Developpement de cotangente

I Préliminaire : la série proposée est convergente, ($\frac{1}{n^2-x} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$) donc f est bien définie)

1. $u_n(x) = \frac{1}{n^2-x} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{n^2}}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{n^{2k+2}}$

cette égalité est valable $\forall x$, $\left|\frac{x}{n^2}\right|<1$, donc puisque $n\geq 1$, elle est en particulier vraie $\forall x$, $|x|<1$.

2. Posons $\beta_{n,k} = \frac{x^k}{n^{2k+2}}$. On a dans $[0,+\infty]$, pour $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_{n,k}|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{n^{2k+2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-|x|} < +\infty \text{ car } \frac{1}{n^2-|x|}\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{n^2} \text{ est sommable}$$

Par conséquent la famille $((\beta_{n,k})_{n,k})$ est sommable, on peut donc écrire (Fubini)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k\alpha_{k+1} \quad \forall x\in]-1,1[$$

on a trouvé une série entière de somme $f(x)$. Donc f est DSE sur $]-1,1[$.

3. D'après le cours sur les séries entières :

$$\alpha_{k+1} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k\geq 0$$

I Equation fonctionnelle de Cotan

4. (a) . g possède une limite finie en 0 d'après (3)

. De plus d'après (1), g est 1-périodique donc g possède une limite finie en p ceci $\forall p \in \mathbb{Z}$.

. Comme g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ceci assure que g possède un prolongement continu à $\mathbb{R}$ tout entier.

4. (b) Comme g est continue et $[0,1]$ est un compact, on sait selon le théorème des bornes atteintes que M existe et est un maximum. Ainsi l'ensemble E est non vide

Soit $t \in E$ on a $g\left(\frac{t}{2}\right) + g\left(\frac{t+1}{2}\right) = 2M$ et $\begin{cases} g\left(\frac{t}{2}\right) \leq M \\ g\left(\frac{t+1}{2}\right) \leq M \end{cases}$ Par conséquent ces 2 inégalités sont des égalités. En particulier $g\left(\frac{t}{2}\right) = M$ donc $\frac{t}{2} \in E$.

(c) Par récurrence immédiate, $\forall t \in E$ $\frac{t}{2^n} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

on a pour un tel t : $M = g(t) = g\left(\frac{t}{2^n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} g(0) = 0$ car g est continue.

ainsi $M = 0$.

De façon analogue, on pourrait, en notant $m = \inf\limits_{t \in [0,1]} (g(t))$ que $m = 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,1]$ on a $0 \leq g(t) \leq 0$: g est nulle sur $[0,1]$

Par périodicité, g est nulle sur $\mathbb{R}$

II

5. $S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{-k+x}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{k^2-x^2} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{k^2-x^2} = \frac{1}{x} - 2x f(x^2)$

6. $S_n(x+1) - S_n(x) = \sum_{k=-n+1}^{n+1} \frac{1}{k+x} - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k+x} = \frac{-1}{x-n} + \frac{1}{x+n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc par unicité de la limite $h(x+1) - h(x) = 0$

De même $S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{2}{2k+x} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{2}{2k+1+x} = 2 \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{1}{k+x} = 2 S_{2n}(x) + \frac{1}{2n+1+x}$

Donc en faisant tendre n vers l'infini

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2h(x).$$

7. Posons $g(x) = k(x) - h(x)$

- Par linéarité, puisque h et k vérifient (1) et (2), il en est de même pour g. (a)
- f est DSE sur $]-1,1[$ donc continue. par suite h est continue sur $]0,1[$ et par périodicité sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par conséquent, $g = k - h$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. (b)
- $\pi \cot \pi x - \frac{1}{x} + 2x f(x^2) = \frac{x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} + 2x f(x^2)$

Un D.L donne $\frac{x\pi\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{3}(\pi x)^3}{\pi x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et donc, puisque f est continue en

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \pi\cot\pi x - \frac{1}{x} + 2x f(x^2) = 0$ (*)

Les points (a), (b), (*) assurent que $g = k-h$ vérifie les conditions (c).

