Jheffrey
MIS

Devoir maison n°6

1

Exercice 1 : Mines PSI 2015

I/ Le groupe symplectique

1. $J^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$ et ${}^tJ = -J$

donc $J\,{}^tJ = I_{2n}$, l'inverse de J est donc ${}^tJ$

2. ${}^tJJJ = J$ donc $J \in Sp_{2n}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = J$ donc $K(\alpha) \in Sp_{2n}$

3. si $U \in \mathcal{G}_n$: $\begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tU \\ U^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} = J$

donc $L_U \in Sp_{2n}$

4. $\det J = -\det(I_n)\det(-I_n) = 1$, ainsi si $M \in Sp_{2n}$,

$\det(M)^2 = \det J$ c'est à dire $\det(M) = \pm 1$

5. soit $(A,B) \in Sp_{2n}^2$ donc ${}^tB\,{}^tAJAB = {}^tBJB = J$ donc $AB \in Sp_{2n}$

6 si $M \in Sp_{2n}$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$, non nul donc $M \in \mathcal{G}_{2n}$

et ${}^tMJM = J$ donc ${}^tMJ = JM^{-1}$ et $J = {}^tM^{-1}JM^{-1}$ donc $M^{-1} \in Sp_{2n}$

7. si $M \in Sp_{2n}$ alors ${}^tMJM = J$ puis $M^{-1}\,{}^tJ\,{}^tM^{-1} = {}^tJ$

Donc $M^{-1} J\, {}^tM^{-1} = J$ puis $J = MJ\,{}^tM$ donc ${}^tM \in Sp_{2n}$

8. si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} {}^tC & -{}^tA \\ {}^tD & -{}^tB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tCA - {}^tAC & {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tDA - {}^tBC & {}^tDB - {}^tBD \end{pmatrix}$

et $M \in Sp_{2n}$ si $\begin{cases} {}^tCA = {}^tAC \\ {}^tBD = {}^tDB \\ {}^tCB - {}^tAD = -I_n \\ {}^tDA - {}^tBC = I_n \end{cases}$

II / centre de Sp_{2n}

9. si $M \in Sp_{2n}$ $MI_{2n} = M = I_{2n}M$ et $-MI_{2n} = -M = -I_{2n}M$

donc $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \in Z$

10. si $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J$ donc $L \in Sp_{2n}$

et $ML = LM = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix}$ et ${}^tL \in Sp_{2n}$

donc $M\,{}^tL = {}^tLM = \begin{pmatrix} A & B \\ A+C & B+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ C+D & D \end{pmatrix}$

Ainsi on a que $A+C = A$ donc $C = 0$, $A+B = B$ donc $B = 0$

et $A+C = C+D$ donc $D = A$.

11. Comme $L_U \in Sp_{2n}$ où $U \in \mathcal{G}_n$ donc $L_U M = M L_U$

et $\begin{pmatrix} AU & 0 \\ 0 & A^t U^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} A \end{pmatrix}$ ainsi $UA = AU$ est vrai pour tout $U \in \mathcal{G}_n$

donc A commute avec toute matrice de $\mathcal{G}_n$

12. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $I_n + E_{ij}$ triangulaire et $\det(I_n + E_{ij}) = 1$

donc $I_n + E_{ij} \in \mathcal{G}_n$ et A commute avec $E_{ij} + I_n$.

Ainsi $A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A$ donc $AE_{ij} = E_{ij}A$

et $(AE_{ij})_{ke} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \delta_{ik} \delta_{je} = a_{ne}$

et $(E_{ij}A)_{ke} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{in} \delta_{jk} a_{ke} = a_{jk}$

notamment si $i = j$ donc $a_{ii} = a_{jj}$ et $i \neq j$ $a_{ij} = 0$

donc $A = a_{11} I_n$ et $\det(M) \in \{-1, 1\}$ donc

$\det(A) = a_{11} \det I_n = a_{11} \in \{-1, 1\}$.

