Préparation Oral 2024

Mines - Ponts – MP- MPI

Algèbre

1. Soient p un nombre premier et C_p l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $z^{p^n} = 1$.
   (a) Montrer que C_p est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$.
   (b) Déterminer les sous-groupes de C_p.
2. Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.
3. Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \equiv 0\ [n]\}$.
   (a) Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A.
   (b) Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.
4. On écrit $n \in \mathbb{N}$ en base $p \in \mathcal{P}$: $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k p^k$ et l'on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$.
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que : $v_p\dbinom{n}{k} = \dfrac{S_p(k) + S_p(n-k) - S_p(n)}{p-1}$.
   (b) Exprimer $v_p\dbinom{n}{k}$ en fonction des retenues dans l'addition de $n-k$ et k en base p.
   (c) Est-ce que 7 divise $\dbinom{1000}{500}$?
   (d) Montrer que 2 divise $\dbinom{2n}{n}$. Étudier la divisibilité par 4 pour $n \geq 2$
5. Soit G un groupe cyclique d'ordre n.
   Soit H un sous-groupe de G. Montrer que H est cyclique d'ordre divisant n.
   Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.
6. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
   Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre et déterminer ses inversibles.
7. en Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A, on note $R(I) = \{x \in A\ ;\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$.
   (a) Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.
   (b) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :
   $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)\,;\quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
   (c) Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal à 2.
8. Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$·.

   Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que : $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.
9. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $\forall \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = P_n(\cot^2\theta)$.
   (b) Déterminer les racines de P_n et calculer leur somme.
   (c) Montrer que, pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cot^2\theta < \dfrac{1}{\theta^2} < \cot^2\theta + 1$.

(d) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, n-1\}$. Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ polynôme de degré n tel que $(X-1)^k|P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P. On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in \{0, n\},\ a_i \neq 0\}$.

    (a) On pose $P_0 = 1$ et $P_s = \displaystyle\prod_{j=0}^{s-1}(X-j)$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.

    Montrer que $\forall s \in \{0, k-1\},\ P^{(s)}(1) = \displaystyle\sum_{i \in A} a_i P_s(i)$.

    (b) En déduire que $\forall i \in A$, $a_i = 0$, et conclure.

    (c) L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et non constant. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' - \lambda P$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

12. Soit P un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines complexes de P sont simples
    Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant avec $\deg(P) \leq 2k-1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité k. Montrer que α est rationnel.

13. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec : $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$.

    Montrer que les racines complexes de P sont de module supérieur ou égal à 1.

    Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Montrer $\displaystyle\min_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

14. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base de $\mathbb{K}$.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Soit B la matrice dont les colonnes sont $C'_1, \ldots, C'_n$ avec : $C'_j = \displaystyle\sum_{i \neq j} C_i$.

    Déterminer $\det B$ en fonction de $\det A$.

16. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

    (a) Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
    (i) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ $\quad (ii)$ $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ $\quad (iii)$ $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

    (b) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces propriétés.

    (c) L'équivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) équivaut à (iii).

17. Soient K_1, ... , K_n des segments non triviaux disjoints.

    (a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie $\displaystyle\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, alors $P = 0$.

    (b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\displaystyle\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.

18. (a) Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

    (b) Calculer $\mathrm{Com}\ (\mathrm{Com}(A))$ lorsque $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

    (c) Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle, alors X est un vecteur propre de $(\mathrm{Com}(A))^T$.

19. Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0$.

21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

    (a) Calculer $\det(A + I_n)$.

    (b) Montrer que pour toute matrice M qui commute avec A on a l'égalité : $\det(A + M) = \det(M)$.

22. Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M)$ est un entier divisible par le cardinal de G.

23. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la structure de l'ensemble : $\{\exp(A_x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et expliciter $\exp(A_x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\text{Vect}(I_n, M, \ldots, M^{n-1})$.

25. Soient $a_1 < ... < a_n$ des réels et $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.

26. Soients $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A et B sont inversibles et préciser le sous-groupe G de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ engendré par ces matrices.

Dans le cas $n = 3$, préciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

27. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \text{tr}(AM)B$.
Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de f.
Étudier la diagonalisabilité de f.

28. Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.
    (a) Montrer que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $AB^m - B^m A = mB^m$.
    (b) En déduire que B est nilpotente.

29. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
    (a) Montrer que deux endomorphismes u et v de E qui commutent ont un vecteur propre en commun.
    (b) Montrer qu'une famille finie F d'endomorphismes de E qui commutent admet une base de trigonalisation commune à ses éléments.

30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si
$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)$ nilpotent $\Rightarrow P(A) = 0$.

31. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3 A$. Montrer que A et B commutent. Généraliser.

32. Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^3 + f^2 - \mathbf{Id} = 0$ et $\text{tr}\, f \in \mathbb{Q}$.

33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    (a) Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in (\mathbb{C}^n)^{2n}$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    (b) Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
    (c) On suppose A diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
    (d) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \left\{XY^T,\ X \in \mathbb{C}^n\right\}$ est stable par f_A.
    (e) Montrer que si f_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

34. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

35. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geqslant 2$, A^k est triangulaire supérieure.
Donner un contre-exemple si A est une matrice non inversible.

36. Soients E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^k v_i$.

37. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
i) l'unique valeur propre de A est 1,
ii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \cdots = \text{tr}(A^n) = n$.

38. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

    Soit A, B, C des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $sp(A) \cap sp(B =)\emptyset$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

39. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant à A soit diagonalisable.

40. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$?

    Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ est-il vrai que, pour tout $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables ?

41. Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \left\{\langle x, y\rangle \,;\ (x, y) \in A^2\right\}$. Montrer que A est finie si et seulement si B est fini.

42. (a) Énoncer le théorème de réduction pour une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
    (b) Montrer que deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui ont même axe commutent.
    (c) Montrer que deux demi-tours de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'axes orthogonaux commutent.
    (d) Montrer que si deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ commutent, alors on est dans l'un des deux cas précédents.

43. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

    (a) Montrer que $A(a, b, c)$ est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + t$ ou le réel t appartient à un intervalle I que l'on déterminera.
    (b) Si $A(a, b, c) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, caractériser l'endomorphisme canoniquement associé.

44. On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E, on pose
    $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt.$

    (a) Montrer que Φ est correctement définie et munit l'espace E d'un produit scalaire.
    (b) Calculer $\Phi(X^p, X^q)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
    (c) Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille $(1, X, X^2)$.
    (d) Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.
    (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(P(x) + x^n\right)^2 dx \geq (n!)^2$.

45. Calculer le minimum de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t) - xt - y)^2 dt$.

46. Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et $D : u \in E \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    (a) Vérifier que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
    (b) Donner les éléments propres de l'endomorphisme D.
    (c) Soit F l'espace des suites réelles de carré sommable.
    Montrer que F est stable par l'endomorphisme D.
    (d) On munit F de son produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ usuel.
    Décrire l'ensemble $H = \left\{ \dfrac{\langle u, D(u)\rangle}{\|u\|^2},\ u \in F \setminus \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\} \right\}$.

47. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, $p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

    (a) Vérifier que $\operatorname{Im} p$ est stable par pq et que l'endomorphisme induit est symétrique.
    (b) Montrer que $\ker(pq) = \ker q \oplus (\operatorname{Im}(q) \cap \ker(p))$.
    (c) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \ker q)$ et de $(\ker p \cap \operatorname{Im} q)$.
    (d) En déduire que pq est diagonalisable.
    (e) Montrer que le spectre de pq est inclus dans $[0, 1]$.

48. Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les endomorphismes $f \neq 0$ de E tels que $\mathrm{tr}(f) = 0$, $f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

49. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux antisymétriques de taille au plus 2×2.

50. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = AA^T$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

51. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que : $M^T M = MM^T$. Déterminer $M^T M$ puis M.

52. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq \mathrm{rg}(A) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

53. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Calculer $\max\{\mathrm{tr}(OS)\ ;\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

54. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

    (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.

    (b) On pose $D = CBC$. Montrer que $\det(I_n + D)^{1/n} \geq 1 + \det(D)^{1/n}$.

    (c) En déduire que $\det(A+B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$.

    (d) Est-ce encore vrai si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Analyse

55. (a) Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre :
    (i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
    (ii) l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

    (b) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image réciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé par f est un fermé.
    La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

56. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
    Si $f \in E$, on pose $u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right). \in \mathbb{R}$.

    (a) Montrer que u est bien définie sur E.

    (b) Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

57. Soient $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables et $N : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

    (a) Montrer que N est une norme.

    (b) Soit A l'ensemble des suites de $L^1(\mathbb{R})$ nulle à partir d'un certain rang. Donner l'adhérence et l'intérieur de A. *Ind.* Remarquer que A est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

58. Soient $n \geq 2$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-séparée si, pour tous $x, y \in A$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$, on a $x = y$.

    (a) Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée de K est de cardinal inférieur à $M(\varepsilon)$ et il existe une partie ε-séparée de K de cardinal $M(\varepsilon)$.

    (b) Soit $f : K \to K$. On suppose que, pour tous $x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que f est surjective.

59. Soient $n \geq 2$ et $r \in \{1, \dots, n-1\}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées de taille n et de rang r est-il ouvert ? fermé ? Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{E}$.

60. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'ensemble $\{PAP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.

61. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

62. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$.

63. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On pose
    $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2})$ pour $n \geq 1$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n>0}$

64. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Étudier la convergence de (u_n). Déterminer un équivalent de u_n.

65. Pour $n \geq 2$, on considère l'équation $\sin(x) = \frac{x}{n}$.

    (a) Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]0, \pi[$ qu'on notera x_n.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ converge. Quelle est sa limite ?

(c) Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

66. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X-i)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! r_n \in \left]0,1\right[, P_n'(r_n) = 0.$ et déterminer un équivalent simple de r_n.

67. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$

(a) Montrer que $u_n \to +\infty$.

(b) Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n.

68. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Ind. Montrer que $\tan(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

69. Soit (u_n) une suite réelle telle que $n(u_{n+1}-u_n) \to 1$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

70. Déterminer la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

71. Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

72. Soit $\alpha > 0$ fixé. Nature de la série de terme général $\displaystyle\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$?

73. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

74. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(\ln(t))}{t}\,dt$ et $v_n = \dfrac{\cos\ln(n)}{n}$.

(a) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1}(t-n-1)\frac{\cos\ln(t)+\sin\ln(t)}{t^2}\,dt$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

75. (a) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.

(b) Soit $\sum y_n$ une série à termes complexes telle que, pour toute suite (x_n) qui tend vers 0, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum |y_n|$ converge.

76. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = o(n)$.

(b) Montrer que $\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$ est le terme général d'une série convergente.

(c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}\left(n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}u_k\right)^{1/n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(n!\prod_{k=1}^{n}u_k\right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}u_k.$$

77. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.

78. Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $f'(x)\,P\left(f(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

79. Soient $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et u l'application définie par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1],\ u(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

80. Etudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}$.

81. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t|\cos t|^{t^5}\, dt$.

82. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1\right) dx$.

83. Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan(x/a)}{1+x^2}\, dx$ converge et calculer sa valeur.

84. Soit f une fonction continue par morceaux et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x f$. Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

85. Donner un équivalent, quand $x \to +\infty$, de $\displaystyle\int_1^x t^t \mathrm{d}t$?

86. Trouver une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t} \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

87. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n(1-\sqrt{x})$.
    (a) Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum f_n$.
    (b) Y a-t-il convergence normale sur D ?
    (c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

88. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Domaine de définition, continuité, étude de la dérivabilité, équivalents en 0 et $+\infty$.

89. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(n+x)}$.
    (a) Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
    (b) Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur les segments de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
    (c) Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
    (d) Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n$. Montrer : $f(x_0) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
    (e) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

90. Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 5n + 1}$.

91. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum z^{n+(-1)^n}$.

92. Soit u qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $u(P) : z \mapsto e^{-z} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$. Montrer que u est bien définie, et que c'est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

93. Soient $q \in]-1, 1[$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$.
    Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière

94. Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})\, \mathrm{d}t$ est développable en série entière et en donner les coefficients.

95. Expliciter le développement en série entière de $\ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ au voisinage de 0.

96. Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$.

97. On définit la suite (a_n) par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

    (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

    On pose $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

    (b) Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.

    (c) Expliciter f à l'aide des fonctions usuelles.

98. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2x}$.

    Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais que f n'est pas développable en série entière (on minorera $f^{(n)}(0)$).

99. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de (u_n). Étudier la convergence de la suite (u_n) et de la série $\sum u_n$.

100. Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

    (a) Justifier la convergence de $I_n(\alpha)$.

    (b) Établir une relation entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$. En déduire une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_1(\alpha)$ et de α.

    (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.

    (d) Montrer l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $I_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$.

101. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    (a) On suppose f bornée. Montrer que F est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

    (b) On suppose que f admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$. Donner un équivalent de F en 0^+.

    (c) On suppose f développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et que la série $\sum n! a_n$ converge. Étudier le comportement de $F(1/x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

    (d) Donner des exemples de fonctions f telles que le domaine de définition de F soit $]0, +\infty[$, $]1, +\infty[$ ou $\emptyset$.

102. Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et S l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montrer l'équivalence entre : i) tous les éléments de S sont bornés, ii) a et b sont intégrables.

103. Déterminer les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que $y'(x) = y(\pi - x)$.

104. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\sum_{k=0}^{n} y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

105. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 3z + te^t \\ y' = 3x + 2y + 3z + e^t \\ z' = 3x + 3y + 2z + t^2e^t \end{cases}$

106. (a) Résoudre l'équation : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant des solutions développables en série entière.

    (b) Résoudre : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2}$.

107. Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t+T) = \lambda X(t)$.

108. Étudier la différentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

109. On note T le triangle plein défini par les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Déterminer le minimum sur T de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)$.

110. Soit $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ sinon.

(a) Montrer que f est continue.

(b) Étudier les extrema de f.

111. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme linéaire sur E.

Montrer que l'application $g : x \in E \mapsto f(x)\, e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

112. Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Ind. Utiliser le changement de variable $(u, v) = (x + y,\, 2x + y)$.

