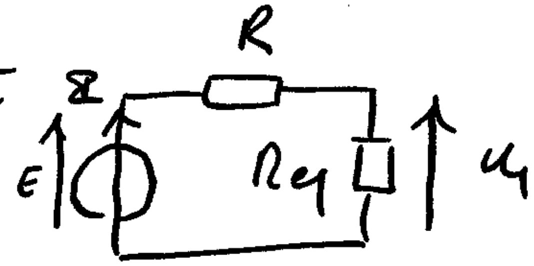
DS04 : Correction

Exercice 1 : Des résistances.

1) Un pont diviseur donne :

$$U_2 = \frac{3R}{3R+R} U_1 = \frac{3}{4} U_1$$

et on a pour le circuit ci-contre :



$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R+3R} + \frac{1}{2R}, \quad Req = \frac{4R}{3},$$

et le pont diviseur de tension donne :

$$U_1 = \frac{Req}{Req+R} E = \frac{4R}{7R} E = \frac{4}{7} E,$$

ce qui donne : $\boxed{U_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} E = \frac{3}{7} E}$

2) On a, d'après la loi d'Ohm :

$$E = I(R + Req), \quad \boxed{I = \frac{3}{7R} E.}$$

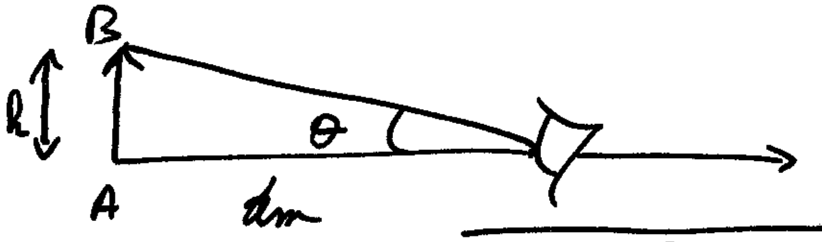
Les ponts diviseurs de courant donnent :

$$\boxed{I_1 = \frac{4R}{2R+4R} = \frac{2}{3} I = \frac{2}{7R} E.}$$

$$\boxed{I_2 = I - I_1 = \frac{1}{7R} E.}$$

Exercice 2 : La Loupe

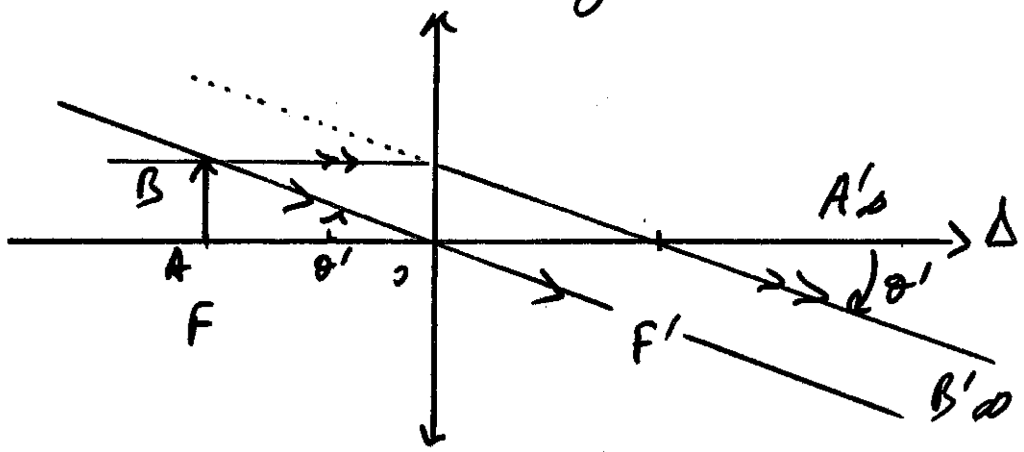
1) On a la situation suivante :



, $\tan\theta = \dfrac{h}{dm}$.

Or, $\theta \ll 1$, $\boxed{\theta \simeq \dfrac{h}{dm} = 4.10^{-3}\,\text{rad},}$ ce qui valide l'hypothèse.

2) Pour observer sans accomoder, il faut que l'image se forme à l'infini, que A et F soient confondus.



