soit $h>0$.

   a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant h\phi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\mathrm{d}t$.

   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.
3. Prouver que
$$h\sum_{n=0}^{+\infty}\phi(nh) \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t,$$
en introduisant a suffisamment grand et coupant la somme à $\mathrm{E}\left(\dfrac{a}{h}\right)$.

Solution de l'exercice 6

1. Supposons que $\exists t_1 > t_0$ tel que $\phi(t_1)<0$. Alors puisque ϕ est décroissante, $\forall t \in [t_1,+\infty]$, $\phi(t) \leqslant \phi(t_1) < 0$ donc ϕ ne serait pas intégrable en $+\infty$, impossible. ϕ est décroissante minorée sur $[t_0,+\infty]$ donc admet une limite en $+\infty$. Comme ϕ est intégrable, cette limite est 0.
2. a) Pour $n \geqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{t_0}{h}\right)+1$, $\forall t \in [(n-1)h, nh]$, $\phi(t) \geqslant \phi(nh) \geqslant 0$ d'où l'inégalité en intégrant.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t$ converge donc par majoration $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ aussi.
3. On remarque que $\forall n \geqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{t_0}{h}\right)+1$, $h\phi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\mathrm{d}t \leqslant h\phi((n-1)h)$. Notons $n_0 = \mathrm{E}\left(\dfrac{t_0}{h}\right)+2$, alors
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \leqslant \int_{(n_0-1)h}^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi((n-1)h)$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_0-1)h}^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t \leqslant h\phi((n_0-1)h).$$
On a donc majoré la seconde partie de la somme. De plus,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{(n-1)h}\phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-2}\int_{nh}^{(n+1)h}\left|\phi(t)-\phi(nh)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant (n_0-1)h \times \sup\left\{\left|\phi(t)-\phi(u)\right| \mid u,t \in [0,n_0-1] \text{ et } |t-u| \leqslant h\right\},\end{aligned}$$
On supposera $h<1$, $(n_0-1)h \leqslant t_0+1$ et ϕ est continue sur $[0,t_0+1]$ donc uniformément continue, donc $\forall \varepsilon>0$, on peut trouver $h_0 \in]0,1[$ tel que $\forall t,u \in [0,t_0+1]$, $|t-u| \leqslant h_0 \Rightarrow |\phi(t)-\phi(u)| < \varepsilon$ donc pour $h<h_0$, on majore la première partie par $(t_0+1)\varepsilon$. Comme ϕ est bornée sur $[0,t_0+1]$, $h\phi((n_0-1)h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc on peut trouver $h_1>0$ tel que si $h<h_1$, $h\phi((n_0-1)h) \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour $h<\min(h_0,h_1)$, on a
$$\left|\int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant (t_0++2)\varepsilon \Rightarrow h\sum_{n=0}^{+\infty}\phi(nh) \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7 Convergence de l'intégrale et uniforme continuité

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Solution de l'exercice 7

Soit $\varepsilon > 0$, f est uniformément continue donc $\exists \alpha >$ tel que $\forall x, y \in \mathbf{R}_+$, $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. On va approcher f par une quantité intégrale qu'on peut contrôler : $\forall x > \alpha$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant \left| f(x) - \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} |f(x) - (f(t)| \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \right|.
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge $\displaystyle\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\exists M > 0$ tel que $\forall x \geqslant M$, $\left| \displaystyle\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall x \geqslant M$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

⋆⋆⋆

* Exercice 8 Carrés intégrables

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que f et f'' soient de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que f' est de carré intégrable.
2. Démontrer l'inégalité $\left(\int_{\mathbf{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbf{R}} f''^2\right)$.

Solution de l'exercice 8

1. On raisonne d'abord au voisinage de $+\infty$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$, on fait une intégration par parties :

$$\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t = [f(t)f'(t)]_0^x - \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t.$$

f et f'' sont de carrés intégrables donc ff'' est intégrable car $\forall t \in \mathbf{R}$, $|f(t)f''(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2(t) + f''^2(t))$.
Par l'absurde, supposons que f' ne soit pas de carré intégrable. alors $\displaystyle\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $f(x)f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\mathrm{d}t$ converge. Or $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x f(t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f^2(t) - f^2(0))$ donc $f^2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ impossible car f est de carré intégrable.
Ainsi ff' admet une limite finie en $+\infty$ et ff' est intégrable en $+\infty$ donc $f'(x)f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par passage à la limite dans l'intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t = -f'(0)f(0) - \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\mathrm{d}t.$$

De même, en $-\infty$, $f(x)f'(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et les intégrales convergent avec

$$\int_{+\infty}^0 f'^2(t)\mathrm{d}t = f'(0)f(0) - \int_{+\infty}^0 f(t)f''(t)\mathrm{d}t.$$

Donc f' est de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

2. En additionnant les deux égalités obtenues précédemment sur les intégrales en $+\infty$ et $-\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}} f'^(t)\mathrm{d}t = -\int_{\mathbf{R}} f(t)f''(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \left(\int_{\mathbf{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbf{R}} f''^2\right),$$

d'après Cauchy-Schwartz appliqué avec le produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur $\mathbf{R}$: $f, g \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} fg$, d'où le résultat. Le cas d'égalité correspond à celui de Cauchy-Scwartz, c'est à dire que f et $-f''$ sont positivement liées, $\exists\alpha \leqslant 0$ tel que $f'' = \alpha f$ donc si f correspond au cas d'égalité, en résolvant l'équation différentielle, il existe $A, B \in \mathbf{R}$ tels que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = A\cos(\sqrt{-\alpha}t) + B\sin(\sqrt{-\alpha}t).$$

f est de carré intégrable si et seulement si $A = B = 0$ donc l'égalité est vraie pour $f = 0$ seulement.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9 Formule des résidus

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} F(t)\mathrm{d}t$ où $F \in \mathbf{C}(X)$ n'a pas de pôles réels et $\deg F \leqslant -2$.

1. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbf{R}} F(t)\mathrm{d}t = i\pi \sum_{z \text{ pôle de } F} \varepsilon\left(\Im\mathrm{m}(z)\right) \mathrm{Res}_F(z),$$
où $\varepsilon\left(\Im\mathrm{m}(z)\right)$ est le signe de la partie imaginaire de z et $\mathrm{Res}_F(z)$ la coefficient de $\dfrac{1}{X-z}$ dans la décomposition de F en élément simple.
3. En déduire que
$$\int_{\mathbf{R}} F(t)\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{\substack{z \text{ pôle de } F\\ \Im\mathrm{m}(z)>0}} \varepsilon\left(\Im\mathrm{m}(z)\right) \mathrm{Res}_F(z).$$

Solution de l'exercice 9

1. On note que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$ diverge, donc la quantité à calculer n'est pas l'intégrale sur $\mathbf{R}$ d'une quantité, juste une limite particulière. On pose $z = a + ib$ avec $b \neq 0$, on connaît (ou on retrouve) la primitive $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t-z} = \ln|t-z| + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right)$, donc $\forall x > 0$,
$$\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} = \ln\left|\frac{x-z}{x+z}\right| + i\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+a}{b}\right)\right] \xrightarrow[x\to+\infty]{} \varepsilon(\Im\mathrm{m}(z))i\pi.$$

2. Tout d'abord, F est continue sur $\mathbf{R}$ et intégrable car $|f(x)| \underset{\pm\infty}{\sim} C\,|x|^d$ où $d = \deg F \leqslant 2$. On décompose F en éléments simples : $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X-z_i)^j}$. Soit $i \in [\![1, d]\!]$:
– pour $j = 1$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z_i} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \varepsilon(\Im\mathrm{m}(z))i\pi$;
– pour $j \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-z_i)^j} = \left[\frac{(t-z_i)^{-j+1}}{-j+1}\right]_{-x}^{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Puisque f est intégrable, on a en particulier
$$\int_{\mathbf{R}} F(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} F(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{d} a_{i,1} i\pi\varepsilon(\Im\mathrm{m}(z)).$$
Or par définition $a_{i,1} = \mathrm{Res}_F(z_i)$ d'où le résultat.
3. Puisque $\deg F \leqslant 2$,
$$0 \xleftarrow[x\to\pm\infty]{} xF(x) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_j} \frac{x a_{i,j}}{(x-z_i)^j} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \sum_{z \text{ pôle de } F} \mathrm{Res}_F(z).$$
Ceci signifie que la de la somme pour les z à partie imaginaires positives est l'opposé de la somme pour les z à parties réelles négatives, d'où la formule annoncée.

⋆ ⋆ ⋆

* Exercice 10 Étude d'intégrales à paramètre

1. On pose pour $n \in \mathbf{N}^*$
$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$
Déterminer un équivalent de (a_n) en $+\infty$, puis calculer a_n pour $n \in \mathbf{N}^*$ et enfin déterminer la nature de la série de terme général $(a_n x^n)$ et calculer sa somme.
2. On pose pour $n \in \mathbf{N}$
$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}\mathrm{d}t.$$
   a) Quelle est la nature de la série de terme général $((-1)^n u_n)$?
   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^2}$.
   c) En déduire le développement asymptotique $u_n = \dfrac{\ln 2}{n} - \dfrac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Solution de l'exercice 10

1. Tous les a_n sont définis car l'intégrande est équivalente en $+\infty$ à t^{-3n} et $-3n < -2$. Pour déterminer l'équivalent de (a_n), on pose pour $n \in \mathbf{N}^*$ $t^3 = \dfrac{u}{n} \Leftrightarrow u = nt^3$, alors $\mathrm{d}t = u^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \mathrm{d}u$ donc, ce changement de variables étant un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+$ dans lui-même,
$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3n^{\frac{1}{3}}} \underbrace{\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}}_{f_n(u)} \mathrm{d}u.$$
Les f_n sont continues par morceaux et (f_n) converge simplement vers $u \geqslant 0 \longmapsto \mathrm{e}^{-u} u^{-\frac{2}{3}}$. De plus, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall u \geqslant 0$, $|f_n(u)| \leqslant |f_1(u)|$. En effet, $\forall u \geqslant 0$, $x > 0 \longmapsto \left(1 + \dfrac{u}{x}\right)^x$ est décroissante. f_1 est continue par morceaux intégrable en $+\infty$ par la règle de Riemann par exemple donc, d'après le théorème de convergence dominée, en reconnaissant l'expression de la fonction Γ,
$$a_n \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3n^{\frac{1}{3}}}.$$
Calculons maintenant a_n pour $n \in \mathbf{N}^*$. Pour trouver une relation de récurrence sur les a_n, on effectue une intégration par parties : pour $A > 0$,
$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^A + n\int_0^A \frac{3t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$
En faisant tendre $A \to +\infty$, $a_n = 3n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}t = 3n(a_n - a_{n+1})$ car $t^3 = t^3 + 1 - 1$. La relation de récurrence est donc
$$a_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} a_n.$$
Reste à calculer le premier terme :
$$\begin{aligned}
a_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{d}u}{1+u^3} \quad \text{en posant } t = \frac{1}{u}\,;\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Passons à la série. D'après le début de l'exercice, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$a_n x^n \underset{+\infty}{\sim} K\frac{x^n}{n^{\frac{1}{3}}}.$$

On peut donc conclure :
– si $|x|<1$, la série converge ;
– si $|x|>1$, la série diverge grossièrement ;
– si $x=1$, la série diverge par la règle de Riemann ;
– si $x=-1$, a_n décroit vers 0 donc la série alternée converge par Leibniz.
Le rayon de convergence de cette série entière est 1, son domaine de définition est $[-1,1[$. Calculons la somme. Pour $|x|<1$, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+t^3)^n}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{1+t^3}\right)^n\mathrm{d}t.$$

On va appliquer le théorème de sommation L^1. Pour $n\in\mathbf{N}^*$, $t>0\longmapsto\left|\frac{x}{1+t^3}\right|$ est intégrable et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{x}{1+t^3}\right|\mathrm{d}t = |x|^n\, a_n$ terme général d'une série convergente car $|x|<1$. On peut donc intervertir :