113. (a) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, \mathrm{d}t.$

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et

$D = \Big\{\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})\ ;\ \forall (f, g) \in E^2, \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)\Big\}.$

(b) Montrer que la famille $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, avec : $\phi_i : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

(c) Montrer que D est de dimension finie.

114. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X - 2B^T X$.

Montrer que f admet un minimum global et le déterminer.

115. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

(a) Calculer $\underset{\cdot}{\mathrm{g}}$.

(b) Montrer que g admet un minimum.

(c) En déduire que f est surjective.

Probabilités

116. On tire au hasard un élément A de $P(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que Card$A$ soit un entier pair.

117. On lance une pièce jusqu'à obtenir deux piles de plus que de faces ou deux faces de plus que de piles. On note $p \in\,]0, 1[$ la probabilité que la pièce donne pile. On note X la variable aléatoire associée au nombre de lancers. Déterminer la loi de X et montrer que X est presque sûrement finie. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ?

118. On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.

(a) Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \ldots, 2n - 1$.

(b) Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

119. On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être un garçon. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de filles est X.

(a) Montrer que : $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = G_Z\left(\dfrac{1+t}{2}\right)\cdot$

(b) Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

120. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X_m = \min\big\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket,\ \sigma(k) \geq m\big\}$ et $Y_m = \max\big\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket,\ \sigma(k) \geq m\big\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m, et leur espérance.

121. Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et Y le reste de la division euclidienne de X par b. Déterminer la loi de Y.

122. Soit $p \in\,]0, 1[$. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant :

$\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $p = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\max_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(S_{2n} = k) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0).$

123. Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes telles que A suive la loi de Rademacher, et B et C la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette deux racines réelles distinctes.

(b) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ admette une unique racine réelle.

(c) Calculer la probabilité que le trinôme $AX^2 + BX + C^2$ n'admette aucune racine réelle.

(d) Cette dernière probabilité peut-être égale à $\frac{1}{2}$? Dans ce cas, donner une valeur approchée de p à 10^{-1} près.

124. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, d'espérance $\mathbf{E}(X) = m$.

(a) Montrer que $\mathbf{V}(X) \leq (m - a)(b - m)$.

(b) Montrer que cette inégalité est optimale.

125. Caractériser les couples (X, a) avec X variable aléatoire discrète complexe et $a \in \mathbb{C}$ tels que $X \sim aX$.

126. Soit $\alpha > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi de probabilité $\mathbf{P}_\alpha$ définie par $\mathbf{P}_\alpha(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha) n^\alpha}$ pour $n \geq 1$.

(a) Calculer $\mathbf{P}_\alpha(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.

(b) On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que les $p_k\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants.

(c) En déduire la formule d'Euler $\zeta(\alpha) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}$.

127. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose : $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.

(a) Étudier la monotonie des suites (α_n) et (β_n).

(b) Exprimer α_n en fonction de n.

(c) Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent simple.

128. Soient $p, q \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

129. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) < +\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.

(a) Montrer que F_X est bien définie (à valeurs réelles) et continue.

(b) Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, dt$.

(c) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X + Y}\right)$.

(d) Généraliser à m variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

130. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geq 0,\ S_k = -n)$ et $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

(a) Exprimer $\mathbf{P}(\exists k > 0,\ S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et de p_2.

(b) Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.

(c) En déduire la valeur de p_n.

131. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geq x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(b) On suppose que $\mathbf{E}(X) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geq x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = |\{X_1, \ldots, X_n\}|$.

(d) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ lorsque les X_i suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

(e) Dans le cas général, montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$.

132. (a) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que, si $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}(e^{tS}) \leq \exp\left(-\dfrac{nt^2}{2}\right)$. En déduire que, si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathbf{P}(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

(b) Généraliser en supposant cette fois $(X_1, \dots, X_n)$ une famille i.i.d. de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[-1, 1]$

133. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. possédant un moment d'ordre 4. On pose : $m = \mathbf{E}(X_i)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_i - m)^4)$.

(a) Justifier la bonne définition (dans $\mathbb{R}$) de m et V_4.

Pour $\epsilon > 0$, on pose : $A_n^\epsilon = \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right| \geq \epsilon\right)$.

(b) Montrer que $\mathbf{P}(A_n^\epsilon) \leq \frac{3V_4}{n^2\epsilon^4}$.

(c) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p^\epsilon\right) = 0$.

(d) Montrer que $\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m\right) = 1$.

Centrale – MP-MPI

Algèbre

134. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

(c) Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.

135. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n et $P_n = \prod_{p\in\mathcal{P}(n)} p$.

(a) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\binom{2n+1}{n} < 4^n$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1} < 4^n P_{n+1}$.

136. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.

(a) Donner la définition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.

(b) Montrer que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

(c) Montrer que G possède un sous-groupe V d'ordre 4 et préciser les automorphismes de V.

137. Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3\ [4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x = y^2\}$.

(a) Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat. Montrer que $-1 \notin C$.

On pose $\pi_x = \prod_{y\in C\setminus\{x\}} (x+y)$ pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{x\neq y\in C} (x+y)$.

(b) Déterminer le cardinal de C.

(c) Montrer que $\forall x \in C \setminus \{0\}$, $\pi_x = \pi_1$.

(d) Calculer π.

138. Soit A un anneau commutatif. On dit que A est noethérien lorsque tous ses idéaux sont engendrés par une partie finie de A.

(a) Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils noethériens ?

(b) Montrer que A est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

(c) Soit A un anneau non commutatif. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche de A lorsque $\mathcal{I}A \subset \mathcal{I}$ (définition similaire pour un idéal à droite). Soit A noethérien, c'est-à-dire que tous les idéaux, à droite ou à gauche, de A sont de type fini. Montrer que l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite, i.e. $\forall a \in A$, $\Big(\exists b \in A,\ ab = 1 \iff \exists b \in A,\ ba = 1\Big)$.

Ind. Considérer $\varphi : x \mapsto ax$.

139. (a) Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab ?

(b) Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

(c) Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

140. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes réels définie par $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

   (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, \forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

   (b) Montrer que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

   (c) Montrer que, pour $n \geq m$, $2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
   On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)P'^2 = n^2(1 - P^2)$.

   (d) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et $-T_n$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

   (e) Montrer que tout polynôme solution de (E) est de degré n, puis déterminer les polynômes solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

141. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et $b_1 < b_2 \cdots < b_p$ des réels et $M = (e^{a_ib_j})_{1\leq i,j\leq p}$.

   (a) Montrer que pour des réels $c_1, \ldots, c_p$ non tous nuls la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_ie^{a_ix}$ s'annule au plus $p - 1$ fois sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k - 1$ pour tout k.

   (c) Montrer que M est inversible, puis que $\det M > 0$.

142. (a) Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\mathrm{Com}\, A$, A et $\det A$.

   (b) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ dans tout autre cas. Calculer le déterminant de A.

   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$ pour tout i. Montrer que A est inversible.

   (d) Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

143. (a) Énoncer et démontrer la caractérisation du rang par les matrices extraites.

