Exercices de la RMS

Merci à Luc Abergel, Carine Apparicio, Marc Becker, Célia Carchereux, Anatole Castella, Clément Caubel, Romuald Esman, François Fayard, Luc Guenier, Éric Kouris, Pascal Mons, Hervé Pépin, Evelyne Perrin, Nicole Rigal, Sophie Sidaner, Angélique Skandalis, Olivier Sidokpohou, Rouben Ter Minassian, Alain Walbron, Mathilde Weill, ainsi que les élèves de la classe de PC du lycée Janson de Sailly, qui m'ont aidé à préparer des corrigés, ont fourni des énoncés, ont signalé des erreurs, et ont contribué, par de nombreuses discussions, à éclairer ma lanterne.

Les 906 énoncés sont regroupés en début de fichier, puis sont répétés avant chaque solution. Toutes les solutions ne sont pas rédigées, il y a forcément des erreurs, coquilles et autres fautes de français. N'hésitez pas à me proposer des améliorations et des contributions à l'adresse `emmanuel.roblet@wanadoo.fr`. Les solutions non (encore complètement) rédigées, les exercices que je ne sais pas faire, sont signalés par deux points d'interrogation consécutifs.

Pour l'X-ESPCI PC, les CCP et les autres concours PC, j'ai essayé de classer les exercices par thèmes au sein des chapitres Algèbre, Analyse et Géométrie, en oscillant entre deux principes : un classement (orienté élève) en fonction des termes présents dans l'énoncé, et un classement (orienté enseignants) en fonctions des outils à utiliser pour la résolution. L'opposition que je viens de mentionner étant elle-même sujette à caution, le résultat n'est pas fameux. Vos propositions sont les bienvenues.

Énoncés

ENS MP 2
X ENS PSI 3
X MP 5
X ESPCI PC 7
Mines Ponts MP 23
Mines Ponts PSI 26
Mines Ponts PC 28
Centrale MP 33
Centrale PSI 35
Centrale PC 42
CCP MP 53
CCP PSI 55
CCP PC 61
Autres concours MP 79
Autres concours PSI 81
Autres concours PC 86

Solutions

ENS MP 93
X ENS PSI 96
X MP 105
X ESPCI PC 114
Mines Ponts MP 176
Mines Ponts PSI 193
Mines Ponts PC 204
Centrale MP 240
Centrale PSI 249
Centrale PC 306
CCP MP 373
CCP PSI 381
CCP PC 413
Autres concours MP 497
Autres concours PSI 505
Autres concours PC 533

ENS MP

Algèbre

1. **RMS 2007 1 ENS Paris Lyon Cachan MP** Solution page 93.
   (a) Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$ sont-ils isomorphes ?
   (b) Pour quels $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ les groupes $(\mathbb{Z}^m,+)$ et $(\mathbb{Z}^n,+)$ sont-ils isomorphes ?

2. **RMS 2007 3 ENS Paris Lyon Cachan MP** Solution page 93.
   Soit A un anneau commutatif. On note $S_n(A)$ l'ensemble des $x\in A$ pour lesquels il existe n carrés d'éléments de A dont x est la somme.
   (a) Montrer que $S_2(A)$ est stable par multiplication.
   (b) Montrer que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par multiplication.
   (c) Soit $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\equiv 7 \mod 8$. Montrer que $n\notin S_3(\mathbb{Z})$.

3. **RMS 2007 7 ENS Paris Lyon Cachan MP** Solution page 93.
   Soit $A\in \mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$. Montrer que les dénominateurs des coefficients de A écrits sous forme irréductible sont impairs.

4. **RMS 2009 9 ENS MP** Solution page 94.
   Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ possédant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

5. **RMS 2011 24 ENS MP** Solution page 94.
   Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent à $\{-1,1\}$.
   (a) Calculer la moyenne μ_n de det sur $\mathcal{B}_n$.
   (b) Calculer la moyenne m_n de $\det^2$ sur $\mathcal{B}_n$.
   (c) Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et p_n la probabilité pour qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ ait un déterminant $\geqslant f(n)\sqrt{n!}$. Montrer que (p_n) converge vers zéro.
   (d) Montrer que pour une infinité de valeurs de n on a $\max\{\det M,\ M\in\mathcal{B}_n\}\geqslant (n+1)^{(n-1)/2}$

Analyse

6. **RMS 2007 77 ENS Cachan MP** Solution page 94.
   Soit (a_n) une suite réelle. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) $\sum |a_n|$ converge ;
   (ii) pour toute suite réelle (b_n) de limite nulle, $\sum a_n b_n$ converge.

Géométrie

X ENS PSI

Algèbre

7. **RMS 2011 255 X ENS PSI** Solution page 96.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre des diviseurs de n. On pose $D_n = d_1 + \cdots + d_n$.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ou $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon. Exprimer $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ en fonction de n, de i et de la partie entière.
   (b) Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$.
   (c) Montrer que $D_n \sim n \ln n$.

8. **RMS 2009 129 X ENS PSI** Solution page 96.
Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.

9. **RMS 2009 130 X ENS PSI** Solution page 96.
Soient $I_0, \dots, I_n$ des segments de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ non nul tel que : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\int_{I_k} P = 0$. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$?

10. **RMS 2009 131 X ENS PSI** Solution page 97.
Pour $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on considère l'égalité $(*)$:
$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(P(k) + P(-k) - 2P(0) \Big).$$
   (a) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tels que $(*)$ soit vraie pour tout $c \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $(*)$ soit vérifiée pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

11. **RMS 2009 132 X ENS PSI** Solution page 98.
Soit $k(n)$ le plus petit des entiers k tels que $\forall g \in \mathbb{C}[X]$, $\exists (f_1, \dots, f_k) \in \mathbb{C}[X]^k$, $g = f_1^n + \cdots + f_k^n$, s'il existe.
   (a) Pourquoi peut-on se ramener à $g = X$ pour établir l'existence de $k(n)$?
   (b) Déterminer $k(2)$.
   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, on a $k(n) \geqslant 3$.
   Indication. On pourra noter que $X^n + Y^n = \prod_\xi (X + \xi Y)$ où ξ parcourt un ensemble de nombres complexes à préciser.
   (d) Montrer que $k(n) \leqslant n$ pour tout n.
   Indication. Utiliser $\Delta \colon P \mapsto P(X+1) - P(X)$ et étudier $\Delta^{n-1}(X^n)$.

12. **RMS 2009 133 X ENS PSI** Solution page 99.
Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p, $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré q, et $T_{P,Q} : (R_1, R_2) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \mapsto PR_1 + QR_2 \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
   (a) Montrer que si P et Q ont une racine commune, alors $T_{P,Q}$ n'est pas surjective.
   (b) Montrer que si $T_{P,Q}$ n'est pas injective, alors P et Q ont une racine commune.
   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique H. Que peut-on dire si $T_{H,H'}$ est inversible ?
   On pose $\mathcal{B} = ((1,0), (X,0), \dots, (X^{p-1}, 0), (0,1), (0,X), \dots, (0, X^{q-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$, qui sont respectivement une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et la base canonique de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
   (d) On suppose que P et Q n'ont que des racines simples, et n'ont aucune racine commune. Trouver des bases simples de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ telles que la matrice de $T_{P,Q}$ relativement à ces bases soit diagonale.
   (e) Soit M la matrice de $T_{P,Q}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et c_P et c_Q les coefficients dominants de P et Q. Montrer que $\det(M) = c_P^q c_Q^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_i)$ où $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ [respectivement $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$] est l'ensemble des racines de P [respectivement de Q].

13. **RMS 2009 134 X ENS PSI** Solution page 101.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14. **RMS 2009 135 X ENS PSI** Solution page 101.
Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m.

(a) Montrer que $m \leqslant n$.

(b) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur tel que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$. Montrer : $\forall j \geqslant 1,\ p \circ u^j = (p \circ u)^j$.

(c) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

15. **RMS 2009 136 X ENS PSI** Solution page 101.

(a) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $X^2 = J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: $X^2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$.

16. **RMS 2009 137 X ENS PSI** Solution page 102.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A.

17. **RMS 2009 138 X ENS PSI** Solution page 102.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi_{A,B}(M) = AM + MB\,.$$

(a) Déterminer la matrice de $\Phi_{A,B}$ dans la base $(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n})$.

(b) Montrer que si C est semblable à A, alors $\Phi_{C,B}$ est semblable à $\Phi_{A,B}$.

(c) Exprimer les valeurs propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de celles de A et de B.

(d) Montrer l'équivalence entre :
(i) $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AM = MB$;
(ii) A et B ont une valeur propre commune.

18. **RMS 2009 141 X ENS PSI** Solution page 103.
On considère la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

(a) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ. On pose $v_0 = v_{n+1} = 0$. Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$.

(b) Montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.

(c) Montrer que le polynôme $r^2 - (2-\lambda)r + 1$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées que l'on note r_1 et r_2. On pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$. Montrer que $\sin(n+1)\theta = 0$ et que $\rho = 1$.

(d) Déterminer les valeurs propres de A et pour chacune d'entre elles un vecteur propre associé.

(e) On pose $M = 2I_n$, $N = M - A$ et $J = M^{-1}N$. Montrer que J est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

(f) On définit une suite par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. Montrer que cette suite converge vers l'unique solution u de l'équation $Au = b$.

Analyse

Géométrie

X MP

Algèbre

19. **RMS 2007 110 X MP** Solution page 105.
Soit $n > 0$. Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de n éléments.

20. **RMS 2007 111 X MP** Solution page 105.
Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

21. **RMS 2007 112 X MP** Solution page 105.
Soit G un groupe commutatif fini de cardinal pq, où p et q sont premiers distincts. Montrer que G possède un élément d'ordre pq.

22. **RMS 2007 115 X MP** Solution page 105.
(a) Soit des réels strictement positifs x, y et z tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1$. Minorer $(x-1)(y-1)(z-1)$.
(b) Soit des entiers premiers p, q et r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Montrer que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{41}{42}$.

23. **RMS 2007 117 X MP** Solution page 106.
Soient des entiers k et n strictement positifs. Calculer $\prod_{z^{kn}=1, z^n \neq 1}(1-z)$.

24. **RMS 2007 118 X MP** Solution page 106.
(a) Soit des complexes z_1 et z_2, et u une racine carrée de $z_1 z_2$. Calculer $\left|\frac{z_1+z_2}{2} + u\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - u\right|$.
(b) Calculer, pour z complexe, $|\cos(z)+1| + |\cos(z)-1|$ et $|\operatorname{ch}(z)+1| + |\operatorname{ch}(z)-1|$.

25. **RMS 2007 119 X MP** Solution page 106.
(a) Soit f un automorphisme du corps des réels. A-t-on $e^{f(x)} = f(e^x)$ pour tout x réel ?
(b) Soit f un automorphisme du corps des complexes. A-t-on $e^{f(z)} = f(e^z)$ pour tout z complexe ?

Analyse

26. **RMS 0000 000.2–000 X MP** Solution page 107.
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit (q_n) une suite injective telle que $\{q_n,\ n \in \mathbb{N}\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Pour $f \in E$, on pose
$$T(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f(q_k)\,.$$
(a) Montrer que T est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur E.
(b) Montrer que $|||T||| = 2$. Est-elle atteinte ?

27. **RMS 2002 52 X MP** Solution page 107.
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$.
(a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f''\|_\infty$. Montrer que f est une norme sur E.
(b) La comparer avec $\|\cdot\|_\infty$.
(c) Les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et (E, N) sont-ils complets ?

28. **RMS 2007 120 X MP** Solution page 109.
Calculer $\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} - \frac{1}{7\times 8} + \cdots$

29. **RMS 2007 233 X MP** Solution page 109
Soit f $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer une constante absolue $C > 0$ telle que $\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant C\int_0^{+\infty} f^2$.
Indication : poser $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et trouver une équation différentielle satisfaite par g faisant intervenir f.

30. **RMS 2007 235 X MP** Solution page 110.
Pour x réel, on pose si possible $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{it^x}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Étudier la continuité de f.
   (c) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

31. **RMS 2009 304 X MP** Solution page 111.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + f(x) \in [a,b]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [a,b]$.

32. **RMS 2009 309 X MP** Solution page 111.
Soit $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}$. La fonction f est-elle continue, différentiable, de classe C^2 ?

33. **RMS 2009 310 X MP** Solution page 112.
Soient $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

34. **RMS 2009 311 X MP** Solution page 112.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, dont les fonctions composantes sont notées f_i. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la jacobienne de f en x est symétrique.
(ii) Il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

35. **RMS 2009 314 X MP** Solution page 112.
Soit $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots, \operatorname{tr} M^n)$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est différentiable en M et calculer sa différentielle.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} \mathrm{d}\Phi(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Géométrie

36. **RMS 2011 251 X MP** Solution page 113.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des points formant un polygone régulier sur le cercle unité. Soient $x \in \mathbb{R}$ et P le point de (OA_n) défini par $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA_n}$. Montrer que $PA_1 \times \cdots \times PA_n = |1 - x^n|$.

X ESPCI PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

37. **RMS 2009 331 X ESPCI PC** Solution page 114.
Soient E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

38. **RMS 2010 289 X ESPCI PC** Solution page 114.
Soit E un ensemble. Si $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tel que $A \Delta B = A \Delta C$. Est-il vrai que $B = C$?

Groupes, anneaux, corps

39. **RMS 2010 291 X ESPCI PC** Solution page 114.
   (a) Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^3, +)$ ne sont pas isomorphes.
   (b) Soit $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Montrer que les groupes $(U, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ ne sont pas isomorphes.
   (c) Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ ne sont pas isomorphes.

40. **RMS 2010 292 X ESPCI PC** Solution page 115.
   (a) Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
   (b) Quels sont les automorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$?

41. **RMS 2010 293 X ESPCI PC** Solution page 115.
   (a) Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?
   (b) Un groupe peut-il être isomorphe à l'un de ses sous-groupes stricts ?
   (c) Un espace vectoriel peut-il être isomorphe à l'un de ses sous-espaces vectoriels stricts ?

42. **RMS 2009 332 X ESPCI PC** Solution page 115.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que :
$$\forall (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n, \quad \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < 1 - \varepsilon_n\,.$$

43. **RMS 2009 333 X ESPCI PC** Solution page 116.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\Gamma_{a,b} = \{pa + qb,\ \ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\Gamma_{a,b}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit discret.

Arithmétique

44. **RMS 2010 290 X ESPCI PC** Solution page 116.
Si $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers $\leqslant n$.
   (a) Soient n et m distincts dans $\mathbb{N}$. Montrer que $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 2,\ P(n) \geqslant c \ln(\ln n) + d$.

45. **RMS 2012 268 X ESPCI PC** Solution page 117.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de 2^p.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.
   (c) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs.

Nombres complexes, polynômes

46. **RMS 2012 269 X ESPCI PC** Solution page 117.
Soient (a, b) et $(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer qu'il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a + ib = (c + id)(p + iq) + r + is$ et $r^2 + s^2 < c^2 + d^2$.

47. **RMS 2009 334 X ESPCI PC** Solution page 118.
Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe 1, z et $1 + z^2$ sont alignés.

48. **RMS 2009 335 X ESPCI PC** Solution page 120.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $Q_a = P(X + a)$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \geqslant r$, tous les coefficients de Q_a sont positifs.

49. **RMS 2010 294 X ESPCI PC** Solution page 118.
Déterminer les racines de $X^3 + 12X - 12$. *Ind.* Poser $X = u + v$.

50. **RMS 2012 270 X ESPCI PC** Solution page 118.
Soit $\zeta = e^{i\pi/10}$. Montrer que ζ est racine de $X^8 - X^6 + X^2 - X^2 + 1$.

51. **RMS 2012 271 X ESPCI PC** Solution page 119.
Soit n un entier $n \geqslant 2$.
   (a) Parmi les racines $2n$-ièmes de 1, combien sont racines de -1 ?
   (b) Soit ε une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que le polynôme $X^2 - \varepsilon$ a deux racines distinctes. Montrer que l'une est racine n-ième de -1.

52. **RMS 2012 272 X ESPCI PC** Solution page 119.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$. Déterminer le degré de P_n. Que vaut $P_n(-1)$?

53. **RMS 2009 336 X ESPCI PC** Solution page 120.
Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

54. **RMS 2009 337 X ESPCI PC** Solution page 120.
Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer $x_1 + x_2 + x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ et $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$.

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

55. **RMS 2009 338 X ESPCI PC** Solution page 121.
Soient P_1, P_2, P_3, P_4 dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   (a) On suppose que $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?
   (b) On suppose que $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

56. **RMS 2012 273 X ESPCI PC** Solution page 121.
Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X + 1) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n. Montrer que $(P, \Phi(P), \dots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

57. **RMS 2009 339 X ESPCI PC** Solution page 121.
Soit $(a_, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$. Rang de :
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}?$$

58. **RMS 2009 340 X ESPCI PC** Solution page 121.
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer qu'il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall P \in E$, $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} c_k P(a_k)$.

59. **RMS 2012 286 X ESPCI PC** Solution page 121.
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et F un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension p, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
   (a) Montrer que la famille $(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ est libre.
   (b) Donner une base de $E \times F$ ainsi que sa dimension.
   (c) Soit G le sous-espace vectoriel de $E \times F$ engendré par les (e_i, f_j) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. Déterminer la dimension de G.

60. **RMS 2012 280 X ESPCI PC** Solution page 122.
Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose la famille $(v_1, \dots, v_k)$ libre. Montrer que $(v_1\,{}^t v_1, \dots, v_k\,{}^t v_k)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la réciproque.

Algèbre linéaire : applications linéaires

61. **RMS 2012 282 X ESPCI PC** Solution page 122.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de $\{0_E\} \times F$ dans $E \times F$ est de la forme $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

62. **RMS 2009 346 X ESPCI PC** Solution page 123.
Soient E, F G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer : $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w \iff \exists v \in \mathcal{L}(F, G),\ \ v \circ u = w$.

63. **RMS 2009 347 X ESPCI PC** Solution page 123.
Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{id}_E$.
   (a) Montrer que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
   (b) Donner un contre-exemple s'il n'y a pas unicité.

64. **RMS 2012 274 X ESPCI PC** Solution page 123.
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

65. **RMS 2012 278 X ESPCI PC** Solution page 124.
Soient E un espace vectoriel, p et q des projecteurs de E qui commutent. Montrer sur $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.

66. **RMS 2012 279 X ESPCI PC** Solution page 124.
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), \dots, f^n(x_0))$ soit une base de E.
   (a) Montrer que f est un isomorphisme.
   (b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est un polynôme en f.

67. **RMS 2012 281 X ESPCI PC** Solution page 125.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

68. **RMS 2012 283 X ESPCI PC** Solution page 125.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.
   (b) Peut-on avoir la condition supplémentaire $v \circ u \circ v = v$?

69. **RMS 2012 289 X ESPCI PC** Solution page 125.
Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie. On voit E comme un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et on le note alors $E_{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ que l'on voit aussi comme $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{R}})$.
   (a) Vérifier que $f_{\mathbb{R}}$ est bien un endomorphisme de $E_{\mathbb{R}}$.
   (b) Exprimer $\operatorname{tr}(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\operatorname{tr}(f)$.
   (c) Exprimer $\det(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\det(f)$.

70. **RMS 2009 345 X ESPCI PC** Solution page 126.
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$.

(a) Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

(b) Caractériser les espaces $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

(c) Déterminer les sous-espaces de E stables par u.

71. **RMS 2009 365 X ESPCI PC** Solution page 127.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est nilpotent si et seulement si $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

72. **RMS 2009 343 X ESPCI PC** Solution page 127.

(a) Montrer : $\mathrm{Vect}\{AB - BA,\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

(b) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA)$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.

73. **RMS 2012 275 X ESPCI PC** Solution page 127.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

74. **RMS 2012 276 X ESPCI PC** Solution page 128.
Soit $f\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer la trace de f.

75. **RMS 2012 285 X ESPCI PC** Solution page 128.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que f est soit injectif, soit nul.

Algèbre linéaire : matrices

76. **RMS 2012 284 X ESPCI PC** Solution page 128.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont dans $\mathbb{N}$. Montrer que A est une matrice de permutation.

77. **RMS 2012 287 X ESPCI PC** Solution page 128.
Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + (\mathrm{tr}\, A)\, {}^tA = (2/n) I_n$.

78. **RMS 2012 290 X ESPCI PC** Solution page 129.
Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et tel que $\forall (M,N) \in \mathcal{A}^2,\ MN = 0 \Rightarrow M = 0$ ou $N = 0$.

(a) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on avoir $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(b) On suppose que $I_n \in \mathcal{A}$. Montrer que toute matrice M non nulle de $\mathcal{A}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathcal{A}$. *Ind.* Considérer $f\colon N \in \mathcal{A} \mapsto MN$.
Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{A}$?

(c) Donner un exemple de sous-espace $\mathcal{A}$ ne contenant pas l'identité.

79. **RMS 2009 344 X ESPCI PC** Solution page 129.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que la matrice de u dans toute base de $\mathbb{R}^n$ est diagonale. Que peut-on dire de u ?

80. **RMS 2009 348 X ESPCI PC** Solution page 130.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| < 1$ pour tout i. Montrer que $I_n - M$ est inversible.

81. **RMS 2009 351 X ESPCI PC** Solution page 130.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a équivalence entre :
(i) $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ A = \lambda I_n$;
(ii) $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ A = MN \Rightarrow A = NM$.

82. **RMS 2012 295 X ESPCI PC** Solution page 130.

(a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A est nilpotente.

(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = AB - BA$. On suppose que $AN = NA$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}\, N^k = 0$. En déduire que N est nilpotente.

(c) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = AB - BA$. On suppose que $AN = NA$ et que N est nilpotente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\operatorname{Ker} A^k$ est stable par AB. En déduire que AB est nilpotente.

83. **RMS 2012 298 X ESPCI PC** Solution page 131.
Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes ?

84. **RMS 2012 277 X ESPCI PC** Solution page 131.

(a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes. La matrice $A + B$ est-elle nilpotente ?

(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A, B et $A + B$ sont nilpotentes. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

85. **RMS 2012 288 X ESPCI PC** Solution page 131
Comparer $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 = 0\}$ et $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr} A = 0\}$.

Algèbre linéaire : déterminants

86. **RMS 2009 342 X ESPCI PC** Solution page 132.
Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \sin(a_i + a_j)$. Calculer $\det(A)$.

87. **RMS 2009 349 X ESPCI PC** Solution page 132.
Soit $(a_1, \ldots, a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer

$$\det \begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}.$$

88. **RMS 2009 350 X ESPCI PC** Solution page 132.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

(b) Donner un exemple où A et B sont inversibles, vérifient $AB = BA$ et $\det(A^2 + B^2) = 0$.

(c) Donner un exemple où $\det(A^2 + B^2) < 0$.

89. **RMS 2010 295 X ESPCI PC** Solution page 133.
À quelle condition une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ a-t-elle son inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$?

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

90. **RMS 2012 296 X ESPCI PC** Solution page 133.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_{i,j} > 0$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

(a) Montrer que 1 est valeur propre de A. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

(b) Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$.

91. **RMS 2009 353 X ESPCI PC** Solution page 133.

(a) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}. Que dire si on suppose seulement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de A.

(b) Montrer que $\det(I_n + A\overline{A})$ est réel.

(c) Soit λ une valeur propre de $A\overline{A}$. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $A\overline{A}$. Trouver un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

92. **RMS 2009 364 X ESPCI PC** Solution page 134.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et ${}^tA$ ont-elles le même spectre ? Les mêmes espaces propres ?

93. **RMS 2009 352 X ESPCI PC** Solution page 134.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$.

94. **RMS 2012 299 X ESPCI PC** Solution page 134.

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

95. **RMS 2012 300 X ESPCI PC** Solution page 135.
Soient $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, puis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0$, et A la matrice de f dans la base canonique.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Montrer que X^n divise P.

(b) Soit $\mathcal{E} = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. À quelle condition la matrice $P(A)$ est-elle nilpotente ?

96. **RMS 2012 301 X ESPCI PC** Solution page 135.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Montrer que A et B commutent si et seulement s'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et P et Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.

97. **RMS 2009 355 X ESPCI PC** Solution page 136.
Soit $T : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (3 - X)P' + X^2P'' - P \in \mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T est il injectif ? Diagonalisable ?

98. **RMS 2009 356 X ESPCI PC** Solution page 136.
Déterminer les éléments propres de
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

99. **RMS 2009 357 X ESPCI PC** Solution page 137.
Déterminer les éléments propres de
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

100. **RMS 2012 297 X ESPCI PC** Solution page 138.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $m_{i,j} = a^{i-j}$.

(a) La matrice M est-elle diagonalisable ?

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

101. **RMS 2012 302 X ESPCI PC** Solution page 138.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}$.

102. **RMS 2012 303 X ESPCI PC** Solution page 138.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.

(b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Algèbre linéaire : réduction

103. **RMS 2012 291 X ESPCI PC** Solution page 139.
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 0$.

(a) Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

(b) Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$?

104. **RMS 2012 292 X ESPCI PC** Solution page 139.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

105. **RMS 2012 293 X ESPCI PC** Solution page 139.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

106. **RMS 2012 294 X ESPCI PC** Solution page 140.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ pour que A soit semblable à $-A$.

107. **RMS 2009 341 X ESPCI PC** Solution page 140.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

108. **RMS 2010 296 X ESPCI PC** Solution page 141.
Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

109. **RMS 2010 297 X ESPCI PC** Solution page 141.
Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

110. **RMS 2009 354 X ESPCI PC** Solution page 141.
Soit $\mathcal{E}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathcal{E},\ A^2 = I_n$.
   (a) Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est fini. Que dire de son cardinal ?

111. **RMS 2009 358 X ESPCI PC** Solution page 142.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est de rang 1. Montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

112. **RMS 2009 359 X ESPCI PC** Solution page 142.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. La matrice A est-elle diagonalisable ?

113. **RMS 2009 360 X ESPCI PC** Solution page 142.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = 0$. La matrice A est elle diagonalisable ? Inversible ? Montrer que $\operatorname{rg} A \leqslant n/2$.

114. **RMS 2009 361 X ESPCI PC** Solution page 142.
Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension n.
   (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si u est diagonalisable, alors la restriction de u à tout sous-espace stable est également diagonalisable.
   (b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u(e_i) = ie_i$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

115. **RMS 2009 362 X ESPCI PC** Solution page 142.
   (a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable est de la forme $aI_2 + N$, où $a \in \mathbb{C}$ et N est nilpotente et non nulle.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que
$$X^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

116. **RMS 2009 363 X ESPCI PC** Solution page 143.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et
$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$
À quelle condition portant sur A la matrice B est-elle diagonalisable ?

117. **RMS 2012 304 X ESPCI PC** Solution page 144.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

118. **RMS 2012 305 X ESPCI PC** Solution page 144.
Soient (E, N) un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la norme N euclidienne si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2.$$

119. **RMS 2012 306 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $n \geqslant 2$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E tels que $\forall i$, $\|v_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$, $\langle v_i, v_j\rangle \leqslant -1/k$. Montrer que $k+1 \geqslant n$.

120. **RMS 2012 307 X ESPCI PC** Solution page 146.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.
    (a) Si $n \geqslant 1$, montrer que P_n est de degré n et admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.
    (b) Trouver un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale. La famille est-elle orthonormée ?

121. **RMS 2012 334 X ESPCI PC** Solution page 146.
Déterminer $\inf\{\int_0^1 f^2,\ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } f(0) = f(1) = 1\}$.

122. **RMS 2012 335 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t,\ f \in E\}$.

123. **RMS 2012 336 X ESPCI PC** Solution page 146.
Déterminer $\inf\{\int_{-\pi}^{\pi} (|t| - a - b\cos t)^2\,\mathrm{d}t,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

124. **RMS 2009 366 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $A+B$ et AB sont-elles dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

125. **RMS 2012 308 X ESPCI PC** Solution page 146.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle , \rangle$. Déterminer les A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\langle X, AX\rangle = 0$.

126. **RMS 2012 311 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$.

127. **RMS 2012 312 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leqslant p < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B = {}^tAA$.
    (a) Montrer que B est inversible.
    (b) Montrer que $AB^{-1}\,{}^tA$ est un projecteur de rang p.

128. **RMS 2012 313 X ESPCI PC** Solution page 146.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer deux des trois propriétés impliquent la troisième :
    (i) f est une isométrie ;
    (ii) $f^2 = -\operatorname{id}$;
    (iii) $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

129. **RMS 2012 314 X ESPCI PC** Solution page 146
Soient $A \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AP) \leqslant \operatorname{tr} A$.

130. **RMS 2012 315 X ESPCI PC** Solution page 147.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et p et q les projecteurs orthogonaux sur F et G.
    (a) Montrer que pqp est symétrique.

(b) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.

(c) Montrer que pq est diagonalisable.

131. **RMS 2012 316 X ESPCI PC** Solution page 147.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.

(b) Si $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que $\det(A_p) \geqslant 0$.

132. **RMS 2012 317 X ESPCI PC** Solution page 147.
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leqslant \langle X, AX \rangle \leqslant b\|X\|^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x/in[a,b], P(x) > 0$. Montrer que $P(A)$ est symétrique définie positive.

Espaces euclidiens de dimension 3, produit vectoriel

133. **RMS 2012 309 X ESPCI PC** Solution page 147.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$. Montrer que f est une rotation.

134. **RMS 2012 310 X ESPCI PC** Solution page 147.
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Soient a, b dans $\mathbb{R}^3$ et $f \colon x \mapsto \langle a, x \rangle b + b \wedge x$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que f soit un isomorphisme.

(b) Sous ces conditions, déterminer f^{-1}.

Analyse

Espaces vectoriels normés

135. **RMS 2012 318 X ESPCI PC** Solution page 147.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties fermées, bornées et non vides de $\mathbb{R}^3$. Pour tous A et B éléments de $\mathcal{E}$, on pose $d(A,B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x,y) \right) + \sup_{y \in B} \left(\inf_{x \in A} d(x,y) \right)$.

(a) Montrer cette application est bien définie.

(b) Montrer que $d(A,B) = 0$ si et seulement si $A = B$.

(c) Montrer que $\forall (A,B,C) \in \mathcal{E}^3,\ d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$.

136. **RMS 2012 319 X ESPCI PC** Solution page 148.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

137. **RMS 2012 320 X ESPCI PC** Solution page 149.
Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que les suites (A^n) et (A^{-n}) soient bornées.

138. **RMS 2012 321 X ESPCI PC** Solution page 149.
Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.

139. **RMS 2009 367 X ESPCI PC** Solution page 149.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure possédant une unique valeur propre a. Montrer l'équivalence entre : (i) $|a| < 1$; (ii) $M^p \to 0$ quand $p \to +\infty$; (iii) $\sum M^p$ converge.

Suites : généralités

140. **RMS 2009 369 X ESPCI PC** Solution page 150.
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite complexe.

(a) On suppose que les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n \geqslant 0}$ convergent. La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est-elle nécessairement convergente ?

(b) On suppose que les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n \geqslant 0}$ convergent. La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est-elle nécessairement convergente ?

141. **RMS 2009 370 X ESPCI PC** Solution page 150.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{2n} \to \ell_1$, $u_{2n+1} \to \ell_2$ et $u_{n^2} \to \ell_3$, où les ℓ_k sont trois nombres complexes. Que dire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

142. **RMS 2009 377 X ESPCI PC** Solution page 150.
   (a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et telle que $u_n \to 0$. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (k_n)_{n\geqslant 0},\ u_{k_n} \to x\}$ est un intervalle (la suite (k_n) est supposée strictement croissante).
   (b) Trouver un exemple pour lequel $A = [0, 1]$.

Suites : étude asymptotique

143. **RMS 2012 323 X ESPCI PC** Solution page 152.
Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$.

144. **RMS 2012 324 X ESPCI PC** Solution page 152.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Déterminer la limite de $u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

145. **RMS 2012 325 X ESPCI PC** Solution page 152.
Soient $\alpha > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} (k!)^{\alpha}$. Donner un équivalent de u_n.

146. **RMS 2009 372 X ESPCI PC** Solution page 153.
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $\left(\prod_{k=1}^{n}(a + kb)\right)^{1/n} \sim b(n!)^{1/n}$.

147. **RMS 2009 373 X ESPCI PC** Solution page 153.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $a_n \to 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $a_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

148. **RMS 2009 375 X ESPCI PC** Solution page 153.
   (a) Montrer que la suite de terme général $u_n = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est convergente.
   (b) Étudier la suite de terme général $v_n = n + \ln n - \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}$.

Suites récurrentes

149. **RMS 2009 371 X ESPCI PC** Solution page 154.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n$, $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. Déterminer les valeurs de a_0 pour que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante.

150. **RMS 2009 368 X ESPCI PC** Solution page 154.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de son premier terme u_0.

151. **RMS 2009 374 X ESPCI PC** Solution page 154.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n}}}}$.
   (a) On suppose que : $\exists a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = a$. Étudier $(y_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) On suppose que : $\exists (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = ab^{2^n}$. Étudier $(y_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Montrer qu'on a l'équivalence entre $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge et $(x_n^{2^{-n}})_{n\geqslant 1}$ bornée.

152. **RMS 2009 376 X ESPCI PC** Solution page 155.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite (u_n) et en donner un équivalent simple.

153. **RMS 2012 322 X ESPCI PC** Solution page 156.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$.
   (a) Quelles sont les limites possibles pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$?
   (b) Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

154. **RMS 2009 383 X ESPCI PC** Solution page 157.
Déterminer la limite, quand $x \to 0$, de $x \mapsto \frac{\tan(\sin(x+\sqrt{3}\,x))}{\operatorname{sh}(\tanh(2x+\sin x))}$.

155. **RMS 2009 387 X ESPCI PC** Solution page 157.
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+1) = f\left(x+\sqrt{2}\right)$.

156. **RMS 2012 332 X ESPCI PC** Solution page 157.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

157. **RMS 2012 342 X ESPCI PC** Solution page 157.
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède une infinité d'antécédents par f.

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

158. **RMS 2011 370 X ESPCI PC** Solution page 158.
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

159. **RMS 2012 329 X ESPCI PC** Solution page 158.
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 4f(x) + 3x + 1$.

160. **RMS 2009 384 X ESPCI PC** Solution page 158.
Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \frac{\sin nx}{n} \leqslant 1$.

161. **RMS 2009 386 X ESPCI PC** Solution page 158.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ (x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

162. **RMS 2012 333 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si $v = (v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, on note $\Delta(v)$ la suite de terme général $v_{n+1} - v_n$. montrer : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in]n, n+p[\,,\ \Delta^p(u)_n = f^{(p)}(x)$.

163. **RMS 2012 338 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ croissante et bornée. On suppose que f'' est bornée. Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

164. **RMS 2012 339 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant M|f(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

165. **RMS 2012 340 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, et f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable en a, que $g(a) = g'(a) = 0$ et que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant |g(x)|$. Montrer que f est dérivable en a.

166. **RMS 2012 343 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que pour tout $x \in [-\alpha,\beta]$, il existe un unique $y \in [-\alpha,\beta]$ tel que $f(x) = f(y)$ et $xy \leqslant 0$.
   (b) Si $x \in [-\alpha,\beta]$, on note $\varphi(x)$ l'unique y de la question (a). Étudier la continuité et la dérivabilité de φ. Déterminer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

167. **RMS 2012 344 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$ et $(f,g,h) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^3$. On pose $D(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $(\beta,\gamma) \in [a,c]^2$ tel que $D(a,b,c) = \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)H(\beta,\gamma)$ où $H(\beta,\gamma) = \det\begin{pmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(b) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(b) & h''(\gamma) \end{pmatrix}$.

168. **RMS 2012 331 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe et non affine. Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) + f(a-x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

169. **RMS 2012 337 X ESPCI PC** Solution page 159.
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est majorée et qu'il existe $\lambda > 0$ telle que $f'' \geqslant \lambda f$.

(a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.
(b) Montrer que f a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.
(c) Trouver des fonctions vérifiant ces conditions.

Fonctions d'une variable réelle : intégration sur un segment

170. **RMS 2012 330 X ESPCI PC** Solution page 160.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 1/2$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

171. **RMS 2009 385 X ESPCI PC** Solution page 160.
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x)$.

172. **RMS 2009 388 X ESPCI PC** Solution page 160.
Soit $r \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\prod_{k=1}^n (1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$.
(b) Pour $|r| \neq 1$, calculer $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,\mathrm{d}t$.

173. **RMS 2009 389 X ESPCI PC** Solution page 160.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$. L'application Φ est-elle majorée ? Minorée ? Déterminer les extrema éventuels de Φ et les fonctions en lesquels ils sont atteints.

174. **RMS 2009 390 X ESPCI PC** Solution page 161.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)\,.$$

175. **RMS 2009 391 X ESPCI PC** Solution page 161.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$.

176. **RMS 2009 392 X ESPCI PC** Solution page 162.
Soit $E = \{f \in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer qu'il existe $M > 0$, que l'on déterminera, tel que $\forall f \in E,\ \int_0^1 f \leqslant M\sup_{[0,1]}|f''|$.

177. **RMS 2009 405 X ESPCI PC** Solution page 162.
Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction 2π–périodique, et $c \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction 2π–périodique $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f = h' + c$?

178. **RMS 2012 341 X ESPCI PC** Solution page 163.
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. Déterminer la limite de la suite de terme général nu_n.

179. **RMS 2012 350 X ESPCI PC** Solution page 163.
Soit $q \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[\,,\mathbb{R})$ telle que $q(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$. Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}\int_1^x \frac{q(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Séries numériques

180. **RMS 2009 378 X ESPCI PC** Solution page 163.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n+\sin^2 n)}$?

181. **RMS 2009 379 X ESPCI PC** Solution page 163.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$?

182. **RMS 2009 380 X ESPCI PC** Solution page 164.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$?

183. **RMS 2012 326 X ESPCI PC** Solution page 164.
Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi e n!)$?

184. **RMS 2012 327 X ESPCI PC** Solution page 164.
Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(3n)!$.

185. **RMS 2012 328 X ESPCI PC** Solution page 164.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante, de limite nulle, et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

186. **RMS 2009 381 X ESPCI PC** Solution page 164.
Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et tel que la série de terme général u_n diverge.

187. **RMS 2009 382 X ESPCI PC** Solution page 165.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to 0$ et la série de terme général u_n diverge. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = \lambda$.

Intégration sur un intervalle quelconque

188. **RMS 2009 393 X ESPCI PC** Solution page 165.
Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

189. **RMS 2009 394 X ESPCI PC** Solution page 166.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\,\mathrm{d}t$.

