Espaces préhilbertiens réels

Feuille d'exercices #14

Exercice 1 — Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur E :

1. $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$.
3. $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 — Soient E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$ tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \|e_i\| = 1 \\ \forall x \in E, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2. \end{cases}$$

Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 3 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$.

Exercice 4 — Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que si E est euclidien, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 5 — Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y\}$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 6 — On munit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+2y+3z+4t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F ainsi que de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la proj. orthogonale sur F.
3. Pour tout $u \in E$, déterminer $d(u,F)$.

Exercice 7 — Soient E un espace préhilbertien réel et deux vecteurs $a, x \in E$ avec a non nul. On considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$ et son orthogonal $H = D^\perp$. Exprimer $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $\|x\|$ et $(x|a)$.

Exercice 8 — On munit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. Montrer que $(\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$.

Exercice 9 — Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'égalité $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur F et calculer $d(X^3,F)$.

Exercice 10 — On cherche à calculer $I = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{-t} - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

On munit pour cela $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = d(\varphi,F)^2$ pour une certaine application $\varphi \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ et un certain sous-espace vectoriel F de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ à préciser.
2. Déterminer le projeté orthogonal de φ sur F et en déduire I.

Exercice 11 — Déterminer comme dans l'exercice précédent :

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^\pi (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 12 — Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \operatorname{Tr}(A^\top B)$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice M sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $d(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\|M - M^\top\|$ pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $d(M, \mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 13 — Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exercice 14 — Soient $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux de E.
3. En déduire $\displaystyle\inf_{f \in H} \int_0^1 \big(f^2(t) + f'^2(t)\big)\,\mathrm{d}t$ où $H = \{f \in E \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$.

Exercice 15 — *Opérateur de Volterra*

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
On considère l'application T définie sur E par :

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$ et justifier l'existence de $T^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tous $f, g \in E$, $\langle T(f), g\rangle = \langle f, T^*(g)\rangle$.
2. Déterminer, pour tout $f \in E$, $\big(T(f)\big)'$ et $\big(T^*(f)\big)'$.
3. Déterminer les éléments propres de $T^* \circ T$.

Exercice 16 — *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

   On vérifiera que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. a) Soit $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer que φ est un produit scalaire, où :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

   b) On pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour tout $n > 0$, $P_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_n$.
   Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   c) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k T_k$ sa projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que la série de terme général a_n^2 converge.

Exercice 17 — *Famille de polynômes orthogonaux*
Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $w :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive telle que l'intégrale $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir l'existence d'une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes dans $]a,b[$, que l'on note par la suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
4. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b P(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i)$$

5. Prouver enfin l'existence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.