Déterminant

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Formes n-linéaires alternées

1.1 Applications n-linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est dite n-linéaire lorsque pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, f est linéaire par rapport à sa j-ième variable : $\forall a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$, l'application

$$\varphi_j : \begin{array}{l} E_j \longrightarrow F \\ x \mapsto f\left(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n\right) \end{array}$$

est linéaire.
Pour $n = 2$, on dit que f est bilinéaire. Lorsque $E_1 = \cdots = E_n = E$ et $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire sur E.

Exemples

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $f : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{array}$ est bilinéaire d'après les axiomes d'un espace vectoriel.

(2) $g : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times E \longrightarrow E \\ (\varphi, x) \mapsto \varphi(x) \end{array}$ est bilinéaire. Plus généralement, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $h : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E, F) \times E \longrightarrow F \\ (f, x) \mapsto f(x) \end{array}$ est bilinéaire.

(3) Pour $E = \mathbb{R}^3$, $r : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \mapsto x \wedge y \end{array}$ est bilinéaire et pour $E = \mathbb{R}^2$, $((a, b), (c, d)) \longmapsto ac+bd$ qui est le produit scalaire standard est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$. $((a, b), (c, d)) \longmapsto ad-bc$ est aussi bilinéaire. Déterminons la forme des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$. Soit φ une telle forme, $\text{BC}_2 = (e_1, e_2)$, $x = (a, b) = ae_1 + be_2$ et $y = (c, d) = ce_1 + de_2$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= a\varphi(e_1, ce_1 + de_2) + b\varphi(e_2, ce_1 + de_2) \text{ car } \varphi(\cdot, y) \text{ est linéaire} \\ &= a\left(c\varphi(e_1, e_1) + d\varphi(e_1, e_2)\right) + b\left(c\varphi(e_2, e_1) + d\varphi(e_2, e_2)\right) \\ &= ac\varphi(e_1, e_1) + ad\varphi(e_1, e_2) + bc\varphi(e_2, e_1) + bd\varphi(e_2, e_2) \text{ car } \varphi(e_1, \cdot) \text{ et } \varphi(e_2, \cdot) \text{ sont linéaires} \end{aligned}$$

La réciproque étant claire, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est du type

$$(a, b), (c, d) \longmapsto ac\alpha + ad\beta + bc\gamma + bd\delta \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Plus généralement, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire, alors, pour $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)\, e_i, \sum_{j=1}^n e_j^*(y)\, e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^*(x)\, \varphi\left(e_i, \sum_{j=1}^n e_j^*(y)\, e_j\right) \text{ car } \varphi(\cdot, y) \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^*(x) \sum_{j=1}^n e_j^*(y)\, \varphi(e_i, e_j) \text{ car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_i, \cdot) \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\varphi(e_i, e_j)}_{a_{i,j}} \underbrace{e_i^*(x)}_{x_i} \underbrace{e_j^*(y)}_{y_j} \end{aligned}$$

φ est donc du type $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \longmapsto \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} x_i y_j$ avec $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Si on pose $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors on a [a]

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} x_i y_j = {}^{\mathrm{T}}XMY$$

(4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. Alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \longmapsto \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\varphi_n(x_n)$ est n-linéaire sur E.

1.2 Propriétés des applications n-linéaires

Sous espace vectoriel des applications n-linéaires Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f, g : E^n \longrightarrow F$ sont n-linéaires et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha f + g$ est aussi n-linéaire.

L'ensemble $\mathcal{L}_n(E,F)$ des applications n-linéaires de E^n dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^n, F)$.

Démonstration Montrons par exemple la linéarité par rapport à la première variable. Soient $x_2, x_3, \ldots, x_n \in E$, pour $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(\alpha f + g)(\lambda x + y, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha f(\lambda x + y, x_2, \ldots, x_n) + g(\lambda x + y, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \alpha\lambda f(x, x_2, \ldots, x_n) + \alpha f(y, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x, x_2, \ldots, x_n) + g(y, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \lambda((\alpha f + g)(x, x_2, \ldots, x_n) + (\alpha f + g)(y, x_2, \ldots, x_n))
\end{aligned}$$

Un calcul bien utile Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, c'est-à-dire que $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, e_i$. Soit enfin $f \in \mathcal{L}_p(E,F)$, on a alors

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} M[i_1,1]\, e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} M[i_1,1]\, f(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p) \\
\text{Or } \forall i_1 \in [\![1,n]\!],\ f(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p) &= f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} M[i_2,2]\, e_{i_2}, x_3, \ldots, x_p\right) \\
&= \sum_{i_2=1}^{n} M[i_2,2]\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, x_3, \ldots, x_p) \\
\text{D'où enfin } f(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} M[i_1,1]\, M[i_2,2]\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, x_3, \ldots, x_p) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} M[i_1,1]\cdots M[i_p,p]\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p} M[i_1,1]\cdots M[i_p,p]\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})
\end{aligned}$$

a. « *Left to the reader !* »

Un p-uple $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ s'identifie à une application de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On a donc aussi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{s \in \mathcal{F}([\![1,p]\!],[\![1,n]\!])} M[s(1), 1] \cdots M[s(p), p] \, f\left(e_{s(1)}, e_{s(2)}, \ldots, e_{s(p)}\right)$$

Condition de nullité Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, supposons que $\exists j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j = 0$. Alors $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

En effet, l'application $\varphi : x \in E \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ est linéaire de E dans F donc $\varphi(0_E) = 0_F$.

1.3 Applications n-linéaires alternées

1.3.1 Définition et exemple

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$. On dit que f est alternée si pour tout n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0_F$.

On remarque que pour $n = 1$, $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ et toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est alternée. La notion d'application alternée n'a donc d'intérêt que pour $n \geqslant 2$.

