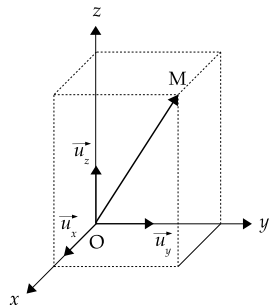


I - Cinématique du point matériel

I-1. Coordonnées cartésiennes

Repère : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\text{Coordonnées : } \begin{cases} x \in]-\infty; +\infty[\\ y \in]-\infty; +\infty[\\ z \in]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

Position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

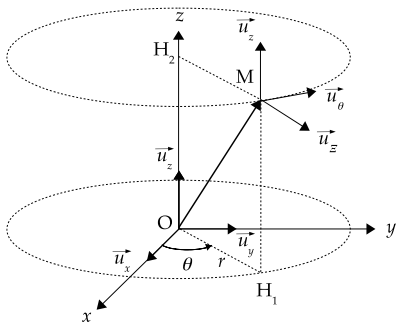
Vitesse :

$$\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

Accélération :

$$\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

I-2. Coordonnées cylindriques

Repère : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\text{Coordonnées : } \begin{cases} r \in [0; +\infty[\\ \theta \in [0; 2\pi[\\ z \in]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

Position :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

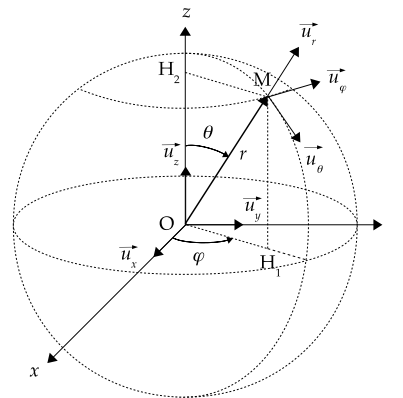
Vitesse :

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Accélération :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

I-3. Coordonnées sphériques

Repère : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\text{Coordonnées : } \begin{cases} r \in [0; +\infty[\\ \theta \in [0; \pi] \\ \varphi \in [0; 2\pi[\end{cases}$$

Position :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Vitesse :

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

I-4. Mouvements usuels

Remarquons qu'on dit d'un mouvement qu'il est

- accéléré si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$,
- retardé si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$
- et uniforme si $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$.

Ce dernier cas se produit, soit pour une accélération nulle (cas du mouvement rectiligne uniforme), soit pour une accélération normale à la vitesse (cas du mouvement circulaire uniforme).

a) Mouvement rectiligne uniforme

Le problème se réduit à un seul paramètre de position (par exemple x).

L'accélération est nulle $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\text{On a } \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v_0 \\ x = v_0 t + x_0 \end{cases}$$

b) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Toujours avec un paramètre de position unique x , mais cette fois l'accélération est constante $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$.

$$\text{On a } \begin{cases} \ddot{x} = a_0 \\ \dot{x} = a_0 t + v_0 \\ x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$$

On peut établir la relation entre position et vitesse en éliminant le temps, ce qui donne l'équation paramétrique de la trajectoire de phase $v(x)$:

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$$

Si la vitesse initiale n'est pas colinéaire à l'accélération, on a un mouvement parabolique dans le plan défini par $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = y_0 \\ z = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{cases}$$

c) Mouvement rectiligne sinusoïdal

On a $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où x_m est l'amplitude, ω_0 la pulsation et φ la phase à l'origine.

L'équation paramétrique de la trajectoire de phase s'écrit dans ce cas :

$$\left(\frac{v}{\omega_0 x_m} \right)^2 + \left(\frac{x}{x_m} \right)^2 = 1$$

d) Mouvement circulaire uniforme

On travaille en coordonnées polaires dans le plan xOy , avec le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

On rappelle que les vecteurs de la base polaire sont mobiles et qu'il faut donc les dériver :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right) = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right) = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

Pour un mouvement circulaire $r(t) = R = cte$. Comme $\dot{r} = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R \vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On introduit la notion de vitesse angulaire : $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$.

Le mouvement uniforme est caractérisé par $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui impose ici $a_\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$: la vitesse angulaire est constante pour un mouvement uniforme, et on retient les expressions simplifiées des vecteurs position, vitesse et accélération :

Mouvement circulaire uniforme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R \vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R \omega \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R \omega^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

L'accélération est radiale et centripète (dirigée vers O)

e) Mouvement circulaire non uniforme

Pour un mouvement circulaire non uniforme (oui oui ça existe), il y a une accélération orthoradiale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R \vec{e}_r \\ \vec{v}(M) &= R \omega \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M) &= -R \omega^2 \vec{e}_r + R \dot{\omega} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On peut remarquer que $a_r = -\frac{v^2}{R}$ et $a_\theta = \frac{dv}{dt}$.

Mouvement circulaire quelconque :

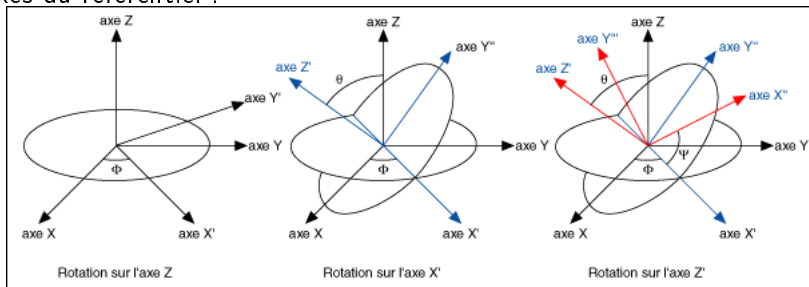
$$\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$$

Cette remarque se généralise à un mouvement quelconque, la composante de l'accélération parallèle à la vitesse a_{\parallel} caractérise la variation de la norme de \vec{v} et la composante de l'accélération perpendiculaire à la vitesse a_{\perp} renseigne sur la courbure de la trajectoire, elle est dirigée vers le centre de courbure.