3) Dans le triangle OAB, on a :

$$\tan\theta' \simeq \theta' = \frac{h}{f'} \quad \text{car } \theta' \ll 1.$$

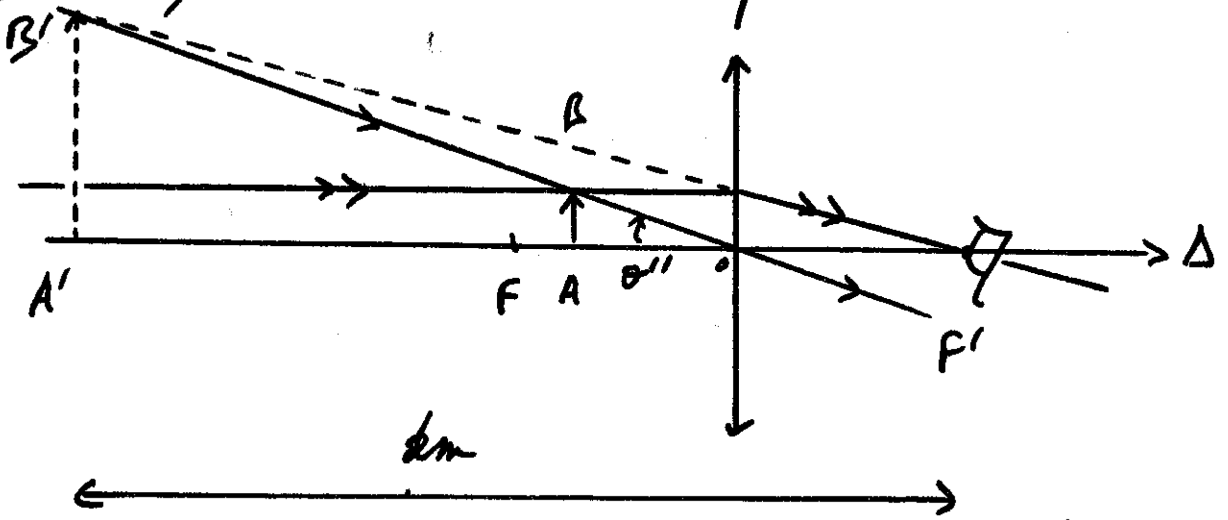
$$\boxed{\theta' = 0,04\,\text{rad},}$$

l'hypothèse est validée. La loupe permet de voir l'objet 10 fois plus grand.

4) On a $\boxed{G_c = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{d_m}{f'} = 10.}$

Cela confirme le commentaire précédent.

5) On cherche à observer une image virtuelle, A doit être placé entre F et O.



6) On applique la formule de Newton,

$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$

avec $\overline{F'A'} = -d_m$, soit $\overline{FA} = \frac{-f'^2}{-d_m} = \frac{f'^2}{d_m}$.

et $\overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -f' + \frac{f'^2}{d_m}$

$$\boxed{\overline{OA} = f'\left(\frac{f'}{d_m} - 1\right) = -22,5\ mm.}$$

7) Cette nouvelle configuration permet de grossir davantage l'objet par la loupe au prix d'une accommodation de l'oeil. Dans le triangle OAB, on a :

$$\boxed{\tan\theta'' \simeq \theta'' = \frac{h}{-\overline{OA}} = 0,044\ rad.}$$

