Corrigé du devoir à rendre le 14/09/2020

Exercice 1 :

1. $\exists y \in F \ : \forall x \in E,\ y \neq f(x)$
2. $\exists (x,x') \in E^2 \ : \ f(x) = f(x') \, et \, x \neq x'$
3. $(\exists y \in F : \forall x \in E,\ y \neq f(x))$ ou $\left(\exists y \in F : \exists (x,x') \in E^2,\ y = f(x) = f(x') \, et \, x \neq x'\right)$ ce qui est équivalent à $(\exists y \in F \ : \ \forall x \in E,\ y \neq f(x))$ ou $\left(\exists (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \ et \ x \neq x'\right)$
4. $\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < \eta \ \ et \ \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Exercice 2 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Première méthode : Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a
$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$
Donc
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

Deuxième méthode :
Considérons $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1}$ de sorte que $S = F(1)$. La fonction F est dérivable de dérivée $f \ : \ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$.
Il existe donc une constante C telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + C.$$
Pour déterminer la constante C, on remarque que $F(0) = 0$ donc $\dfrac{1}{n+1} + C = 0$.
Ainsi, on a $F \ : \ x \mapsto \dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}\cdot$.
Par conséquent, $S = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}\cdot$

2. Montrons que :
$$\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$
par récurrence sur N.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier N, on pose
$$\mathcal{H}(N) \ : \ \text{"} \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.\text{"}$$

<u>Initialisation</u> : On a :
$$\sum_{k=n}^{0}\binom{k}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \binom{0+1}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
<u>Hérédité</u> : Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(N)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{H}(N+1)$.
On a
$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} + \binom{N+1}{n}$$
Par hypothèse de récurrence, on en déduit que
$$\sum_{k=n}^{N+1}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} + \binom{N+1}{n} = \binom{N+2}{n+1}$$
La dernière égalité découlant de la formule de Pascal.

<u>Conclusion</u> : $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$

On a ainsi prouvé que
$$\boxed{\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.}$$

Exercice 3 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$
Montrons que
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + B2^n$$
Pour cela raisonnons par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = A + B2^n$, pour tout entier n.
On aurait alors $\begin{cases} u_0 = 2 = & A+B \\ u_1 = 1 = & A+2B \end{cases}$ donc $A = 3$ et $B = -1$.
On a donc prouvé que s'il existe un couple de réels (A,B) tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + B2^n,$$
alors $(A,B) = (3,-1)$.

<u>Synthèse</u> : Montrons par récurrence double que le couple $(A,B) = (3,-1)$ convient.
Pour tout entier n, on pose $\mathcal{H}(n)$: "$u_n = 3 - 2^n$".
- <u>Initialisation</u> : $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies car $u_0 = 2 = 3 - 2^0$ et $u_1 = 1 = 3 - 2^1$
- <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ soient vraies.
On a alors $u_n = 3 - 2^n$ et $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$ donc
$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(3 - 2^{n+1}) - 2(3 - 2^n) = 3 + 2^n \times (-6+2) = 3 - 2^{n+2}$.
- <u>Conclusion</u> : pour tout entier n, on a $u_n = 3 - 2^n$.

On a donc prouvé l'existence d'un unique couple $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier n on ait $u_n = A + B2^n$; il s'agit du couple $(A,B) = (3,-1)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. On a $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 16$ et $u_5 = 32$.
Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n$.
Pour tout entier n, on pose $\mathcal{H}(n)$: "$u_n = 2^n$".
- <u>Initialisation</u> : $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies car $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$
- <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ soient vraies. On a alors
$$u_n = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{2^{2(n+1)}}{2^n} = 2^{n+2}.$$
- <u>Conclusion</u> : pour tout entier n, on a $u_n = 2^n$.