II - Cinématique du solide

II -1. Repérage d'un solide

Pour repérer un solide, on a besoin de 6 paramètres : les 3 coordonnées d'un point particulier O_1 du solide (un sommet de parallélépipède, le centre de masse ...) et 3 angles qui définissent l'orientation des "axes liés au solide" par rapport aux axes du référentiel :



II -2. Mouvement de translation

Un solide est dit **en translation** lorsque les directions du repère lié au solide sont **fixes** par rapport au référentiel d'étude. Le mouvement du solide est donc simplement repéré par le mouvement du point particulier O_1 qui le caractérise. Pour un point P quelconque du solide : $\vec{OP} = \vec{OO_1} + \vec{O_1P}$, avec $\vec{O_1P} = \vec{cte}$ car le solide est supposé indéformable, et il est fixe dans son référentiel propre.

Il vient $\boxed{\vec{v}(P/R) = \vec{v}(O_1/R)}$

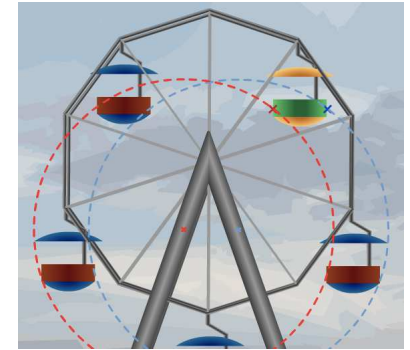
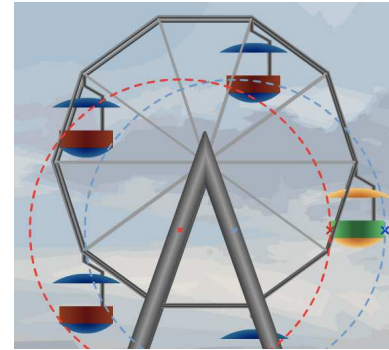
On peut alors assimiler le mouvement du solide à celui du point matériel O_1 .

Si O_1 a un mouvement rectiligne, le solide est en **translation rectiligne**.

Si O_1 a un mouvement circulaire, le solide est en **translation circulaire** (grande roue de fête foraine).

On peut aussi rencontrer des translations elliptiques (certains satellites présentent

un tel mouvement).

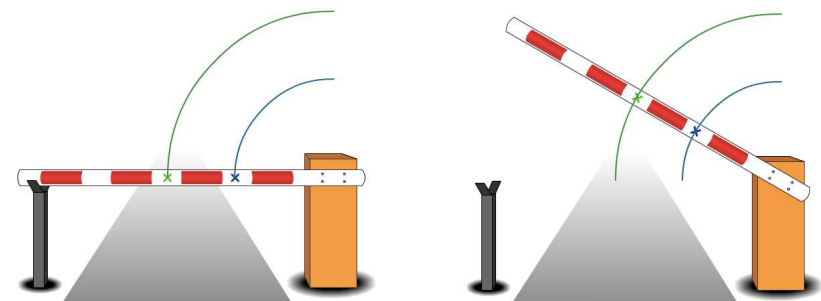


II -3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

On choisit cet axe fixe privilégié comme l'axe (Oz) du repère d'étude, et on choisit O_1 comme origine des deux repères.

Pour un point P du solide, repéré par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OP} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, r et z sont fixes, seul θ varie. On a donc $\boxed{\vec{v}(P) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$.

Il suffit d'une seule coordonnée (angulaire) pour décrire le mouvement. On se ramène au cas de la cinématique d'un point matériel en mouvement circulaire (uniforme ou non).



La rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles est un exemple de rotation d'un solide autour d'un axe fixe (pour des durées courtes devant une année).

Attention à ne pas confondre rotation et translation circulaire.

III - Dynamique

Un point matériel M est caractérisé par sa masse d'inertie m , et sa quantité de mouvement : $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m \vec{v}(M/\mathcal{R})$.

Pour un système \mathcal{S} de points matériels (ou un solide), on définit le centre de masse G du système par $\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OM}_i}{\sum m_i}$. On a alors $\vec{p}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$, avec $m = \sum m_i$.

III -1. Les trois lois de Newton

a) Principe d'inertie

Un point matériel est dit **isolé** lorsqu'il n'est soumis à aucune action, ou **pseudo-isolé** lorsque la somme de ces actions s'annule.

Principe d'inertie : Il existe une classe de référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels tout point matériel **isolé** est animé d'un **mouvement rectiligne uniforme**.

En pratique, un référentiel est considéré comme galiléen tant que le mouvement étudié ne met pas cette propriété en défaut.

Le référentiel du laboratoire (ou référentiel terrestre) est galiléen pour des durées négligeables devant la période de rotation propre de la Terre (1 jour).

Le référentiel géocentrique (origine : centre de la Terre ; axes : pointant vers 3 étoiles lointaines) est galiléen pour des durées courtes devant la rotation de la Terre autour du Soleil (1 an).

Le référentiel héliocentrique (origine : centre du Soleil ; axes : pointant vers 3 étoiles lointaines) est galiléen tant que le mouvement du Soleil est négligeable

...

b) Principe fondamental de la dynamique

Principe fondamental de la dynamique : Dans un référentiel galiléen, pour un système soumis à des actions de résultante \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_g)}{dt}$$

c) Principe des interactions réciproques

Pour deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ en interaction réciproque :

Principe des interactions réciproques :

$$\star \vec{f}(M_1 \rightarrow M_2) = -\vec{f}(M_2 \rightarrow M_1)$$

\star ces forces sont portées par $(M_1 M_2)$

III -2. Forces usuelles

Dans les forces usuelles, on distingue les interactions :

à distance	interaction gravitationnelle entre masses interaction électrostatique entre charges interactions nucléaires entre protons et neutrons d'un noyau atomique (forte et faible)
de contact	tension d'un ressort ou d'un fil réaction d'un support, frottement de glissement frottements fluides (visqueux) forces pressantes exercées par un fluide

a) Force gravitationnelle - poids

Entre deux masses ponctuelles $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$, on a

$$\vec{f}(M_1 \rightarrow M_2) = -\frac{Gm_1m_2}{(M_1M_2)^3} \vec{M_1M_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Le poids d'un système n'est que l'expression particulière de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un système à proximité de sa surface (ou presque)

$$\vec{P} = -\frac{Gmm_T}{R_T^2} \vec{e}_z = m\vec{g}, \text{ avec } g = -\frac{Gm_T}{R_T^2}.$$

b) Force électrostatique - force de Lorentz

Entre deux charges ponctuelles $M_1(q_1)$ et $M_2(q_2)$, l'interaction est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{f}(M_1 \rightarrow M_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

