Xhoffray
MIS

DM 1 de physique

Partie I - Trajectoires des plombs d'une cartouche

Premier modèle : trajectoire gravitaire

1. {centre de masse du plomb} de masse m soumis à $\vec{P} = m\vec{g}$
et $\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v}$

le principe fondamental de la dynamique donne :
$m\vec{a} = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v\vec{v} + m\vec{g}$

2. on cherche v_0 telle que $\frac{\|\vec{F}_D\|}{\|\vec{P}\|} \ll 1$ c'est à dire $\frac{\rho_a S C_D v_0^2}{2mg} \ll 1$

puis $v_0^2 \ll \frac{2mg}{\rho_a S C_D}$ donc pour négliger $\vec{F}_D$ il est nécessaire que :

$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$

3. En projetant on trouve :
$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$ puis $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\theta_0 \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$ et $x = v_0 t \cos\theta_0$
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 \, t$

4. on a $x = \cos\theta_0 \, v_0 t \iff t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$ puis $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + v_0\sin\theta_0 \frac{x}{v_0\cos\theta_0}$

et enfin $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0 \, x$

5. La trajectoire est parabolique

6. on cherche t_1 tel que $y(t_1) = 0 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 t_1 \sin\theta_0$
$\iff t_1 = 0$ ou $t_1 = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g}$

et $x(t_1) = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$

de même $\frac{dy}{dx} = -\frac{gx}{v_0^2\cos\theta_0} + \tan\theta_0 = 0 \Leftrightarrow x_H = \frac{v_0^2 \tan\theta_0 \cos^2\theta_0}{g}$

et $y(x_H) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} \frac{v_0^4 \tan^2\theta_0 \cos^4\theta_0}{g^2} + \frac{v_0^2 \tan^2\theta_0 \cos^2\theta_0}{g}$

$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$

Ainsi $X_M = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$ et $H_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$

7. $\frac{dX_M}{d\theta_0} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta_0}{g} = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta_0 = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$

l'angle pour lequel la portée est maximale est $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

8.

	n°	1	5	10
(mm)	rayon	2,0	1,5	0,875
(g)	masse	0,38	0,16	0,032
(m)	portée	$1,5\cdot10^4$	$1,5\cdot10^4$	$1,5\cdot10^4$
(m)	hauteur	$7,4\cdot10^3$	$7,4\cdot10^3$	$7,4\cdot10^3$
$(m.s^{-1})$	v_∞	33	29	22

$\rho_{plomb} = 11\,350\ kg\,m^{-3}$
$\rho_a = 1,23\ kg.m^{-3}$

9. dans le document, pour des plombs de 2mm la distance de sécurité est 200m, ici la portée maximale est 15km. De plus la portée maximale du plomb est indépendante de sa masse, de sa rayon. Ce modèle ne peut pas être considéré.

I Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

10. comme $v_0 \gg v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a S C_D}}$ donc $\frac{\frac{1}{2}\rho_a S C_D v_0^2}{mg} \gg 1$

donc $\vec{P}$ négligeable devant $\vec{F_D}$

11. On a l'équation : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v\vec{v} = -\frac{mg}{v_\infty^2} v\vec{v}$

puis $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dx'}\frac{dx'}{dt} = -m\frac{v\vec{v}}{D}$

et enfin comme $\frac{dx'}{dt} = v$ dans $\frac{d\vec{v}}{dx'} = -\frac{\vec{v}}{D}$

12. $[D] = \frac{[v_\infty^2]}{[g]} = L^2T^{-2}L^{-1}T^2 = L$ donc D homologue à une distance

13. Ainsi $\vec{v}(x') = C\exp\left(-\frac{x'}{D}\right)$ et $\vec{v}(x'=0) = \vec{v}_0 = C$

donc $\vec{v}(x') = \vec{v}_0 \exp\left(-\frac{x'}{D}\right)$

14. $X' = \cos\theta_0 \vec{u}_x + \sin\theta_0 \vec{u}_y$ et on cherche X_s' tel que
$v(X_s') = 10 v_\infty \Leftrightarrow v_0 \exp\left(-\frac{X_s'}{D}\right) = 10 v_\infty$

$\Leftrightarrow X_s' = -D\ln\left(\frac{10 v_\infty}{v_0}\right)$ et $\vec{X_s} = X_s'(\cos\theta_0 \vec{u}_x + \sin\theta_0 \vec{u}_y)$

donc $d_s = X_s' \cos\theta_0$.