Exemple Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, et posons pour $x = (a, b)$ et $y = (c, d)$, $f(x, y) = ad - bc$. f est bilinéaire et alternée : si $a = c$ et $b = d$, alors $f(x, y) = ab - ba = 0$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire alternée, $\mathrm{BC}_2 = (e_1, e_2)$, $x = (a, b) = ae_1 + be_2$ et $y = (c, d) = ce_1 + de_2$ des éléments de $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\
&= ac\underbrace{\varphi(e_1, e_1)}_{0} + bc\varphi(e_2, e_1) + ad\varphi(e_1, e_2) + db\underbrace{\varphi(e_2, e_2)}_{0} \\
&= bc\varphi(e_2, e_1) + ad\varphi(e_1, e_2) \\
\text{De plus, } 0 &= \varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) \\
&= \varphi(e_1, e_1 + e_2) + \varphi(e_2, e_1 + e_2) \\
&= \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_2, e_1) \\
\Rightarrow \varphi(e_1, e_2) &= -\varphi(e_2, e_1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(x, y) = (ad - bc)\,\varphi(e_1, e_2)$. φ est donc du type $(a, b), (c, d) \longmapsto \lambda(ad - bc)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et la réciproque est claire.

1.3.2 Propriétés des applications n-linéaires alternées

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on note $\mathcal{A}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E^n dans F.

$\mathcal{A}_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Applications symétriques et antisymétriques

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f : E^n \longrightarrow F$ et $\sigma \in S_n$ une permutation de $[\![1,n]\!]$, on note

$$(\sigma \star f) : \begin{array}{l} E^n \longrightarrow F \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) \end{array}$$

On dit que f est symétrique si $\forall \sigma \in S_n$, $(\sigma \star f) = f$ et antisymétrique si $\forall \sigma \in S_n$, $(\sigma \star f) = \varepsilon(\sigma) f$ [a].

[a] $\varepsilon(\sigma)$ est bien entendu la signature de σ. Pour ceux qui auraient manqué un épisode, se reporter à la section 18.5 du cours complet page 308.

On a vu que :
- $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, $\forall f \in \mathcal{F}(E^n, F)$, $\sigma_1 \star (\sigma_2 \star f) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \star f$;
- $\forall \sigma \in S_n$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(E^n, F)$, $\sigma \star (\alpha f + g) = \alpha(\sigma \star f) + (\sigma \star g)$.

Soit $f \in \mathcal{A}_n(E, F)$, alors f est antisymétrique.

Démonstration Soit $n \geqslant 2$, τ une transposition de S_n, on note $\tau = \tau_{i,j}$ avec $i, j \in [\![1,n]\!]$ et $i < j$. Montrons que $\tau \star f = -f$ [b]. Pour $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ f est alternée donc

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\ &= \underbrace{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)}_{0} + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + \underbrace{f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)}_{0} \end{aligned}$$

Ainsi $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \Leftrightarrow \tau \star f = -f$.

Maintenant, soit $\sigma \in S_n$, on sait que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r$ où $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ sont des transpositions [c]. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma \star f &= (\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r) \star f \\ &= (\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{r-1}) \star (\tau_r \star f) \\ &= (\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{r-1}) \star (-f) \\ &= -(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{r-1}) \star f \\ &= \cdots \\ &= (-1)^r f \\ &= \varepsilon(\sigma) f \end{aligned}$$

Remarque Si $2 \times 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ et si $f : E^n \longrightarrow F$ est antisymétrique, alors f est alternée.

En effet, soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i < j$ tels que $x_i = x_j = a$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, a, \dots, a, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= (\tau_{i,j} \star f)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $2f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ d'où le résultat.

[b] On rappelle que $\varepsilon(\tau) = -1$.
[c] Voir la section 19.4.2 du cours complet page 345.

Combinaisons linéaires dans les applications alternées Soit $f \in \mathcal{A}_n(E,F)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$, $j \in [\![1,n]\!]$ et $y \in \mathrm{Vect}(x_1\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$. Alors $f(x_1,\dots,x_j+y,\dots,x_n) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

En effet, par exemple, pour $j=1$, $y = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k$ donc

$$f(x_1+y,x_2,\dots,x_n) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \underbrace{f(x_k,x_2,\dots,x_n)}_{0} \text{ car } f \text{ est alternée}$$

Familles liées et applications alternées Soit $f \in \mathcal{A}_n(E,F)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$. Si $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est liée, alors $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0_F$.

En effet, $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est liée donc $\exists\,(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_j \neq 0$. Alors

$$x_j + \underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i}_{y \in \mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\neq j}\right)} = 0$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\dots,x_n) &= f(x_1,\dots,x_j+y,\dots,x_n) \\ &= f(x_1,\dots,0,\dots,x_n) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

Transition : vers le déterminant Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $n > p$. Alors toute famille $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E$ est liée donc $\forall f \in \mathcal{A}_n(E,F)$, $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$ donc $\mathcal{A}_n(E,F)$ est réduit à l'application nulle.

Que se passe-t-il pour $p \geqslant n$ et en particulier pour $p = n$?

2 Déterminant dans une base

2.1 Petite histoire

Dans la suite, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E. On s'intéresse aux formes n-linéaires alternées de $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$.

Donnons-nous une application $f \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$, $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, c'est-à-dire que $M[i,j]$ est la i-ième coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$, ou encore $M[i,j] = e_i^*(x_j)$ avec $(e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

On a vu que

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{s \in \mathcal{F}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])} M[s(1),1]\cdots M[s(n),n]\, f\left(e_{s(1)},\dots,e_{s(n)}\right)$$

Soit $s \in \mathcal{F}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])$, si s n'est pas injective, alors $\exists i < j$ tel que $s(i) = s(j) = k$ donc $f\left(e_{s(1)}\dots,e_k,\dots,e_k,\dots,e_{s(n)}\right.$ 0 car f est alternée. Ainsi, si s n'est pas injective, s ne contribue pas à la somme. De plus, si s est injective, s

est bijective pour des raisons de cardinal donc

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} M[\sigma(1), 1] \cdots M[\sigma(n), n] \underbrace{f\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right)}_{(\sigma \star f)(e_1, \dots, e_n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} M[\sigma(1), 1] \cdots M[\sigma(n), n] \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n) \text{ car } f \text{ est alternée donc antisymétrique} \\
&= f(e_1, e_2, \dots, e_n) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} M[\sigma(1), 1] \cdots M[\sigma(n), n] \varepsilon(\sigma)}_{\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{aligned}$$

Par définition, le déterminant est

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) e^*_{\sigma(1)}(x_1) \cdots e^*_{\sigma(n)}(x_n)$$

Étudions de plus près cette application φ.

