Numéro de place 1 0 9 5 6 0

Numéro d'inscription 1 4 6 6 5

Signature

Nom XHOFFRAY

Prénom NILS

CONCOURS CENTRALE·SUPÉLEC

Épreuve physique - chimie 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 01 / 03

Partie A - L'atome classique : réussites et difficultés

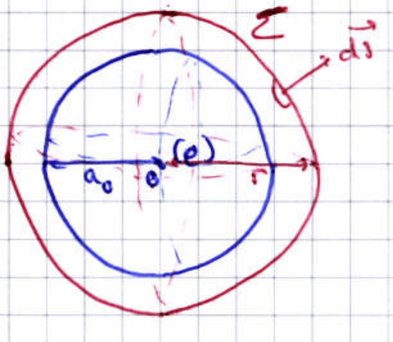
I. Le modèle " plum pudding " de J.J Thomson

A. Champ électrique de la distribution de charge positive

1. La distribution de charge est supposée uniforme dans le volume de l'atome, donc elle est symétrique par ~~tout~~ plan contenant $\vec{OM}$ $\forall M$, donc le champ $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(r,\theta,\varphi,t) = \boxed{E(r,\theta,\varphi,t)\,\vec{u_r}}$

2. La répartition uniforme de la distribution de charge donne également que cette dernière est invariante par toute rotation autour du centre de l'atome, donc $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(r,t) = \boxed{E(r,t)\,\vec{u_r}}$

3.



On considère la surface de Gauss Σ, indéformable et orientée vers l'extérieur, de centre O et de rayon r.
Le théorème de Gauss nous donne que :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ où Q_{int} représente la charge contenue au sein de la surface de Gauss. Ainsi on obtient que si $r \leq a_0$:

$$E(r)\,S = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a_0^3}\,Q \Rightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{r^3 Q}{a_0^3\,\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi a_0^3\varepsilon_0}\,r\,\vec{u_r}}$$

Ne rien écrire dans la partie barrée

B. Étude mécanique

4. On note $\vec{F_e} = -q_e \vec{E}$ la force électrique de Lorentz et $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids ainsi pour un électron : $\frac{\|\vec{F_e}\|}{\|\vec{P}\|} \approx 1,6\,10^{40} \gg 1$ donc $\vec{P}$ est négligeable devant la force électrique (on a pris $\|\vec{E}\| = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}$)

5. Ainsi si on considère un électron de masse m_e soumis à la force électrique : le théorème du moment cinétique donne que : $\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{F_e}) = \vec{OM} \wedge \vec{F_e} = r\vec{u_r} \wedge \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} r\vec{u_r}$ $= \vec{0}$ donc $\vec{L_o} = \vec{cte}$ c'est à dire que le mouvement est plan.

6. Puisque l'électron est soumis à la force électrique le principe fondamental de la dynamique donne : $m\vec{a} = \vec{F_e} = \frac{-q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{r}$ $\vec{r} = \sqrt{(x\vec{u_x})^2 + (y\vec{u_y})^2}$ donc

on projette selon $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$: $\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}x \\ m\ddot{y} = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}y \end{cases}$ on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e a_0^3}}}$

et $\boxed{\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}}$

7. Dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur, on a pas de mouvement radial initial et les équations du mouvement correspond à celle d'un cercle, donc on aura une $\boxed{\text{trajectoire circulaire uniforme}}$ de vitesse angulaire ω_0

8. $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$ puisque le mouvement est circulaire uniforme
et $E_p = -q_e V = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon a_0^3}(r_0^2 - a_0^2)$: $\vec{F}_e = -\vec{grad}\, E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u_r}$

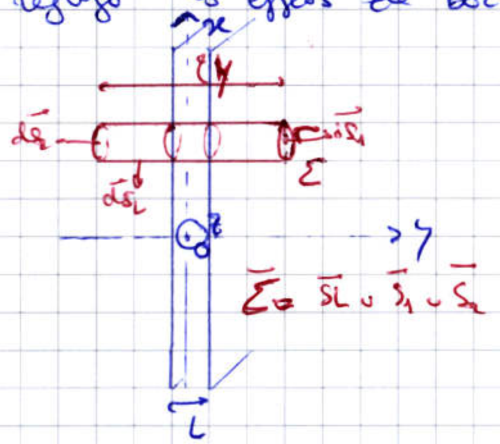
ainsi l'électron reste dans l'atome si $E_c \le E_p$ donc si $\frac{1}{2}mv_0^2 \le \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0^3}(a_0^2 - r_0^2)$
$\to v_0^2 \le \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a_0^3}(a_0^2-r_0^2) \to \boxed{v_0 \le \omega_0\sqrt{(a_0^2-r_0^2)}}$