Ainsi $A \in \{-I_n, I_n\}$ et ainsi $Z \subset \{-I_{2n}, I_{2n}\}$ donc $Z = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$

III / Déterminant d'une matrice symplectique

13. Soit $(Q, U, V, W) \in M_n^4$ tel que $\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

donc $V = C$, $W = D$, $QD = B$ donc $Q = BD^{-1}$

et $U + QV = A$ donc $U = A - BD^{-1}C$

14. si $M \in S_{p2n}$ donc d'après la question 8 :

${}^tBD = {}^tDB$ donc ${}^tD^{-1}\,{}^tBD = {}^tD^{-1}\,{}^tDB = B$

donc ${}^tD^{-1}\,{}^tB = BD^{-1}$ et ${}^t(BD^{-1}) = BD^{-1}$.

BD^{-1} est symétrique.

De plus $\det({}^tM) = \det(M) = \det({}^tD\,{}^tA - {}^tD\,{}^tC\,{}^t(BD^{-1})) \times 1$

$= \det({}^tD({}^tAD - {}^tCB)D) = \frac{\det D}{\det D} \det({}^tAD - {}^tCB)$

$= \det({}^tAD - {}^tCB)$ et d'après 8 ${}^tAD - {}^tCB = I_n$

donc $\det(M) = 1$.

15. $(QV_1|QV_2) = (QV_1|s_2PV_2) = s_2\,{}^tV_1\,{}^tQPV_2 = s_2\,{}^tV_1\,{}^tPQV_2$

$= s_2(PV_1|QV_2)$. Ainsi $s_1(QV_1|QV_2) = s_2(QV_1|QV_2)$

or $s_1 \neq s_2$ donc $(QV_1|QV_2) = 0$

16. si $X \in \ker B \cap \ker D$ donc $BX = 0$ et $DX = 0$ or $M \in S_{p2n}$

donc ${}^tCB - {}^tAD = I_n$ et ${}^tCBX - {}^tADX = X \Rightarrow X = 0$

Geoffrey
Nils

Devoir maison n°6

Exercice 1 : Mines PSI 2015

III / Détermination d'une matrice symplectique

16. $\ker B \cap \ker D = \{0\}$

17. On a montré que $\ker B \cap \ker D = \{0\}$ ainsi :

si $DV_i = 0$ alors $s_i BV_i = 0$ et alors $V_i = 0$ or V_i non nul donc

absurde et V_i $DV_i \neq 0$, de plus comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

étant donné que D non inversible et que ${}^tBD = {}^tDB$ d'après 8.

d'après la question 15 $(DV_i \mid DV_j) = 0$ donc la famille $(DV_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

est orthogonal donc libre.

18. Supposons qu'il n'existe pas de réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

Alors on peut choisir $s_1 \dots s_{n+1}$ réels non nuls tel que

$\forall i \in [\![1,n+1]\!]$ $D - s_i B \notin \mathcal{G}_n$ car il existe des vecteurs V_i non nuls

tel que $\forall i$ $(D - s_i B)V_i = 0$, d'après la question 17, les $(V_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$

forment donc un système libre de E_n de dimension n ce qui est absurde

19. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D-\alpha B$ inversible, $K(\alpha) \in S_{2n}$

et $\det(K(\alpha)) = 1$ de plus si $M \in S_{2n}$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

alors $K(\alpha)M \in S_{2n}$ d'après 5, de plus $\det(K(\alpha)M) = \det M$

et $K(\alpha)M = \begin{pmatrix} A & B \\ C-\alpha A & D-\alpha B \end{pmatrix}$ et $D-\alpha B$ inversible

donc on se ramène au cas de 6 grâce à 14 et

$\det(K(\alpha)M) = 1 = \det(M)$.

Exercice 2 : Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

1. Soit I un idéal de $\mathcal{L}(E)$, on le prend idéal à droite sans perte de généralité. Soit $(f,g) \in I$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$, soit $h \in \mathcal{L}(E)$ donc $(\lambda f + \mu g)\circ h = \lambda f\circ h + \mu g\circ h$ et I sous groupe additif donc étant donné que $(\lambda f\circ h, \mu g\circ h) \in I^2$, $\lambda f\circ h + \mu g\circ h \in I$.