- Montrons d'abord qu'elle est n-linéaire. Soit $\sigma \in S_n$, $\left(e^*_{\sigma(1)}, \dots, e^*_{\sigma(n)}\right)$ sont des formes linéaires sur E donc $\varphi_\sigma : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \longrightarrow e^*_{\sigma(1)}(x_1) \cdots e^*_{\sigma(n)}(x_n)$ est n-linéaire [a]. φ est combinaison linéaire des φ_σ donc φ est n-linéaire.
- Montrons que φ est alternée. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ tels que $\exists 1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $x_i = x_j$, montrons que $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Soit τ la transposition qui échange i et j, A_n le groupe alterné [b]. On a donc $A_n = \{\sigma \in S_n | \varepsilon(\sigma) = 1\}$ et $S_n \backslash A_n = \{\sigma \in S_n | \varepsilon(\sigma) = -1\}$. Ainsi, on décompose l'expression de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma) \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{\sigma \in S_n \backslash A_n} \varepsilon(\sigma) \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in A_n} \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{\sigma \in S_n \backslash A_n} \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

  L'application $s \in A_n \longmapsto s \circ \tau \in S_n \backslash A_n$ est bien définie et bijective de réciproque $s \in S_n \backslash A_n \longmapsto s \circ \tau \in A_n$. Or, lorsque s décrit A_n, $s \circ \tau$ décrit $S_n \backslash A_n$ donc $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n \backslash A_n} \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{s \in A_n} \varphi_{s \circ \tau}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. De plus, pour $s \in A_n$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{s \circ \tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= e^*_{s(\tau(1))}(x_1) \cdots e^*_{s(\tau(i))}(x_i) \cdots e^*_{s(\tau(j))}(x_j) \cdots e^*_{s(\tau(n))}(x_n) \\
&= e^*_{s(1)}(x_1) \cdots e^*_{s(j)}(x_i) \cdots e^*_{s(i)}(x_j) \cdots e^*_{s(n)}(x_n) \\
&= e^*_{s(1)}(x_1) \cdots e^*_{s(j)}(x_j) \cdots e^*_{s(i)}(x_i) \cdots e^*_{s(n)}(x_n) \text{ car } x_i = x_j \\
&= \varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

  On a donc enfin

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{s \in A_n} \varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= 0_{\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

φ est donc une forme n-linéaire alternée. De plus, $\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et pour $\sigma \in S_n$,

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{k=1}^{n} e^*_{\sigma(k)}(e_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(k), k}
\end{aligned}$$

a. Voir exemple (4) page 3.
b. Voir section 18.5 du cours complet page 308.

Si $\exists k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(k) \neq k$, c'est-à-dire si $\sigma \neq \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$, alors $\varphi_\sigma(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \underbrace{\varepsilon\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right)}_{1}\underbrace{\varphi_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

$\varphi \neq 0_{\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})}$ et d'autre part, si $f \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ est telle que $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, alors $f = f(e_1, e_2, \dots, e_n)\,\varphi = \varphi$ donc φ est la seule application n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$ qui prend la valeur 1 en $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

2.2 Théorèmes et définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On a alors les résultats suivants :

(1) Il existe une unique $\varphi \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ telle que $\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. φ s'appelle le déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}$.

(2) Pour tout $f \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$, on a $f = f(e_1, e_2, \dots, e_n)\det_{\mathcal{B}}$ donc $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$ donc $\dim \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K}) = 1$.

(3) Pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} e^*_{\sigma(k)}(x_k)\\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[\sigma(k), k]\end{aligned}$$

où $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathcal{B}$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Remarques Tous ces résultats découlent du fait que $\det_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$.

(1) Si l'un des x_i est nul, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

(2) Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

(3) Pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(4) Calculons les déterminants pour les trois premières valeurs de n.

– Pour $n = 1$, $E = \mathrm{Vect}(e)$, $\mathcal{B} = (e)$, $x = \alpha\varepsilon$, $\det_{\mathcal{B}}(x) = \alpha$.

– Pour $n = 2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $x = ae_1 + be_2$, $y = ce_1 + de_2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $S_2 = \{\mathrm{Id}, \tau_{1,2}\}$. On a alors

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x, y) &= 1e_1^*(x)\,e_2^*(y) + (-1)\,e_2^*(x)\,e_1^*(y)\\ &= ad - bc\end{aligned}$$

– Pour $n = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in E$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,3]\!]}$, on a l'ensemble des permutations de $[\![1,3]\!]$ qui est le suivant : $S_3 = \left\{\mathrm{Id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) &= m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,1}m_{1,2}m_{3,3}\\ &\quad - m_{3,1}m_{2,2}m_{1,3} - m_{1,1}m_{3,2}m_{2,3}\\ &\quad + m_{2,1}m_{3,2}m_{1,3} + m_{3,1}m_{1,2}m_{2,3}\end{aligned}$$

(5) Soit $j \in [\![1, n]\!]$, si $y \in \operatorname{Vect}\left((x_i)_{i \neq j}\right)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_j + y, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(6) $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots x_n) = -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n)$. Plus généralement, pour $\sigma \in S_n$,

$$(\sigma \star \det_{\mathcal{B}})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E *de longueur n*. Alors

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est liée} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Par contraposée,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est une base} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est libre} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$$

Démonstration

$\Rightarrow$ *« Djàvu ! »*

$\Leftarrow$ Par contraposée : supposons que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre, c'est donc une base $\mathcal{C}$ de E. $\det_{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ donc $\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. En particulier,

$$\begin{aligned} 1 &= \det_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$\det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq 0$ car $\det_{\mathcal{C}} \neq 0_{\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})}$ donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$.