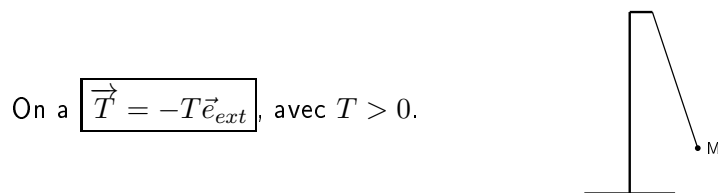
La force de Lorentz correspond à la force ressentie par une particule chargée $M(q)$, animée d'un mouvement de vitesse \vec{v} placée dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

c) Tension d'un fil - d'un ressort

Un fil tendu exerce une action de force qui assure le contact entre le fil et la masse qui y est accrochée. Cette force a les caractéristiques suivantes :

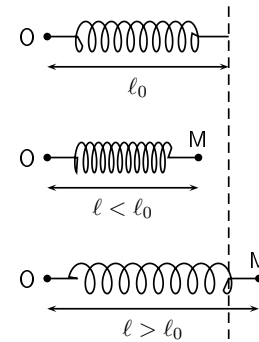
- direction : celle du fil tendu
- sens : celui dirigé vers le point d'attache du fil
- norme : une valeur qui s'adapte aux autres forces et au mouvement
- tension nulle lorsque le fil n'est plus tendu



La force de rappel élastique exercée par un ressort est, dans un certain domaine d'allongement, proportionnelle à celui-ci :

$$\vec{F}_{\text{élast}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{\text{ext}}$$

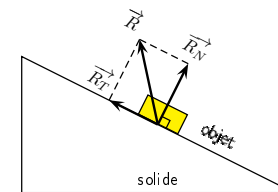
avec k constante de raideur du ressort (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et \vec{e}_{ext} vecteur unitaire dirigé vers «l'extérieur» du ressort (dans le sens de son allongement).



d) Contact entre solides

Lorsqu'un objet est posé sur un solide, ce dernier exerce une action sur l'objet, caractérisé par une composante normale à la surface de contact : \vec{R}_N et une composante tangentielle : \vec{R}_T .

- \vec{R}_N assure la non interpénétrabilité des deux solides, sa norme s'adapte aux autres forces s'exerçant sur le solide pour assurer le contact. Ce dernier est rompu lorsque $R_N = 0$
- \vec{R}_T s'oppose au mouvement et caractérise les frottements solides. En l'absence de frottements $R_T = 0$.



e) Action d'un fluide sur un solide

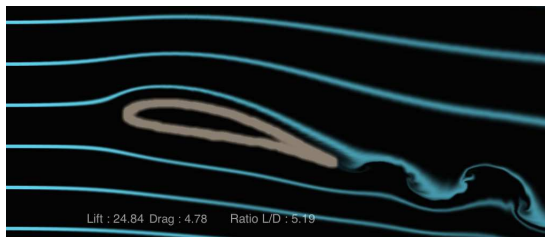
Un solide au repos dans un fluide subit de la part de celui-ci des forces pressantes, dont la résultante est la **poussée d'Archimède** : $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{déplacé}} \vec{g}$.

Si le solide est en mouvement relatif par rapport au fluide, à cette force d'Archimède s'ajoutent d'autres actions :

- la force de trainée, qui s'oppose à la vitesse relative du solide (frottements fluides), qui s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= -k_1 \vec{v} && \text{à faible vitesse} \\ \vec{F}_T &= -k_2 \|\vec{v}\| \vec{v} && \text{à grande vitesse}\end{aligned}$$

- la force de portance, perpendiculaire à la direction de la vitesse relative, qui permet aux avions de voler



IV - Travail - Énergie

IV -1. Puissance et travail d'une force

La puissance est une grandeur scalaire et algébrique :

$$\mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R}) = \vec{f} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Sa dimension est $[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$.

Son unité SI est le watt : $1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Elle est motrice si $\mathcal{P} > 0$, résistante sinon.

Le travail élémentaire d'une force s'exerçant sur un point M est

$$\delta W(\vec{f}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{f}/\mathcal{R}) dt = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

On obtient le travail total pour un déplacement fini du point d'application de la force par l'intégrale curviligne :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

Cette intégrale dépend a priori du chemin suivi.

IV -2. Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique par $E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m [\vec{v}(M/\mathcal{R})]^2$.

La puissance cinétique en est la dérivée temporelle : $\mathcal{P}_c = \frac{dE_c}{dt}$

Du principe fondamental de la dynamique découle le **théorème de la puissance cinétique**, s'appliquant pour un point M en mouvement dans un référentiel galiléen sous l'action d'une résultante de forces \vec{F} :

$$\frac{dE_c}{dt}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$$

Par intégration entre les instants t_A (M en A) et t_B (M en B), on obtient le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F}) dt = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Sous l'effet d'un travail **moteur** ($W > 0$), l'énergie cinétique augmente, donc la norme de la vitesse aussi, le mouvement est accéléré.

Sous l'effet d'un travail **résistant** ($W < 0$), l'énergie cinétique diminue, v aussi, le mouvement est ralenti.

Si $W = 0$, E_c reste constante, v aussi, le mouvement est uniforme.

IV -3. Énergie potentielle

a) Définition

On dit d'une force qu'elle dérive d'une **énergie potentielle** lorsque son travail élémentaire peut se mettre sous la forme d'une différentielle.

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

La fonction énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; pour fixer cette constante, on se donne une référence en un point O : $E_p(O) = 0$.

b) Exemples

On peut citer

- l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{p,pes} = mgz + c_0$ (avec une verticale ascendante)
- l'énergie potentielle élastique : $E_{p,elas} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + c_0 = \frac{1}{2}kx^2$

c) Positions d'équilibre

Si l'on étudie un problème à 1 degré de liberté (de paramètre x), l'étude de la fonction $E_p(x)$ nous renseigne sur les positions d'équilibre et leur stabilité :

On a $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$.

L'équilibre (en x_e) est caractérisé par $F(x_e) = 0$ soit $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$

Un développement de Taylor au voisinage de la position d'équilibre donne la force ressentie lorsqu'on s'écarte légèrement de cette position :

$$F(x) = F(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_e}$$

Avec $F(x_e) = 0$ et $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ donc $\frac{dF}{dx} = -\frac{d^2E_p}{dx^2}$, il vient

$$F(x) = -(x - x_e) \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}$$

L'équilibre est donc **stable** si $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0$ et instable sinon.