Ainsi I est une partie non vide, car contient $0_{\mathcal{L}(E)}$, de $\mathcal{L}(E)$ et I est un sous espace de $\mathcal{L}(E)$

2. Étant donné que si $f \in \mathcal{L}(E)$ $f\circ 0 = 0$ donc $0 \in \Delta_f$ et si $(g,h) \in \mathcal{L}(E)^2$, $f\circ g - f\circ h = f\circ(g-h)$ donc $f\circ(g-h) \in \Delta_f$.
car $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel donc $g-h \in \mathcal{L}(E)$
Ainsi Δ_f est un sous-groupe additif de $\mathcal{L}(E)$.

Puis si $h \in \mathcal{L}(E)$ $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ et $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre donc $g\circ h \in \mathcal{L}(E)$ et $f\circ(g\circ h) \in \Delta_f$. Donc Δ_f est un idéal à droite. De la même manière $0 \in \Gamma_f$ et si $(g,h) \in \mathcal{L}(E)^2$ $g\circ f - h\circ f = (g-h)\circ f$ et $(g-h)\circ f \in \Gamma_f$ donc Γ_f sous groupe additif de $\mathcal{L}(E)$ et si $h \in \mathcal{L}(E)$ $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ et $h\circ g \in \mathcal{L}(E)$ donc $(h\circ g)\circ f \in \Gamma_f$

3. Soit $f \in \mathcal{J}_F$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ soit $x \in E$ $g(x) \in E$ et $f \circ g(x) \in F$ donc $\operatorname{Im} f \circ g \subset F$ et $f \circ g \in \mathcal{J}_F$, il s'agit donc d'un idéal à droite. Maintenant soit $f \in K_F$, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in F$, comme $F \subset \ker f$ $f(x) = 0$ et $g \circ f(x) = 0$ donc $F \subset \ker g \circ f$ donc $g \circ f \in K_F$, qui est ainsi un idéal à gauche.

4. Soit $\dim F = p \leq n$ et $(e_1, \dots, e_p)$ base de F qu'on complète à l'aide de $n-p$ vecteurs de E $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ tel que $B(e_1, \dots, e_n)$ base de E. Si $f \in \mathcal{J}_F$ $\operatorname{Mat}_B f = \begin{pmatrix} A_{p,n} \\ 0_{n-p,n} \end{pmatrix}$ ainsi $\dim \{\operatorname{Mat}_B f, f \in \mathcal{J}_F\} = np$ et $f \mapsto \operatorname{Mat}_B f$ isomorphisme de $\mathcal{J}_F$ dans $\{\operatorname{Mat}_B f, f \in \mathcal{J}_F\}$ ainsi $\dim \mathcal{J}_F = np$
Soit $f \in K_F$ $\operatorname{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0_{n,p} & A_{n-p,n} \end{pmatrix}$ et de la même manière $\dim K_F = n(n-p)$

5. $g \in \ker \phi$ alors $f \circ g = 0$ donc $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ donc $g \in \mathcal{J}_{\ker f}$ et $\dim \ker \phi = \dim \mathcal{J}_{\ker f} = n(n - \operatorname{rg}(f))$ et $\Delta_f = \operatorname{Im} \phi$ donc d'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \Delta_f = n\operatorname{rg}(f)$

Xhaffray
Nils

8

Devoir maison n°6

Exercice 8 : Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

5. $\dim J_{\mathrm{Im} f} = n \dim \mathrm{Im} f = n\,\mathrm{rg}(f)$ d'après la question 4

et si $g \in \mathcal{L}(E)$ $\mathrm{Im}\, f\circ g \subset \mathrm{Im} f$ donc $\cancel{\Delta_f \subset \mathrm{Im} f}$ $\Delta_f \subset J_{\mathrm{Im} f}$

et $\dim \Delta_f = \dim J_{\mathrm{Im} f}$ donc $\Delta_f = J_{\mathrm{Im} f}$

~~6. Posons $\varphi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g\circ f$ donc $\Gamma_f = \mathrm{Im}\,\varphi$~~

~~et si $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ donc $g\circ f = 0$ et $\cancel{\mathrm{Ker} f} \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc $g \in K_{\mathrm{Ker} f}$~~