   (b) Soit $\Omega_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(_K)$ telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice $M_k := (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ soit inversible. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   (c) Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $\Omega_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M = LU$ avec U triangulaire supérieure inversible et L triangulaire inférieure inversible.

144. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

   (a) Donner la définition du polynôme minimal π_A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

   (b) Calculer $\det(A)$ et A^2.

   (c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\ker(A) = \ker(A^2)$. Donner une condition sur les $a_1, \ldots, a_n$ pour que A soit diagonalisable.

145. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note E_i ses sous-espaces propres et $n_i = \dim E_i$.

   (a) Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.

   (b) Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) g commute avec f, **ii)** pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $g(E_i) \subset E_i$.
   En déduire que la dimension du commutant de f est $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} {n_i}^2$.

   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la dimension du commutant de A est supérieure ou égale à n.

146. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \displaystyle\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{tr}\,(A^n)|}$.

   (a) Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.

   (b) Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.
   On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adhérence de u_n.

147. Soit E un espace euclidien. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Rappeler l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation.

(b) Montrer l'équivalence suivante :
i) $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\langle x, y\rangle,$
ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle s(x), s(y)\rangle = 0$

148. (a) Montrer que $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 x^k P(x)\,\underset{\cdot}{x} = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.

(b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, puis que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geq n^2$.

149. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On note $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \det M \geq \alpha\}$. Le but de cet exercice est de s'intéresser, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, à la quantité $m_\alpha(A) = \inf\limits_{M \in S_\alpha} \operatorname{tr}(AM)$.

(a) Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Rappeler le théorème spectral.
Justifier l'existence de $m_\alpha(I_n)$ puis la calculer.

(b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$. Prouver l'unicité puis calculer $m_\alpha(A)$.

(c) Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$?

150. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ et de trace nulle.
On suppose que $A2 + A - (d-1)I_n = J_n$, J_n étant la matrice dont tous les coefficients valent 1.

(a) Montrer que chaque ligne de A contient d coefficients égaux à 1.

(b) Montrer que le vecteur $U = (1, \cdots, 1)^T$ est propore pour la valeur propre d. En déduire que $n = d^2 + 1$.

(c) Montrer que la multiplicité de d est égale à 1.

(d) Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines de $X^2 + X - d + 1 = 0$.

(e) Montrer qu'il existe deux entiers naturels m_1, m_2 tels que $m_1 + m_2 = n - 1$ et $m_1 r_1 + m_2 r_2 = d = 0$ avec r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation précédente.

(f) Montrer que si $m_1 = m_2$ alors $d = 2$. On suppose $d > 2$ dans la suite.

(g) Montrer qu'il existe un entier k tel que $4d - 3 = (2k+1)^2$ puis que $k^4 \equiv 1\ [2k+1]$.

(h) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $16k^4 \equiv 1\ [2k+1]$. En déduire qu'on a forcément $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.

151. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique définie positive avec $A_1 \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A_1 et A_2 sont définies positives.

(b) Montrer qu'il existe R_1 et R_2 symétriques définies positives telles que $R_1^2 = A_1$ et $R_2^2 = A_2$.

(c) Montrer que $\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2)$.

152. On considère la relation binaire pour $(A,B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$.

(c) Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.

(d) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \implies B^{-1} \preceq A^{-1}$.

Analyse

153. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel fermé strict de E et $\delta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u de E tel que $d(u,F) \geq \delta$.

154. Soient (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés.
Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|, ..., |p_d|)$.

(a) Vérifier que l'application $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

(b) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$.
Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.
Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leq \|P\| + 1$.
En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

155. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.
(a) On suppose A fermé. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
(b) Soient $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E et $\delta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire vérifiant $d(x, F) \geq \delta$.
(c) On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés. Montrer que la sphère unité n'est pas un compact de E.

156. Soient $(E, \|\ \|)$, $(E', \|\ \|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A un fermé non vide de E, B une partie non vide de E'. Soit $f : A \to B$ continue bijective telle que l'image réciproque par f de toute partie bornée de B est bornée. Montrer que f^{-1} est continue.

157. Un espace normé réel est dit séparable lorsqu'il contient une partie dénombrable dense.
(a) L'espace $\mathbb{R}$ est-il séparable ?
(b) Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
(c) Soit E un espace préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_{n\geq 0}$ soit dense dans E.

158. Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la primitive de f d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.
(a) Justifier la définition de φ puis établir qu'il s'agit d'une application linéaire sur E.
On munit E de la norme $\|\ \|_\infty$ sur $[0, 1]$.
On note $\|\varphi\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{\dfrac{\|\varphi(f)\|_{\infty,[0,1]}}{\|f\|_{\infty,[0,1]}},\ f \in E \setminus \{0_E\}\right\}$.
(b) Montrer que $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$ est correctement définie et en trouver un majorant.
(c) Soient $f \in E$ et G la primitive de $F = \varphi(f)$ nulle en 0. Établir que, pour tout $x > 0$, $G(x) = xF(x) - \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t$.
(d) Déterminer la norme $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

159. Soient (a_n) une suite à termes réels positifs et (b_n) une suite à termes complexes. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge et que $b_n \sim a_n$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.
(a) Montrer que la série $\sum b_n$ diverge et que les sommes partielles des deux séries sont équivalentes.
(b) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\dfrac{S_n}{na_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n^2 a_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k$.

160. (a) Rappeler la règle de d'Alembert pour une série numérique à termes positifs.
(b) On considère une suite croissante $(q_n)_{n\geq 1}$ d'entiers ≥ 2.
(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{q_1 \cdots q_n}$?
(d) Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire alors le réel $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_n}$ appartient à $\mathbb{Q} \cap]0, 1]$.
(e) On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e, $\mathrm{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
(f) *difficile.* Montrer la réciproque admise ci-dessus.

161. Soit $I =]-1, +\infty[$. On dit que $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ vérifie $(*)$ si et seulement si :
$\forall x, y \in I,\ f(x) + f(y) = f(x + y + xy)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{(n+2)(2n+1)}$ et $y_n = \dfrac{n}{n+1}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

(a) Simplifier $x_n + y_n + x_n y_n$. Montrer que la série de terme général $f(x_n)$ converge et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ en fonction de $f(1)$.

(b) Montrer que f est dérivable.

(c) Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.

162. (a) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que g est strictement monotone.
On cherche les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) = 2g(x) - x$.

(b) Montrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.

(c) Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.

163. (a) Rappeler la définition d'une fonction lipschitzienne. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue. Soient $\alpha \in]0, 1]$ et
$H_\alpha = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, \exists L > 0,\ \forall (x, y) \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha\}$.

(b) Montrer H_α est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $H_\beta \subset H_\alpha$. Vérifier que $x \mapsto x^\alpha \in H_\alpha$.

(c) Montrer que, pour $0 < \alpha < \beta \leq 1$, H_β est strictement inclus dans H_α.

(d) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \subset H_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et que ces inclusions sont strictes.

164. (a) Soient a, b dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et en b. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2 - 1)^{2n}} f(x)$. Quel est le degré de P_n ?

(c) Combien $f^{(n)}$ a-t-elle de zéros ?