3 Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

3.1 Déterminant d'un endomorphisme

3.1.1 Théorème et définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

λ est le déterminant de f et se note $\det f$.

Démonstration

Unicité : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui convienne et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) = \lambda \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \ldots, e_n)}_{1}$$

On n'a pas le choix pour λ : on doit prendre $\lambda = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

Existence : soit $\mathcal{B}$ une base de E, l'application $\varphi_{\mathcal{B}} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \longrightarrow \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ est n-linéaire (car f est linéaire et $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire) et alternée (car $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée). Ainsi, $\varphi_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ donc $\varphi_{\mathcal{B}}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$: $\exists \lambda_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}$. Montrons que $\lambda_{\mathcal{B}}$ ne dépend en fait pas de $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, montrons que $\lambda_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{C}}$. $\det_{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ donc $\exists \mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $\det_{\mathcal{C}} = \mu \det_{\mathcal{B}}$ donc pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$,

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{C}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) & = & \lambda_{\mathcal{C}} \det_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & = & \lambda_{\mathcal{C}} \mu \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{mais aussi } \det_{\mathcal{C}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) & = & \mu \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \\ & = & \mu \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

Puisque $\det_{\mathcal{B}} \neq 0_{\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})}$, $\mu(\lambda_{\mathcal{C}} - \lambda_{\mathcal{B}}) = 0$ donc $\lambda_{\mathcal{C}} = \lambda_{\mathcal{B}}$ car $\mu \neq 0$.

Remarque Avec les notations du théorème, si $f \in \mathcal{L}(E)$, et si $\mathcal{B}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

Ainsi, si $f = \alpha \mathrm{Id}_E$, $\det f = \det_{\mathcal{B}}(\alpha e_1, \alpha e_2, \ldots, \alpha e_n) = \alpha^n$.

3.1.2 Résultats importants

Critère d'inversibilité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$.

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de E, c'est-à-dire si $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) = \det f \neq 0$.

Propriétés multiplicatives du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On a les résultats suivants :

(1) Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f \circ g) = \det f \det g = \det(g \circ f)$.

(2) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, $\det(f^n) = (\det f)^n$.

(3) Pour $f \in \mathrm{GL}(E)$, $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\det(f^n) = (\det f)^n$.

Démonstration

(1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, alors

$$\det(f \circ g) = \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), f(g(e_2)), \ldots, f(g(e_n)))$$

Or, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'où

$$\begin{array}{rcl} \det(f \circ g) & = & \det f \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), g(e_2), \ldots, g(e_n)) \\ & = & \det f \det g \end{array}$$

(2) Récurrence sur n, on a bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = 1$.

(3) $\psi : \begin{array}{rcl} (\mathrm{GL}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^*, \times) \\ f & \longmapsto & \det f \end{array}$ est un morphisme de groupes donc $\forall x \in \mathrm{GL}(E)$, $\psi\left(x^{-1}\right) = (\psi(x))^{-1}$ d'où le résultat.

Remarque et définition

On vient de voire que $\psi : \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ f & \longmapsto & \det f \end{array}$ est un morphisme de groupes de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$ et on définit $\mathrm{SL}(E)$ comme étant $\mathrm{Ker}\, f = \{f \in \mathrm{GL}(E) \mid \det f = 1\}$. $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ appelé groupe spécial linéaire.

Multiplication par un scalaire Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha f) = \alpha^n \det f$ où $n = \dim E$.

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E,

$$\begin{aligned} \det(\alpha f) &= \det_{\mathcal{B}}(\alpha f(e_1), \alpha f(e_2), \ldots, \alpha f(e_n)) \\ &= \alpha^n \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) \\ &= \alpha^n \det f \end{aligned}$$

3.2 Déterminant d'une matrice carrée

3.2.1 Faits de base

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\det M = \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M))$$

Il est clair que $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M))$ donc

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[\sigma(k), k]$$

En pratique, $\det M$ s'écrit aussi

$$\det M = \begin{vmatrix} M[1,1] & \cdots & M[1,n] \\ \vdots & & \vdots \\ M[n,1] & \cdots & M[n,n] \end{vmatrix}$$

Exemples

- $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $\begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{vmatrix} = m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,1}m_{1,2}m_{3,3} - m_{3,1}m_{2,2}m_{1,3} - m_{1,1}m_{3,2}m_{2,3} + m_{2,1}m_{3,2}m_{1,3} + m_{3,1}m_{1,2}m_{2,3}$

Déterminants classiques

On a aussi $\det \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ car si $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathrm{C}_i(\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \alpha_i e_i$.
Mieux, si $M \in \mathrm{TS}_n(\mathbb{K})$, alors $\det M = \prod_{i=1}^{n} M[i,i]$.

En effet, soit $\sigma \in S_n \backslash \{\mathrm{Id}\}$, alors $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) > i$. En effet, dans le cas contraire, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \leqslant k$ donc $\sigma(1) \leqslant 1$ et $\sigma(1) \in [\![1,n]\!]$ donc $\sigma(1) = 1$, puis $\sigma(2) = 2$, etc. On a donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) = k$ donc $\sigma = \mathrm{Id}$, ce qui est faux. On a alors $M[\sigma(i), i] = 0$ car M est triangulaire supérieure donc $\prod_{k=1}^{n} M[\sigma(k), k] = 0$. σ ne contribue pas à la somme, il ne reste donc que le terme qui correspond à Id d'où

$$\det M = \underbrace{\varepsilon(\mathrm{Id})}_{1} \prod_{k=1}^{n} M[k,k]$$

3.2.2 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

(1) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det M \neq 0$.
En effet, on sait que

$$\begin{aligned} M \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \left(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M)\right) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \\ &\Leftrightarrow \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M)\right) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det M \neq 0 \end{aligned}$$

(2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E.