Remarquons que le développement de Taylor de l'énergie potentielle donne un profil parabolique (cf oscillateur harmonique), ce qui justifie qu'on cherche fréquemment les "petites oscillations" au voisinage d'une position d'équilibre stable (l'ordre 1 disparaît d'après la condition d'équilibre) :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2 \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}$$

IV -4. Énergie mécanique

On sépare les forces **conservatives** (dérivant d'une énergie potentielle) des forces dissipatives. Le théorème de l'énergie cinétique donne alors (sous forme élémentaire) :

$$dE_c = \delta W(\vec{F}_c) + \delta W(\vec{F}_d)$$

Or $\delta W(\vec{F}_c) = -dE_p$, donc il vient finalement $d(E_c + E_p) = \delta W(\vec{F}_d)$.

Ceci nous amène à définir l'**énergie mécanique** d'un système : $E_m = E_c + E_p$

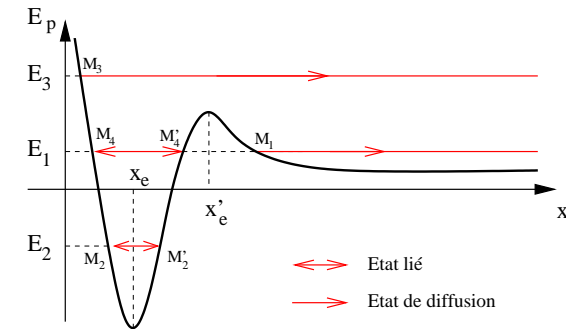
On nomme parfois **théorème de l'énergie mécanique** la forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique, réécrit en séparant les forces dissipatives :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_d) < 0$$

L'énergie mécanique d'un système se conserve en l'absence de forces dissipatives, ou bien elle diminue au cours du temps si de telles forces existent.

IV -5. Portrait de phase d'un système conservatif (ou non)

On considère un système conservatif (pas de forces dissipatives) à un degré de liberté (de paramètre x), dont le profil d'énergie potentiel est le suivant :

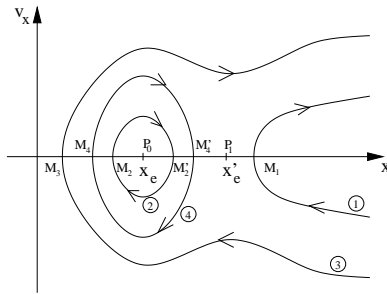


La conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_m = 0$, se traduit, sachant que $E_c \geq 0$, par une relation qui limite le domaine spatial du mouvement : $E_p(x) \leq E_{m0}$. Selon la valeur de l'énergie mécanique du système, on peut obtenir différents types de mouvement :

- un état lié, où x est réduit à un certain intervalle

- un état de diffusion, où x peut s'étendre jusqu'à l'infini.

On obtient les trajectoires de phase suivantes :



Si le système n'est pas conservatif, $\Delta E_m < 0$, alors les trajectoires de phases montrent la perte d'énergie au cours du mouvement, et tendent vers le point attracteur que constitue la position d'équilibre stable. Ce retour à l'équilibre peut se faire avec ou sans oscillation, selon l'importance de l'amortissement (force dissipative).

V - Puits de potentiel

V-1. Puits harmonique

Un puits de potentiel correspond à un oscillateur harmonique unidimensionnel (de paramètre x) si $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. On a un profil d'énergie potentielle parabolique, et on choisit la référence d'énergie potentielle à la position d'équilibre stable ($E_p(x=0) = 0$).

Dans le cas d'un mouvement conservatif, la relation suivante constitue une **intégrale première du mouvement** :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = E_{m0}$$

Si x_m est l'amplitude des oscillations ($v(x=x_m) = 0$), alors on peut réécrire l'équation précédente pour donner l'équation de la trajectoire de phase :

$$\boxed{\frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 x_m^2} + \frac{x^2}{x_m^2} = 1} \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La trajectoire de phase est une ellipse, parcourue dans le sens horaire. Comme elle est fermée, le mouvement est périodique. Cette période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est indépendante des conditions initiales, on parle d'**isochronisme** des oscillations.

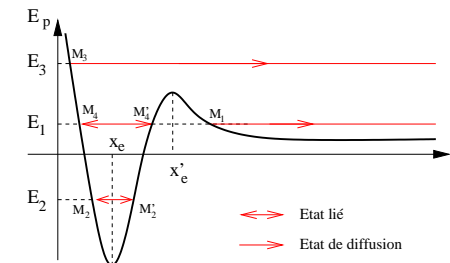
V-2. Puits quelconque

Pour une forme quelconque d'un puits de potentiel, on se ramène au puits harmonique au voisinage d'une position d'équilibre (développement de Taylor de la fonction $E_p(x)$). On parle dans ce cas d'**approximation harmonique**.

Pour des oscillations de plus grande amplitude, on ne peut plus faire de développement limité. On a encore un oscillateur (la particule reste dans un état lié) mais il n'est plus harmonique, les trajectoires de phase ne sont plus elliptiques, et la propriété d'isochronisme des oscillations n'est (a priori) plus vérifiée.

V-3. Barrière de potentiel

Dans le profil énergétique suivant, la position d'équilibre instable x'_e matérialise une **barrière finie de potentiel**.



Si l'énergie conférée à la particule qui se trouve initialement dans le puits (fini) de potentiel est insuffisante ($E_m < E_p(x'_e)$) alors la particule reste confinée dans un état lié autour de x_e .

Si en revanche, l'énergie conférée à la particule (se trouvant initialement dans le puits) est suffisante ($E_m > E_p(x'_e)$) alors la particule peut s'échapper à l'infini dans un état de diffusion. Elle a franchi la barrière de potentiel.

Remarque : En physique quantique, la probabilité de trouver la particule à une position $x > x'_e$ est non nulle même si $E_m < E_p(x'_e)$. On parle d'**effet tunnel** (mis à profit en microscopie, ou encore dans les clés USB)

VI - Moment cinétique

VI -1. Définitions

★ Moment cinétique

Pour un **point matériel** $M(m)$ en mouvement de vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} , le moment cinétique de M , calculé en un point O est donné par

$$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}) \triangleq \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) \triangleq \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Sa dimension est $[L_O] = ML^2T^{-1}$.