190. **RMS 2009 395 X ESPCI PC** Solution page 166.
Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x^b}\,\mathrm{d}x$ si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$.

191. **RMS 2012 345 X ESPCI PC** Solution page 167.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[\,, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Suites et séries de fonctions

192. **RMS 2009 396 X ESPCI PC** Solution page 167.
Soit $S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Déterminer le domaine de définition de S. Étudier la continuité de S.

193. **RMS 2012 346 X ESPCI PC** Solution page 167.
Étudier la convergence de la suite $f_n\colon x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

194. **RMS 2012 347 X ESPCI PC** Solution page 167.
Étudier $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{inx}}{(1+n^2)(1+\ln n)}$.

Séries entières

195. **RMS 2009 397 X ESPCI PC** Solution page 167.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $n^k z^n$.

196. **RMS 2009 398 X ESPCI PC** Solution page 167.
   (a) Factoriser $P(X) = X^2 - 2\operatorname{ch} a X + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Décomposer $\frac{1}{P(X)}$ en éléments simples.
   (c) Développer en série entière en zéro la fonction $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$. Donner son rayon de convergence.

197. **RMS 2009 399 X ESPCI PC** Solution page 168.
Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \dots, n\}$.
   (a) Calculer I_1 et I_2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre I_{n+2} en fonction de I_{n+1} et de I_n.
   (b) On pose $I_0 = 1$. Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de f est non nul.
   (c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-R, R[$ et la résoudre.
   (d) Déterminer R.

198. **RMS 2009 400 X ESPCI PC** Solution page 168.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière de terme général a_nx^n a un rayon de convergence $R>0$. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n)a_nx^n$?

199. **RMS 2009 401 X ESPCI PC** Solution page 169.
Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ de rayon de convergence R.

(a) Montrer que $\forall r\in]0,R[,\ f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.

(b) Soit $g_n\colon z\mapsto z^n$. Si $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<r$, montrer que $g_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

(c) Si $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<r<R$, montrer que $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

200. **RMS 2012 348 X ESPCI PC** Solution page 169.
Soit D le disque fermé unité et $F\colon D\to\mathbb{C}$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence 1. On suppose que F est nulle sur le cercle unité et que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall(x,y)\in D^2,\ |x-y|\leqslant\eta\Rightarrow|F(x)-F(y)|\leqslant\varepsilon$. Montrer que F est nulle.

201. **RMS 2012 349 X ESPCI PC** Solution page 169.
Soient $\ell\in\mathbb{R}^*$, $(b_n)_{n\geqslant 0}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière de terme général b_nx^n est égal à 1, que la série de terme général b_n est divergente, et que $a_n/b_n\to\ell$ quand $n\to+\infty$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général a_nx^n est égal à 1.

(b) Déterminer la limite de $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$ quand $x\to 1^-$.

(c) Montrer que $(\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n)/(\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n)$ tend vers ℓ quand $x\to 1^-$.

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

202. **RMS 2009 402 X ESPCI PC** Solution page 170.
Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que : $f(0)=0,\ f'(0)=1$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)\geqslant x$. Soit $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2f^2(x)}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de (I_n).

203. **RMS 2009 403 X ESPCI PC** Solution page 170.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^{+\infty}\frac{(x+ne^{-x})(x^3+1)}{e^x+n}\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (u_n).

204. **RMS 2009 404 X ESPCI PC** Solution page 170.
Soient $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=\int_1^{1+1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $a_n\to 0$.

(b) Déterminer la limite de na_n quand n tend vers $+\infty$.

Intégrales à paramètre

205. **RMS 2012 351 X ESPCI PC** Solution page 171.
Soit $f\colon x\mapsto\int_0^1 xe^{-xt\ln t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier sa régularité.

(b) Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de zéro.

206. **RMS 2012 352 X ESPCI PC** Solution page 171.
Déterminer la limite de $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Séries de Fourier

207. **RMS 2012 353 X ESPCI PC** Solution page 171.
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction 2π–périodique. On suppose que la restriction de f à $[0,2\pi[$ est concave et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sont tous négatifs.

Équations différentielles linéaires

208. **RMS 2009 406 X ESPCI PC** Solution page 171.
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.

209. **RMS 2012 354 X ESPCI PC** Solution page 171.
Soit y une solution de $y''(x) = xy(x)$ sur $[0, 1]$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $|y'(x)| + |y(x)| \leqslant e^x$.

210. **RMS 2012 355 X ESPCI PC** Solution page 171.
Soit (E) l'équation différentielle $y''(x) + (1 + e^{-x^2})y(x) = 0$.

(a) Montrer que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit y une solution non nulle de (E). Montrer que y s'annule au moins une fois sur tout intervalle de la forme $[a, a+\pi]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

211. **RMS 2012 356 X ESPCI PC** Solution page 171.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

(a) Soit f une solution non nulle de (E). Montrer que les zéros de f sont isolés.

(b) Soient f et g deux solutions non nulles de (E). On suppose que f et g ont un zéro en commun. Montrer que f et g sont proportionnelles.

(c) Soient f et g deux solutions linéairement indépendantes de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g.

Équations différentielles non linéaires

212. **RMS 2009 407 X ESPCI PC** Solution page 172.
Soit ϕ une solution maximale de $y' = y^2 + x^2$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que I est borné.

213. **RMS 2009 408 X ESPCI PC** Solution page 172.
Soit (E) l'équation différentielle $y'^2 = 4y$.

(a) Soient f une solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ tels que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

(b) Résoudre (E) en cherchant des solutions ne s'annulant pas sur I.

(c) Trouver des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne sont pas des deux types précédents.

Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

214. **RMS 2009 409 X ESPCI PC** Solution page 172.
Soient $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x + y \leqslant 2\}$ et $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2(x^2 + y^2)$. Déterminer le maximum de f sur C.

215. **RMS 2009 410 X ESPCI PC** Solution page 173.
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les extrema de $\Phi\colon (x, y, z) \mapsto \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle + \langle z, x\rangle$ sur S^3.

216. **RMS 2009 411 X ESPCI PC** Solution page 173.
Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f_1' ne s'annule pas. On pose $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Montrer l'existence d'un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme Φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\Phi^{-1}(f(x)) = (x, 0)$. A-t-on unicité ?

217. **RMS 2009 412 X ESPCI PC** Solution page 174.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les couples (f, g) de fonctions tels que $U : (t, x) \mapsto f(t)g(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times [0, L]$, $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $U(t, 0) = U(t, L) = 0$.

218. **RMS 2012 357 X ESPCI PC** Solution page 174.
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

219. **RMS 2012 358 X ESPCI PC** Solution page 174.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a\cos y, y + b\sin x) \in \mathbb{R}^2$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

220. **RMS 2012 359 X ESPCI PC** Solution page 174.
Soit E l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer $\iint_E x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Géométrie

221. **RMS 2009 413 X ESPCI PC** Solution page 175.
Soient C_1, C_2, C_3, C_4 des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$. On suppose : $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$, et $C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$. Montrer que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$.

222. **RMS 2009 414 X ESPCI PC** Solution page 175.
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans une ellipse.

223. **RMS 2012 360 X ESPCI PC** Solution page 175.
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ponts du plan. Existe-t-il $B_1, \ldots, B_n$ dans le plan tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, le point A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ et A_n est le milieu de $[B_n, B_1]$.

Mines Ponts MP

Algèbre

224. **RMS 2011 398 Mines Ponts MP** Solution page 176.
Aujourd'hui, mercredi 14 juillet 2010. Quel jour sera-t-on le 14 juillet 2011 ?

225. **RMS 2011 399 Mines Ponts MP** Solution page 176.
On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Montrer que $F_n \wedge F_m = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

226. **RMS 2012 366 Mines Ponts MP** Solution page 176.
Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ll} 3x + 7y & = 3, \\ 6x - 7y & = 0, \end{array} \right.$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

227. **RMS 2011 400 Mines Ponts MP** Solution page 176.
   (a) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $\mathbb{Z}$ tel que $a \wedge n = 1$. Montrer : $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.
   (b) Si p est un nombre premier et a dans $\mathbb{Z}$, montrer : $a^p \equiv a\ [p]$.
   (c) Si m et n sont dans $\mathbb{Z}$, montrer : $m^{19} n \equiv n^{19} m\ [798]$.
   (d) Soient n un entier $\geqslant 2$, a dans $\mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \equiv 1\ [n]$ et tel que, pour tout diviseur m de $n-1$ dans $\mathbb{N}^*$ autre que $n-1$, on ait : $a^m \not\equiv 1\ [n]$. Montrer que n est premier.

228. **RMS 2007 311 Mines Ponts MP** Solution page 177.
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini tel que $\forall g \in G, g^2 = e$, où e est le neutre de G. On suppose G non réduit à $\{e\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

229. **RMS 2007 347 Mines Ponts MP** Solution page 177.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

230. **RMS 2007 397 Mines Ponts MP** Solution page 178.
Déterminer le rang de la forme quadratique q définie par $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n,\, i\neq j} x_i x_j$.

231. **RMS 2007 398 Mines Ponts MP, RMS 2010 478 Mines Ponts MP** Solution page 178.
Condition pour que la forme quadratique Q_α définie par $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ soit définie positive ?

232. **RMS 2010 477 Mines Ponts MP** Solution page 178.
Soit q la forme quadratique définie par $q(x,y,z) = x^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$. Exprimer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Déterminer tous les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels q est définie positive.

Analyse

233. **RMS 2007 407 Mines Ponts MP** Solution page 179.
On munit l'espace des suites bornées réelles $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que l'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente n'est pas un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

234. **RMS 2007 408 Mines Ponts MP** Solution page 179.
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0, +\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(t))^2\, \mathrm{d}t}$. On note E_0 l'ensemble des fonctions de E nulles en dehors d'un certain segment, et F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(e^{-x}) \exp(-x^2/2)$, où P est un polynôme à coefficients réels quelconque.
   (a) Montrer que E_0 est dense dans E.

(b) Montrer que F est dense dans E.

235. **RMS 2007 413 Mines Ponts MP** Solution page 180.
Soit A un compact d'intérieur non vide de $E = \mathbb{R}^n$ et $L_A = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u(A) \subset A\}$. Montrer que L_A est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

236. **RMS 2002 212 Mines Ponts MP** Solution page 181.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $(f \circ f)(a) = a$. La fonction f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.

237. **RMS 1992 0000 Mines Ponts MP** Solution page 181.
Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$ la suite $(f(x+n))$ converge vers zéro. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.

238. **RMS 1990 0000 Mines Ponts MP** Solution page 181.
Soit f une application dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe des réels distincts $y_1, \dots, y_n$ de $[0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^n f'(y_k) = n$.

239. **RMS 2006 413 Mines Ponts MP** Solution page 181.

(a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$, que l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

(b) Étudier la convergence de (x_n).

240. **RMS 2006 414 Mines Ponts MP** Solution page 182.
Étudier les suites de termes généraux $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{k}$ et $v_n = u_n^n$.

241. **RMS 2007 414 Mines Ponts MP** Solution page 182.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$. Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

242. **RMS 2006 415 Mines Ponts MP** Solution page 182.
Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$.

243. **RMS 2006 416 Mines Ponts MP** Solution page 183.
Soit u la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Étudier la convergence de u.

(b) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que : $u_n \sim An^\alpha$ quand n tend vers $+\infty$. En considérant $u_{n+1} - u_n$, trouver α.

(c) On ne suppose plus l'existence de α ni de A. De l'étude de $u_{n+1}^{1/\alpha} - u_n^{1/\alpha}$, déduire l'existence et la valeur de α.

244. **RMS 2006 418 Mines Ponts MP** Solution page 183.
Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n}\right)$.

245. **RMS 2006 421 Mines Ponts MP** Solution page 183.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle ne prenant pas la valeur -1. On définit une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1+u_k)}$.

(a) On suppose ici que $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Calculer sa somme dans le cas où la série de terme général u_n diverge.

(b) On suppose ici que $u_n = a^{2^n}$, où a est un élément fixé de $[0,1[$. Calculer la somme de la série de terme général v_n.

(c) Étudier la série de terme général v_n pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, puis pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

246. **RMS 2006 422 Mines Ponts MP** Solution page 184.
Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels > 0 telle que $u_n^{1/n} = 1 - 1/n^\alpha + \mathrm{o}(1/n^\alpha)$. La série de terme général u_n converge-t-elle ?

247. **RMS 2006 426 Mines Ponts MP** Solution page 185.
Nature, si $0 < \alpha < 1$, de la série de terme général $u_n = 1/[(\ln n)^{1/3} + (-1)^n n^\alpha]$?

248. **RMS 2006 427 Mines Ponts MP** Solution page 185.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = (e^{x^2} - 1)/x$. Montrer que f se prolonge en un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

249. **RMS 2011 479 Mines Ponts MP** Solution page 185.
La fonction $x \mapsto 1/(1 + x^6 \sin^2 x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

250. **RMS 2007 454 Mines Ponts MP** Solution page 185.
Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2x(1-x)$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n), où $f_n = f \circ \cdots \circ f$ est la n-ième itérée de f.

251. **RMS 2007 455 Mines Ponts MP** Solution page 186.
Pour $x \geqslant 0$, on pose $f_p(x) = (1+x)^{-1-1/p}$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

252. **RMS 2011 512 Mines Ponts MP** Solution page 186.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π–périodique et telle que $f'(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(\theta)| \leqslant 1$. Montrer que f est la fonction sinus.

Géométrie

253. **RMS 2011 526 Mines Ponts MP** Solution page 187.
Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

254. **RMS 2011 527 Mines Ponts MP** Solution page 187.
Étudier l'arc paramétré $x(t) = 2\cos t + \cos(2t)$, $y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$.

255. **RMS 2011 528 Mines Ponts MP** Solution page 188.
Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 1/\cos(\theta/3)$.

256. **RMS 2011 529 Mines Ponts MP** Solution page 189.
Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 1/\cos(3\theta)$.

257. **RMS 2011 530 Mines Ponts MP** Solution page 189.
Étudier la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = a(a - 2\cos\theta)$, où $a > 0$. Une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine coupe $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. On note I le milieu de $[PQ]$. Déterminer le lieu de I lorsque $\mathcal{D}$ varie.

258. **RMS 2011 531 Mines Ponts MP** Solution page 190.
Déterminer la courbure en tout point de $\Gamma : y = \ln x$ avec $x > 0$.

259. **RMS 2011 532 Mines Ponts MP** Solution page 190.
Soit $M : s \in \mathbb{R} \mapsto M(s) \in \mathbb{R}^2$ un arc birégulier au paramétrage normal.
   (a) Définir la courbure $\gamma(s)$ au point de paramètre s.
   (b) On suppose que $\gamma(s) = \mathrm{O}(e^{-s})$ quand $s \to +\infty$. Montrer que $(\mathbb{R}, M)$ possède une asymptote.

260. **RMS 2011 533 Mines Ponts MP** Solution page 191.
   (a) Reconnaître la quadrique Q d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
   (b) Déterminer les droites tracées sur Q.

Mines Ponts PSI

Algèbre

261. **RMS 2010 581 Mines Ponts PSI** Solution page 193.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unipotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. L'ordre de M est alors le plus petit entier naturel non nul k tel que $M^k = I_n$.
    (a) Montrer que toute matrice unipotente est diagonalisable.
    (b) Montrer que si M est unipotente d'ordre p alors $M^k = I_n$ si et seulement si $k \in p\mathbb{Z}$.
    (c) Soient V_n l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et O_n l'ensemble des ordres des éléments de V_n. Montrer que V_n n'est pas vide, et que O_n est fini.
    (d) Déterminer O_2.

Analyse

262. **RMS 2007 546 Mines Ponts PSI** Solution page 194.
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.
    (a) Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.
    (b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ pour toute $f \in E$.
    (c) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

263. **RMS 2007 547 Mines Ponts PSI** Solution page 194.
Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+pk}\binom{n}{k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

264. **RMS 2007 548 Mines Ponts PSI** Solution page 196.
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est k–lipschitzienne si et seulement si f^+ et f^- le sont.

265. **RMS 2007 549 Mines Ponts PSI** Solution page 196.
Soient p et q strictement supérieurs à 1 tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha\beta \leqslant \alpha^p/p + \beta^q/q$. En déduire, si f et g sont dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, $|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant (\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t)^{1/q}$.

266. **RMS 2007 550 Mines Ponts PSI** Solution page 197.
Soit $T > 0$ et $f\colon [-T,T] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est impaire si et seulement si $\int_{-T}^{T} t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À quelle condition f est-elle paire ? Nulle ?

267. **RMS 2007 551 Mines Ponts PSI** Solution page 197.
On pose $f_n(x) = e^{i2^n x}/n^n$. Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que sa série de Taylor en zéro est de rayon de convergence nul.

268. **RMS 2007 552 Mines Ponts PSI** Solution page 198.
On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n})$. Préciser le rayon de convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1.

269. **RMS 2007 553 Mines Ponts PSI** Solution page 199.
Déterminer le le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} a_n x^n$ avec $a_k = \int_k^{2k} e^{-x}/x\,\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il sur le bord du disque de convergence ?

270. **RMS 2007 554 Mines Ponts PSI** Solution page 199.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels convergeant respectivement vers a et b. On suppose a et b strictement positifs. Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$ est supérieur ou égal à la racine positive de $bX^2 + aX - 1$.

271. **RMS 2007 555 Mines Ponts PSI** Solution page 200.
Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et (E) $y'' + qy = 0$. Montrer que si f est une solution bornée de (E), alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. En déduire que (E) admet des solutions non bornées.

272. **RMS 2007 556 Mines Ponts PSI** Solution page 200.
Trouver la solution maximale du problème de Cauchy $y'' = 2y^3$, $y(0) = y'(0) = 1$.

273. **RMS 2007 557 Mines Ponts PSI** Solution page 201.
Résoudre l'équation différentielle $ay'' + (a+b)y' + by = e^x$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

274. **RMS 2007 558 Mines Ponts PSI** Solution page 201.
Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = y^2 - \frac{2}{x}y$.

Géométrie

275. **RMS 2007 559 Mines Ponts PSI** Solution page 202.
Soient z, z', z'' trois nombres complexes. Montrer que leurs images sont alignées si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \overline{z} & \overline{z'} & \overline{z''} \end{vmatrix} = 0$.

276. **RMS 2007 560 Mines Ponts PSI** Solution page 202.
Soit u un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire et de l'orientation usuels.
    (a) Préciser la forme de la matrice de u dans la base canonique.
    (b) Montrer qu'il existe un unique vecteur $\omega \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = \omega \wedge x$ pour tout x.
    (c) Justifier la convergence de $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.
    (d) Montrer que $\exp u$ est une rotation, dont on précisera l'axe et l'angle.

277. **RMS 2007 561 Mines Ponts PSI** Solution page 203.
Déterminer les extrema éventuels de la norme euclidienne sur l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

Mines Ponts PC

Algèbre

278. **RMS 2009 690 Mines Ponts PC** Solution page 204.
Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

279. **RMS 2010 606 Mines Ponts PC** Solution page 204.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

280. **RMS 2009 691 Mines Ponts PC** Solution page 204.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^3$ divise $P(X)-1$.

281. **RMS 2009 692 Mines Ponts PC** Solution page 205.
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels > 0 deux à deux distincts. Soit $f_i \colon x \in \mathbb{R} \mapsto 1/(x^2 + a_i^2)$. La famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est-elle libre ?

282. **RMS 2009 693 Mines Ponts PC** Solution page 206.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer M^{10}.

283. **RMS 2009 694 Mines Ponts PC** Solution page 206.
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver BA.

284. **RMS 2009 695 Mines Ponts PC** Solution page 206.
On considère A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

285. **RMS 2009 696 Mines Ponts PC** Solution page 207.
Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace de E de dimension p et G un sous-espace de E de dimension q. Soit $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset G\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Calculer sa dimension.

286. **RMS 2009 697 Mines Ponts PC** Solution page 207.
Soit $p \geqslant 2$. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$?

287. **RMS 2009 698 Mines Ponts PC** Solution page 207.
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$. On pose $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Déterminer $\det(e_1 + b_1 a, \ldots, e_n + b_n a)$, où det désigne le déterminant dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

288. **RMS 2009 699 Mines Ponts PC** Solution page 208.
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$ et B soit nilpotente d'indice r. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

289. **RMS 2009 700 Mines Ponts PC** Solution page 208.
Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale ayant comme coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$. Combien y a-t-il de matrices M qui commutent avec D et qui sont semblables à D ?

290. **RMS 2009 701 Mines Ponts PC** Solution page 208.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $n+1$ complexes r tels que $A + rB$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

291. **RMS 2009 702 Mines Ponts PC** Solution page 209.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

292. **RMS 2009 703 Mines Ponts PC** Solution page 210.
Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

293. **RMS 2009 704 Mines Ponts PC** Solution page 210.
Déterminer les éléments propres de $(\delta_{i,n}+\delta_{j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

294. **RMS 2009 705 Mines Ponts PC** Solution 210.
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.
   (a) Montrer que A est inversible.
   (b) Soient $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de B. Montrer qu'il existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $|b_{i,i}-\lambda|\leqslant\sum_{j\neq i}|b_{i,j}|$.

295. **RMS 2009 706 Mines Ponts PC** Solution page 211.
   (a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension $2p$ et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2=-\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(e_1,\ldots,e_p,f(e_1),\ldots,f(e_p))$.
   (b) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $M^2=-I_n$;
   (ii) n est pair et M est semblable à $\begin{pmatrix}0 & -I_{n/2}\\ I_{n/2} & 0\end{pmatrix}$.

296. **RMS 2009 707 Mines Ponts PC** Solution page 212.
Déterminer l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5=M^2$ et $\operatorname{tr}M=n$.

297. **RMS 2009 708 Mines Ponts PC** Solution page 212.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=A^2-2A$. Montrer que le rang de A est pair.

298. **RMS 2009 709 Mines Ponts PC** Solution page 212.
Soient $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, $E=\mathbb{R}_n[X]$, et $\Phi\colon P\in E\mapsto(X^2-X)P(1)+(X^2+X)P(-1)$.
   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
   (c) Déterminer les éléments propres de Φ.

299. **RMS 2009 710 Mines Ponts PC** Solution page 213.
Soit $\Phi\colon\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui à $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix}b&c&f\\a&e&i\\d&g&h\end{pmatrix}$. Montrer que Φ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?

300. **RMS 2009 711 Mines Ponts PC** Solution page 213.
Soit $\Phi\colon\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à M de colonnes $(C_1,\ldots,C_n)$, associe M' de colonnes $(C_1',\ldots,C_n')$, où $C_i'=\sum_{k\neq i}C_k$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

301. **RMS 2009 712 Mines Ponts PC** Solution page 213.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice $B=\begin{pmatrix}A&0\\A&A\end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

302. **RMS 2009 713 Mines Ponts PC** Solution page 214.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

303. **RMS 2009 714 Mines Ponts PC** Solution page 214.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ telle que $AM=MB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

304. **RMS 2009 715 Mines Ponts PC** Solution page 214.
Soient E un espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de E ?

305. **RMS 2009 716 Mines Ponts PC** Solution page 214.
Soient E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que u est $1-$ lipschitzienne. Montrer que $E=\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(u-\mathrm{id}_E)$.

306. **RMS 2009 717 Mines Ponts PC** Solution page 215.
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer qu'il existe un polynôme $T \in \mathrm{R}[X]$ tel que $A = T(B)$.

Analyse

307. **RMS 2009 644 Mines Ponts PC** Solution page 215.
Soient $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ et $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'|$. Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

308. **RMS 2009 645 Mines Ponts PC** Solution page 216.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1/\sqrt{n+(-1)^k k}$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

309. **RMS 2009 646 Mines Ponts PC** Solution page 217.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. À quelle condition la série de terme général u_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer la somme.

310. **RMS 2009 648 Mines Ponts PC** Solution page 217.
Que dire de la nature d'une série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} + \frac{2}{n^{2/3}} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^{2/3}})$?

311. **RMS 2009 649 Mines Ponts PC** Solution page 217.
Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi n^3 (\ln(\frac{n}{n-1}))^2)$.

312. **RMS 2009 719 Mines Ponts PC** Solution page 217.
Soit $P_n(X) = \prod_{k=0}^n (X-k)$. Montrer que P_n' possède une unique racine $r_n \in]0,1[$. Déterminer un équivalent de r_n quand n tend vers l'infini.

313. **RMS 2009 720 Mines Ponts PC** Solution page 218.
Donner, suivant la valeur de $p \in \mathbb{Z}$, la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right)$.

314. **RMS 2009 721 Mines Ponts PC** Solution page 218.
Déterminer, en fonction de $a,b,c \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$. Calculer la somme si la série converge.

315. **RMS 2009 722 Mines Ponts PC** Solution page 219.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{a+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+n}$.

316. **RMS 2009 723 Mines Ponts PC** Solution page 219.
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}+(-1)^{n-1}}$.

317. **RMS 2009 724 Mines Ponts PC** Solution page 219.
Nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n^{1/5}}\right)^{1/4} - 1$.

318. **RMS 2009 725 Mines Ponts PC** Solution page 220.
Pour $n \geqslant 2$, soit $P_n \colon x \mapsto x^n - nx + 1$. Soit r_n l'unique racine de P_n dans $[0,1]$.
   (a) Étudier la suite $(r_n)_{n\geqslant 2}$.
   (b) Étudier la série de terme général $r_n - 1/n$.

319. **RMS 2009 726 Mines Ponts PC** Solution page 220.
Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}+(-1)^n n^{2/3}(\ln n)^3}$. Montrer que u_n est défini pour n assez grand. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

320. **RMS 2009 727 Mines Ponts PC** Solution page 220.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Nature de la série de terme général $a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$?

321. **RMS 2009 728 Mines Ponts PC** Solution page 220.
Nature de la série de terme général $u_n = e^{-n^4}\int_0^n e^{t^4}\,\mathrm{d}t$?

322. **RMS 2009 729 Mines Ponts PC** Solution page 220.
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bijective et $g = f^{-1}$. Montrer que la série de terme général $1/f(n)$ converge si et seulement si la série de terme général $g(n)/n^2$ converge.

323. **RMS 2009 730 Mines Ponts PC** Solution page 221.
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sigma(n)/n^2$.

324. **RMS 2009 731 Mines Ponts PC** Solution page 222.
Trouver les $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in [0,1[,\ \int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(x)$.

325. **RMS 2009 733 Mines Ponts PC** Solution page 222.
Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

326. **RMS 2009 734 Mines Ponts PC** Solution page 223.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_{-\infty}^{0} (n^3 t^2 e^{-n^2 t^2})/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

327. **RMS 2009 735 Mines Ponts PC** Solution page 223.
Soient $I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, $K = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$ pour $a > 0$. Calculer I, puis calculer K à l'aide de $J(a)$.

328. **RMS 2010 660 Mines Ponts PC** Solution page 224.
La fonction $f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sin x/x$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

329. **RMS 2009 736 Mines Ponts PC** Solution page 224.
Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+\frac{x}{n})$. Déterminer l'ensemble de définition de f. La fonction f est-elle continue ?

330. **RMS 2009 737 Mines Ponts PC** Solution page 224.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n/(n+2)$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n x^n$.

331. **RMS 2009 738 Mines Ponts PC** Solution page 226.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Soit $f\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donner une expression simple de f.

332. **RMS 2009 739 Mines Ponts PC** Solution page 226.
Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}$. On pourra utiliser $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

333. **RMS 2009 740 Mines Ponts PC** Solution page 227.
Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sin(\frac{1}{3}\arcsin x)$.

334. **RMS 2009 745 Mines Ponts PC** Solution page 227.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^n \mathrm{d}x/(1+x+\cdots+x^n)$. Étudier la suite (u_n) : monotonie, convergence, développement asymptotique.

335. **RMS 2009 746 Mines Ponts PC** Solution page 229.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} x^{-1/n}\,\mathrm{d}x$. Existence et calcul de la limite de (u_n).

336. **RMS 2009 747 Mines Ponts PC** Solution page 229.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n}\,\mathrm{d}t$.

(a) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
(b) Déterminer un équivalent de I_n.

337. **RMS 2009 748 Mines Ponts PC** Solution page 230.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\frac{2}{\pi}\sin x))^n\,\mathrm{d}x$. Étudier la suite (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général u_n^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

338. **RMS 2009 749 Mines Ponts PC** Solution page 231.
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ périodique de période 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

339. **RMS 2009 752 Mines Ponts PC** Solution page 232.
Soit $f\colon x \mapsto \int_x^{+\infty} \mathrm{d}t/[t(e^{\sqrt{t}}-1)]$. Montrer que f est continue puis que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

340. **RMS 2009 747 Mines Ponts PC** Solution page 229.
Soit $f\colon x \mapsto \int_x^{x^2} \mathrm{d}t/\ln t$.

(a) Montrer que f est définie sur $]0,1[$. Déterminer les limites de f quand $x \to 0^+$ et quand $x \to 1^-$.

(b) Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

341. **RMS 2009 767 Mines Ponts PC** Solution page 233.
Résoudre $R^2 + 2R'^2 - RR'' = 0$ avec $R(0) = a > 0$ et $R'(0) \neq 0$.

342. **RMS 2009 768 Mines Ponts PC** Solution page 233.
Déterminer les extrema de $(x,y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$.

Géométrie

343. **RMS 2010 701 Mines Ponts PC** Solution page 234.
On se place dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit Ω un point de la droite $y = x$ différent de O. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note P le point d'intersection de (Oy) et de la droite passant par Ω et dirigée par $\overrightarrow{u_\theta}$, et Q le point d'intersection de (Ox) et de la droite passant par Ω et dirigée par $\overrightarrow{u}_{\theta+\pi/2}$, et enfin H le projeté orthogonal de O sur (PQ). Déterminer le lieu des points H lorsque θ varie.

344. **RMS 2010 702 Mines Ponts PC** Solution page 236.
On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit F d'équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$. Déterminer la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F.

345. **RMS 2010 703 Mines Ponts PC** Solution page 236
Soit Γ la courbe $(x(t) = t^2/2 + t,\ y(t) = t^3/3 + t^2/2)$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux tangentes à Γ orthogonales entre elles.

346. **RMS 2010 704 Mines Ponts PC** Solution page 237
Déterminer les coniques $\mathcal{C}$ telles que $(0,2)$ et $(1,0)$ soient sur $\mathcal{C}$, la tangente en $(0,2)$ à $\mathcal{C}$ soit parallèle à l'axe des ordonnées et la tangente en $(1,0)$ à $\mathcal{C}$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

347. **RMS 2010 705 Mines Ponts PC** Solution page 238.
Soient $R > 0$ et Γ la courbe $(x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = xR)$. Trouver la tangente à Γ en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

348. **RMS 2010 706 Mines Ponts PC** Solution page 238.
Nature de la surface d'équation $2x^2 + 3y - 4z^2 = 5$.

349. **RMS 2010 707 Mines Ponts PC** Solution page 238.
Nature de la surface d'équation $5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 5$.

350. **RMS 2010 708 Mines Ponts PC** Solution page 238.
Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ coupant (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement en A, B et C avec $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

351. **RMS 2010 709 Mines Ponts PC** Solution page 239.
Déterminer le lieu des projections orthogonales de O sur les plans tangents à la surface d'équation $xyz = a^3$ avec $a > 0$.

Centrale MP

Algèbre

352. **RMS 2007 626 Centrale MP** Solution page 240.
Montrer que toute M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles.

353. **RMS 2007 627 Centrale MP** Solution page 240.
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer qu'il y a exactement 4 sous-espaces vectoriels stables par tous les u_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

354. **RMS 2010 742 Centrale MP (calcul formel)** Solution page 240.
On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si le polynôme caractéristique de M est égal à $\prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})$.
   (a) Trouver les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{P}$.
   (b) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comparer la somme des carrés des termes diagonaux de M et la somme des carrés des valeurs propres de M comptées avec multiplicité. En déduire les matrices symétriques réelles vérifiant $\mathcal{P}$.
   (c) Trouver les matrices antisymétriques réelles vérifiant $\mathcal{P}$.

Analyse

355. **RMS 2007 691, Centrale MP** Solution page 242.
On pose $N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|y+tx|}{1+t+t^2}$ et $E(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Montrer que N est une norme sur le plan $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer les bornes sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de N/E.

356. **RMS 2010 747 Centrale MP** Solution page 243.
Soient $n \in \mathbb{N}$, puis E un espace normé de dimension n et de boule unité fermée B, et Φ une forme n-linéaire alternée sur E non identiquement nulle.
   (a) Montrer que Φ atteint un maximum > 0 sur B^n. On note $(e_1, \dots, e_n)$ un élément de B^n en lequel Φ est maximale.
   (b) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et que les e_i dont unitaires.
   (c) Soit x dans B, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Montrer que les $|x_i| \leqslant 1$.
   (d) Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base quelconque de E formée de vecteurs unitaires, est-il vrai que les vecteurs de B ont leurs coordonnées dans $(u_1, \dots, u_n)$ de module $\leqslant 1$?

357. **RMS 2006 743, Centrale MP** Solution page 244.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n \in \{0, 1\}$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n+k}$.
   (a) Étudier (A_n) si (a_n) est constante.
   (b) Que dire de (A_n) si on modifie un nombre fini de termes de (a_n) ?
   (c) Trouver (a_n) telle que (A_n) diverge.
   (d) Si (A_n) converge, montrer que sa limite est située dans $[0, \ln 2]$.
   (e) Soit $\ell \in]0, \ln 2[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \geqslant n$ et $b_1, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ tels que $\ell \leqslant \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{m+k} \leqslant \ell + \frac{1}{m}$. Montrer l'existence de $(a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim A_n = \ell$.

358. **RMS 2010 759, Centrale MP** Solution page 246.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.
   (a) Montrer que $b_{2n} \sim \sqrt{2n}/2$. En déduire un équivalent de b_n.
   (b) On pose $\lambda_n = b_n + b_{n+1}$. Montrer que (λ_n) converge vers une limite strictement négative.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $1/b_n$?

359. **RMS 2003 488, Centrale MP** Solution page 247.

Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant les rationnels sur les irrationnels et les irrationnels sur les rationnels ?

360. **RMS 1991 0000, Centrale MP** Solution page 247.

Soit A une partie infinie de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $P(x) = e^x$.

361. **RMS 2010 771, Centrale MP** Solution page 247.

Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers l'exponentielle sur tout segment de $\mathbb{R}$. On suppose que (x_n) est une suite strictement négative telle que la suite de terme général $P_n(x_n)$ converge vers zéro. Que dire de la suite (x_n) ?

362. **RMS 2006 763, Centrale MP** Solution page 248.

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_1(t) = 1$ et $f_{n+1}(t) = \int_0^t 2\sqrt{f_n(u)}\,\mathrm{d}u$.

Géométrie

Centrale PSI

Algèbre

363. **RMS 2009 966 Centrale PSI** Solution page 249.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}(X)$.

364. **RMS 2010 810 Centrale PSI** Solution page 249.
Calculer $\arctan(1/2)+\arctan(1/5)+\arctan(1/8)$.

365. **RMS 2010 811 Centrale PSI** Solution page 249.
Soient α_1, α_2 α_3 les racines de X^3+X^2+1. Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha_1 y+\alpha_1^2 z &=& \alpha_1^4\,, \\ x+\alpha_2 y+\alpha_2^2 z &=& \alpha_2^4\,, \\ x+\alpha_3 y+\alpha_3^2 z &=& \alpha_3^4. \end{array}\right.$$

366. **RMS 2009 967 Centrale PSI** Solution page 250.
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que $P=A^2+B^2$.

367. **RMS 2011 820 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 250.
Soient $p\colon x\mapsto e^x\cos x$, $q\colon x\mapsto e^x\sin x$, $r\colon x\mapsto e^{-x}\cos x$, $s\colon x\mapsto e^{-x}\sin x$.
    (a) Montrer que $\mathcal{B}=(p,q,r,s)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $E=\operatorname{Vect}(p,q,r,s)$.
    (b) Soit D l'opérateur de dérivation. Montrer que D est un automorphisme de E. Soit M la matrice de D dans $\mathcal{B}$. Donner M^n pour $n\in\mathbb{N}^*$ [par exemple M^{17} et en déduire $p^{(17)}(x)$].
    (c) Donner M^{-1} ainsi que des primitives de p, q, r et s.
    (d) Soit l'équation différentielle $y^{(4)}-y=e^x\sin x+2e^{-x}\cos x$. Écrire cette équation différentielle sous forme d'un système du premier ordre. En déduire la structure des solutions. Résoudre alors cette équation différentielle.

368. **RMS 2011 826 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 251.
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\delta\in\mathbb{R}^*$. On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par $d:P(X)\mapsto P'(X)$, $t_\delta:P(X)\mapsto P(X+\delta)$ et $f\colon P(X)\mapsto XP'(X)$.
    (a) Soit $S\in\mathbb{R}[X]$. Donner les matrices de d et de $S(d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
    (b) Déterminer le commutant de d et le commutant de f.
    (c) Est-ce que t_δ appartient à $\mathbb{R}[d]$? Est-ce que d appartient à $\mathbb{R}[t_\delta]$?

369. **RMS 2007 767 Centrale PSI** Solution page 253.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M=\begin{pmatrix}A & A\\ A & B\end{pmatrix}$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B. Calculer M^{-1} quand elle existe.

370. **RMS 2007 768 Centrale PSI** Solution page 254.
Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E=F\oplus G$ et on note p (respectivement q) le projecteur sur F (respectivement G) parallèlement à G (resp. F). Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q\circ f\circ p=0$.

371. **RMS 2007 769 Centrale PSI** Solution page 254.
Soit $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M)=P^{-1}MP$.

372. **RMS 2010 812 Centrale PSI** Solution page 255.
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $M\in\mathcal{A}$ est inversible. Montrer que $M^{-1}\in\mathcal{A}$.

373. **RMS 2010 813 Centrale PSI** Solution page 255.
Déterminer les $(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $MXN=0$.

374. **RMS 2010 814 Centrale PSI** Solution page 255.
Soit $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour toute $f\in E$, on pose $\Phi(f)\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. L'application Φ est-elle injective ? Surjective ?

(b) Déterminer le noyau de Φ.

375. **RMS 2009 970 Centrale PSI** Solution page 255.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge. Déterminer sa limite en fonction de A.

376. **RMS 2009 971 Centrale PSI** Solution page 256.
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = x_i^{j-1}$ si $j < n$ et $a_{i,n} = (\sum_{k\neq i} x_k)^{n-1}$.