~~et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim K_{\mathrm{Ker} g} = \cancel{n(n-\mathrm{rg}(f))}$ $n(n-n+\mathrm{rg}(f)) = n\,\mathrm{rg}(f)$~~

~~donc $\dim K_{\mathrm{Ker} f} = \mathrm{rg}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \Gamma_f =$~~

6. On pose $\varphi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g\circ f$ ainsi $\Gamma_f = \mathrm{Im}\,\varphi$ et si $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$g\circ f = 0$ donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g \iff g \in K_{\mathrm{Im} f}$ et ainsi

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim K_{\mathrm{Im} f} = n(n-\mathrm{rg}(f))$ d'après la question 4

Puis d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \Gamma_f = n^2 - n(n-\mathrm{rg}(f))$

$= n(n-n+\mathrm{rg}(f)) = n(n-\dim \mathrm{Ker} f) = \dim K_{\mathrm{Ker} f}$

et $\Gamma_f \subset K_{\mathrm{Ker} f}$ donc $\Gamma_f = K_{\mathrm{Ker} f}$

7. Soit F un sous espace vectoriel de E et H ~~un~~ supplémentaire

de F ainsi $F \oplus H = E$, soit f et h les projecteurs :

f sur F parallèlement à H et h sur H parallèlement à F.

Alors $\mathrm{Im} f = F$ et $\mathrm{Ker} f = H$ donc d'après 5. $\Delta_f = J_F$

et $\mathrm{Im}\, h = H$ et $\ker h = F$ donc d'après 6 $\Gamma_h = K_F$

8. a) Si $g \in J_F \cap J_G$ alors $\mathrm{Im}\, g \subset F$ et $\mathrm{Im}\, g \subset G$ donc

$\mathrm{Im}\, g \subset F \cap G$ et $g \in J_{F\cap G}$. De même si $g \in J_{F \cap G}$ alors

$\mathrm{Im}\, g \subset F \cap G$ donc $\mathrm{Im}\, g \subset F$ et $\mathrm{Im}\, g \subset G$ d'où $g \in J_F \cap J_G$

Et ainsi $J_F \cap J_G = J_{F \cap G}$.

Si $g \in K_F \cap K_G$ alors $F \subset \mathrm{Ker}\, g$ et $G \subset \mathrm{Ker}\, g$ si $z \in F+G$

alors on a $(x,y) \in F \times G$ $z = x+y$ et $g(z) = g(x)+g(y) = 0$

donc $F+G \subset \mathrm{Ker}\, g$, $g \in K_{F+G}$. De même si $g \in K_{F+G}$ alors

$F+G \subset \mathrm{Ker}\, g$ ~~si $(x,y) \in F\times G$~~ comme $F \subset F+G \subset \mathrm{Ker}\, g$

et $G \subset F+G \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc $g \in K_F \cap K_G$. Ainsi $K_F \cap K_G = K_{F+G}$

b) $\dim(J_F + J_G) = \dim J_F + \dim J_G - \dim(J_F \cap J_G)$

$= \dim J_F + \dim J_G - \dim J_{F\cap G} = n \dim F + n \dim G - n \dim (F \cap G)$

et dim $J_{F+G} = n(\dim F+G) = n\dim F + n\dim G - n\dim(F\cap G) = \dim(J_F + J_G)$

si $h \in J_F + J_G$, $h = f+g$ avec $f \in J_F$ et $g \in J_G$

et $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ donc $\mathrm{Im}\, h \subset F+G$ car

$f \in J_F$ c'est-à-dire $\mathrm{Im} f \subset F$ idem pour $\mathrm{Im}\, g \subset G$ donc $\mathrm{Im}\, h \subset F+G$.

donc $J_F + J_G \subset J_{F+G}$ et de même dimension donc $J_F + J_G = J_{F+G}$.

si $h \in K_F + K_G$ alors $h = f+g$ avec $f \in K_F$ et $g \in K_G$

donc $F \subset \ker f$ et $G \subset \ker g$, donc si $x \in F \cap G$ $f(x) + g(x) = 0 = h(x)$

donc $F \cap G \subset \ker h$. $K_F + K_G \subset K_{F\cap G}$

et dim $(K_F + K_G) = n(n - \dim F) + n(n - \dim G) - n(n - \dim(F\cap G))$

$= n(n - \dim F) + n(n - \dim G) - n(n - \dim F - \dim G + \dim F\cap G)$

$= n^2 - n\dim(F\cap G) = n(n - \dim F\cap G)$

et dim $K_{F\cap G} = n(n - \dim F\cap G)$ donc $K_F + K_G = K_{F\cap G}$.