9. ici l'électron est animé d'un mouvement de fréquence $\boxed{f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2,5\cdot 10^{15}\ Hz}$
donc l'onde électromagnétique associée à une fréquence de f et une longueur d'onde
$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = 1,2\cdot 10^{-7}\ m}$ = 120 nm ce qui correspond aux $\boxed{\text{ultra-violets}}$.

II. Découverte du noyau (Rutherford)

A. Déviation par une feuille de mica

10. la plaque de mica est très fine par rapport à ses autres dimensions on peut donc négliger les effets de bords :



le champ $\vec{E}(M,t)$ est invariant par toute translation selon (Ox) et (Oz) donc $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(y,t)$
et symétrique par tout plan contenant (HM) où H projeté orthogonal de M sur le plan donc $\vec{E}(M,t) = E(y,t)\vec{u_y}$
également le plan $(y=0, x)$ est plan de symétrie donc $\vec{E}$ est une fonction paire de y.

le théorème de Gauss donne que $\oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ pour $y < \frac{L}{2}$.
$E(y)\, 2S_1 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ on suppose la plaque uniformément chargée en volume de densité volumique de charge ρ C m^{-3} donc $E(y) = \frac{\pi r^2 2y\rho}{\varepsilon_0 2\pi r^2} = \frac{2\rho y}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho y}{\varepsilon_0}$

B déviation des α dans le modèle de Thomson

1) Déviation par collision unique

11 Lorsque l'électron est dans l'atome d'or le champ trouvé à la question 3 donne que:
$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{r}$ donc $\vec{F_e} = 2q_e \frac{Z q_e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{r}$ on projette selon $\vec{u_y}$ (question 6)

et donc $\vec{f_y} = \frac{2Z q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} b\,\vec{u_y}$ $\rightarrow$ $\boxed{f_y = \frac{2Ze^2}{a_0^3} b}$

12. d'après la question précédente le principe fondamental de la dynamique donne :
$m\ddot{y} = f_y = \frac{2Ze^2}{a_0^3} b$ donc $\dot{y} = \frac{2Ze^2}{a_0^3 m} bt + \dot{y}_0$ avec $\dot{y}_0 = 0$

donc $\dot{y} = \frac{2Ze^2}{a_0^3 m} bt$ et $t_{max} = \frac{a_0}{v_0}$ donc $\Delta p_M = m\dot{y}_{max} = m\frac{2Ze^2}{a_0^3 m}\frac{a_0^2}{v_0} - 0$

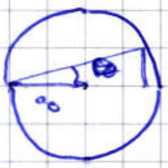
$= \boxed{\frac{2Ze^2}{a_0 v_0}}$

13. La déviation angulaire vaut $\delta\theta = \frac{\Delta p_M}{p_0} = \frac{\Delta p_M}{m v_0} = \frac{2Ze^2}{a_0 m v_0^2} = \boxed{\frac{Ze^2}{a_0 \mathcal{E}_c}}$

application numérique : $\boxed{\delta\theta = 2{,}3\,10^{-4}}$

2) Collisions multiples

14. si $L = 1\,10^{-6}$ m et $a_0 = 1\,10^{-10}$ m donc $N = 1\,10^{4}$ et alors $\boxed{\Delta\theta = 2{,}3\,10^{-2}}$



dans le cas où l'électron effectue N fois une déviation de $\delta\theta$ ou $-\delta\theta$ donc la déviation extrême serait de $2{,}3\,10^{-4} \times 10^{4} = 2{,}3°$

Il n'est donc pas possible d'avoir des déviations de plusieurs dizaines de degrés.