Par 4. $g = \tilde{0}$ c'est à dire $k(x) = h(x)$ ou encore :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^{2n+1}.$$

8: on a $\pi\cot\pi x = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x - \frac{\pi^2}{45}x^3 - \frac{2\pi^4}{945}x^5 + O(x^7) = \frac{1}{x} - 2\zeta(2)x - 2\zeta(4)x^3 - 2\zeta(6)x^5 + o(x^7)$

Donc (Unicité du DL $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$; $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$

III

9(a) La relation proposée s'écrit aussi, $b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k$. (*)

Le principe de récurrence assure que b_0 étant donné, la suite (b_n) est uniquement déterminée par (*). De plus on a sans difficulté :

si $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$ alors (*) $\Rightarrow b_n \in \mathbb{Q}$. Là encore, puisque $b_0 = 1 \in \mathbb{Q}$

Ceci prouve $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{Q}}$

9(b) $b_1 = -\frac{1}{2}$ $b_2 = +\frac{1}{6}$

9(c) . on fait une récurrence forte : C'est vrai pour $n = 0$.

· Supposons le résultat vrai pour tout $k \in \{0, \dots n-1\}$ $(n \geq 1)$ alors :

$$|b_n| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} \times k! = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$$

Donc $$\frac{|b_n|}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1-k)!}$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} = e - 2 \leq 1$$

Ainsi $|b_n| \leq n!$ $\square$.

10 La somme $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ est définie $\forall z, |z| < 1$ puisque $\left|\frac{b_n}{n!}\right| \leq 1$

on écrit $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ (valable en particulier pour $|z| \leq 1$)

Donc $\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$ $\forall z \neq 0$.

Par produit de Cauchy : $\left(\frac{e^z-1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\times\frac{1}{(n+1-k)!}\right)z^n$ $\forall z / |z| < 1$, $z \neq 0$

III (10) suite

or si $n \geq 0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} b_k \binom{n+1}{k} = 0$

et si $n=0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = b_0 = 1$

Donc $\displaystyle\frac{e^z-1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right) = 1$ $\forall z$, $|z|<1$, $z \neq 0$. c'est le résultat voulu.

Supposons $R > 2\pi$

alors on aurait par le calcul précédent, $\forall z$, $|z| < 2\pi$, $z \neq 0$

$$\frac{e^z-1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right) = 1$$

En prenant $z = 2i\pi$ on aurait $\displaystyle\frac{e^{2i\pi}-1}{2i\pi} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (2i\pi)^n\right) = 1$ soit $0 = 1$: c'est faux

Ainsi $R \leq 2\pi$

(11) $\displaystyle\psi(-z) = \frac{-z}{e^{-z}-1} = \frac{-z e^z}{1-e^z} = \frac{-z(e^z-1)-z}{1-e^z} = z + \psi(z)$ $(*)$

Par ailleurs $\displaystyle\psi(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n!} z^n$

Donc l'égalité $(*)$ donne, par unicité des coefficients :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ $\quad b_n = (-1)^n b_n$
- $-b_1 = 1 + b_1$

Donc $\forall n$, $b_{2n+1} = 0$
et $2b_1 = -1$: $b_1 = -\frac{1}{2}$.

(12) $\displaystyle iu + \psi(2iu) = \frac{2iu}{e^{2iu}-1} + iu = iu\left[\frac{2}{e^{2iu}-1} + 1\right] = iu\left[\frac{e^{2iu}+1}{e^{2iu}-1}\right] = iu\left[\frac{2\cos u}{2i\sin u}\right] = u \cot u$

13 : D'après ce qui précède au II

$$x\pi \cot \pi x = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^{2n+2}$$

et d'après III.12

$$x\pi \cot \pi x = i\pi x + \sum_{n=0}^{\infty} (2i)^{2n} \frac{(\pi x)^{2n}}{(2n)!} b_{2n} + b_1 (2i\pi x) \quad \text{si } x \in \left]-\frac{R}{2\pi}, \frac{R}{2\pi}\right[$$

Comme $\begin{cases} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_0 = 1 \end{cases}$ il reste :

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!} b_{2n} x^{2n} \quad \forall x \in \left]-\frac{R}{2\pi}, \frac{R}{2\pi}\right[$$

En décalant l'indice, et en utilisant le théorème d'unicité on obtient

$$\boxed{\alpha_n = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} b_{2n}}$$

On en déduit $\left|\frac{b_{2n}}{2n!}\right| = \frac{|\alpha_n|}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$. Mais la suite (α_n) vérifie d'évidence $1 \leq \alpha_n \leq \alpha_1 = \frac{\pi^2}{6}$

Par suite les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}} z^{2n}$ ont même rayon.

La seconde est de rayon 2π par la règle de d'Alembert.

Donc $\boxed{R = 2\pi}$