Épreuve de mathématique II
Concours commun MINES-PONTS-TELECOM
Session 1991

Corrigé

Partie I

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

1. (a) La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, car $\frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ et la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge et comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est complet, en tant qu'espace vectoriel normé de dimension fini, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$. Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\|S_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Par passage à la limite et par continuité de l'application norme $\|.\|$, on obtient $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $BS_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{BA^k}{k!}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{BA^k}{k!}$ existe car $\frac{\|BA^k\|}{k!} \leq \frac{\|B\|\|A\|^k}{k!}$, donc par passage à la limite et par continuité de l'application produit $(A, B) \mapsto AB$ (bilinéaire en dimension finie), on obtient l'égalité :

$$B\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!}.$$

Si A_1 et A_2 sont semblables, alors il existe une matrice P inversible telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(A_2) = PS_n(A_1)P^{-1}.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (linéaire en dimension finie), donc par passage à la limite on obtient :

$$\exp(A_2) = P\exp(A_1)P^{-1}.$$

Donc les deux matrices $\exp(A_1)$ et $\exp(A_1)$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{D^n}{n!} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n!}, \frac{2^n}{n!}, \frac{3^n}{n!}\right)$, donc $\exp(D) = \operatorname{diag}(e, e^2, e^3)$.

On a $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^3 = 0$. Donc

$$\exp(F) = I + F + \frac{F^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice E étant diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Des vecteurs propres associes sont respectivement $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 2)$. Donc on a l'égalité :

$$E = PDP^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exp(E) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e^3 - e & \dfrac{e^3}{2} - e^2 + \dfrac{e}{2} \\ 0 & e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque $\exp(E) = \exp(D+F) \neq \exp(D)\exp(F)$, en effet les matrices D et F ne commutent pas.

3. (a) Posons $l(x) = xA$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $f_A = \exp \circ l$, c'est une application continue comme composée de deux applications continues.

(b) La série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}A^k$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$) puisque

$$\forall x \in [-a, a], \quad \left\| \frac{x^k}{k!}A^k \right\| \leq \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$$

et la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(a\|A\|)^k}{k!}$ converge, donc on peu intégrer terme à terme :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{k!}A^k\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}A^k.$$

D'où $f_A(x) = I_n + A\displaystyle\int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t$, ceci montre que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_A'(x) = Af_A(x)$. Par récurrence on montre que f_A est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_A^{(n)}(x) = A^n f_A(x)$.

4. (a) On peut montrer par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ C_\theta^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p} \end{pmatrix}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ C_\theta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \\ (-1)^{p+1}\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp(C_\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $n \geq 3$, $A_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On a $A_\theta \neq A_{\theta+2\pi}$, cependant $\exp(A_\theta) = \exp(A_{\theta+2\pi})$, donc l'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

(b) On a $\exp(A) - I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}$. Par continuité $\displaystyle\lim_{A\to 0} S_A = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\|A\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_A\| \leq 1$.

(c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X = 0$ ou encore $TX = -X$. Si $X \neq 0$, alors $\dfrac{\|TX\|}{\|X\|} = 1$ et donc $\|T\| \geq 1$, ce qui est absurde, d'où $X = 0$.

(d) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| \leq \alpha$ et $\exp(M) = I_n$. Donc $\exp(M) - I_n = M(I_n + S_M) = 0$, mais $\|M\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_M\| < 1$, donc $I + S_M$ est inversible et par conséquent $M = 0$.

5. (a) g_k est une fonction polynômiale en x, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'autre pat, pour tout entier $n \geq 1$ et pour toutes matrices M et N, nous avons

$$M^n - N^n = \sum_{i=0}^{n-1}(N^i M^{n-i} - N^{i+1}M^{n-i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} N^i(M-N)N^{n-i-1},$$

d'où nous déduisons, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{g_k(x+h) - g_k(x)}{h} = \sum_{i=0}^{k-1}(B+xH)^i H(B+(x+h)H)^{k-i-1}.$$