Exercice 4 : Montrons l'équivalence des propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} P_1 : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ P_2 : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ P_3 : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{array}$$

- Supposons P_1 et montrons P_2.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la propriété
$$P(h)\ :\ "\exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < h"$$
est vraie pour tout $h > 0$, elle est en particulier vraie pour $h = \varepsilon/2$ donc la proposition
$$\exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
est vraie. Ainsi, on a prouvé que $\boxed{P_1 \Rightarrow P_2}$.
- Supposons P_2 et montrons P_3.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme la propriété
$$P(h)\ :\ "\exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < h/2"$$
est vraie pour tout $h > 0$, elle est en particulier vraie pour $h = 2\varepsilon$. La proposition
$$\exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
est donc vraie.
Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Si on pose $\eta = \eta_0/2$ alors on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
En effet, si x est un réel tel que $|x - x_0| \leq \eta$ alors $|x - x_0| < \eta_0$ donc $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
On a donc prouvé P_3. Ainsi, l'implication $\boxed{P_2 \Rightarrow P_3}$ est vraie.
- Supposons P_3 et montrons P_1.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme P_3 est vraie, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
donc on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
On a donc prouvé P_1. Ainsi, l'implication $\boxed{P_3 \Rightarrow P_3}$ est vraie.

Les implications $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$ et $P_3 \Rightarrow P_1$ étant vraies, les trois propositions sont équivalentes.

Exercice 5 :
Soient $(x_1, ..., x_n, y_1, .., y_n)$ $2n$ réels tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ x_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y_j$$

Montrons la formule d'inversion

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, calculons

$$S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j.$$

On a

$$S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left[\sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} y_i\right] = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} y_i$$

donc

$$S = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} y_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \underbrace{\left[\sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i}\right]}_{(*)}.$$

Déterminons $(*)$, en remarquant que

$$\binom{k}{j} \binom{j}{i} = \frac{k!}{(k-j)!i!(j-i)!(k-i)!} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-j}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} &= \binom{k}{i} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k-i}{k-j} \\
&= \binom{k}{i} \sum_{p=0}^{k-i} (-1)^{p} \binom{k-i}{p} = \binom{k}{i} (1-1)^p \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $S = y_k$; ce qui prouve que

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

2. Montrons, par récurrence forte, sur $k \in [\![1,n]\!]$ la propriété

$$P(k)\ :\ "y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j"$$

<u>Initialisation</u> : Par définition, $x_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{1} \binom{1}{j} y_j = y_1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j = x_1$

donc $y_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{1} (-1)^{1-j} \binom{1}{j} x_j$ et $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j$$

Montrons que l'on a $P(p+1)$.
On a

$$x_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} y_j = \sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} y_j + y_{p+1}$$

donc

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} y_j$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} \left(\sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-j} \binom{j}{k} x_k\right)$$

donc

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=k}^{p} \binom{p+1}{j} (-1)^{k-j} \binom{j}{k} x_k$$

soit

$$y_{p+1} = x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=k}^{p} (-1)^{k-j} \binom{p+1}{j} \binom{j}{k}\right) x_k$$

Comme

$$\binom{p+1}{j} \binom{j}{k} = \frac{(p+1)!}{k!(j-k)!(p+1-j)!} = \binom{p+1-k}{j-k},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
y_{p+1} &= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=k}^{p} (-1)^{k-j}\binom{p+1-k}{j-k}\right)\binom{p+1}{k}x_k \\
&= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{m=0}^{p-k} (-1)^{m}\binom{p+1-k}{m}\right)\binom{p+1}{k}x_k \\
&= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left((1-1)^{p+1-k} - (-1)^{p+1-k}\binom{p+1-k}{p+1-k}\right)\binom{p+1}{k}x_k \\
&= x_{p+1} - \sum_{k=1}^{p}\left(0 - (-1)^{p+1-k}\right)\binom{p+1}{k}x_k \\
&= x_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k \\
&= \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}x_k
\end{aligned}$$

donc $P(p+1)$ est vraie.
Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ y_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_j}$$