377. **RMS 2009 972 Centrale PSI** Solution page 256.
Soit $f\colon P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (2X-1)P - (X^2-1)P'$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

(b) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.

(c) L'endomorphisme f est-il inversible ? Si oui, donner son inverse.

378. **RMS 2009 973 Centrale PSI** Solution page 257.
Soient A une matrice carrée et B la transposée de sa comatrice.

(a) Un vecteur propre pour A est-il vecteur propre pour B ?

(b) Comparer les valeurs propres de A et celles de B.

(c) Comparer la diagonalisabilité de A et celle de B.

379. **RMS 2009 974 Centrale PSI** Solution page 258.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$. Comparer le spectre de B et celui de ${}^tAA$.

380. **RMS 2009 975 Centrale PSI** Solution page 258
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi\colon (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}({}^tBMA)$. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement M est définie positive.

381. **RMS 2010 828 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 259.
On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$ et $g(M) = MA$.

(a) Déterminer les spectres de f et de g ainsi que les espaces propres associés.

(b) Montrer que $h = f - g$ est auto-adjoint. Donner une base de l'image et du noyau de h.

382. **RMS 2011 836 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 261.
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\phi\colon (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto -\det \left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline {}^tY & 0 \end{array}\right)$.

(a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. À quelle condition définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

(b) On pose $A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 & 5 & -4 \\ 5 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$. Montrer que ϕ est un produit scalaire et donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale pour ϕ sur le plan d'équation $2x + y - z = 0$.

383. **RMS 2011 849 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 262.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $L : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (aX^2 + bX - 1)P'' + (cX + d)P'$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Trouver (a,b,c,d) pour que L soit autoadjoint.

(b) Montrer l'existence de $\max\{\frac{\langle P, L(P)\rangle}{\langle P, P\rangle}, P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}\}$. Conjecturer sa valeur pour $n \leqslant 10$. Démontrer la conjecture.

(c) Trouver les éléments propres de L.

384. **RMS 2010 829 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 264.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

(a) On suppose que $a = 1/3$. Déterminer les matrices $A \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Montrer qu'une telle matrice est semblable à $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ avec $R \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Déterminer R.

(b) On suppose que $a = 1/2$. Déterminer les matrices $A \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$.

Analyse

385. **RMS 2009 976 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 265.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \int_0^1 |x+ty|\,\mathrm{d}t$. Cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, représenter sa boule unité avec Maple.

386. **RMS 2009 977 Centrale PSI** Solution page 266.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

387. **RMS 2009 831 Centrale PSI** Solution page 266.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des deux normes définies par $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$ et $N(M) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$. Soient $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + {}^tM$ et $v : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - {}^tM$. Calculer les normes d'opérateurs de u et v pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N.

388. **RMS 2009 832 Centrale PSI** Solution page 267.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}(\prod_{k=1}^n (3k-1))^{1/n}$.

389. **RMS 2009 833 Centrale PSI** Solution page 267.

Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $u_n = (e - (1+\frac{1}{n})^n)^{\sqrt{n^2+1}-n}$.

390. **RMS 2009 978 Centrale PSI** Solution page 268.

Rappeler le domaine de définition de la fonction Arccos. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de u_0 ?

391. **RMS 2009 979 Centrale PSI** Solution page 268.

On considère l'équation $e^x - x^n = 0$.

(a) Montrer que, pour n assez grand, cette équation a exactement deux solutions positives $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(b) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ ; donner un équivalent de $u_n - \ell$.

(c) La suite (v_n) converge-t-elle ? Déterminer un équivalent de v_n.

(d) Déterminer un développement asymptotique de v_n.

392. **RMS 2009 984 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 270.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $f_k(n) = n + \lfloor \sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} \rfloor$. Déterminer $\{f_k(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

393. **RMS 2009 985 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 271.

Soit $c\colon x \mapsto x^2$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(a) Calculer à l'aide du logiciel de calcul formel le développement limité d'ordre 4 en zéro de $f \circ c$.

(b) Déterminer le développement limité d'ordre n en zéro de $f \circ c$.

394. **RMS 2010 834 Centrale PSI** Solution page 271.

Soit $f\colon t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$. Étudier la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$.

395. **RMS 2010 835 Centrale PSI** Solution page 271.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $u_{n+1}/u_n \to x$.

(a) Montrer que si $x < 1$ alors u_n tend vers zéro et que si $x > 1$ alors u_n tend vers $+\infty$.

(b) Étudier $v_n = \sqrt[n]{u_n}$.

396. **RMS 2010 836 Centrale PSI** Solution page 271.
Si $j \in \mathbb{N}$, on note k_j le plus petit entier p tel que $\sum_{n=1}^{p} 1/n \geqslant j$.

(a) Justifier la définition de k_j.

(b) Montrer que k_j tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que $k_{j+1}/k_j \to e$ quand $j \to +\infty$.

397. **RMS 2010 837 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 272.
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que la série de terme général $u_n = (n^7 + 3n^6)^{1/7} - P(n)^{1/3}$ soit convergente. Déterminer le polynôme pour lequel la convergence est la plus rapide et donner alors un équivalent du reste.

398. **RMS 2010 838 Centrale PSI** Solution page 273.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ ne comporte pas de 9 dans son écriture décimale, on pose $u_n = 1/n^\alpha$; sinon, on pose $u_n = 0$. Discuter, suivant la valeur de α, la nature de la série de terme général u_n.

399. **RMS 2010 839 Centrale PSI** Solution page 273.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} ku_k = \mathrm{o}(n)$.

400. **RMS 2009 980 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 273.

(a) Étudier la convergence de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) Que dit Maple des séries de termes généraux $|\sin \ln n|/n$ et $(-1)^n |\sin \ln n|/n$?

(c) Étudier la suite de terme général $u_k = \sum |\sin \ln n|/n$, où la somme porte sur les entiers n tels que $\exp(k\pi + \pi/4) \leqslant n < \exp(k\pi + 3\pi/4)$. En déduire la divergence de la série de terme général $|\sin \ln n|/n$.

(d) Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n |\sin \ln n|/n$.

401. **RMS 2009 981 Centrale PSI** Solution page 276.
Étudier les séries de termes généraux

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1 + \frac{b}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln(n)/n}\,.$$

402. **RMS 2009 982 Centrale PSI** Solution page 276.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+1} = -\frac{1}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+2} = -\frac{1}{\ln(n+3)}\,.$$

(a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. La série de terme général a_n^2 est-elle convergente ?

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Montrer que la série de terme général u_n^p est divergente.

403. **RMS 2009 983 Centrale PSI** Solution page 277.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite monotone de réels positifs.

(a) Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_{n^2} sont de même nature.

(b) Qu'en est-il si l'on enlève l'une ou l'autre des hypothèses ?

404. **RMS 2010 840 Centrale PSI** Solution page 278.

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ vérifiant $f(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f'(c)| > 2$.

(b) Que se passe-t-il si l'on suppose seulement que f est dérivable ?

405. **RMS 2010 841 Centrale PSI** Solution page 278.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles de limite a. On suppose que $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose $u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < a < y_n$. Quelle est la limite de u_n ?

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a. Que dire de (u_n) ?

(c) Que se passe-t-il dans le cas général ?

406. **RMS 2010 842 Centrale PSI** Solution page 280.
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

407. **RMS 2009 987 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 280.
Pour $k \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \sqrt{|x-i|}$.

(a) Tracer l'allure de f_k pour quelques valeurs de k.

(b) Étudier l'intégrabilité de la fonction $1/f_k$.

(c) Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $1/f_k$.

408. **RMS 2009 988 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 282.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \colon x \mapsto xe^{-(nx)^2}$.

(a) Représenter f_1, f_2, f_3 sur un intervalle bien choisi.

(b) Établir la convergence de la série de terme général f_n sur $[0, +\infty[$. Soit f sa somme.

(c) Représenter les premières sommes partielles. Représenter f.

(d) La fonction f est-elle bornée ? Donner un équivalent de f en $+\infty$.

409. **RMS 2010 843 Centrale PSI** Solution page 284.
Soient $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \colon x \mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1+n^2 f(x)^2}}$.

(a) Justifier l'existence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ?

(b) Montrer que si f est continue, S l'est aussi. Réciproque ?

410. **RMS 2009 989 Centrale PSI** Solution page 285.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ où $a_n = \lfloor \pi^n \rfloor$.

(b) Désormais (a_n) est une suite quelconque de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n)x^n$. Montrer que $R' \geqslant R$ avec égalité si $R > 1$.

(c) Trouver une suite (a_n) telle que $R' = 2R$. Déterminer les valeurs prises par R'/R.

411. **RMS 2010 844 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 285.

(a) Calculer avec Maple $f \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{4n}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n+1)2^{4n}}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière précédente et retrouver la somme sans Maple.

(c) Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n+1)2^{6n+1}}$.

412. **RMS 2009 990 Centrale PSI** Solution page 286.
Étudier la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

413. **RMS 2009 991 Centrale PSI** Solution page 287.
Soit $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier l'existence de cette intégrale.

(b) Montrer que $I(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.

(c) Trouver un équivalent de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

414. **RMS 2009 992 Centrale PSI** Solution page 287.
Soit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall t \in]0,1],\ f(t) = t^2 + \int_0^t (1 + \sin(1/u))\,\mathrm{d}u$.

(a) Monter que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1]$.

(b) Montrer que $f'([0,1])$ est un intervalle borné mais pas un segment.

415. **RMS 2009 993 Centrale PSI** Solution page 288.
Existence, puis expression comme somme d'une série, de $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x^2)/x^2 \, \mathrm{d}x$.

416. **RMS 2010 845 Centrale PSI** Solution page 288.
Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de f. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur D ?
(b) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.
(c) Soit $g\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \, \mathrm{d}t$. Montrer que $g = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

417. **RMS 2010 846 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 290.
Pour tout $b \in]0,1[$, on pose $F(b) = \int_0^{+\infty} x^{b-1}/(1+x)$.

(a) Justifier l'existence de F. Conjecturer une expression de $F(b)$ à l'aide des fonctions usuelles.
(b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique dont l'expression sur $[-\pi, \pi]$ est $\cos(bx)$. Énoncer le théorème de Dirichlet et le théorème de convergence normale.
(c) Montrer que $\int_0^1 x^{b-1}/(1+x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/(n+b)$ et$\int_0^{+\infty} x^{b-1}/(1+x) \, \mathrm{d}x = 1/b + 2b\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}/(n^2-b^2)$. En déduire l'expression de $F(x)$.

418. **RMS 2010 847 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 291.
On rappelle que $\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ définie pour $x > 0$ vérifie : $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(a) Montrer que l'équation $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ admet une solution développable en série entière dont on donnera le domaine de définition et dont on calculera les coefficients.
(b) On pose $f\colon x \mapsto \int_0^1 \frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro et calculer ses coefficients.
(c) Montrer que f vérifie l'équation différentielle du (a).

419. **RMS 2010 848 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 293.
Soient $\alpha \in]0,2[$ et $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt)/(\operatorname{sh} t)^\alpha \, \mathrm{d}t$.

(a) Donner les domaines de définition et de continuité de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(b) Montrer que F est développable en série entière. Calculer les coefficients de cette série à l'aide du logiciel. Donner le rayon de convergence et préciser l'intervalle sur lequel elle représente F.
(c) Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

420. **RMS 2010 849 Centrale PSI** Solution page 294.

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \ln x/(x^2-1) \, \mathrm{d}x$.
(b) Montrer que $\int_0^1 \ln x/(x^2-1) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 1/(2n+1)^2$.

421. **RMS 2010 850 Centrale PSI** Solution page 295.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(nx)/(4n^2-1)$.

422. **RMS 2010 851 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 295.
Soient $\alpha \in]0,\pi[$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction π-périodique définie par $\forall t \in [0,\alpha], g_\alpha(t) = t$ et $\forall t \in]\alpha,\pi]$, $g_\alpha(t) = \frac{\alpha(\pi-t)}{\pi-\alpha}$.

(a) Étudier la régularité de g_α. Tracer le graphe de g_α sur $[-2\pi, 2\pi]$.
(b) Déterminer le développement en série de Fourier de g_α. Que dire de la convergence de la série de Fourier ?
(c) Tracer les graphes de quelques sommes partielles de la série de Fourier de g_1.

423. **RMS 2010 852 Centrale PSI** Solution page 297.

(a) Soit $Q = X^2 + pX + 1$ avec $p \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$. On note r_1 et r_2 les racines de Q. Montrer qu'il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2\}$, $\frac{1}{Q(z)} = \frac{c_1}{z-r_1} + \frac{c_2}{z-r_2}$.
(b) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $t \mapsto 1/(\operatorname{ch} a + \cos t)$ est développable en série de Fourier. *Ind.* Poser $z = e^{it}$.

(c) En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)/(\operatorname{ch} a + \cos t)\, \mathrm{d}t$.

424. **RMS 2010 853 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 298.
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodiques. Si $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - e^{-2\pi})^{-1} \int_0^{2\pi} f(x+t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\Phi(f)$ est l'unique solution 2π-périodique de l'équation différentielle $y' - y + f = 0$.

(b) On suppose, dans cette question, que $f : x \mapsto |\sin x|$. Calculer $\Phi(f)$ et tracer son graphe sur $[0, \pi]$.

(c) Exprimer les coefficients de Fourier de $\Phi(f)$ en fonction de ceux de f.

(d) On définit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $f_0 : x \mapsto |\sin x|$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} = \Phi(f_n)$. Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, \pi]$ vers la fonction constante $x \mapsto 2/\pi$.

(e) Montrer que Φ est injective et déterminer son image.

425. **RMS 2009 995 Centrale PSI** Solution page 300.
Résoudre $y'' + y = |t|$.

426. **RMS 2009 996 Centrale PSI** Solution page 300.
Donner une base de solutions du système différentiel : $x' = 3x - 4y$ et $y' = 2x - 3y$.

427. **RMS 2009 997 Centrale PSI** Solution page 301.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $M'(t) + M(t)AM(t) = 0$ et $M(t) = I_n$. *Ind.* Commencer par le cas où A est diagonale.

428. **RMS 2009 998 Centrale PSI** Solution page 302.
Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x + y \leqslant \pi\}$.

Géométrie

429. **RMS 2009 999 Centrale PSI** Solution page 302.
Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les équations de deux droites D_1 et D_2, et deux points A_1 et A_2 de D_1 et D_2 respectivement. Étudier l'existence d'une sphère tangente à D_1 en A_1 et à D_2 en A_2. Donner son équation si elle existe.

430. **RMS 2009 1000 Centrale PSI** Solution page 303.
On considère les droites $D(x = y, z = 1)$ et $D'(x = z + 1, y = 2z + 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique couple de plans affines parallèles (P, P') tels que $D \subset P$ et $D' \subset P'$.

431. **RMS 2009 1001 Centrale PSI** Solution page 303. Voir aussi l'exercice 840 page 531.
Soient $P : t \mapsto t^3 - 2t^2 + t + 1$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x) = P(y)\}$. Montrer que S est la réunion d'une droite et d'une courbe. Étudier cette courbe.

432. **RMS 2009 1002 Centrale PSI** Solution page 304.
Soient ABC un triangle du plan affine euclidien Π et M un point de Π. On note A_1 le projeté orthogonal de M sur (BC), puis l'on définit par récurrence sur $n \geqslant 1$: B_n est le projeté orthogonal de A_n sur (AC), C_n est le projeté orthogonal de B_n sur (AB), A_{n+1} est le projeté orthogonal de C_n sur (BC).

(a) Montrer que les suites (A_n), (B_n) et (C_n) convergent.

(b) Examiner plus particulièrement le cas du triangle équilatéral.

433. **RMS 2010 857 Centrale PSI (calcul formel)** Solution page 305.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique. Caractériser l'endomorphisme ayant pour matrice dans la base canonique

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Centrale PC

Algèbre

434. **RMS 2009 867 Centrale PC** Solution page 306.
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que G est commutatif si et seulement si $\varphi : g \in G \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupe.

435. **RMS 2009 1003 Centrale PC** Solution page 306.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.
   (a) Montrer que $U_{12} = U_3U_4 = \{zz',\ z \in U_3,\ z' \in U_4\}$.
   (b) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi\colon \zeta \in U_{12} \mapsto \zeta^p \in U_{12}$. À quelle condition φ réalise-t-il une bijection ?

436. **RMS 2009 1004 Centrale PC** Solution page 306.
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$.
Déterminer les n tels que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n. Dans les autres cas, donner le reste de la division euclidienne.

437. **RMS 2010 868 Centrale PC** Solution page 307.
Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.
   (a) Donner une condition sur n pour que B divise A_n.
   (b) Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

438. **RMS 2010 869 Centrale PC** Solution page 307.
   (a) Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^3 + pX + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P possède trois racines réelles distinctes.
   (b) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a \neq 0$ et $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P possède trois racines réelles distinctes.

439. **RMS 2011 899 Centrale PC** Solution page 308.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $P = X^{2n} - 1$ et $Q = X^{2n} + 1$.

440. **RMS 2011 900 Centrale PC** Solution page 308.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. On pose $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} P(\omega^k)$ et en déduire que $\max\{|P(z)|,\ |z| = 1\} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

441. **RMS 2010 870 Centrale PC** Solution page 308.
   (a) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

442. **RMS 2010 871 Centrale PC** Solution page 309.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P'' divise P.

443. **RMS 2011 901 Centrale PC** Solution page 311.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k/k!$.
   (a) Montrer que P_n n'a pas de racines dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Représenter les racines de P_n dans le plan complexe pour $n \in \{2, \ldots, 7\}$.
   (c) Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.
   (d) Si n est pair montrer que P_n n'admet pas de racine réelle. Si n est impair, montrer que P_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}_-$ notée r_n. Étudier la suite $(r_{2k+1})_{k \geqslant 0}$.
   (e) Étudier la convexité de P_n.

444. **RMS 2009 1005 Centrale PC** Solution page 313.
Soit, pour $k \in \mathbb{N}$: $P_k = (X - 1)^k(X + 1)^k$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre. Trouver les racines de $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$.

445. **RMS 2009 1006 Centrale PC** Solution page 313.
Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \operatorname{Ker} f^n$ et $I_n = \operatorname{Im} f^n$. Soient $K = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et $I = \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

(a) Montrer que K et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

(b) On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $I_q = I_{q+1}$. Montrer que $\forall n \geqslant q,\ I_n = I_q$. Montrer un résultat analogue pour les K_n.

(c) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $E = K \oplus I$.

446. **RMS 2009 1007 Centrale PC** Solution page 314.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et Φ l'application qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $(u_{|F}, u_{|G})$ dans $\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)$. À quelle condition l'application Φ est-elle surjective ?

447. **RMS 2009 1008 Centrale PC** Solution page 314.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

(a) Montrer que si v vérifie $(*)$, alors $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ et $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.

(b) Soient E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant $(*)$ et tel que $E_1 = \operatorname{Im} v$ et $F_1 = \operatorname{Ker} v$.

448. **RMS 2009 1009 Centrale PC** Solution page 314.
Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{d}$ le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!}$. On pose $\Delta\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\Delta(\binom{X}{d})$ pour $d \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ tel que $P = c_0\binom{X}{d} + c_1\binom{X}{d-1} + \cdots + c_{d-1}\binom{X}{1} + c_0$.

(c) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z}$.

449. **RMS 2007 802 Centrale PC** Solution page 315.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

450. **RMS 2009 1010 Centrale PC** Solution page 315.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \leqslant n$. Montrer que A est de rang r si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, de rang r, telles que $A = BC$.

451. **RMS 2009 1011 Centrale PC** Solution page 316.
Calculer, pour $z \in \mathbb{C}^*$, le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} z+1/z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+1/z & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+1/z \end{vmatrix}.$$

452. **RMS 2009 1012 Centrale PC** Solution page 316.
Soient E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha_1 \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, u(x_i), \dots, u(x_j), \dots, x_n) = \alpha_2 \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

453. **RMS 2010 875 Centrale PC** Solution page 317.
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et de degré $\geqslant 1$, on note $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P et $r^+(P)$ le nombre de racines distinctes de P dans $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Que dire de $r^+(P)$ si $N(P) = 1$ ou si $N(P) = 2$?

(b) Montrer que $r^+(P) \leqslant 1 + r^+(P')$.

(c) On suppose que $P(0) = 0$. Montrer que $r^+(P) \leqslant r^+(P')$.

(d) Montrer que $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$.

(e) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $0 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Montrer que $\det((x_i^{p_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) > 0$.

454. **RMS 2009 1013 Centrale PC** Solution page 318.

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f) \colon x \mapsto f(2x)$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

(b) L'application Φ est-elle un automorphisme ?

(c) Déterminer les valeurs propres de Φ.

455. **RMS 2009 1014 Centrale PC** Solution page 318.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $\det(A)$.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

456. **RMS 2009 1015 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 319.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 2ab \\ a & 0 & 2ab \\ 2ab & a & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres en fonction de a et b.

(b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta & 0 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. Réduire A. Lorsque $\theta = \pi/3$, calculer A^n.

457. **RMS 2010 878 Centrale PC, (calcul formel)** Solution page 320.

Pour $n \geqslant 2$, soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont égaux à 1, les coefficients diagonaux étant alternativement -1 et 1.

(a) Déterminer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associées pour $A_2, A_3, \dots, A_8$.

(b) Déterminer les multiplicités des valeurs propres.

(c) Calculer les coefficients diagonaux de A_n^2, ainsi que la trace de A_n^2.

(d) Déterminer toutes les valeurs propres de A_n.

458. **RMS 2009 1016 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 322.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les éléments propres de A.

(b) Écrire un programme permettant de résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = {}^t(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

(d) Trouver toutes les matrices commutant avec A.

459. **RMS 2010 881 Centrale PC** Solution page 323.

Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

460. **RMS 2009 1017 Centrale PC** Solution page 323.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. On suppose A diagonalisable. Exprimer les éléments propres de B en fonction de ceux de A. À quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ?

461. **RMS 2009 1018 Centrale PC** Solution page 323.

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que si D est diagonalisable, alors A et B le sont aussi.

(b) Montrer que si D est diagonalisable, il existe $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la matrice $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$ soit inversible et vérifie : $P^{-1}DP$ diagonale. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = MB - AM$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B, C pour que D soit diagonalisable.

462. **RMS 2010 882 Centrale PC** Solution page 325.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

(a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

(b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

463. **RMS 2009 1019 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 325.

Soit $P(X) = X^5 - 5X^4 + X^3 + X^2 - X + 2$. On pose $P_k = P^{(k)}$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$.

(a) Déterminer P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_5)$ est une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et exprimer $1, X, \dots, X^5$ dans cette base.

(b) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormale. Exprimer $\langle X^i, X^j \rangle$ pour $(i,j) \in \{0, \dots, 5\}^2$.

(c) Soit $F = \mathrm{Vect}\{1, X^2, X^3\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $X^4 - X$ sur F.

464. **RMS 2009 1020 Centrale PC** Solution page 327.

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$: $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) Déterminer une base orthonormée de E.

(c) Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \{P \in E,\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.

465. **RMS 2009 1021 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 328.

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

(b) Calculer la valeur de $\langle X^k, 1 \rangle$ pour tout $k \leqslant 10$.

(c) Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^4 + an^3 + n^2 + bn + c)^2}{2^n}$.

466. **RMS 2009 1022 Centrale PC** (Calcul formel) Solution page 329.

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Écrire une procédure calculant $\langle P, Q \rangle$.

(b) Justifier l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n unitaire de degré n et $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, $\langle P_n, P_m \rangle = 0$.

(c) Écrire une procédure calculant P_n par récurrence sur n. Donner $P_0, \dots, P_5$ et tracer leurs graphes.

(d) Montrer que P_n admet n racines dans $]-1, 1[$.

467. **RMS 2009 1023 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 330

(a) Montrer que $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^t\!AB)$ est un produit scalaire.

(b) On suppose ici que $n = 3$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \operatorname{Vect}\{I_3, J, K\}.$$

Donner à l'aide de Maple une base orthonormée de $\mathcal{F}$. Calculer la distance de L à $\mathcal{F}$.

(c) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $G(v_1,\dots,v_p) = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice de Gram de $(v_1,\dots,v_p)$ définie par $g_{i,j} = \langle v_i, v_j\rangle$. Montrer que $G = {}^t VV$, où V est la matrice des v_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1,\dots,v_p)$ une base de F. Si w est un vecteur de E, montrer que $d(w,F)^2 = \frac{\det G(v_1,\dots,v_p,w)}{\det G(v_1,\dots,v_p)}$. Retrouver le résultat du (b).

468. **RMS 2009 1024 Centrale PC** Solution page 332.

(a) Une symétrie est-elle un endomorphisme symétrique ?

(b) Une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?

(c) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques ?

(d) Quelles sont les matrices de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables ?

469. **RMS 2009 1025 Centrale PC** Solution page 332.
Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ unitaire. Soit $f\colon x \mapsto \langle x,u\rangle u + u\wedge x$. Montrer que f est une isométrie de E. Caractériser f. Quelles sont les isométries g de E telles que $g^2 = f$?

470. **RMS 2009 1026 Centrale PC** Solution page 333.
Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2 = 1$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac-b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}.$$

Caractériser f.

471. **RMS 2009 1027 Centrale PC** Solution page 333.
Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z\in E$. Montrer que $g = 0$.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur orthogonal.

472. **RMS 2009 1028 Centrale PC** Solution page 333.
Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, et $f\colon x\in E \mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.

(a) L'endomorphisme f est-il symétrique ? Est-il défini positif ?

(b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = f^{-1}$.

473. **RMS 2009 1029 Centrale PC** Solution page 334.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{{}^tAB + {}^tBA,\ (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

(b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f_A est un automorphisme.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de f_A.

474. **RMS 2009 1030 Centrale PC** Solution page 335.
Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a et b deux vecteurs de E linéairement indépendants, et $\varphi\colon x\in E\mapsto \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\forall x\in E,\ \varphi(x) = \langle u(x), x\rangle$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de u.

(c) Calculer $\max_{\|x\|=1} \varphi(x)$ et $\min_{\|x\|=1} \varphi(x)$.

Analyse

475. **RMS 2009 1031 Centrale PC** Solution page 336.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(a) Montrer que $\| \ \|_2$ est une norme sur E. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$. L'application Φ est-elle continue pour la norme $\| \ \|_2$?

(b) Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

476. **RMS 2011 948 Centrale PC** Solution page 337.

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|$. Montrer que Φ est une application continue de $(E, \| \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

477. **RMS 2011 949 Centrale PC** Solution page 337.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Si $P \in E$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max_{[-1,1]} |P'|$.

(a) Montrer que N_a est une norme.

(b) Si $(a,b) \in [-1,1]^2$, montrer que N_a et N_b sont équivalentes.

(c) Que dire si $a \in [-1,1]$ et $b > 1$?

478. **RMS 2009 1032 Centrale PC** Solution page 337.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour g et f dans E, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

479. **RMS 2009 1033 Centrale PC** Solution page 338.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n. Montrer que $\inf_{P\in E_n} \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t > 0$.

480. **RMS 2009 1034 Centrale PC** Solution page 338.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$. Exprimer u_n en fonction de n. On pourra poser $v_n = u_n^{n-1}$.

481. **RMS 2009 1035 Centrale PC** Solution page 338.

Pour tout nombre entier $n \geqslant 3$, soit $P_n\colon x \mapsto x^n - nx + 1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

(c) Trouver un développement asymptotique à deux termes de x_n.

482. **RMS 2009 1036 Centrale PC** Solution page 339.

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = f'(0)/2$.

(b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $f(0) = 0$ et que $f''(0)$ existe. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = f'(0)/2$.

(c) Soit f comme à la question (b) et $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $v_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})g(\frac{k}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

483. **RMS 2009 1037 Centrale PC** Solution page 339.

Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(e^{ix_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(e^{i\sqrt{2}\,x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

484. **RMS 2010 897 Centrale PC** Solution page 340.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}$ (n radicaux). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $(a_p(n))_{p\geqslant 1}$ la suite définie par $a_1(n) = \sqrt{n}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{p+1} = \sqrt{n + a_p(n)}$.

(a) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a_p(n) \leqslant \sqrt{pn}$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n$.

(c) Déterminer un équivalent de u_n, puis un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$.

485. **RMS 2009 1038 Centrale PC** Solution page 340.
Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+(n-k)^2}$.

486. **RMS 2009 1039 Centrale PC** Solution page 340.
On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n, ainsi que celle de son carré de Cauchy.

487. **RMS 2009 1040 Centrale PC** Solution page 341.
Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$.

(a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la série de terme général u_n converge.
Indication : on pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln(n^{b-a} u_n)$.
On suppose désormais que (a, b) vérifie cette condition.

(b) Montrer que nu_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(c) Calculer la somme de la série de terme général u_n.

488. **RMS 2009 1041 Centrale PC** Solution page 341.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = (\pi/2)^\alpha - (\arctan n)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

489. **RMS 2009 1042 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 341.
On pose $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n. En déduire la convergence de la série de terme général u_n. Donner une valeur approchée de sa somme.

(b) On pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Déterminer un équivalent de v_n, et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(c) On pose maintenant $w_n = u_{2n} + u_{4n+1} + u_{4n+3}$. Déterminer un équivalent de w_n, et donner une valeur approchée de sa somme. Pourquoi est-elle différente de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

490. **RMS 2009 1043 Centrale PC** Solution page 343.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose que $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante. Montrer que f est continue.

491. **RMS 2009 1044 Centrale PC** Solution page 343.
Soit $f : x \mapsto 1/(x^2+1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant n!$.

492. **RMS 2009 1045 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 344.
On définit la suite (f_n) de fonctions polynomiales par $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto 2t$ et, pour $n \geqslant 0$, $f_{n+2} : t \mapsto 2tf_{n+1}(t) - f_n(t)$.

(a) Calculer f_2, f_3, f_4, f_5. Proposer quelques conjectures et les prouver.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n+1)\theta = \sin\theta f_n(\cos\theta)$.

(c) Déterminer deux polynômes P_1 et P_2 tels que f_n soit solution de l'équation différentielle $(H_n) : P_2(t)y''(t) + P_1(t)y'(t) + n(n+2)y(t) = 0$.

493. **RMS 2009 1046 Centrale PC** Solution page 344.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}$ le graphe de f. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on note P_x le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(x, f(x))$ avec Oy.

(a) Pourquoi P_x est-il défini ? Montrer que si $\overrightarrow{OP_x}$ a une limite quand x tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{C}$ admet une asymptote.

(b) Montrer que la réciproque du (a) est fausse.

494. **RMS 2009 1047 Centrale PC** Solution page 345.
Existence et calcul de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t$.

495. **RMS 2008 908 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 347.
Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\, \mathrm{d}t$.

(a) Montrer l'existence de I.

(b) Déterminer une valeur approchée de I avec Maple. Est-ce une valeur exacte ?

(c) Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \ln t \,\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim_{+\infty} I_n = I$.

(d) Soit, pour $n \geqslant 1$: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que (a_n) converge. On note γ sa limite.

(e) Exprimer I_n en fonction de n et I en fonction de γ.

496. **RMS 2009 1048 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 345.
On pose $u_n(x) = \frac{1}{n+xn^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de S. Étudier la continuité et la monotonie de S.

(b) Tracer le graphe de S, déterminer les valeurs de S en k et $1/k$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$.

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

497. **RMS 2009 1049 Centrale PC** Solution page 348.
On pose $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

(b) La somme S est-elle continue ?

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

498. **RMS 2009 1050 Centrale PC** Solution page 348.
On pose $f_n(x) = x^n/(1 + x^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

(b) Sur quels intervalles y a-t-il convergence normale ?

499. **RMS 2009 1051 Centrale PC** Solution page 349.
On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n.

(b) Calculer la somme $S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

(c) La somme S est-elle continue sur D ?

500. **RMS 2009 1052 Centrale PC** Solution page 349.
On pose $u_n = \ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

(b) Étudier la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

501. **RMS 2010 914 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 350.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(a_0, a_1, a_2) = (2, 2 + i, 1 + i/2)$ et $\forall n \geqslant 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ et $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(a) Calculer les vingt premiers termes de la suite. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \{0, \dots, 20\},\ |a_n| \leqslant A2^n$.

(b) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant A2^n$.

(c) Montrer que f a un rayon de convergence $R > 0$.

(d) Montrer que $\forall x \in]-R, R[\colon\ f(x) = \frac{P(x)}{1-x-x^2+x^3}$, où P est une fonction polynomiale de degré 2 à préciser.

(e) Trouver $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \frac{u}{1-x} + \frac{v}{1+x} + \frac{w}{1+x^2}$. Retrouver le résultat du (a).

502. **RMS 2010 915 Centrale PC** Solution page 351.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^p}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de f ainsi que la limite de $f(x)$ quand $x \to R^-$.

(b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$. *Indication.* Utiliser $\varphi_x\colon t \mapsto x^{t^p}$.

503. **RMS 2009 1053 Centrale PC** Solution page 352.
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ après avoir déterminé les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale converge.

504. **RMS 2009 1054 Centrale PC** Solution page 352.
On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/[(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)]$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

(a) Montrer que u_n est bien défini et déterminer la limite de (u_n).

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

(c) Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \mathrm{d}x/[(x+1)(x+2)\dots(x+n)]$ quand n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

505. **RMS 2009 1055 Centrale PC** Solution page 354.
On pose $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

506. **RMS 2009 1056 Centrale PC** Solution page 354.
Soit $f\colon t \mapsto 1/(2+\cos t)$.

(a) Exprimer $f(t)$ comme une fraction rationnelle en $z = e^{it}$.

(b) En déduire la décomposition en série de Fourier de f.

507. **RMS 2009 1057 Centrale PC** Solution page 355.
Résoudre $x^2y' - (2x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

508. **RMS 2009 1058 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 356.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et (E) l'équation différentielle $y'' + (x^2+\lambda^2)y = 0$. On cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière $f\colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

(a) Donner une relation entre les coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) Écrire un programme en Maple pour calculer ces coefficients.

509. **RMS 2009 1059 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 356.
Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

(a) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de zéro.

(b) Résoudre (E).

(c) Que donne Maple ? Comparer.

510. **RMS 2009 1060 Centrale PC** Solution page 358.
Déterminer les extrema de $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

511. **RMS 2009 1061 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 358.
Soit $f\colon (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^4} + xy - 2y$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Tracer la surface définie par f. Que peut-on dire en $(0,0)$?

(b) Calculer les dérivées partielles en $(0,0)$. Tracer les surfaces définies par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Que voit-on ? Que peut-on en déduire ?

512. **RMS 2009 1062 Centrale PC** Solution page 359.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant \|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Géométrie

513. **RMS 2011 1026 Centrale PC** Solution page 359.
Montrer que $x \mapsto \frac{x-i}{x+i}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité privé de 1.

514. **RMS 2011 1027 Centrale PC** Solution page 360.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y+z=0$.

515. **RMS 2011 1028 Centrale PC** Solution page 360.
Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $u = e_1+e_2+e_3$ et d'angle $2\pi/3$.

516. **RMS 2011 1029 Centrale PC** Solution page 360.
On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient $a > 0$, $A(a,0)$ et $B(-a,0)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_a$ des $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $MA \times MB = a^2$. Donner une représentation polaire de $\mathcal{C}_a$; tracer la courbe.

517. **RMS 2011 1030 Centrale PC** Solution page 361.
Déterminer le rayon de courbure en tout point de la courbe d'équation $y = x \ln x$.

518. **RMS 2011 1031 Centrale PC** Solution page 361.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Caractériser l'ensemble $\{(x,y),\ x^2 + y^2 = (x\cos t + y \sin t + 1)^2\}$.

519. **RMS 2011 1032 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 362.
Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et Γ la courbe d'équation $x(t) = a\cos t, y(t) = b \sin t$.

(a) Représenter la courbe pour $a = 2$ et $b = 1$.
(b) Déterminer l'équation de la normale à Γ au point $M(t)$. Cette droite recoupe Γ en $P(t)$.
(c) Déterminer le minimum de $f\colon t \mapsto M(t)P(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.

520. **RMS 2011 1033 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 363.
On se place dans $\mathbb{R}^2$ euclidien muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$.

(a) Si $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $\Gamma_k = \{M \in \mathbb{R}^2,\ AM \times A'M = k^2\}$. Donner une équation cartésienne de Γ_k. Soient $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt[4]{((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2)}$ et $S = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y)\}$.
(b) Représenter S avec Maple. Quelle relation y a-t-il entre S et les Γ_k ?
(c) Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.
(d) Déterminer les extrema locaux et globaux de f.
(e) Écrire une procédure donnant l'équation d'un plan tangent. Représenter de tels plans.
(f) Déterminer le contour apparent de S dans la direction $\overrightarrow{j}$.

521. **RMS 2011 1034 Centrale PC** Solution page 365.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien. Soient $A(1,0,0), B(-1,0,0), C(1,1,0)$. Déterminer la surface engendrée par la réunion des droites passant par C et équidistantes de A et B.

522. **RMS 2011 1035 Centrale PC** Solution page 366.
Soient Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ intersection de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

(a) Déterminer un vecteur tangent en chaque point de Γ.
(b) Déterminer une équation cartésienne du projeté orthogonal de Γ sur (yOz).

523. **RMS 2011 1036 Centrale PC** Solution page 367.
Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et S l'intersection de $x^2 + y^2 = 1$ et de $z = 0$. Déterminer une équation cartésienne du cylindre s'appuyant sur S et dirigé par $\overrightarrow{u}$.

524. **RMS 2011 1037 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 367.
Soient $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ et $g\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mapsto \frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Représenter la surface d'équation $f(x,y,z) = 1$. Déterminer son type.
(b) Montrer que g admet un minimum et un maximum. Déterminer les points en lesquels ils sont atteints et les valeurs de ces extrema.
(c) Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ de valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_3 \|x\|^2$. Interpréter le résultat de la question (b).

525. **RMS 2011 1038 Centrale PC** Solution page 369.
Soient $a > 0$, s et p les fonctions d'expression $s(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ et $p(x,y,z) = (x+y+z)^2 - a^2$, (S) la surface d'équation $s = 0$, (P) la surface d'équation $p = 0$ et (Σ_a) la surface d'équation $as + p = 0$.

(a) Déterminer $(S) \cap (P)$.
(b) Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $0 \in \Sigma_a$. Quelle est la nature de ces surfaces ?

526. **RMS 2011 1039 Centrale PC** Solution page 369.
Soient S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = 2z + 4$ et P la surface d'équation $x + y + z = 1$. Déterminer la projection de $S \cap P$ sur le plan $z = 0$. En déduire les propriétés de $S \cap P$.