Le second membre il a une limite fini quand h tend vers 0, donc g_k est dérivable en x et

$$g_k'(x) = \sum_{i=0}^{k-1}(B+xH)^i H(B+xH)^{k-i-1}.$$

En particulier, $g_1'(x) = H$, $g_2'(x) = H(B+xH) + (B+xH)H$ et

$$g_3'(x) = H(B+xH)^2 + (B+xH)H(B+xH) + (BH+xH)^2 H.$$

(b) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \|g_k'(x)\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|(B+xH)^i H(B+xH)^{k-i-1}\| \\ &\leq \|H\| \sum_{i=0}^{k-1}(\|B\| + x\|H\|)^i(\|B\| + x\|H\|)^{k-i-1} \\ &= k\|H\|(\|B\| + x\|H\|)^{k-1} \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements fini, appliqué à g_k sur $[0,1]$, entraîne $\|g_k(1) - g_k(0)\| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \|g_k'(x)\|$, inégalité qui s'écrit encore

$$\|(B+H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

6. (a) On a $T(A,x) = \dfrac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{A^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k A^{k+2}}{(k+2)!}$ qui est la somme d'une série normalement convergente sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ ($a > 0$), et comme les termes de cette série sont bien définis en 0, alors l'application $x \mapsto T(A,x)$ se prolonge par continuité en 0, en posant $T(A,0) = \dfrac{A^2}{2}$. La formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral, appliquée à la fonction f_A s'écrit :

$$\exp(xA) = I_n + xA + \frac{x^2A^2}{2}\int_0^1 (1-t)\exp(txA)\mathrm{d}t.$$

D'où $T(A,x) = \dfrac{A^2}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-t)\exp(txA)\mathrm{d}t$ et donc $\|T(A,x)\| \leq \dfrac{1}{2}\|A\|^2 \exp(x\|A\|)$.

(b) On a

$$\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right) = I_n + \frac{1}{k}A$$

et

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k = \exp A$$

D'où
$$\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k-\exp A=\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)-\frac{1}{k^2}T\left(A,\frac{1}{k}\right)\right)^k-\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k.$$
La formule de la question 5.(b) donne, avec $B=\exp\left(\frac{1}{k}A\right)$ et $H=-\frac{1}{k^2}T\left(A,\frac{1}{k}\right)$:
$$\begin{aligned}\left\|\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k-\exp A\right\| &\leq \frac{1}{k}\left\|T\left(A,\frac{1}{k}\right)\right\|\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)+\frac{1}{k^2}\left\|T\left(A,\frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1}\\ &\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\right]^{k-1}\\ &\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\exp\left(\frac{k-1}{k}\|A\|\right)\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}\\ &\leq \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp(\|A\|)\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}\end{aligned}$$
On peut vérifier facilement que $\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}=1$, d'où $\lim_{k\to\infty}\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\exp(A)$.[1]

(c) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $C_1,C_2,\ldots,C_n$ les colonnes de A. Alors $\det=\det_{\mathscr{B}}\circ\, l$ où $l(A)=(C_1,C_2,\ldots,C_n)$, donc $\det$ est continue, comme composée d'applications continues (l linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ n-linéaire en dimension finie).
On sait que le polynôme caractéristique de A s'écrit
$$\chi_A(X)=\det(XI_n-A)=X^n-\operatorname{tr}(A)X^{n-1}+\ldots+(-1)^n\operatorname{tr}(A),$$
donc si $x\neq 0$, $\det(I_n+xA)=(-x)^n\chi_A\left(\frac{-1}{x}\right)=1+\operatorname{tr}(A)x+o(x)$, en particulier :
$$\det\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)=1+\frac{\operatorname{tr}(A)}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right).$$
Par continuité de $\det$, on a donc :
$$\det\exp(A)=\lim_{k\to\infty}\det\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\operatorname{tr}(A)}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k=\exp(\operatorname{tr}(A)).$$

7. (a) En remplaçant A et B dans l'égalité $\exp(xM)=I_n+xM+x^2T(M,x)$, on obtient :
$$U(A,B,x)=T(A,x)+T(B,x)+AB+x[AT(B,x)+T(A,x)B]+x^2T(A,x)T(B,x)$$
et, en passant à la limite lorsque x tend vers 0 :
$$\lim_{x\to 0}U(A,B,x)=\lim_{x\to 0}T(A,x)+\lim_{x\to 0}T(B,x)+AB=\frac{1}{2}(A^2+B^2)+AB.$$

---

1. Remarque : On a
$$\exp(A)-\left(I_n+\frac{1}{k}\right)^k=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i-\sum_{i=0}^{k}\frac{\mathtt{C}_k^i}{k^i}A^i$$
Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$,
$$\frac{\mathtt{C}_k^i}{k^i}=\frac{k}{k}\frac{k-1}{k}\ldots\frac{k-i+1}{k}\frac{1}{i!}\leq\frac{1}{i!},$$
donc
$$\left\|\exp(A)-\left(I_n-\frac{A}{k}\right)^k\right\|\leq\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i!}-\frac{\mathtt{C}_k^i}{k^i}\right)\|A\|+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\|A\|^i}{i!}=\exp(\|A\|)-\left(1+\frac{\|A\|}{k}\right)^k.$$
Le second terme tend vers quand k tend vers l'infini. Donc $\lim_{k\to\infty}\left(I_n+\frac{A}{k}\right)^k=\exp(A)$.