Son unité SI est le $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ou encore le $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ou encore le $\text{J} \cdot \text{s}$

Le moment cinétique de M , par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{u})$ est la projection sur \vec{u} du moment de M calculé en un point quelconque de l'axe :

$$L_{\Delta}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})} \cdot \vec{u}$$

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, on a (en coordonnées cylindriques) $\vec{L}_O(M) =$ et $L_{(Oz)}(M) =$

★ Moment d'inertie

Cette remarque nous amène à définir (pour un mouvement quelconque) le **moment d'inertie** $J_{(Oz)}$ d'un point matériel M par $J_{(Oz)} \triangleq mr^2$, et donne une expression utile du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) :

$$L_{(Oz)}(M/\mathcal{R}) = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}$$

Bien entendu, pour un **solide en rotation autour d'un axe fixe** (Oz) , dont tous les points sont en mouvement de rotation de même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe (Oz) , il vient

$$L_{(Oz)}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = J_{(Oz)}(\mathcal{S})\dot{\theta}$$

avec $J_{(Oz)}(\mathcal{S})$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz) , défini comme la somme des moments d'inertie des différents points matériels qui constituent le solide.

On note que $[J_{(Oz)}] = ML^2$, et que plus une masse est éloignée de l'axe de rotation, plus elle contribue au moment d'inertie.

★ Moment d'une force

On définit le moment en O d'une force \vec{F} s'appliquant au point M par

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \triangleq \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'une force par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{u})$ est la projection sur cet axe du moment de la force calculé en un point (quelconque) de l'axe :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \triangleq \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Lorsque la force \vec{F} est perpendiculaire à l'axe (Oz) , le moment de la force par rapport à (Oz) s'exprime simplement par $\mathcal{M}_{(Oz)} = \pm d\|\vec{F}\|$, où d est la distance de la droite d'action à l'axe (Oz) . On appelle cette distance le "bras de levier". Le signe à attribuer dépend du sens de "rotation" :

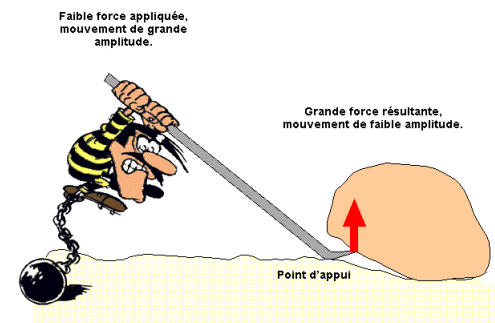
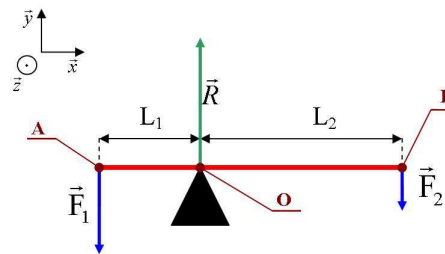


$$\mathcal{M}_{(Oz)} = +d\|\vec{F}\|$$



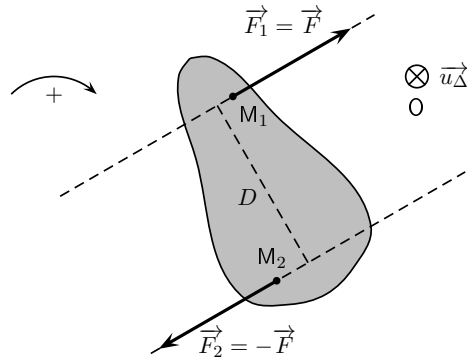
$$\mathcal{M}_{(Oz)} = -d\|\vec{F}\|$$

Cette propriété est mise à profit pour soulever des charges :



★ Couple de forces

Un couple de forces est un ensemble de forces (ici 2) de résultante nulle mais de moment non nul :



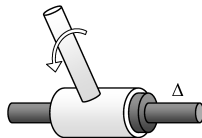
La distance D est le bras de levier du couple. Le moment résultant (ou "couple") est donné par

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = \Gamma = \|\vec{F}\|D$$

Remarque : le signe est positif si le couple tend à faire tourner le solide dans le sens positif choisi (donné par l'orientation de l'axe de rotation) comme sur le schéma précédent.

★ Liaison pivot

L'action du stator sur le rotor est d'empêcher tout autre mouvement que la rotation d'axe (Δ).



Pour une liaison pivot parfaite (sans frottement), le moment exercé par le stator sur le rotor est nul.

VI -2. Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Pour un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g sous l'action de forces de résultante \vec{F} , le théorème du moment cinétique en un point O fixe donne :

$$\text{TMC : } \frac{d\vec{L}_{O(M/\mathcal{R}_g)}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

En projection sur l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$, on a l'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :

$$\frac{dL_{(Oz)}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F})$$

On applique ce théorème dans deux cas usuels :

- mouvement pendulaire (variation du moment cinétique)
- mouvement à force centrale (conservation du moment cinétique)

VI -3. Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe (O, \vec{e}_z) dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , sous l'action de forces de résultante \vec{F} .

La loi scalaire du moment cinétique donne

$$\frac{dL_{(Oz)}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F})$$

Comme pour un solide indéformable en rotation de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à un axe (Oz) , le moment cinétique s'exprime $L_{(Oz)}(\mathcal{S}) = J_{(Oz)}\dot{\theta}$, (avec J constant), il vient :

$$J_{(Oz)}(\mathcal{S})\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F})$$

Remarque : cette équation scalaire rappelle la projection suivant (Oz) (par exemple) du PFD : $m\ddot{z} = F_z$.