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+t^3}\frac{1}{1-\frac{x}{1+t^3}}\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3-x} = \frac{x}{1-x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{t^3}{1-x}} \\ &= a_1\frac{x}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{en posant } u=\frac{t}{\sqrt[3]{1-x}}. \end{aligned}$$

Du fait que la série entière est uniformément convergente sur $[-1,0]$, S est continue en -1 donc la formule ci-dessus est valable pour $x=-1$ car les deux membres sont continus sur $[-1,0]$. Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$,

$$S(x)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}x(1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

2. a) Posons $\varphi : x\geqslant 0\longmapsto \frac{x}{1+x}$, φ est dérivable et $\varphi'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$ donc φ est croissante. Or à $t\in[0,1]$ fixé, $x\longmapsto t^x$ est décoissante donc $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\frac{t^n}{1+t^n}\leqslant\frac{t^{n+1}}{1+t^{n+1}}.$$

De plus, $|u_n|\leqslant\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (u_n) décroit vers 0 donc, d'après le critère de Leibniz, la série de terme général $((-1)^n u_n)$ converge.

b) On développe en série entière : $\forall x\in]-1,1[$, $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ donc

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{(-1)^{k+1}\frac{x^{k-1}}{k}}_{u_k}\mathrm{d}x.$$

La série de terme général $u_k(x)$ converge simplement vers $\frac{\ln(1+x)}{x}$ $\forall x\in]0,1]$ et $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1|u_k(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^{k-1}}{k}\mathrm{d}x=\frac{1}{k^2}$ terme général d'une série convergente. D'après le théorème de sommation L^1,

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^2} = \eta(2).$$

On rappelle que $\forall s > 0$, $\eta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ et $\forall s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Alors $\forall s > 1$,

$$\eta(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = -\frac{1}{2^s}\zeta(s) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).$$

Ainsi, $\eta(2) = \dfrac{\zeta(2)}{2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

c) Cherchons un équivalent de (u_n). Dans l'intégrale qui définit u_n pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u = t^n$ pour obtenir

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \int_0^1 \frac{u^x}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Montrons que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. φ est définie sur $]-1,+\infty[$ d'après Riemann car $\dfrac{u^x}{1+u} \underset{0}{\sim} u^x$.
Soit $\psi : (x,u) \in]-1,+\infty[\times]0,1] \longmapsto \dfrac{u^x}{1+u}$, ψ admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre et $\forall k \in \mathbf{N}$, $\dfrac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(x,u) = (\ln u)^k\, u^x$. $\dfrac{\partial^k \psi}{\partial x^k}$ est continue par morceaux par rapport à u, continue par rapport à x, et $\forall a > -1$, $\forall (x,u) \in [a,+\infty]\times]0,1]$,

$$\left|\frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(x,u)\right| \leqslant |\ln u|^k\, u^x = \alpha_{k,a}(u).$$

$\alpha_{k,a}$ est continue sur $]0,1]$ et en 0 on a par exemple $\alpha_{k,a}(u) = o\left(u^b\right)$ où $b = (-1+a)/2$ donc, d'après la règle de Riemann, $\alpha_{k,a}$ est intégrable en 0. D'après le théorème sur le caractère $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre, ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. En particulier, ψ admet des développements limité à tout ordre en 0 et $\forall k \in \mathbf{N}$,

$$\varphi^{(k)}(0) = \int_0^1 \frac{(\ln u)^k}{1+u}\mathrm{d}u \Rightarrow \forall d \in \mathbf{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{d} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!n^{k+1}} + o\left(\frac{1}{n^{d+1}}\right).$$

Or $\varphi(0) = \ln 2$, et d'après la question précédente, $\varphi'(0) = -\dfrac{\pi^2}{12}$ donc on a bien

$$u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

⋆ ⋆ ⋆

** Exercice 11 Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace de dimension finie de E et $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x - y_0\| = \mathrm{d}(x, F)$. En déduire que, si $F \neq E$, $\exists u \in E$ unitaire tel que $\mathrm{d}(u, F) = 1$.
2. On suppose que F est de dimension infinie et on considère un drapeau infini $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-espaces vectoriels de E : $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$ et $\dim F_n = n$. Prouver q'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de vecteurs unitaires de E telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{d}(x_{n+1}, F_n) = 1$.
3. Montrer que la boule unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Solution de l'exercice 11

1. Soit $d = \mathrm{d}(x, F)$, $K = \{y \in F \mid \|y - x\| \leqslant d + 1\}$, K est borné et fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme $K \subset F$ de dimension finie, c'est un compact donc $y \in K \longmapsto \|y - x\|$ qui est continue est bornée est atteint ses bornées : $\exists y_0 \in K$ tel que $\forall y \in K$, $\|x - y_0\| \leqslant \|x - y\|$. Or si $y \in F \setminus K$, $\|x - y\| \geqslant d + 1 \geqslant \|x - y_0\|$ donc $d = \|x - y_0\|$ par définition de la distance à une partie.

2. On prend $x_1 \in F_1$ unitaire, puisque $F_0 = \{0\}$, on a bien $\mathrm{d}(x_1, F_0) = \|x_1\| = 1$. Supposons avoir construit $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in F_k$ et $\mathrm{d}(x_k, F_{k-1}) = 1$. Pour $v \in F_{n+1} \setminus F_n$, d'après la question précédente, il existe $h \in F_n$ tel que $\mathrm{d}(v, F_n) = \|v - h\|$. Prenons $x_{n+1} = \dfrac{v - h}{\|v - h\|} \in F_{n+1}$. Alors $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\forall x \in F_n$,
$$\|x_{n+1} - x\| = \frac{\|v - h - \|v - h\|\, x\|}{\|v - h\|} = \frac{\|v - (h + \|v - h\|\, x)\|}{\mathrm{d}(v, F_n)} \geqslant 1 \quad \text{car } h + \|v - h\|\, x \in F_n,$$
et il y a égalité pour $x = 0$ donc la distance de x_{n+1} à F_n est bien 1.
3. Si E est de dimension finie, la boule unité de E est fermée bornée donc compacte. Supposons maintenant E de dimension infinie et montrons que la boule unité n'est pas compacte. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille libre infinie de E, on applique la question précédente avec $\forall n$ß$\mathbf{N}$, $F_n = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. On a donc une suite de vecteurs de E $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\|x_n\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_n, F_{n-1}) = 1$. En particulier, $\forall m > n$, $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ donc la suite (x_n) n'admet pas de valeurs d'adhérence ; la boule unité n'est donc pas compacte.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12 Petits lemmes d'algèbre linéaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, discuter du rang de $\operatorname{com} A$ selon le rang de A.
2. Pour toute forme linéaire $\ell : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$, montrer qu'il existe une unique $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\ell(X) = \operatorname{Tr}(A_0 X)$.
3. Soit A une $\mathbf{K}$-algèbre et $a \in A$. Si a admet un polynôme annulateur minimal P, montrer que la $\mathbf{K}$ algèbre $\mathbf{K}[a]$ engendrée par a est de dimension finie et $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[a] = \deg P$.

Solution de l'exercice 12

1. On sait que ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{com}AA = A\,{}^{\mathrm{T}}\mathrm{com}A = \det A \mathrm{I}_n$ et que, si on note $A_{i,j}$ la matrice issue de A en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne, $\operatorname{com} A[i,j] = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$.
   – Si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{com} A$ est inversible donc $\operatorname{rg} \operatorname{com} A = n$.
   – Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors les coefficients de $\operatorname{com} A$ sont tous nuls car ce sont des déterminants de matrices de taille $n-1$ issues de A.
   – Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $\det A_{i,j} \neq 0$ dont $\operatorname{com} A \neq 0$ dont $\operatorname{rg} \operatorname{com} A \geqslant 1$. De plus, ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{com}AA = 0$ donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{T}}\mathrm{com}A$ donc $\dim \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{T}}\mathrm{com}A \geqslant n-1$ donc $\operatorname{rg} \operatorname{com} A \leqslant A$ donc $\operatorname{rg} \operatorname{com} A = 1$.
2. Considérons $\psi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longmapsto \ell_A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ où $\ell_A : X \longmapsto \operatorname{Tr}(AX)$. ψ est linéaire entre deux espaces de même dimension et si $A \in \operatorname{Ker} \psi$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{Tr}(AX) = 0$. En prenant $X = E_{i,j}$, on a $a_{j,i} = 0$ donc $A = 0$. ψ est un isomorphisme d'où le résultat.
3. On suppose $a \neq 0$, donc $d = \deg P \geqslant 1$. Considérons $\varphi : Q \in \mathbf{K}_{d-1}[X] \longmapsto \widetilde{Q}(a) \in \mathbf{K}[a]$. φ est linéaire et c'est un isomorphisme. En effet, si $Q \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors Q annule a donc Q est dans l'idéal $P\mathbf{K}[X]$ engendré par P or $\deg Q < d$ donc $Q = 0$. Soit maintenant $b \in \mathbf{K}[a]$, $\exists P' \in \mathbf{K}[X] / b = \widetilde{P'}(a)$. Or $P' = QP + R$ où $R \in \mathbf{K}_{d-1}[X]$ et en évaluant cette expression en a, on trouve $b = \widetilde{R}(a) = \varphi(R)$. φ est un isomorphisme donc l'égalité des dimensions est assurée.

⋆ ⋆ ⋆

** Exercice 13 Indépendance des caractères

Soit $(G, \star)$ un groupe et $\mathbf{K}$ un corps.

1. Montrer que la famille des morphismes de groupes de $(G, \star)$ dans $(\mathbf{K}^*, \times)$ ou caractères est libre dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^G$.
2. En déduire que l'ensemble $\widehat{G}$ des morphismes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$ est fini de cardinal n.

Solution de l'exercice 13

1. Il nous faut montrer que toute famille finie de morphismes est libre. Raisonnons par récurrence sur le cardinal n de cette famille.

   $(n = 1)$ Un caractère f_1 n'est pas nul donc (f_1) est libre.

   $(n \to n+1)$ Soient $f_1, \dots, f_{n+1} \in \widehat{G}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbf{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = 0$. Alors $\forall g, g_0 \in G$,

   $$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(g) = 0 \quad (*) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(g) \times f_i(g_0) \quad (**).$$

   En faisant $(*) \times f_{n+1}(g_0) - (**)$, $\forall g \in G$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_{n+1}(g_0) - f_i(g_0)) f_i(g)$. Par hypothèse de récurrence, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i (f_{n+1}(g_0) - f_i(g_0)) = 0$. Ceci étant vrai $\forall g_0 \in G$, puisque $f_{n+1} \neq f_i$, $\exists g_0 \in G$ telle que $f_{n+1}(g_0) - f_i(g_0) \neq 0$ donc $\lambda_i = 0$.

2. Soit $\varphi \in \widehat{G}$, φ est caractérisée par $a = \varphi(\overline{1}) \in \mathbf{C}^*$. En effet, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$,

   $$\varphi(\overline{k}) = \prod_{i=0}^{k} \varphi(\overline{1}) = \varphi(\overline{1})^k = a^k.$$

   De plus, il faut que $\varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{n})$, d'où $a^n = 1$ donc $a \in \mathbf{U}_n$. On a donc au plus n caractères, montrons que chaque $\omega \in \mathbf{U}_n$ définit un caractère distinct. Soit $\omega \in \mathbf{U}_n$, l'application

   $$\varphi_\omega : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \overline{k} & \longmapsto & \omega^k \end{array}$$

   définit bien une application car $\omega^n = \omega^0$ et est un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$. De plus, d'après la question précédente, $(\varphi_{\omega_1}, \dots, \varphi_{\omega_n})$ est libre dans . Puisque $\dim \mathscr{F}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathbf{C}) = n$, $\{\varphi_\omega \mid \omega \in \mathbf{U}_n\}$ est une base de $\mathscr{F}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathbf{C})$.