165. (a) Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation à l'aide des dérivées successives du polynôme.

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P à l'aide des racines de P.

(c) Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0, r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}\, \mathrm{d}t$.
Montrer que $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans le disque $D(0, r)$.

166. Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2 < \infty$. Soit $f \in E$. On pose $\|f\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on définit l'application Tf par : $Tf(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $Tf(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$.

(a) Rappeler le théorème concernant la dérivabilité des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$.

(b) Montrer que Tf est continue.

(c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $Tf(x)^2 \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)^2\, \mathrm{d}t$.

(d) Soit $A > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^A Tf(x)^2\, \mathrm{d}x \leq 2\int_0^A \frac{f(x)}{x}\left(\int_0^x f\right) \mathrm{d}x$.
En déduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$ $(*)$.

(e) Montrer que la constante 2 est optimale dans l'inégalité $(*)$. On pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

167. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ croissante telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$ avec $a > 0$.

(a) Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.

(b) Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\, e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.

(c) (difficile) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

168. Soient $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geq 2$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.

(a) Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose $\alpha \geq \beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

169. On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)\,\mathrm{d}t$ et $a_0 = 1$.

(a) Montrer que le rayon de convergence R est ≥ 1.

(b) Calculer $S(x)$ pour $|x| < 1$ puis montrer que $R = 1$.

(c) Déterminer un équivalent de a_n.

170. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de carré sommable et $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n-t}$.

(a) Préciser le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

(c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$ alors la suite (a_n) est nulle.

171. (a) a Rappeler la définition d'une fonction f développable en série entière en 0 et préciser une expression de $f^{(k)}(0)$ en fonction des coefficients pour $k \in \mathbb{N}$.

(b) b Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour laquelle il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.
Montrer que f est développable en série entière en 0.

(c) c Soit f une fonction développable en série entière en 0. Montrer l'existence de $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.

172. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]-r, r[$, $\det(\mathbf{Id} - tu) = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^k \operatorname{tr}(u^k)}{k}\Big)$.

173. (a) Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.

(b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.
Même définition lorsque f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note, pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.
Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \dfrac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$.

(c) En déduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité $\exp(M) = \dfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1}\,\mathrm{d}z$.

174. (a) Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.

(b) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
Montrer que $\nabla(\det)(A) = \operatorname{Com}(A)$.

(c) Quel est le coefficient de X dans χ_A ?

(d) Déterminer l'espace tangent à $\mathbb{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

175. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

(a) Montrer que J est strictement convexe.

(b) Montrer que $J(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

(c) En déduire que J admet un minimum.

(d) Calculer ∇J et conclure quant au minimum de J.

176. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

(a) Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.

(b) On définit la fonction $d_F : E \setminus F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Probabilités

177. On note d_n le nombre de dérangements de n objets, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

(b) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!}\, t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
On note $D(t)$ la somme de cette série.

(c) Calculer $e^t D(t)$.

(d) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

(e) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ soit un dérangement.

178. Pour $A_1, ..., A_n$ parties finies d'un ensemble E, on admet que
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|.$$

(a) Expliciter la formule précédente pour $n = 2$ et $n = 3$.
La démontrer pour $n = 2$.

(b) On définit une fonction μ sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ si l'entier $n \geq 2$ s'écrit $n = p_1 ... p_k$ où $p_1, \ldots, p_k$ sont k nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ sinon.
Calculer la probabilité que deux entiers choisis aléatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ soient premiers entre eux à l'aide de la fonction μ.

179. (a) Rappeler les formules des probabilités totales et composées.
On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geq 2,\ U_n \in \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}\}$.

(b) Quelles sont les valeurs prises par N_d ?

(c) Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k (d-k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.

(d) Pour tout réel $x > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{d \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.

180. (a) Soient $x > 0$ et X_x une variable de Poisson de paramètre x. Calculer l'espérance de X_x. Montrer que $\mathbf{P}(|X_x - \mathbf{E}(X_x)| \geqslant \varepsilon x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$.

(b) Déterminer le domaine de définition de u_α.

(c) Déterminer u_1 et u_2.

(d) Montrer que, pour tout $\alpha < 0$, $u_\alpha(x) = o\left(\mathrm{e}^x\right)$ quand $x \to +\infty$.

(e) Montrer que, si $\alpha \in]-1, 0[$, $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$ quand $x \to +\infty$.

Algèbre

181. [CCINP]

 (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer que, si a divise c et b divise c alors ab divise c.

 (b) Trouver une solution de $(*)$: $x \equiv 6\,[17]$ et $x \equiv 4\,[15]$.

 (c) Trouver toutes les solutions de $(*)$.

182. [IMT] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(X-1)^n Q(X) + X^n P(X) = 1$.

 (a) Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(P_0, Q_0) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ dans $\mathcal{S}$.

 (b) Déterminer $\mathcal{S}$.

183. [St Cyr] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 dont les racines z_1, z_2, z_3 sont les affixes de points M_1, M_2, M_3 d'un plan affine euclidien. Montrer que P' a une racine double si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

184. [CCINP] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$, $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i$.

 (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(x_i^2)$, puis que $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$.

 (b) Quelles sont les valeurs possibles de σ_1, σ_2, σ_n ?

 (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 3$.

 (d) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

185. [CCINP] On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

 (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda\mathbf{Id}$ et celui de $(L - \lambda\mathbf{Id})^2$.

 (b) On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant :
 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = \dfrac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \dfrac{7}{2}u_{n+1} + u_n.$

 (c) Montrer que $F = \ker(2L - \mathbf{Id}) \oplus \ker(L + 2\mathbf{Id}) \oplus \ker(L - \mathbf{Id})^2$.

 (d) Déterminer la dimension de F et une base de F.

186. [CCINP] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

 (a) Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.

 (b) Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

187. [IMT] Calculer $\Delta_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

188. [IMT] La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

189. [St Cyr] *(avec Python)* '

 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.

 (b) Programmer une fonction Python `puissance`(n) renvoyant A^n.

(c) Déterminer α_n et β_n grâce à cette fonction.

(d) Tracer $n \mapsto \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$. Conjecture ?

(e) Prouver cette conjecture.

190. [IMT] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible, que B est nilpotente et que A et B commutent.

(a) Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

(b) Si A et B ne commutent pas, montrer qu'alors $A + B$ n'est pas forcément inversible.

191. [IMT] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.

192. [IMT] Soient P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. Écrire la matrice dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D.

193. [IMT] Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $u^k(x) \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ est libre.

194. [IMT]

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, u et v deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.

(b) Montrer que la composée de n endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux est nulle.

195. [Navale] Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes non nuls vérifiant $\forall i, j \in [\![1, n]\!], p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, δ désignant le symbole de Kronecker.

(a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, sont en somme directe.

(b) Montrer que les p_i sont de rang 1.

196. [IMT] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^3) \geqslant 2\mathrm{rg}(f^2)$.
Ind. Utiliser le théorème du rang pour les restrictions de f à $\mathrm{Im}(f)$ puis $\mathrm{Im}(f^2)$.

197. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que AB est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0, 9, 9)$. Calculer le rang de BA et déterminer BA.

