Ex 1:

1) Soient I_1 et I_2 deux intervalles

Mq $I = I_1 \cap I_2$ est un intervalle

càd mq $\forall (x,y) \in I^2 : x \leq y \Rightarrow [x;y] \subset I$

Soit $(x,y) \in I^2$ tq $x \leq y$

Mq $[x,y] \subset I$

- Comme I_1 est un intervalle et que $(x,y) \in I_1^2$

  $[x,y] \subset I_1$

- De même $[x,y] \subset I_2$

Donc $[x,y] \subset I$

2) Soient I_1 et I_2 deux intervalles non disjoints

Mq $I = I_1 \cup I_2$ est un intervalle

Soit $(x,y) \in I^2$

* $(x,y) \in I_1^2$

Comme I_1 est un intervalle, $[x,y] \subset I_1$ donc $[x,y] \subset I$

* De même si $(x,y) \in I_2^2$ $[x,y] \subset I$

* $x \in I_1$ et $y \in I_2$

Soit $z \in I_1 \cap I_2$

Soit $t \in [x,y]$ Mq $t \in I_1 \cup I_2$

. si $t \leq z$ alors $x \leq t \leq z$

or $(x,z) \in I_1^2$

et I_1 est un intervalle

donc $[x;z] \subset I_1$ puis $t \in I_1$

donc $t \in I_1 \cup I_2$

. si $t > z$ alors $z \leq t \leq y$

or $(z,y) \in I_2$ et I_2 est un intervalle

donc $[z,y] \subset I_2$

puis $t \in I_2$

donc $t \in I_1 \cup I_2$

Ex 2:

Rq $x = \lfloor x \rfloor + r$ avec $r \in [0;1[$

$2x = 2\lfloor x \rfloor + 2r$

$$\lfloor 2x \rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2r \rfloor & \text{si } 0 \leq r \leq 0{,}5 \\ 2\lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Soit $k_0 \in [\![0;n-1]\!]$ tq $r \in \left[\frac{k_0}{n};\frac{k_0+1}{n}\right[$

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$

$$x + \frac{k}{n} \in \left[E(x) + \frac{k_0+k}{n} ; E(x) + \frac{k_0+k+1}{n}\right[$$

Donc $E\left(x+\frac{k}{n}\right) \in [E(x) ; E(x+1)[$

et $E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(x)+1 \iff \frac{k_0-k}{n} \geq 1$

$\iff k \geq n-k_0$

Donc $$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-k_0-1} E(x) - \sum_{k=n-k_0}^{n-1} (E(x)+1)$$

$$= nE(x) + k_0$$

D'autre part:

$$nx = \underbrace{nE(x)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{nr}_{\in [k_0;k+1[}$$

Donc $\lfloor nx \rfloor = n E(x) + k_0$

Avec des inégalités. A faire

Ex 3:

2) On Mq $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (a,b) \in A \times B$, $a+b \geqslant \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup}(B) - \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

$\exists a \in A, a \geqslant \operatorname{Sup} A - \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists b \in B, b \geqslant \operatorname{Sup} B - \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi $\exists (a,b) \in A \times B$

$a + b \geqslant \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$

3) Supp $A \cup B \subset \mathbb{R}^+$

Mq $\operatorname{Sup}(AB) \geqslant ab$

Soit $(a,b) \in A \times B$

$\forall a \in A \quad a \leqslant \operatorname{Sup} A$

$\forall b \in B \quad b \leqslant \operatorname{Sup} B$

Ainsi $ab \leqslant \operatorname{Sup}(A) \operatorname{Sup}(B)$ car $(a,b) \in A \times B \subset \mathbb{R}^+$

Mq $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (a,b) \in (A \times B)$ tq $\operatorname{Sup}(A)\operatorname{Sup}(B) - \varepsilon < ab$

→ Soit $A = \{0\}$ et $AB = \{0\}$

et $\operatorname{Sup} A \times \operatorname{Sup} B = \operatorname{Sup}(AB) = 0$

→ Soit $A \neq \{0\}$ et alors $\operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B > 0$

Soit $\varepsilon > 0$

Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B} > 0$ tq $\varepsilon < (\underbrace{\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B}_{>0}) \times \operatorname{Min}(\underbrace{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B}_{>0})$

$P \geqslant 0$

Il existe $(a,b) \in A \times B$ tq

$a > \operatorname{Sup} A - \varepsilon' > 0$

$b > \operatorname{Sup} B - \varepsilon' > 0$

donc :