⋆ ⋆ ⋆

* Exercice 14 Matrices d'incidence

Soit A un ensemble fini de cardinal m, $u_1, \dots, u_n \subset A$ des parties non vides de A distinctes, telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \mathrm{Card}(u_i \cap u_j) = a$. Prouver que $m \geqslant n$.

Pour cela, on pourra poser la matrice $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in u_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et montrer que ${}^{\mathrm{T}}MM$ est inversible.

Solution de l'exercice 14

La matrice M, un peu comme la matrice de Gram d'un système de vecteurs, caractérise la géométrie du système des u_i. Par exemple, la somme des coefficients de la colonne i est $\mathrm{Card}(u_i)$. Mais calculons d'abord pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{T}}MM[i,j] &= \sum_{k=1}^{m} {}^{\mathrm{T}}M[i,k]M[k,j] \\ &= \sum_{k=1}^{m} M[k,i]M[k,j] \\ &= \langle \mathrm{C}_i(M), \mathrm{C}_j(M) \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$. Or en réfléchissant un peu on s'aperçoit que si $i \neq j$, $\langle \mathrm{C}_i(M), \mathrm{C}_j(M) \rangle = \mathrm{Card}(u_i \cap u_j) = a$ et ${}^{\mathrm{T}}MM[i,i] = \mathrm{Card}(u_i)$. Ainsi

$${}^{\mathrm{T}}MM = \begin{pmatrix} \mathrm{Card}(u_1) & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & \mathrm{Card}(u_n) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que ${}^{\mathrm{T}}MM$ est inversible, on peut redémontrer le cas limite du déterminant de Hürwitz ou bien observer que ${}^{\mathrm{T}}MM$ est symétrique et considérer la forme quadratique q canoniquement associée à ${}^{\mathrm{T}}MM$. On a alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(u_i) x_i^2 + a \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} x_i x_j \\ &= a \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Card}(u_i) - a) x_i^2. \end{aligned}$$

Montrons que q est définie, elle est déjà positive Si $a = 0$, les u_i étant distincts et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Card}(u_i) \geqslant 1$, q est bien définie positive car $q(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Si $a \geqslant 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Card}(u_i) > a$, c'est bon. SI $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathrm{Card}(u_i) = a$, alors on suppose $i = 1$ et on a $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $u_1 \subsetneq u_j$ comme les u_j sont distincts de u_1, et de plus cela ne peut se produire que pour un des u_i, en l'occurrence u_1. Mézalors $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\mathrm{Card}(u_j) > a$ et

$$q(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots x_n = 0.$$

On termine par le fait que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^{\mathrm{T}}MM)$. En effet, $\mathrm{Ker}\, M \subset \mathrm{Ker}\, {}^{\mathrm{T}}MM$ et si $x \in \mathrm{Ker}\, {}^{\mathrm{T}}MM$, alors ${}^{\mathrm{T}}x{}^{\mathrm{T}}MMx = 0 \Leftrightarrow \|Mx\| = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, {}^{\mathrm{T}}MM$ et la formule du rang achève la preuve.

Ainsi $\mathrm{rg}\, M = n$ or $\mathrm{rg}\, M \leqslant m$ donc $m \geqslant n$.

⋆⋆⋆

* Exercice 15 Carré diagonalisable

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$ et A^2 diagonalisable.

Solution de l'exercice 15

$\Rightarrow$ Si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc $A^2 = PD^2P^{-1}$ et $D^2 = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^2 = 0$ donc A^2 est diagonalisable et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$.

$\Leftarrow$ On suppose A^2 diagonalisable et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$, soit $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \mu_k)$ annulateur de A^2 scindé à racines simples (les μ_k sont distincts). Alors

$$0 = \widetilde{P}(A^2) = (A^2 - \mu_1 \mathrm{I}_n) \cdots (A^2 - \mu_r \mathrm{I}_n),$$

donc $Q = P(X^2)$ est annulateur de A et les racines comlexes de Q sont les $(\pm\delta_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ où $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $\delta_j^2 = \mu_j$. Les $(\pm\delta_j)$ sont deux à deux distincts sauf dans le cas où $\exists j \in [\![1, r]\!] \,/ \delta_j = 0 \Rightarrow \mu_j = 0$.

- Si A est inversible, alors A^2 aussi et on peut choisir P de telle sorte que 0 ne soit pas racine de P, car 0 n'est pas valeur propre de A^2. Dans ce cas les $(\pm\delta_j)$ sont tous distincts et on dispose d'un polynôme annulateur de A scindé à racines simples : A est diagonalisable.
- Si A n'est pas inversible, on peut choisir comme annulateur de A^2 $P = XR$ où $R = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \mu_k)$ et les μ_k distincts non-nuls. $\widetilde{P}(A^2) = 0$ donc $\operatorname{Ker}\left(\widetilde{P}(A^2)\right) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ or $R \wedge X = 1$ donc, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Ker}\left(\widetilde{R}(A^2)\right)$. Or $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$ car les deux matrices ont le même rang et $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2$. De plus, on peut décomposer $R = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \delta_k)(X + \delta_k)$ où les δ_k sont distincts non nuls et la décomposition des noyaux donne

$$\operatorname{Ker}\left(\widetilde{R}(A^2)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A - \delta_i \mathrm{I}_n) \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A + \delta_i \mathrm{I}_n).$$

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est engendré par les espaces propres de A donc A est diagonalisable.

⋆⋆⋆

* Exercice 16 Décomposition de Dunford (*Mines 2011*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$, f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, $P = \chi_A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes distinctes de A. $\forall i \in [\![1, r]\!]$, on note α_i la multiplicité de λ_i, $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, $F_i = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n})^{\alpha_i}\right)$, $f_i = f_{|F_i}$.

1. Justifier que $\mathbf{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
2. En considérant une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $P_i = \chi_{f_i}$ en justifiant d'abord que P_i annule f_i.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ ait la forme suivante :
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \mathrm{I}_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix},$$
où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, N_i est nilpotente.
4. En déduire que $A = D + N$ où D est diagonalisable et N nilpotente telles que $ND = DN$.

Solution de l'exercice 16

1. $P \in \mathbf{C}[X]$ est scindé et $P = K \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ avec $K \neq 0$. De plus $P = \chi_f$ et le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\widetilde{P}(f) = 0$. De plus, les $\lambda_i - X$ étant premiers entre eux, d'après le théorème de décomposition des noyaux,
$$\mathbf{C}^n = \operatorname{Ker} \widetilde{P}(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n})^{\alpha_i}\right).$$
2. On prend pour $i \in [\![1, r]\!]$ une base $\mathscr{B}_i$ de F_i, et on considère la base $\mathscr{B}$ obtenue par recollement de toutes les sous-bases. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = f_{|F_i}$ donc par définition de F_i, $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{\alpha_i} = 0$ ce qui prouve que P_i annule f_i. f_i est un endomorphisme de f_i et ses valeurs sont racines de P_i, donc la seule valeur propre de f_i est λ_i et donc χ_{f_i} est de la forme $\chi_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Les F_i sont stables par f car f est $\widetilde{P_i}(f)$ commutent et en écrivant la matrice de f dans $\mathscr{B}$, il vient
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_r}(f_r) \end{pmatrix}.$$
Donc le polynôme caractéristique de f est $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Par unicité de la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\nu_i = \alpha_i$ et $P_i = \chi_{f_i}$.
3. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}$. Par formule de passage, $A' = P^{-1}AP$ est la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Or pour $i \in [\![1, r]\!]$ si $N_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})$, N_i est nilpotente d'indice inférieur à α_i donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i) = \lambda_i \mathrm{I}_{\alpha_i} + N_i$ d'où le résultat.
4. On pose les matrices suivantes :
$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \mathrm{I}_{\alpha_r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix}.$$
D' et N' commutent par diagonales par blocs de même taille et $A' = D' + N'$ donc $A = D + N$ avec $D = P^{-1}D'P$ et $N = P^{-1}N'P$. D est semblable à D' diagonale donc est diagonalisable et N' est semblable à une matrice nilpotente (N') donc est nilpotente. Enfin, D et N commutent par un rapide calcul et du fait que N' et D' commutent.

⋆ ⋆ ⋆

** Exercice 17 Polynômes et endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et Π_u sont polynôme minimal. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\Pi_u = (-1)^n \chi_u$.

On rappelle qu'un endomorphisme est cyclique s'il exitste $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Solution de l'exercice 17

$\Rightarrow$ Soit $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E, alors pour tout $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$, $\widetilde{P}(u)(x) \neq 0$ donc $\deg \Pi_u \geqslant n$ or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\widetilde{\chi}(u) = 0$ donc $\Pi_u \mid \chi_u$ car l'ensemble des polynômes annulateurs de u est $\Pi_u \mathbf{K}[X]$ donc $\deg \Pi_u = n$ et la comparaison des coefficients dominants donne $\Pi_u = (-1)^n \chi_u$.

$\Leftarrow$ On procède dans l'esprit de la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Soit $x \in E$, $I_x = \left\{ P \in \mathbf{K}[X] \,\middle|\, \widetilde{P}(y)(x) = 0 \right\}$. Alors I_x est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ donc il existe $\Pi_{u,x} \in \mathbf{K}[X]$ tel que $I_x = \Pi_{u,x}\mathbf{K}[X]$. Montrons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\Pi_{u,x_0} = \Pi_u$. Ceci fait, la minimalité de Π_{u,x_0} assurera la liberté de $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$

- Si $\Pi_u = P^\alpha$ avec P irréductible, on sait que $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ car $\widetilde{\Pi_u}(u)(x) = 0$ donc $\Pi_{u,x} = P^{\beta_x}$ avec $\beta_x \leqslant \alpha$. De plus si $\forall x \in E$, $\beta_x < \alpha$, alors $P^{\alpha-1}$ annulerait u ce qui est impossible car Π_u est minimal. Donc il existe un $x_0 \in E$ tel que $\Pi_{u,x_0} = P^\alpha = \Pi_u$.
- Dans le cas général où $\Pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ avec les P_i irréductibles distincts et les $\alpha_i \geqslant 1$, d'après le théorème de décomposition des noyaux,
$$E = \operatorname{Ker} \widetilde{\Pi_u}(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{Ker} \widetilde{P_i^{\alpha_i}}(u)}_{F_i}.$$
Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on considère la restriction u_i de u à F_i qui est un endomorphisme car u commute avec tout polynôme en u. D'après le cas précédent, il existe un $x_i \in F_i$ tel que $P_i^{\alpha_i} = \Pi_{u_i,v_i}$.

Montrons maintenant un petit lemme : $\forall x, y \in E$, si $\Pi_{u,x} \wedge \Pi_{u,y} = 1$, alors $\Pi_{u,x+y} = \Pi_{u,x}\Pi_{u,y}$. En effet, on a déjà $\Pi_{u,x+y} \mid \Pi_{u,x}\Pi_{u,y}$ car

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi_{u,x}\Pi_{u,y}}(u)(x+y) &= \widetilde{\Pi_{u,x}}(u) \circ \widetilde{\Pi_{u,y}}(u)(x+y) \\
&= \widetilde{\Pi_{u,x}}(u) \circ \widetilde{\Pi_{u,y}}(u)(x) \quad \text{car } \widetilde{\Pi_{u,y}}(u) \text{ est linéaire ;} \\
&= \widetilde{\Pi_{u,y}}(u) \circ \widetilde{\Pi_{u,x}}(u)(x) \quad \text{car deux polynômes en } u \text{ commutent ;} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De plus, en écrivant $x = x + y - y$, on obtient par le même argument $\Pi_{u,x} \mid \Pi_{u,x+y}\Pi_{u,y}$ or $\Pi_{u,x} \wedge \Pi_{u,y} = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, $\Pi_{u,x} \mid \Pi_{u,x+y}$ et de même $\Pi_{u,y} \mid \Pi_{u,x+y}$. Puisque $\Pi_{u,x}$ et $\Pi_{u,y}$ sont premiers entre eux, $\Pi_{u,x}\Pi_{u,y} \mid \Pi_{u,x+y}$ et ces deux polynômes sont unitaires donc égaux.