527. **RMS 2011 1040 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 370.
Soit (S) la surface d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.

(a) Nature de (S) ? Donner un paramétrage de (S). Tracer (S) à l'aide de Maple.

(b) Déterminer l'intersection de (S) avec le plan d'équation $z = \alpha$.

(c) Calculer le volume du solide défini par $\{\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} \leqslant 1,\ a \leqslant z \leqslant b\}$.

(d) La surface (S) admet-elle des points singuliers ?

(e) Donner l'équation du plan tangent à (S) au point $M(t) = (3\cos t, \sin t, 0)$.

528. **RMS 2011 1041 Centrale PC (calcul formel)** Solution page 371.
Soit (E) la surface d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

(a) Représenter (E).

(b) Soit R la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}(4, 3, 0)$ et d'angle t. Soit (x', y', z') l'image de (x, y, z) par R. Exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z).

(c) Déterminer une équation de (E_t), image par (E) par R.

CCP MP

Algèbre

529. **RMS 2010 955 CCP MP** Solution page 373.
Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. Montrer que E est un espace vectoriel ; en donner une base.

530. **RMS 2010 957 CCP MP** Solution page 373.
   (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit p dans $\mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ des réels et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2p}$ la matrice telle que $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ si $1 \leqslant i \leqslant 2p$ et $a_{i,j} = 0$ si $i + j \neq 2p + 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

531. **RMS 2010 959 CCP MP** Solution page 374.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$, et dont les autres coefficients sont égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.
   (a) Montrer que $P_{n+1}(X) = (n - X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\cdots(X-(n-1))$.
   (b) Montrer que, pour tout n et pour tout $k \leqslant n-1$, on a $(-1)^k P_n(k) > 0$. En déduire que chaque intervalle $]0;1[$, $]1;2[$, …, $]n-1;+\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

532. **RMS 2011 1043 CCP MP** Solution page 375.
Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u$ est pair.

533. **RMS 2011 1046 CCP MP** Solution page 375.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.
   (a) Montrer que u est diagonalisable.
   (b) Décrire les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

534. **RMS 2010 960 CCP MP** Solution page 375.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

535. **RMS 20 ? ? ? ? ? ? CCP MP** Solution page 376.
Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien, et soit λ une valeur propre réelle de f, dont on note m la multiplicité et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que $\dim E_\lambda = m$.

Analyse

536. **RMS 2010 963 CCP MP** Solution page 376.
Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

537. **RMS 2010 964 CCP MP** Solution page 376.
On pose $f_n \colon x \mapsto n e^{-n^2 x^2}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

538. **RMS 2010 965 CCP MP** Solution page 376.
Soit $f \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x / x^n$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Étudier sa continuité.
   (c) Calculer $f(2)$.

539. **RMS 2010 967 CCP MP** Solution page 377.
On suppose que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$.

Géométrie

540. **RMS 2010 973 CCP MP** Solution page 378.
Tracer la courbe $\left(x = \frac{t-1}{t}, y = \frac{t^2}{t+1}\right)$.

541. **RMS 2010 974 CCP MP** Solution page 379.
Soit Γ la courbe $(x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin^3 t)$. Étude, tracé, équation des tangentes.

542. **RMS 2010 975 CCP MP** Solution page 379.
Tracer la courbe $r = 2(\cos\theta - \cos 2\theta)$. Préciser les tangentes en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

CCP PSI

Algèbre

543. **RMS 2006 1042 CCP PSI** Solution page 381.
Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X \sin \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n})$ par $X^2 + 1$.

544. **RMS 2007 902 CCP PSI** Solution page 381.
Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X \sin k + \cos k)$ par $X^2 + 1$.

545. **RMS 2006 1043 CCP PSI** Solution page 381.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$

546. **RMS 2011 1070 CCP PSI** Solution page 381.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie E.
   (a) Montrer : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Montrer : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
   (c) Montrer : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

547. **RMS 2007 904 CCP PSI** Solution page 382.
Soient $n \geqslant 2$ et $f\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$. Montrer que f est linéaire et trouver $\dim(\operatorname{Ker} f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

548. **RMS 2010 978 CCP PSI** Solution page 382.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

549. **RMS 2011 1069 CCP PSI** Solution page 382.
Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $\tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer le déterminant de f_n.

550. **RMS 2011 1072 CCP PSI** Solution page 382.
Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A\colon (x, y, z) \in E^3 \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x), y, z) + \det_{\mathcal{B}}(x, u(y), z) + \det_{\mathcal{B}}(x, y, u(z))$. Montrer que A est tri-linéaire alternée, puis que $A = (\operatorname{tr} u) \det_{\mathcal{B}}$.

551. **RMS 2010 982 CCP PSI** Solution page 382.
Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et déterminer sa dimension.
   (b) Si $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ possède n termes diagonaux distincts, montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
   (c) L'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Étude d'endomorphismes et de matrices d'ordre générique satisfaisant des conditions algébriques

552. **RMS 2011 1077 CCP PSI** Solution page 383.
Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie, f, u et v dans E. On suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $f = au + bv$, $f^2 = a^2u + b^2v$ et $f^3 = a^3u + b^3v$. Montrer que f est diagonalisable.

553. **RMS 2008 973 CCP PSI** Solution page 383.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$. On suppose que $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{tr} A = 0$, et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

554. **RMS 2010 983 CCP PSI** Solution page 383.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A + 8I_n$.
   (a) La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
   (b) Trouver les $M \in \operatorname{Vect}(I_n, A)$ telles que $M^2 = 2M + 8I_n$.

555. **RMS 2011 1073 CCP PSI** Solution page 384.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0$.

(a) Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.

(b) Montrer que n est nécessairement pair.

(c) Calculer le déterminant et la trace de A.

556. **RMS 2010 986 CCP PSI** Solution page 384.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis que $\det(A) > 0$.

Réduction de matrices particulières de petits ordres et applications

557. **RMS 2010 988 CCP PSI** Solution page 385.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

(b) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^5 + M^3 + M = A$.

558. **RMS 2010 989 CCP PSI** Solution page 385.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique P de A.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P. En déduire A^n.

559. **RMS 2010 991 CCP PSI** Solution page 385.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

(a) Les matrices A et A^2 sont elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?

(b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

560. **RMS 2011 1076 CCP PSI** Solution page 386.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Diagonaliser A.

(b) Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, montrer que B et A commutent. Déterminer l'ensemble $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ B^2 = A\}$.

561. **RMS 2008 907 CCP PSI** Solution page 386.
Trouver les matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables.

Réduction de matrices particulières d'ordre générique

562. **RMS 2011 1075 CCP PSI** Solution page 387.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j),\ a_{i,j} = i$. Déterminer les éléments propres de A.

563. **RMS 2007 908 CCP PSI** Solution page 387.
Soient $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 4$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

(a) Prouver que A est diagonalisable.

(b) Montrer que $A - 3I_n$ n'est pas inversible.

(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

564. **RMS 2008 972 CCP PSI** Solution page 387.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = i/j$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

565. **RMS 2008 974 CCP PSI** Solution page 389.
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par $n_{i,j} = a_i$. On pose $s = a_1 + \cdots + a_n$ et $M = 2N - sI_n$.

(a) Calculer N^2. La matrice N est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

566. **RMS 2007 909 CCP PSI** Solution page 388.
Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne, de la première colonne et de la diagonale valent 1, les autres étant nuls. Montrer que 1 est valeur propre de A. Trouver l'espace propre associé. En déduire les autres valeurs propres et les autres espaces propres.

Opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

567. **RMS 2010 992 CCP PSI** Solution page 389.
Soit $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres et calculer le déterminant de Φ.

568. **RMS 2011 1074 CCP PSI** Solution page 389.
Soit $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M)I_n + M$. Trouver un polynôme annulateur de Φ de degré 2. En déduire les éléments propres de Φ.

569. **RMS 2011 1078 CCP PSI** Solution page 390.
Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $\Phi\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto -X + (\operatorname{tr} X)I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

570. **RMS 2008 975 CCP PSI** Solution page 390.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}| \leqslant n$.

571. **RMS 2008 976 CCP PSI** Solution page 390.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ est inversible, puis que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

572. **RMS 2010 995 CCP PSI** Solution page 390.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle u(e_i), \varepsilon_j\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

573. **RMS 2010 996 CCP PSI** Solution page 390.
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Les matrices $A + B$, AB et la comatrice de A sont-elles nécessairement dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

(b) Montrer que si $(A + B)/2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

574. **RMS 2010 997 CCP PSI** Solution page 391.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien , F un sous-espace vectoriel de E, p le projecteur orthogonal sur F, et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que $p \circ f$ induit un endomorphisme auto-adjoint de F.

575. **RMS 2011 1079 CCP PSI** Solution page 391.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\,{}^tMM = I_n$. Montrer que M est inversible et symétrique. Déterminer M.

Analyse

576. **RMS 2008 981 CCP PSI** Solution page 391.
Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x + 1)/\ln x)^{x\ln x}$.

577. **RMS 2010 999 CCP PSI** Solution page 392.
Soient $f\colon [a, b] \to [a, b]$ 1–lipschitzienne et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = [x_n + f(x_n)]/2$. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point fixe de f.

578. **RMS 2011 1080 CCP PSI** Solution page 392.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ degré n et simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ assez petit, le polynôme $P + \varepsilon X^{n+1}$ est encore simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

579. **RMS 2010 1002 CCP PSI** Solution page 392.
Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

580. **RMS 2011 1081 CCP PSI** Solution page 392.
Nature, suivant $a \in \mathbb{R}^*$, de la série de terme général $u_n = (n + 2)^a - 2(n + 1)^a + n^a$?

581. **RMS 2010 1000 CCP PSI** Solution page 393.
Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1})$.

582. **RMS 2008 978 CCP PSI** Solution page 393.
Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n^2-1)$.

583. **RMS 2006 1074 CCP PSI** Solution page 393.
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$.

584. **RMS 2008 979 CCP PSI** Solution page 394.
Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1}(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)/n$.

585. **RMS 2007 912 CCP PSI** Solution page 394.
Nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(t\sin t)/(t^2+t+1)\,\mathrm{d}t$.

586. **RMS 2011 1084 CCP PSI** Solution page 394.
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $f'(x)/f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$. Montrer que

   (a) Si $\ell > 0$, la série de terme général $f(n)$ diverge.
   (b) Si $\ell < 0$, la série de terme général $f(n)$ converge.
   (c) Si $\ell = 0$, tout est possible.

587. **RMS 2011 1086 CCP PSI** Solution page 395.
Soit $a > 0$.

   (a) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2}$ en posant $t = \tan x$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2}$.
   (b) Étudier la suite de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3(\sin x)^2}$.

588. **RMS 2011 1087 CCP PSI** Solution page 395.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \colon x \mapsto nxe^{-x^2\ln(n)}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

589. **RMS 2011 1089 CCP PSI** Solution page 396.
Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n \colon t \mapsto 1/(1+(nt)^2)$. Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

590. **RMS 2011 1090 CCP PSI** Solution page 396.
Soit $S \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$.

   (a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) L'application S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

591. **RMS 2011 1091 CCP PSI** Solution page 397.
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, soit $u_n \colon x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

   (a) Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général u_n. Pour $x \in D$, on pose $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D.
   (c) Si $n \geqslant 2$, soit $R_n \colon x \in D \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. Montrer que $\forall x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}$.
   (d) La fonction S est-elle continue sur D ? Est-elle intégrable sur D ?

592. **RMS 2011 1092 CCP PSI** Solution page 398.
Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

593. **RMS 2010 1007 CCP PSI** Solution page 398.
Soient $f \colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ et $g \colon t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{\ln n}$. Déterminer les domaines de définition de f et de g. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

594. **RMS 2008 983 CCP PSI** Solution page 399.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.

   (a) Montrer que la série entière de terme général $a_n x^n/n!$ a un rayon de convergence infini. On note f sa somme.
   (b) Si $t > 1$, montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n/t^{n+1}$.

595. **RMS 2007 917 CCP PSI** Solution page 399.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

(a) Déterminer le domaine de définition de $S(x)$.
(b) Calculer $S(x)$.

596. **RMS 2011 1093 CCP PSI** Solution page 399.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/(\operatorname{ch} x)^n$.

(a) Justifier l'existence de u_n.
(b) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.
(c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

597. **RMS 2008 986 CCP PSI** Solution page 400.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

598. **RMS 2010 1008 CCP PSI** Solution page 400.
La fonction $f\colon x \mapsto \ln(6-5x+x^2)$ est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Si tel est le cas, donner son développement.

599. **RMS 2010 1010 CCP PSI** Solution page 400.

(a) Montrer que la série de terme général $1/(n^2+1)$ est convergente.
(b) Soit $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(1+k^2)$. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in\,]-1,1[$.
(c) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

600. **RMS 2010 1012 CCP PSI** Solution page 401.
On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t+t^{2n}}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'existence de u_n. Déterminer la limite de (u_n).

601. **RMS 2011 1095 CCP PSI** Solution page 401.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/\sqrt{x^n + x^{-n}}$.

(a) L'existence de I_n est-elle justifiée pour tout n ?
(b) Étudier la convergence de la suite (I_n).
(c) Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

602. **RMS 2010 1014 CCP PSI** Solution page 402.
Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $g\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.
(b) Exprimer g'' en fonction de g et de f.

603. **RMS 2010 1018 CCP PSI** Solution page 403.
Soit $f\colon y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(y)$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.
(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(c) En déduire une expression de f.

604. **RMS 2010 1020 CCP PSI** Solution page 403.
Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$.

605. **RMS 2011 1098 CCP PSI** Solution page 404.
Soit $F\colon y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.
(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$. En déduire une expression de F.

606. **RMS 2010 1022 CCP PSI** Solution page 404.
Domaine de définition et calcul de $F\colon s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}\, dt$.

607. **RMS 2010 1023 CCP PSI** Solution page 405.
Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

(a) Justifier la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$. Exprimer I à l'aide de valeurs de la fonction ζ.

(b) Exprimer $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t+\cdots+t^n)}{t}\, dt$ à l'aide de la fonction ζ.

608. **RMS 2010 1024 CCP PSI** Solution page 405.
Soit f la fonction paire et 2π–périodique définie par : $\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = x^2$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

609. **RMS 2011 1099 CCP PSI** Solution page 405.
Soit $f\colon x \mapsto \max\{\sin x, 0\}$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(kx)}{4k^2-1}$.

610. **RMS 2010 1026 CCP PSI** Solution page 406.
Soit $(E)\ : (1+x)y' - 2y = 0$.

(a) Déterminer l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de (E). En donner une base ainsi que la dimension.

(b) Déterminer l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de (E). En donner une base ainsi que la dimension.

611. **RMS 2008 988 CCP PSI** Solution page 407.
Soit $(E)\ :\ 2x(x+1)y' - (x-1)y = (x+1)$. Donner les solutions de (E) sur $]0, \infty[$, puis sur $]-1, +\infty[$.

612. **RMS 2011 1101 CCP PSI** Solution page 407.
Soit $(E)\colon xy'' - y' - 4x^3 y = 0$.

(a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x^2$.

(b) Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) sur $]0, 1[$ si et seulement si $x \mapsto -y(-x)$ est solution de (E) sur $]-1, 0[$.

(c) Déterminer les solutions de (E) sur $]-1, 1[$.

613. **RMS 2008 989 CCP PSI** Solution page 409.
Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2y + z\ , \\ y' & = & 3x + 4z\ , \\ z' & = & 3y + 5x\ . \end{array}\right.$

Géométrie

614. **RMS 2010 1027 CCP PSI** Solution page 409.
Dans le plan euclidien, soient A et O deux points distincts et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A. Déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle OMA lorsque M parcourt $\mathcal{C}$.

615. **RMS 2010 1029 CCP PSI** Solution page 410.
Dans le plan euclidien usuel, soit $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$. En utilisant les coordonnées polaires, trouver l'ensemble Γ des points M tels que $MA \times MB = 1$. Calculer l'aire intérieure à Γ.

616. **RMS 2008 990 CCP PSI** Solution page 410.
Nature de la quadrique d'équation $-y^2 + 3z^2 - 6\sqrt{2}z + 2x - 4 = 0$?

617. **RMS 2011 1103 CCP PSI** Solution page 410.

(a) Montrer que si deux cercles s'intersectent en deux points A et B, l'intersection des deux disques correspondants est incluse dans le disque de diamètre $[A, B]$ (erreur d'énoncé : il faut une hypothèse supplémentaire sur les deux cercles).

(b) Montrer que l'ensemble des rayons des disques contenant n points donnés dans le plan usuel admet une borne inférieure (c'est banal : on va plutôt étudier l'existence d'un minimum).

618. **RMS 2011 1106 CCP PSI** Solution page 412.
Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $xyz = 1$.

(a) Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point M_0.

(b) On note (P) ce plan tangent. Déterminer la distance de O à (P)

CCP PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

619. **RMS 2011 1107 CCP PC** Solution page 413.
Soient E un ensemble et $f\colon E \to E$.
   (a) On suppose f surjective. Montrer que $f \circ f$ est surjective.
   (b) On suppose que f vérifie $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f surjective si seulement si f est injective.

Groupes, anneaux, corps

620. **RMS 2009 1154 CCP PC** Solution page 413.
Soient $(G,\,\cdot\,)$ un groupe et a un élément de G. On définit la loi $\star$ par : $x \star y = xay$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Nombres complexes, polynômes

621. **RMS 2011 1108 CCP PC** Solution page 413.
Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z+1| = 1$.

622. **RMS 2011 1109 CCP PC** Solution page 413.
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que le triangle abc est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

623. **RMS 2010 1032 CCP PC** Solution page 414.
Soit $f\colon z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mapsto (z+1)/(z-2i)$.
   (a) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

624. **RMS 2012 1032 CCP PC** Solution page 414.
Soit $f\colon z \mapsto \frac{z+1}{z-i}$. Trouver l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$, puis tels que $|f(z)| = 2$.

625. **RMS 2007 932 CCP PC** Solution page 415.
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.
   (a) Trouver les racines de P dans $\mathbb{C}$.
   (b) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (4 + \text{cotan}^2(k\pi/n))$.

626. **RMS 2010 1033 CCP PC** Solution page 415.
Soient n un entier naturel non nul, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $P_n = (X-a)^n (X-b)^n$ et $Q_n = P^{(n)}/n!$.
   (a) Déterminer le degré de Q_n ainsi que son coefficient dominant.
   (b) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$. Montrer que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.
   (c) Montrer qu'il existe $(\lambda_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tel que $Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} (X-a)^{n-k} (X-b)^k$.
   (d) Calculer $I_n = \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$.

627. **RMS 2012 1309 CCP PC** Solution page 416.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7. On suppose que $P + i$ est multiple de $(X-i)^4$. Déterminer P' et en déduire P.

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

628. **RMS 2010 1039 CCP PC** Solution page 416.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

Algèbre linéaire : applications linéaires

629. **RMS 2010 1040 CCP PC** Solution page 417.
Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a) On suppose que $f \circ f = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}$ est bijective.

(b) On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ telle que $f^p = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}$ est bijective.

630. **RMS 2010 1041 CCP PC** Solution page 417.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont des projecteurs de E et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

631. **RMS 2011 1113 CCP PC** Solution page 417.
Soient $n \geqslant 2$ et p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Déterminer la dimension du commutant de p.

632. **RMS 2007 933 CCP PC** Solution page 418.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E.

(b) Montrer que la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.

(c) Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

633. **RMS 2011 1117 CCP PC** Solution page 419.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. Déterminer les valeurs possibles pour la trace de f.

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

634. **RMS 2011 1124 CCP PC** Solution page 419.
Soient E un espace vectoriel, f dans $\mathcal{L}(E)$ non nul et $\Phi\colon g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ f - f \circ g \in \mathcal{L}(E)$. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $L(a) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f - f \circ g = ag\}$.

(a) Montrer que $L(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $L(0)$ n'est pas réduit à zéro.

(b) On suppose que E est de dimension finie, $a \neq 0$ et $g \in L(a)$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Phi(g^p)$. En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = 0$.

635. **RMS 2010 1050 CCP PC** Solution page 419.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A \neq 0$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer son noyau.

(b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?

Algèbre linéaire : matrices

636. **RMS 2006 1112 CCP PC** Solution page 420.
Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

637. **RMS 2007 934 CCP PC** Solution page 420.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

(a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.

(b) Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

638. **RMS 2012 1313 CCP PC** Solution page 421.
Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix},\quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble E est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Algèbre linéaire : déterminants

639. **RMS 2011 1110 CCP PC** Solution page 421.
Calculer, pour $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, le déterminant $V(x_1,\dots,x_n)=\det((x_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.
Indication. Considérer $P(X)=V(x_1,\dots,x_{n-1},X)$.

640. **RMS 2011 1112 CCP PC** Solution page 422.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, soit $M_n=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{1,1}=\cos\alpha$, $m_{i,i}=2\cos\alpha$ si $i\geqslant 2$, $m_{i,i+1}=m_{i+1,i}=1$ si $i\in\{1,\dots,n-1\}$, les autres coefficients étant nuls. Calculer $D_n=\det(M_n)$.

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

641. **RMS 2007 937 CCP PC** Solution page 422 (voir aussi page 441).
Soient $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et
$$S=\begin{pmatrix}0&a_1&\cdots&a_n\\a_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$
En considérant S^2, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de S.

642. **RMS 2010 1049 CCP PC** Solution page 423.
Soient $P=a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n\in\mathbb{C}[X]$ et C_P la matrice compagne :
$$C_P=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&-a_0\\1&\ddots&&\vdots&-a_1\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&-a_{n-2}\\0&\cdots&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que C_P est de rang n si $a_0\neq 0$ et de rang $n-1$ si $a_0=0$.
(b) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Montrer que $\operatorname{rg}(C_P-\lambda I_n)\geqslant n-1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P.
(c) Montrer que $\chi_{C_P}=(-1)^nP$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.
(d) On suppose que $P\in\mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X)=\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k)^{m_k}$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{C}^p$. Si $q\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k^q)^{m_k}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.

643. **RMS 2006 1113 CCP PC** Solution page 424.
Déterminer les $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3-2M^2+M=0$ et $\operatorname{tr}M=0$.

644. **RMS 2011 1122 CCP PC** Solution page 424.
Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{i,j}=a$ si $i+j$ est pair et $m_{i,j}=b$ sinon.

(a) Déterminer le rang de M.
(b) Déterminer les éléments propres de M dans le cas où le rang est maximal.

645. **RMS 2012 1315 CCP PC** Solution page 426.
Soit $A\in\mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3-3A^2+2A=0$ et $\operatorname{tr}A=8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

646. **RMS 2012 1316 CCP PC** Solution page 426.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4-2A^3+2A^2=0$. Montrer que $\operatorname{tr}A\in 2\mathbb{N}$.

647. **RMS 2012 1318 CCP PC** Solution page 426.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0)\neq 0$. Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Algèbre linéaire : réduction d'endomorphismes ou de matrices explicites

648. **RMS 2011 1115 CCP PC** Solution page 427.
Déterminer pour quels $z\in\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix}0&0&z\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

649. **RMS 2007 936 CCP PC** Solution page 427.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} A$.

(b) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(c) Préciser les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?

650. **RMS 2010 1047 CCP PC** Solution page 428.

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer J^2. La matrice J est-elle inversible ? Montrer que J est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M(a, b) = aI_3 + bJ$. Montrer que $M(a, b)$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. À quelle condition est-elle inversible ?

(c) Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + e^x)J$. Calculer $F(x)F(y)$ et $G(x)G(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $F(x)$ et $G(x)$ sont inversibles et déterminer leurs inverses.

651. **RMS 2010 1048 CCP PC** Solution page 428.

Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -8 & -11 & -4 \\ 12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer $\det(M - XI_3) = (1 - X)^3$. La matrice M est -elle diagonalisable ?

(b) Montrer que $M = I_3 + N$ où $N^2 = 0$.

(c) Déterminer la limite de M^n/n quand n tend vers $+\infty$.

652. **RMS 2010 1044 CCP PC** Solution page 428.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) On pose $s = \operatorname{tr} A$ et $B = 2A - sI_n$. À quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ? À quelle condition est-elle inversible ?

653. **RMS 2011 1116 CCP PC** Solution page 429.

Soit A la matrice carrée d'ordre n avec des zéros sur la diagonale et des 1 en dehors.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $B = A + I_n$. Calculer B^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.

(c) Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, comment calculer son inverse ?

654. **RMS 2011 1119 CCP PC** Solution page 429.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u\ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

655. **RMS 2010 1046 CCP PC, RMS 2011 1120 CCP PC** Solution page 430.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = aP(X + 2) + bP(X + 1) + cP(X)$.

(a) Montrer que Φ est un automorphisme si et seulement si $a + b + c \neq 0$.

(b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = (a + b + c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k a + b}{k!} P^{(k)}(X)$.

(c) On suppose que $a + b + c = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} \Phi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si et seulement si $2a + b \neq 0$. Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi$ dans ce cas.

(d) On suppose que $a + b + c \neq 0$. Déterminer les valeurs propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?

656. **RMS 2012 1314 CCP PC** Solution page 431.
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

657. **RMS 2012 1320 CCP PC** Solution page 431.
Soient $n \geqslant 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = P(-4)X + P(6)$.

(a) Déterminer l'image et le noyau de u.

(b) Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Algèbre linéaire : réduction, problèmes théoriques

658. **RMS 2011 1121 CCP PC** Solution page 431.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(a) Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.

(b) En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.

(c) Montrer qu'il existe un unique n–uplet $(a_0, \dots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0\mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

(d) Déterminer la dimension du commutant de f.

659. **RMS 2010 1051 CCP PC** Solution page 432.
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

(a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\, f \neq 0$.

(b) On suppose que $\mathrm{tr}\, f \neq 0$. Déterminer f^k pour $k \geqslant 1$. Caractériser l'endomorphisme $g = f/(\mathrm{tr}\, f)$.

660. **RMS 2012 1319 CCP PC** Solution page 432.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

(a) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

(b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

661. **RMS 2010 1053 CCP PC** Solution page 433.
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$. On munit E du produit scalaire défini par $\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

(a) Donner la dimension et une base de H.

(b) Déterminer le projeté orthogonal de P sur H.

662. **RMS 2010 1054 CCP PC** Solution page 433.
On munit $\mathbb{R}[X]$ de son produit scalaire canonique. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

663. **RMS 2007 939 CCP PC** Solution page 433.
Déterminer la matrice canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,0), (1,1,0,1)\}$.

664. **RMS 2011 1125 CCP PC** Solution page 434.
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

665. **RMS 2006 1119 CCP PC** Solution page 434.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

(a) Montrer : $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

666. **RMS 2011 1126 CCP PC** Solution page 434.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2.

(a) Si $k \in \{1,2\}$, montrer que la symétrie orthogonale par rapport à H_k est l'application $s_k \colon x \mapsto x - 2\langle x, e_k\rangle e_k$.

(b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

(c) Vérifier que la somme $F = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ est bien directe et que F est stable par $s_2 \circ s_1$.

(d) Soit e_1' tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_1')$ soit une base orthonormée directe de F. Montrer qu'il existe une unique rotation r de F tel que $r(e_1) = e_2$. Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de F induit par $s_2 \circ s_1$ à l'aide de r.

667. **RMS 2012 1321 CCP PC** Solution page 435.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur $\mathrm{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

668. **RMS 2012 1322 CCP PC** Solution page 436.

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$; on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. On pose $\mathcal{V} = \{f \in E, f'' = f\}$, $\mathcal{W} = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $H = \{f \in E,\ f(0) = \mathrm{ch}\,1 \text{ et } f(1) = 1\}$.

(a) Montrer que $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.

(b) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer que $\langle f, g\rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $\langle \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\rangle$, $\|\,\mathrm{sh}\,\|^2$ et $\|\,\mathrm{ch}\,\|^2$.

(c) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g\rangle = 0$.

(d) Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \mathrm{ch}\rangle$ et $\langle f, \mathrm{sh}\rangle$. En déduire les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ de la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ de f sur $\mathcal{V}$.

(e) Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\,\mathrm{d}t,\ f \in H \right\}$.

(f) Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

669. **RMS 2011 1127 CCP PC** Solution page 437.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t \right) X^k$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$.

(b) Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.

(c) Soit $U = {}^t(u_0, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tUMU = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$. En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

(d) Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Indication. Utiliser la trace.

670. **RMS 2006 1120 CCP PC** Solution page 438.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

(a) Montrer que A définit un projecteur orthogonal.

(b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\mathrm{tr}({}^tMM)$ en fonction des coefficients de M.

(c) Montrer que : $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}$.

671. **RMS 2007 938 CCP PC** Solution page 439.

(a) Montrer qu'en posant $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Si $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $[\mathrm{tr}(AB + BA)]^2 \leqslant 4(\mathrm{tr}\,A^2)(\mathrm{tr}\,B^2)$.

(c) Si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer $\mathrm{tr}\,S^{p+q} \leqslant \sqrt{(\mathrm{tr}\,S^{2p})(\mathrm{tr}\,S^{2q})}$.

672. **RMS 2010 1057 CCP PC** Solution page 440.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$. Que dire de ${}^tAA$? Déterminer A.

673. **RMS 2006 1118 CCP PC** Solution page 440.
Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

674. **RMS 2010 1058 CCP PC** Solution page 440.
Soit J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(a) Montrer que J_n est diagonalisable. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P_n^{-1} J_n P_n$ soit la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne n, colonne n, qui est égal à n.

(b) Expliciter P_2 et P_3.

(c) Montrer que $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ BJ_3 = J_3 B\}$ est un espace vectoriel de dimension 5.

675. **RMS 2010 1059 CCP PC** Solution page 441 (voir aussi page 422).
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n+1$, $(e_0, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, a un vecteur unitaire tel que $\langle a, e_0\rangle = 0$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $a_k = \langle a, e_k\rangle$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ est S.

(a) Montrer que S est diagonalisable. Montrer que l'un des a_k au moins est non nul ; déterminer le rang de S.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} s$ et $(\operatorname{Ker} s)^\perp$.

(c) Calculer $\operatorname{tr} s$ et $\operatorname{tr} s^2$. En déduire les valeurs propres non nulles de s. Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres non nulles.

676. **RMS 2010 1060 CCP PC** Solution page 442.
On munit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à f. On suppose que A est antisymétrique.

(a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

(b) Montrer que l'unique valeur propre de f est zéro.

(c) Montrer que $A - I_{2n+1}$ et $A + I_{2n+1}$ sont inversibles.

(d) On pose $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}$. Montrer que $B \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\det B = 1$.

677. **RMS 2011 1128 CCP PC** Solution page 442.
On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = 2M + {}^tM$.

(a) Montrer que $\varphi^2 = 4\varphi - 3\mathrm{id}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

(b) Déterminer les valeurs propres de φ, les sous-espaces propres, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de φ.

(c) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b\,{}^tM$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $\varphi_{a,b}$ soit inversible.

(d) Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \langle M, N\rangle = \operatorname{tr}({}^tMN)$. L'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ défini en (c) est-il symétrique pour ce produit scalaire ?

678. **RMS 2011 1129 CCP PC** Solution page 443.
Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_n$. Montrer que $M^2 = I_n$.

679. **RMS 2011 1130 CCP PC** Solution page 443.
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C = AB + BA$.

(a) Montrer que $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) On suppose que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

680. **RMS 2011 1162 CCP PC** Solution page 444.
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y+z=0 \quad \text{et} \quad x+y+z+t=0\}\,.$$

Déterminer une base de F et une base de $F^\perp$.

Espaces euclidiens de dimension 3, produit vectoriel

681. **RMS 2010 1056 CCP PC** Solution page 444.
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire et $\Phi\colon x \mapsto a \wedge x$. Si $t \in \mathbb{R}$, soit $f_t\colon x \mapsto x + t\Phi(x)$.

(a) Déterminer le noyau et l'image de Φ. Montrer que Φ possède une unique valeur propre et donner un vecteur propre associé.

(b) Montrer : $\forall x \in E,\ a \wedge (a \wedge x) = \langle a, x\rangle a - x$. En déduire que $\Phi^3 = -\Phi$.

(c) Trouver un polynôme de degré au plus trois tel que $P_t(f_t) = 0$. Calculer f_t^{-1}.

Analyse

Espaces vectoriels normés

682. **RMS 2011 1131 CCP PC** Solution page 445
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t$. Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\ \|_\infty$?

683. **RMS 2011 1132 CCP PC** Solution page 445.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

(a) Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue.

(b) Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.

(c) Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.

(d) Montrer que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

684. **RMS 2010 1062 CCP PC** Solution page 446.
On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\ \|$ définie par : $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $\|M\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$.

(a) Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.

(b) Montrer que l'application $(M,N) \mapsto MN$ est continue.

(c) Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n\geqslant}$ est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant 1$.

(d) Soit $B \in E$. On suppose que $(B^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $C \in E$. Montrer que $C^2 = C$ et que le spectre de C est inclus dans $\{0,1\}$. Montrer que les valeurs propres de B sont de module $\leqslant 1$; si λ est une valeur propre de B de module 1, montrer que $\lambda = 1$.

Suites : étude asymptotique

685. **RMS 2006 1122 CCP PC** Solution page 447.
Déterminer la limite de $P_n = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^n (n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

686. **RMS 2010 1064 CCP PC** Solution page 447.
Déterminer la limite de $u_n = (1/n)\sum_{k=1}^n \ln(1+k/n)$. En déduire la limite de $v_n = [(2n)!/n!n^n]^{1/n}$.

687. **RMS 2012 1323 CCP PC** Solution page 447.
Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim 1/n$. Montrer que u_n tend vers zéro. Trouver un équivalent de u_n.

688. **RMS 2011 1133 CCP PC** Solution page 448.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon x \mapsto x + \frac{n}{2}\ln x - n$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $a_n \in [1, e^2]$. Étudier la limite de (a_n).

Suites récurrentes

689. **RMS 2010 1066 CCP PC** Solution page 448.
On pose $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que $f(x) \in [1/2, 3/2]$ et que $(f \circ f)(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Montrer que f est $(1/2)$–lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
   (d) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \geqslant 1$ si $n \geqslant 2$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

690. **RMS 2012 1328 CCP PC** Solution page 449.
Soit $f\colon x \mapsto x(\ln(1+2x) - \ln x)$. Déterminer le comportement de f en $+\infty$. Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe en $+\infty$ ainsi que les positions de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

691. **RMS 2010 1075 CCP PC** Solution page 449.
Pour $t \in \mathbb{R}_+$, soit $g_t\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^3 + tx - 1$.
   (a) Si $t \in \mathbb{R}_+$, montrer qu'il existe un unique $u(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_t(u(t)) = 0$.
   (b) Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leqslant t \leqslant t'$. Si $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $g_t(x)$ à $g_{t'}(x)$. En déduire que u est décroissante.
   (c) Déterminer la limite de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Donner un équivalent $q(t)$ de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $u(t) - q(t)$.
   (d) Montrer que u réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

692. **RMS 2010 1073 CCP PC** Solution page 450.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

693. **RMS 2010 1074 CCP PC** Solution page 450.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}\,.$$
   (a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{2x^2}{(x+y)^2} f'(\frac{2xy}{x+y}) = \frac{f'(y)}{2}$.
   (b) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall t \in]0, A[,\ \exists! x \in]0, A[,\ \frac{2xA}{x+A} = t$.
   (c) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $t \mapsto t^2 f'(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\mathcal{E}$.
   (d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$. Retrouver $\mathcal{E}$.

694. **RMS 2012 1329 CCP PC** Solution page 451.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $E_a = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \text{ paire et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x+a)\}$. Soit $f \in E_a$.
      i. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que f' est impaire et f'' paire.
      ii. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x-a) + f(x+a) = 0$.
      iii. Montrer que $f + f'' = 0$. En déduire E_a.
   (b) Déterminer $F_a = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \text{ impaire et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x+a)\}$.

Fonctions d'une variable réelle : intégration sur un segment

695. **RMS 2010 1067 CCP PC** Solution page 451.
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a > 0$. On suppose que f est croissante et que $f'(x)/f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k f(k) \sim a \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

696. **RMS 2010 1076 CCP PC** Solution page 452.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$, $g \colon x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f$ et $I = \int_a^b f$.

(a) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant m$.

(b) Montrer que g admet une fonction réciproque h de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une subdivision $a = x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} = b$ de $[a, b]$ telle que
$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \int_{x_{i,n}}^{x_{i+1,n}} f = \frac{I}{n}\cdot$$

(d) On pose $u_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Séries numériques

697. **RMS 2007 940 CCP PC** Solution page 453.
Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}) - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Montrer que (u_n) converge ; on note ℓ sa limite. Trouver un équivalent de $\ell - u_n$.

698. **RMS 2006 1124 CCP PC** Solution page 453.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{u_n}/n$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

699. **RMS 2011 1134 CCP PC** Solution page 454.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = a^n/(1 + b^n)$.

700. **RMS 2010 1070 CCP PC** Solution page 454.
Soit, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$: $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

(a) Si $p = 0$ ou $p = 1$, montrer que la série de terme général u_n diverge.
On suppose dans la suite que $p \geqslant 2$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $(n + p + 1)u_{n+1} = (n + 1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - [n + 1]u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Soit $v_n = (n + 1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En déduire que la série de terme général u_n converge.

(d) Déterminer la somme de la série de terme général u_n.

701. **RMS 2007 943 CCP PC** Solution page 455.
Nature de la série de terme général $(-1)^n/(n!)^{1/n}$?

702. **RMS 2011 1136 CCP PC** Solution page 455.
Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et croissante.

(b) On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$.

i. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2n$. En déduire $\sqrt{2n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{5n}{2}}$.

(c) Montrer que (u_n) converge si et seulement si la série de terme général a_n converge.

(d) On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1/3^n$.

i. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

ii. Montrer que $\ell^2 - u_n^2 \sim 1/3^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

703. **RMS 2011 1147 CCP PC** Solution page 456.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.

(c) Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

704. **RMS 2012 1327 CCP PC** Solution page 457.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} (f(t)/t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(1/n^2)$.

(b) Nature de la série de terme général u_n ?

705. **RMS 2010 1079 CCP PC** Solution page 457.
On pose $w_n = \sum_{k=1}^n 1/(k^2 2^{n-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence et calcul de $\sum_{n \geqslant 1} w_n$.

Intégration sur un intervalle quelconque

706. **RMS 2006 1130 CCP PC** Solution page 457.
Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/(1+x^4)^n$.

(a) Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.

(b) En posant $u = 1/x$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$. Puis, en posant $v = u - 1/u$, calculer I_1.