Numéro de place | 1 0 8 5 6 0
Numéro d'inscription | 1 4 6 6 5
Nom | SHOFFRAY
Prénom | NILS
Signature

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve Physique-chimie 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 02 / 09

Partie A - L'atome classique : réussites et difficultés

II Découverte du noyau (Rutherford)

C Rétrodiffusion des α dans le modèle de Rutherford

15. La conservation de l'énergie cinétique de la particule α donne que : $\Delta E_m = 0 = \Delta E_c + \Delta E_p$

avec $\Delta E_c = 0 - \mathcal{E}_c$ car choc frontal, non pénétration de la particule et atome immobile,

puis $\Delta E_p = -\dfrac{2Ze^2}{r_0^3}(0 - r_0^2) = \dfrac{2Ze^2}{r_0^3} r_0^2 = \dfrac{2Ze^2}{r_0}$

ainsi $\Delta E_m = 0 \Rightarrow \dfrac{2Ze^2}{r_0} = \mathcal{E}_c \Rightarrow \boxed{r_0 = \dfrac{2Ze^2}{\mathcal{E}_c}}$

16. Application numérique $\boxed{r_0 = 5{,}7\,10^{-15}\ \text{m}}$ ceci ~~est bien cohérent avec~~ la taille est trop petit par rapport à réelle d'un atome d'or.

III Instabilité d'un modèle d'atome "classique"

A. Puissance électromagnétique rayonnée par une charge accélérée

17. L'onde rayonnée est localement plane donc Maxwell Faraday qui donne :

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ devient $\dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{B}$ avec $\vec{k}$ le vecteur de propagation de l'onde,

dans le vide donc $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ et $\vec{B} = \cancel{\dfrac{E\sin\theta\ \vec{OM} \wedge \vec{E}}{c\,\|\vec{OM} \wedge \vec{E}\|}} = \boxed{\cancel{\dfrac{E\sin\theta}{c}\ \vec{u} \wedge \vec{OM}}}$

~~où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé selon $\vec{OM}$~~ $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E\sin\theta}{c}\ \dfrac{\vec{OM} \wedge \vec{u}_\perp}{\|\vec{OM}\|}}$ $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$

Ne rien écrire dans la partie barrée

18. On a le vecteur de Poynting $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\sin^2\theta\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé selon $\vec{OM}$, puis :

$\vec{\pi} = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2 c^4}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\mu_0}\vec{u}$ or $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ donc $\varepsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}$ et

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\vec{u}}$$

où $\vec{\pi}$ est ~~trajet~~ ~~particule~~ une densité de puissance surfacique et correspond à $\boxed{\text{la puissance transmise par l'onde par unité de surface}}$.

19. $P = \iint_{\text{sphère}} \vec{\pi}\cdot\vec{dS} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\, r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\phi$

$= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\,2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \boxed{\frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}$

B Etude énergétique de l'atome « planétaire »

20. ici l'électron est à l'extérieur du noyau donc $\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u}_r$ et $V = -\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R}$ et mouvement circulaire uniforme donc :

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ ainsi le principe fondamental de la dynamique donne que : $-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \iff m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \iff \boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{2R}}$

et $E_p = -q_e V = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \boxed{-\frac{e^2}{R}}$ donc

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{R}}$$

21. d'après ce qui a été dit dans la A) $P = \frac{1}{6\pi}\frac{q^2 a^2}{\varepsilon c^3}$ or ici $a^2 = \frac{\sigma^4}{R^2}$ et $\sigma^2 = \frac{e^2}{Rm}$ (question précédente) donc :

$$P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0} \times \frac{e^4}{R^4 m^2 c^3} = \frac{2}{3} e^2 \times \frac{e^4}{m^2 C^3} \times \frac{1}{R^4} = \boxed{\frac{2}{3}\frac{e^6}{m^2 c^3} \times \frac{1}{R^4}}$$

22. Le théorème de la puissance mécanique donne que :

$$\frac{dE_m}{dt} = -P \iff \frac{1}{2}\frac{e^2}{R^2}\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{m^2c^3} \times \frac{1}{R^4} \implies \boxed{R^2\frac{dR}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}}$$

23. Par analyse dimensionnelle on trouve que $\left[\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\right] = L^3T^{-1}$ on peut donc définir τ par $\tau = \frac{V}{\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}} = \boxed{\frac{\pi R^3 m^2 c^3}{e^4}}$ le temps de vie de l'atome

24. pour un rayon initial $a_0 = 1.0\,10^{-10}$ m on trouve $\boxed{\tau = 2,5\,10^{46}\,s}$

on trouve donc que l'atome d'hydrogène n'est pas stable ce qui est absurde.