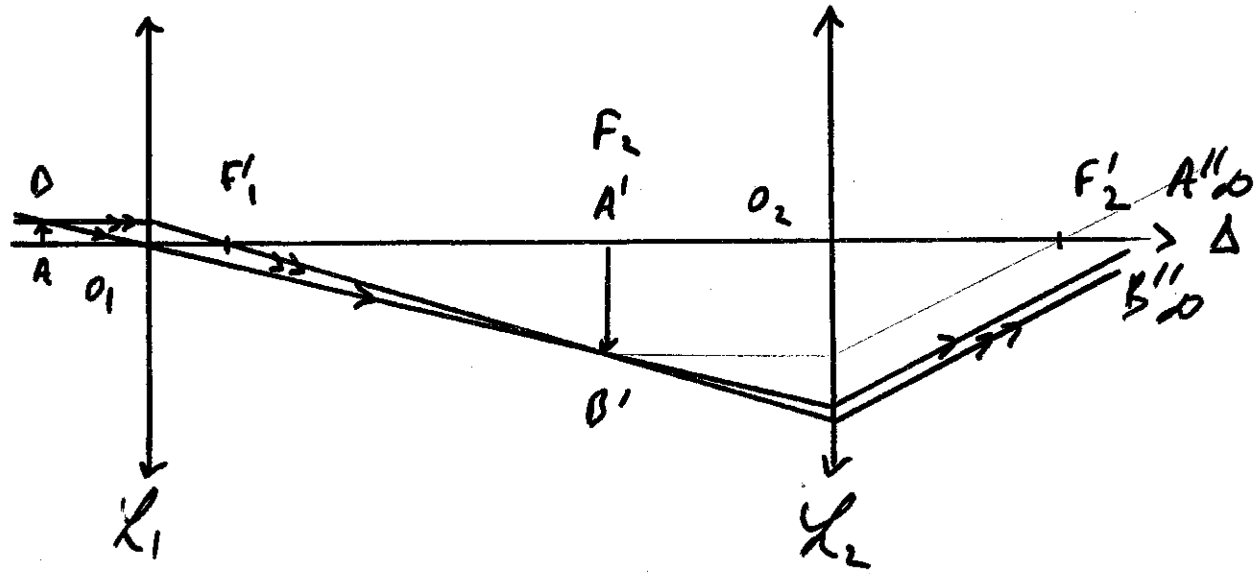
On gagne 10% de grossissement

supplémentaire.

8) Pour un microscope, on a :

→ un objectif (lentille convergente, f' petit)

→ un oculaire (lentille convergente).



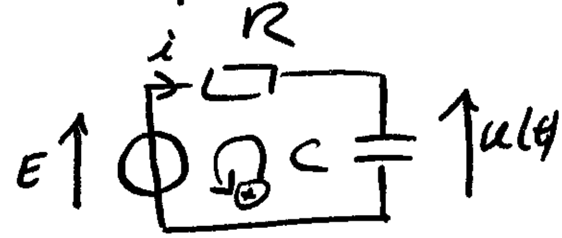
Ce système n'est pas afocal, A est le foyer objet du système optique, il donne une image A''_∞ par ce système optique.

9) L'œil voit toujours une image à l'infini avec le microscope, ce n'est pas le cas avec une lentille simple comme la loupe.

10) L'objectif agrandit l'objet, son image est utilisée, comme dans le cas de la loupe (Q. 2), pour être grossie par l'oculaire et renvoyée à l'infini.

Exercice 3 : Flash électronique

1) On applique la loi des mailles : $u_R + u - E = 0$.



et $i = C\dfrac{du}{dt}$ (CR), $u = Ri$ (CR),

$$RC\frac{du}{dt} + u = E$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{RC} \quad \text{avec } \boxed{\tau = RC}.$$

On résout l'équation différentielle en faisant la somme de :

→ la solution homogène : $u_H(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$,

→ la solution particulière constante, $u_P(t) = E$,

soit : $u(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + E$, $A \in \mathbb{R}$.

Or à, à l'instant initial, par continuité de la charge aux bornes du condensateur $u(0^-) = u(0^+) = 0$, soit $A = -E$,

alors $\boxed{u(t, t \geq 0) = E\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right).}$

Ainsi, en régime permanent, $u(t)$ vaut E.

2) A t_1, lors de la fermeture du circuit, u reste continue (condensateur), alors :

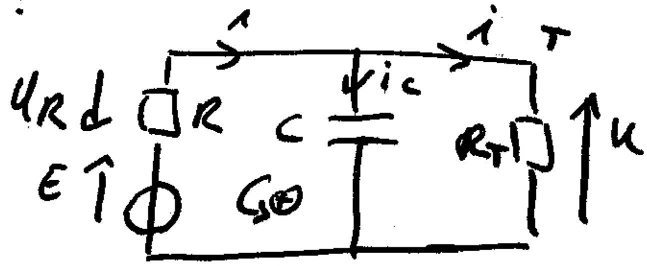
$$u(t_1^-) = u(t_1^+) = E,$$

et la loi d'Ohm impose : $\boxed{i_T(t_1^+) = \dfrac{E}{R}.}$

Lorsque le régime permanent est atteint, toutes les dérivées sont nulles, en particulier : $i_C(\infty) = C\frac{du}{dt}(\infty) = 0$, soit $i(\infty) = i_T(\infty)$, alors, la loi d'ohm impose : $\boxed{i_T(\infty) = \frac{E}{R+R_T}}$

