Développements limités

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Dans toute la suite, a est un réel et les fonctions considérées sont définies au voisinage de a, c'est-à-dire sur un ensemble de la forme $[a-h, a+h]$, $[a-h, a]$, $[a, a+h]$, $[a-h, a[$, $]a, a+h]$ ou $[a-h, a+h] \setminus \{a\}$ avec $h > 0$.

I. Définitions

Définition. *Soit f une fonction définie au voisinage de a.*
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, s'il existe des scalaires a_0, a_1, ..., a_n tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

Proposition. *Soit f une fonction définie au voisinage de a.*
La fonction f admet un DL à l'ordre 0 en a si, et seulement si, f admet une limite finie en a.

Corollaire. *Si f est définie en a, alors f admet un DL à l'ordre 0 en a si, et seulement si, f est continue en a. Dans ce cas, on a $f(x) = f(a) + o_a(1)$.*

Corollaire. *Si f n'est pas définie en a, alors f admet un DL à l'ordre 0 en a si, et seulement si, f est prolongeable par continuité en a.*

Proposition. *Soit f une fonction définie en a.*
La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en a si, et seulement si, f est dérivable en a
Dans ce cas, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$.

Remarque : Une fonction peut être dérivable en a sans être dérivable, ni même continue au voisinage de a.
Par exemple, $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{sinon} \end{cases}$
Remarque : Posséder un DL d'ordre 1 et être dérivable au voisinage de a n'implique pas la continuité de la dérivée en a.
Par exemple, $g : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$
Remarque : Posséder un DL d'ordre 2 en a n'implique pas d'être deux fois dérivable en a (considérer $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$) ni même d'être de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a (considérer $x \mapsto x^3 \sin(1/x^2)$).

Proposition. *Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$. Alors on a $f(x) \sim_a a_p(x-a)^p$.*

Proposition. *S'il existe des scalaires $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ vérifiant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o((x-a)^n),$$

alors on a $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.
On peut donc parler, sous réserve d'existence **du** *DL d'une fonction en un point.*
Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,(X-a)^k$ *est donc appelé la partie régulière du DL de* f *à l'ordre* n *en* a.

Proposition. *Soit* f *une fonction admettant un développement limité à l'ordre* n *en* 0 *donné par* $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k + o_0(x^n)$.
- *Si* f *est paire, alors, pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$ *impair,* $a_k = 0$.
- *Si* f *est impaire, alors, pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$ *pair,* $a_k = 0$.

II. DL à connaître

Proposition. *(formule de Taylor-Young)*
Si f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *au voisinage de* a*, alors* f *admet un DL à l'ordre* n *en* a *donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a\big((x-a)^n\big)$$

Remarque : Le théorème de Taylor-Young donne une condition suffisante pour admettre un admet un DL à l'ordre n mais il ne s'agit pas d'une condition nécessaire comme cela a été vu dans les exemples précédents.

Proposition.

- $\exp x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$,
- $\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$,
- $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$,
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,
- $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + (x^n)$
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$.

Remarque : Les DL usuels sont en 0 donc si on veut un DL en $a \neq 0$ soit on s'y ramène soit on utilise la formule de Taylor-Young.

Exercice. DL_8 *en 2 de* $\ln$

Exercice. DL_8 *en 1 de* $\cos(x)$

III. Opérations sur les DL

Proposition. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Si* f *et* g *admettent chacune un développement limité à l'ordre* n *en* a*, alors il en est de même pour la fonction* $\lambda f + g$.

Proposition. *Si* f *et* g *admettant chacune un développement limité à l'ordre* n *en* a*, alors il en est de même pour la fonction* $f \times g$.

Remarque : Le DL de fg s'obtient de la même manière que lorsque l'on effectue le produit de deux polynômes.

Exemple. *DL_6 de $(1-\operatorname{ch} x)\ln(1+x)$ en 0 ; DL_8 en 0 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$.*

Proposition. *Soit g admettant un développement limité à l'ordre n en a. Si g a une limite non nulle en a, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*

Corollaire. *Soit f et g deux fonctions admettant chacune un développement limité à l'ordre n en a. Si g a une limite non nulle en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en a.*

Exemple. *DL_5 de th en 0.*

Proposition. *Soit f une fonction continue au voisinage de a et possédant un développement limité à l'ordre n en a, donné par $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k+o_a\left((x-a)^n\right)$. Alors toute primitive F de f sur I admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a, donné par :*

$$F(x)=F(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}\,(x-a)^{k+1}+o_a\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Exemple. *DL_6 de arctan, de arcsin et tan en 0.*

Remarque : Si f admet un DL à l'ordre n en a rien ne prouve que f' admette un DL à l'ordre $n-1$ en a cf. $x\mapsto x^2\sin(1/x)$

IV. Utilisation des DL

1. Obtenir des équivalents / limites

   Exemple. *Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{x(1+\cos x)-2\tan x}{(2x-\sin x-\tan x)^2}$ et $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$.*

2. Position locale par rapport à la tangente en un point.

   Si f possède un DL en a à un ordre $n\geq 1$, donné par $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k+o_a\left((x-a)^n\right)$ alors l'équation de la tangente en a est $y=a_0+a_1(x-a)$.
   Ainsi, s'il existe $p\geq 2$ tel que

   $$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_p\,(x-a)^p+o_a\left((x-a)^p\right)\qquad\text{avec } a_p\neq 0$$

   alors la position de la courbe par rapport à cette tangente est, au voisinage de a donnée par le signe de $a_p\,(x-a)^p$.
   Par exemple, si p est pair, alors au voisinage de a, la courbe ne traverse pas la tangente et si, p est impair, alors au voisinage de a, la courbe traverse la tangente. il s'agit d'un point d'inflexion.

3. Trancher le cas des points critiques :
   Plus généralement, s'il existe $p\geq 2$ tel que

   $$f(x)=a_0+a_p\,(x-a)^p+o_a\left((x-a)^p\right)\qquad\text{avec } a_p\neq 0$$

   alors f possède un DL à l'ordre 1 en a, et l'on a $a_0=f(a)$ et $f'(a)=0$. Le point a est donc un point critique. De plus,
   — si p est pair, alors, par un raisonnement analogue, f possède un extremum local en a.
   — si p est impair et si f est définie à droite et à gauche de a, alors la différence $f(x)-f(a)$ n'est pas de signe constant au voisinage de a. Donc f ne possède pas d'extremum local en a.

4. Détermination de la nature d'une série ...