$ab > (\operatorname{Sup} A - \varepsilon')(\operatorname{Sup} B - \varepsilon') = \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B + \varepsilon'^2 - \varepsilon'(\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B)$

Donc :

$ab > \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B - \varepsilon'(\operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B)$

càd :

$ab > \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B - \varepsilon$

Donc, on a prouvé que : $\forall \varepsilon \in]0;\rho[\quad \exists (a,b) \in A \times B \quad ab > \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B - \varepsilon$

$\boxed{\text{ou}}$ Soit M un majorant de $A \times B$

Mq $M \geq \operatorname{Sup} A \operatorname{Sup} B$

M majore $A \times B$ donc $\forall (a,b) \in A \times B$, $M \geq ab$

$\forall a \in A \ \forall b \in B \ M \geq ab$

* Soit $a > 0 \ \forall b \in B \ \dfrac{M}{a} \geq b$

donc $\dfrac{M}{a}$ majore B

donc $\dfrac{M}{a} \geq \operatorname{Sup} B$

puis $\boxed{M \geq \operatorname{Sup} B \times a}$

Si $a = 0$ alors $M \geq \operatorname{Sup} B \, a$ car $M \geq 0$

donc $\forall a \in A$, $M \geq \operatorname{Sup} B \, a$

* Soit $B = \{0\}$ alors

$\text{Sup } B = 0$ et $\text{Sup}(AB) = 0$

puis $\text{Sup}(AB) = \text{Sup } A \text{ Sup } B$

* Soit $B \neq \{0\}$ et alors

$\text{Sup } B > 0$

Donc $\forall a \in A \quad , a \leq \frac{M}{\text{Sup } B}$

Donc $\text{Sup } A \leq \frac{M}{\text{Sup } B}$

puis $\text{Sup } A \text{ Sup } B \leq M$

ccl : $\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}(A) \text{Sup}(B)$

Ex 4 :

1) Supp S solution

Mq $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = Cx$

On a $f(1) = f f(1)^2$

donc $f(1) \in \{0; 1\}$

* Si $f(1) = 0$ alors l'égalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x) f(1)$

implique f cst à 0

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \times x$

* Sinon $f(1) = 1$

Mq $\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = x$

Par récurrence, mq :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(nx) = n f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H(n)$: " $f(nx) = nf(x)$ "

$\underline{I}$: Comme $f(0+0)=f(0)+f(0)$

donc $f(0)=f(0)+f(0)$

donc $f(0)=0$

donc $f(0\times x)=0f(x)$

$\underline{H}$: Soit $n\in\mathbb{N}$ tq $f(nx)=nf(x)$

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx)+f(x) \\ &= nf(x)+f(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

donc :

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad f(nx)=nf(x)$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ f(n)=n}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$$

donc $0=f(x)+f(-x)$

càd f est impaire

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\ f(-n)=-f(n)=-n$

Soit $x\in\mathbb{Q}$

Il existe donc $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tq $x=\frac{p}{q}$

On a $f\left(\frac{p}{q}\right)\times f(q)=f(p)$

donc $f\left(\frac{p}{q}\right)\times q=p$

puis $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$

càd $f(x)=x$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{Q}\ f(x)=x$

2) Soit f une solution

Mq $\forall x \geq 0 \quad f(x) \geq 0$

$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$

Mq $f \nearrow$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $x_1 \leq x_2$

Mq $f(x_1) \leq f(x_2)$

On a $f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f(\underbrace{x_2 - x_1}_{\geq 0})}_{\geq 0}$

donc $f(x_1) \leq f(x_2)$

3) Soit $f \in S$

* Soit f est la fct nulle

* Soit $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = x \\ f \nearrow \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $\varepsilon > 0$ tq $\varepsilon \in \mathbb{Q}$

il existe $r \in \mathbb{Q}$ tq $r \leq x \leq r + \varepsilon$

donc $f \nearrow$

$f(r) \leq f(x) \leq f(r+\varepsilon)$

Donc $r \leq f(x) \leq r + \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^{+*} \quad \left.\begin{array}{l} x - \varepsilon \leq f(x) \leq x + \varepsilon \\ |f(x) - x| \leq \varepsilon \end{array}\right) *$

Supp par l'absurde $f(x) \neq x$

alors $|f(x) - x| > 0$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense, il existe $\varepsilon_0 \in]0; |f(x)-x|[\cap \mathbb{Q}$

en contradiction avec $*$

Donc $f(x) = x$

$S \subset \{x \mapsto 0, x \mapsto x\}$

$\supset$ OK