Espaces préhilbertiens réels

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I. Généralités

I.1. Produit scalaire

Définition. *Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée un* ***produit scalaire*** *sur E si*

- *φ est bilinéaire : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z) \quad \text{et} \quad \varphi(z, \lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(z, x) + \mu\varphi(z, y)$$

- *φ est symétrique :* $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E \quad \big(\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E\big)$.

Définition. *On appelle* ***espace préhilbertien réel*** *tout couple (E, φ) constitué d'un espace réel E et d'un produit scalaire φ sur E ; on dit que c'est un* ***espace euclidien*** *si de plus E est de dimension finie.*

Dans toute la suite, E est un espace préhilbertien réel ; le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $(x|y)$, et, pour tout $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

I.2. Propriétés

Proposition I.1. *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a*

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ *et* $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$;
- $$\begin{aligned}(x|y) &= \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)\end{aligned}$$

Théorème I.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E,* $\big|(x|y)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ *avec égalité si et seulement si (x, y) est liée.*

Théorème I.3. *Pour tout $(x, y) \in E^2$,* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Théorème I.4. *L'application $\|\ \|$ définit une norme d'espace vectoriel sur E.*

I.3. Expression analytique en dimension finie

Proposition I.5. *Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, posons $a_{ij} = (e_i|e_j)$; soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Alors, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ sont deux vecteurs de E, on a

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = {}^t XAY$$

I.4. Représentation des formes linéaires

Proposition I.6. *Soit E un espace euclidien. Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que* $\forall x \in E \quad \varphi(x) = (a|x)$.

II. Produits scalaires usuels

II.1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Proposition II.1. *L'application $\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.*

L'application $(A, B) \longmapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

II.2. L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$

Définition. *Une suite réelle $x = (x_n)_{\in\mathbb{N}}$ est dite* ***de carré sommable*** *si la série $\sum x_n^2$ converge. L'ensemble des suites réelles de carré sommable est noté $\ell^2(\mathbb{R})$.*

Proposition II.2. *Si $x = (x_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\ell^2(\mathbb{R})$, alors la série $\sum x_n y_n$ converge absolument.*

Théorème II.3. *L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'application $(x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.*

II.3. L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$

Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite* ***de carré intégrable*** *si elle est continue par morceaux sur I et si f^2 est intégrable sur I. L'ensemble des fonctions* ***continues*** *et de carré intégrable sur I sera noté $L^2(I, \mathbb{R})$.*

Proposition II.4. *Si f et g sont deux fonctions de $L^2(I, \mathbb{R})$, alors leur produit fg est intégrable sur I.*

Théorème II.5. *L'ensemble $L^2(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. L'application $(f,g)\longmapsto \int_I f(t)g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $L^2(I,\mathbb{R})$.*

III. Orthogonalité

III.1. Vecteurs orthogonaux

Définition. *Dans un espace préhilbertien réel, on dit que deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $(x|y)=0$. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs est **orthogonale** si les vecteurs x_i sont deux à deux orthogonaux ; on dit que la famille est **orthonormale** si elle est orthogonale et si, pour tout $i\in I$, $\|x_i\|=1$.*

Proposition III.1. *Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.*

Proposition III.2 (Pythagore)**.** *Si la famille finie $(x_1,\dots,x_n)$ est orthogonale, alors* $\Big\|\sum_{i=1}^n x_i\Big\|^2=\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2$.

III.2. Bases orthonormales

Théorème III.3 (Orthogonalisation de Schmidt)**.** *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Les conditions :*
- $y_1=x_1$;
- $\forall p\in[\![2,n]\!]\quad y_p=x_p-\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(y_k|x_p)}{\|y_k\|^2}\,y_k$

*définissent une famille $(y_1,\dots,y_n)$ **orthogonale**, vérifiant, pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_p)=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$. En particulier, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E, alors $(y_1,\dots,y_n)$ est une base orthogonale.*

Le procédé s'étend naturellement pour orthogonaliser une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ libre.

Théorème III.4. *Soit E un espace euclidien. Alors :*
- *E admet des bases orthonormales ;*
- *toute famille orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$ de E peut être complétée en une base orthonormale $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E.*

Proposition III.5. *Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormale** de l'espace euclidien E. Alors :*
- ▷ *si $x\in E$ et $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$, on a $\quad x_i=(e_i|x)\quad$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$;*
- ▷ *si de plus $y=\displaystyle\sum_{i=1}^n y_ie_i\in E$, on a $\quad(x|y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i\quad$ et donc $\quad\|x\|^2=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2=\sum_{i=1}^n(e_i|x)^2$.*
- ▷ *si $f\in\mathcal{L}(E)$ a pour matrice $A=(a_{ij})$ dans la base $\mathcal{B}$, alors, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $\quad a_{ij}=\big(e_i|f(e_j)\big)$; $\quad$ en particulier, $\quad\mathrm{tr}\,f=\sum_{i=1}^n\big(e_i|f(e_i)\big)$.*

III.3. Sous-espaces orthogonaux

Définition. *On dit que deux sous-espaces F et G sont **orthogonaux** si, pour tout $(x,y)\in F\times G$, on a $\quad(x|y)=0$.*

Proposition III.6. *Si les sous-espaces F_1, $F_2,\dots$, F_p sont deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe.*

Définition. *Si A est une partie de E, on appelle **orthogonal de** A l'ensemble $A^\perp=\big\{x\in E\,|\,\forall y\in A\quad(x|y)=0\big\}$.*

Proposition III.7. *Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace de E.*

Si F est un sous-espace de E, alors $F^\perp$ est un sous-espace orthogonal à F ; et un sous-espace G est orthogonal à F si et seulement si $G\subset F^\perp$.

III.4. Projections orthogonales

Définition. *Soit F un sous-espace de E. Si $F\oplus F^\perp=E$, on appelle **projection orthogonale sur** F, la projection sur F de direction $F^\perp$.*

Proposition III.8. *Si $F\oplus F^\perp=E$, et si p est la projection orthogonale sur F, alors, pour tout $x\in E$,*
- *$\|p(x)\|\leqslant\|x\|$;*
- *$\forall y\in F\quad\|x-p(x)\|\leqslant\|x-y\|\quad$ et donc $\quad\|x-p(x)\|=\min\big\{\|x-y\|;y\in F\big\}=d(x,F)$.*

Théorème III.9. *Dans E préhilbertien réel, soit F un sous-espace de dimension finie, et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_q)$ une base orthonormale de F. Alors :*
- *$F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E ;*
- *soit p la projection orthogonale sur F ; on a $\quad p(x)=\sum_{i=1}^q(e_i|x)\,e_i\quad$ pour tout $x\in E$.*

Corollaire III.10. *Si F est un sous-espace de dimension finie de l'espace E, alors $(F^\perp)^\perp=F$.*