3) La loi d'ohm donne :

$$u_R = Ri, \quad u = R_T i_T$$



la loi des noeuds :

$$i = i_C + i_T$$

la loi des mailles : $u + u_R - E = 0$,

et la caractéristique du condensateur :

$$i_C = C\frac{du}{dt},$$

alors :

$$i = i_C + i_T$$

$$\frac{u_R}{R} = C\frac{du}{dt} + i_T$$

$$\frac{E-u}{R} = C\frac{du}{dt} + i_T$$

$$\frac{E}{R} - \frac{R_T}{R} i_T = C R_T \frac{di_T}{dt} + i_T$$

soit $\boxed{\frac{di_T}{dt} + \frac{R+R_T}{RR_TC} i_T = \frac{E}{RR_TC},}$ $\boxed{\tau' = \frac{RR_TC}{R+R_T}}$

4) La solution s'exprime comme la somme de :

→ la solution homogène : $i_{TH} = A\exp\left(\frac{-t}{\tau'}\right)$

→ la solution particulière, $i_{T,p}(t) = \frac{E}{R+R_T}$

avec $A \in \mathbb{R}$.

On a établi que $i_T(t_1^+) = \frac{E}{R_T}$, alors :

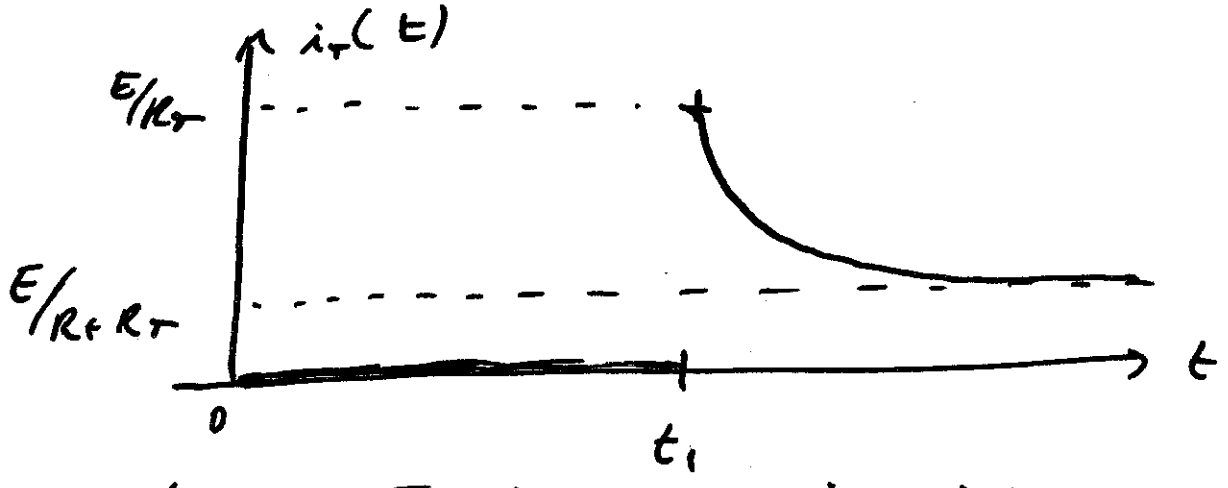
$$i_T(t_1^+) = \frac{E}{R_T} = A \exp\frac{-t_1}{\tau'} + \frac{E}{R+R_T},$$

$$A = \frac{ER}{R_T(R+R_T)} \exp\left(\frac{t_1}{\tau'}\right),$$

d'où le résultat pour $t \geq t_1$:

$$\boxed{i_T(t) = \frac{E}{R+R_T}\left(1 + \frac{R}{R_T}\exp\left(\frac{-(t-t_1)}{\tau'}\right)\right)}.$$

5) Avant que K bascule, $i_T(t) = 0$, mais le condensateur se charge. Ensuite, on a la génération de l'éclair avec la décharge du condensateur dans R_T. On a alors :



Exercice 4 : Étude parasismique d'un gratte-ciel

1) La masse volumique s'exprime comme : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sh}$, $\boxed{S = \frac{m}{h\rho} = 6{,}25 \cdot 10^{-1}\, m^2}$

2) La force élastique a pour expression : $\vec{F_k} = -k \, \Delta x \, \hat{u_x}$,

avec $[k] = \underbrace{M \cdot L \cdot T^{-2}}_{\text{force}} \cdot \underbrace{L^{-1}}_{\text{distance}^{-1}}$

et $[G] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-2}$

$[h] = L$

$[S] = L^2$.