(a) Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(b) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det f = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Montrons ces deux propriétés.

(a) Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a vu que

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[\sigma(k), k] \\ &= \det M \end{aligned}$$

(b) En écrivant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on a alors

$$\begin{aligned} \det f &= \det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right) \\ &= \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right) \\ &= \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

(3) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$:
- $\det(AB) = \det A \det B$;
- $\det A^k = (\det A)^k$;
- si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ et $\det A^p = (\det A)^p$.

En effet, soient $a, b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ les applications canoniquement associées à A et B. Alors $a \circ b$ est canoniquement associée à AB donc $\det(AB) = \det(a \circ b) = \det a \det b = \det A \det B$. Puis par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\det A^k = (\det A)^k$ et on a bien $\det \mathrm{I}_n = 1$. Les propriétés inhérentes au morphisme de groupes $\psi : \begin{array}{l} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longmapsto \det A \end{array}$ assure le dernier résultat.

Remarques
- $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longmapsto \det A \end{array}$ est surjective, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda = \det \mathrm{Diag}(\lambda, 1, 1, \ldots, 1)$.

Avec les notations précédentes, $\mathrm{Ker}\,\psi$ ou l'ensemble des matrices de déterminant 1 est un sous groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \circ)$ noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $\det A = 1$, alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, alors $f \in \mathrm{SL}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

Transposition et déterminant

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det {}^{\mathrm{T}}M = \det M$.

En effet,

$$\begin{aligned}\det {}^{\mathrm{T}}M &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} {}^{\mathrm{T}}M[\sigma(k), k] \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[k, \sigma(k)]\end{aligned}$$

Soit $\sigma \in S_n$, σ est bijective de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ donc σ^{-1} est bijective donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} M[k, \sigma(k)] &= \prod_{j=1}^{n} M\left[\sigma^{-1}(j), \sigma\left(\sigma^{-1}(j)\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n} M\left[\sigma^{-1}(j), j\right]\end{aligned}$$

D'autre part, $\varepsilon(\sigma)\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon\left(\sigma \circ \sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$ donc $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$ car $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$. On a alors

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[k, \sigma(k)] = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) \prod_{j=1}^{n} M\left[\sigma^{-1}(j), j\right] Or$$

lorsque σ décrit S_n, σ^{-1} décrit S_n donc

$$\det {}^{\mathrm{T}}M = \sum_{s\in S_n} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^{n} M[s(j), j] = \det M$$

Corollaire Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det M = \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \dots, \mathrm{L}_n(M))$.
En effet,

$$\begin{aligned}\det M &= \det {}^{\mathrm{T}}M \\ &= \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1\left({}^{\mathrm{T}}M\right), \mathrm{C}_2\left({}^{\mathrm{T}}M\right), \dots, \mathrm{C}_n\left({}^{\mathrm{T}}M\right)\right) \\ &= \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \dots, \mathrm{L}_n(M))\end{aligned}$$

Conséquences

(1) Si M a deux lignes ou deux colonnes égales, alors $\det M = 0$.

(2) On peut ajouter à une colonne (respectivement une ligne) de M une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement lignes) sans modifier $\det M$. En particulier, si M' se déduit de M par une succession d'opérations élémentaires de ce type sur les rangées de M, alors $\det M' = \det M$.

(3) Si on échange deux rangées de M, le déterminant de la matrice obtenue est l'opposé du déterminant de M.

(4) $\det_{\mathrm{BC}_n}(\lambda_1\mathrm{C}_1(M), \lambda_2\mathrm{C}_2(M), \dots, \lambda_n\mathrm{C}_n(M)) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M))$ et $\det(\lambda M) = \lambda^n \det M$.

Exemples

(1) Ces propriétés permettent d'établir une stratégie pratique pour calculer $\det M$: rendre M triangulaire supérieure au moyen d'opérations élémentaires de combinaison ou de permutation. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{matrix} \\
&= -7
\end{aligned}$$

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $A[i,j] \in \{\pm 1\}$. Montrons que $\det A \in \mathbb{Z}$ et que $2^{n-1} \mid \det A$.
Si A n'a que des coefficients entiers, alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{n} \underbrace{M[\sigma(k), k]}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

De plus, $\lambda, \mu \in \{\pm 1\} \Rightarrow \lambda + \mu \in \{0, \pm 2\}$ et on a

$$\begin{aligned}
\det A &= \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}_2(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A)) \\
&= \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}_2(A) + \mathrm{C}_1(A), \ldots, \mathrm{C}_n(A) + \mathrm{C}_1(A))
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on peut écrire $\mathrm{C}_k(A) + \mathrm{C}_1(A) = 2\mathrm{C}'_k(A)$ où les coefficients de $\mathrm{C}'_k(A)$ sont entiers. Ainsi

$$\begin{aligned}
\det A &= \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(A), 2\mathrm{C}'_2(A), \ldots, 2\mathrm{C}'_n(A)\right) \\
&= 2^{n-1} \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(A), \mathrm{C}'_2(A), \ldots, \mathrm{C}'_n(A)\right)
\end{aligned}$$

4 Développement par rapport à une rangée, comatrice

4.1 Matrice déduite, cofacteur, développement par rapport à une rangée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice déduite de M en enlevant dans M la i-ième ligne et la j-ième colonne.
Le cofacteur d'indice (i,j) est par définition $A_{i,j}(M) = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$.

Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{1,2}(M) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{2,2}(M) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \end{cases}$$

Remarque Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $\forall k \neq j$, $\mathrm{C}_k(M') = \mathrm{C}_k(M)$, alors $A_{i,j}(M') = A_{i,j}(M)$. De même, si $\forall k \neq i$, $\mathrm{L}_k(M') = \mathrm{L}_k(M)$, alors $A_{i,j}(M) = A_{i,j}(M')$.

Théorème et définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\det M = \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, A_{i,j}(M)$. C'est le développement de $\det M$ suivant la j-ième colonne.

(2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\det M = \sum_{j=1}^{n} M[i,j]\, A_{i,j}(M)$. C'est le développement de $\det M$ suivant la i-ième ligne.

Montrons ce résultat. Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors $\mathrm{C}_j(M) = (M[1,j], M[2,j], \ldots, M[n,j]) = \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, e_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} \det M &= \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(M), \ldots, \mathrm{C}_j(M), \ldots, \mathrm{C}_n(M)\right) \\ &= \det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(M), \ldots, \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, e_i, \ldots, \mathrm{C}_n(M)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, \underbrace{\det_{\mathrm{BC}_n}\left(\mathrm{C}_1(M), \ldots, e_i, \ldots, \mathrm{C}_n(M)\right)}_{\Delta_{i,j}} \end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, représentons $\Delta_{i,j}$:

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} M[1,1] & \cdots & M[1,j-1] & 0 & M[1,j+1] & \cdots & M[1,n] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M[i,1] & & M[i,j-1] & 1 & M[i,j+1] & & M[i,n] \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M[n,1] & & M[n,j-1] & 0 & M[n,j+1] & & M[n,n] \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes :

- on décale la j-ième colonne à gauche en effectuant $\mathrm{C}_{j-1} \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ puis $\mathrm{C}_{j-2} \leftrightarrow \mathrm{C}_{j-1}$, etc jusqu'à $\mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_2$;
- on décale la i-ième ligne en haut en effectuant $\mathrm{L}_{i-1} \leftrightarrow \mathrm{L}_i$ puis $\mathrm{L}_{i-2} \leftrightarrow \mathrm{L}_{i-1}$, etc jusqu'à $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j} &= (-1)^{i-1+j-1} \begin{vmatrix} 1 & M[i,1] & \cdots & M[i,j-1] & M[i,j+1] & \cdots & M[i,n] \\ 0 & M[1,1] & \cdots & M[1,j-1] & M[1,j+1] & \cdots & M[1,n] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & M[i-1,1] & & M[i-1,j-1] & M[i-1,j+1] & & M[i-1,n] \\ \vdots & M[i+1,1] & & M[i+1,j-1] & M[i+1,j+1] & & M[i+1,n] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & M[n,1] & & M[n,j-1] & M[n,j+1] & & M[n,n] \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Omega_{i,j} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où $\Omega_{i,j}$ est la matrice déduite de M en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

P'tit lemme Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det M = \det M'$ où $M' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

1^er^ cas : supposons $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Pour $C_1 = (C_{1,1}, \dots, C_{n,1}), \dots, C_n = (C_{1,n}, \dots, C_{n,n})$, on pose

$$f(C_1, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n,1} & \cdots & C_{n,n} \end{vmatrix}$$

On montre rapidement que f est n-linéaire et alternée donc elle est proportionnelle à $\det_{\mathrm{BC}_n}$ et, pour $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det \mathrm{I}_{n+1} = 1$. Ainsi, $f = \det_{\mathrm{BC}_n}$ donc

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix} &= f(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M)) \\ &= \det_{\mathrm{BC}_n}(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M)) \\ &= \det M \end{aligned}$$

2^e^ cas : on se ramène au premier cas en effectuant les opérations élémentaires suivantes : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{C}_i(M') \leftarrow \mathrm{C}_i(M') - \alpha_i \mathrm{C}_0(M')$. On a alors, les opérations élémentaires ne modifiant pas le déterminant,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \det M$$

Le lemme appliqué à $\Omega_{i,j}$ entraîne immédiatement le résultat.

Remarques

- On peut montrer [a] que pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix} = \det A \det B$$

- La formule $\det M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, A_{i,j}(M)$ du développement de $\det M$ par rapport à la j-ième colonne ne sert pas à grand chose s'il faut calculer tous les $A_{i,j}(M)$. On a donc intérêt à ce que $M[i,j] = 0$ pour un maximum de coefficients d'une rangée, ce que l'on peut obtenir à l'aide d'opérations élémentaires. En prenant la rangée contenant le plus de 0, on aura le moins de $A_{i,j}(M)$ à calculer.

4.2 Comatrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la comatrice de M notée $\mathrm{com}\, M$ est par définition la matrice des cofacteurs : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(\mathrm{com}\, M)[i,j] = A_{i,j}(M)$.

a. *« Left to the reader ! »*

4.2.1 Formule de la matrice inverse

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors
$$^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)\, M = M^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M) = \det M \mathrm{I}_n$$
De plus, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det M \neq 0$,
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)$$

Pour $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a donc
$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Démonstration Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il s'agit de voir que $({}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)\, M)[i,j] = (M^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M))[i,j] = \delta_{i,j}\det M$ d'après les propriétés de I_n. On sait que
$$\begin{aligned}({}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)\, M)[i,j] &= \sum_{k=1}^{n}({}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M))[i,k]\, M[k,j] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{com} M)[k,i]\, M[k,j] \\ &= \sum_{k=1}^{n} M[k,j]\, A_{k,i}(M)\end{aligned}$$

- Si $i = j$, alors cette dernière formule est précisément le développement du déterminant de M suivant la j-ième colonne d'où $({}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)\, M)[j,j] = \det M$.
- Supposons $i \neq j$, soit M' la matrice déduite de M en remplaçant la i-ième colonne par la j-ième colonne.

$$M' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,j} & \cdots & M_{1,j} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & & M_{n,j} & & M_{n,j} & & M_{n,n} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{M_{1,1}} & & i & \qquad & j & & \phantom{M_{1,n}} \end{array} \end{array}$$

On a bien sûr $\det M' = 0$ car $\mathrm{C}_i(M') = \mathrm{C}_j(M')$. Or, en développant $\det M'$ suivant la i-ième colonne,
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n}\underbrace{M'[k,i]}_{M[k,j]}\underbrace{A_{k,i}(M')}_{A_{k,i}(M)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} M[k,j]\, A_{k,i}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

On montre de même que $(M^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M))[i,j] = \delta_{i,j}\det M$.