Ainsi, en posant $x_0 = \sum_{i=1}^{r} v_i$, les $P_i^{\alpha_i}$ étant premier entre eux, on a bien par le lemme $\Pi_{u,x_0} = \Pi_u$. Puisque $\widetilde{\Pi_{u,x_0}}(u)$ est le polynôme en u de plus petit degré qui annule u, la famille $(x_0, u(x_0) \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre et u est cyclique.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18 Condition sur la dépendance de formes linéaires

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi \in E^*$. Montrer que $\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ si et seulement si $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_j) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$.

Solution de l'exercice 18

$\Rightarrow$ Si $\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j \varphi_j$, si $x \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_j)$, $\psi(x) = 0$.

$\Leftarrow$ On peut supposer quitte à échanger l'ordre des formes linéaires que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_1)$ est libre et $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_p \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Pour $j \in [\![1, r]\!]$, on pose $\varphi_j = e_j^*$. On complète $(e_1^*, \ldots, e_r^*)$ en base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de E^*, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base antéduale de $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. On décompose $\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \psi(e_j) e_j^*$, or par hypothèse $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_j) \subset \operatorname{Ker}(\psi)$ donc si $k > r$, $e_k \in \operatorname{Ker}(\psi)$ car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*(e_k) = \delta_{ik}$. Il reste donc $\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \psi(e_j) e_j^* \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$.

$\star\star\star$

** Exercice 19 Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$. Une partie $A \subset \mathscr{L}(E)$ est dite irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de A sont $\{0\}$ et E. On dit que A est réductible lorsqu'elle n'est pas irréductible. On se propose de démontrer le théorème de Burnside : lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, la seule sous-algèbre irréductible de $\mathscr{L}(E)$ est $\mathscr{L}(E)$.

Pour cela, on prend d'abord $\mathbf{K}$ un corps quelconque et A une sous-algèbre irréductible de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\forall y \in E$, $\exists a \in A$ tel que $a(x) = y$.
2. Montrer que $\forall \varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\forall \psi \in E^*$, $\exists b \in A$ tel que $\psi = \varphi \circ b$.
3. Montrer que si A contient un élément de rang 1, alors elle les contient tous et conclure.

On suppose maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

4. Montrer qu'il existe $t_0 \in A \setminus \{0\}$ de rang minimal. On note $r = \mathrm{rg}(t_0)$ et on suppose $r \geqslant 2$.
5. Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in E$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que :
   – $(t_0(x_1), t_0(x_2))$ est libre ;
   – $x_2 = a \circ t_0(x_1)$;
   – λ est valeur propre de $t_0 \circ a_{|\,\mathrm{Im}\, t_0}$.
   Conclure en considérant $t_0 \circ a \circ t_0 - \lambda t_0$.

Maintenant une illustration de ce résultat.

6. Soit G un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \times)$ unipotent : $\forall g \in G$, 1 est la seule valeur propre de g. Montrer que G est cotrigonalisable.

Solution de l'exercice 19

1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $H = \{a(x) \,|\, a \in A\}$. Puisque A est une algèbre, H est un sous-espace vectoriel stable par tout $b \in A$ et $H \neq 0$ car $\mathrm{Id}_E \in A$ donc $H = E$ puisque A est irréductible.
2. Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $K = \{\varphi \circ a \,|\, a \in A\}$, $\mathbf{K}$ est un sous-espace vectoriel de E^* différent de $\{0\}$. Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ une base de K que l'on complète en base $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de E^*, dont on prend la base antéduale $(e_1, \ldots, e_n)$. On veut montrer que $K = E^*$ et on raisonne par l'absurde, on suppose donc $p < n$. Soit $a \in A$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, il existe $a_i \in A$ tel que $\theta_i = \varphi \circ a_i$ donc $\forall j \in [\![p+1, n]\!]$, $\theta_i(a(e_j)) = \varphi \circ a_i \circ a(e_j)$ or $a_i \circ a \in A$ donc $\varphi \circ a_i \circ a \in \mathrm{Vect}(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ donc à cause des relations qui lient la base duale à la base antéduale, $\theta_i \circ a(e_j) = 0$ donc $a(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ donc $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est stable par A, ce qui est impossible puisque ce sous-espace ne peut être ni $\{0\}$ ni E.
3. Soit $u \in A$ de rang 1, soit $y \in E \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(y)$, alors $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda(x) y$ et λ est une forme linéaire car u est linéaire. On regarde maintenant la quantité suivante : $\forall a, a' \in A$, $\forall x \in E$,
   $$a \circ u \circ a'(x) = a(\lambda(a'(x))y) = \lambda(a'(x))a(y).$$
   Lorsque a et a' décrivent A, d'après les questions précédentes, $\lambda \circ a$ décrit E^* et $a(y)$ décrit E donc $a \circ u \circ a'$ décrit tous les endomorphismes de rang 1, qui du même coup appartiennent tous à A. Or les endomorphismes de rang 1 engendrent $\mathscr{L}(E)$ à travers la base canonique par exemple, donc $A = \mathscr{L}(E)$.
4. $\{\mathrm{rg}\, a \,|\, a \in A \setminus \{0\}\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}^*$ donc elle admet un plus petit élément d'où l'existence de t_0.
5. Puisque $r \geqslant 2$, l'image de t_0 est de dimension au moins 2 donc $\exists x_1, x_2 \in E$ tels que $(t_0(x_1), t_0(x_2))$ est libre. En appliquant la question 1. avec $t_0(x_1) \neq 0$, on voit qu'il existe $a \in A$ tel que $t_0(x_2) = a \circ t_0(x_1)$. De plus, $\mathrm{Im}\, t_0$ est stable par $t_0 \circ a$ donc $t_0 \circ a_{|\,\mathrm{Im}\, t_0}$ est un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel qui admet une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$.
   Soit maintenant $b = t_0 \circ a \circ t_0 - \lambda t_0 \in A$, $b \neq 0$ car $b(x_1) = t_0(x_2) - \lambda t_0(x_1) \neq 0$ car $(t_0(x_1), t_0(x_2))$ est libre. De plus,
   $$\mathrm{Im}\, b = \mathrm{Im}\,(t_0 \circ a - \lambda \mathrm{Id}_E)_{|\,\mathrm{Im}\, t_0} \subsetneq \mathrm{Im}\, t_0 \quad \text{car } \lambda \text{ est valeur propre de } t_0 \circ a_{|\,\mathrm{Im}\, t_0}.$$
   b aurait donc un rang plus petit que t_0, impossible. Donc t_0 est de rang 1 donc d'après la question 3., $A = \mathscr{L}(E)$.
6. On va montrer que G est réductible. On suppose que $G \neq \{\mathrm{Id}_n\}$, si G est irréductible alors l'algèbre engendrée par G est $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'après le théorème de Burnside, or l'algèbre engendrée par G est le sous-espace vectoriel engendré par G car $(G, \times)$ est un groupe. Ainsi, G engendre $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ comme espace vectoriel. Soit $(g_1, \ldots, g_{n^2})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ formée d'éléments de G, considérons $h_1, \ldots, h_{n^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que $\forall (i,j) \in [\![1, n^2]\!]^2$, $\mathrm{Tr}(h_i g_j) = \delta_{i,j}$. Les h_i existent car comme $(g_1, \ldots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longmapsto (\mathrm{Tr}(Ag_i))_{i \in [\![1, n^2]\!]}$ est un isomorphisme car φ est linéaire et si

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$, alors $A = 0$. Cette sorte relation d'orthogonalité entre les g_i et les h_i montre que $(h_1, \ldots, h_{n^2})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$A = \sum_{i=1}^{n^2} c_i h_i \quad \text{où} \quad c_i = \mathrm{Tr}(Ag_i)$$

car la formule est vraie pour les g_i et on conclut par linéarité. Ainsi $\forall g \in G$,

$$g = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}(gg_i) h_i = n \left(\sum_{i=1}^{n^2} h_i \right)$$

car $gg_i \in G$ et G est unipotent. Donc G est fini et $\mathrm{Card}\, G = 1$, donc $G = \{\mathrm{I}_n\}$ impossible.
On démontrer maintenant par récurrence sur n que G est cotrigonalisable.

- Si $n = 1$, tout le monde est triangulaire.
- Supposons que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(\mathbf{C})$ unipotent est cotrigonalisable pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ unipotent. Si $G = \{\mathrm{I}_n\}$, c'est bon et sinon G est réductible donc on peut trouver un sous-espace F non trivial stable par tous les éléments de g. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, après changement de base tout g dans G est représenté par une matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } g_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{C}) \text{ et } g_2 \in \mathrm{GL}_{n-p}(\mathbf{C})\,.$$

  $g \longmapsto g_1$ et $g \longmapsto g_2$ sont des morphismes de groupe donc lorsque g décrit G, g_1 et g_2 décrivent des groupes unipotents G_1 et G_2 car g_1 et g_2 ont aussi 1 pour seule valeur propre. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G_1 et G_2, trouver deux bases de cotrigonalisation des g_1 et g_2 et former ainsi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ qui cotrigonalise les éléments de G.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 20 Matrices de Gram (*Mines 2009*)

Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gram M définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2$, $M[i, j] = \langle x_i, x_j \rangle$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
2. On suppose que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que $\forall x \in E$,
$$\mathrm{d}(x, V)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}.$$

Solution de l'exercice 20

1. $\Leftarrow$ Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$,
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle = 0$$
donc les vecteurs lignes de M sont liés donc $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

   $\Rightarrow$ Supposons que $G(x_1, \dots, x_n) = 0$, alors les vecteurs colonne de M sont liés, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_k, x_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \rangle = \langle x_k, y \rangle = 0.$$
On a donc $y \in V \cap V^\perp$ donc, puisque V est de dimension finie, $y = 0$ et $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
2. Soit $x \in E$, y la projection orthogonale de x sur V. Par multilinéarité du déterminant,
$$G(x_1, \dots, x_n, x - y) = G(x_1, \dots, x_n, x) - G(x_1, \dots, x_n, y),$$
or $G(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ car $y \in V$ et
$$G(x_1, \dots, x_n, x - y) = \begin{vmatrix} & & & \langle x_1, x-y \rangle \\ & M(x_1, \dots, x_n) & & \vdots \\ & & & \langle x_n, x-y \rangle \\ \langle x-y, x_1 \rangle & \cdots & \langle x-y, x_n \rangle & \langle x-y, x-y \rangle \end{vmatrix}.$$
Puisque $\langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = \mathrm{d}(x, V)^2$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle x_k, x - y \rangle = 0$ car $x - y \in V^\perp$, en développant par rapport à la dernière colonne on obtient le résultat demandé.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 21 Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidient, p un projecteur de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) p est symétrique ($\forall x, y \in E$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$) ;

(2) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$;

(3) p est un projecteur orthogonal.

Solution de l'exercice 21

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit p un projecteur orthogonal sur $F = \operatorname{Im} p$, $E = F \oplus F^{\perp}$. Soient $x, y \in E$, $x = f_x + f_x^{\perp}$ et $y = f_y + f_y^{\perp}$ dans cette décomposition et comme $\langle f_x^{\perp}, f_y\rangle = \langle f_x, f_y^{\perp}\rangle = 0$,

$$\langle x, p(y)\rangle = \langle f_x^{\perp}, f_y^{\perp}\rangle = \langle p(x), y\rangle.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Comme p est un projecteur, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, montrons que $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$. Soit $y \in \operatorname{Im} p$, $y = p(x_0)$, $x \in \operatorname{Ker} p$.