Partie B - L'atome quantique

IV. Relations d'Heisenberg

25. La fonction d'onde $\varphi(r)$ représente la densité de probabilité de présence de l'électron autour de l'atome. $\iiint_{V(r\in R)} |\varphi(r)|^2 dV = \iiint_{V(r<r_0)} A^2 dV = 1 \iff A^2 = \frac{3}{4\pi r_0^3}$ (normalisation)

donc $\boxed{A = \sqrt{\frac{3}{4\pi r_0^3}}}$

26. $\langle \vec{r} \rangle = \iiint_V \vec{r}|\varphi(r)|^2 dV = A^2 \frac{r_0^4}{4} 4\pi$ et $\langle \|\vec{r}\|^2 \rangle = \iiint_V r^2 |\varphi(r)|^2 dV = A^2 \frac{r_0^5}{5} 4\pi$

on admettra que $\Delta r = \sqrt{\frac{3}{5}}\, r_0$

27. par analogie avec la fonction d'onde spatiale le carré du module de $\chi(\vec{p})$ représente la probabilité de la particule d'avoir une quantité de mouvement $\vec{p}$

28. Comme précédemment $\int |\chi(\vec{p})|^2 d\vec{p} = \int_0^{p_0} |\chi(\vec{p})|^2 d\vec{p} = B^2 \int_0^{p_0} d\vec{p} = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{B = \sqrt{\frac{1}{p_0}}}$ puis par un calcul strictement analogue à Δr : $\boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{3}{5}}\, p_0}$

29. l'inégalité d'Heisenberg spatiale donne que : $\Delta r \Delta p \geq \hbar$

or ici on est dans l'état de plus basse énergie donc $\Delta r \Delta p \sim \hbar \Rightarrow$

$\boxed{\frac{3}{5} r_0 p_0 \sim \hbar}$

30. l'énergie potentielle du champ électrique $\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc

$E_p = -q_e V = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \boxed{-\frac{e^2}{r}}$

31. $\langle E_p \rangle = -e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle = -e^2 \iiint_V |\psi(r)|^2 \frac{1}{r}\, dr\, r\, d\theta\, r\sin\theta\, d\phi$

$= -e^2 A^2 4\pi \int_0^{r_0} r\, dr = -e^2 \frac{3}{r_0^3} \frac{r_0^2}{2} = \boxed{-\frac{3e^2}{2 r_0}}$

32. $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2m} \langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{1}{2m} \int_0^{p_0} p^2 |\chi(p)|^2 dp = \frac{1}{2m} B^2 \frac{p_0^3}{3} = \frac{p_0^2}{6m}$

33. à la question 29 on a déterminé que $p_0 \sim \frac{5\hbar}{3r_0}$ donc $\langle E_m \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$

$= -\frac{3}{2}\frac{e^2}{r_0} + \frac{3}{10}\left(\frac{5\hbar}{3r_0}\right)^2 \frac{1}{m} = \boxed{-\frac{3}{2}\frac{e^2}{r_0} + \frac{5\hbar^2}{6 r_0^2 m}}$

34. à l'aide de la question précédente on trouve que $a_0 = \frac{5}{9}\frac{\hbar^2}{me^2} \sim \frac{\hbar^2}{me^2}$

35. On trouve $\boxed{a_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\ m}$

Numéro de place 1 0 9 5 6 6

Numéro d'inscription 1 4 6 6 5

Signature

Nom X H O F F R A Y

Prénom N I L S

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Physique - chimie 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 03 / 03

Partie B. L'atome quantique

V. L'atome quantique : onde ou particule ?

36. P_cH_2 : $C_{32}H_{18}N_8$ donc $M_{P_cH_2} = 514\ g.mol^{-1}$ et la masse d'une molécule est égale à $m = \frac{M_{P_cH_2}}{N_A} = \boxed{8.5\cdot 10^{-22}\ g}$

37. Soit [particule] de masse m et soumise à son poids ;
Le principe fondamental de la dynamique donne que
$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\vec{g}$ on projette sur l'axe horizontale et on obtient

$v = -gt + v_0$ et $h = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 = -\frac{1}{2}gt^2$

donc si la particule est à une distance D de son point de lancement $t = \frac{D}{v_0}$

et $\boxed{h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{v_0}\right)^2}$

38. on note $h_{moyen} = +80\ 10^{-6}\ \mu m$ donc $v_{0\,moyen} = \sqrt{\frac{gD^2}{2h_{moyen}}} = \boxed{150\ m.s^{-1}}$

39. La relation de de Broglie donne $p = \frac{h}{\lambda_{dB}}$ donc $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv}$