De plus, comme $x > 0$,

$$\begin{aligned}\|U(A,B,x)\| &\leq \frac{1}{2}\|A\|^2\exp(x\|A\|) + \frac{1}{2}\|B\|^2\exp(x\|B\|) + \|A\|\|B\| \\ &\quad + \frac{x}{2}\|A\|\|B\|(\|B\|\exp(x\|A\|) + \|A\|\exp(x\|B\|) \\ &\quad + \frac{x^2}{4}\|A\|^2\|B\|^2\exp(x(\|A\| + \|B\|).\end{aligned}$$

(b) On a

$$P_k = \left[I_n + \frac{1}{k}(A+B) + \frac{1}{k^2}U\left(A, B, \frac{1}{k}\right)\right]^k - \left[I_n + \frac{1}{k}(A+B)\right]^k$$

et, appliquant l'inégalité du I.5.b. on obtient

$$\|P_k\| \leq \frac{1}{k}\left\|U\left(A,B,\frac{1}{k}\right)\right\|\left[1 + \frac{1}{k}(\|A\| + \|B\|) + \frac{1}{k^2}\left\|U\left(A,B,\frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1}.$$

Donc $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = 0$.

(c) On a alors immédiatement :

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{k\to\infty}\left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right]^k = \exp(A+B).$$

Partie II

Groupes à un paramètre

1. On sait déjà que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (d'après **I.3.a.**). Comme pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, xA et yA commutent, on a :

$$f_A(x+y) = \exp(xA + yA) = \exp(xA).\exp(yA) = f_A(x).f_A(y).$$

Il suffit de prouver que $f_A(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure. Or $f_A(0) = I_n$ et $f_A(x)f_A(-x) = I_n$, ce qui prouve que $f_A(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$. f_A est bien un morphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre.

2. On sait que $\mathscr{O}_+(2) = \left\{ r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$. Si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors on a $f_A(\mathbb{R}) = \mathscr{O}_+(2)$ (d'après la question **I.4.a.**) et donc $\mathscr{O}_+(2)$ est un groupe à un paramètre.

3. On considère la fonction h_α définie par :

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} (t^2 - \alpha^2)^2 & \text{si } |t| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |t| > \alpha \end{cases}.$$

Il est clair que cette fonction est positive et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si on pose $I = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} h_\alpha(t)\mathrm{d}t$ et $g_\alpha = \dfrac{h_\alpha}{I}$, alors cette fonction g_α vérifie bien les conditions de la question.
Les fonctions g_α et g'_α sont continues sur $[-\alpha, \alpha]$ donc uniformément continues sur cette intervalle. Comme elles sont nulles en dehors de cet intervalle, elles sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Pour $t \in [-t_0, t_0]$, on a $[t-\alpha, t+\alpha] \subset [-t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ et $g_\alpha(t-u) = 0$ pour $u \in [-t_0-\alpha, t-\alpha] \cup [t+\alpha, t_0+\alpha]$ donc

$$\begin{aligned}\int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u &= \int_{-t_0-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u + \int_{t+\alpha}^{t-\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u + \int_{t-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u \\ &= \psi(t).\end{aligned}$$

(b) En remarquant que g_α est polynômiale, on obtient une expression de la forme

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{4} t^k \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \Phi_k(u)\mathrm{d}u$$

où les fonctions Φ_k sont continues. Ceci montre que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

(c) Si on utilise le changement de variables $x = t - u$ dans l'intégrale définissant ψ, on obtient

$$\psi(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\Phi(t-u)\mathrm{d}u$$

et comme $\Phi(t-u) = \Phi(t)\Phi(-u) = \Phi(-u+t) = \Phi(-u)\Phi(t)$ on en déduit

$$\psi(t) = M_\alpha.\Phi(t) = \Phi(t).M_\alpha.$$

5. (a) Vu que $\Phi(0) = I_n$ et que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\mathrm{d}u = 1$ pour tout $\alpha > 0$ alors

$$M_\alpha - I_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)[\Phi(-u) - \Phi(0)]\mathrm{d}u.$$

Comme Φ est continue en 0, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|u| \leq \eta \Rightarrow \|\Phi(u) - \Phi(0)\| \leq \varepsilon$. À l'aide de l'inégalité triangulaire de l'intégrale, on obtient

$$\|M_\alpha - I_n\| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\|\Phi(-u) - \Phi(0)\|\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

dès que $|\alpha| \leq \eta$ et donc $\lim\limits_{\alpha\to 0} M_\alpha = I_n$.