VI -4. Énergie cinétique d'un solide en rotation

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) , l'expression de l'énergie cinétique conduit à faire intervenir le moment d'inertie et la vitesse angulaire :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$$

De même, la puissance d'une force s'exerçant sur le solide s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) \times \dot{\theta}$$

Pour un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe (Oz) dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g sous l'action de forces de résultante \vec{F} , on peut exprimer le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}_g)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})$$

VI -5. Parallèle solide en translation/solide en rotation

On peut rassembler ces résultats dans un tableau récapitulatif menant l'analogie entre l'étude d'un solide en translation selon un axe (Oz) (assimilable à un point matériel) et un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe :

	translation	rotation
inertie	masse m	moment d'inertie $J_{(Oz)}$
vitesse	linéaire $v_z = \dot{z}$	angulaire $\omega = \dot{\theta}$
élément cinétique	impulsion $p_z = m\dot{z}$	moment cinétique $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$
énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$	$E_c = \frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$
action	Force F_z	Moment $\mathcal{M}_{(Oz)}$
puissance	$\mathcal{P} = F_z\dot{z}$	$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{(Oz)}\dot{\theta}$
équation du mouvement	$m\ddot{z} = F_z$	$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}$
théorème de la puissance	$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$	$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$

VII - Force centrale conservative

Une force est dite **centrale** si elle est constamment dirigée vers un point fixe, qu'on prend comme origine du référentiel. Elle est en outre **conservative** si elle dérive d'une énergie potentielle. En coordonnées sphériques, on a alors

$$E_p(r) \quad \text{et} \quad \vec{F}(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r$$

On peut citer comme exemples :

- Interaction gravitationnelle : $F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ et $E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
- Interaction coulombienne : $F(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}$ et $E_p(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r}$
- Rappel élastique : $F(r) = -k(r - r_0)$ et $E_p(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$

VII -1. TMC et conséquences

La force étant centrale, son moment en O est nul, ce qui implique que le moment cinétique du système soumis à une force centrale se conserve :

$$\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}_r)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique est donc une **intégrale première du mouvement**.

Les deux conséquences majeures sont les suivantes :

① Le mouvement est plan :

$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g) \triangleq \vec{OM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ donne la direction de la normale au plan tangent du mouvement. Si ce vecteur est constant, cela signifie que le mouvement se fait constamment dans le plan défini par (O, M_0, \vec{v}_0) .

On travaille donc en coordonnées polaires dans ce plan privilégié du mouvement, et donc en cylindriques dans l'espace.

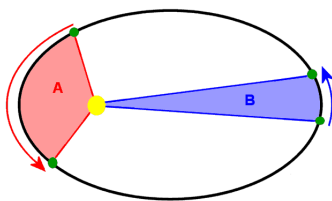
② Loi des aires :

En coordonnées cylindriques :
$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \\ \vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{L}_O(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{cases}$$

On introduit alors la constante des aires : $C = r^2\dot{\theta}$, qui est (à un facteur 2 près) la vitesse aréolaire.

Loi des aires

Le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps identiques.



VII -2. Approche énergétique

La force centrale étant conservative, le système voit son énergie mécanique conservée :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

L'énergie mécanique est donc une intégrale première du mouvement.

Pour se ramener à la discussion sur le domaine spatial du mouvement accessible en fonction du profil d'énergie potentielle, on cherche à exprimer l'énergie mécanique en fonction du seul paramètre r (bien que le mouvement soit à deux dimensions). On ajoute alors à l'énergie potentielle une partie de l'énergie cinétique (la partie orthoradiale) pour définir l'**énergie potentielle effective** :

$$E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} \text{ où } C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}$$

On a alors $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$, et on peut exprimer le "domaine radial du mouvement" par la condition $E_m \geq E_{p,eff}(r)$.

Selon la nature de la force centrale, on aura différents profils d'énergie potentielle effective possibles, donc différents types de trajectoires accessibles.

VII -3. Champ newtonien attractif

a) Lois de Képler

On peut citer dans le cas du mouvement des planètes autour du soleil les trois lois énoncées par Képler :

1. Loi des orbites : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.
2. Loi des aires : les aires balayées par le segment SP (soleil-planète) pendant des intervalles de temps identiques sont égales.
3. Loi des périodes : le rapport du carré de la période de révolution de la planète sur le cube du demi-grand axe de son orbite est le même pour toutes les planètes du système solaire. $\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$

b) profil énergétique

Le graphe suivant montre le profil énergétique correspondant à une force centrale newtonienne (en $1/r^2$) attractive (force gravitationnelle ou force électrostatique entre deux charges opposées).

On choisit d'étudier le cas de l'interaction gravitationnelle avec le soleil.

On a alors $E_p(r) = -\frac{GmM_S}{r}$, où M_S est la masse du soleil.

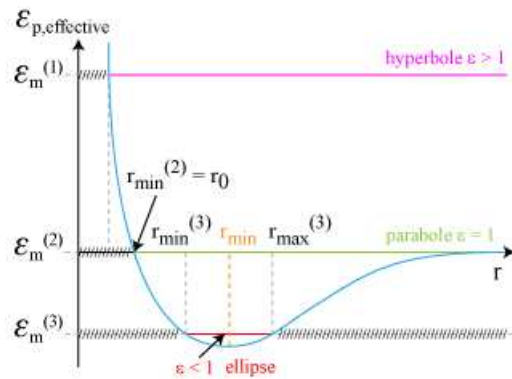
Il vient

$$E_{p,eff}(r) = -\frac{GmM_S}{r} + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2}$$

Cette fonction admet un minimum en

$$r_0 = \frac{C^2}{GM_S} \text{ et } E_{p,eff}(r_0) = -\frac{GmM_S}{2r_0} = E_0$$

Selon la valeur de l'énergie mécanique, on peut avoir des trajectoires correspondant à des états diffusifs ou à des états liés.



① $E_m > 0$: la trajectoire est une **hyperbole** (branche entourant le foyer où se trouve le soleil)

② $E_m = 0$: la trajectoire est une **parabole**, c'est l'état limite entre un état lié et un état diffusif.

Comme la particule peut s'éloigner à l'infini du Soleil, cette trajectoire ne peut pas décrire un mouvement planétaire.

③ $E_0 < E_m < 0$: la trajectoire est une **ellipse**, l'état est lié, et $r_1 < r < r_2$.

Le point le plus proche du soleil $P(r = r_1)$ s'appelle le périhélie, le point le plus éloigné du soleil $A(r = r_2)$ s'appelle l'aphélie. D'après la loi des aires, $C = rv = cte$ et $r_P < r_A$ donc $v_P > v_A$.

L'énergie mécanique est donnée par $E_m = -\frac{GmM_S}{2a}$ avec $2a = r_P + r_A$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

La troisième loi de Kepler s'exprime par $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$.

④ $E_m = E_0$: la trajectoire est circulaire. L'absence de force orthoradiale implique que l'accélération est purement radiale, le mouvement circulaire est donc uniforme, de vitesse $v_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0}}$.

Le moment cinétique est $\vec{L}_O(M) = mr_0 v_0 \vec{e}_z$.

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{GmM_S}{2r_0}$.