(c) Calculer I_n.

707. **RMS 2007 944 CCP PC** Solution page 458.
Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto x^\beta e^{-\alpha x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

708. **RMS 2010 1078 CCP PC** Solution page 459.
Soient E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leqslant n$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_k \colon t \mapsto t^k$.

(a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Montrer que $\int_{-\infty}^x P(t)e^t\,\mathrm{d}t$ converge.
Si $P \in E$, on pose $L(P) : P \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t)e^t\,\mathrm{d}t$.

(b) Si $k \in \{0, \dots, n-1\}$, montrer que $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$. En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_j / j!$.

(c) Déterminer les valeurs propres de L. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Suites et séries de fonctions

709. **RMS 2011 1141 CCP PC** Solution page 459.
Ensemble de définition et continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n + n^3 x^2)$.

710. **RMS 2011 1142 CCP PC** Solution page 460.
Montrer que $S \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/(n+x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. L'application S est-elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$?

711. **RMS 2006 1127 CCP PC et RMS 2011 1143 CCP PC** Solution page 460.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = e^{nz}/n^2$.

(a) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, calculer $|u_n(z)|$. Montrer que la série de terme général $|u_n(z)|$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$.
Si $x \in \mathbb{R}_-$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_-$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

(d) Calculer f''. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = f(0) + \int_x^0 \ln(1-e^t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

712. **RMS 2012 1332 CCP PC** Solution page 461.
Soit E l'ensemble des $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) - f(x) = 1/x$, $f(1) = 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) On pose $u_n \colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Monter que $u \colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $u \in E$.

(b) Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1–périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?

(c) En déduire que $f = g$. Que vaut E ?

Séries entières

713. **RMS 2010 1080 CCP PC** Solution page 461.
Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n$.

714. **RMS 2010 1081 CCP PC** Solution page 461.
Donner le développement en série entière de $f\colon x \mapsto (2x-1)/(2+x-x^2)^2$.

715. **RMS 2007 946 CCP PC** Solution page 462.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$.

(a) Étudier la parité de f. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) + 2xf(x) = 1$.
(b) Donner un équivalent simple de f en zéro.
(c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.
(d) Déterminer la limite de $2x\exp(-x^2)\int_0^{x-1}\exp(t^2)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

716. **RMS 2012 1330 CCP PC** Solution page 462.
Soit $f\colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto (e^{x^2}-1)/x$ prolongée par $f(0) = 1$.

(a) Montrer que f est dérivable en zéro. préciser $f'(0)$.
(b) Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de f, f^3 et f^5.
(c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro, et que f est strictement croissante.
(d) Vérifier que f est un $\mathcal{C}^\infty$–difféormorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et que f^{-1} est impaire.
(e) Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de $x \mapsto (f^{-1}(x))^5$.

717. **RMS 2006 1128 CCP PC** Solution page 462.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f.

(a) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.
(b) On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad |a_p| \leqslant M/r^p$. En déduire que f est une fonction constante.
(c) On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$, et un entier naturel non nul q tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant a|z|^q + b$. Montrer que f est une fonction polynomiale.
(d) On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant \exp(\operatorname{Re} z)$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = K\exp(z)$.

718. **RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC** Solution page 463.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n\,\mathrm{d}t$.

(a) Calculer a_0 et a_1. Déterminer la limite de (a_n).
(b) i. Étudier la monotonie de la suite (a_n). En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
  ii. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = 2\int_0^1 \mathrm{d}t/(3+t^2)$. En déduire la valeur de cette somme.
(c) Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1/(2n+1)$. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
  ii. Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

719. **RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC** Solution page 465.
Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

(a) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $n!/3 \leqslant d_n \leqslant n!$.
(b) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général $(d_n/n!)x^n$. Si $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(d_n/n!)x^n$.
(c) Montrer que $\forall x \in]-R, R[\,$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
(d) En déduire une expression de S. Exprimer d_n en fonction de n.

720. **RMS 2010 1082 CCP PC** Solution page 466.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} 1/k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(2n+1) \leqslant S_n \leqslant 1+\ln(2n)$.
(c) Montrer que la série de terme général $(-1)^{n+1}S_n/(2n+1)$ est convergente.
(d) Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}S_n x^{2n}$. Montrer que f est définie sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x^2)f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + x\arctan x\,.$$

(e) Calculer S.

721. **RMS 2011 1146 CCP PC** Solution page 467.
On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Soit $T\colon t \mapsto]-\infty,1[\setminus\{0\} \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$.

(a) Montrer que T se prolonge par continuité en zéro et que $\forall t \in]-1,1[\,,\ T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}$.
Soit $L\colon x \mapsto \int_0^x T(t)\,\mathrm{d}t$.
(b) Montrer que T est intégrable sur $[0,1[$ et que L est dérivable sur $]-1,1[$. Calculer L'.
(c) Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.
(d) En déduire que $\forall x \in [-1,1],\ L(x)+L(-x) = L(x^2)/2$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.
(e) Montrer que $\forall x \in]0,1[\,,\ L(x)+L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$.

722. **RMS 2012 1331 CCP PC** Solution page 468.
Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(b) Exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.
(c) Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$.
(d) On suppose $a \in]0,1[$.
   i. Soit $g\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$. Montrer que g est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$.
   ii. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$. montrer que f est nulle.
   iii. Déterminer l'ensemble des $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

723. **RMS 2006 1131 CCP PC** Solution page 468.
Soient $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Existence de I_n et limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

724. **RMS 2010 1083 CCP PC** Solution page 469.
Soit $I_n = 4^n\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

725. **RMS 2010 1086 CCP PC** Solution page 469.
Soient $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$, $J_n = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}t/(1+t^2)^n$ et $W_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1/(1+t^2)$.
(b) Justifier l'existence de I et de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leqslant I/\sqrt{n} \leqslant J_n$.
(c) Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_n = W_{2n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(d) Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
(e) En déduire I.

726. **RMS 2010 1087 CCP PC et RMS 2011 1149 CCP PC** Solution page 470.
Montrer l'intégrabilité de $t \mapsto (\ln t)/(t+1)$ sur $]0,1]$, et l'égalité $\int_0^1(\ln t)/(1+t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n^2$.

727. **RMS 2011 1150 CCP PC** Solution page 470.
Justifier l'existence de $I=\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I=\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3$.

728. **RMS 2011 1152 CCP PC** Solution page 471.

(a) Déterminer $\sup\{|xe^{-x}|,\ x\in\mathbb{R}_+\}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général nx^n et calculer la somme de cette série.

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $u_n\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto nx^ne^{-nx}$. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $S\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nx^ne^{-nx}$.

(d) Montrer que la série de terme général $n!/n^n$ est convergente. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$.

729. **RMS 2012 1336 CCP PC** Solution page 471.

(a) Convergence et calcul de $I_n=\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

(b) Convergence et calcul de $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

Intégrales à paramètre

730. **RMS 2011 1148 CCP PC** Solution page 471.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

(a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+F(-x)=1$. Calculer $F(k)$ pour $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

(b) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$. Donner un équivalent de $F(x)-1$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

731. **RMS 2006 1135 CCP PC** Solution page 472.
Définition, continuité, caractère $\mathcal{C}^1$ de $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Trouver F.

732. **RMS 2006 1137 CCP PC** Solution page 473.
Définition, continuité, caractère $\mathcal{C}^1$ de $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

733. **RMS 2012 1334 CCP PC** Solution page 473.
Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

(b) Calculer $f(1)$. Montrer que $\forall x>-1,\ (x+2)f(x+1)=(x+1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^+.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

(d) Justifier que $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t=\frac12\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{\sin(2t)}{2})\,\mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

734. **RMS 2012 1335 CCP PC** Solution page 473.
Soit $f\colon x\mapsto\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.

(b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f est solution de $xy''+y'+xy=0$.

735. **RMS 2011 1154 CCP PC** Solution page 473.
Pour $x\in]-1,1[$, soit $f_x:\theta\in\mathbb{R}\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n$.

(a) Soit $x\in]-1,1[$. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.

(b) Montrer que f_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ f_x'(\theta)=\frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$. En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $x\in]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

(c) Soit $x\in]-1,1[$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

(d) En déduire, pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

Séries de Fourier

736. **RMS 2007 947 CCP PC** Solution page 474.
Soient f et g dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π–périodiques telles que $\forall n \in \mathbb{Z},\ \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f = g$.

737. **RMS 2006 1140 CCP PC** Solution page 475.
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π–périodique telle que $\forall x \in [-\pi,\pi[,\ \ u(x) = x$.
   (a) Déterminer la série de Fourier de u. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.
   (b) Montrer : $\forall x \in]0,1[,\quad 0 < \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Prolonger par continuité à $[0,1]$ la fonction F_p définie sur $]0,1[$ par $F_p(x) = \frac{x^{2p+1}\ln(x)}{x^2-1}$.
   (d) Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_{]0,1[} F_p$. Calculer $I_{p+1} - I_p$. En déduire I_0.
   (e) Convergence et somme des séries de termes généraux $(-1)^p I_p$ et I_p.

738. **RMS 2006 1141 CCP PC** Solution page 476.
Soit $f(x) = |\sin x|$.
   (a) Donner l'allure du graphe de f. Montrer que f est la somme de sa série de Fourier.
   (b) Montrer qu'il existe une suite réelle (c_n) telle que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos^2(nx)$.
   (c) En déduire les sommes des séries de termes généraux c_{2n} et $(-1)^n c_{2n+1}/(2n+1)$.

739. **RMS 2011 1155 CCP PC** Solution page 477.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π–périodique telle que $f(\pi) = 0$ et $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(x) = x$. La série de Fourier de f converge-t-elle normalement ? Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

740. **RMS 2011 1156 CCP PC** Solution page 477.
Soient $r \in]0,1[$ et $S_r\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}\sin(nx)$.
   (a) Montrer que S_r est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π–périodique.
   (b) Exprimer S_r'. Cette fonction est-elle somme de sa série de Fourier ?
   (c) Déterminer les coefficients de Fourier de S_r.
   (d) Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ S_r(x) = \arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$.
   (e) Montrer $\int_0^{\pi} (S_r(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{n^2}$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Équations différentielles linéaires

741. **RMS 2006 1145 CCP PC** Solution page 479.
Trouver les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + x$.

742. **RMS 2006 1148 CCP PC** Solution page 479.
Soient (E) l'équation différentielle $y' = 2xy + 1$, et f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
   (a) Justifier l'existence de f.
   (b) Donner f sous forme d'une intégrale.
   (c) Développer f en série entière sur $\mathbb{R}$ de deux manières différentes.

743. **RMS 2010 1088 CCP PC** Solution page 480.
Résoudre $(1+x^2)^2y' + 2xy = x\exp(1/(1+x^2))$.

744. **RMS 2010 1089 CCP PC** Solution page 481.
Soit (E) : $y' - y = e^{-x^2}$ et $u\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
   (b) Montrer que $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
   (c) Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro quand x tend vers $-\infty$.
   (d) Montrer qu'il existe une solution de (E) qui a pour limite zéro quand x tend vers $+\infty$.

(e) Que dire des solutions de $(F) : y' + y = e^{-x^2}$?

745. **RMS 2006 1147 CCP PC** Solution page 481.
Résoudre $y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = e^{-\lambda x}\cos(\lambda x)$.

746. **RMS 2006 1149 CCP PC** Solution page 481.
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et (E) l'équation différentielle : $ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0$, dont on considérera les solutions sur $]0, +\infty[$.

(a) Justifier le changement de variable $t = \ln x$ et résoudre (E).
(b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ suivant les valeurs de a : $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sin(a \ln x)$.

747. **RMS 2010 1090 CCP PC** Solution page 482.
Résoudre $y'' - 2y' + y = 2\operatorname{ch} x$.

748. **RMS 2010 1091 CCP PC** Solution page 483.
Résoudre $(E)\ : f'' + xf' - 2f = 0$ sachant qu'elle possède une solution polynomiale.

749. **RMS 2010 1093 CCP PC** Solution page 483.
Soit $(E)\colon xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

(a) On se place sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Y\colon t \mapsto y(\sqrt{t}\,)$ est solution d'une équation différentielle (F) à déterminer. En déduire les solutions de (E) sur cet intervalle.
(b) On se place sur $\mathbb{R}_-^*$. Montrer que $h\colon x \mapsto \operatorname{ch} x^2$ est solution. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
(c) Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

750. **RMS 2012 1338 CCP PC** Solution page 484.

(a) Résoudre l'équation $y'' + 4y = 0$.
(b) Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h\colon x \mapsto \frac{1}{2}\int_0^x g(t)\sin(2x - 2t)\,dt$. Montrer que h est solution de $y'' + 4y = g$. Résoudre $y'' + 4y = g$.
(c) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi/2) \geqslant 0$.

751. **RMS 2012 1339 CCP PC** Solution page 485.
Soient $(*)\colon x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, E^+ (resp. E^-) l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$) et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que E, E^+ et E^- sont des espaces vectoriels. Qu peut-on dire des dimensions de E^+ et E^- ?
(b) Déterminer les $f \in E$ développables en série entière au voisinage de zéro.

752. **RMS 2012 1340 CCP PC** Solution page 485.
Si $\lambda \in]-1/2, +\infty[$, soit (E_λ) l'équation différentielle $x(x + 1)y'' + (2x + 1)y' - \lambda(\lambda + 1)y = 0$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution P_1 de (E_1) polynomiale de degré 1 et telle que $P_1(0) = 1$.
(b) Soient $\varphi\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$ et $\psi\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Montrer qu'il existe $(a, b, c, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^7$ que l'on déterminera tels que $\forall \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$ et $\psi(x) = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}$. En déduire une primitive de φ et une primitive de ψ.
(c) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ de rayon de convergence strictement positif et de somme y. Trouver une relation sur les a_n pour que y soit solution de (E_λ).
(e) Donner une condition sur λ pour qu'il existe une solution de (E_λ) polynomiale non nulle.

Équations différentielles non linéaires

Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

753. **RMS 2010 1094 CCP PC** Solution page 485.
Soient $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 1 - x - y \geqslant 0\}$ et $f\colon (x, y) \in D \mapsto xy(1 - xy)$.

(a) Représenter D.

(b) Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

754. **RMS 2010 1095 CCP PC** Solution page 486.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \neq (0,0),\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

(a) Étudier la continuité de f.

(b) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

755. **RMS 2006 1142 CCP PC** Solution page 486.
Soit ϕ définie sur $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par : $\phi(x,y) = (x, y/x)$.

(a) Montrer que ϕ définit un $\mathcal{C}^1$–difféormorphisme de U sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g\colon (u,v) \mapsto g(u,v)$ de classe C^2 sur Ω telle que $f = g \circ \phi$.

(c) Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.

(d) Résoudre sur U : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

756. **RMS 2011 1158 CCP PC** Solution page 487.
Soient $Q = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $Q' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ |v| < u\}$. On note ϕ l'application qui à $(x,y) \in Q$ associe (y^2+x^2, y^2-x^2).

(a) Représenter Q et Q'. Montrer que ϕ définit une bijection de Q sur Q'. Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme.

(b) On cherche les solutions $f\colon Q \to \mathbb{R}$ de

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy\,.$$

Si f est une solution de (E), on pose $\tilde f = f \circ \phi^{-1}$, avec $\tilde f\colon Q' \to \mathbb{R}$. Montrer que $\tilde f$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (E').

(c) Résoudre (E'), et en déduire les solutions de (E).

757. **RMS 2011 1159 CCP PC** Solution page 488.
Déterminer les extrema de $f\colon (x,y) \mapsto (x^2-1)^2 + (x^2-e^y)^2$.

758. **RMS 2006 1143 CCP PC, RMS 2010 1096 CCP PC** Solution page 489.
Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } |x| \leqslant x^2+y^2\}$ et $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1+x^2+y^2)^{-2}$. On pose $I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(a) Dessiner D.

(b) Calculer $K = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta/(1+\cos^2\theta)$. *Ind.* Poser $t = \tan\theta$.

(c) En déduire I.

Géométrie

759. **RMS 2011 1160 CCP PC** Solution page 490.
Tracer la courbe paramétrée : $(x(t) = t^2/2, y(t) = (\arcsin t + t\sqrt{1-t^2})/2$.

760. **RMS 2006 1151 CCP PC** Solution page 490.
Soit l'arc paramétré $t \mapsto (t + \frac{a}{t^2}, t^2 + \frac{b}{t})$ avec a et b réels. Trouver a et b tels que l'arc admette un point de rebroussement pour $t=1$.

761. **RMS 2011 1161 CCP PC** Solution page 491.
On se place dans le plan affine $\mathbb{R}^2$. Soient A, B, C trois points non alignés, A' un point de (BC), B' un point de (AC) et C' un point de (AB). Soient A_1 le milieu de $[AA']$, B_1 le milieu de $[BB']$ et C_1 le milieu de $[CC']$. Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

762. **RMS 2006 1150 CCP PC** Solution page 491.
Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, A, B, C, D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$, et α, β, γ, δ quatre réels différents de -1. On définit quatre points K, L, M, N de $\mathcal{E}$ par $\overrightarrow{KA} + \alpha\overrightarrow{KB} = 0$, $\overrightarrow{LB} + \beta\overrightarrow{LC} = 0$, $\overrightarrow{MC} + \gamma\overrightarrow{MD} = 0$, $\overrightarrow{ND} + \delta\overrightarrow{NA} = 0$.

(a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, donner une équation des plans (KCD), (LAD), (MAB), et (NBC).

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α, β, γ et δ pour que ces quatre plans aient un point commun.

763. **RMS 2011 1163 CCP PC** Solution page 493.
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

(a) Donner un vecteur tangent à la courbe en un point M. Donner une équation de la normale à la parabole en un point M.

(b) Déterminer les coordonnées de la projection $H(y)$ du foyer sur la normale au point d'ordonnée y.

(c) Caractériser l'ensemble $\{H(y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

764. **RMS 2010 1097 CCP PC** Solution page 494.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique. Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 1$.

765. **RMS 2006 1154 CCP PC** Solution page 494.
Déterminer, suivant les valeurs des réels a et b, la nature de la quadrique dont l'équation, en repère orthonormé, est $x^2 + xy - xz - yz + ax + bz = 0$.

766. **RMS 2006 1152 CCP PC** Solution page 494.
On considère la surface (S) d'équation $z^3 = xy$.

(a) Écrire un système d'équations paramétriques de (S).

(b) Montrer que les axes Ox et Oy sont les seules droites tracées sur (S).

(c) Trouver l'équation du plan tangent en un point régulier de la surface.

(d) Donner l'équation des plans tangents à (S) qui contiennent la droite $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2, \\ y & = & 3z-3. \end{array}\right.$

767. **RMS 2012 1342 CCP PC** Solution page 496.
Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $z = xe^x + ye^y$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal i.e. possède une équation de la forme $z = c$.

Autres concours MP

Algèbre

768. **RMS 2010 954 TPE MP** Solution page 497.
Montrer que l'ensemble des entiers premiers congrus à -1 modulo 4 est infini. Ind. Raisonner par l'absurde et considérer $N = 4p_1 \times \cdots \times p_r - 1$.

769. **RMS 2011 1042 TPE MP** Solution page 497.
Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans les anneaux $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Que dire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

770. **RMS 2007 1074 Petites Mines MP** Solution page 497.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix},$$
puis étudier le système linéaire
$$\begin{cases} x + (1+\alpha)y + z + t & = & a\,, \\ x + y + (1+\alpha)z + t & = & b\,, \\ x + y + z + t & = & c\,, \\ x + y + z + (1+\alpha)t & = & d\,. \end{cases}$$

771. **RMS 2009 1074 TPE MP** Solution page 498.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
    (a) Trouver les endomorphismes de E stabilisant toutes les droites de E.
    (b) Si $2 \leqslant d \leqslant n-1$, trouver les endomorphismes de E stabilisant tous les sous-espaces de dimension d de E.

772. **RMS 2011 1044 TPE MP** Solution page 498.
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\operatorname{tr} M$.

773. **RMS 2011 1045 TPE MP** Solution page 498.
Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ telles que $A^3 = I_n$.

774. **RMS 2010 958 TPE MP** Solution page 498.
Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1-X)$.
    (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
    (b) Calculer $\Phi \circ \Phi$. Déterminer les éléments propres de Φ.
    (c) Calculer $\exp(\Phi)$.

775. **RMS 2006 983 TPE MP** Solution page 499.
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M\,{}^tMM = I_n$.

Analyse

776. **RMS 2010 961 TPE MP** Solution page 499.
Soient E un espace vectoriel normé réel et C une partie convexe de E.
    (a) Montrer que l'adhérence de C est convexe.
    (b) Montrer que l'intérieur de C est convexe.

777. **RMS 2010 962 TPE MP** Solution page 500.
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soient $x_0 \in [0,1]$ et φ la forme linéaire $f \in E \mapsto f'(x_0)$. Montrer que φ n'est pas continue. Que dire de $\operatorname{Ker}\varphi$?

778. **RMS 2011 1053 ENSEA MP** Solution page 500.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

(a) Montrer que $s_n \leqslant 9(\operatorname{Log} n + 1)$, où Log est le logarithme de base 10.

(b) Montrer que la suite de terme général s_{n+1}/s_n est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

779. **RMS 2010 966 TPE MP** Solution page 500.
Soit $f\colon x \in [-1,1] \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

(a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$.

(b) Montrer par deux méthodes que f est développable en série entière autour de zéro.

780. **RMS 2010 968 TPE MP** Solution page 501.
Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction $f\colon x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x)\cos(\cos x)$.

781. **RMS 2010 969 TPE MP** Solution page 502.
Soient $f\colon t \mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x$ et (E) l'équation différentielle $ty'' + y' - ty + 1 = 0$.

(a) Montrer que f vérifie (E).

(b) Trouver les solutions de (E) développables en série entière.

(c) En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$.

782. **RMS 2010 970 TPE MP** Solution page 503.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $X' = AX$.

783. **RMS 2010 971 TPE MP** Solution page 503.
Soit $(E)\colon x' = \sin(xt)$.

(a) Soit x une solution telle que $x(0) = 0$. Que peut-on dire de x ?

(b) Montrer que toute solution maximale de E est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

784. **RMS 2010 972 TPE MP** Solution page 504.
Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f' + 2\sqrt{f} = 0$.

Géométrie

Autres concours PSI

Algèbre

785. **RMS 2011 1068 ENSAM PSI (Calcul formel)** Solution page 505.

(a) Déterminer le reste de la division de $X^n + 2X^m + 1$ par $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$.

(b) Vérifier le résultat pour $n = 100$ et $m = 43$.

786. **RMS 2008 969 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 505.
Soit $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$. On note $x_1, \dots, x_5$ ses racines complexes. Calculer $\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$.

787. **RMS 2009 1090 ENSEA PSI** Solution page 505.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

788. **RMS 2006 1044 TPE PSI** Solution page 505.
Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et f dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est exacte
(i) $\exists(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (E \backslash \{0\}),\ f(u) = \lambda u$.
(ii) $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \exists(u, v) \in (E \backslash \{0\})^2,\ f(u) = \lambda u + \mu v$ et $f(v) = -\mu u + \lambda v$.

789. **RMS 2007 903 TPE PSI** Solution page 506.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F),\ G \subset \operatorname{Ker} u\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ dont on donnera la dimension.

790. **RMS 2006 1045 TPE PSI** Solution page 506.
Calculer, lorsque k et n sont des entiers tels que $0 \leqslant k < n - 1$, et x un nombre réel, le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & & & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

791. **RMS 2009 1091 ENSAM PSI (calcul formel)** Solution page 506.
Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

792. **RMS 2011 1071 TPE PSI** Solution page 507.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{tr} A = \operatorname{rg} A = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

793. **RMS 2008 970 TPE PSI** Solution page 507.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

794. **RMS 2008 971 ENSAM PSI** Solution page 508.
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX + XA$. Montrer que f est un endomorphisme et calculer sa trace.

795. **RMS 2010 980 TPE PSI** Solution page 508.
Soient $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ m_{i,j} = a_i/a_j$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

796. **RMS 2010 984 ENSEA PSI** Solution page 508.
Trouver les $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.

797. **RMS 2010 985 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 508.
Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}$. Montrer que n est pair.

798. **RMS 2009 1093 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 508.
Calculer $\begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

799. **RMS 2009 1094 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 509.

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

800. **RMS 2010 987 TPE PSI** Solution page 510.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ et n matrices $M_1, \dots, M_n$ dans $\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ tels que $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p M_i$.

801. **RMS 2010 990 ENSAM PSI** Solution page 510.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Exprimer le rang de M en fonction de celui de A^2. La matrice M peut-elle être diagonalisable ?

802. **RMS 2010 994 TPE PSI** Solution page 511.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$, de norme associée $\|\ \|$.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Montrer que $|\det M| \leqslant \prod_{i=1}^n \|C_i\|$.

(b) En déduire que le volume d'un parallélépipède de côtés donnés est maximal s'il est droit.

Analyse

803. **RMS 2010 998 ENSEA PSI** Solution page 511.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et F un sous-espace de E tel que $(*)\ \forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leqslant n\|f\|_2$.

(a) Montrer que $F \neq E$.

(b) Montrer que F est de dimension finie $\leqslant n^2$.

(c) Donner un exemple de sous-espace F de dimension n vérifiant $(*)$.

804. **RMS 2010 1001 ENSAM PSI (calcul formel)** Solution page 512.

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 3–périodique et telle que $\forall x \in [0, 3[,\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(a) À quelle condition f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(b) À quelle condition f admet-elle un extremum en 1 valant 4 ?

(c) À quelle condition f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(d) Ces conditions étant remplies, représenter f sur $[-3, 6]$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

805. **RMS 2011 1085 ENSAM PSI** Solution page 513.

Soit $f\colon x \mapsto Q(x)\arctan(x) - P(x)$, avec $Q\colon x \mapsto 1 + ax^2 + bx^4$ et $P\colon x \mapsto x(1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)$. Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que $f(x)$ soit, en zéro, un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible. Trouver, pour ‘ ces valeurs, un encadrement de $\arctan(x) - P(x)/Q(x)$ sur $[0, 1]$.

806. **RMS 2008 977 TPE PSI** Solution page 514.

Déterminer la limite de $[(2n)!/n!n^n]^{1/n}$.

807. **RMS 2007 914 TPE PSI** Solution page 514.

Pour $n \geqslant 2$, soit $a_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$. Nature de la série de terme général $1/a_n$?

808. **RMS 2011 1082 TPE PSI** Solution page 514.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Nature de la série de terme général $v_n = u_n e^{-u_n}/n^2$?

809. **RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 514

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n \cos(u_{n-1})/n$. Nature de la série de terme général u_n ?

810. **RMS 2011 1083 ENSAM PSI** Solution page 515.

Soient a un réel quelconque et $u_n = (e - (1 + 1/n)^n)^a$.

(a) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

(b) Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

811. **RMS 2008 913 TPE PSI** Solution page 515.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Étudier la série $\sum_{n\geqslant 0}(2-u_n)$.

812. **RMS 2010 1003 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 515.
Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln(\frac{x}{1-e^{-x}})\frac{e^{ax}}{x}\, dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

813. **RMS 2010 1004 Petites Mines PSI** Solution page 516.
Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\ln(\frac{2+x}{1+x})\,\mathrm{d}x$.

814. **RMS 2011 1088 ENSAM PSI** Solution page 516.
Soient $h \in \mathcal{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon x \in [0,\pi/2] \mapsto h(x)(\sin x)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

815. **RMS 2010 1005 Petites Mines PSI** Solution page 516.
Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\arccos(\cos(nx))}{n!}$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de f. Calculer $f(\pi)$.

(b) Montrer que f est continue sur D. Pour quels $x \in D$ le théorème de dérivation terme à terme s'applique-t-il ?

816. **RMS 2010 1006 TPE PSI** Solution page 517.
Étudier la convergence et la continuité de $x \mapsto \sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(x)^2}{\mathrm{ch}(nx)}$.

817. **RMS 2008 982 TPE PSI** Solution page 517.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\ dt$. Montrer que la série de terme général f_n converge et calculer sa somme.

818. **RMS 2008 984 TPE PSI** Solution page 518.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n diverge. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n/S_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux $a_n z^n$ et $S_n z^n$.

819. **RMS 2008 985 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 518.
Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière de terme général $[(2n+1)!/(n!)^2]x^{2n}$.

820. **RMS 2010 1009 ENSAM PSI** Solution page 518.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

(b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$.

(c) Calculer sa somme $S(z)$ pour $|z| < R$. En déduire une expression de u_n.

821. **RMS 2008 987 ENSAM PSI** Solution page 519.
Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

822. **RMS 2010 1011 TPE PSI** Solution page 520.
Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (I_n).

823. **RMS 2010 1013 Télécom Sud Paris PSI** Solution page 520.
Calculer la limite de $I_n = \int_1^{+\infty}\exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.

824. **RMS 2011 1094 TPE PSI** Solution page 520.
Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_1^{+\infty}\mathrm{d}x/(x^n + e^x)$.

825. **RMS 2011 1096 TPE PSI** Solution page 520.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telle que $t \mapsto e^{-t}f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge. On note γ sa limite.

(b) Montrer que $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.

(c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$.

826. **RMS 2010 1015 TPE PSI** Solution page 522.
Soit $f\colon (x,t) \mapsto\in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xt}/(1+t^2)$ et $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

(b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel F est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Trouver une équation différentielle vérifiée par F. La résoudre.

827. **RMS 2010 1016 Navale PSI** Solution page 523.
Montrer que $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

828. **RMS 2010 1017 ENSEA PSI** Solution page 524.
Montrer que $f\colon x \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$, puis comparer $f(x)$ à $\ln(x)$ quand x tend vers l'infini.

829. **RMS 2010 1019 IIE PSI** Solution page 524.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/(x^2+t^2)^n$.

(a) Quel est le domaine de définition de I_n ? Calculer I_1.

(b) Montrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $I_n'(x)$.

(c) Trouver une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$. En déduire une expression simple de I_n.

830. **RMS 2010 1021 ENSAM PSI** Solution page 525.
Soit $F\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$. Étudier F en 0^+ et en $+\infty$.

831. **RMS 2011 1097 ENSAM PSI** Solution page 526.
Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F.

(b) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Exprimer F sur D.

(d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

832. **RMS 2011 1100 TPE PSI** Solution page 527.
Soie $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\tilde{f}\colon x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $T\colon f \mapsto \tilde{f}$ est un endomorphisme de E.

(b) L'application T est-elle surjective ?

(c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

833. **RMS 2010 1025 Petites Mines PSI** Solution page 528.
Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$.

834. **RMS 2010 1102 ENSAM PSI** Solution page 528.
Soit (E) l'équation différentielle $x^2y''(x) - -2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x)$.

(a) Trouver des solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

(c) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Géométrie

835. **RMS 2011 1104 ENSAM PSI** Solution page 529.
Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $f\colon x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x \wedge u$.

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer l'image et le noyau de f.

(c) En utilisant une base adaptée, déterminer $f \circ f$.

(d) En déduire f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

836. **RMS 2011 1105 TPE PSI** Solution page 529.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de centre de gravité O. Calculer $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

837. **RMS 2008 991 TPE PSI** Solution page 529.

Soit ABC un triangle quelconque d'un plan euclidien. Déterminer le maximum de la fonction qui, à un point M intérieur au triangle, associé le produit des distances de M aux trois côtés. En quel point ce maximum est-il atteint ?

838. **RMS 2010 1028 TPE PSI** Solution page 530.

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2=1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a,b,c).

839. **RMS 2010 1030 TPE PSI** Solution page 531.

Étudier la courbe (Γ) d'équation polaire $\rho=\cos^3(\theta/3)$. Déterminer sa longueur et sa courbure.

840. **RMS 2010 1031 TPE PSI** Solution page 531.

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 3 et $\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ P(x)=P(y)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est, dans certains cas à déterminer, la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité $\sqrt{2/3}$.

Autres concours PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

Groupes, anneaux, corps

Nombres complexes, polynômes

841. **RMS 2006 1109 TPE PC** Solution page 533.
Trouver les racines de $x^3 - 3x - 1 = 0$ en posant $x = u + v$ et en cherchant la valeur de uv telle que l'équation en x se ramène à $u^3 + v^3 = 1$.

842. **RMS 2012 1308 TPE PC** Solution page 533.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}((X^2 - 1)^n)$.
(a) Étudier le degré de P_n ainsi que sa parité.
(b) Montrer que $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.
(c) Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

843. **RMS 2009 1155 TPE PC** Solution page 534.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $V_1, \dots, V_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que la somme $\sum_{k=1}^{n} V_k$ est directe si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$ est directe et $(\sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n = \{0\}$.

844. **RMS 2010 1034 TPE PC** Solution page 534.
Montrer que $((1 - X)^n, (1 - X)^{n-1}X, \dots, (1 - X)X^{n-1}, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

845. **RMS 2010 1042 TPE PC** Solution page 534.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.
Indication. On pourra faire une récurrence sur $\dim E - \dim F$.

846. **RMS 2006 1111 Télécom Sud Paris PC** Solution page 535.
Soient $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = P(x + i + j - 2)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n + 1$. Démontrer que A n'est pas inversible.

847. **RMS 2010 1035 Petites Mines PC** Solution page 535.
Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication. Déterminer une base ainsi que la dimension de E.

Algèbre linéaire : applications linéaires

848. **RMS 2012 1310 ENSEA PC** Solution page 535.
Soit $f\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X + 1) - P(X)$.
(a) Montrer que f est linéaire, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
(b) Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = 0$. Simplifier alors $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$.
(c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Généraliser.

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Algèbre linéaire : déterminants

849. **RMS 2006 1110 TPE PC** Solution page 535.
Calculer le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

850. **RMS 2011 1111 Télécom Sud Paris PC** Solution page 536.
Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $A = I_n + X\,{}^tY$.

851. **RMS 2010 1036 Navale PC** Solution page 537.

(a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(C + M) = \det(M)$. Montrer que $C = 0$.

(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A + M) = \det(B + M)$. Montrer que $A = B$.

(c) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A + M) = \det(B + {}^tM)$. Montrer que $A = {}^tB$.

852. **RMS 2010 1037 Télécom Sud Paris PC** Solution page 537.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $a_{i,j} = (-1)^{\max\{i,j\}}$. Calculer $\det(A)$.

853. **RMS 2012 1311 Mines d'Alès PC** Solution page 537.
Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $\det A = 0$ puis que $A = 0$.

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

854. **RMS 2011 1118 TPE PC** Solution page 537.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un scalaire λ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $(f - \lambda \mathrm{id})^p = 0$. Montrer que λ est valeur propre de f et que c'est la seule.

855. **RMS 2010 1045 Télécom Sud Paris PC** Solution page 537.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle ayant pour polynôme annulateur $X(X + 2)$. Montrer que -2 est valeur propre de A.

856. **RMS 2012 1312 TPE PC** Solution page 538.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

857. **RMS 2012 1317 ENSEA PC** Solution page 538.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

858. **RMS 2006 1115 ENSEA PC** Solution page 538.
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

859. **RMS 2011 1123 TPE PC** Solution page 538.
Soient E un espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que les valeurs propres non nulles de $g \circ f$ sont aussi valeurs propres de $f \circ g$.

(b) En dimension finie, montrer que si zéro est valeur propre de $g \circ f$, alors zéro est aussi valeur propre de $f \circ g$.

(c) Montrer que cette propriété est fausse en dimension infinie.
Indication. Considérer $E = \mathbb{R}[X]$, $f\colon P \mapsto P'$ et $g\colon P \mapsto XP$.

Algèbre linéaire : réduction d'endomorphismes ou de matrices explicites

860. **RMS 2006 1117 TPE PC** Solution page 538.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_{n-k,k+1} = z_k$, les autres coefficients étant nuls.

861. **RMS 2010 1043 Petites Mines PC** Solution page 539.
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m pour que A soit diagonalisable.

(b) La matrice A peut-elle être semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$?

862. **RMS 2006 1114 TPE PC** Solution page 540.
Soit u l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans lui-même qui, à la matrice de colonnes $[C_1, C_2, C_3]$ associe $[C_3, C_1, C_2]$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

(c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

(d) Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans une base de diagonalisation.

Algèbre linéaire : réduction, problèmes théoriques

863. **RMS 2006 1116 ENSEA PC** Solution page 541.
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \mathrm{id}_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$. Montrer que $g = 3f_1 + f_2 - 2f_3 + 5f_4$ est diagonalisable.

864. **RMS 2007 935 Télécom Sud Paris PC** Solution page 541.
Soit u dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}) = \{0\}$. Montrer que u est diagonalisable.

865. **RMS 2010 1052 TPE PC** Solution page 541.
Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\Phi \colon v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de Φ si et seulement si λ est une valeur propre de u.

(c) Si E_λ est l'espace propre de u associé à la valeur propre λ, montrer que $\mathcal{L}(E, E_\lambda)$ est l'espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

(d) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si Φ est diagonalisable.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

866. **RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC** Solution page 542.
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

(a) Montrer : $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

867. **RMS 2010 1061 TPE PC** Solution page 542.
Soient A, M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont diagonalisables.

(b) Montrer que MN et NM ont les mêmes valeurs propres et que les espaces propres associées à une valeur propre λ non nulle ont même dimension.

(c) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. En déduire qu'il existe $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = {}^tU A\,{}^tAU$.

Analyse

Espaces vectoriels normés

868. **RMS 2006 1121 Télécom Sud Paris PC** Solution page 543.
Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) La norme N et la norme préhilbertienne canonique sont-elles équivalentes sur E ?

Suites récurrentes

869. **RMS 2012 1326 TPE PC** Solution page 543.
Soient $a > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{1+ax} - 1$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que $f(x) - x$ est du signe de $x(a-2-x)$. Déterminer les points fixes f ainsi que les intervalles stables. Tracer le graphe de f pour différentes valeurs de a.

(b) On suppose $a < 2$ et on considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim u_n = 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

(c) Que dire de la suite (u_n) si $a > 2$?

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

870. **RMS 2010 1071 Petites Mines PC** Solution page 544.
Déterminer la limite de $(3^x - 3 \times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$ quand x tend vers 3.

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

871. **RMS 2010 1072 Télécom Sud Paris PC** Solution page 544.
Soit $(a,b) \in ([1,+\infty[)^2$. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 1 + x^a y^b \leqslant (1+x)^a(1+y)^b$.

872. **RMS 2007 945 ENSEA PC** Solution page 544.
Étudier $x \mapsto \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ (variations, prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, équivalent en $+\infty$).