198. [CCINP] Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

(a) Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + \mathbf{Id})$.

(b) Montrer que u n'est pas injective, puis que $\mathrm{rg}(u) = 2$.

(c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

199. [IMT] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & 1 & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.

200. [IMT] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$. On suppose l'existence d'une telle matrice. Trouver un polynôme annulateur simple de B. Conclure.

(c) Montrer que A est semblable à C.

201. [CCINP] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X - a)(X - b)P' - nXP$.

(a) Montrer que $u \in (\mathbb{C}_n[X])$.

(b) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.

(c) c Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.

202. [IMT] Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

(a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p$, $A + \dfrac{1}{k} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

203. [IMT] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de vecteur propre.

(a) Montrer que $\chi_u(u) = 0$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

(b) On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Calculer $\det_e(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$.

204. [IMT]

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A admet-elle toujours une valeur propre ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + I_n = 0$. Que dire du spectre réel de A ? du spectre complexe ?

205. [CCINP]

(a) Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0)$, $\lim\limits_{+\infty} \chi_A$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

206. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $4A^3 + 4A^2 + A = 0$.

(a) Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Qu'en déduire sur la matrice A ?

207. [IMT] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = A^3 + A + I_n$.

(a) On suppose que A est diagonalisable, à valeurs propres réelles. Montrer que A est un polynôme en B.

(b) Est-ce encore vrai si les valeurs propres de A sont complexes ?

208. [IMT]

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

209. [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

(a) Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{Sp}\, M^T$.

(b) Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}\, A$.

(c) Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

210. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}$, $(M, A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ telles que $A + B = I_n$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

(a) Déterminer $M^2 - (\lambda + \mu)M + 2\lambda\mu I_n$.

(b) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

(c) Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.

(d) La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

211. [IMT] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $\Phi_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Quels sont les éléments propres de ϕ_u ?

(b) Montrer que ϕ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

212. [IMT] (difficile)
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour laquelle qu'il existe $n \geq 1$ telle que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

213. [CCINP] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

214. [St Cyr] avec python

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. On note U l'application qui à un polygone P constitué de n points $M_1, \ldots, M_n$ du plan complexe associe le polygone :
$\dfrac{M_1 + M_2}{2}, \ldots, \dfrac{M_{n-1} + M_n}{2}, \dfrac{M_n + M_1}{2}$.

(a) Écrire une fonction Python calculant $\texttt{U}(P)$.

(b) L'application U est visiblement linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice stochastique que l'on notera M.

(c) Montrer que les valeurs propres de M sont de module au plus égal à 1.

(d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

215. [IMT] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (E) l'équation $AM = MB$.

(a) On suppose que (E) admet une solution $M \neq 0$.
Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(B)$. Montrer que A et B admettent une valeur propre commune.

(b) Établir la réciproque.

216. [IMT]

(a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_i)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que u soit diagonalisable et la démontrer.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$. Est-il possible d'avoir simultanément $Q = (X-1)(X^2+1)$ annulateur de f et $\mathrm{Tr}(f) = 0$?

(c) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ tel que $Q(g) = 0$. Calculer $\det(g)$.

217. [CCINP]
Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M)I_n$.

(a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

(c) Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ.

(d) Déterminer $\mathrm{tr}\,\phi$ et $\det \phi$.

(e) L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1}.

St Cyr Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.

(b) Décrire les éléments propres de ϕ.

218. [CCINP] Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $U = (a^{j-i})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à U.

(a) Déterminer le rang de u et son déterminant.

(b) Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.

(c) Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.

(d) Étudier la diagonalisabilité de u.

(e) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U.

(f) Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.

219. [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

(a) Montrer que M admet une unique valeur propre de la forme $ik\pi$. Préciser k.

(b) Montrer que M est triangulaire supérieure.

(c) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.

220. [IMT] Soit $A \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.

(a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur. Donner son noyau et son image.

(b) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.

221. [IMT] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer l'existence et calculer I_n.
Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$ (polynôme de Laguerre).

(c) Montrer que L_n est un polynôme de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

(d) d Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire défini en

(e) b.

222. [IMT] On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

Soient $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$.

(b) Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels puis que $\left\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t}\right\}$ est une base de W.

(c) Montrer que V et W sont orthogonaux.

(d) Calculer $p_W(f)$ le projeté orthogonal de $f \in E$ sur W.

(e) Montrer que V et W sont supplémentaires.

223. [CCINP] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|v(x)\| \leq \|x\|$.

(a) Montrer que $\ker(v - \mathbf{Id}) \oplus \mathrm{Im}(v - \mathbf{Id}) = E$.

Ind. Considérer l'application $t \mapsto \|x + ty\|^2 - \|v(x + ty)\|^2$.

(b) Soit, pour $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$, $w_p(x) = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} v^k(x)$.

Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_p(x))$ converge. Déterminer sa limite.

224. [CCINP] On note $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$.

(b) Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2\, \mathrm{d}t$ soit minimal :

– en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$;

– en recherchant a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

225. [IMT] Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2\, \mathrm{d}t$.

226. [CCINP] On définit trois fonctions sur le segment $[0,1]$: $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$, et on note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_0, f_1, f_2)$.

(a) Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

(b) Trouver une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.

(c) Trouver a et b tels que la distance de f_2 à $t \mapsto at + b$ soit minimale.

227. [St Cyr] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique c'est-à-dire telle que $\forall (x,t) \in [0,1]^2, K(x,t) = K(t,x)$. Soit u l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

On admet le théorème de Fubini :

$\forall \phi \in \mathcal{C}^0([0,1]^2, \mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x,t)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

(b) Montrer que u est autoadjoint : $\forall f, g \in E$, $\langle f, u(g)\rangle = \langle u(f), g\rangle$.

(c) Montrer que u est continu.

228. [St Cyr] Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que les matrices M_t sont diagonalisables et trouver une base de vecteurs propres indépendante de t.

(b) Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective. Montrer que $\theta(t+t') = \theta(t)\theta(t')$.

(c) Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{b}$ sa base canonique, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $q : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Montrer que, si $q \circ f = q$, alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{b}}(f)$ vérifie $(*)$: $M^T JM = J$. Montrer que les matrice M_t, avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$ et trouver toutes les matrices vérifiant $(*)$.

229. [St Cyr]

(a) Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt.

(b) On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

230. [CCINP] Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants. Soit $u : x \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme symétrique.

(b) Déterminer son noyau.

(c) Déterminer les éléments propres de u.

231. [CCINP]

Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^T A$.

(b) Sans utiliser χ_A, trouver les valeurs propres de A et les multiplicités associées.

(c) Calculer π_A et χ_A.

(d) Trouver $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.

(e) Trouver le commutant de A.

232. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AA^T + 2A^T + I_n = 0$. Déterminer A.

233. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

(b) Que dire si $A = A^T$?

234. [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base orthonormale de diagonalisation de A.

235. [CCINP] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \le i \le n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(a) Quel est le rang de A ?

(b) Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

(c) Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique.

236. [CCINP] Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

(a) Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.

(b) Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.

(c) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.

237. [IMT]

(a) Soit $q \in \mathbb{N}$. On pose $I_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^q e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que I_q est bien définie et que $I_q = q!$.

