Formule des trois niveaux

1) Des formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit a un réel . On note φ_a l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe $P(a)$. L'application φ_a s'appelle *l'évaluation en* a.
Pour tout réel a, φ_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. En effet , si P et Q sont deux polynômes et λ et μ deux réels, on a

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda\varphi_a(P) + \mu\varphi_a(Q).$$

Soit a un réel et $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$. φ_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

D'autre part, soient a et b deux réels. On note encore ψ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe $\displaystyle\int_a^b P(t)\ dt$. On sait que ψ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Liberté de la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$.

On se place dorénavant sur $\mathbb{R}_3[X]$. On se donne trois réels deux à deux distincts a, b et c. Montrons que la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$.
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda\varphi_a + \mu\varphi_b + \nu\varphi_c = 0 \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}_3[X], (\lambda\varphi_a + \mu\varphi_b + \nu\varphi_c)(P) = 0 \Rightarrow \forall P \in \mathbb{R}_3[X], \lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(c) = 0.$$

On applique alors l'égalité précédente, valable pour tout polynôme de degré au plus 3, successivement aux trois polynômes $P_a = \dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, $P_b = \dfrac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$ et $P_c = \dfrac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$. Puisque $P_a(a) = P_b(b) = P_c(c) = 1$ et que $P_a(b) = P_a(c) = P_b(a) = P_b(c) = P_c(a) = P_c(b) = 0$, on obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$. On a montré que

Si a, b, c sont trois réels deux à deux distincts, la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ est une famille libre du dual de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Indépendance des formes linéaires φ_a, φ_b, φ_c et ψ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$.

a, b et c désignent trois réels deux à deux distincts. Tout d'abord, $\dim(\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 < +\infty$. D'après 2), la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ est libre et donc deux cas se présentent pour la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \psi)$ à savoir :

- **1er cas.** la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \psi)$ est libre et donc une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R})$,
- **2ème cas.** la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \psi)$ est liée ce qui équivaut, puisque la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ est libre, au fait que ψ est combinaison linéaire de φ_a, φ_b et φ_c.

On va montrer que $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c) \Leftrightarrow \psi(Q) = 0$ où $Q = (X-a)(X-b)(X-c)$. On note que, puisque $Q \notin \mathrm{Vect}(P_a, P_b, P_c)$ pour des raisons de degré, la famille (P_a, P_b, P_c, Q) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc la famille (P_a, P_b, P_c, Q) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Puisque $\varphi_a(Q) = \varphi_b(Q) = \varphi_c(Q) = 0$, si $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, alors $\psi(Q) = 0$.

Inversement, supposons que $\psi(Q) = 0$. Soit $\varphi = \psi(P_a)\varphi_a + \psi(P_a)\varphi_a + \psi(P_a)\varphi_a$. Alors, $\varphi(P_a) = 1 \times \psi(P_a) + 0 \times \psi(P_b) + 0 \times \psi(P_c) = \psi(P_a)$ et de même, $\varphi(P_b) = \psi(P_b)$ et $\varphi(P_c) = \psi(P_c)$. Enfin, $\varphi(Q) = 0 = \psi(Q)$.
Les deux formes linéaires φ et ψ coïncident sur une base de $\mathbb{R}[X]$ et donc $\psi = \varphi = \psi(P_a)\varphi_a + \psi(P_a)\varphi_a + \psi(P_a)\varphi_a$.

On a montré que $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c) \Leftrightarrow \psi(Q) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\ dt = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\ dt &= \int_a^b (t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+ac+bc)t - abc)\ dt \\ &= \frac{1}{4}(b^4 - a^4) - \frac{1}{3}(a+b+c)(b^3 - a^3) + \frac{1}{2}(ab+ac+bc)(b^2 - a^2) - abc(b-a)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\ dt &= \frac{b-a}{12}(3(a^3+a^2b+ab^2+b^3)-4(a+b+c)(a^2+ab+b^2)+6(ab+ac+bc)(a+b)-12abc)\\ &= \frac{b-a}{12}(-a^3-b^3+a^2b+ab^2+c(2a^2+2b^2-4ab)) = \frac{b-a}{12}((a^2-b^2)(b-a)+2c(b-a)^2)\\ &= \frac{(b-a)^3}{12}(2c-(a+b)).\end{aligned}$$

Finalement, puisque a et b sont distincts

$$\boxed{\psi \in \text{Vect}(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c) \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}.}$$

Dans le cas où $c = \dfrac{a+b}{2}$, ψ est une combinaison linéaire de φ_a, φ_b et φ_c. Donc, il existe trois réels λ, μ et ν, uniquement définis puisque $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$ est libre, tels que $\psi = \lambda\varphi_a + \mu\varphi_b + \nu\varphi_c$. Cette dernière égalité s'écrit encore

$$\boxed{\exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 /\ \forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \int_a^b P(t)\ dt = \lambda P(a) + \mu P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \nu P(b).}$$

4) La formule des trois niveaux.

Déterminons explicitement les trois réels λ, μ et ν du 3). Pour cela, on applique l'égalité précédente, valable pour tout polynôme P de degré au plus 3. On a vu que $\lambda = \psi(P_a)$, $\mu = \psi(P_b)$ et $\nu = \psi(P_c)$ avec $c = \dfrac{a+b}{2}$. Donc,

$$\begin{aligned}\lambda = \psi(P_a) &= \int_a^b P_a(t)\ dt\\ &= \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{(a-b)(a-c)}\ dt = \frac{1}{(a-b)(a-c)}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}(b^2-a^2)(b+c) + bc(b-a)\right)\\ &= \frac{1}{6(c-a)}(2(a^2+ab+b^2)-3(a+b)(b+c)+6bc) = \frac{1}{6(c-a)}(2a^2-b^2-ab+c(-3a+3b))\\ &= \frac{1}{3(b-a)}\left(2a^2-b^2-ab+\frac{a+b}{2}(-3a+3b)\right) = \frac{1}{3(b-a)}(b-a)\left(3\frac{a+b}{2}-(2a+b)\right)\\ &= \frac{b-a}{6}.\end{aligned}$$

Puis en échangeant les rôles de a et b, $\nu = \dfrac{b-a}{6}$. Enfin

$$\begin{aligned}\mu = \psi(P_c) &= \int_a^b P_c(t)\ dt = \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)}\ dt\\ &= \frac{1}{(c-a)(c-b)}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}(b^2-a^2)(a+b) + ab(b-a)\right)\\ &= -\frac{4}{6(b-a)^2}(b-a)(2(a^2+ab+b^2)-3(a+b)(a+b)+6ab) = -\frac{4}{6(b-a)}(-a^2-b^2+2ab) = \frac{4(b-a)}{6}.\end{aligned}$$

On a obtenu **la formule des trois niveaux** permettant de calculer la valeur de l'intégrale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 sur un segment connaissant les valeurs de ce polynôme au début, au milieu et à la fin de ce segment :

$$\boxed{\text{Soient } a \text{ et } b \text{ deux réels distincts. } \forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \int_a^b P(t)\ dt = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right).}$$