On propose alors : $\boxed{k \propto G \cdot \frac{S}{h}}$. En prenant le coefficient de proportionnalité égal à 1, l'application numérique donne : $\boxed{k = 7{,}8 \cdot 10^7 \ N \cdot m^{-1}}$

3) Système : masse m

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

→ Poids $\vec{P}$

→ Réaction normale du support

$$\vec{R} = -\vec{P} \quad (\text{cf. texte})$$

→ Force de rappel élastique :

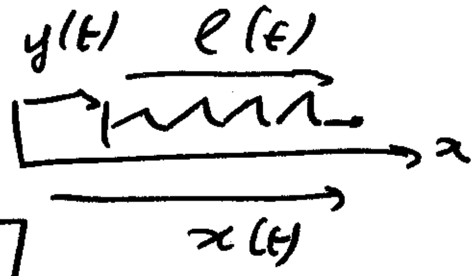
$$\vec{F_k} = -k \, \ell(t) \, \hat{u_x}.$$

La longueur à vide du ressort est nulle. Par application du principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_k},$$

et en projetant sur (Ox) :

$$m\ddot{x} = -k\,\ell(t),$$



et $\ell(t) = -y(t) + x(t)$

alors : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y(t).}$

On identifie $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m},}$ la pulsation propre. On a $\omega_0 = 4{,}47\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

4) On se place en RSF :

$$y = y_0 \exp j\omega t, \quad \underline{x} = \underline{x_0} \exp j\omega t,$$
$$\underline{x_0} = x_0 \exp j\varphi.$$

L'équation différentielle doit alors s'écrire comme :

$$(j\omega)^2 \underline{x} + \frac{k}{m}\underline{x} = \frac{k}{m}y$$
$$(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{x} = \omega_0^2 y.$$

et en simplifiant par $\exp j\omega t$, on a :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{x_0} = \omega_0^2 y_0$$

$$\boxed{\underline{x}_0 = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} y_0.}$$

5) L'amplitude réelle s'écrit alors comme :

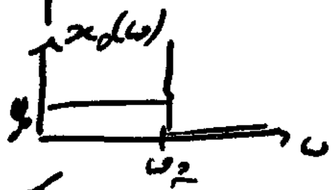
$$\boxed{x_0 = |\underline{x_0}| = \frac{\omega_0^2 y_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.}$$

Ainsi, pour :

→ $\omega \ll 1$, $x_0 \simeq y_0$, la tour oscille à la même amplitude que le sol,

→ $\omega \simeq \omega_0$, x_0 diverge, l'amplitude devient grande, le système résonne.

→ $\omega \gg 1$, x_0 tend vers 0, l'amplitude est très petite devant y_0, alors



6) On cherche la fréquence de résonance de la tour : $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0{,}71 \text{ Hz}.}$ Cette fréquence est dans le domaine de fréquence donné, la tour risque d'entrer en résonance.

7) On reprend l'étude précédente et on ajoute la force de frottement :

$$\vec{f} = -\alpha \dot{x} \, \hat{u}_x .$$

Le PFD devient alors :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} y .$$

et on identifie :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 = \omega_0^2 y$$

avec $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}.}$

8) On se place en RSF, et la réponse précédente s'écrit :

$$-\omega^2 \underline{x} + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 y ,$$

soit, en simplifiant par $\exp j\omega t$:

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 y_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

soit
$$\boxed{\underline{x}_0(\omega) = \frac{y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}.}$$

9) Aux basses fréquences, $\omega \ll \omega_0$,

$$\underline{x}_0 \simeq y_0, \begin{cases} x_0 \simeq y_0 \\ \varphi \simeq 0. \end{cases}$$

et aux hautes fréquences, $\omega \gg \omega_0$,

$$\underline{x}_0 \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} y_0, \begin{cases} x_0 \simeq 0 \\ \varphi \simeq -\pi. \end{cases}$$

10) On recherche le maximum de x_0, soit, le minimum du dénominateur du module, le numérateur étant constant :

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2.$$

Pour cela, prenons la dérivée et recherchons ses annulations :