(b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

(c) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\phi(P) = XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\langle\phi(P), Q\rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique.

238. [CCINP] Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

(a) On suppose que $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$. L'endomorphisme u est-il nécessairement nul ?

(b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : i) $u \circ u^* = u^* \circ u$,
ii) $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$, iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

239. [IMT] Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^{2022} = A^{2024}$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} {a_{i,j}}^2 = \mathrm{rg}(A)$.

240. [St Cyr] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E. On note $G = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$.

(a) Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(b) Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = A^T A$.

(c) En déduire que le rang de G et égal à celui de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

241. [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

(a) Trouver $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $P(A) = 0$. Que dire sur A et $\mathrm{Sp}(A)$?

(b) On suppose, pour cette question seulement, que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $A - I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(c) On prend $n = 3$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

242. [CCINP] Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

(a) Soient $\lambda \in sp(u)$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

(b) Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

(c) Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.

(d) Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est symérique.

243. [CCINP] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, f un endomorphisme autoadjoint de E, a sa plus petite valeur propre et b sa plus grande valeur propre.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2$.

(b) Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = k$ si $i = j$, $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.
Montrer que la plus grande valeur propre b de A vérifie $k + 2 \geqslant b$.

Analyse

244. [St Cyr] Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, avec usuellement $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2}$.

(a) Que dire de I si F est de dimension 1 ?

(b) Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1, +\infty[$.

(c) On suppose F de dimension finie. Montrer que I est fermé.

245. [IMT] On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.

(b) Montrer que N et N' sont équivalentes. *Ind.* Exprimer f en fonction de $g = f + f'$.

246. [IMT] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout vecteur $x \in E$, la suite $(\|x - u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

247. [IMT] Soit E le plan euclidien.

(a) L'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 = 1\}$ est-il un fermé de E ?

(b) Donner la définition d'une partie connexe par arcs.

(c) Montrer que le cercle de centre 0 et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

(d) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée est un segment.

248. [IMT] Soit N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\Big) = \max_{0\le i\le n} |a_i|$

(a) Montrer que N est une norme.

(b) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$. Pour quelles valeur de a, l'application ϕ est-elle continue pour la norme N ?

249. [CCINP] On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \sum_{k\ge 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$.

(a) Montrer que l'on définit ainsi une norme de E.

(b) Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.

(c) Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.

(d) Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_{n\ge 0}$, avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}^k X^k$.

(e) Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

250. [IMT] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin(\frac{b}{n}) \\ \sin(\frac{b}{n}) & \cos(\frac{a}{n}) \end{pmatrix}^n$.

251. [IMT] Soient E un espace euclidien et $\mathcal{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.

(a) Montrer que : $p \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \le \|x\|$.

(b) Montrer que $\mathcal{K}$ est un compact.

252. [IMT] Montrer la convergence des suites (x_n), (y_n), (z_n) définies par leurs premiers termes respectifs x_0, y_0, z_0 et les relations, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{4},\ y_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4},\ z_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2}.$

253. [St Cyr] (avec python)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

(a) Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0, +\infty[$. On la note x_n.

(b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.

(c) (Python) Ecrire un programme qui renvoie une valeur approchée de x_n à ϵ près obtenue par dichotomie.

(d) (Python) Afficher les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.

(e) Démontrer la conjecture.

254. [St Cyr] avec python Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a une unique racine réelle positive que l'on notera a_n.

(b) Écrire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de a_n.

(c) Afficher un graphe représentant les 20 premières valeurs de la suite (a_n). Conjecturer la nature de (a_n).

(d) Montrer la convergence de (a_n) et déterminer sa limite.

255. [IMT] On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

(a) Discuter la continuité de f.

(b) Tracer le graphe de f.

(c) On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Etudier la monotonie et la convergence de (x_n).

256. [Ecoles militaires]

(a) Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$ tel que
$m \ln\left(1 + \frac{x_m}{m+1}\right) = x_m$.

(b) Étudier la suite $(x_m)_{m>1}$.

257. [IMT] Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$

258. [IMT] Nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$?

259. [IMT] Nature de la série $\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$?

260. [IMT] On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

(a) Montrer que (u_n) converge vers 0.

(b) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge vers une limite non nulle.

(c) Déterminer un équivalent de u_n. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

261. [IMT] On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

262. [St Cyr] Pour un entier n, on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5.

(a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{n(n+1)}$ converge.

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}$. Déterminer S_{5n} en fonction de termes de la suite (H_p), lorsque $H_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}$.

263. [IMT] On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$, $v_n = (-1)^n u_n$, $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Justifier l'existence de u_0 et w_0.

(b) Déterminer les limites de (u_n) et de (w_n).

(c) Nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$?

264. [St Cyr] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et majorée. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

(a) Montrer que f est convexe.

(b) Montrer que f' est négative.

(c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.

(d) Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.

(e) Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est négative.

(f) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

265. [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$.

(a) Étudier les variations de f et tracer son graphe.

(b) Donner un équivalent de f en 0.

266. [IMT] Soit $f : x \in [-1/3, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$. Etudier f et donner son graphe.

267. [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\ln(1+t)}{t} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et exprimer sa dérivée.

(b) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1[$. Est-elle est dérivable en 1 ? Pourquoi ?

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

268. [IMT] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{3 + \cos^2 u}$. Calculer $\phi(x)$.
Ind. Utiliser le changement de variable $v = \tan u$.

269. [St Cyr] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et concave.

(a) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ x\, f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x$.

(b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 x\, f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

270. [IMT] On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathbf{Id}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$.

(a) Etudier la convergence simple de (u_n).
(b) La convergence est-elle uniforme ?

271. [St Cyr] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$ et $f_0(x) = 0$.
    (a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n).
    (b) Montrer que les résultats restent valides pour une fonction f seulement lipschitzienne.

272. [CCINP] On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $g_n(t) = e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.
    (a) Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $|g_n'(t)| \leq \dfrac{e^t}{n}$.
    (b) Montrer que : $\forall (t,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$, $\left|e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leq \dfrac{t}{n}$.
    (c) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $G_n : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x g_n(t)$ ṭ.

273. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$.
    (a) Etudier la convergence simple de (f_n).
    (b) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?
    Indication Considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
    (c) Soit $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?
    (d) Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) g(t) \mathrm{d}t = g(0)$.
    Ind. Utiliser $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} [f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)]\, \mathrm{d}t - g(0)\right|$.

274. [IMT] Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x\sqrt{x}}$.
    (a) Montrer que f admet un prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
    (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f\left(\dfrac{n}{x}\right) f(xn)$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

275. [IMT] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.
    (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
    (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) x$.
    (c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est sa limite en $+\infty$?
    (d) Dresser le tableau de variation de f.

276. [CCINP] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.
    (a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
    (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.
    (c) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

St Cyr Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$.

St Cyr Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

(b) Étudier la continuité de la somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

(c) Donner un équivalent de f en 0^+.

277. [CCINP] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

(a) Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$. Calculer $S(1)$ et en déduire $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$.

(b) Montrer que $S(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to 0$.

(c) Montrer S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

278. [IMT] Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

279. [CCINP] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est ≥ 1.