873. **RMS 2011 1138 TPE PC** Solution page 545.
Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en zéro et telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

Séries numériques

874. **RMS 2007 941 TPE PC** Solution page 546.
Nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 - 1/n^2)$.

875. **RMS 2011 1135 TPE PC** Solution page 546.
Si $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de chiffres de n. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = 1/(na^{p_n})$.

876. **RMS 2006 1123 TPE PC** Solution page 546.
Soit (a_n) une suite de réels positifs. On définit (u_n) par : $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \arctan(a_n + \tan u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge, et que $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} u_n < \frac{\pi}{2}$.

877. **RMS 2007 942 TPE PC** Solution page 546.
Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\, dx$.

878. **RMS 2010 1063 TPE PC** Solution page 547.
Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$.

879. **RMS 2010 1065 Télécom Sud Paris PC** Solution page 547.
Déterminer la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(k/n)\sin(k/n^2)$.

880. **RMS 2010 1068 Navale PC** Solution page 547.
Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n/\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}$ avec $\alpha > 0$?

881. **RMS 2010 1069 TPE PC** Solution page 548.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+3n+3})$.

(a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(b) Calculer la somme de la série. Ind. Écrire $\frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{a-b}{1+ab}$ avec $a = b+1$.

882. **RMS 2011 1137 TPE PC** Solution page 548.
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

883. **RMS 2012 1324 Mines d'Alès PC** Solution page 548.
Donner la nature de la série de terme général $\ln(1+(-1)^n/n^\alpha)$ en fonction de α.

884. **RMS 2012 1325 TPE PC** Solution page 548.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$ et $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. Montrer que la série de terme général (u_n) converge et calculer sa somme.

885. **RMS 2010 1085 Petites Mines PC** Solution page 549.
On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la limite de (u_n). Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Donner une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire un équivalent de u_n.
   (c) Nature de la série de terme général u_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Intégration sur un intervalle quelconque

886. **RMS 2006 1126 TPE PC** Solution page 549.
Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$.

887. **RMS 2010 1077 TPE PC** Solution page 550.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   (a) Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   (b) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
   (c) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

888. **RMS 2011 1139 TPE PC** Solution page 550.
Calculer $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x/(\cos x + 2\sin x + 3)$.

889. **RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC** Solution page 551.
Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Suites et séries de fonctions

890. **RMS 2011 1153 Télécom Sud Paris PC** Solution page 551.
Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.
   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Séries entières

891. **RMS 2006 1125 ENSEA PC** Solution page 551.
Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

892. **RMS 2006 1129 TPE, PC** Solution page 552.
Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 (1-x^{1/n})^{1/n}\,\mathrm{d}x$.

893. **RMS 2010 1084 Télécom Sud Paris PC** Solution page 553.
On pose $I_n = \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n).

894. **RMS 2011 1151 TPE PC** Solution page 553.
   (a) Soient $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\mu n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\mu}$.

(b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

(c) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Intégrales à paramètre

895. **RMS 2006 1133 IIE PC** Solution page 554.
On considère la fonction $\phi \colon t \mapsto \int_0^\pi e^{-t\sin\theta} \cos(t\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Montrer que $\phi \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que, pour $t > 0$: $\phi'(t) = -2(\sin t)/t$.

(c) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

896. **RMS 2006 1134 TPE PC** Solution page 554.
On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de F ?

(b) La fonction F est-elle continue ? Dérivable ?

(c) Montrer que la limite de F en 0^+ vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

897. **RMS 2006 1136 TPE PC** Solution page 556.
Existence et continuité de F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Séries de Fourier

898. **RMS 2006 1138 IIE PC** Solution page 557.
Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π–périodique, et (E) l'équation différentielle $y' + y = f$.

(a) Montrer que (E) admet une unique solution 2π–périodique notée ϕ.

(b) La fonction ϕ est-elle la somme de sa série de Fourier ?

(c) Trouver une relation entre les coefficients de Fourier exponentiels de f et de ϕ.

(d) On suppose que f est lipschitzienne. Montrer que $c_n(\phi) = \mathrm{o}(1/n^2)$ quand $|n| \to \infty$.

899. **RMS 2006 1139 TPE PC** Solution page 558.
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π–périodique coïncidant avec la valeur absolue sur $[-\pi, \pi]$. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-4}$.

900. **RMS 2012 1337 Mines d'Alès PC** Solution page 558.
Soient $\alpha \in]0, \pi[$ et f la fonction 2π–périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leqslant \alpha$ et $f(x) = 0$ sinon.

(a) Étudier la série de Fourier de f et sa convergence.

(b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}$.

Équations différentielles linéaires

901. **RMS 2011 1157 TPE PC** Solution page 559.
Soit (E) l'équation différentielle $2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$.

(a) Montrer que (E) admet une unique solution f définie sur $]-\infty, 1[$ telle que $f(0) = 0$.

(b) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de zéro.

902. **RMS 2006 1146 TPE PC** Solution page 559.
Résoudre l'équation différentielle $x^{(3)} + x'' + x' + x = e^{at}$.

903. **RMS 2010 1092 TPE PC** Solution page 560.
Résoudre $x^2y'' + axy' + by = 0$.

Équations différentielles non linéaires

Calcul différentiel

904. **RMS 2012 1341 TPE PC** Solution page 561.
Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ sur $\mathbb{R}^2$.
Indication. Poser $f(x,y) = e^{-y}g(x,y)$.

Géométrie

905. **RMS 2006 1153 TPE PC** Solution page 561.
Réduire la conique d'équation : $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0$. Donner sa nature et son centre.

906. **RMS 2006 1156 TPE PC** Solution page 561.
Trouver le lieu (S) des points équidistants de l'axe Oz et de la droite d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} x+y-1 & = & 0, \\ z & = & 0. \end{array}\right.$ Trouver les droites incluses dans (S).

Solutions

ENS MP

Algèbre

1. **RMS 2007 1 ENS Paris Lyon Cachan MP**
   (a) Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$ sont-ils isomorphes ?
   (b) Pour quels $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ les groupes $(\mathbb{Z}^m,+)$ et $(\mathbb{Z}^n,+)$ sont-ils isomorphes ?

   Solution. —

   (a) La réponse est non. Si φ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}^2,+)$, on pose $\varphi(1)=(a,b)$. Alors $\varphi(n)=n(a,b)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est incluse dans une droite de $\mathbb{Z}^2$, donc φ n'est pas surjective, donc φ ne peut pas être un isomorphisme.

   (b) La réponse est : les couples tels que $m=n$.
   Le même type d'argument montre que, si $m<n$, un homomorphisme φ de $(\mathbb{Z}^m,+)$ dans $(\mathbb{Z}^n,+)$ ne peut pas être surjectif, puisque $\varphi(\mathbb{Z}^n)$ est contenu dans un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension au plus n, et que $\mathbb{Z}^m$ ne l'est pas.
   Enfin, si $m=n$, les deux groupes sont égaux, donc isomorphes.

2. **RMS 2007 3 ENS Paris Lyon Cachan MP**
   Soit A un anneau commutatif. On note $S_n(A)$ l'ensemble des $x\in A$ pour lesquels il existe n carrés d'éléments de A dont x est la somme.
   (a) Montrer que $S_2(A)$ est stable par multiplication.
   (b) Montrer que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par multiplication.
   (c) Soit $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\equiv 7 \mod 8$. Montrer que $n\notin S_3(\mathbb{Z})$.

   Solution. —

   (a) L'identité de Lagrange $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ permet de conclure. Cette identité s'obtient simplement en écrivant que $|z_1|^2\times|z_2|^2=|z_1\overline{z_2}|^2$, où z_1 et z_2 sont les nombres complexes respectivement égaux à $a+ib$ et $c+id$.

   (b) Les nombres $3=1^2+1^2+1^2$ et $5=2^2+1^2+0^2$ appartiennent à $S_3(\mathbb{Z})$, mais pas le produit $3\times5=15$ (voir la question suivante).

   (c) Si $n=a^2+b^2+c^2$, alors $\dot{7}=\dot{a}^2+\dot{b}^2+\dot{c}^2$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Or les carrés de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont $\dot{0}$, $\dot{1}$ et $\dot{4}$: la somme de trois d'entre eux ne peut pas faire $\dot{7}$. En particulier, $15\notin S_3(\mathbb{Z})$.

3. **RMS 2007 7 ENS Paris Lyon Cachan MP**
   Soit $A\in \mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$. Montrer que les dénominateurs des coefficients de A écrits sous forme irréductible sont impairs.

   Solution. — On raisonne par l'absurde. On suppose qu'un coefficient a de A écrit sous forme irréductible a un dénominateur pair. Soient b et c les deux autres coefficients de la colonne de a. On doit avoir $a^2+b^2+c^2=1$ car A est orthogonale donc, en réduisant au même dénominateur (nécessairement pair), on obtient l'identité suivante dans $\mathbb{Z}$:

$$a'^2+b'^2+c'^2=4k^2\ ,$$

   avec au moins un des trois nombres a', b' ou c' impair (il faut distinguer celui ou un de ceux, noté x, des trois nombres a, b ou c qui possède la plus grande puissance de 2 dans son dénominateur et alors le nombre entier x' correspondant est impair).

   En réduisant modulo 4, on obtient $\dot{a'}^2+\dot{b'}^2+\dot{c'}^2=\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Or les carrés de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont $\dot{0}$ et $\dot{1}$. La seule possibilité est donc que $\dot{a'}=\dot{b'}=\dot{c'}=\dot{0}$, donc que a', b' et c' soient pairs : contradiction.

4. **RMS 2009 9 ENS MP**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ possédant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

SOLUTION. — On raisonne par récurrence sur $k \geqslant 1$. Si P possède exactement un coefficient non nul, il admet zéro ou une racine réelle (qui vaut 0), suivant que le coefficient est le terme constant ou non : cela fait bien au plus $2 \times 1 - 1 = 1$ racines réelles.

On suppose que la propriété est vraie pour $k-1 \geqslant 1$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant exactement k coefficients non nuls. De deux choses l'une.
- Ou bien le coefficient constant de P est non nul : $P = c_1 + c_2X^{i_2} + \cdots + c_kX^{i_k}$ avec $0 < i_2 < \cdots < i_k$ et $c_j \neq 0$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$. Soit ℓ le nombre des racines réelles distinctes de P. Le théorème de Rolle affirme l'existence d'au moins $\ell - 1$ racines réelles distinctes de $P' = i_2c_2X^{i_2-1} + \cdots + i_kc_kX^{i_k-1}$. Comme P' est un polynôme ayant exactement $k-1$ coefficients non nuls, l'hypothèse de récurrence permet d'en déduire que $\ell - 1 \leqslant 2(k-1)-1$, donc que $\ell \leqslant 2k-2 \leqslant 2k-1$.
- Ou bien le coefficient de P est nul : $P = c_1X^{i_1} + c_2X^{i_2} + \cdots c_kX^{i_k}$ avec $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et $c_j \neq 0$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$. Alors $P = X^{i_1}Q$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ possède exactement k coefficients non nuls, dont le coefficient constant. L'ensemble des racines réelles de P est la réunion disjointe de l'ensemble des racines réelles de Q et de $\{0\}$. D'après l'étude du premier cas, le nombre de racines réelles distinctes de P est au plus $1 + (2k-2) = 2k-1$.

Le caractère optimal de la majoration est établi en considérant la suite de polynômes (P_k) définis par

$$P_k = X \prod_{i=1}^{k-1} (X^2 - i) \, .$$

En tant que polynôme impair de degré $2k-1$, il possède au plus k coefficients non nuls, et il admet à l'évidence $2k-1$ racines réelles distinctes : $0, \pm 1, \ldots, \pm\sqrt{k-1}$. L'étude précédente montre alors qu'il possède exactement k coefficients non nuls, et cela prouve le caractère optimal recherché.

5. **RMS 2011 24 ENS MP**
Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$.

(a) Calculer la moyenne μ_n de det sur $\mathcal{B}_n$.
(b) Calculer la moyenne m_n de $\det^2$ sur $\mathcal{B}_n$.
(c) Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et p_n la probabilité pour qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ ait un déterminant $\geqslant f(n)\sqrt{n!}$. Montrer que (p_n) converge vers zéro.
(d) Montrer que pour une infinité de valeurs de n on a $\max\{\det M,\, M \in \mathcal{B}_n\} \geqslant (n+1)^{(n-1)/2}$

SOLUTION. — à rédiger ? ?

(a) L'application φ de $\mathcal{B}_n$ dans lui-même, qui à A, associe la matrice obtenue en multipliant la première colonne de A par -1, est une involution sans point fixe. La linéarité du déterminant par rapport à la première colonne montre que $\det \varphi(M) = -\det M$. En regroupant, dans la somme $\sum_{M \in \mathcal{B}_n} \det M$, les matrices deux par deux (M et $\varphi(M)$), on obtient

$$\mu_n = 0 \, .$$

(b) Calculer la moyenne m_n de $\det^2$ sur $\mathcal{B}_n$.
(c) Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et p_n la probabilité pour qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ ait un déterminant $\geqslant f(n)\sqrt{n!}$. Montrer que (p_n) converge vers zéro.
(d) Montrer que pour une infinité de valeurs de n on a $\max\{\det M,\, M \in \mathcal{B}_n\} \geqslant (n+1)^{(n-1)/2}$

Analyse

6. **RMS 2007 77 ENS Cachan MP**
Soit (a_n) une suite réelle. Montrer qu'il y a équivalence entre :
(i) $\sum |a_n|$ converge ;
(ii) pour toute suite réelle (b_n) de limite nulle, $\sum a_nb_n$ converge.

SOLUTION. —
(i)$\Rightarrow$(ii). Si $\sum |a_n|$ converge et si (b_n) est une suite réelle de limite nulle, alors il existe un rang N tel que $|b_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant N$. Pour ces n là, on a donc $|a_nb_n| \leqslant |a_n|$, ce qui entraîne la convergence absolue de la série $\sum a_nb_n$, donc sa convergence.

(ii)$\Rightarrow$(i). On raisonne par contraposition. On suppose que $\sum |a_n|$ diverge, et on construit une suite réelle (b_n) de limite nulle telle que la série $\sum a_n b_n$ diverge. Pour cela, on note $\varepsilon_n = \pm 1$ le signe de a_n (si $a_n = 0$, le choix est indifférent), et on pose $b_n = \varepsilon_n c_n$, où c_n est positif à choisir, de sorte que $a_n b_n = |a_n| c_n$ soit le terme général d'une série positive et divergente, et de sorte que (c_n) converge vers zéro.

On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum |a_n|$. Comme cette dernière diverge, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$, et on peut par conséquent définir des entiers n_k par récurrence de la manière suivante : $n_0 = 0$ et

$$\forall k \geqslant 1, \quad n_k = \min \left\{ p \in \mathbb{N}, \quad p > n_{k-1}, \quad S_p - S_{n_{k-1}} \geqslant k \right\} .$$

De façon imagée :

$$+\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \underbrace{|a_0|}_{\geqslant 0} + \underbrace{|a_1| + \cdots + |a_{n_1}|}_{\geqslant 1} + \underbrace{|a_{n_1+1}| + \cdots + |a_{n_2}|}_{\geqslant 2} + \cdots + \underbrace{|a_{n_{k-1}+1}| + \cdots + |a_{n_k}|}_{\geqslant k} + \cdots$$

On pose $c_0 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \in]\!] n_{k-1}, n_k]\!]$, on pose $c_n = \frac{1}{k}$. Il est clair que la suite (c_n) converge vers zéro. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| c_n = \underbrace{|a_0|}_{\geqslant 0} + \underbrace{|a_1| + \cdots + |a_{n_1}|}_{\geqslant 1} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(|a_{n_1+1}| + \cdots + |a_{n_2}| \right)}_{\geqslant 1/2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{k} \left(|a_{n_{k-1}+1}| + \cdots + |a_{n_k}| \right)}_{\geqslant 1/k} + \cdots = +\infty \,,$$

ce qui explique pourquoi la série $\sum a_n b_n$ diverge.

X ENS PSI

Algèbre

7. **RMS 2011 255 X ENS PSI**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre des diviseurs de n. On pose $D_n = d_1 + \cdots + d_n$.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ou $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon. Exprimer $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ en fonction de n, de i et de la partie entière.

(b) Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$.

(c) Montrer que $D_n \sim n \ln n$.

Solution. — On notera plutôt A_n la matrice appelée A par l'énoncé.

(a) La somme $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n}$ est le nombre d'entiers $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i|j$, c'est-à-dire le nombre de multiples de i compris dans $[\![1, n]\!]$. On cherche donc l'entier k tel que $i, 2i, \ldots, ki$ sont $\leqslant n$ et $n < (k+1)i$, ou encore $k \leqslant n/i < n+1$. Par définition de la partie entière, on obtient

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor .$$

(b) Il s'agit d'une comparaison série-intégrale appliquée à la fonction continue et décroissante $t \in]0, +\infty[\mapsto 1/t$: comme $\int_k^{k+1} \mathrm{d}t/t \leqslant 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $1/k \leqslant \int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t/t$ pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, on en déduit que $\int_1^{n+1} \mathrm{d}t/t = \ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$, puis, comme $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n .$$

(c) On note s_n la somme de tous les éléments de la matrice A_n, et H_n le n-ième nombre harmonique $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$. En effectuant une somme par lignes, la question (a) montre que $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lfloor n/i \rfloor$. Comme $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $nH_n - n \leqslant s_n \leqslant nH_n$. D'après la question précédente, $nH_n \sim n \ln n$, et on en déduit que

$$s_n \sim n \ln n .$$

On peut aussi calculer s_n en effectuant une somme par colonnes. Tout d'abord, la définition des $a_{i,j}$ montre que $a_{1,j} + \cdots + a_{n,j}$ est le nombre des diviseurs de j compris entre 1 et n, c'est-à-dire le nombre d_j des diviseurs de j (car $j \leqslant n$). Alors $s_n = \sum_{j=1}^{n} d_j = D_n$. On en déduit finalement que

$$D_n \sim n \ln n .$$

Remarque. — Le recours à la matrice A_n permet de décrire agréablement la permutation des signes $\sum$ dans la définition $D_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \leqslant i} \delta(i|j)$, où $\delta(\mathcal{P})$ vaut 1 ou zéro suivant que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie ou fausse.

8. **RMS 2009 129 X ENS PSI**

Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.

Solution. — Il suffit de s'intéresser aux (éventuelles) racines de P de module strictement plus grand que 1. Si ζ est une telle racine, alors $|\zeta|^k \leqslant |\zeta|^{n-1}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$|\zeta|^n = \left|-a_0 - a_1\zeta - \cdots - a_{n-1}\zeta^{n-1}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\zeta|^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) |\zeta|^{n-1}.$$

Après simplification par le nombre non nul $|\zeta|^{n-1}$, on obtient $|\zeta| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

9. **RMS 2009 130 X ENS PSI**

Soient $I_0, \ldots, I_n$ des segments de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ non nul tel que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\int_{I_k} P = 0$. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$?

Solution. — On considère l'application $\phi\colon \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], \quad \phi(P) = \left(\int_{I_0} P, \ldots, \int_{I_n} P\right) .$$

Elle est manifestement linéaire, et l'énoncé revient à montrer que le noyau de ϕ n'est pas réduit à $\{0\}$. Or le rang de ϕ est au plus égal à $n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, et la formule du rang donne alors

$$\dim(\operatorname{Ker}\phi) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \operatorname{rg}\,\phi = n+2-\operatorname{rg}\,\phi \geqslant 1\,,$$

ce qui répond à la première question.

On ne peut pas (presque jamais) remplacer $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$. On note ψ l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par la même expression que ϕ. La formule du rang donne cette fois

$$\dim(\operatorname{Ker}\psi) = n+1-\operatorname{rg}\,\psi\,, \quad \text{avec} \quad \operatorname{rg}\,\psi \leqslant n+1\,.$$

Si $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, alors $\int_{I_k} X^j = (\beta_k^{j+1} - \alpha_k^{j+1})/(j+1)$, et on en déduit que la matrice de ψ dans les bases canoniques est

$$M = \left(\frac{\beta_k^{j+1} - \alpha_k^{j+1}}{j+1}\right)_{(k,j)\in\{0,\dots,n\}^2}.$$

Cette matrice est carrée, et on constate que son déterminant est une fonction polynomiale en les $2(n+1)$ extrémités des segments I_k (l'application ψ n'étant pas un endomorphisme, on ne peut pas parler de son déterminant). Dans l'espace $\mathbb{R}^{2n+2}$ formés des vecteurs $(\alpha_0,\dots,\alpha_n,\beta_0,\dots,\beta_n)$, il existe donc un ouvert dense sur lequel $\det(M)\neq 0$, auquel cas ψ est injective, d'où l'explication du "presque jamais".

10. **RMS 2009 131 X ENS PSI**

Pour $c = (c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ et $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on considère l'égalité $(*)$:

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k\Big(P(k)+P(-k)-2P(0)\Big)\,.$$

(a) Trouver les polynômes $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tels que $(*)$ soit vraie pour tout $c\in\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}^n$ tel que $(*)$ soit vérifiée pour tout $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

Solution. — Il s'agit d'un exercice relatif à la dualité en dimension finie.

(a) Pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on pose $\alpha_k(P) = P(k)+P(-k)-2P(0)$ pour $k\in\{1,\dots,n\}$ et $\beta(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t - 2P(0)$, et on désigne par $\alpha(P)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\alpha_k(P)$. On vient ainsi de définir $n+1$ formes linéaires sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$: les α_k et β. La condition $(*)$ s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\alpha_k(P) = \langle c, \alpha(P)\rangle = \beta(P)\,,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, et elle doit être réalisée pour tout $c\in\mathbb{R}^n$. Pour $c=0$, on obtient la condition nécessaire $\beta(P)=0$. Pour $c=\alpha(P)$, on obtient la condition nécessaire $\langle\alpha(P),\alpha(P)\rangle = \|\alpha(P)\|^2 = 0$, donc $\alpha(P)=0$. Réciproquement, il est clair que les deux conditions $\alpha(P)=\beta(P)=0$ sont suffisantes. Les polynômes cherchés sont donc les $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tels que

- $\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 2P(0)$;
- $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ P(k)+P(-k) = 2P(0)$.

Tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un polynôme pair $Q = \sum_{p=0}^{n} a_{2p}X^{2p}\in\mathbb{R}_{2n}[X]$ et d'un polynôme impair $R = P-Q$. Les deux conditions portant sur P sont équivalentes aux deux conditions (portant uniquement sur Q) suivantes :

- $\int_{0}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0)$;
- $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ Q(k) = Q(0)$.

En conservant les notations ci-dessus, on pose $H = \sum_{p=0}^{n} a_{2p}X^p$: c'est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui doit vérifier

$$\forall k\in\{1,\dots,n\}, \quad H(k^2)-H(0) = 0\,.$$

Comme $\deg(H)\leqslant n$, la condition ci-dessus est équivalente à l'existence de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $H = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X-k^2)+H(0)$. En substituant X par zéro, on obtient $H(0) = \lambda(-1)^n(n!)^2+H(0)$, d'où l'on tire $\lambda=0$. Alors $Q=Q(0)$, et la condition portant sur l'intégrale est nécessairement vérifiée (ceci traduit en fait l'appartenance de la forme β au sous-espace vectoriel engendré par les formes α_k : voir la question suivante).

En conclusion, les polynômes P qui conviennent sont ceux qui sont de la forme

$$P = c+R, \quad \text{avec} \quad c\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad R = \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}X^{2p+1} \quad \text{polynôme impair de degré au plus } 2n+1.$$

(b) On considère l'application (manifestement linéaire)

$$u : P \mapsto (\beta(P), \alpha_1(P), \ldots, \alpha_n(P))\,,$$

allant de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La première question de l'exercice montre que le noyau de u est l'ensemble des polynômes de la forme $c + R$, avec $c \in \mathbb{R}$ et R impair de degré au plus $2n + 1$. Le décompte des coefficients indépendants de ces polynômes montre que $\dim(\operatorname{Ker} u) = n + 2$. La formule du rang donne alors

$$\operatorname{rg}\, u = (2n + 2) - (n + 2) = n\,.$$

L'image de u est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$: il existe des nombres réels $a_0, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que $\operatorname{Im} u$ ait pour équation $\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = 0$, ou encore tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad a_0\beta(P) + a_1\alpha_1(P) + \cdots + a_n\alpha_n(P) = 0\,.$$

Si $a_0 = 0$, alors $(1, 0, \ldots, 0) \in \operatorname{Im} u$, ce qui est impossible, car on a vu à la question précédente que, si $\alpha_k(P) = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors $\beta(P) = 0$. Par suite, on peut poser $c_k = -a_k/a_0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, de sorte que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $\beta(P) = c_1\alpha_1(P) + \cdots + c_n\alpha_n(P)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Les c_k sont en fait uniques, puisque les a_k sont définis à un facteur multiplicatif commun près (ce sont les coefficients d'une équation d'un hyperplan).

11. **RMS 2009 132 X ENS PSI**

Soit $k(n)$ le plus petit des entiers k tels que $\forall g \in \mathbb{C}[X]$, $\exists (f_1, \ldots, f_k) \in \mathbb{C}[X]^k$, $g = f_1^n + \cdots + f_k^n$.

(a) Pourquoi peut-on se ramener à $g = X$ pour établir l'existence de $k(n)$?

(b) Déterminer $k(2)$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, on a $k(n) \geqslant 3$.
Indication. On pourra noter que $X^n + Y^n = \prod_\xi (X + \xi Y)$ où ξ parcourt un ensemble de nombres complexes à préciser.

(d) Montrer que $k(n) \leqslant n$ pour tout n.
Indication. Utiliser $\Delta\colon P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ et étudier $\Delta^{n-1}(X^n)$.

Solution. —

(a) S'il existe s polynômes $h_1, \ldots, h_s$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $X = h_1(X)^n + \cdots + h_s(X)^n$, il suffit de substituer X par g dans cette identité pour obtenir l'existence de s polynômes $f_1 = h_1(g), \ldots, f_s = h_s(g)$ tels que $g = f_1^n + \cdots + f_s^n$. L'ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ soit la somme de k puissances n-ièmes est donc non vide si et seulement si X s'écrit comme une somme de puissances n-ièmes. Dans ce cas, cet ensemble admet un plus petit élément : $k(n)$, qui est aussi la plus petite longueur de l'écriture de X comme somme de puissances n-ièmes.

(b) Il est clair que X n'est pas le carré d'un polynôme (si $X = h^2$, et si d est le degré de h, il faudrait que $2d = 1$). Par suite, $k(2) \geqslant 2$. Par ailleurs,

$$X = \left(\frac{X + 1}{2}\right)^2 + \left(i\frac{X - 1}{2}\right)^2,$$

ce qui achève de montrer que $k(2) = 2$.

(c) On note que $X^n + Y^n = \prod_\xi (X + \xi Y)$ où ξ parcourt l'ensemble des racines n-ièmes de -1 : fixer $y \in \mathbb{C}$, et considérer le polynôme $P = P(X) = X^n + y^n$ de $\mathbb{C}[X]$, donc les racines sont les ξy, où ξ parcourt l'ensemble des racines n-ièmes de -1 ; factoriser alors P, dont le coefficient dominant vaut 1.

Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $k(3)$ existe. Il est clair que $k(3) \neq 1$, pour la même raison que $k(2) \neq 1$. On suppose ensuite que $k(n) = 2$, donc qu'il existe deux polynômes f_1 et f_2 dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $X = f_1^n + f_2^n$. Alors

$$X = \prod_{\xi^n = -1} (f_1 + \xi f_2)\,,$$

et l'égalité des degrés montre qu'un facteur du produit et un seul doit être de degré 1, les autres devant être de degré zéro. Comme il y a au moins trois termes dans le produit, il existe au moins deux constantes complexes non nulles c_1 et c_2 et deux racines n-ièmes de -1 distinctes ξ_1 et ξ_2 telles que le système suivant soit satisfait :

$$\begin{cases} f_1 + \xi_1 f_2 &= c_1\,, \\ f_1 + \xi_2 f_2 &= c_2\,. \end{cases}$$

Le déterminant valant $\xi_2 - \xi_1 \neq 0$, on obtient, par les formules de Cramer, que f_1 et f_2 sont deux polynômes de $\mathbb{C}_0[X]$, donc que $X = f_1^n + f_2^n \in \mathbb{C}_0[X]$, ce qui est faux. Par suite, $k(n) \geqslant 3$.

(d) On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$. On vérifie aisément que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ pour tout P de degré au moins 1. Par suite $\Delta^{n-1}(X^n)$ est un polynôme de degré 1, qu'on écrit $aX + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.
Les calculs $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, $\Delta^2(P) = P(X+2) - P(X+1) - [P(X+1) - P(X)] = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$ suggèrent la formule

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \Delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j P(X+k-j)\,,$$

qui se démontre aisément par récurrence. On en déduit alors que $X + \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j (X+n-1-j)^n$, puis que $X = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j (X - \frac{b}{a} + n - 1 - j)^n$, par translation de l'indéterminée. Si l'on pose $h_j = X - \frac{b}{a} + n - 1 - j$ et si l'on désigne par α_j une (quelconque) des racines n-ièmes du nombre complexe $\frac{(-1)^j}{a} \binom{n-1}{j}$, on obtient

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j h_j)^n,$$

ce qui montre que X est la somme de n puissances n-ièmes, donc que $k(n) \leqslant n$.

Remarques. — On en déduit en particulier que $k(3) = 3$, et la question (d) donne une décomposition minimale de X comme somme de cubes. Tous calculs faits, on obtient

$$X = \left(\frac{X+1}{\sqrt[3]{6}}\right)^3 + \left(-\frac{X}{\sqrt[3]{6}}\right)^3 + \left(\frac{X-1}{\sqrt[3]{6}}\right)^3.$$

On a étudié le problème de Waring dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$ (le problème de Waring dans l'anneau commutatif A consiste à étudier la possibilité de représenter tout $x \in A$ comme la somme d'un nombre minimal $k(n)$ de puissances n-ièmes et, le cas échéant, à donner des indications sur la taille de $k(n)$. Le problème de Waring historique concerne $A = \mathbb{Z}$, et fait encore l'objet de recherches actuelles).

12. **RMS 2009 133 X ENS PSI**

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p, $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré q, et $T_{P,Q} : (R_1, R_2) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \mapsto PR_1 + QR_2 \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

(a) Montrer que si P et Q ont une racine commune, alors $T_{P,Q}$ n'est pas surjective.

(b) Montrer que si $T_{P,Q}$ n'est pas injective, alors P et Q ont une racine commune.

(c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique H. Que peut-on dire si $T_{H,H'}$ est inversible ?
On pose $\mathcal{B} = ((1,0), (X,0), \ldots, (X^{p-1}, 0), (0,1), (0,X), \ldots, (0, X^{q-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1, X, \ldots, X^{p+q-1})$, qui sont respectivement une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et la base canonique de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

(d) On suppose que P et Q n'ont que des racines simples, et n'ont aucune racine commune. Trouver des bases simples de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ telles que la matrice de $T_{P,Q}$ relativement à ces bases soit diagonale.

(e) Soit M la matrice de $T_{P,Q}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et c_P et c_Q les coefficients dominants de P et Q. Montrer que $\det(M) = c_P^q c_Q^p \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} (\beta_j - \alpha_i)$ où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ [respectivement $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$] est l'ensemble des racines de P [respectivement de Q].

Solution. — Il s'agit d'examiner les propriétés du résultant de deux polynômes.

(a) Si P et Q ont une racine commune, notée α, alors $T_{P,Q}(R_1, R_2)$ possède la racine α pour tout $(R_1, R_2) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$, donc $T_{P,Q}$ n'est pas surjective.

(b) On raisonne par contraposition. Si P et Q n'ont aucune racine commune, alors ils sont premiers entre eux. Soit $(R_1, R_2) \in \operatorname{Ker} T_{P,Q}$, donc $PR_1 = -QR_2$. Comme P divise QR_2 et qu'il est premier avec Q, le théorème de Gauss affirme qu'il divise R_2 : mais $\deg(R_2) \leqslant p - 1$ et $\deg(P) = p$, donc il faut que $R_2 = 0$, et alors $R_1 = 0$. On a bien prouvé que $T_{P,Q}$ est injective.

(c) Ici, $p = n \geqslant 2$ et $q = n - 1 \geqslant 1$ (pour être dans les hypothèses des questions précédentes) de sorte que les dimensions de l'espace de départ et de celui d'arrivée de $T_{H,H'}$ soient les mêmes et valent $2n - 1$. L'hypothèse d'inversibilité a bien un sens. On peut alors dire que H et H' n'ont pas de racine commune, c'est-à-dire que toutes les racines de H sont simples, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(d) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les p racines distinctes de P, et $\beta_1, \ldots, \beta_q$ les q racines distinctes de Q. Soit $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_p)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Le cours affirme que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$. De même, soit $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_q)$ la base de $\mathbb{C}_{q-1}[X]$ formée des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$. Ils sont définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,q]\!]^2, \quad S_i(\beta_j) = \delta_{i,j}\,.$$

De plus, comme, P et Q n'ont pas de racines communes, ils vérifient en outre

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad L_i(\beta_j) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad S_j(\alpha_i) \neq 0\,.$$

La famille $\mathcal{C} = ((S_1, 0), \dots, (S_q, 0), (0, L_1), \dots, (0, L_p)) = (e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{p+q})$ est une base de $\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$. On note ensuite $\mathcal{C}' = (f_1, \dots, f_q, f_{q+1}, \dots, f_{p+q})$ la base de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ formée des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(\beta_1, \dots, \beta_q, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, dans cet ordre. Ils sont caractérisés par

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad f_i(\alpha_j) = f_{q+j}(\beta_i) = 0\,, \\ \forall (i,j) \in [\![1,q]\!]^2, \quad f_i(\beta_j) = \delta_{i,j}\,, \\ \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad f_{q+i}(\alpha_j) = \delta_{i,j}\,. \end{aligned}$$

Fixons i tel que $1 \leqslant i \leqslant q$. Alors $T_{P,Q}(e_i) = T_{P,Q}(S_i, 0) = PS_i$, donc

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1,q]\!], \quad [T_{P,Q}(e_i)](\beta_j) = P(\beta_j)S_i(\beta_j) = P(\beta_j)\delta_{i,j}\,, \\ \forall j \in [\![1,p]\!], \quad [T_{P,Q}(e_i)](\alpha_j) = P(\alpha_j)S_i(\alpha_j) = 0\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_{P,Q}(e_i) = P(\beta_i)f_i$. Fixons maintenant i tel que $q+1 \leqslant i \leqslant p+q$. Alors $T_{P,Q}(e_i) = T_{P,Q}(0, L_{i-q}) = QL_{i-q}$, et on montrerait comme ci-dessus que $T_{P,Q}(e_i) = Q(\beta_{i-q})f_i$. Finalement, la matrice

$$M' = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(T_{P,Q}) = \mathrm{diag}(P(\beta_1), \dots, P(\beta_q), Q(\alpha_1) \dots, Q(\alpha_p))$$

est bien diagonale.

(e) Le calcul de la question précédente montre que $\det(M') = \prod_{i=1}^p Q(\alpha_i) \times \prod_{j=1}^q P(\beta_j)$. Comme $P = c_P \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)$ et $Q = c_Q \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)$, on en déduit que

$$\det(M') = c_Q^p \prod_{i=1}^p \left(\prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j) \right) \times c_P^q \prod_{j=1}^q \left(\prod_{i=1}^p (\beta_j - \alpha_i) \right).$$

On appelle *anciennes bases* les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définies par l'énoncé, et *nouvelles bases* les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ définies à la question précédente, de sorte que M (respectivement M') soit la matrice de $T_{P,Q}$ dans les anciennes (respectivement nouvelles) bases. Si G (respectivement H) est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ (respectivement de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$), le cours affirme que $M' = G^{-1}MH$, et on en déduit que $\det(M) = \det(G)\det(M')\det(H^{-1})$. Il ne reste plus qu'à calculer les déterminants des matrices de passage.

Si $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $x_1, \dots, x_n$, si $X^j = \sum_{i=1}^k c_i L_i$ est l'écriture de X^j $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$, la substitution de X par x_k donne $x_k^j = c_k$. On en déduit en particulier que

$$\det(H^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \cdots & \beta_1^{p+q-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_2^{p+q-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \beta_q & \beta_q^2 & \cdots & \beta_q^{p+q-1} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_2^{p+q-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \alpha_p & \alpha_p^2 & \cdots & \alpha_p^{p+q-1} \end{vmatrix} = V(\beta_1, \dots, \beta_q, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = V(\beta_1, \dots, \beta_q) \times V(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \times \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j).$$

De la même manière, $(X^j, 0) = \sum_{k=1}^q \beta_k^j (S_k, 0) = \sum_{k=1}^q \beta_k^j e_k$ pour $0 \leqslant j \leqslant q-1$, et $(0, X^i) = \sum_{k=1}^p \alpha_k^i (0, L_k) = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_{q=i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$. On obtient du coup

$$\det(G^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1^{q-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \beta_2 & \cdots & \beta_2^{q-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \beta_q & \cdots & \beta_q^{q-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{p-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{p-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_p & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix} = V(\beta_1, \dots, \beta_q) \times V(\alpha_1, \dots, \alpha_p).$$

Et on conclut que

$$\begin{aligned}\det(M) &= \frac{\det(G^{-1})}{\det(H^{-1})}\det(M')\,,\\ &= \frac{V(\beta_1,\dots,\beta_q)\times V(\alpha_1,\dots,\alpha_p)}{V(\beta_1,\dots,\beta_q)\times V(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\times\prod_{i=1}^p\prod_{j=1}^q(\alpha_i-\beta_j)}c_Q^p c_P^q\prod_{i=1}^p\left(\prod_{j=1}^q(\alpha_i-\beta_j)\right)\times\prod_{j=1}^q\left(\prod_{i=1}^p(\beta_j-\alpha_i)\right),\\ &= c_P^q c_Q^p\prod_{i=1}^p\prod_{j=1}^q(\beta_j-\alpha_i)\,.\end{aligned}$$

13. **RMS 2009 134 X ENS PSI**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. — Soit $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B=P^{-1}AP$, ou encore $PB=AP$. On écrit $P=Q+iR$ avec Q et R éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ces deux matrices n'ont *a priori* aucune raison d'être inversibles. Comme A et B sont à coefficients réels, l'égalité $PB=AP$ équivaut au système formé par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}QB&=AQ\,,\\ RB&=AR\,.\end{aligned}$$

Soit h la fonction $z\in\mathbb{C}\mapsto\det(Q+zR)$. Elle est polynomiale (par multilinéarité du déterminant), et non identiquement nulle puisque $h(i)\neq 0$. Elle admet donc un degré $k\geqslant 1$, et possède au plus k racines complexes. En particulier, il existe au moins un nombre réel t tel que $h(t)\neq 0$: la matrice $S=P+tR$ est donc dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En multipliant la seconde équation ci-dessus par t et en l'ajoutant à la première, on obtient $SB=AS$, ou encore $B=S^{-1}AS$, ce qui montre que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14. **RMS 2009 135 X ENS PSI**

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n et $u\in\mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m.