9.a) l'ensemble $\{rg(f), f \in M\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{N}$

car dim $E = n$ donc $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ $rg(f) \le n$, ainsi $\{rg(f), f \in M\}$ possède

un maximum d'où l'existence d'un élément f de rg maximal. De plus si $f \circ g \in A_f$

donc comme M idéal à droite $f \circ g \in M$ donc $A_f \subset M$

b) Soit $h \in M$ supposons que $\mathrm{Im}\, h \not\subset \mathrm{Im}\, f$

alors $\mathrm{Im}\, f \subsetneq \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, h$ puis $\Delta_f \subsetneq \Delta_f + \Delta_h = J_{\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} h}$

d'après la 8.b. d'après la question 7 il existe g tel que $\Delta_g = J_{\mathrm{Im} g}$

M est un sous espace donc $g \in M$ et $rg(g) > rg(f)$

donc $rg(g) > rg(f)$ ce qui est absurde car f est définie par maximalité du rang donc $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Im}\, f$

c) On vient de montrer que $\Delta_f \supset M$ donc $\Delta_f = M = J_{\mathrm{Im} f}$

Supposons que f n'est pas unique donc il existe g tel que $rg(g) = rg(f)$

et $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$ donc $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, f$ et $M = \Delta_g = J_{\mathrm{Im} g} = \Delta_f$

donc il existe unique F sev de E tel que $M = J_F = J_{\mathrm{Im} f}$.

10. si M est un idéal à gauche, soit f tel que la dimension du noyau de f soit minimum. Si $g \circ f \in \Gamma_f$ $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ donc $g \circ f \in M$ et $\Gamma_f \subset M$. Si $\mathrm{Ker}\, f \not\subset \mathrm{Ker}\, h$

$\mathrm{Ker}\, f \supsetneq \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, h$ donc $K_{\mathrm{Ker} f} \subsetneq K_{\mathrm{Ker} f} + K_{\mathrm{Ker} h} = K_{\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} h}$

et il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $K_{\mathrm{Ker} f} \subset K_{\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} h} = K_{\mathrm{Ker} g} = \Gamma_g$

ainsi $n(n - \dim \mathrm{Ker}\, f) < n(n - \dim \mathrm{Ker}\, g)$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f > \dim \mathrm{Ker}\, g$

ce qui est absurde d'après f. Donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h$ et $M \subset \Gamma_f$ puis

$M = \Gamma_f = K_{\mathrm{Ker} f}$ de la même manière on trouve que l'on a un unique G tel que $M = K_G$.

Hoffroy
MIS

4

Devoir maison n°6

Exercice 3 ; X 1996

Première partie

1. a) T endomorphisme nilpotent non nul de E, donc $r \notin \{1, 0\}$ et donc $r \geq 2$. Si $\dim \operatorname{Ker} T = 2$ alors T semblable à la matrice nulle car $\dim E = 2$ or $T \neq 0$ absurde. On a donc que $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ et $\operatorname{rg}(T) = 1$

b) $\operatorname{rg}(T) = 1$ donc $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{vect}(e_1)$, si $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 T(e_1) = 0$ alors $\lambda_1 T(e_1) = 0$ et $T(e_1)$ non nul donc $\lambda_1 = 0$ puis e_1 non nul donc $\lambda_2 = 0$, la famille $(e_1, T(e_1))$ est libre c'est donc une base de E et $\operatorname{Mat}_{(e_1, T(e_1))} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. si $T \in A$ alors $T^r = 0$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ donc $T^2 = 0$, car T nilpotent et $\dim E = 2$. Donc tout élément de A est nilpotent d'ordre 2. et A algèbre commutative donc si $(P, Q) \in A^2$