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle x, p(x_0)\rangle \\ &= \langle p(x), x_0\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $x \in \operatorname{Ker} p$, $y \in \operatorname{Im} p$, $\lambda \in \mathbf{R}$, par hypothèse

$$\|p(\lambda x + y)\|^2 \leqslant \|\lambda x + y\| \Leftrightarrow \|p(y)\| \leqslant |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle.$$

Or $p(y) = y$ donc $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle$. Ce polynôme du second degré a donc sont discriminant négatif, soit $4\langle x, y\rangle^2 \leqslant 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

$\star\star\star$

** Exercice 22 Projection sur un convexe complet non vide

Soit E un espace préhilbertien, $\mathscr{C} \subset E$ convexe non vide complet pour la distance définie par $\|\|$.

1. Montrer que $\forall v \in E$, il existe un unique $p_{\mathscr{C}}(v) \in E$ tel que $\|v - p_{\mathscr{C}}(v)\| = \mathrm{d}(v, \mathscr{C})$.
2. Montrer $p_{\mathscr{C}}(v)$ est caractérisé par la propriété $\forall z \in \mathbf{C}$,
$$\Re\mathrm{e}(\langle v - p_{\mathscr{C}}(v), z - p_{\mathscr{C}}(v)\rangle) < 0.$$
3. Montrer que $p_{\mathscr{C}}(v)$ est 1-lipschitzienne.

Solution de l'exercice 22

1. Montrons d'abord l'unicité. Soit $v \in E$, supposons $\mathrm{d}(v, \mathscr{C}, v) = \|v - c_1\| = \|v - c_2\|$ avec $c_1 \neq c_2$. Soit $m = \dfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$, d'après l'identité du parallélogramme,
$$\begin{aligned}\|v - m\|^2 &= \frac{1}{2}(\|v - c_1\|^2 + \|v - c_2\|^2) - \frac{1}{4}\|c_1 - c_2\|^2 \\ &< \mathrm{d}(v, \mathscr{C}),\end{aligned}$$
impossible au vu de la définition de la distance à une partie. Montrons maintenant l'existence de $p_{\mathscr{C}}(v)$. Par définition de la distance à une partie, on peut trouver une suite (c_n) de points de $\mathscr{C}$ telle que $\|v - c_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{d}(v, \mathscr{C})$. Montrons que (c_n) est de Cauchy. $\forall n, m \in \mathbf{N}$, d'après l'identité du parallélogramme, $2(\|v - c_n\|^2 + \|v - c_m\|^2) = \|c_n - c_m\|^2 + \|2v - c_n - c_m\|^2$ donc, puisque $\mathscr{C}$ est convexe et que $\left\|v - \dfrac{c_n + c_m}{2}\right\| \geqslant \mathrm{d}(v, \mathscr{C})$,
$$\begin{aligned}\|c_n - c_m\|^2 &= 2(\|v - c_n\|^2 + \|v - c_m\|^2) - 4\left\|v - \frac{c_n + c_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2(\|v - c_n\|^2 + \|v - c_m\|^2) - 4\mathrm{d}(v, \mathscr{C})^2.\end{aligned}$$
Puisque $\|v - c_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{d}(v, \mathscr{C}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N} / \forall m \geqslant n \geqslant N$, $\|c_n - c_m\| \leqslant \varepsilon$. Comme (c_n) est complet, (c_n) converge vers un élément $\delta \in \mathscr{C}$ tel que $\mathrm{d}(v, \mathscr{C}) = \|v - \delta\|$ car $x \longmapsto \|x\|$ est continue.
2. On utilise la méthode du glissement.

   $\Rightarrow$ On suppose que $p_{\mathscr{C}}(v)$ est tel que $\|v - p_{\mathscr{C}}(v)\| = \mathrm{d}(v, \mathscr{C})$. Soit $z \in \mathscr{C}$, pour $t \in [0, 1]$, $tz + (1-t)p_{\mathscr{C}}(v) \in \mathscr{C}$ donc
$$\begin{aligned}\|v - p_{\mathscr{C}}(v)\|^2 &\leqslant \|v - (tz + (1-t)p_{\mathscr{C}}(v))\|^2 \\ &\leqslant \|v - p_{\mathscr{C}}(v) - t(z - p_{\mathscr{C}}(v))\|^2 \\ &\leqslant \|v - p_{\mathscr{C}}(v)\|^2 + t^2\|z - p_{\mathscr{C}}(v)\|^2 - 2t\Re\mathrm{e}(\langle v - p_{\mathscr{C}}(v), z - p_{\mathscr{C}}(v)\rangle).\end{aligned}$$
   Ainsi $\forall t \in]0, 1]$, $t\|z - p_{\mathscr{C}}(v)\|^2 - 2\Re\mathrm{e}(\langle v - p_{\mathscr{C}}(v), z - p_{\mathscr{C}}(v)\rangle) \geqslant 0$. On fait tendre $t \to 0$ et on trouve bien $\Re\mathrm{e}(\langle v - p_{\mathscr{C}}(v), z - p_{\mathscr{C}}(v)\rangle) \leqslant 0$.

   $\Leftarrow$ Si $z_0 \in \mathscr{C}$ vérifie $\forall z \in \mathscr{C}$, $\Re\mathrm{e}(\langle v - z_0, z - z_0\rangle) \leqslant 0$, alors $z_0 = p_{\mathscr{C}}(v)$. En effet, pour $z \in \mathscr{C}$,
$$\begin{aligned}\|v - z\|^2 &= \|v - z_0\|^2 + \|z_0 - z\|^2 + 2\Re\mathrm{e}(\langle v - z_0, z - z_0\rangle) \\ &\geqslant \|v - z_0\|^2\end{aligned}$$
   Ceci prouve que $\|v - z_0\|^2 = \mathrm{d}(v, \mathscr{C})$
3. Soient $x, x' \in E$, en appliquant la relation précédente à x' en prenant $p_{\mathscr{C}}(x)$ pour z et vice-versa,
$$\Re\mathrm{e}(\langle p_{\mathscr{C}}(x) - x, p\mathscr{C}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\rangle) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \Re\mathrm{e}(\langle p_{\mathscr{C}}(x') - x', p_{\mathscr{C}}(x') - p_{\mathscr{C}}(x)\rangle) \leqslant 0.$$
   En faisant la somme, $\Re\mathrm{e}(\langle p_{\mathscr{C}}(x) - x - (p_{\mathscr{C}}(x') - x'), p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\rangle) \leqslant 0$ et en décomposant le membre de gauche, $\|p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\|^2 + \Re\mathrm{e}(\langle x' - x, p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\rangle) \leqslant 0$ donc
$$\begin{aligned}\|p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\|^2 &\leqslant \Re\mathrm{e}(\langle x' - x, p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\rangle) \\ &\leqslant \|x - x'\|\,\|p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\| \quad \text{d'après Cauchy-Schwarz.}\end{aligned}$$
   En simplifiant par $\|p_{\mathscr{C}}(x) - p_{\mathscr{C}}(x')\|$ quand on le peut, on retrouve bien le caractère 1-lipschitzien de $p_{\mathscr{C}}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 23 Inégalité de Hadamard

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ triangulaire supérieure à diagonale positive telle que $A = PT$. Montrer l'unicité du couple (P, T) et que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$|\det A| \leqslant \|\mathrm{C}_1(A)\|_2 \cdots \|\mathrm{C}_n(A)\|_2 .$$

Étudier le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 23

Soit $\mathrm{BC}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{B} = (A(e_1), \ldots, A(e_n))$. On orthonormalise $\mathscr{B}$ grâce à Gram-Schimdt en base orthonormale $\mathscr{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Posons $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$, on a déjà $T \in \mathrm{TS}_n(\mathbf{R})$ et la diagonale de T est positive grâce à la construction de Gram-Schmidt. De plus, en note $P = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(\mathscr{B})$ la matrice de passage de BC_n vers $\mathscr{B}'$, on a $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ car les deux bases sont orthonormales. Par relations de changement de base, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(\mathscr{B}') \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \Leftrightarrow A = PT.$$

Montrons que le couple (P, T) est unique. Si $PT = P'T'$ avec $P, P' \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $T, T' \in \mathrm{TS}_n(\mathbf{R})$ de diagonales positives, alors $P'^{-1}P = T'T^{-1}$ or $P'^{-1}P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $T'T^{-1} \in \mathrm{TS}_n(\mathbf{R})$, l'égalité de ces deux matrices implique que ces deux matrices soient égales à I_n et on retrouve $P = P'$, $T = T'$.

Posons $A = (\mathrm{C}_1(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A))$, montrons que $|\det A| \leqslant \|\mathrm{C}_1(A)\|_2 \cdots \|\mathrm{C}_n(A)\|_2$.

- Si $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\det A = 0$, l'inégalité est toujours vraie avec égalité si et seulement si une colonne de A est nulle.
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, il existe $(P, T) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{TS}_n(\mathbf{R})$ avec la diagonale de T positive tel que $A = PT$. Puisque $\det P \in \{\pm 1\}$, $|\det A| = |\det T| = \displaystyle\prod_{i=1} T[i, i]$. Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{C}_k(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} T[j, k] e_j$ donc $\|\mathrm{C}_k(A)\|_2 \geqslant T[k, k]$. Ceci prouve l'inégalité de Hadamar et le cas d'égalité se produit si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|\mathrm{C}_k(A)\|_2 = T[k, k]$, c'est à dire si T est diagonale (les $\mathrm{C}_k(A)$ sont orthogonaux deux à deux).

⋆ ⋆ ⋆

* Exercice 24 La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormale.

Solution de l'exercice 24

A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. Écrivons l'équation aux éléments propres : soit $X = {}^{\mathrm{T}}(x_1 \cdots x_n) \neq 0$,

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{k+1} + x_{k-1} = \lambda x_k & (S). \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

On rajoute les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ au système (S), de manière à avoir une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique $P = X^2 - \lambda X + 1$. Le discriminant est $\lambda^2 - 4$, on a donc *a priori* trois cas à étudier en fonction du signe du discriminant.

Supposons $\lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 2$. Posons $\lambda = 2\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$, les racines de P sont alors $r_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$. Ainsi (S) équivaut au fait qu'il existe $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = a\mathrm{e}^{ik\theta} + b\mathrm{e}^{-ik\theta}$ et $x_0 = x_{n+1} = 0$ c'est à dire $\exists a \in \mathbf{C} / \forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = 2ia\sin(k\theta)$ et $2ia\sin((n+1)\theta) = 0$.

- Si $\sin((n+1)\theta) \neq 0$, $X = 0$ est la seule solution donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.
- Si $\sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!] / \theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$, alors X est solution de (S) si et seulement s'il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $X = a \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}$. Ainsi, $\lambda_k = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ est valeur propre de A associé au vecteur propre X_k ci dessus $(a = 1)$.

On a trouvé n valeurs propres distinctes, pas besoin d'étudier les autres cas pour le discriminant. A est symétrique donc les $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont orthogonaux, il reste à les normaliser.

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= \sum_{p=0}^{n} \sin^2(\theta_k) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1 - \cos(2\theta_k)}{2} \quad \text{car } \sin 0 = 0\,; \\ &= \frac{n+1}{2} - \Re\mathrm{e}\left(\sum_{p=0}^{n} \mathrm{e}^{2ip\theta_k}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} - \Re\mathrm{e}\underbrace{\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{2i(n+1)\theta_k}}{1 - \mathrm{e}^{2i\theta_k}}\right)}_{0} \quad \text{car } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Ainsi, la base orthonormale de vecteurs propres souhaitée est celle des $\left(\sqrt{\dfrac{2}{n+1}} X_k\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 25 Ordre de Löwner

Soient $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$, on dit que A est Löwner-supérieure à B et on écrit $A \succcurlyeq B$ si $A - B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^{\mathrm{T}}XAX \geqslant {}^{\mathrm{T}}XBX$. Montrer que si $A \succcurlyeq B$, alors $\det A \geqslant \det B$.