(b) Comme $\lim\limits_{\alpha\to 0} M_\alpha = I_n$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < \alpha < \eta$ entraîne $\|M_\alpha - I_n\| < 1$. D'autre pat, $M_\alpha = I_n + (M_\alpha - I_n)$, donc d'après le résultat de la question **I.4.c.**, on en déduit que M_α est inversible pour $\alpha \in]0, \eta[$.

(c) Pour tout $\alpha \in]0, \eta[$, $\Phi(t) = (M_\alpha)^{-1}\psi(t)$ donc Φ est continûment dérivable.

6. (a) On dérive par rapport à u la relation $\Phi(t+u) = \Phi(t).\Phi(u)$ (Φ est de classe $\mathscr{C}^1$), on obtient

$$\Phi'(t+u) = \Phi(t)\Phi'(u)$$

et, avec $u = 0$,

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\Phi'(0) = \Phi'(0)\Phi(t) = \Phi(t)A = A\Phi(t).$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $d(t) = \Phi(t)\exp(-tA)$. d est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $d(0) = I_n$ et

$$d'(t) = \Phi'(t)\exp(-tA) - \Phi(t)A\exp(-tA) = 0,$$

donc d est constante et $\Phi(t) = \exp(tA)$.

Conclusion : pour tout sous-groupe à paramètre de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une seule matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = f_A(\mathbb{R})$.

Partie III

Algèbre de Lie

1. Vérification immédiate.

2. Il suffit de vérifier que E et F sont stables par la loi $[.,.]$. En effet, si $A, B \in E$ alors $\mathrm{tr}[A,B] = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0$. De même, si $A, B \in F$ on a ${}^t[A,B] = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB{}^tA - {}^tA{}^tB = BA - AB = -[A,B]$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{I_n}(x) = e^x I_n$. Comme G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et $e^x \neq 0$, alors $e^x I_n \in G$. Donc g contient la matrice I_n.

(b) Soit $A, B \in g$. Il est clair que $\lambda A \in g$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, donc il suffit de montrer que $A + B \in g$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x(A + B)) \in G$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $A, B \in g$, alors $\exp\left(\frac{tA}{k}\right)$ et $\exp\left(\frac{tB}{k}\right)$ appartiennent à G, et comme G est un groupe, il contient aussi le produit $\left[\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right]^k$ et comme G est fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$ il contient aussi $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right]^k$ qui vaut $\exp(x(A + B))$ (d'après la question).

(c) Il suffit de montrer que $[A, B] \in g$ pour tout A, B de g. Comme $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, il suffit de montrer que $\exp(x[A, B]) \in g$ pour tout $x \geq 0$, soit donc $t \in \mathbb{R}$ fixé tel que $x = t^2$, on a :

$$\lim_{k\to\infty}\left[\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right]\left[\exp\left(-\frac{tA}{k}\right)\exp\left(-\frac{tB}{k}\right)\right]^{k^2} = \exp(x[A, B])$$

Comme $A, B \in g$, alors G contient le terme de gauche pour tout k, et comme G est fermé il contient aussi la limite $\exp(x[A, B])$. Ceci montre que $[A, B] \in g$.

4. L'application déterminant, noté $\det$, est un morphisme de groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), .)$ dans $(\mathbb{R}^*, .)$. Le noyau étant $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{\ A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\ \} = \det^{-1}\{1\}$, c'est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\det$ est une application continue, alors $\det^{-1}\{1\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
Déterminons l'algèbre de Lie de g. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_A(x) = \exp xA \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exp(xA)\exp(x{}^tA) = I_n \Leftrightarrow x(A + {}^tA) = 0 \Leftrightarrow A + {}^tA = 0.$$

Ainsi la matrice A est antisymétrique. D'où $g = F$.

5. Soit A une matrice antisymétrique réelle et $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$A + {}^tA = 0 \Leftrightarrow xA + {}^txA = 0 \Leftrightarrow \exp(xA)^t\exp(xA) = I_n \Leftrightarrow \exp(xA) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$$

où $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ \middle|\ A^tA = I_n\ \right\}$ désigne le groupe orthogonal. Ainsi, $g = \{\ A \in F \mid f_A(\mathbb{R}) \subset \mathscr{O}_n(\mathbb{R})\ \}$.

●●●●●●●●●●●