$P + Q \in A$ et $(P+Q)^2 = 0 = P^2 + Q^2 + 2PQ = 2PQ$

ainsi $PQ = 0$. On a donc que l'ordre de nilpotence de A est 2.

soit $T \in A$ et $\neq 0$, d'après la question 1b on construit une base de E, où $e_1 \notin \operatorname{Ker} T$ et $\mathcal{B} = (ce_1, T(e_1))$

ainsi $\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Maintenant soit $P \in A$ quelconque

comme vecteur de nilpotence de A est 2, $PT = 0$ et

$P(ce_1) = cP(e_1)$ et $PT(e_1) = 0$ donc $\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Finalement les endomorphismes de A sont représentés par les matrices

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{K}$.

Deuxième partie

3. On pose $T_{ij} : E_j \to E_i$
$\hat{x}_j \mapsto T(x_j)_i = p_i(T(x_j))$

T_{ij} linéaire et $\sum_{j=1}^{n} T_{ij}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} T(x_j)_i$

$= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)_i = T(x)_i$

4. $(ST)_{ij} = p_i \circ S \circ T(x_j) = p_i \circ S \circ \sum_{k=1}^{n} p_k \circ T(x_j)$

$= \sum_{k=1}^{n} p_i \circ S \circ T_{kj}$ et $T_{kj} : x_j \mapsto T(x_j)_k$ $\operatorname{Im} T_{kj} \subset E_k$

donc $(ST)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} \circ T_{kj}$

Troisième partie

5. Soit T nilpotent non nul et r le plus petit entier tel que $T^r = 0$

Ainsi il existe $x \notin \operatorname{Ker} T^{r-1}$, $T^{r-1}(x) \neq 0 = T(T^{r-1}(x))$ ~~$\neq 0$~~

et $T^{r-1}(x) \in \operatorname{Im} T$

et $T^{r-1}(x) \in \ker T$ et non nul donc $E_3 \neq \{0\}$

De même $E_3 \neq E$.

6. On cherche à ce que $\mathrm{Im}(T) \subset \ker T$ c'est-à-dire $T^2 = 0$

donc $E_3 = \mathrm{Im}\, T$ si $r \in \{1, 2\}$, $r \neq 1$ car T non nul.

7. On a $E_1 \oplus \mathrm{Im}\, T$ ainsi si $x \in E_1$ $T(x) \in \mathrm{Im}(T)$ et $T(x) \notin E_1$

donc $T(x)_1 = 0$ ainsi $T_{1,1} = T_{2,1} = T_{3,1} = 0$

~~De la même manière $T_{2,3} : x_3 \mapsto T(x_3)_2$~~ De plus $E_3 = \mathrm{Im}\, T \cap \ker T$

$\subset \ker T$ donc $T(E_3) = \{0\}$.

Et donc T est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix} = A$

8. T est nilpotent d'indice r donc $A^r = 0 = \begin{pmatrix} T_{2,2}^r \end{pmatrix}$

Donc $T'_{2,2}$ est au plus nilpotente d'indice r.

Alors $T_{2,2}$ possède pour polynôme annulateur X^r, d'après Cayley Hamilton $\chi_{T_{2,2}}$ annulateur car endomorphisme fini, donc $\pi_{T_{2,2}}$ divise $\chi_{T_{2,2}}$

donc $\mathrm{Sp}(T_{2,2}) = \{0\}$ et $T_{2,2}$ semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Soit $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2), \mathcal{B}(E_3))$ une base de E tel que ce soit $\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2), \mathcal{B}(E_3)$ des bases de E_1, E_2, E_3

Le cas des $\mathrm{mat}_{B'} T_{2,2}$ où $B' = (B(E_3), B(E_2), B(E_1))$, est singulière aussi

Alors est $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta & \mathrm{mat}_{B_2'} T_{2,2} & 0 \\ \delta & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ G T_n...