Solution de l'exercice 25

On procède en plusieurs étapes.

(1) Si $B = \mathrm{I}_n$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^{\mathrm{T}}XAX \leqslant \|X\|$ donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geqslant 1$. Ainsi, puisque A est symétrique réelle donc diagonalisable, $\det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda \geqslant 1$.

(2) Supposons maintenant $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, soit $C \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $C^2 = B$. Alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^{\mathrm{T}}XAX \geqslant {}^{\mathrm{T}}XC^2X \geqslant {}^{\mathrm{T}}YY$ où $Y = CX$. Comme $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^{\mathrm{T}}(C^{-1}Y)AC^{-1}Y \geqslant \|Y\|$. Donc la matrice symétrique $A' = C^{-1}AC{-}1$ est Löwner-supérieur à I_n, d'après le cas précédent, $\det(C^{-1}AC^{-1}) \geqslant 1$ ce qui revient à $\det A \geqslant \det B$.

(3) Si $B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, $\det B = 0$ or $\det A \geqslant 0$ donc le résultat est toujours vrai.

⋆ ⋆ ⋆

*** Exercice 26 Astuce euclidienne pour un groupe compact

On considère un sous-groupe compact G du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ et K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$ stable par G : $\forall g \in G$, $g(K) \subset K$. Montrons d'abord qu'il existe un point fixe de K commun à tous les $g \in G$.

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que $f(K) \subset K$ et $a \in K$. On pose pour $n \in \mathbf{N}$ $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(a)$.
   a) Montrer que toute valeur d'adhérence x de la suite (u_n) est un point fixe de f.
   b) En déduire que f a un moins un point fixe dans K.
2. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on pose $\|x\|_G = \sup\{\|g(x)\| \mid g \in G\}$ où $\|\|$ est la norme unsuelle de $\mathbf{R}^n$.
   a) Montrer que $\|\|_G$ définit une norme sur $\mathbf{R}^n$ et que cette norme est strictement convexe, c'est à dire $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\|x+y\|_G = \|x\|_G + \|y\|_G$ si et seulement si x et y sont positivement liés.
   b) Montrer que tout $g \in G$ est une isométrie pour $\|\|_G$.
3. On suppose que G n'a aucun point fixe dans K, c'est-à-dire $\forall x \in K$, $\exists g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Pour $g \in G$ on pose $\Omega_g = \{x \in K \mid g(x) \neq x\}$.
   a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et $g_1, \dots, g_p \in G$ tels que $K = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{g_i}$ [1].
   b) Montrer que $f = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} g_i$ a un point fixe $a \in K$.
   c) Montrer que a est un point fixe de tous les g_i et conclure [2].

On veut maintenant montrer que tout sous-groupe compact Γ de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ est conjugué d'un sous-groupe du groupe orthogonal : $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $P\Gamma P^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. Soit donc Γ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{Q}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$, $q_0 \in \mathscr{Q}$ telle que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$q_0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Pour $g \in \Gamma$ et $q \in \mathscr{Q}$ on note $\rho(g)(q)$ l'application $x \in \mathbf{R}^n \longmapsto q \circ g^{-1}(x)$, A désigne l'orbite de q_0 sous l'action de Γ, c'est à dire $A = \{\rho(g)(q_0) \mid g \in \Gamma\}$ et enfin son note K l'enveloppe convexe de A.

4. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $A \subset E$ non vide.
   a) Montrer que si $v \in E$ est barycentre à coefficients positifs de $a_1, \dots, a_{p+1} \in A$ avec $p > n$, alors v est barycentre à coefficients positifs de p éléments de A [3].
   b) En déduire que l'enveloppe convexe de A est
   $$\mathscr{E}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i X_i \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ X_i \in A,\ a_i \in \mathbf{R}_+ \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1 \right\}.$$
   c) Montrer que l'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie est compacte.
5. a) Montrer que $\forall g \in \Gamma$, $\forall q \in \mathscr{Q}$, $\rho(g)(q)$ est une forme quadratique et que si q est définie positive, alors $\rho(g)(q)$ aussi.
   b) Montrer que $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathscr{Q})$ est un morphisme de groupes continu.
   c) En déduire que $G = \rho(\Gamma)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathscr{Q})$.
6. Montrer que K est un convexe compact non-vide stabilisé par tout élément γ de G et en déduire qu'il existe une forme quadratique définie positive q_1 telle que $\forall g \in \Gamma$,$\forall x \in \mathbf{R}^n$, $q_1 \circ g(x) = q_1(x)$. Conclure.

1. On admettra, bien que hors-programme, la propriété de Borel-Lebesgue.
2. On pourra utiliser la norme $\|\|_G$.
3. On pourra considérer la famille des $(a_i, 1)_{i \in [\![1,p+1]\!]}$ de $E \times \mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 26

1. a) Soit x une valeur d'adhérence de (u_n) telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n} - f)(u_n) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} f^k(a) - \sum_{k=0}^{n} f^{k+1}(a)\right) = \frac{1}{n+1}(a - f^{n+1}(a)).$$

Puisque $f(K) \subset K$ et que K est bornée, la quantité $f^{n+1}(a)$ est bornée et donc en passant à la limite $\varphi(n) \to +\infty$, on obtient $(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n} - f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

b) (u_n) est une suite du compact K donc admet une valeur d'adhérence par Bolzanno-Weierstrass. On peut appliquer la question précédente.

2. a) La borne supérieure de la définition est bien définie et c'est en fait un maximum car $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $g \longmapsto \|g(x)\|$ est continue sur le compact G donc est bornée et atteint ses bornes. $\|\|_G$ est à première vue positive, homogène et séparante car par exemple $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n} \in G$. Touts les $\|g(x)\|$ vérifient l'inégalité triangulaire donc en passant au maximum, $\|\|_G$ aussi. Soient maintenant $x, y \in \mathbf{R}^n$, $g_0 \in G$ tels que $\|x+y\|_G = \|g_0(x+y)\| \leqslant \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| \leqslant \|x\|_G + \|y\|_G$. Le cas d'égalité ici implique le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire (on suppose $x \neq 0$) $\exists \lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(y) = \lambda g(x)$. En composant par g^{-1} qui est linéaire, on a bien l'égalité si et seulement si (x, y) sont positivement liée (réciproque évidente).

b) Soit $g \in G$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\|g(x)\|_G = \max\{\|h \circ g(x)\| \mid h \in G\} = \max\{\|h(x)\| \mid h \in G\} = \|x\|_G$ car $h \in G \longmapsto h \circ g$ est une bijection de G car G est un groupe.

3. a) D'après les hypothèses de cette question, $K = \bigcup_{g\in G} \Omega_g$ est $\forall g \in G$, Ω_g est l'image réciproque d'un ouvert ($\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$) par une application continue donc c'est un ouvert. Puisque K est compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, de ce recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini, ce qui est précisément le résultat demandé.

b) On applique le résultat de la question 1 à f qui est bien un endomorphisme qui stabilise K (regarder les hypothèses du début).

c) On a par inégalité triangulaire

$$\|a\|_G = \|f(a)\|_G \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \|g_i(a)\|_G \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \|a\|_G \leqslant \|a\|_G \,,$$

car $\forall i \in [\![1, p]\!]$, g_i est une isométrie pour $\|\|_G$ d'après la question 2. Puisque $\|\|_G$ est strictement convexe, ce cas d'égalité implique que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, a et $g_(a)$ sont positivement liés. Puisque a et $g_i(a)$ ont même norme et qu'ils sont sur la même demi-droite vectorielle, $g_i(a) = a$. Mais ceci est absurde puisque $a \in K$ et que les Ω_{g_i} sont censés recouvrir K. Donc G a un point fixe dans K.

4. a) Soit $v = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i \in E$ avec $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$. Pour des raisons de dimension, la famille $(a_i, 1)_{i\in[\![1,p+1]\!]}$ est liée dans l'espace vectoriel $E \times \mathbf{R}$ donc $\exists x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i a_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0.$$

On peu donc écrire $\forall k \in \mathbf{R}$, $v = \sum_{i=1}^{p+1} (\lambda_i + k x_i) a_i$. On peut de plus choisir grâce à la deuxième condition sur les x_i $k \in \mathbf{R}$ tel que $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, $\lambda_i + k x_i \geqslant 0$ et $\exists i_0 \in [\![1, p+1]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} + k x_{i_0} = 0$. v est donc barycentre des $(a_i, \lambda_i + k x_i)_{i\in[\![1,p+1]\!]\setminus\{i_0\}}$.

b) En réitérant ce processus, on peut exprimer tout $v \in \mathscr{E}(A)$ comme barycentre à coefficients positifs de $n+1$ éléments de A, en on peut supposer la somme des coefficients égale à 1 car elle est non-nulle.

c) On suppose A compact. L'ensemble $\left\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}_+^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1\right\}$ est borné et fermé comme image réciproque d'une fonction continue sur un compact. Puisque A est aussi fermé borné, la formule précédente nous assure que $\mathscr{E}(A)$ est fermé et borné donc c'est un compact car E est de dimension finie.

5. a) Soit $g \in \Gamma$ et $q \in \mathscr{Q}$, $g^{-1}(x)$ est fonction linéaire des coordonnées de x et $\rho(g^{-1}(x))$ est un polynôme homogène de degré 2 est les coordonnées de $g^{-1}(x)$ donc $\rho \circ g^{-1}(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les coefficients de x ; $\rho(g)(q)$ est donc une forme quadratique. Si q est définie positive, $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$ or lorsque x décrit $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $g^{-1}(x)$ décrit aussi $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ donc $q \circ g^{-1}(x) > 0$ et $\rho(g)(q)$ est définie positive.

   b) Soient $g \in \Gamma$, $\rho(g)$ désigne l'application sur $\mathscr{Q}$ qui à $q \in \mathscr{Q}$ associe $q \circ g^{-1}$. $\rho(g)$ est linéaire par linéarité de la composition et si $q \circ g^{-1} = 0$, alors $q = 0$ par un raisonnement similaire à celui de la question précédente. ρ est donc bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathscr{Q})$. Soient maintenant $g, g' \in G$, $\forall q \in \mathscr{Q}$, $\rho(g \circ g')(q) = q \circ g'^{-1} \circ g^{-1} = \rho(g) \circ \rho(g')$ donc ρ est un morphisme car $\rho(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{Q}}$. $g \longmapsto g^{-1}$ est continue et $|||q \circ g^{-1}||| \leqslant |||q|||\, |||g^{-1}|||$ donc ρ est bien un morphisme continu.

   c) Par propriété des morphismes, l'image de Γ par ρ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathscr{Q})$, et puisque Γ est compact, $G = \rho(\Gamma)$ aussi.

6. On rappelle que K est l'enveloppe convexe de l'orbite A de $q_0 \in \mathscr{Q}$. Par définition de A, on a aussi $A = \{\gamma(q_0) \,|\, \gamma \in G\}$. Le morphisme d'évaluation est continu et G est compact donc A est une partie compacte de $\mathscr{Q}$. D'après la question 4, K est aussi compacte et bien évidemment convexe. K est non-vide car Γ est non-vide. Prenons un élément générique q de K, r est la $\mathbf{R}$-dimension de $\mathscr{Q}$:

$$q = \sum_{i=1}^{r+1} a_i \rho(g_i)(q_0) = \sum_{i=1}^{r+1} a_i q_0 \circ g_i^{-1},$$

avec $\forall i \in [\![1, r+1]\!]$, $a_i \geqslant 0$, $g_i \in \Gamma$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r+1} a_i = 1$. Donc $\forall \gamma \in G$, avec $\gamma = \rho(g)$

$$\gamma(q) = q \circ g^{-1} = \sum_{i=1}^{r+1} a_i q_0 \circ \underbrace{g_i^{-1} \circ g}_{\in \Gamma},$$

ce qui prouve que K est stable par tout élément de G. On peut donc appliquer les question 1., 2. et 3. et on a l'existence de $q_1 \in K$ telle que $\forall g \in G$, $q_1 \circ g^{-1} = q_1$ et on peut remplacer g^{-1} par g car Γ est un groupe. De plus, q_0 est définie positive donc d'après la question 5. a), q_1 est définie positive.
q_1 définit une norme et un produit scalaire au travers de sa forme polaire sur $\mathbf{R}^n$, pour lesquels tous les éléments de g sont des isométries ! Si on prend une base dans laquelle la matrice de q_1 est l'identité et que l'on note $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ la matrice de passage associée, on a alors $P\Gamma^{\mathrm{T}}P = P\Gamma P^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ce qui était le but de l'exercice.