L'énergie potentielle est $E_p = -2E_c = -\frac{GmM_S}{r_0}$.

Finalement l'énergie mécanique est, pour une trajectoire circulaire

$$E_m = -\frac{GmM_S}{2r_0}$$

La vitesse angulaire est $\omega_0 = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0^3}}$, et comme la période de révolution

est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, il vient $\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$.

c) Vitesses cosmiques

Il s'agit de vitesses particulières correspondant aux différents mouvements d'un satellite autour de la Terre, qui est désormais l'astre attracteur.

★ Satellite géostationnaire

Un satellite est dit géostationnaire s'il reste à la verticale du même point de la surface de la Terre. Il faut pour cela qu'il soit dans le plan équatorial et que sa rotation soit synchrone avec la Terre, donc il a un mouvement circulaire de période $T = 1$ jour (sidéral).

On a $\frac{T^2}{r_{GS}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ d'où $r_{GS} = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}}$

Données :

- Jour sidéral : $T_{\text{sidéral}} = 86164$ s
- Jour solaire : $T_{\text{solaire}} = 86400$ s
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
- $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- $R_T = 6380 \text{ km}$

Finalement $r_{GS} = 42164 \text{ km}$, ce qui donne une altitude de $h_{GS} = 35786 \text{ km}$.

★ Vitesse minimale de mise en orbite

Cette vitesse correspond à celle qu'il faut communiquer à un satellite pour le placer sur un orbite circulaire basse ($r_0 \simeq R_T$).

On l'appelle la **première vitesse cosmique**.

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

L'application numérique donne environ $v_1 = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 30000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Si la vitesse communiquée au satellite est inférieure à cette vitesse limite, la satellisation échoue et le satellite retombe sur Terre.

★ Vitesse de libération

Cette vitesse est celle qu'il faut communiquer au satellite lorsqu'il est au voisinage de la Terre ($r = R_T$) pour le placer sur un état diffusif limite (parabolique) dans lequel il peut s'éloigner à l'infini de la Terre ("libération").

Il s'agit de la **deuxième vitesse cosmique**.

On a donc $E_m = 0$ soit
$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_1$$

L'application numérique donne environ $v_2 = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 40000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Finalement, pour lancer un satellite, il faut lui communiquer une vitesse

$$v_1 < v < v_2.$$

Remarquons qu'on peut donner une estimation de la taille qu'un astre doit avoir pour pouvoir être un trou noir¹.

¹Trou noir : $v_2 > c$

Pour qu'un astre (M donné) soit un trou noir, il faut que son rayon vérifie la condition suivante : $R < r_{lim} = \frac{2GM}{c^2}$.

Pour le Soleil : $M_S = 2.10^{30} \text{ kg}$, $r_{lim} = 3 \text{ km}$ ($R_S = 696.10^3 \text{ km}$).

Pour la Terre : $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$, $r_{lim} = 9 \text{ mm}$ ($R_T = 6.3.10^3 \text{ km}$).

VIII - Mouvement d'une particule chargée

VIII -1. Force de Lorentz

Une particule M portant la charge q et animée d'un mouvement de vitesse $\vec{v}(M)$ placée dans un champ électrique $\vec{E}(M)$ et magnétique $\vec{B}(M)$ ressent la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q(\vec{E}(M) + \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M))$$

On remarque que les vecteurs \vec{v} et \vec{B} dépendent du référentiel d'étude.

La puissance de la force de Lorentz se limite à la puissance de sa composante électrique, la force magnétique est de puissance nulle, elle ne travaille pas :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M) = q\vec{E}(M) \cdot \vec{v}(M)$$

VIII -2. Action d'un champ électrique

Considérons une particule chargée $M(m, q)$ soumise à l'action d'un champ électrique \vec{E} uniforme. Le poids d'une telle particule est généralement négligeable devant la force électrique².

a) Équation du mouvement

L'application du principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans un référentiel supposé galiléen donne alors

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

Avec pour conditions initiales $\begin{cases} \vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0 \\ \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \end{cases}$ il vient

$$\vec{OM}(t) = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0$$

²Pour un électron, $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ et $q = 1,6.10^{-19} \text{ C}$, on a $\frac{mg}{|qE|} \simeq \frac{10^{-10}}{|E|}$. Les champs usuels étant de norme généralement supérieure à $1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, le poids est bien négligeable devant la force de Lorentz

b) Aspect énergétique

D'un point de vue énergétique, la force électrique est conservative et dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV(M)$ où $V(M)$ est le potentiel dont dérive le champ électrique \vec{E} .

L'énergie de la particule est conservée : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{cte}$

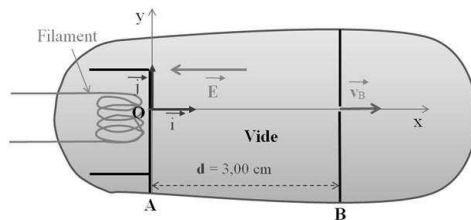
c) Applications

① Cas $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$

On a alors un accélérateur linéaire de particules. La conservation de l'énergie mécanique donne

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1$$

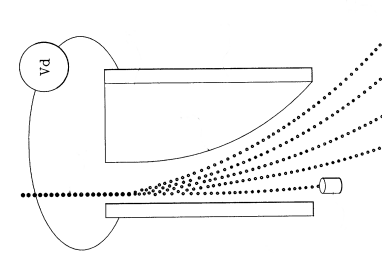
On a donc $v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}U$ où $U = V_0 - V_1$ est la tension accélératrice (les particules sont bien accélérées si $qU > 0$)³. Une des applications est le canon à électrons.



② Cas $\vec{E} \perp \vec{v}_0$

On a alors une déflexion électrostatique dans la zone de champ non nul, puis une trajectoire rectiligne en sortie. La déflexion est proportionnelle au rapport $\frac{|qU|}{m}$, ce qui permet d'envisager diverses applications (séparation isotopique pour une tension fixe, matérialisation d'une tension U variable).

³Remarquons que pour atteindre une vitesse relativiste $v = 0,1c$ pour des électrons, une tension accélératrice de $U = 2530 \text{ V}$ suffit



③ Cas $(\vec{E}, \vec{v}_0) = \alpha$

Le mouvement de la particule chargée est alors parabolique, comme pour le lancement d'un projectile dans le champ de pesanteur. On peut là aussi envisager des applications en séparation isotopique puisque les caractéristiques de la parabole dépendent du rapport $\frac{q}{m}$.