(b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

(c) Donner un équivalent simple de I_n.

(d) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

280. [CCINP]

(a) Etudier la convergence simple de la série entière $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?

(b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

(c) En déduire la valeur de $\lim_{x\to 1^-} (1-x)S(x)$.

281. [CCINP] Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $+\infty$.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que si f est bornée alors f est constante.

282. [IMT] On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.

(a) Montrer que I_n est bien définie.

(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

(c) Nature de la série $\sum I_n$?

283. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

(a) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.

(c) On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. Étudier la convergence de la suite (u_n). *Ind.* Poser $v_n = \ln(u_n)$.

(d) Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

284. [IMT] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\mathrm{d}x$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

(b) Donner un équivalent simple de I_n.

(c) Nature et somme éventuelle de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

285. [IMT] Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$ par deux méthodes :

(a) à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus

(b) à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.

286. [IMT] Soit $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$. En déduire F.

287. [CCINP] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.

(c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t}\mathrm{d}t$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

288. [CCINP] On pose $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que G est bien définie pour $x > 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{y} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(n+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big(\int_0^{n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\Big)$.

(c) On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1) - H(n) - \dfrac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de $G(n)$.

289. [Ecoles militaires] Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

(a) Exprimer $G(x)$ en fonction en fonction de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

290. [IMT] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t$.

(a) Donner le domaine de définition de F.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

291. [CCINP]

(a) Soient $a, b > 0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \dfrac{1}{au^2+b}$.

(b) Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$.

(c) Soit $x : x \in]1, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\cos(t) + x)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.

(d) En déduire une expression de f.

292. [IMT] On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Exprimer f''.

(d) En déduire des expressions de f' et f avec des fonctions usuelles.

293. [IMT] Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \mathrm{d}t$.

(a) a Montrer que F est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

(b) b Montrer que $F(n+2) = \dfrac{n+1}{n+2}F(n)$. Calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$.

(c) c Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

294. [IMT] Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k}$.

295. [IMT] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $\sum u_n$. Calculer sa somme.

296. [IMT] Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t^2)}{t} \mathrm{d}t$

(a) Montrer que I est bien définie.

(b) Montrer que $I = -2\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1+t^4} \mathrm{d}t$

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

297. [IMT] Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2} \,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

298. [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1}$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I_n existe.

(b) Montrer que $I_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{e}^{-knx}\,\mathrm{d}x$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

299. [IMT] On recherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (1) :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$.

(a) Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.

(b) Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(E) : y'' + y = 0$.

(c) Résoudre (E).

(d) À l'aide du théorème de Cauchy, trouver toutes les solutions de (1).

300. [St Cyr] On note (E) l'équation différentielle $t^2y'' - 2y = 3t^2$.

(a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) de la forme $t \mapsto t^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une base de l'espace des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

301. [IMT] Soit (1) l'équation différentielle $xy' + y = \mathrm{e}^x$.

(a) Trouver les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0.

(b) Les solutions de (1) sur $]0,+\infty[$ sont-elles toutes développables en série entière au voisinage de 0 ?

(c) Résoudre (1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Discuter suivant I.

(d) On ajoute à l'équation (1) la condition $y(x_0) = y_0$ (avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) pour obtenir un problème numéroté (2). Que dit le théorème de Cauchy à propos du problème (2) si on travaille sur $]0,+\infty[$? Résoudre (2).

(e) Représenter graphiquement la ou les solutions développables en série entière.

302. [CCINP] On recherche les fonctions $x, y, z, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système $\begin{cases} x' &= x + 2y - 2z \\ y' &= x - y + u \\ z' &= x - z + u \\ u' &= 2y - 2z + u \end{cases}$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

(b) Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Résoudre le système différentiel.

303. [CCINP]

(a) Déterminer les extrema de $f : (u, v) \in [0, 1]^2 \mapsto uv(1 - u - v)$.

(b) Soit (A, B, C) un triangle d'aire égale à 1. Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.

304. [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.

(a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^T + H$.

(b) Déterminer $\ker(\mathrm{d}f_{I_n})$.

(c) En déduire que l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Probabilités

305. [St Cyr] On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leq n \leqslant N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Retrouver l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1 + N_2}{n}$.

(c) (Python) Définir une fonction `Hypergeom`(N_1, N_2, n) qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de X.

(d) Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n.

(e) (Python) Définir une fonction `Moyenne`(N_1, N_2, n, k) qui reproduit k expériences et renvoie la moyenne des valeurs de X obtenues.

(f) On choisit $N_1 = 10$, $N_2 = 13$, $n = 5$, et $k = 100$. Comparer la moyenne empirique et l'espérance théorique.

306. [IMT] Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de X de trois manières différentes :

(a) directement à partir de la loi de X ;

(b) en utilisant la fonction génératrice de X ;

(c) sans calcul, en interprétant la loi de X.

307. [CCINP] Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)

(a) On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?

(b) On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la loi de X et de Y. Donner l'espérance et la variance de X.

(c) Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

308. [IMT] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant une espérance. On suppose que $f(X)$ admet une espérance. Montrer que l'on a $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.

309. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $S = X + Y$.

(a) Donner G_S en fonction de G_X et de G_Y.

(b) On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Loi de S ?

(c) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Loi de S ?

310. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Loi de $Z = X + Y$?

311. [CCINP] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. En posant $\min\emptyset = +\infty$, on définit $T_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ et $T_2 = \min\{n > T_1, X_n = 1\}$.

(a) Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.

(b) Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2 - T_1 = k, T_1 = n)$.

(c) Vérifier que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2.

312. [CCINP] Soient $p \in]0,1[$, X_1, ..., X_n des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p. ‘

(a) Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_1 \geq m)$ et $\mathbf{P}(X_1 \leq m)$.

(b) Posons $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y \geq m)$ et $\mathbf{P}(Y \leq m)$. Reconnaître la loi de Y et déterminer $\mathbf{E}(Y)$.

313. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. On note $Z = \dfrac{X}{Y}$.

(a) Montrer que $Z \leqslant X$. Montrer que Z admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbf{E}(Z)$

(b) Donner la loi de Z.

314. [CCINP] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \dfrac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

(a) Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer $G_X(t)$, $\mathbf{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.

(c) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.

(d) On pose $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.

(e) Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

315. [Ecoles militaires] On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On note $L_1 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_1 = X_2 = \cdots = X_n\}$ la longueur de la première séquence et $L_2 = \sup\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_{L_1+1} = \cdots = X_{L_1+n}\}$ la longueur de la seconde séquence. Montrer que $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = -\dfrac{(p-q)^2}{pq}$.

316. [Ecoles militaires] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant une variance. On pose, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$. On note $M = (\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j))_{1\leq i,j\leq n}$.

(a) Relier M à la matrice $A^T A$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Encadrer les valeurs propres de M.

317. [St Cyr] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $C_n = \mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(C_n) \leqslant k + n\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$.

(b) En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o(n)$ quand $n \to +\infty$.
Dans la suite, on suppose que les X_k sont d'espérance finie.

(c) Montrer que $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k) = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ quand $k \to +\infty$.

(d) En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o\left(\sqrt{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.