⋆⋆⋆

Exercice 27 Méthode des coefficients indéterminés

Soit $R > 0$, $f : x \in]-R, R[\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbf{C}$ de rayon de convergence R. On suppose que $f(0) \neq 0$, montrer que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Solution de l'exercice 27

Quitte à diviser par $f(0)$ non nul, on suppose $f(0) = 1$, montrons d'abord qu'il existe $\rho \in]0, R[$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \rho^n \leqslant 1$. $g : \rho \in [0, R[\longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \rho^n$ est continue car c'est une série entière de rayon de convergence R et de plus $g(0) = 0$ donc, par continuité, il existe $\rho \in]0, R[$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \rho^n \leqslant 1$.

Utilisons maintenant la méthode des coefficients indéterminés. Supposons que $\frac{1}{f}$ soit développable en série entière au voisinage de 0 de coefficients (b_n), alors $b_0 = \frac{1}{f(0)} = 1$ et $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$ par produit de Cauchy. Par unicité du développement en série entière de 1, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad \text{car } a_0 = f(0) = 1.$$

Définissons donc la suite (b_n) par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$. Soit $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, montrons que la rayon de convergence de la série entière de somme h est supérieur à ρ. En effet, soit H_n : « $|b_n \rho^n| \leqslant 1$ ».

- H_0 est vraie.
- Si H_{n-1} est vraie, alors

$$\begin{aligned}
|b_n \rho^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} b_k \rho^k a_{n-k} \rho^{n-k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left| b_k \rho^k \right|}_{\leqslant 1} |a_{n-k}| \rho^{n-k} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \\
&\leqslant 1 \quad \text{par le choix de } \rho.
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall x \in]-\rho, \rho[\subset]-R, R[$, $f(x)h(x) = 1$ et $\forall x \in]-\rho, \rho[$, $\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 28 Taille des coefficients de Fourier et régularité

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue 2π-périodique.

1. Montrer que si f est $\mathscr{C}^k$, alors $n^k c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.
2. Montrer que si la série de terme général $\left(n^k\left(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|\right)\right)$ converge, alors f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Solution de l'exercice 28

1. Par des intégrations par parties, il vient $\forall n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = (in)^k c_n(f)$ or $f^{(k)}$ est continue 2π-périodique donc d'après le théorème de Parseval, la série de terme général $\left(\left|c_n(f^{(k)})\right|^2 + \left|c_{-n}(f^{(k)})\right|^2\right)$ converge donc en particulier, $c_n(f^{(k)}) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0 \Rightarrow n^k c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.
2. Posons pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-inx} = u_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

On ne sait pas *a priori* que $f = g$. D'après notre hypothèse et le petit calcul des coefficients de Fourier d'une dérivée, la série de terme général (u_n) et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k convergent normalement sur $\mathbf{R}$. En effet, $\forall n \geqslant 1$, $\forall j \in [\![0, k]\!]$,

$$\begin{aligned}\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbf{R}}\left((in)^j c_n(f)\mathrm{e}^{int} + (-in)^j c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-int}\right)\\ &\leqslant n^j\left(|c_n(f)| + |c_{-n}|(f)\right)\\ &\leqslant n^k\left(|c_n(f)| + |c_{-n}|(f)\right) \quad \text{terme général d'une série convergente.}\end{aligned}$$

Par théorème, g est $\mathscr{C}^k$ dérivable terme à terme jusqu'à l'ordre k.
Montrons maintenant que $g = f$. Pour ce faire, on va montrer que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Ainsi, comme f et g sont continues, d'après le théorème de Parseval,

$$\|f - g\|_2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f) - c_n(g)| = 0 \Rightarrow f = g.$$

Mais avant, pour $p \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}c_p(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si on pose $v_n(t) = u_n(t)\mathrm{e}^{-int}$ pour $n \in \mathbf{N}$, les v_n sont continus et convergent normalement sur $\mathbf{R}$ car $\|v_n\|_\infty \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ terme général d'une série convergente. De plus, l'intégration portant sur un segment, on peut intervertir intégrale et somme,

$$c_p(g)\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t}_{\delta_{n,p}} = c_p(f).$$

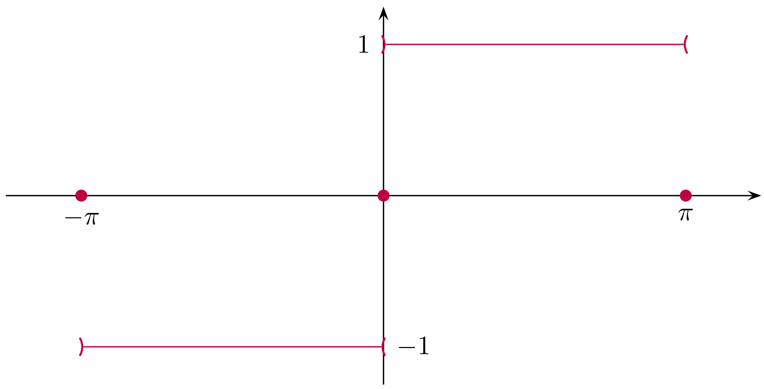
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 29 Calcul de sommes à l'aide de Fourier

1. On pose $f(x) = 1$ pour $x \in]0, \pi[$, f impaire et 2π-périodique. Déterminer la série de Fourier de f, en déduire des formules.
2. On pose $g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$, $f(0) = 0$ et f est 2π-périodique. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ à l'aide de g.

Solution de l'exercice 29

1. On trace d'abord la graphe de f :



f est impaire donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n(f) = 0$. De plus $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[-\cos(nt)\right]_0^{\pi} = -\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Si on applique la formule de Parseval à f continue par morceaux 2π-périodique, on obtient

$$1 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{(2n+1)^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

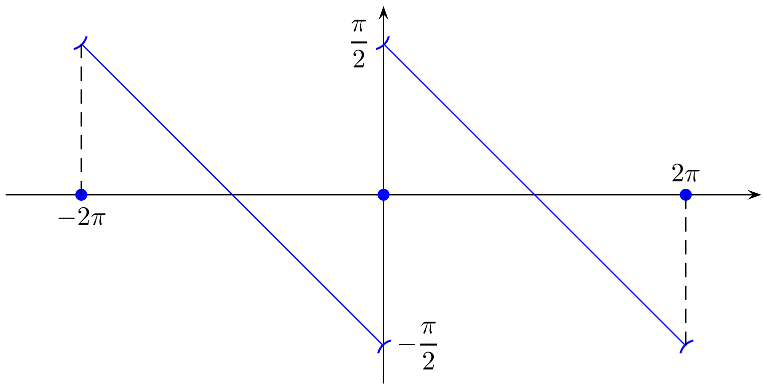
De plus, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2}$ donc en faisant tendre $N \to +\infty$, $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{1}{4}\zeta(2)$ donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux donc le théorème de Dirichlet de convergence simple donne en $x = \dfrac{\pi}{2}$, puisque $\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$,

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}(1).$$

On reconnaît un cas particulier du développement en série entière de arctangente.

2. On trace là aussi le graphe de g :



g est impaire donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n(f) = 0$. De plus, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin(nt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \quad \text{car } \int_0^{2\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = 0 \\ &= \frac{1}{2n\pi}\left[t\cos(nt)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc $S_n(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}$. f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux donc, d'après le théorème de convergence simple de Dirichlet, $\forall x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

⋆⋆⋆

Exercice 30 Limite d'une solution

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathbf{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(a) < 0$. On suppose que $f'(x) - af(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Solution de l'exercice 30

On pose $g = f' - af$, on résout l'équation différentielle $y' = ay + g$. La solution générale de l'équation sans second membre est $x \longmapsto K\mathrm{e}^{ax}$ avec $K \in \mathbf{R}$. On utilise ensuite la méthode de variation de la constante : si $K'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$, alors $K(x) = \displaystyle\int_0^x g(u)\mathrm{e}^{-au}\mathrm{d}u$ et donc

$$f(x) = \left[f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{e}^{-au}\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{ax}.$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$|f(x)| \leqslant f(0)\mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(a)x} + \mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(a)x}\int_0^x |g(u)|\,\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u}\mathrm{d}u.$$

On va appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison : $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $g(u)\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u} = o\left(\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u}\right)$ et la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u}$ est positive non intégrable en $+\infty$ car $\Re\mathrm{e}(a) > 0$ donc l'intégrale diverge et

$$\int_0^x |g(u)|\,\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u}\mathrm{d}u = o\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u\mathrm{d}}\right) = o\left(\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)x}\right).$$

Ainsi $\mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\Re\mathrm{e}(a)u}g(u)\mathrm{d}u = o(1)$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

⋆⋆⋆

Exercice 31 Solutions maximales bornées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel qu'il existe $\alpha, \beta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continues vérifiant $\forall (t,x) \in \mathbf{R} \times E$, $\|f(t,x)\| \leqslant \alpha(t)\,\|x\| + \beta(t)$. Montrer que toute solution maximale de $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$ est définie sur $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 31

Soit (I, φ) une solution maximale de (E), d'après Cauchy-Lipschitz, I est ouvert et $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. Supposons que $b \in \mathbf{R}$, soit $c \in I$, on a $\forall t \in I$,

$$\varphi(t) = \varphi(c) + \int_c^t \varphi'(u)\mathrm{d}u = \varphi(c) + \int_c^t f(u, \varphi(u))\mathrm{d}u.$$

Or $\forall u \in [c, b[$, $\|f(u, \varphi(u))\| \leqslant \alpha(u)\,\|\varphi(u)\| + \beta(u)$ donc

$$\|\varphi(t)\| \leqslant K + \int_c^t \alpha(u)\,\|\varphi(u)\|\,\mathrm{d}u \quad \text{où } K = \varphi(c) + \int_c^t \beta(u)\mathrm{d}u.$$

D'après le lemme de Gronwall, puisque α est continue sur $\mathbf{R}$,

$$\|\varphi(t)\| \leqslant K \exp\left(\int_c^t \alpha(u)\mathrm{d}u\right) \leqslant K \exp\left(\int_c^b \alpha(u)\mathrm{d}u\right).$$

φ est donc bornée sur $[c, b[$ par $M > 0$. Ainsi, $\{(u, \varphi(u)) \mid u \in [c, b[\}$ est bornée et f est continue sur cette partie donc est aussi bornée sur cette partie. Comme $\varphi(t) = \varphi(c) + \int_c^t f(u, \varphi(u))\mathrm{d}u$, $\varphi(t) \xrightarrow[t \to b]{} \ell \in E$. D'après le lemme de prolongement en une borne, on peut trouver une solution de E qui prolonge strictement (I, φ), impossible car (I, φ) est maximale. Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

⋆ ⋆ ⋆

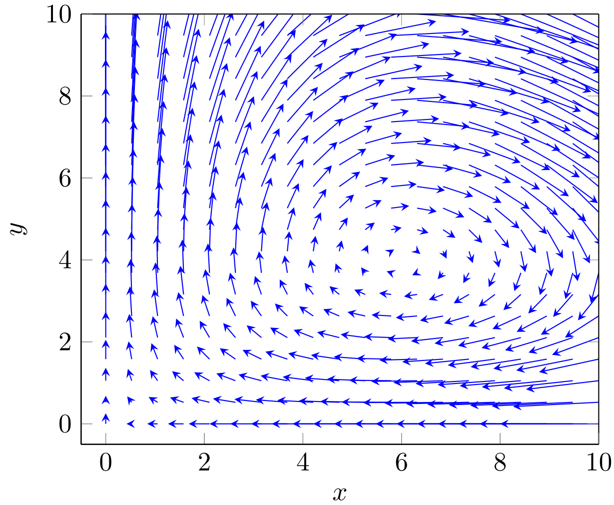
** Exercice 32 Système de Lotka-Volterra

Soient $a, b > 0$. Étudier la périodicité des solutions du système d'équations différentielles :

$$(LK)\begin{cases} x'(t) = x(t)(y(t) - b) \\ y'(t) = y(t)(a - x(t)) \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 32

On étudiera seulement les solutions en x et y positives, le système étant censé modéliser l'évolution de populations d'animaux. Traçons le champ de vecteurs associé au système ($b = 4$, $a = 6$) :



On voit que les solutions vont généralement s'enrouler autour du point de coordonnées (a, b). Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique car les fonctions sont $\mathscr{C}^1$. On étudie le problème de Cauchy $(LK), (0, x_0, y_0)$ avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}_+$ puisque le système est autonome. Éliminons les cas triviaux.