Illustration Soit $\mathbb{K}$ un corps, A un sous-anneau de $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$). Soit $M \in \mathcal{M}_n(A) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur $\det M$ pour que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(A)$. On remarque que $\mathcal{M}_n(A)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{M}_n(A)$ telle que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(A)$. on sait que $\det M \in A$ car $M \in \mathcal{M}_n(A)$ donc
$$MM^{-1} = \mathrm{I}_n \Rightarrow 1 = \det\left(MM^{-1}\right) = \underbrace{\det M}_{A}\underbrace{\det M^{-1}}_{A}$$

Ainsi, $\det M$ est inversible dans A ce qui signifie $\det M \in A\backslash\{0\}$ et $\dfrac{1}{\det M} \in A$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$ telle que $\det M \in \mathcal{U}(A)$ [a], alors $\exists b \in A$ tel que $\det M \times b = 1$. $\det M \neq 0$ donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, montrons que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(A)$. On sait que

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M) = b^{\mathrm{T}}(\operatorname{com} M)$$

Or $\operatorname{com} M \in \mathcal{M}_n(A)$ car les coefficients de $\operatorname{com} M$ sont les cofacteurs M à coefficients dans A. Ainsi, $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(A)$.

4.2.2 Formule de Cramer

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on considère le système linéaire $MX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution de ce système est $X = M^{-1}B$. Alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ avec $\Delta = \det M$ et Δ_i le déterminant de la matrice déduite de M dans laquelle on a remplacé la i-ième colonne par B.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,i-1} & b_1 & M_{1,i+1} & \cdots & M_{n,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & & M_{1,i-1} & b_n & M_{n,i+1} & & M_{n,n} \end{vmatrix}$$

Démonstration Puisque la solution du système est unique, il ne reste plus qu'à vérifier que celle proposée par Cramer convient. On aurait alors $X = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, donc $MX = \dfrac{1}{\det M} M \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$. Il s'agit de voir que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i \det M = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M[i,j]\,\Delta_j$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, développons Δ_j suivant la j-ième colonne : $\Delta_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,j}(M_j)$ où $M_j = (\mathrm{C}_1(M), \dots, B, \dots, \mathrm{C}_n(M))$. Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_{k,j}(M_j) = A_{k,j}(M)$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} M[i,j]\,\Delta_j &= \sum_{j=1}^{n} M[i,j] \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,j}(M) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M[i,j]\,A_{k,j}(M)}_{\delta_{i,k}\det M} \\ &= b_i \det M \end{aligned}$$

Exemple Pour un système à deux équations et deux inconnues représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a donc

$$(S) : \begin{cases} ax + cy = \alpha \\ bx + dy = \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \begin{vmatrix} \alpha & c \\ \beta & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha d - \beta c}{ad - bc} \\ y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \dfrac{a\beta - b\alpha}{ad - bc} \end{cases}$$

a. Ensemble des unités de A, c'est-à-dire des éléments inversibles dont l'inverse est élément de A.

5 Complément : quelques déterminants classiques

5.1 Déterminant de Vandermonde

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on pose

$$V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \det M_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a donc, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $M_n[i,j] = \alpha_i^{j-1}$.

On trouve $V_1(\alpha_1) = 1$, $V_2(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et $V_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$. On intuite donc le résultat H_n suivant : « $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$ ».

- C'est vrai pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
- Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons H_{n+1}. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, pour $x \in \mathbb{K}$, on pose

$$f(x) = V_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n} \end{vmatrix}$$

1^er cas : si $\exists j \in [\![1,n]\!]$ tel que $i < j$ et $\alpha_i = \alpha_j$, alors $M_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ a deux lignes égales donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = 0$ donc le résultat est prouvé puisque le produit contient $\alpha_j - \alpha_i = 0$.

2^e cas : supposons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $i < j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$. Si on développe par rapport à la dernière ligne, on peut écrire $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ où $a_j = \pm A_{n+1,j+1}(M)$ et

$$a_n = (-1)^{n+1+n+1} V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$$

f est polynômiale en x de degré n, et de plus il est clair que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(\alpha_i) = 0$ donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de f donc f s'écrit

$$\begin{aligned} f &= a_n \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \\ &= V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} V_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) &= f(\alpha_{n+1}) \\ &= V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \prod_{k=1}^{n} (\alpha_{n+1} - \alpha_k) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\alpha_j - \alpha_i) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On a donc

$$V_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Remarque Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} M_n \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \det M_n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \end{aligned}$$

5.2 Déterminant de Hurwitz

Soit $n \geqslant 2$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ on pose

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

1^er cas : supposons $b \neq c$. Pour $x \in \mathbb{K}$, posons $f(x) = \Delta(a+x, b+x, c+x)$, montrons que f est polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+x & c-a & c-a & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & & c-b \\ \vdots & 0 & a-b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & c-b \\ b+x & 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} C_i \leftarrow C_i - C_1 \text{ pour } i \in [\![2,n]\!] \\ &= \lambda_1 (a+x) + \lambda_2 (b+x) + \cdots + \lambda_n (b+x) \text{ en développant suivant la première colonne} \end{aligned}$$