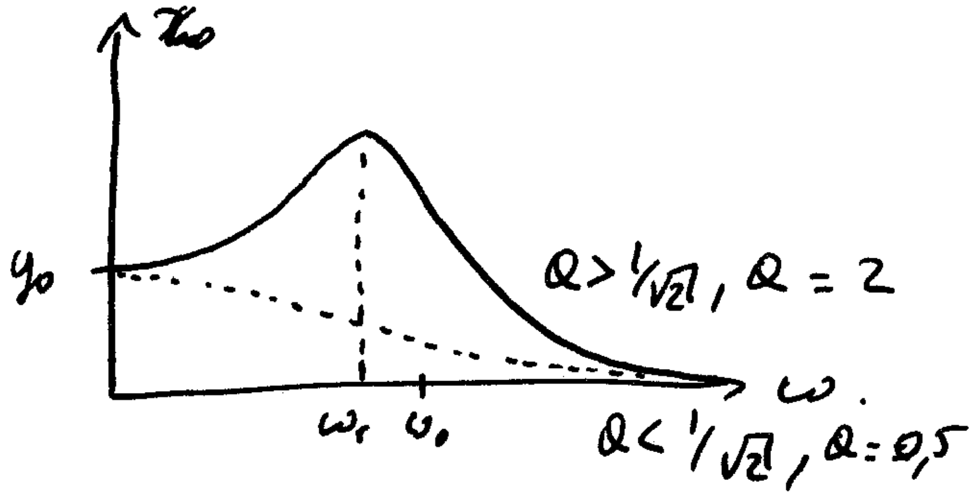
$$f'\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -4\frac{\omega}{\omega_0}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2\frac{\omega}{\omega_0 Q^2} = 0.$$

soit
$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \\ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2Q^2} \text{ si } Q > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

On appelle donc ω_r, la pulsation pour laquelle $x_0(\omega)$ admet un maximum si $Q \geq \sqrt{2}/2$ telle que

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

11) On a alors l'allure avec et sans résonance.



12) On a alors :

$$\boxed{x_0(\omega_0) = \frac{y_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0 Q}\right)^2}} = Q y_0}.$$

13) On souhaite avoir $x_0 \leq 10\, y_0$. Si $\omega_r \simeq \omega_0$ (vrai pour quelques unités de Q), alors on peut poser :

$$x_0(\omega_0) = Q y_0 \leq 10\, y_0, \text{ soit } \boxed{Q \simeq 10}.$$

Dans ce cas, $Q = \frac{\sqrt{km}}{d} = 10$, on doit alors avoir

$$\boxed{d > \frac{\sqrt{km}}{Q} = 1{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$$

Pour annuler la résonance, il faut que $Q < 1/\sqrt{2}$, soit :

$$\boxed{d > \frac{\sqrt{km}}{\sqrt{2}} = 1{,}3 \cdot 10^7\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}}.$$

Exercice 5 : Description d'une machine outil

1) On se place en RSF le signal excitateur étant sinusoïdal de fréquence 50 Hz.

Par application de la loi d'Ohm :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R} \quad , \qquad \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{r + jL\omega}$$

et d'après la loi des noeuds,

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r + jL\omega}\right)\underline{E}.$$

et cela permet d'écrire :

$$\underline{I}_3 = I_1 \exp j\varphi_1 + I_2 ,$$

on a alors :

$$I_3^2 = (I_2 + I_1 \exp j\varphi_1)^2$$
$$= I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos\varphi_1$$

soit $\boxed{I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos\varphi_1}\ .}$

2) Par application de la loi d'Ohm on a :

$$I_2 = \frac{E}{R} = 10\,A,$$

et $\cos\varphi_1 = \dfrac{I_3^2 - I_2^2 - I_1^2}{2I_1 I_2} = 0{,}74,$

$$\boxed{P_n = E I_1 \cos\varphi_1 = 1691\,W.}$$

3) et la puissance moyenne délivrée par le générateur : $P_g = P_n + P_R$,

$$\boxed{P_g = E I_1 \cos\varphi_1 + E I_2 = 5491\,W.}$$

4) De même, on a :

$$P_g = E I_3 \cos\varphi_3, \quad \boxed{\cos\varphi_3 = \frac{P_g}{E I_3} = 0{,}9633.}$$

5) On réécrit la loi des nœuds ; avec $\underline{I}_4$ le courant traversant le condensateur :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_4$$

$$= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega\right)\underline{E}.$$

$$= \underline{I}_2 + I_1 \exp j\varphi_1 + C\omega \underline{E} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

or $\varphi_3 = 0$, alors :

$$I_1 \sin\varphi_1 = C\omega E,$$

$$\boxed{C = \frac{I_1 \sin\varphi_1}{2\pi f E} = 13{,}5\,\mu F}$$

6) Cela permet d'avoir les appels de puissance aux instants où l'amplitude de la tension est la plus grande. Ainsi, cela permet au fournisseur d'électricité de limiter ses pertes par effet Joule dans les cables qui transportent l'électricité.