De plus $X_s' = 15,51$ donc $\cos\theta_0 = \frac{d_1}{X_s'} \approx 1$ donc $d_s = 23$ m.

Puis on cherche X_s'' tel que $X_s'' = 40$m et $v(X_s'') = v_0 = v_0 \exp\left(-\frac{X_s''}{D}\right)$
donc $v_0 = 237$ m.s^{-1}. Ainsi :

n°	1	5	10
D	110	85	50
v_0/v_∞	11	13	17
d	15,5	23	27
v_0	270	237	170
Ec	13,5	4,5	0,45

15. La portée utile est la portée à laquelle l'énergie cinétique des plombs est létale.

16. Les 2 plombs fournissent $13{,}5 \times 2 = 27\,J$ donc cela demande $\frac{27}{4{,}5} = 6$ plombs de 5 et $\frac{27}{0{,}45} = 60$ plombs de 4

Si $E_c = 27\,J$ donc $\frac{1}{2} m v^2 = 27$ puis $v = \sqrt{\frac{54}{m}} = v_0 \exp\left(-\frac{X_1}{D}\right)$

donc $\frac{1}{2} m v_0^2 \exp\left(-\frac{d}{D}\right) = 27 \Rightarrow d = -D \ln\left(\frac{54}{m v_0^2}\right)$

Ainsi dans le cas général $d = -D \ln\left(\frac{2E_{c\,let}}{m v_0^2}\right)$ où E_c let l'énergie cinétique létale

17. $D = \frac{v_\infty^2}{g} = \frac{2m}{\rho_a \pi R^2 C_D}$ donc D est croissante par rapport à la

masse du plomb. Et $m = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc $D = \frac{8}{3} \frac{\rho R}{\rho_a C_D}$

Ainsi si ρ diminue pour D fixé constante donc R augmente, ici $\rho' < \rho_{plomb}$ donc $R' > R_{plomb}$. S'il y a agglutination les grains pèsent plus lourd, leur portée est donc plus importante ce qui peut provoquer des incidents de chasse.

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

18. À la phase où la vitesse horizontale du plomb est plus faible que v_∞ et donc négligeable par rapport à v_0.

19. La vitesse est une fonction décroissante. Cependant lorsque $v \leq v_\infty$ donc on peut négliger les frottements. Ainsi v décroit jusqu'à v_∞ puis reste constante.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

20. Comme dit précédemment lorsque v décroit jusqu'au moment où les forces de frottements deviennent négligeables et donc à partir de ce moment, la seule force active est la force gravitationnelle. D'où la phase gravitaire.

21. $X_{M_1} = 259\,m$, $X_{M_5} = 214\,m$, $X_{M_{10}} = 139\,m$

Xhoffrey
Nils

21. dans le doc 1 $d_1 = 200$ m, $d_5 = 150$ m et $d_{10} = 87,5$ m
la portée maximale est environ 50 m plus faible que l'approximation faite ici.

22. $x = \frac{v_0}{v_\infty}$, $x_1 = 11$, $x_5 = 13$, $x_{10} = 17$

et $\lg^2(x_1) = 1,1$, $\lg^2(x_5) = 1,2$, $\lg^2(x_{10}) = 1,5$

donc $\theta_{M_1} = 22,5^\circ$, $\theta_{M_5} = 22^\circ$ et $\theta_{M_{10}} = 19,5^\circ$

23. $X_{M_1} = 335$ m , $X_{M_5} = 265$ m et $X_{M_{10}} = 170$ m
ici l'écart est de plus de 100 m en plus par rapport à l'approximation donnée dans le document.