VIII -3. Action d'un champ magnétique

a) Aspect énergétique

La force magnétique ne travaille pas, elle est de puissance nulle, donc d'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = 0$$

La vitesse de la particule a une norme constante : $v = \|\vec{v}\| = \text{cte}$

Attention toutefois, ce n'est pas parce que la norme de la vitesse reste constante que le vecteur vitesse reste inchangé !

Remarquons que l'on néglige généralement le poids dans ces études⁴.

b) Applications

① Cas $\vec{B} \parallel \vec{v}_0$

Notons $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

L'équation du mouvement de la particule dans un référentiel galiléen se déduit

⁴Pour un champ magnétique relativement intense ($B = 0,1 \text{ T}$) appliqué à un électron, $F \simeq 10^{-20}v$ et $P \simeq 10^{-30} \text{ N}$. Pour des vitesses usuelles de l'ordre de $v = 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, le poids est bien négligeable devant l'action magnétique

de l'application du principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Il vient } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m} \vec{v} \wedge \vec{e}_z.$$

$$\text{En projection sur } \vec{e}_z : \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{e}_z)}{dt} = \frac{qB}{m} (\vec{v} \wedge \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = 0$$

On a donc $v_z = \text{cte} = v_0$

Comme d'autre part $v = \text{cte} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0$, il vient $v_x^2 + v_y^2 = 0$. On a donc $v_x = 0$ et $v_y = 0$, le mouvement est rectiligne uniforme.

② Cas $\vec{B} \perp \vec{v}_0$

Considérons un électron ($m, q = -e$) qui pénètre au point O dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ uniforme, avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

L'application du PFD dans un référentiel galiléen donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge (B_0 \vec{e}_z) = eB_0 \vec{e}_z \wedge \vec{v}.$$

En posant $\omega = \frac{eB}{m}$, homogène à l'inverse d'un temps, il vient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on a par conséquent

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega v_y ; \quad \frac{dv_y}{dt} = \omega v_x ; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

De la dernière équation on déduit que $v_z = \text{cte} = 0$. **Le mouvement est donc plan.** L'électron reste dans le plan perpendiculaire à \vec{B} . D'autre part, comme $v = \text{cte} = v_0$, il vient $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$.

Pour découpler les deux premières équations, on peut introduire la variable complexe $Z = x + jy$, qui vérifie l'équation différentielle $\frac{d\dot{Z}}{dt} = j\omega \dot{Z}$. Une fois intégrée en tenant compte des conditions initiales, on en déduit l'expression de $Z(t)$, puis celles de $x(t)$ et $y(t)$:

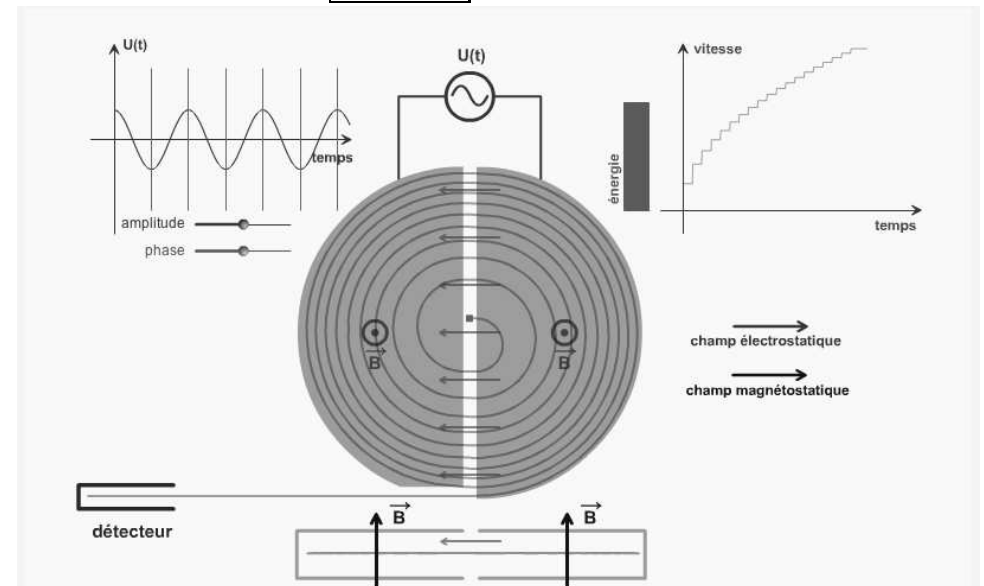
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$$

Remarquons qu'on obtiendrait les mêmes résultats en cherchant l'équation différentielle du second degré dont v_x (ou v_y) est solution.

On reconnaît l'équation paramétrique d'un cercle de rayon $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}$, et de centre $C \left(0, \frac{v_0}{\omega}\right)$.

Le mouvement de la particule est alors **circulaire uniforme**, et la période de rotation T est **indépendante de la vitesse initiale** : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}$.

Cette propriété est à la base du principe des accélérateurs de particules appelés **cyclotron** et la pulsation $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ est la **pulsation cyclotron**.



③ Cas général

On décompose alors le vecteur vitesse initiale en une composante parallèle au champ magnétique (qui donne lieu à un mouvement rectiligne uniforme dans la direction du champ) et une composante perpendiculaire au champ (qui donne lieu à un mouvement circulaire uniforme perpendiculairement au champ magnétique). Le mouvement résultant est la superposition de ces deux mouvements : il s'agit d'un mouvement **hélicoïdal**.

IX - Conclusion

Méthode. Pour résoudre un problème de mécanique :

- ① Faire un schéma.
- ② Analyser le problème pour répondre aux questions suivantes : quel est le système à étudier ? dans quel référentiel ? compte tenu des forces en présence et de la géométrie du problème, quel est le système de repérage le mieux adapté ?
- ③ Mener l'étude cinématique : exprimer le(s) vecteur(s) position, vitesse et accélération dans le repère adapté au problème.
- ④ Mener l'étude dynamique : exprimer les forces sur les vecteurs de base du repère adapté au problème.
- ⑤ Appliquer un théorème de la mécanique reliant les composantes cinématiques aux forces : PFD à projeter sur les vecteurs de base du repère adapté au problème, théorème énergétique, théorème du moment cinétique, ...