TD : Oscillateur harmonique

1 Reconnaître un oscillateur harmonique

1. La tension électrique $v(t)$ aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + Av(t) = 0 \ ,$$

avec $A = 4{,}239\,\mathrm{SI}$. Quelle est l'unité de A ? Quelle est la fréquence de l'oscillateur ?

2. Un électron de masse $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $q = -1{,}61 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ est piégé à l'intérieur d'un dispositif tel que son énergie potentielle est

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2 \ ,$$

où $V_0 = -5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$. On s'intéresse à un mouvement de l'électron selon l'axe (Oz).

2.a. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction des données et de $z(t)$ de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

2.b. On suppose que l'énergie mécanique est constante dans le temps. Calculer la fréquence des oscillations de l'électron selon (Oz) dans le piège.

2 Énergie de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \ .$$

On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

2. On suppose que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m, ω_0, A et $\cos(2\omega t + 2\phi)$. On utilisera les formules : $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ et $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ? Commenter le graphique.

3 Vibration d'une molécule

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8{,}5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On donne les masse atomiques molaires : $M_{\mathrm{H}} = 1\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ et $M_{\mathrm{Cl}} = 35{,}5\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un « ressort » de raideur k.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

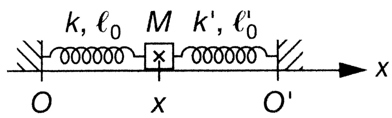
2. Calculer k.

3. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.

4. Calculer sa vitesse maximale.

4 Masse liée à deux ressorts

Une masse m positionnée en M reliée à deux ressorts fixés en O et O' glisse sans frotter sur le sol.



La position de la masse est repérée par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$. Les ressorts ont pour raideur respectives k et k', et comme longueur respectives l_0 et l'_0. La longueur OO' est notée L.

1. Effectuer un bilan des forces sur la masse m. Il est conseillé de faire un schéma.

2. Établir l'équation du mouvement de la masse.

3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq}.

4. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une certaine pulsation ω que l'on précisera.

5. Sans le résoudre, décrire le mouvement de la masse.

6. Résoudre exactement le mouvement sachant qu'à $t = 0$, la position est $x(0) = x_0$ la vitesse projetée sur l'axe (Ox) est v_0.