(a) Montrer que $m\leqslant n$.

(b) Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur tel que $\operatorname{Ker}p\subset\operatorname{Ker}u$. Montrer : $\forall j\geqslant 1,\ p\circ u^j=(p\circ u)^j$.

(c) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte.

Solution. —

(a) Le polynôme X^m est annulateur de u, donc le polynôme minimal μ_u de u divise X^m. Il est donc de la forme $\mu_u=X^p$ avec $p\leqslant m$, donc $u^p=0$, mais comme m est l'indice de nilpotence de u, on a $p=m$. Par ailleurs $\deg(\mu_u)\leqslant n$ (conséquence du théorème de Hamilton Cayley), donc $m\leqslant n$.

(b) On raisonne par récurrence sur j. Pour $j=1$, la relation demandée est banale. On suppose que $p\circ u^j=(p\circ u)^j$. Alors $p\circ u^{j+1}=(p\circ u^j)\circ u=(p\circ u)^j\circ u$ par hypothèse de récurrence.
? ? à terminer

(c) ? ? à terminer

15. **RMS 2009 136 X ENS PSI**

(a) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $X^2=J$, où $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

(b) Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$: $X^2=\begin{pmatrix}J&0\\0&J\end{pmatrix}$.

Solution. — Dans la question (b), on note $(E_1,\dots,E_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

(a) Si $X^2=J$, alors $X^4=J^2=0$, donc X est nilpotente, et $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il faut que $X^2=0$ (voir l'exercice 15 page 101), donc $J=0$, ce qui est faux. L'équation proposée n'a donc pas de solution.

(b) Soit $K=\operatorname{diag}(J,J)$. S'il existe une matrice $X\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $X^2=K$, elle commute avec K, car $XK=XX^2=X^2X=KX$. Comme les droites $\mathbb{C}E_1$ et $\mathbb{C}E_3$ sont propres pour K, elles sont stables par X, ce qui signifie que E_1 et E_3 sont des vecteurs propres pour X. Comme $K^2=0$, on a $X^4=0$, donc la seule valeur propre possible pour X est zéro, donc

$$XE_1=XE_3=0\,.$$

On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}X)\geqslant 2$. Comme X est nilpotente, l'exercice cité plus haut montre alors que $\dim(\operatorname{Ker}X^2)=\dim(\operatorname{Ker}K)\geqslant 3$, ce qui est impossible, puisque K est manifestement de rang 2.
Là encore, l'équation proposée n'a pas de solution.

16. **RMS 2009 137 X ENS PSI**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A.

Solution. — On note P le polynôme défini par $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$. La matrice A est appelée matrice compagne de P, pour des raisons qui seront évidentes à l'issue du calcul qui suit.

On effectue les transformations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + xC_2 + x^2C_3 + \cdots + x^{n-1}C_n$, puis on développe le déterminant obtenu par rapport à la première colonne :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -x & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -x-a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -x & 1 & \\ -P(x) & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -x-a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n P(x)\,.$$

17. **RMS 2009 138 X ENS PSI**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_{A,B}(M) = AM + MB$.

(a) Déterminer la matrice de $\Phi_{A,B}$ dans la base $(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n})$.

(b) Montrer que si C est semblable à A, alors $\Phi_{C,B}$ est semblable à $\Phi_{A,B}$.

(c) Exprimer les valeurs propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de celles de A et de B.

(d) Montrer l'équivalence entre :
(i) $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AM = MB$;
(ii) A et B ont une valeur propre commune.

Solution. —

(a) On note ϕ la matrice cherchée. On utilise la formule de multiplication des matrices élémentaires $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ dans le calcul qui suit :

$$\Phi_{A,B}(E_{i,j}) = AE_{i,j} + E_{i,j}B = \sum_{(k,\ell)} (a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} + b_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} + \sum_{\ell=1}^{n} b_{j,\ell}E_{i,\ell}\,.$$

On considère le bloc diagonal numéro i de ϕ, c'est-à-dire celui qui correspond aux lignes et aux colonnes d'indices $(i,1), \ldots, (i,n)$. D'après la formule ci-dessus :
– l'élément $(i,j),(i,j)$ vaut $a_{i,i} + b_{j,j}$;
– l'élément $(i,j),(i,p)$ avec $p \neq j$ vaut $b_{j,p}$.
En d'autres termes, ce bloc diagonal vaut $a_{i,i}I_n + {}^tB$.
On considère maintenant le bloc non diagonal numéro (p,i) de ϕ, qui correspond aux lignes $(p,1), \ldots, (p,n)$ et aux colonnes $(i,1), \ldots, (i,n)$ avec $i \neq p$. D'après la formule ci-dessus :
– l'élément $(p,j),(i,j)$ vaut $a_{p,i}$;
– l'élément $(p,q),(i,j)$ avec $q \neq j$ vaut zéro.
En d'autres termes, ce bloc non diagonal vaut $a_{p,i}I_n$. Finalement, la matrice demandée s'écrit par blocs sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}I_n + {}^tB & a_{1,2}I_n & \cdots & a_{1,n}I_n \\ a_{2,1}I_n & a_{2,2}I_n + {}^tB & \cdots & a_{2,n}I_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}I_n & a_{n,2}I_n & \cdots & a_{n,n}I_n + {}^tB \end{pmatrix}.$$

(b) Pour $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note g_P la multiplication à gauche par P. C'est l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g_P(M) = PM$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un automorphisme lorsque P est inversible, auquel cas $(g_P)^{-1} = g_{P^{-1}}$.

Comme C est semblable à A, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = P^{-1}AP$. Alors, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi_{C,B}(M) = CM + MB = P^{-1}APM + MB = P^{-1}\left(A[PM] + [PM]B\right) = (g_P)^{-1}(\Phi_{A,B}(g_P(M))\,.$$

On a donc établi l'égalité $\Phi_{C,B} = (g_P)^{-1} \circ \Phi_{A,B} \circ g_P$, qui prouve que $\Phi_{C,B}$ est semblable à $\Phi_{A,B}$.

(c) En considérant cette fois la multiplication à droite $d_Q : M \mapsto MQ$, on montrerait comme ci-dessus que, si D est semblable à B, alors $\Phi_{A,D}$ est semblable à $\Phi_{A,B}$. Par hypothèse, les matrices A et B sont respectivement semblables à des matrices diagonales $C = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $D = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, donc $\Phi_{A,B}$ est semblable à $\Phi_{C,D}$. Le calcul de la question (a) dit que la matrice de $\Phi_{C,D}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I_n + {}^tD & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_n + {}^tD & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n I_n + {}^tD \end{pmatrix}.$$

Comme D est diagonale, la matrice ci-dessus l'est aussi, et on lit que les valeurs propres de $\Phi_{C,D}$, donc de $\Phi_{A,B}$, sont toutes les sommes $\alpha_i + \beta_j$ des valeurs propres de A et de B, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

(d) On dispose des équivalences suivantes, le passage essentiel — entre la deuxième et la troisième ligne — résultant de la question précédente :

$$\begin{aligned} \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad AM = MB &\iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \Phi_{A,-B}(M) = 0\,, \\ &\iff \text{la valeur propre zéro appartient au spectre de } \Phi_{A,-B}, \\ &\iff \text{il existe une valeur propre de } A \text{ et une de } -B \text{ de somme nulle}, \\ &\iff A \text{ et } B \text{ ont une valeur propre commune.} \end{aligned}$$

18. **RMS 2009 141 X ENS PSI**

On considère la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

(a) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ. On pose $v_0 = v_{n+1} = 0$. Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$.

(b) Montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.

(c) Montrer que le polynôme $r^2 - (2-\lambda)r + 1$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées que l'on note r_1 et r_2. On pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$. Montrer que $\sin(n+1)\theta = 0$ et que $\rho = 1$.

(d) Déterminer les valeurs propres de A et pour chacune d'entre elles un vecteur propre associé.

(e) On pose $M = 2I_n$, $N = M - A$ et $J = M^{-1}N$. Montrer que J est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

(f) On définit une suite par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. Montrer que cette suite converge vers l'unique solution u de l'équation $Au = b$.

Solution. —

(a) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$: en particulier, ses valeurs propres sont réelles. La relation $Av = \lambda v$ équivaut au système

$$\begin{cases} & 2v_1 - v_2 = \lambda v_1\,, \\ \forall i \in [\![2, n-1]\!], & -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = \lambda v_i\,, \\ & -v_{n-1} + 2v_n = \lambda v_n\,. \end{cases}$$

En transposant λv_i dans le membre de gauche, on obtient bien $v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0$, y compris pour $i = 1$ et $i = n$, compte tenu des conventions $v_0 = v_{n+1} = 0$.

(b) Pour $\lambda = 0$, la relation ci-dessus devient $\forall i \in \{1, \dots, n\}, v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = 0$. L'équation caractéristique correspondant à cette relation de récurrence linéaire à coefficients constants est $-z^2 + 2z - 1 = -(z-1)^2 = 0$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_i = \alpha i + \beta$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$. Comme $v_0 = v_{n+1} = 0$, il vient $\alpha = \beta = 0$, donc $v = 0$, qui ne peut être un vecteur propre, donc zéro n'est pas valeur propre.

On montre de même que 4 n'est pas valeur propre de A.

(c) Le discriminant du polynôme étudié vaut $\Delta = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda-4)$. Il n'est pas nul en vertu de la question précédente.

S'il était strictement positif, les deux racines r_1 et r_2 du polynôme caractéristique $r^2 - (2-\lambda)r + 1$ seraient réelles et distinctes. Il existerait alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_i = \alpha r_1^i + \beta r_2^i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$. La condition $v_0 = 0$ donnerait $\beta = -\alpha$, donc $v_i = \alpha(r_1^i - r_2^i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$. De plus, $\alpha \neq 0$, sinon $v = 0$ ne peut être un vecteur propre. La condition $v_{n+1} = 0$ donne alors $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$. Comme $r_1 \neq r_2$, cette équation ne peut avoir lieu (dans $\mathbb{R}$) que si $r_1 = -r_2$ et n est impair. Or $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$, donc il faut que $\lambda = 2$, et alors $\Delta = -4 < 0$: absurde.

Il faut donc que $\Delta < 0$, donc que le polynôme caractéristique $r^2 - (2-\lambda)r + 1$ admette deux racines complexes distinctes conjuguées (donc non réelles), que l'on note r_1 et $\overline{r_1}$, et on pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$.

On a aussi $r_1 = (2 - \lambda \pm i\sqrt{-\Delta})/2$, de sorte que

$$|r_1|^2 = \frac{(2-\lambda)^2 + \lambda(4-\lambda)}{4} = \frac{4 - 4\lambda + \lambda^2 + 4\lambda - \lambda^2}{4} = 1,$$

donc $\rho = 1$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_i = \rho^i(\alpha\cos(i\theta) + \beta\sin(i\theta)) = \alpha\cos(i\theta) + \beta\sin(i\theta)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$. La condition $v_0 = 0$ impose $\alpha = 0$, donc $\beta \neq 0$, sinon $v = 0$ ne serait pas un vecteur propre. La condition $v_{n+1} = 0$ impose alors $\sin(n+1)\theta = 0$.

(d) Comme les vecteurs propres sont colinéaires à $V(\theta) = (\sin\theta, \sin 2\theta, \ldots, \sin n\theta)$ avec $\sin(n+1)\theta = 0$, il existe au plus n droites propres, respectivement engendrées par $V(\theta_k)$ avec $\theta_k = k\pi/(n+1)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Comme A est diagonalisable, on en déduit qu'il existe exactement n droites propres (que l'on vient de décrire), et que les valeurs propres sont simples. On note λ_k la valeur propre associée à $V(\theta_k)$, et on la calcule grâce à l'équation caractéristique $r^2 - (2-\lambda_k)r + 1 = 0$, appliquée avec $r = e^{i\theta_k}$. On obtient

$$\lambda_k = -\frac{e^{2i\theta_k} + 1}{e^{i\theta_k}} + 2 = 2(1 - \cos\theta_k).$$

(e) Comme $M^{-1} = \frac{1}{2}I_n$, on a $J = I_n - \frac{1}{2}A$. Par suite, si X est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ, ils vérifient $JX = \lambda X$, ou encore $AX = 2(1-\lambda)X$. Alors $2(1-\lambda)$ est de la forme $2(1-\cos\theta_k)$, donc les valeurs propres de J sont parmi les nombres $\cos\theta_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$: elles sont donc de module strictement inférieur à 1. Comme J est symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc son spectre est exactement l'ensemble des $\cos\theta_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui n'est pas demandé.

(f) Si la suite proposée converge vers u, alors la suite de terme général $M^{-1}(Nx_k + b)$ converge vers $M^{-1}(Nu + b)$ par continuité des applications linéaires en dimension finie, et par ailleurs la suite de terme général x_{k+1} converge aussi vers u. L'unicité de la limite montre que $u = M^{-1}(Nu + n) = \frac{1}{2}(2u - Au + b)$, donc que $Au = b$. Par ailleurs, cette équation possède une et une seule solution puisque les valeurs propres de A ne sont pas nulles.

On montre enfin que la suite (x_k) converge. Elle est définie par la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = Jx_k + \frac{1}{2}b = f(x_k),$$

où f est la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Jx + \frac{1}{2}b$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base propre pour J (qui est diagonalisable), et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres associées, et l'on pose $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k|$. D'après la question précédente, $m < 1$. On sait que l'application $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, et on constate que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|Jx\| = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k e_k \right\| \leqslant \sum_{k=}^n |\lambda_k||\alpha_k|\|e_k\| \leqslant m \sum_{k=1}^n |\alpha_k| = m\|x\|.$$

Il en résulte que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|J(x-y)\| \leqslant m\|x - y\|$, donc que f est m–contractante. La suite (x_k) converge donc vers l'unique point fixe de f (théorème du point fixe : est-il au programme de PSI ? ?).

X MP

19. **RMS 2007 110 X MP**

Soit $n > 0$. Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de n éléments.

Solution. — On note d_n le nombre de dérangements (permutations sans point fixe) sur n éléments. Le nombre de permutations sur n éléments ayant k points fixes exactement est donc $\binom{n}{k}d_{n-k}$. La proportion de permutations ayant k points fixes (ou probabilité qu'une permutation tirée de manière uniforme ait k points fixes) est donc

$$p_{k,n} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}d_{n-k} = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}\,.$$

Le nombre moyen recherché est l'espérance de la variable aléatoire « nombre de points fixes », ou encore

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} kp_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\,.$$

? ? à terminer.

20. **RMS 2007 111 X MP**

Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

Solution. — La réponse est non, car dans le premier, il existe un élément d'ordre 8, qui est $\dot{1}$, alors que dans le second, tous les éléments sont d'ordre 4 au plus.

21. **RMS 2007 112 X MP**

Soit G un groupe commutatif fini de cardinal pq, où p et q sont premiers distincts. Montrer que G possède un élément d'ordre pq.

Solution. — Soit $x \in G \setminus \{0\}$. L'ordre de x divise pq (théorème de Lagrange) et est différent de 1 : un tel ordre vaut donc p, q ou pq. Si c'est pq, c'est terminé. Supposons que ce soit p (symétrie des rôles de p et q), et posons $H = \langle x\rangle$: c'est un sous-groupe de G d'ordre p, distingué puisque G est commutatif. Alors le groupe G/H est de cardinal q, donc il contient un élément y d'ordre q (car q est premier ; en fait, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, donc tous ses éléments non nuls sont d'ordre q). Soit $z \in G$ tel que $s(z) = y$, où s est la surjection canonique de G dans G/H. Alors z est d'ordre q dans G et $x + z$ est d'ordre pq dans G.

On peut rédiger sans groupes quotients, mais on les introduit implicitement.

22. **RMS 2007 115 X MP**

(a) Soit des réels strictement positifs x, y et z tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 1$. Minorer $(x-1)(y-1)(z-1)$.

(b) Soit des entiers premiers p, q et r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Montrer que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{41}{42}$.

Solution. —

(a) L'hypothèse s'écrit $yz + xz + xy > xyz$. Alors

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy + yz + xz) + (x + y + z) - 1 > x + y + z - 1\,.$$

Si les nombres sont des entiers, on aura en fait $(x-1)(y-1)(z-1) \geqslant x + y + z$.

(b) Supposons sans perte de généralité que $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$. Alors
- il est impossible que $q = 2$, sinon $p = 2$ aussi, et la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ dépasse 1 ;
- il est impossible que $r = 3$, sinon p et r valent au plus 3 et la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ dépasse 1 ; par suite $r \geqslant 5$.

Alors $(p-1)(q-1)(r-1) \geqslant p + q + r \geqslant 2 + 3 + 5 = 10$. Il est alors impossible que $(p, q, r) = (2, 3, 5)$ car $(2-1)(3-1)(5-1) = 8 < 10$. On en déduit la discussion suivante :
- Ou bien $p = 2$ et $q = 3$ et $r \geqslant 7$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$.
- Ou bien $p = 2$ et $q \geqslant 5$, et alors $r \geqslant 5$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10} < \frac{41}{42}$.
- Ou bien $p \geqslant 3$, et alors $q \geqslant 3$ et $r \geqslant 5$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} < \frac{41}{42}$.

Remarque. — L'hypothèse de primalité de p, q et r est inutile. La première discussion se maintient quasiment à l'identique (on conclut que $r \geqslant 4$ au lieu de $r \geqslant 5$). Il est alors impossible que $(p, q, r) = (2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 3, 6)$ ou $(2, 4, 4)$, car les produits $(p-1)(q-1)(r-1)$ vaudraient respectivement 6, 8, 10, et 9, alors que les sommes $p + q + r$ vaudraient respectivement 9, 10, 11 et 10, ce qui contredirait l'inégalité de la première question. On en déduit la discussion suivante :
- Ou bien $p = 2$ et $q = 3$, et alors $r \geqslant 7$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$.
- Ou bien $p = 2$ et $q = 4$, et alors $r \geqslant 5$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}$.
- Ou bien $p = 2$ et $q \geqslant 5$, et alors $r \geqslant 5$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10} < \frac{41}{42}$.

– Ou bien $p \geqslant 3$, et alors $q \geqslant 3$ et $r \geqslant 4$, donc $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$.

23. **RMS 2007 117 X MP**

Soient des entiers k et n strictement positifs. Calculer $\prod_{z^{kn}=1, z^n \neq 1}(1-z)$.

Solution. — On commence par calculer $p_\ell = \prod_{z \in \mathbb{C}, z^\ell=1, z\neq 1}(1-z) = \prod_{z \in \mathcal{U}_\ell \setminus\{1\}}(1-z)$. Les nombres $1-z$ pour $z \in \mathcal{U}_\ell \setminus \{1\}$ sont les racines complexes du polynôme

$$Q_\ell = \frac{(1-X)^\ell - 1}{X} = (-1)^\ell X^{\ell-1} + \cdots + \frac{\ell(\ell-1)}{2} X - \ell\,.$$

En effet, le polynôme $(1-X)^\ell - 1$ admet zéro comme racine, donc est divisible par X, et, comme $z \neq 1$, aucun des $1-z$ considérés ici n'est égal à zéro : il faut donc bien retirer cette racine zéro en divisant par X. Le produit des racines de Q_ℓ vaut $p_\ell = \ell$. Alors le nombre demandé par l'énoncé vaut

$$\frac{p_{nk}}{p_n} = \frac{nk}{n} = k\,.$$

24. **RMS 2007 118 X MP**

(a) Soit des complexes z_1 et z_2, et u une racine carrée de z_1z_2. Calculer $\left|\frac{z_1+z_2}{2}+u\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2}-u\right|$.

(b) Calculer, pour z complexe, $|\cos(z)+1| + |\cos(z)-1|$ et $|\operatorname{ch}(z)+1| + |\operatorname{ch}(z)-1|$.

Solution. —

(a) Soit v_1 et v_2 des racines carrées complexes de z_1 et z_2 respectivement. Quitte à remplacer l'une d'elle par son opposé, on peut supposer que $u = v_1v_2$. Alors, grâce à l'identité du parallélogramme, on obtient

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2}+u\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2}-u\right| = \frac{1}{2}\left(|v_1+v_2|^2 + |v_1-v_2|^2\right) = |v_1|^2+|v_2|^2 = |z_1|+|z_2|.$$

(b) On applique cela avec $z_1 = e^{iz}$, $z_2 = e^{-iz}$, et donc $z_1z_2 = 1$, ce qui rend légitime le choix de $u = 1$. On trouve

$$|\cos(z)+1| + |\cos(z)-1| = |e^{iz}| + |e^{-iz}| = 2\operatorname{ch}(\operatorname{Im}(z))\,.$$

On applique ensuite l'identité avec $z_1 = e^z$, $z_2 = e^{-z}$, et donc $z_1z_2 = 1$, ce qui rend légitime le choix de $u = 1$. On trouve

$$|\operatorname{ch}(z)+1| + |\operatorname{ch}(z)-1| = |e^{z}| + |e^{-z}| = 2\operatorname{ch}(\operatorname{Re}(z))\,.$$

25. **RMS 2007 119 X MP**

(a) Soit f un automorphisme du corps des réels. A-t-on $e^{f(x)} = f(e^x)$ pour tout x réel ?

(b) Soit f un automorphisme du corps des complexes. A-t-on $e^{f(z)} = f(e^z)$ pour tout z complexe ?

Solution. — Les réponses sont respectivement oui et (oui ou non), car le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité, respectivement car il existe des automorphismes de corps de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas continus, sous réserve de l'axiome du choix. Détaillons cela.

(a) Comme f est un automorphisme de $\mathbb{R}$, alors
- Il est croissant : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$, puis si $x \leqslant y$, alors $y - x \geqslant 0$, donc $f(y-x) = f(y) - f(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \leqslant f(y)$.
- Il fixe $\mathbb{N}$, car $f(n) = f(1+1+\cdots+1) = f(1)+\cdots+f(1) = nf(1) = n$, puisque $f(1) = 1$.
- Il fixe $\mathbb{Z}$, car si n est un entier négatif, $f(n) = -f(-n) = -(-n) = n$.
- Il fixe $\mathbb{Q}$, car si $r = p/q$ est un rationnel quelconque avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$, alors $f(pr) = f(q) = q$ d'une part, et $f(pr) = f(p)f(r) = pf(r)$ d'autre part, donc $f(r) = p/q = r$.
- Il fixe $\mathbb{R}$, car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Si x est un réel quelconque, il existe deux suites (y_n) et (z_n) de rationnels, respectivement croissante et décroissante, qui convergent vers x. Comme f est croissant, l'encadrement $y_n \leqslant x \leqslant z_n$ implique $f(y_n) \leqslant f(x) \leqslant f(z_n)$, donc $y_n \leqslant f(x) \leqslant z_n$, et on conclut grâce au théorème d'encadrement.

Finalement f est l'identité de $\mathbb{R}$, et l'égalité $f(e^x) = e^{f(x)}$ est banale.

(b) Si f est continu, la réponse est positive car

$$f(e^z) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(f(z))^k}{k!}\right) = e^{f(z)}\,.$$

On peut remarquer que, si f est continu, alors f est soit l'identité, soit la conjugaison. Pour cela on constate que $-1 = f(-1) = f(i^2) = (f(i))^2$, donc que $f(i)$ peut prendre deux valeurs : i et $-i$. Par ailleurs, grâce à la même démonstration que pour la question (a), on montre que, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{Q}[i]$, on a $f(z) = x + f(i)y = x \pm iy$. En d'autres termes, l'automorphisme induit par f sur $\mathbb{Q}[i]$ est soit l'identité, soit la conjugaison de $\mathbb{Q}[i]$. Jusque là, la continuité de f n'a pas servi.

Comme $\mathbb{Q}[i]$ est dense dans $\mathbb{C}$ et comme f est continu, le résultat annoncé se déduit du raisonnement ci-dessus.

La construction d'un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ qui ne soit pas continu nécessite l'axiome du choix.

Analyse

26. **RMS 0000 000.2–000 X MP**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit (q_n) une suite injective telle que $\{q_n,\ n \in \mathbb{N}\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f(q_k)\,.$$

(a) Montrer que T est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur E.

(b) Montrer que $|||T||| = 2$. Est-elle atteinte ?

Solution. —

(a) Comme $|(-\frac{1}{2})^n f(q_n)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2^n}$, la série définissant $T(f)$ converge absolument, donc converge. De plus,

$$|T(f)| \underset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |f(q_n)| \underset{(2)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty\,.$$

La linéarité de T étant évidente, on en déduit que T est continue et que $|||T||| \leqslant 2$.

(b) Soit f_n la fonction affine par morceaux définie sur $[0,1]$ par $f_n(q_k) = (-1)^k$ pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, complétée par des valeurs arbitraires de $f(0)$ ou de $f(1)$ si jamais 0 ou 1 ne fait pas partie de $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. En particulier, $\|f_n\|_\infty = 1$. Alors

$$T(f_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (-1)^k + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + R_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + R_n = 2 - \frac{1}{2^n} + R_n\,,$$

où le reste R_n vérifie $|R_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2^k} = \frac{1}{2^n}$. Par suite, $T(f_n) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2^n}$. Comme par ailleurs, on sait que $T(f_n) \leqslant |||T|||\|f_n\|_\infty = 2$, on en déduit que

$$\lim T(f_n) = 2 \quad \text{avec} \quad \|f_n\|_\infty = 1, \quad \text{donc que} \quad |||T||| = 2\,.$$

Si $f \in E$ avec $\|f\|_\infty = 1$ réalisait l'égalité $|T(f)| = 2$, alors les deux inégalités numérotées (1) et (2) ci-dessus seraient des égalités. Or :

– L'inégalité triangulaire (1) est réalisée si et seulement si $f(q_n)$ est du signe de $(-1)^n$ pour tout n.

– L'inégalité (2) est réalisée si et seulement si $|f(q_n)| = \|f\|_\infty = 1$ pour tout n

Finalement, il faut que $f(q_n) = (-1)^n$. Supposons que $q_0 < q_1$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires dit que f s'annule en un $a \in]q_0, q_1[$. Comme f est continue en a, il existe un voisinage $V =]a-r, a+r[$ de a sur lequel $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Or les rationnels sont denses dans $[0,1]$, donc au moins un q_n est dans V, pour lequel $|f(q_n)| = 1 > \frac{1}{2}$: contradiction.

La norme subordonnée de T n'est donc pas atteinte.

27. **RMS 2002 52 X MP**

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$.

(a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f''\|_\infty$. Montrer que f est une norme sur E.

(b) La comparer avec $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et (E, N) sont-ils complets ?

Solution. —

(a) Soit $f \in E$. Alors $N(f) = 0$ si et seulement si $f'' = 0$, ou encore si et seulement si f est affine. La seule fonction affine sur $[0,1]$ qui est nulle aux extrémités du segment étant la fonction nulle, on a $f = 0$.
Le caractère positivement homogène de N et l'inégalité triangulaire sur N résultent de ce que ces propriétés sont vraies pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Finalement, N est une norme sur E.

(b) Soit $f \in E$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 en zéro donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |f(x)| \leqslant x|f'(0)| + \int_0^x (x-t)|f''(t)|\,\mathrm{d}t \ &\leqslant\ |f'(0)| + N(f)\int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t\,, \\ = |f'(0)| + N(f)\left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{t=0}^x &= |f'(0)| + N(f)\frac{x^2}{2} \leqslant |f'(0)| + \frac{N(f)}{2}\,. \end{aligned}$$

Il reste à majorer $|f'(0)|$: comme $f(0) = f(1)$ et comme f est dérivable sur $]0,1[$, le théorème de Rolle donne l'existence de $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f'(x) = f'(c) + \int_x^c f''(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f''(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

et on en déduit que $|f'(x)| \leqslant |x-c|N(f) \leqslant N(f)$. Il en résulte finalement que

$$\begin{aligned} \|f'\|_\infty &\leqslant N(f)\,, \\ \|f\|_\infty &\leqslant \frac{3}{2}N(f) \end{aligned}$$

Néanmoins, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes : pour le prouver, il suffit de trouver une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions de E bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et non bornée pour la norme N. C'est le cas de $f_n \colon x \mapsto x^n(1-x)$, qui vérifie manifestement $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$. La formule de Leibniz donne

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}(1-x) - 2nx^{n-1} = nx^{n-2}((n-1)(1-x) - 2x)\,.$$

En particulier $f_n''(1) = -2n$, donc $N(f_n) \geqslant 2n$, ce qui achève la comparaison entre ces deux normes.

(c) L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet. Pour le prouver, on choisit une suite de fonctions qui converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ vers la fonction f dont le graphe est le demi-cercle de centre $(1/2, 0)$ de rayon $1/2$ situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$: cette fonction n'étant pas dérivable en zéro ni en 1, elle n'appartient pas à E. Voici une possibilité pour f_n : son graphe est un arc de cercle centré en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n})$ passant par l'origine (donc de rayon légèrement plus grand que $\frac{1}{2}$), et voici l'expression de f :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) &= -\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,, \\ \forall x \in [0,1], \quad f(x) &= \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

On pose $a_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}$ et $b_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}$. Comme f_n est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a_n, b_n[$ qui contient $[0,1]$, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Par construction, $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Finalement $f_n \in E$.
Il reste à vérifier que (f_n) est de Cauchy. On utilise pour cela l'inégalité triangulaire puis l'implication $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b-a}$ dans le calcul qui suit : pour tout $x \in [0,1]$, et tout $(n,p) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant p$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_p(x)| &= \left| -\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{p} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{p^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \right|\,, \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}} \leqslant \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|f_n - f_p\|_\infty \leqslant 3/n$, ce qui montre que (f_n) est de Cauchy, et achève la preuve

L'espace vectoriel normé (E,N) est complet. Soit (f_n) une suite de fonctions de E qui est de Cauchy pour la norme N. Alors (f_n'') est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc elle converge (uniformément) sur $[0,1]$ vers une fonction continue, notée h.

Les inégalités $\forall f\in E,\ \|f'\|_\infty\leqslant N(f)$ et $\|f\|_\infty\leqslant \frac{3}{2}N(f)$ montrent que les suites (f_n') et (f_n) sont de Cauchy pour la norme uniforme, donc convergent simplement, vers des fonctions respectivement notées g et f respectivement. Un théorème du cours assure alors que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $g'=h$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'=g$, donc que f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f''=h$.

On note ensuite que $f_n(0)=f_n(1)=0$ car $f_n\in E$ pour tout n, donc que $f(0)=f(1)=0$ puisque (f_n) converge simplement vers f. Cela achève la preuve de ce que $f\in E$, puis l'égalité $N(f_n-f)=\|f_n''-f''\|_\infty=\|f_n''-h\|_\infty$ montre que la suite (f_n) converge vers f pour la norme N, ce qui prouve que (E,N) est complet.

28. **RMS 2007 120 X MP**

Calculer $\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}-\frac{1}{7\times 8}+\cdots$

Solution. — Il s'agit d'étudier la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$. Elle converge par le théorème spécial des séries alternées. Une décomposition en éléments simples fournit $\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$. Si S_n désigne la somme partielle d'ordre n de la série, et si $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ désigne le nombre harmonique d'ordre n, on a

$$S_n=\sum_{k=0}^n(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Or on sait que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}$, et on constate que la série du membre de droite converge aussi pour $x=1$, grâce au théorème spécial des séries alternées. Le théorème de convergence radiale d'Abel (qui n'est pas au programme de MP) affirme alors que la somme de la série entière correspondante est continue en 1. En particulier $\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k+1}$. Le candidat devra soit démontrer ce résultat (grâce à une transformation d'Abel), ou utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour prouver directement que $\ln 2$ est la somme de la série de Taylor en zéro de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ au point 1.

Il adoptera la même démarche pour calculer la somme $\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}$: en effet, on sait que $\arctan x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ pour tout $x\in]-1,1[$, et on constate que la série du membre de droite de cette égalité converge aussi pour $x=1$. On en déduit que $\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. Par suite,

$$\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}-\frac{1}{7\times 8}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

29. **RMS 2007 233 X MP**

Soit f $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer une constante absolue $C>0$ telle que $\int_0^{+\infty}g^2\leqslant C\int_0^{+\infty}f^2$.
Indication : poser $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et trouver une équation différentielle satisfaite par g faisant intervenir f.

Solution. — Par définition $g(x)=\frac{F(x)}{x}$ pour $x>0$, et il faut comprendre que g se prolonge par continuité en zéro par la valeur $g(0)=f(0)$ (pour cela, majorer à la main $|g(x)-f(0)|$).
La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}_+$, et dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{F(x)}{x^2}=\frac{f(x)-g(x)}{x},\quad\text{ou encore}\quad g(x)=f(x)-xg'(x)\,.$$

Il est possible que g ne soit pas dérivable en zéro, comme le montre l'exemple de f dont la restriction à $[0,1]$ est la racine carrée, complétée de façon que f^2 soit intégrable. Dans ce cas, $g(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}$ pour tout $x\in[0,1]$, et g n'est pas dérivable en zéro.

On fixe alors un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et on intègre par parties $t\mapsto tg'(t)g(t)$:

$$\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b[f(t)-tg'(t)]g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b tg'(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[tg^2(t)\right]_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t=2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-\left[tg^2(t)\right]_a^b\leqslant 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t+ag(a)^2\,.$$

On fait ensuite tendre a vers zéro, ce qui est possible car g est continue (toute référence à g' ayant disparu), et on applique l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$\int_0^b g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Si on écarte le cas banal où f est identiquement nulle, alors g n'est pas identiquement nulle. Par suite, si b est assez grand, on peut simplifier par le nombre non nul $\sqrt{\int_0^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$, puis élever au carré pour obtenir

$$\int_0^b g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

ce qui montre, d'une part, que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et d'autre part, que $\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$. La constante $C=4$ convient.

Remarque. — On peut se demander si 4 est la meilleure constante possible. On cherche pour cela les fonctions susceptibles de réaliser l'égalité : ce sont vraisemblablement celles pour lesquelles l'inégalité de Cauchy et Schwarz utilisée ci-dessus est une égalité, c'est-à-dire les fonctions f telles que f et g sont proportionnelles. En résolvant l'équation différentielle correspondante, on trouve f de la forme $t\mapsto t^\lambda$. Encore faut-il que f soit continue sur $\mathbb{R}_+$ et que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
C'est pourquoi on étudie la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^\alpha} & \text{si } x\geqslant 1,\\ 1 & \text{si } 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

où α est un nombre $>\frac12$ (et différent de 1 pour éviter de faire deux cas dans les calculs de $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$). Alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\alpha}}=1+\frac{1}{2\alpha-1}=\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\cdot$$

Pour $x\in[0,1]$, on a $g(x)=1$, et pour $x\geqslant 1$, on a $g(x)=\frac1x(\int_0^1\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha})=\frac1x+\frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{x(1-\alpha)}=\frac{1}{1-\alpha}(-\alpha x^{-1}+x^{-\alpha})$. Par suite, le dernier résultat étant donné tous calculs faits :

$$\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t=1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\int_1^{+\infty}\left(\alpha^2t^{-2}+t^{-2\alpha}-2\alpha t^{-\alpha-1}\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(\alpha^2+\frac{1}{2\alpha-1}-2\right)=\frac{4\alpha+2}{2\alpha-1}\cdot$$

On cherche quelles sont les constantes C telles que $\frac{4\alpha+2}{2\alpha-1}\leqslant C\frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ pour tout $\alpha>\frac12$ et différent de 1, ou encore telles que $2\alpha+1<C\alpha$, ou encore telles que

$$\forall\alpha\in\left]\frac12,+\infty\right[\setminus\{1\},\quad C\geqslant\frac1\alpha+2\,.$$

Cela implique $C\geqslant 4$, et on a prouvé que 4 est la meilleure constante possible.

30. **RMS 2007 235 X MP**

Pour x réel, on pose si possible $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{it^x}\,\mathrm{d}t$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Étudier la continuité de f.

(c) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Solution. —

(a) Si $x=0$, alors e^{it^x} est une constante non nulle, donc $0\notin D_f$.

Soit alors $x\neq 0$. On effectue le changement de variable $u=t^x$ sur un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$, pour lequel $t=u^{\frac1x}$ et $\mathrm{d}t=\frac1x u^{\frac1x-1}$. Alors

$$\int_a^b e^{it^x}\,\mathrm{d}t=\frac1x\int_{a^x}^{b^x} u^{\frac1x-1}e^{iu}\,\mathrm{d}u$$

Si $x<0$, alors b^x tend vers zéro quand b tend vers $+\infty$ et, pour u tendant vers 0^+ :

$$u^{\frac1x-1}e^{iu}\sim\frac{1}{u^\alpha}\quad\text{avec}\quad\alpha=1-\frac1x>1.$$

Alors l'intégrale $\int_{[1,+\infty[} e^{it^x}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $x\notin D_f$.

