Résumé 5 – Calcul intégral

Intégration sur un segment

→ Construction et propriétés

On définit l'intégrale en approchant sur le segment $[a,b]$ toute fonction continue par morceaux par une suite de de fonctions en escalier.

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f$ existe pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b];\mathbb{K})$.

Propriétés de l'intégrale : $(f,g \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b];\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K})$

- Linéarité : $\displaystyle\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (c \in [a,b])$
- Positivité : $\displaystyle f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ (seulement pour $a < b$)
- Croissance : $\displaystyle f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (idem)
- Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ (idem)

Théorème

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a,b]$.

$\displaystyle\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f$ est identiquement nulle sur $[a,b]$.

→ Primitives

Une primitive d'une fonction continue f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I et $a, b \in I$.

$\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

Si F est une primitive de f, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Toutes les primitives sur un même intervalle sont égales à une constante près.

→ Recherche de primitives

Il existe de nombreuses façons de calculer des primitives.

- Reconnaissance de formes usuelles. Ex. : $f' f^{\alpha}$ se « primitive » en $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, en $\ln|f|$ si $\alpha = -1$.
- Intégration par parties
Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$,
$$\int_a^b f' g = [fg]_a^b - \int_a^b f g'$$
- Changement de variables
Si $f : J \to \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a,b] \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$
- Fractions rationnelles
Intégration directe lorsqu'elles sont du type $\dfrac{1}{(x-a)^n}$.
Sinon, on décompose en éléments simples.
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$.
- Fractions rationnelles en exp : on pose $u = \mathrm{e}^x$.
- Produit d'un polynôme par une exponentielle
On effectue des intégrations par parties successives jusqu'à éliminer le polynôme.
- Produit d'un polynôme trigonométrique par une exponentielle : on passe en complexe.

→ Calcul approché d'intégrales

La méthode des rectangles (ici « à gauche ») est à connaître.

Théorème : Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue (p.m) sur $[a,b]$. Alors,
$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
Pour $a = 0$ et $b = 1$, on trouve :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégrales généralisées

I désigne désormais un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

→ Définition

Définition

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$, on dit que l'intégrale converge et on note $\displaystyle\int_a^b f$ la limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres : l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$) et celle de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).

On peut étendre la définition précédente au cas $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour un intervalle de la forme $]a,b[$ on découpe l'intégrale en deux.

→ Étude de la nature d'une intégrale

On peut quelquefois calculer une primitive et passer à la limite pour prouver la convergence/divergence.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1\,; \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha < 1\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 0\,; \qquad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \text{ CV.}$$

Si $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ est continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b (attention, $b \neq \infty$!), $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f} \text{ où } \tilde{f} \text{ est le prolongement continu de } f$$

Théorème : Divergence grossière à l'infini

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f admet une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas.

→ Intégrales de fonctions positives

On dispose de plusieurs méthodes lorsque la fonction est positive (ou tout du moins de signe constant).

Théorème : Règle de majoration

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues p.m. sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors,

(i) $\displaystyle\int_I g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$

(ii) $\displaystyle\int_I f$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_I g$ diverge.

Théorème : Règle des équivalents

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues p.m. sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

Théorème : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. Alors,

$$\sum f(n) \text{ et } \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Des encadrements séries-intégrales permettent en outre d'obtenir des équivalents de sommes et d'intégrales.

Théorème : Règle du petit o et du grand O

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$. On suppose g continue, positive et d'intégrale convergente sur $[a, b[$.

- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors $\int_a^b f$ converge (absolument) ;
- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors $\int_a^b f$ converge (absolument).

Ainsi, g intégrable $\Longrightarrow f$ intégrable (cf. ci-dessous).

Application à $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

→ Calcul intégral

On se placera sur un segment avant d'utiliser une intégration par parties, quitte à passer à la limite.

Théorème : Changement de variable

Soient $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Idem pour φ strictement décroissante (aux bornes près).

→ Convergence absolue et fonctions intégrables

Définition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue p.m. sur $[a, b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Théorème : CV absolue $\Longrightarrow$ CV

Une intégrale absolument convergente converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue p.m. sur I est dite intégrable si $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

Les propriétés de linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles et inégalité triangulaire se vérifient encore pour des fonction intégrables sur un intervalle quelconque.

Théorème

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables et continues sur I muni de $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est un espace vectoriel normé.

Ce résultat est faux pour des fonctions seulement supposées continues par morceaux.

Si $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ sont continues et g est de plus positive et intégrable sur $[a,b[$,

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.

Si g est supposée positive et *non* intégrable sur $[a,b[$,

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Théorèmes de Lebesgue

→ Convergence dominée

Théorème : Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (p.m.) sur I.
- La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f.
- Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur I vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors, les fonctions f et f_n sont intégrables sur I et,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

Théorème : Convergence dominée (extension)

Soit $(f_x)_{x\in I}$ une famille de fonctions définies sur J à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit également x_0 un point adhérent à I (ou bien $x_0 = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $x \in I$, f_x est continue (p.m) sur J.
- Pour tout $t \in J$, $f_x(t) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(t)$ où f est une fonction continue par morceaux sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que pour tous $(x,t) \in I \times J$, $|f_x(t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, les fonctions f_x et f sont intégrables sur J et

$$\lim_{x\to x_0} \int_J f_x(t)\,dt = \int_J f(t)\,dt$$

→ Intégration terme à terme

Pour des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ positives,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx$$

Cette égalité a lieu dans $[0,+\infty]$.

Théorème : Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (p.m.) sur I.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge. (⚠valeur abs.)

Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)\,dx\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx$$

Intégrales à paramètre

On note I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et on considère :

$$g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt \text{ avec } f : I \times J \to \mathbb{R}$$

Déterminer le domaine de définition de g revient à étudier pour chaque $x \in I$ l'existence d'une intégrale.

→ Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Continuité sous le signe $\int$

Si une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tt $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue p.m. sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I.

L'hypothèse de domination peut simplement être vérifiée sur tout segment K inclus dans I, c'est-à-dire :

$$\forall (x,t) \in K \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$$

La continuité de g sur tout K assure sa continuité sur I. Si $J = [a,b]$ est un segment et f est continue sur $I \times [a,b]$, la domination sur tout segment est toujours vérifiée.

→ Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Théorème de Leibniz

Si une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue (p.m.) sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

On peut là encore se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I. L'hypothèse de domination est toujours vérifiée lorsque J est un segment.

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: on opère en plusieurs fois sur f', f'', ...ou bien on raisonne par récurrence. On peut également appliquer directement :

Théorème : Théorème de Leibniz – version $\mathscr{C}^n$

Si une fonction $f : I \times J \to \mathbb{K}$ vérifie :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- Pour tous $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur J et $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ continue (p.m.).
- Il existe $\varphi_n : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_n(t)$$

Alors, $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad g^{(n)}(x) = \int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Ces hypothèses sont à savoir retrouver.