TD 32 - Déterminants

Ex 1:

1)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; C_1 \leftarrow C_1 + C_n$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & \ddots & 1 \\ -1 & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & & \ddots & 1 \\ -1 & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= (-1)^{2n+2} D_{n-2}$$

$$= D_{n-2}$$

$D_1 = 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Donc $\begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a \\ a & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 1\end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}\, a \begin{vmatrix} a & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}\, a^n$$

3)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & a & & & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 1+a & 0 & & & 1 \end{vmatrix}_n \qquad C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & & & 0 & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & & a & -1 \\ 0 & & & & 1 & a-1 \\ 1+a & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$= (-1)^{n+1}(1+a) \underbrace{\begin{vmatrix} a & & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & a & -1 \\ 0 & & 1 & a-1 \end{vmatrix}_{n-1}}_{D_{n-1}}$$

$$= (1+a)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & & 0 & a-1 \\ 1 & \ddots & & a \\ & \ddots & a & \vdots \\ 0 & & 1 & a \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-1} \qquad C_n \leftarrow \sum C_i$$

$$= (1+a)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \\ 1 & \ddots & & & -1 & 0 \\ & \ddots & 0 & & \vdots & \vdots \\ & & & a & -1 & \\ & 0 & & 1 & a-1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (1+a)(-1)^{n-1}\left(\underbrace{aD_{n-2} + (-1)(-1)^{n+1}}_{D_{n-1}}\right)$$

$$D_{n-1} = aD_{n-2} + (-1)^{n+1}$$

$$= a\left(aD_{n-3} + (-1)^{n}\right) + (-1)^{n+1}$$

$$= a^2\left(aD_{n-4} + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^{n}a + (-1)^{n+1}$$

$$= a^3 D_{n-4} + a^2(-1)^{n-1} + (-1)^{n}a + (-1)^{n+1}$$

$$\vdots$$

$$= a^{n-3} D_2 + a^{n-4}$$

$$= a^{n-3} D_2 + (-1)^{n+1}\left(1 - a + a^2 + \dots + a^{n-4}\right)$$

$$= a^{n-3} D_2 + (-1)^{n+1}\frac{1-(-a)^{n-3}}{1+a}$$

$$= a^{n-3}\left(a(a-1)+1\right) + (-1)^{n+1}\frac{1-(-a)^{n-3}}{1+a}$$

$$D_{n-1} = a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} + (-1)^{n+1}\frac{1-(-a)^{n-3}}{1+a}$$

$$(1+a)D_{n-1} = \cancel{a^{n-1}} - \cancel{a^{n-2}} + a^{n-3} + a^{n} - \cancel{a^{n-1}} + \cancel{a^{n-2}} + (-1)^{n+1}\left(1-(-a)^{n+3}\right)$$

$$= a^{n-3} + (-1)^{n+1} - a^{n-3} + a^{n}$$

Ex 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Mq A semblable à une matrice diagonale

On considère l'endo canoniquement associé :

$$f : M_{31}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{31}(\mathbb{R})$$
$$X \longmapsto AX$$

Analyse :

Supp A soit semblable à $D \in D_3(\mathbb{R})$ tq : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$

Il existe une base $(e_1, e_2, e_3) \in M_{31}(\mathbb{R})$ tq :

$$\begin{cases} f(e_1) = d_1 e_1 \\ f(e_2) = d_2 e_2 \\ f(e_3) = d_3 e_3 \end{cases}$$

$\forall i \in [\![1,3]\!] : e_i \in \underbrace{\mathrm{Ker}(f - d_i \, Id)}$

$\Rightarrow$ pas réduit à 0
donc pas inj $\Rightarrow$ pas bij

$\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\det(A - d_i \, Id) = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 6-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -3 \\ 4-\lambda & 6-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ 4-\lambda & 6-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4-\lambda & 6-\lambda & 10-\lambda \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 10-\lambda \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 8 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((4-\lambda)(-2-\lambda) + 16\right)$$

$$= (1-\lambda)(-8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 8)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4)(-\lambda + 2)$$

Donc $\det(A - \lambda I_3) = 0$ ssi $\lambda \in \{2 ; 1, 4\}$

donc $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 4 \end{cases}$ à l'ordre près

$$\mathrm{Ker}(f - Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R}) : \underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0}_{*} \right\}$$

$$* \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 3z - x = 0 \\ -2x + 6y + 6z - y = 0 \\ 2x - 2y - 2z - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 5y + 6z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ -2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -\frac{1}{2} y \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(f - Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verif en faisant $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$\mathrm{Ker}(f - 2Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(f-4Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{31}(\mathbb{R}) : \underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0}_{*} \right\}$$

$$* \iff \begin{cases} 3x - 2y - 3z - 4x = 0 \\ -2x + 6y + 6z - 4y = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x - 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y - 3z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\iff \begin{cases} -3y - 6z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -5y \end{cases}}$$

Faux

$$\operatorname{Ker}(f-4Id) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Synthèse :

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}$

Mq (e_1, e_2, e_3) forment une base

Mq $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$ matrice de passage n'est pas inversible

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

Donc (e_1, e_2, e_3) une base

Or $f(e_1) = e_1$

$f(e_2) = 2e_2$

$f(e_3) = 4e_3$

Donc $\mathrm{Mat}_{\underset{(e_1, e_2, e_3)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{B}}}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D$

Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c} f$

donc $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc A et D sont semblables.