9. $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \delta & \ddots & \\ \delta & & \delta \; 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{mat}_{B'} T^n = 0$

or r plus petit entier tel que $\mathrm{mat}_{B'} T^r = 0$ donc $r \leq n$

10. si $(e_1 ... e_4)$ base canonique de $\mathbb{K}^4$ dans $\ker T = \mathrm{vect}(e_3)$

et $T(e_4) = e_2$ donc ~~$E_3 = \mathrm{vect}(e_4) \cap \mathrm{vect}(e_4)$~~ $E_3 = \mathrm{vect}(e_4)$

$E_1 = \mathrm{vect}(e_2)$ et $E_2 = \mathrm{vect}(e_1, e_3)$ de plus $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$

est $\mathrm{mat}_{B'} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $B' = (e_4, e_1, e_3, e_2)$ (on a utilisé

la même construction de base que dans la 9 en revenant à la concaténation des

bases de E_1, E_2 et E_3).

Quatrième partie

11. Comme A est d'ordre de nilpotence r on a $(T_1 ... T_{r-1}) \in \mathcal{L}(E)$

tel que $T_1 \circ ... \circ T_{r-1} \neq 0$ ainsi $\ker(T_1 \circ ... \circ T_{r-1}) \neq E$

et si $y \in \mathcal{I}(A)$ $y = \sum_{T \in A}^{q} \lambda_i T_i(x_i)$ et $T_1 \circ ... \circ T_{r-1}(y) = 0$

donc $\mathcal{I}(A) \subset \ker(T_1 ... T_{r-1}) \neq E$ donc $\mathcal{I}(A) \neq E$

$E_3 = \mathcal{I}(A) \neq E$ et par une méthode analogue à la question 5.

$E_3 \neq \{0\}$

Xuffrey
Mlo

5

Devoir maison n°6

Exercice 3 : X 1996

Quatrième partie

12. soit $T \in I(A)$, $T = \sum_{T_i \in A} d_i T_i$, $E_3 = I(A) \cap J(A) \subset K(A)$

$I(A) \subset K(A)$, $\forall T' \in A$ $T'T = 0$ c'est à dire $\sum_{T_i \in A} d_i T' T_i = 0$

et ainsi comme $E_3 \neq \{0\}$ on obtient que $r = 2$.

13. on sait ~~$T_1 \in I(A)$~~ $T \in A$ $\det_{\mathcal{B}} T = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ X & \det T_{2,2} & \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$

soit $(T_1 \ldots T_r) \in A^r$ $\det_{\mathcal{B}} T_1 \ldots T_r = 0 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ X & \prod_{i=1}^{r} (\det T_{2,2,i}) & \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$

donc $\prod_{i=1}^{r} (\det (T_{2,2})) = 0$ et ainsi $\prod_{i=1}^{r} T_{2,2,i} = 0$.

Puisque $T_{2,2,i} \in A_{2,2}$ on obtient que $A_{2,2}$ est nilpotente d'ordre au plus r. A est commutative donc $A_{2,2}$ l'est aussi de manière assez évidente. Supposons que $A_{2,2}$ nulle donc les éléments de T s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ X & 0 & \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$ ainsi si $x \in E_1$, $(f, h, p) \in A$

donc $f(x) \in E_2$ ou $f(x) \in E_3$, si $f(x) \in E_2$ donc $h f(x) \in E_3$ et $p h f(x) = 0$, ~~donc~~ si $f(x) \in E_3$ $h f(x) = 0$ Ainsi $r \leq 3$ et $r \geq 3$ donc $r = 3$. Ainsi $A_{2,2}$ est nulle si $r = 3$.

b) On réitère le processus pour les endomorphismes de $A_{2,2}$ jusqu'à ce que l'ordre de nilpotence soit inférieur à 2. D'après la partie 2 on peut trouver une base de cette sous algèbre de $A_{2,2}$ dans laquelle toutes les endomorphismes peuvent s'écrire à l'aide d'une matrice triangulaire inférieure stricte. Cette base convient pour $A_{2,2}$ et ainsi toutes matrices de $A_{2,2}$ peut s'écrire comme une triangulaire inférieure stricte.

Toute matrice de A peut s'écrire de la forme (t_{ij}) t_{ij} nul si $i \leq j$.

c) Tout élément de A s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ x & \ddots & \\ \vdots & & \\ x & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ il existe $k \leq n$ tel que $T^k = 0$ et donc $r \leq n$.