Il est maintenant clair que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \alpha x + \beta$. Or, $\Delta(a,b,c) = f(0)$, il nous faut donc trouver deux valeurs de f pour déterminer complètement la fonction. On a alors

$$f(-b) = \begin{vmatrix} a-b & c-b & \cdots & c-b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^n = -\alpha b + \beta \quad \text{et } f(-c) = (a-c)^n = -\alpha c + \beta$$

On en déduit un système en α et β, mais seul β nous intéresse pour calculer $f(0)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\alpha b + \beta = (a-b)^n \\ -\alpha c + \beta = (a-c)^n \end{cases} &\Rightarrow -\beta b + \beta c = c(a-b)^n - b(a-c)^n \\ &\Rightarrow \beta = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} \end{aligned}$$

2[e] cas : supposons que $b = c$. La précédente formule n'est évidemment plus valable. On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+(n-1)\,b & b & \cdots & b \\ \vdots & a & & \vdots \\ \vdots & b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & b \\ a+(n-1)\,b & b & & a \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n \\
&= (a+(n-1)\,b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+(n-1)\,b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } i \in [\![2, n]\!] \\
&= (a-b)^{n-1}\,(a+(n-1)\,b)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta_n(a,b,c) = \begin{cases} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} & \text{si } b \neq c \\ (a-b)^{n-1}\,(a+(n-1)\,b) & \text{si } b = c \end{cases}$$

5.3 Déterminant de Cauchy

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ avec $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$. On a alors

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \frac{V_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,V_n(b_1,b_2,\ldots,b_n)}{\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i+b_j)}$$

Ce qui donne pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} \end{vmatrix} = \frac{(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_3-a_2)(b_2-b_1)(b_3-b_1)(b_3-b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)(a_3+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)(a_3+b_2)(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}$$

6 Complément : polynôme caractéristique d'un endomorphisme et d'une matrice

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $z \in \mathbb{K}$, on définit le polynôme caractéristique de f par

$$P_f(z) = \det(z\mathrm{Id}_E - f)$$

Remarque

$$\begin{aligned} z \text{ valeur propre de} f &\Leftrightarrow z\mathrm{Id}_E - f \text{ non injectif} \\ &\Leftrightarrow z\mathrm{Id}_E - f \text{ n'est pas un isomorphisme} \\ &\Leftrightarrow \det(z\mathrm{Id}_E - f) = 0 \\ &\Leftrightarrow P_f(z) = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont les racines de P_f.

Proposition Avec les notations précédentes, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\forall z \in \mathbb{K}$, $P_f(z) = \det(z\mathrm{I}_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

En effet, soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(z\mathrm{Id}_E - f) = z\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = z\mathrm{I}_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ d'où le résultat car $\det(z\mathrm{Id}_E - f) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(z\mathrm{Id}_E - f)$.

Ainsi, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit le polynôme caractéristique de la matrice M par $\forall z \in \mathbb{K}$,

$$P_M(z) = \det(z\mathrm{I}_n - M)$$

Remarques

- Si M et M' sont semblables, alors $P_M = P_{M'}$.
  En effet, on écrit $M' = Q^{-1}MQ$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc, pour $z \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} z\mathrm{I}_n - M' &= Q^{-1}(z\mathrm{I}_n)Q - Q^{-1}MQ \\ &= Q^{-1}(z\mathrm{I}_n - M)Q \end{aligned}$$

  Ainsi, $\det(z\mathrm{I}_n - M') = \underbrace{\det Q^{-1}}_{\frac{1}{\det Q}} \det(z\mathrm{I}_n - M)\det Q = \det(z\mathrm{I}_n - M)$.
- Si M est triangulaire supérieure, alors $\forall z \in \mathbb{K}$:

$$P_M(z) = \begin{vmatrix} z - M_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & z - M_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} (z - M_{k,k})$$

  Ainsi, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors $\forall z \in \mathbb{K}$, $P_f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)$ et les valeurs propres de f sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Expression de P_M dans le cas général Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, notons pour $z \in \mathbb{K}$

$$M(z) = z\mathrm{I}_n - M = \begin{pmatrix} z - m_{1,1} & -m_{1,2} & \cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ -m_{n,1} & \cdots & -m_{n,n-1} & z - m_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors $P_M(z) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M(z)[\sigma(k), k]$. Or, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $M(z)[i,j]$ est un polynôme en z de degré inférieur ou égal à 1 donc $\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M(z)[\sigma(k), k]$ est un polynôme en z de degré inférieur ou égal à n. P_M est donc polynômiale de degré inférieur à n, c'est pour cela qu'on l'appelle polynôme caractéristique. On a de plus pour $z \in \mathbb{K}$,

$$P_M(z) = \underbrace{(z - m_{1,1}) \cdots (z - m_{n,n})}_{T} + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{Id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M[\sigma(k), k]}_{S}$$

T est unitaire et $\det T = n$, le coefficient de z^{n-1} dans T est, d'après les relations entre racines et coefficients [a], $-\sum_{k=1}^{n} m_{k,k} = -\mathrm{Tr}(M)$.

Si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) < i$ et $\exists j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$ donc le produit $\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} M(z)[\sigma(k), k]$ contient au moins deux termes constants donc le degré du produit est inférieur ou égal à $n-2$. Ainsi, $\deg S \leqslant n-2$ donc $\deg P_M = \deg T$ et P_M est unitaire, son coefficient de degré $n-1$ est $-\mathrm{Tr}(M)$. Le terme constant de P_M et $P_M(0) = \det(-M) = (-1)^n \det M$.

Exemples

- Pour $n = 2$, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} P_M(z) &= z^2 - \mathrm{Tr}(M) z + \det M \\ &= z^2 - (a+d) z + (ad - bc) \end{aligned}$$

- On vérifie le théorème de Cayley-Hamilton : pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $P_M(M) = M^2 - (\mathrm{Tr} M) M + \det M \mathrm{I}_2 = 0$.

[a] Voir section 19.4.2 du cours complet page 345.