Si $x_0 = y_0 = 0$, $t \longmapsto (0, 0)$ est solution maximale. Si $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$, on peut résoudre et la solution maximale est $(\mathbf{R}, t \longmapsto (0, y_0 \mathrm{e}^{at}))$. Si $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$, la solution maximale est $\big(\mathbf{R}, t \longmapsto (x_0 \mathrm{e}^{-bt}, 0)\big)$.

On supposera dorénavant que $x_0, y_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Les trajectoires des différentes solutions maximales de (LK) ne se coupant pas, on a $\forall t \in \mathbf{R}$, $x(t), y(t) \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminons l'intégrale première de (LK), c'est à dire une quatité constante le long de la trajectoire d'une solution.

Pour cela, on effectue un petit calcul au brouillon :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(y - b) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(a - x) \end{cases} &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x(y - b)}{y(a - x)} \\
&\Rightarrow \frac{a - x}{x}\mathrm{d}x = \frac{y - b}{y}\mathrm{d}y \\
&\Rightarrow a \ln x - x - y + b \ln y = \mathrm{cte}
\end{aligned}$$

On parachute donc la fonction $H(x, y) = x + y - b \ln y - a \ln x$. Soit (I, φ) la solution maximale de notre problème de Cauchy, si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, alors $H \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^1$ et $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}
(H \circ \varphi)'(t) &= x'(t) + y'(t) - \frac{by'(t)}{y(t)} - \frac{ax'(t)}{x(t)} \\
&= x'(t)\left(1 - \frac{a}{x(t)}\right) + y'(t)\left(1 - \frac{b}{y}\right) \\
&= x(t)(y(t) - b)\left(1 - \frac{a}{x}\right) - y(a - x)\left(1 - \frac{b}{y}\right)
\end{aligned}$$

$$= 0$$

Ainsi la trajectoire de (I, φ) est incluse dans la courbe Γ_C d'équation $H(x,y) = H(x_0, y_0) = C$. Étudions de telles courbes.

On écrit $H(x,y) = \alpha(x)+\beta(y)$ avec $\alpha(x) = x - a\ln x$, $\beta(y) = y - b\ln y$. Puisque $\alpha'(x) = 1 - \dfrac{a}{x}$ et $\beta'(y) = 1 - \dfrac{b}{y}$, on dresse les tableaux de variation suivants :

x	0		a		$+\infty$
$\alpha'(x)$		$-$	0	$+$	
$\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\alpha(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		b		$+\infty$
$\beta'(x)$		$-$	0	$+$	
$\beta(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\beta(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a alors différents cas :
- si $C < \alpha(a) + \beta(b)$, $\Gamma_C = \varnothing$;
- si $C = \alpha(a) + \beta(b)$, $\Gamma_C = \{(a,b)\}$;
- si $C > \alpha(a) + \beta(b)$, on va montrer que Γ_C est compact non vide.

En effet, Γ_C est un fermé de $\left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$ et $\forall (x,y) \in \Gamma_C$, $\alpha(x) + \beta(y) = C \Rightarrow \alpha(x) = C - \beta(y) \leqslant C - \beta(b)$ et de même $\beta(y) \leqslant C - \alpha(y)$. D'après les courbes de α et β, ceci impose l'existence de $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ tels que $\forall t \in I$, $x(t) \in [x_1, x_2]$ et $y(t) \in [y_1, y_2]$ donc $\Gamma_C \subset [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Γ_C est fermée bornée dans le compact $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ donc Γ_C est compact.

Prouvons maintenant que le domaine de définition I de notre solution maximale φ est en fait $\mathbf{R}$. Par Cauchy-Lipschitz, on sait que $I =]a, b[$, supposons que $b \in \mathbf{R}$. Soit $c \in]a, b[$, alors $\forall t \in]a, b[$,

$$x(t) = x(c) + \int_0^t x(u)(y(u) - b)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad y(t) = y(c) + \int_0^t y(u)(a - x(u))\mathrm{d}u.$$

Les valeurs de $x(u)$ et $y(u)$ sont bornées donc les deux intégrales ci-dessus vont converger pour $t \to b$, on peut prolonger φ sur $[a, b]$ en une fonction toujours solution ce qui est impossible puisque φ est maximale. Donc $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$, $I = \mathbf{R}$.

Montrons enfin que φ est périodique. Comme le système est autonome, cela revient à montrer que φ n'est pas injective. D'abord, l'intersection de Γ_C avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = b$ contient un ou deux points car $(x, b) \in \Gamma_C \cap \mathscr{D} \Leftrightarrow \alpha(x) = C - \beta(b)$ équation qui admet une ou deux solutions vu le choix de C. On va maintenant montrer que « l'on fait une infinité de tours autour de (a, b) ». Pour cela, on passe en polaires de centre (a, b) grâce au théorème de relèvement $\mathscr{C}^1$ appliqué à $z(t) = x(t) - a + i(y(t) - b)$. Comme $z(0) \neq 0$, z ne s'annule pas car 0 est une autre solution maximale de (LK). Ainsi, il existe $\rho, \theta \in \mathscr{C}^1$ avec $\rho \geqslant 0$ telles que $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = a + \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = b + \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) & = \rho'(t)\cos(\theta(t)) - \theta'(t)\rho(t)\sin(\theta(t)) \\ & = (a + \rho(t)\cos(\theta(t)))\rho(t)\sin(\theta(t)) \\ y'(t) & = \rho'(t)\sin(\theta(t)) + \theta'(t)\rho(t)\cos(\theta(t)) \\ & = -(b + \rho(t)\sin(\theta(t)))\rho(t)\cos(\theta(t)) \end{cases}.$$

En multipliant la première équation par $-\sin(\theta(t))$ et la deuxième par $\cos(\theta(t))$, on obtient

$$\rho(t)\theta'(t) = (a + \rho(t)\cos(\theta(t)))\rho^2(t)\sin^2(\theta(t)) - (b + \rho(t)\sin(\theta(t)))\rho^2(t)\cos^2(\theta(t)),$$

et on majore $\theta'(t)$:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &\leqslant -x(t)\rho(t)\sin^2(\theta(t)) - y(t)\rho(t)\cos^2(\theta(t)) \\ &\leqslant -(x_1\sin^2(\theta(t)) + y_1\cos^2(\theta(t)))\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ &\leqslant \beta \quad \text{où } \beta < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$ donc $\{t \in \mathbf{R} \mid \theta(t) \in 2\pi\mathbf{Z}\}$ est infini donc la trajectoire coupe une infinité de fois la droite $\mathscr{D}$ donc φ n'est pas injective.

Les solutions non-triviales de (LK) sont donc périodiques.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 33 Équation intrinsèque

Montrer que pour toute fonction continue $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}$ il existe un arc Γ de classe $\mathscr{C}^2$ régulier $s \in I \longmapsto M(s) \in \mathbf{R}^2$ telle que la courbure en $M(s)$ à Γ soit $\gamma(s)$. Prouver l'unicité de Γ à une isométrie près.

Solution de l'exercice 33

On pose pour $s \in I$ $z(s) = x(s) + iy(s)$ où s est un paramétrage normal de Γ, on cherche z qui satisfasse les conditions de l'énoncé. La formule de Frénet devient

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} \Rightarrow z''(s) = \gamma(s)iz'(s).$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on fixe $s_0 \in I$, et deux intégrations donnent

$$z(s) = z'(s_0)\int_{s_0}^{s} \exp\left(\int_{s_0}^{t} i\gamma(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + z(s_0).$$

L'addition de $z(s_0)$ correspondant à une translation et la multipliction par $z's_0)$ qui est de module 1 à une rotation, on peut supposer à une isométrie près que $z'(s_0) = 1$ et $z(s_0) = 0$.

Réciproquement, si z est définie par la relation ci-dessus, elle est $\mathscr{C}^2$ comme primitive d'une fonction $\mathscr{C}^1$ par composition avec l'intégrale d'une fonction continue. De plus $\forall \in I$, $|z'(s)| = 1$ et la courbure en $M(s)$ est bien $\gamma(s)$.

⋆⋆⋆

Exercice 34 Cycloïde et équation intrinsèque

Étudier, tracer et rectifier la courbe paramétrée de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Trouver la relation entre le rayon de courbure et l'abscisse curviligne d'origine $(0, 0)$.

Solution de l'exercice 34

$M(t)$ est défini sur $\mathbf{R}$ néanmoins

$$M(t + 2\pi) = M(t) + \begin{pmatrix} 2a\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(-t) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

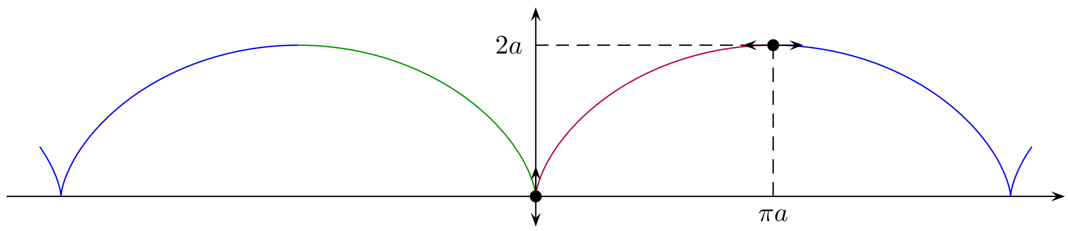
Ainsi il suffit d'étudier $M(t)$ sur $[0, \pi]$ puis faire la symétrie par rapport à (Oy) et faire des translations successives de $2a\pi$ vers la gauche et la droite. Pour $t \in [0, \pi]$ donc, $M'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$ et on trace le tableau de variations suivant :

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$a\pi$

t	0		π
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2a$

t	0		π
$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$	$+\infty$	$\searrow$	0

$t = 0$ est un point stationnaire mais la tangente y est verticale. On peut donc tracer la courbe :



En passant en arc moitié, on peut exprimer différemment $M'(t)$:

$$M'(t) = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix} \Rightarrow \|M'(t)\| = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}.$$

Et puisque $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}\vec{N}$,

$$\gamma(t) = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4a \sin(t/2)}.$$

Pour l'expression intrinsèque, il faut déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$ d'origine $(0, 0)$:

$$s(t) = \int_0^t 2a \sin\left(\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u = a\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Ainsi la relation intrinsèque entre R et s est $R = -4\sqrt{s(2a - s)}$. D'après l'exercice 33, les arcs birréguliers qui vérifient cette relation peuvent être ramenés à la cycloïde à une isométrie près.

⋆ ⋆ ⋆