Si $x>0$, alors a^x tend vers zéro quand a tend vers zéro et, pour u tendant vers 0^+ :

$$u^{\frac{1}{x}-1}e^{iu}\sim\frac{1}{u^\alpha}\quad\text{avec}\quad\alpha=1-\frac{1}{x}<1.$$

Alors l'intégrale $\int_{]0,1]}e^{it^x}\,\mathrm{d}t$ converge, et il reste à étudier $\int_{[1,+\infty[}e^{it^x}\,\mathrm{d}t$.
Si $0<x\leqslant 1$, on pose $\beta=\frac{1}{x}-1\geqslant 0$, donc $u^\beta\geqslant 1$, et on minore $\int_{u_k}^{v_k}\mathrm{Re}(e^{it^x})\,\mathrm{d}t$, où (u_k) et (v_k) sont deux suites qui divergent vers $+\infty$ avec $u_k<v_k$, données par $u_k=(2k\pi-\pi/4)^{1/x}$ et $v_k=(2k\pi+\pi/4)^{1/x}$:

$$\int_{(2k\pi-\frac{\pi}{4})^{1/x}}^{(2k\pi+\frac{\pi}{4})^{1/x}}\mathrm{Re}(e^{it^x})\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_{2k\pi-\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}u^\beta\cos(u)\,\mathrm{d}u\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2x}=\text{constante}>0.$$

Cette minoration prouve la divergence de $\int_{[1,+\infty[}e^{it^x}\,\mathrm{d}t$, en contredisant le critère de Cauchy.
Si $x>1$, on utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^b e^{it^x}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_1^{b^x}u^{\frac{1}{x}-1}e^{iu}\,\mathrm{d}u&=\frac{1}{ix}\left[u^{\frac{1}{x}-1}e^{iu}\right]_1^{b^x}-\frac{1}{ix}\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{b^x}u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}\,\mathrm{d}u,\\&=\frac{b^{1-x}e^{ib^x}}{ix}-\frac{1}{ix}-\frac{1}{ix}\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{b^x}u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

L'équivalent (au voisinage de $+\infty$) $|u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}|\sim\frac{1}{x^\gamma}$ avec $\gamma=2-\frac{1}{x}>1$ montre que l'intégrale ci-dessus est absolument convergente. Par ailleurs, $b^{1-x}e^{ib^x}$ tend vers zéro quand b tend $+\infty$, ce qui achève de prouver la convergence de $\int_{[1,+\infty[}e^{it^x}\,\mathrm{d}t$, et on conclut que

$$D_f=]1,+\infty[,\quad\text{avec}\quad\forall x\in D_f,\quad f(x)=\int_0^1e^{it^x}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{ix}\left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\int_1^{+\infty}u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}\,\mathrm{d}u\right].$$

(b) La continuité de $(x,t)\mapsto e^{it^x}$ pour t appartenant au segment $[0,1]$ et $x\in D_f$ montre que $x\mapsto\int_0^1e^{it^x}\,\mathrm{d}t$ est continue.
Fixons $a>1$ et $\gamma=2-\frac{1}{a}$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a $2-\frac{1}{x}>\gamma>1$, et la domination

$$\forall(x,u)\in[a,+\infty[\times[1,+\infty[,\quad|u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}|\leqslant\varphi(u):=\frac{1}{u^\gamma}$$

montre la continuité de $x\mapsto\int_1^{+\infty}u^{\frac{1}{x}-2}e^{iu}\,\mathrm{d}u$ sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai quel que soit a, on en déduit la continuité de la même intégrale sur D_f, et finalement, la continuité de f sur D_f.

(c) ? ? à terminer

31. **RMS 2009 304 X MP**
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ xf'(x)+f(x)\in[a,b]$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\in[a,b]$.

SOLUTION. — Soit $g\colon x\in\mathbb{R}\mapsto xf(x)$. L'hypothèse est que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)\in[a,b]\,.$$

En intégrant ce encadrement sur $[0,t]$ avec $t>0$, on obtient $at\leqslant g(t)-g(0)\leqslant bt$. Comme $g(0)=0$ et $t>0$, on obtient après simplification par t :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad a\leqslant f(t)\leqslant b\,.$$

Si $t<0$, il faut intégrer sur $[t,0]$ pour obtenir $-at\leqslant g(0)-g(t)\leqslant -bt$. La simplification par le nombre strictement positif $-t$ donne le même encadrement de $f(t)$ que ci-dessus.
Enfin, si $t=0$, l'encadrement $a\leqslant f(0)\leqslant b$ est obtenu par passage à la limite puisque f est continue.

32. **RMS 2009 309 X MP**
Soit $f\colon(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}$. La fonction f est-elle continue, différentiable, de classe C^2 ?

SOLUTION. — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles sont symétriques en x et y, et il en est de même de f.
– Continuité. Comme $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n^2}$, la série $\sum_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

– Classe $\mathcal{C}^1$. On calcule $\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)=-2nxf_n(x)=-2\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}h_n(x)e^{-ny^2}$, où h_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto xe^{-nx^2}$. On en déduit que $\|\frac{\partial f_n}{\partial x}\|_\infty=2\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\|h_n\|_\infty$. Une étude rapide de h_n [impaire, avec $h_n'\colon x\in\mathbb{R}\mapsto(1-2nx^2)e^{-nx^2}$ s'annulant sur $\mathbb{R}_+$ en $x=1/\sqrt{2n}$ seulement] montre que $\|h_n\|_\infty=(2en)^{-1/2}$, donc que $\|\frac{\partial f_n}{\partial x}\|_\infty\sim cn^{-3/2}$, où c est une constante strictement positive. Par suite, la série des dérivées partielles $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\partial f_n}{\partial x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge au moins simplement, cela prouve que f est dérivable par rapport à x et que $\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial f_n}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. La symétrie de f achève de prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

– Classe C^2. On montre que f n'admet pas de dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ en calculant le taux d'accroissement

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \tau(x)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}e^{-nx^2}\ .$$

Fixons $N\in\mathbb{N}^*$. Alors $\tau(x)\leqslant S_N(x):=-2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}e^{-nx^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. La somme partielle S_N admet la limite $L_N:=-2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$ quand x tend vers zéro. Si τ possède une limite ℓ en zéro, elle doit vérifier $\ell\leqslant L_N$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Or la série de terme général $-2\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$ diverge vers $-\infty$, donc $\ell=-\infty$ nécessairement, ce qui achève la preuve.

33. **RMS 2009 310 X MP**

Soient $n\in\mathbb{N}$ impair et $\Phi\colon\mathbb{R}\to\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ \Phi'(t)\notin\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solution. — On dispose par hypothèse de l'identité de fonctions ${}^t\Phi\Phi=I_n$. En dérivant, ce qui est possible, on obtient ${}^t\Phi'\Phi=-\,{}^t\Phi\Phi'$. En prenant les déterminants des deux membres, on obtient, compte tenu du fait que la dérivée commute à la transposition et que le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, $\det(\Phi')\det(\Phi)=(-1)^n\det(\Phi)\det(\Phi')=-\det(\Phi)\det(\Phi')$ car n est impair. Par suite, $\det(\Phi')\det(\Phi)=0$, et comme Φ est à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\det(\Phi)$ ne s'annule jamais, donc que $\det(\Phi')$ est identiquement nul, ce qui achève la preuve.

34. **RMS 2009 311 X MP**

Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, dont les fonctions composantes sont notées f_i. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la jacobienne de f en x est symétrique.
(ii) Il existe $\varphi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=f_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.

Solution. —
(i)⇒(ii) Analyse. Si φ existe alors, on dispose de la somme télescopique suivante, où une seule variable est modifiée dans chaque terme, ce qui permet d'écrire chaque terme comme une intégrale d'une dérivée partielle :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,\dots,x_n)-\varphi(0,\dots,0)&=\sum_{i=1}^{n}\Big[\varphi(x_1,\dots,x_i,0,\dots,0)-\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},0,\dots,0)\Big]\,,\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},t,0,\dots,0)\,\mathrm{d}t\,,\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}f_i(x_1,\dots,x_{i-1},t,0,\dots,0)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

À une constante additive près, il faut donc que $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}f_i(x_1,\dots,x_{i-1},t,0,\dots,0)\,dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

Synthèse. Il reste à voir que la fonction φ définie ci-dessus est de classe C^2, car le fait qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=f_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ est banal.

(ii)⇒(i). La fonction φ satisfait les hypothèses du théorème de Schwarz, donc $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}$ pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, c'est-à-dire que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$. En d'autres termes, la jacobienne de f est symétrique sur $\mathbb{R}^n$.
? ? à terminer

35. **RMS 2009 314 X MP**

Soit $\Phi\colon M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto(\operatorname{tr}M,\operatorname{tr}M^2,\dots,\operatorname{tr}M^n)$.

(a) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est différentiable en M et calculer sa différentielle.
(b) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}\mathrm{d}\Phi(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
(c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. —

(a) On pose $f_p : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^p$ pour tout nombre entier $p \geqslant 1$. Pour toutes M et H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$f_p(M+H) = (M+H)^p = M^p + \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i} + \mathrm{o}(H)\,,$$

donc f_p est différentiable en M avec $\mathrm{d}f_p(M)\colon H \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}$. Comme la trace est linéaire, et comme on dispose de la relation $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n, on en déduit que $\operatorname{tr} \circ f_p$ est différentiable en M avec $\mathrm{d}(\operatorname{tr} \circ f_p)(M)\colon H \mapsto \operatorname{tr}(\mathrm{d}f_p(M)(H)) = p \operatorname{tr}(M^{p-1}H)$. On en déduit que Φ est différentiable en M avec

$$\mathrm{d}\Phi(M)\colon H \mapsto \big(\operatorname{tr} H, 2 \operatorname{tr} MH, \dots, n \operatorname{tr} M^{n-1}H\big)\ .$$

(b) ? ? à terminer

(c) ? ? à terminer

Géométrie

36. **RMS 2011 251 X MP**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des points formant un polygone régulier sur le cercle unité. Soient $x \in \mathbb{R}$ et P le point de (OA_n) défini par $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA_n}$. Montrer que $PA_1 \times \cdots \times PA_n = |1 - x^n|$.

Solution. — Soit Q le polynôme $X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{2ik\pi/n})$. On choisit une base du plan telle que l'affixe de A_k soit $e^{2ik\pi/n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors l'affixe de P est x et la distance entre P et A_k vaut $|x - e^{2ik\pi/n}|$. Par conséquent,

$$PA_1 \times \cdots \times PA_n = \prod_{k=1}^n \left| x - e^{2ik\pi/n} \right| = |Q(x)| = |1 - x^n|\,.$$

X ESPCI PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

37. **RMS 2009 331 X ESPCI PC**
Soient E un ensemble de cardinal n et $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de parties $X\in\mathcal{P}(E)$ telles que $A\cap X=B$.

Solution. — On désigne par $|Y|$ le cardinal d'un ensemble fini Y, et par $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble de ses parties.

S'il existe X comme dans l'énoncé, alors $B\subset A$. Réciproquement, si $B\subset A$, alors $X=B$ est une telle partie. On déduit de cette étude la disjonction suivante.
- Ou bien $B\not\subset A$. Le nombre cherché est zéro.
- Ou bien $B\subset A$. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des parties satisfaisant la condition de l'énoncé. Alors l'application φ de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{P}(E\setminus A)$ définie par $\varphi(X)=X\setminus B$ est une bijection, dont l'application $\psi:\mathcal{P}(E\setminus A)\to\mathcal{X}$, définie par $\psi(Y)=Y\cup B$, constitue la bijection réciproque (en d'autres termes, une partie X convient si et seulement si elle est formée par l'ajout à B d'un nombre quelconque d'éléments de E n'appartenant pas à A). Il en résulte que le nombre cherché est
$$|\mathcal{P}\left(E\setminus A\right)|=2^{|E|-|A|}.$$

38. **RMS 2010 289 X ESPCI PC**
Soit E un ensemble. Si $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$, on pose $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Soient $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3$ tel que $A\Delta B=A\Delta C$. Est-il vrai que $B=C$?

Solution. — La réponse est oui.

On constate que $A\Delta B$ est aussi égal à $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, forme qu'on utilisera librement dans la suite. Compte-tenu de la symétrie des rôles de B et C, il suffit de démontrer que $B\subset C$. Soit donc $x\in B$. De deux choses l'une.
- Ou bien $x\in A$, donc $x\in A\cap B$, donc $x\notin A\Delta B$, donc $x\notin A\Delta C=(A\cup C)\setminus(A\cap C)$; comme x est dans A, il est dans $A\cup C$, donc il est nécessairement dans $A\cap C$ et en particulier, $x\in C$.
- Ou bien $x\notin A$, donc $x\in B\setminus A$, donc $x\in A\Delta B$, donc $x\in A\Delta C=(A\setminus C)\cup(C\setminus A)$; comme x n'est pas dans A, il est nécessairement dans $C\setminus A$ et en particulier, $x\in C$.

Groupes, anneaux, corps

39. **RMS 2010 291 X ESPCI PC**
   (a) Montrer que $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^3,+)$ ne sont pas isomorphes.
   (b) Soit $U=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Montrer que les groupes $(U,\times)$ et $(\mathbb{R},+)$ ne sont pas isomorphes.
   (c) Montrer que les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{R},+)$ ne sont pas isomorphes.

Solution. — On donne à chaque fois une raison globale et une démonstration plus technique.

   (a) Il n'y a pas de surjection linéaire d'un espace de dimension 1 dans un espace de dimension 3.
   Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}^3,+)$ et soit $a=f(1)$. Alors $f(n)=na$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, d'après les propriétés d'un morphisme de groupe. En particulier, l'image de f est contenue dans la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par a. Comme $\mathbb{Z}^3$ contient trois vecteurs formant une famille libre, il est impossible que f soit surjective, donc il n'y a pas d'isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^3,+)$.
   (b) Le cercle unité U contient des sous-groupes cycliques (formés par les racines de l'unité) alors que $(\mathbb{R},+)$ n'en contient pas.
   Soit f un morphisme de groupes de $(U,\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$ et soit $\zeta=e^{i\pi}$ et $x=f(\zeta)$. Comme $\zeta^2=1$, et comme morphisme de groupes transforme le neutre du groupe de départ en le neutre du groupe d'arrivée, on a $f(\zeta^2)=2f(\zeta)=0$, donc $f(\zeta)=0$, donc f n'est pas injectif, donc il n'y a pas d'isomorphisme de groupes entre $(U,\times)$ et $(\mathbb{R},+)$.
   (c) Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas le même cardinal, donc ils ne peuvent pas être en bijection.
   Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$. Les propriétés des morphismes de groupes montrent que $f(r)=rf(1)$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$. De deux choses l'une.
   - Ou bien $f(1)\in\mathbb{Q}$, et alors $f(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$, et f n'est pas surjectif (on sait qu'il existe des nombres réels irrationnels).
   - Ou bien $f(1)\notin\mathbb{Q}$, et alors $f(\mathbb{Q})\cap\mathbb{Q}=\{0\}$, et f n'est pas non plus surjectif.

   Par suite, f n'est pas un isomorphisme.

40. **RMS 2010 292 X ESPCI PC**

(a) Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?

(b) Quels sont les automorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$?

Solution. —

(a) Le cours affirme que ce sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

(b) Analyse. Si f est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$, et si l'on pose $a = f(1)$, alors $f(\mathbb{Z}) = a\mathbb{Z}$. Pour que f soit une bijection il faut que $a\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, donc que $a = \pm 1$.
Synthèse. Si $a = 1$, alors f est l'identité, qui est bien un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $a = -1$, alors $f = -\mathrm{id}$, qui est aussi un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$.

41. **RMS 2010 293 X ESPCI PC**

(a) Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

(b) Un groupe peut-il être isomorphe à l'un de ses sous-groupes stricts ?

(c) Un espace vectoriel peut-il être isomorphe à l'un de ses sous-espaces vectoriels stricts ?

Solution. —

(a) Non : si f est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, alors $f(x) = f(x/2 + x/2) = [f(x/2)]^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f n'est pas surjectif.

(b) et (c) Oui : on répond à la question (c), qui fournit du même coup un exemple pour la question (b) puisqu'un isomorphisme d'espaces vectoriels est en particulier un isomorphisme de groupes additifs. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et F le sous-espace vectoriel strict de E formé des polynômes de terme constant nul. Alors $f\colon P \mapsto XP$ est un isomorphisme de E sur F.

42. **RMS 2009 332 X ESPCI PC**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que :

$$\forall (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n, \quad \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < 1 \Longrightarrow \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < 1 - \varepsilon_n \,.$$

Solution. — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'ensemble des $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} < 1$ et par B_n l'ensemble des valeurs $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n}$ lorsque $(k_1, \dots, k_n) \in A_n$. Comme B_n est majoré par 1, on a $\sup(B_n) \leqslant 1$, et le but de l'exercice est de montrer que

$$\sup(B_n) < 1 \,.$$

Pour cela, on raisonne par récurrence sur n.
Il est clair que $A_1 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, que $B_1 = \{\frac{1}{k},\ k \in A_n\}$, donc que $\sup(B_1) = \max(B_1) = \frac{1}{2}$, et tout $\varepsilon_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ convient.
Supposons que, pour $n \geqslant 2$, on ait $\sup(B_{n-1}) < 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sup(B_n) = 1$. Il existe alors une suite $(k_{1,p}, \dots, k_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A_n telle que

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{k_{1,p}} + \cdots + \frac{1}{k_{n,p}} \right) = 1 \,.$$

Au moins une des suites composantes $(k_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, sinon l'ensemble des valeurs $\frac{1}{k_{1,p}} + \cdots + \frac{1}{k_{n,p}}$ serait fini, admettrait donc un maximum strictement plus petit que 1, et la limite ci-dessus serait impossible. Quitte à permuter l'ordre des composantes (ce qui ne change pas la valeur de la somme $\frac{1}{k_{1,p}} + \cdots + \frac{1}{k_{n,p}}$), on peut supposer que $(k_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Comme il s'agit de nombres positifs, il existe une suite extraite $(k_{n,\phi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$. Alors

$$(k_{1,\phi(p)}, \dots, k_{n-1,\phi(p)}) \in A_{n-1} \,,$$

et, comme $\frac{1}{k_{n,\phi(p)}}$ tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$,

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{k_{1,\phi(p)}} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1,\phi(p)}} \right) = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{k_{1,\phi(p)}} + \cdots + \frac{1}{k_{n,\phi(p)}} \right) = 1 \,.$$

On en déduit que $\sup(B_{n-1}) = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Remarque. — Le calcul exact de $s_n = \sup(B_n)$ n'est pas facile. On a prouvé que $s_1 = \frac{1}{2}$, il est assez clair que $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Il faut un peu de réflexion pour établir que $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$. On peut ensuite prouver que $s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{25} = \frac{599}{600}$, en utilisant les procédures Maple suivantes. Est-il vrai que s_n est toujours de la forme $\frac{r_n - 1}{r_n}$ pour un entier r_n ?

```
m := proc(n, p)
local e, i, j, k, L, 2;
option remember;
if n = 1
   then [seq([1/j], j = 2 .. p)]
   else resultat := [];
            for L in m(n-1, p) do
                  k := convert(L, ‘+‘);
                  for j from max(1/L[n-1], 1+floor(1/(1-k))) to p do
                        resultat := [op(resultat), [op(L), 1/j]]
                  end do
            end do
end if
end proc;
```

```
sommes := proc(n, p)
local s, L, M;
s := [0];
M := {};
for L in m(n, p) do
     if max(op(s)) <= convert(L, ‘+‘) then s := [op(s), convert(L, ‘+‘)]; M := [op(M), L] end if
end do;
subsop(1 = NULL, s), M
end proc;
```

43. **RMS 2009 333 X ESPCI PC**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\Gamma_{a,b} = \{pa + qb,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\Gamma_{a,b}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit discret.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

On vérifie aisément que $\Gamma_{a,b}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

On "sait" que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit discrets et de la forme $x\mathbb{Z}$ pour un unique réel $x \geqslant 0$, soit denses. Montrons donc que :

$$\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad \Gamma_{a,b} = x\mathbb{Z} \iff \left(a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*\right).$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Le nombre $a \in \Gamma_{a,b}$ donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = nx$. De même, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b = mx$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors x, m et n sont non nuls et $\frac{b}{a} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $a = 0$, alors $\Gamma_{a,b} = b\mathbb{Z}$ et, si $b = 0$, alors $\Gamma_{a,b} = a\mathbb{Z}$. Ils sont discrets.

Il reste le cas où

$$a \neq 0, \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{m}{n} \quad \text{avec} \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad m \wedge n = 1\,.$$

Posons $x = a/n$ (alors $a = nx$ et $b = mx$) et montrons que $\Gamma_{a,b} = x\mathbb{Z}$.

Première inclusion. Soit $y \in \Gamma_{a,b}$ et p, q tels que $y = pa + qb$. On écrit $y = pa + q\left(a\frac{m}{n}\right) = x\,(np + mq) \in x\mathbb{Z}$ puisque $n, p, m, q \in \mathbb{Z}$.

Inclusion réciproque. Soit $z \in x\mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = kx$. Le théorème de Bezout donne $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 = nu + mv$. On peut alors écrire que $z = kx \times 1 = kx\,(nu + mv) = (ku)\,a + (kv)\,b \in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \Gamma_{a,b}$.

Arithmétique

44. **RMS 2010 290 X ESPCI PC**

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers $\leqslant n$.

(a) Soient n et m distincts dans $\mathbb{N}$. Montrer que $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.

(b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 2,\ P(n) \geqslant c\ln(\ln n) + d$.

Solution. —

(a) Le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ est le n-ième nombre de Fermat. On suppose $n > m$ et on pose $k = 2^{n-m}$: c'est un nombre pair car $n > m$. Soit d un diviseur positif commun de F_n et F_m. Comme

$$F_n = 2^{2^m \times 2^{n-m}} + 1 = (F_m - 1)^k + 1 = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (-1)^{k-p} F_m^p + (-1)^k + 1 = aF_m + 2$$

pour un certain entier relatif a (qui vaut $\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}(-1)^{k-p}F_m^{p-1}$), on en déduit que d, divisant F_n et F_m, doit diviser 2. Mais $d=2$ est impossible car F_n et F_m sont impairs, donc $d=1$, donc F_n et F_m sont premiers entre eux.

(b) Soit n un entier $\geqslant 3$. On note A_n l'ensemble des indices $m\in\mathbb{N}$ tels que $F_m\leqslant n$, et r le cardinal de A_n, qui est aussi le maximum de A_n. Les F_m pour $m\in A_n$ étant premiers entre eux, ils contiennent au moins r facteurs premiers distincts, qui sont nécessairement $\leqslant n$. On en déduit que $P(n)\geqslant r$, qui est le plus grand entier tel que $2^{2^r}+1\leqslant n$.

Soit s le plus grand entier tel que $2^{2^s}\leqslant n$. Si n n'est pas de la forme 2^k où k est une puissance de 2, alors $r=s$, et sinon, alors $r=s-1$. Dans les deux cas, $P(n)\geqslant r\geqslant s-1$.

Or $2^{2^s}\leqslant n$ équivaut à $s\leqslant \log_2(\log_2 n)$. Comme on sait que $\log_2 = c\ln$ avec $c=1/\ln 2$, cela équivaut encore à encore à $s\leqslant c\ln(\ln n)+e$, avec $e=c\ln c$. Par suite,

$$\forall n\geqslant 2,\quad P(n)\geqslant \lfloor c\ln(\ln n)+e\rfloor -1\geqslant c\ln(\ln n)+d$$

avec $c=1/\ln 2\approx 1,44$ et $d=c\ln c-2\approx -1,47$ (la relation $d=e-2$ vient, d'une part, de ce que $r\geqslant s-1$, et d'autre part, de ce que $\lfloor x\rfloor\geqslant x-1$ pour tout réel x).

Remarque. — Cette minoration est très en deçà de l'équivalent $P(n)\sim n/\ln n$ donné par Hadamard et La Vallée-Poussin en 1896.

45. **RMS 2012 268 X ESPCI PC**

(a) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de 2^p.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.

(c) Déterminer les $n\in\mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs.

Solution. —

(a) Les diviseurs de 2^p sont les 2^k pour $k\in[\![0,p]\!]$. Il sont au nombre de $p+1$.

(b) Si la décomposition de n en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^{r}p_j^{\alpha_j}$, les diviseurs de n sont les $\prod_{j=1}^{r}p_j^{\beta_j}$ avec $\beta_j\in[\![0,\alpha_j]\!]$ pour tout j. La fonction

$$(\beta_1,\dots,\beta_r)\in\prod_{j=1}^{r}[\![0,\alpha_j]\!]\mapsto\prod_{j=1}^{r}p_j^{\beta_j}$$

est une bijection sur l'ensemble des diviseurs de n, qui possède donc $\prod_{j=1}^{r}(1+\alpha_j)$ éléments.

(c) Un produit d'entiers étant impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs, on déduit de la question précédente que les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ recherchés sont ceux tels que α_j est pair pour tout j, c'est-à-dire les carrés.

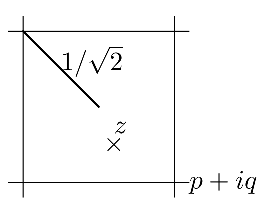
Nombres complexes, polynômes

46. **RMS 2012 269 X ESPCI PC**

Soient (a,b) et $(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$. Montrer qu'il existe $(p,q,r,s)\in\mathbb{Z}^4$ tel que $a+ib=(c+id)(p+iq)+r+is$ et $r^2+s^2<c^2+d^2$.

Solution. — Il s'agit de démontrer que l'anneau $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est euclidien. On confond, dans la rédaction qui suit, les nombres complexes et leurs images dans le plan euclidien.

On considère le nombre complexe $z=(a+ib)/(c+id)$ qu'on écrit $u+iv$ avec $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, et l'on pose $m=\lfloor u\rfloor$ et $n=\lfloor v\rfloor$. Alors z est dans le carré dont les sommets sont les points $m+in$, $(m+1)+in$, $m+i(n+1)$ et $(m+1)+i(n+1)$.



Au moins un de ces quatre points est à une distance de z inférieure ou égale à $1/\sqrt{2}$, qui est la distance d'un sommet de ce carré à son centre. On en choisit un, qu'on note $p+iq$. En multipliant l'inégalité $|z-(p+iq)|\leqslant 1/\sqrt{2}$ par $(c+id)$, on obtient

$$|(a+ib)-(c+id)(p+iq)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}|c+id|.$$

Comme $(a,b,c,d,p,q)\in\mathbb{Z}^6$, le nombre $r+is:=(a+ib)-(c+id)(p+iq)$ vérifie $(r,s)\in\mathbb{Z}^2$, et l'inégalité ci-dessus montre que $|r+is|<|c+id|$, ce qui achève la preuve.

47. **RMS 2009 334 X ESPCI PC**

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe 1, z et $1+z^2$ sont alignés.

Solution. — On utilise la condition suivante, pour trois nombres complexes a, b et c deux à deux distincts : les points d'affixe a, b, c sont alignés si et seulement si $b-a$ et $c-a$ ont le même argument modulo π, ou encore si et seulement si $\operatorname{Im}(\frac{b-a}{c-a})=0$.
Si z est réel, il est clair que les trois points sont alignés.
Supposons maintenant que z n'est pas réel. Posons $Z=\frac{z-1}{z^2}$. Les trois points sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}(Z)=0$, ou encore $Z=\overline{Z}$. Voici la résolution :

$$Z=\overline{Z} \iff \overline{z}^2(z-1)=z^2(\overline{z}-1) \iff |z|^2\overline{z}-\overline{z}^2=|z|^2z-z^2 \iff z^2-\overline{z}^2=|z|^2(z-\overline{z}) \iff z+\overline{z}=|z|^2\,,$$

puisqu'on peut simplifier par $z-\overline{z}$, attendu que z n'est pas réel. En écrivant $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on obtient $2x=x^2+y^2$, ou encore $(x-1)^2+y^2=1$: c'est l'équation du cercle C de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1. Finalement, les points sont alignés si et seulement si

$$z\in\mathbb{R}\cup C\,.$$

Remarque. — Si $z\in\mathbb{R}$, les points sont alignés sur la droite réelle. Si z décrit C, on peut l'écrire $z=1+e^{i\theta}=2e^{i\theta/2}\cos\theta/2$ avec θ réel, et alors le point

$$1+z^2=1+4e^{i\theta}\cos^2\theta/2=1+2(1+\cos\theta)e^{i\theta}$$

décrit une cardioïde dont l'axe est Ox et dont le sommet est le point d'abscisse 1.

48. **RMS 2010 294 X ESPCI PC**

Déterminer les racines de $X^3+12X-12$. *Ind.* Poser $X=u+v$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 841 page 533.
On note P le polynôme étudié. Comme $P'=3X^2+12$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, le polynôme P possède une unique racine réelle, notée α, et deux racines complexes conjuguées non réelles, notées β et $\overline{\beta}$.
Si α était rationnelle, on l'écrirait $\alpha=p/q$ sous forme irréductible, et on aurait $p^3+12pq^2-12q^3=0$, donc p diviserait 12 et q serait égal à 1, donc cette racine serait entière. Comme $\alpha^3=12(\alpha-1)$, il faudrait que 12 divise r^3, donc (théorème de Gauss) que 2 et 3 divisent r, donc que 6 divise r. Or on vérifie que $\{\pm6,\pm12\}$ ne contient aucune racine de P (comme $P(0)=-12<0$ et $P(1)=1>0$, on peut aussi affirmer que $\alpha\in]0,1[$, intervalle qui ne contient aucun entier, et conclure plus tôt).
On va alors trouver les racines de P par la méthode de Cardan, dont l'énoncé indique le tout début. Dire que $u+v$ est racine de P, c'est dire que

$$(u+v)^3+12(u+v)-12=u^3+v^3+3uv(u+v)+12(u+v)-12=u^3+v^3+3(uv+4)(u+v)-12=0\,.$$

L'idée de Cardan est de résoudre cette équation à deux inconnues complexes u et v en imposant une relation supplémentaire, à savoir $uv+4=0$, de sorte que la recherche des racines de P soit équivalente au système des deux équations suivantes :

$$u^3+v^3=12\,,$$
$$uv=-4\,.$$

Imposer cette condition supplémentaire est possible, car cela revient à effectuer le changement d'inconnue $X=u-4/u$, qui est légitime, car l'application $h\colon u\in\mathbb{C}^*\mapsto u-4/u$ est surjective sur $\mathbb{C}$. Ce système implique que $u^3+v^3=12$ et que $u^3v^3=-64$: les nombres u^3 et v^3 sont donc connus par leur somme $s=12$ et leur produit, $p=-64$, donc sont les deux solutions de l'équation

$$z^2-sz+p=z^2-12z-64=0\,.$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta'=36+64=100$, et par suite, u^3 et v^3 sont à permutation près, les nombres 16 et -4. Par suite, il existe deux entiers k et ℓ tels que $u=j^k2^{4/3}$ et $v=-j^\ell2^{2/3}$. La condition $uv=-4$ équivaut à $j^{k+\ell}=1$, et on trouve comme prévu seulement trois valeurs distinctes de $u+v$, dont une réelle et deux complexes conjuguées non réelles :

$$\alpha=2^{4/3}-2^{2/3},\quad \beta=j2^{4/3}-j^22^{2/3}\quad\text{et}\quad\overline{\beta}=j^22^{4/3}-j2^{2/3}\,.$$

On vérifie enfin que $\alpha\approx0,93$ appartient bien à $]0,1[$ comme annoncé plus haut.

49. **RMS 2012 270 X ESPCI PC**

Soit $\zeta=e^{i\pi/10}$. Montrer que ζ est racine de $X^8-X^6+X^2-X^2+1$.

Solution. — Soit P le polynôme en question. Comme $\zeta\neq1$ et comme $\zeta^{10}=e^{i\pi}=-1$, on peut écrire que

$$P(\zeta)=\sum_{k=0}^{4}(-\zeta^2)^k=\frac{1-(-\zeta^2)^5}{1+\zeta^2}=\frac{1+\zeta^{10}}{1+\zeta^2}=0.$$

50. **RMS 2012 271 X ESPCI PC**

Soit n un entier $n \geqslant 2$.

(a) Parmi les racines $2n$-ièmes de 1, combien sont racines de -1 ?

(b) Soit ε une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que le polynôme $X^2-\varepsilon$ a deux racines distinctes. Montrer que l'une est racine n-ième de -1.

Solution. —

(a) Comme $X^{2n}-1=(X^n+1)(X^n-1)$, l'ensemble U_{2n} des racines $2n$-ièmes de 1 admet la partition

$$U_{2n}=U_n\sqcup A_n,$$

où U_n est l'ensemble des n racines n-ièmes de 1, et A_n celui des n racines n-ièmes de -1, avec $\operatorname{Card} A_n=\operatorname{Card} U_n=n$.

(b) Une racine m-ième z de l'unité est dite primitive lorsque $z^k\neq 1$ pour tout k tel que $1\leqslant k\leqslant m-1$ (cette définition ne fait pas partie du programme de la filière PC).

Les deux racines de $X^2-\varepsilon$ sont les deux racines carrées de ε, que l'on note a et $-a$. Comme $a^{2n}=(-a)^{2n}=\varepsilon^2=1$, les deux nombres a et $-a$ appartiennent à U_{2n}. S'ils sont tous deux dans U_n, c'est que $a^n=(-a)^n=1$, donc que $(-1)^n=1$, donc que n est pair. On l'écrit $n=2p$, et alors $\varepsilon^p=(a^2)^p=a^{2p}=a^n=1$ avec $1\leqslant p\leqslant n-1$, ce qui contredit le caractère primitif de ε. Par suite, l'une des racines de $X^2-\varepsilon$ est racine n-ième de -1.

51. **RMS 2012 272 X ESPCI PC**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t\in\mathbb{R}$, $P_n(\sin^2 t)=\cos(2nt)$. Déterminer le degré de P_n. Que vaut $P_n(-1)$?

Solution. — On commence par montrer l'unicité. Si P_n et Q_n sont deux tels polynômes, on a $\forall t\in\mathbb{R}$, $P_n(\sin^2 t)=Q_n(\sin^2 t)$, donc $\forall y\in[0,1]$, $(P_n-Q_n)(y)$. Ayant une infinité de racines, le polynôme P_n-Q_n est nul.

On montre ensuite l'existence. Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(2nt)&=\operatorname{Re}(e^{2int})=\operatorname{Re}((\cos(2t)+i\sin(2t))^n)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}i^k\sin^k(2t)\cos^{n-k}(2t)\right),\\&=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}\sin^{2p}(2t)\cos^{n-2p}(2t)=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}2^{2p}(\sin^2 t)^p(1-\sin^2 t)^p(1-2\sin^2 t)^{n-2p}=P_n(\sin^2 t),\end{aligned}$$

où $P_n=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}2^{2p}X^p(1-X)^p(1-2X)^{n-2p}$. On obtient alors

$$P_n(-1)=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}2^{3p}3^{n-2p}.$$

Remarque. — Je n'ai pas trouvé d'expression close entière plus simple (Maple dit que les facteurs premiers des entiers $P_n(-1)$ pour $0\leqslant n\leqslant 20$ sont grands). En revanche, on peut calculer trois autres expressions de $P_n(-1)$. Si l'on définit, comme il est d'usage, les fonctions sinus sur $\mathbb{C}$ par les expressions $\sin z=(\exp(iz)-\exp(-iz))/2i$ et $\cos z=(\exp(iz)+\exp(-iz))/2$, la résolution de $\sin^2 t=-1$ (avec $t=a+ib$ complexe, a et b réels) se mène de la manière suivante : si l'on pose $x=\exp(it)$,

$$\begin{aligned}\sin^2 t=-1&\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad\sin t=\varepsilon i\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad\frac{x-x^{-1}}{2i}=\varepsilon i\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad x^2+2\varepsilon x-1=0,\\&\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad x=-\varepsilon\pm\sqrt{2}\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad\exp(ia-b)=-\varepsilon\pm\sqrt{2},\\&\iff\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad a\equiv 0[2\pi]\quad\text{et}\quad b=-\ln\left(\varepsilon+\sqrt{2}\right)\iff\exists k\in\mathbb{Z},\quad\exists\varepsilon\in\{-1,1\},\quad t=2k\pi-i\ln\left(\varepsilon+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

On a réduit le choix $\pm\sqrt{2}$ à $\sqrt{2}$, car $e^{-b}>0$ pour tout réel b. On choisit l'une de ces solutions, par exemple $t_0=-i\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. En admettant que l'identité $\forall t\in\mathbb{R}$, $P_n(\sin^2 t)=\cos(2nt)$ se prolonge à tout $t\in\mathbb{C}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}P_n(-1)=\cos(2nt_0)&=\frac{e^{2int_0}+e^{-2int_0}}{2}=\frac{e^{2n\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+e^{-2n\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-2n}}{2},\\&=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(-1+\sqrt{2}\right)^{2n}}{2}.\end{aligned}$$

En développant les deux termes du numérateur par la formule du binôme, on on obtient :

$$P_n(-1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(1+(-1)^k)\left(\sqrt{2}\right)^{2n-k}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}2^{n-p+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}2^{n-p}=\sum_{q=0}^{n}\binom{2n}{2q}2^{q}.$$

Enfin, comme $1+\sqrt{2}>1$, la suite de terme général $(1+\sqrt{2})^{-2n}$ converge vers zéro. En fait, $0<\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{-2n}\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{-2}\leqslant 0,1$ pour tout $n\geqslant 1$. Comme $P_n(-1)$ est un entier (voir la première expression obtenue), comme cet entier est strictement compris entre $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{2n}$ et $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{2n}+0,1$, on peut affirmer que

$$\forall n\geqslant 1,\quad P_n(-1)=\left\lceil\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\right\rceil,$$

où $\lceil x\rceil$ désigne l'entier immédiatement supérieur au réel x. On vérifie ensuite aisément que cette expression reste valable pour $n=0$, puisque $P_0=1$ et que $\lceil\frac{1}{2}\rceil=1$.

52. **RMS 2009 335 X ESPCI PC**

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ unitaire. Si $a\in\mathbb{R}$, on pose $Q_a=P(X+a)$. Montrer qu'il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $a\geqslant r$, tous les coefficients de Q_a sont positifs.

Solution. — On pose $d=\deg(P)$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes, le coefficient de X^k dans le polynôme Q_a est $Q_a^{(k)}(0)/k!$. Or $Q_a^{(k)}(0)=P^{(k)}(a)$.

Le polynôme P étant unitaire, tous les polynômes dérivés de P d'ordre $k\leqslant d$ sont non nuls et ont un coefficient dominant positif, donc admettent la limite $+\infty$ en $+\infty$: il existe en particulier des réels M_k tels que $P^{(k)}(a)\geqslant 0$ pour tout $a\geqslant M_k$. On obtient le résultat voulu en posant $r=\max_{0\leqslant k\leqslant d}(M_k)$.

53. **RMS 2009 336 X ESPCI PC**

Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n})=n/2^{n-1}$.

Solution. — Elle est due à Carine Apparicio.

On pose $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{-2ik\pi}{n}})$. On remarque que $(X-1)P_n=\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{\frac{-2ik\pi}{n}})=X^n-1$, donc que $P_n=X^{n-1}+\cdots+X+1$. On utilise ensuite la formule d'Euler pour le sinus :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)=\frac{1}{(2i)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left[e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(1-e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)\right]=\frac{e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}}{(2i)^{n-1}}P_{n-1}(1)=\frac{P_{n-1}(1)}{2^{n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

54. **RMS 2009–337 X ESPCI PC**

Soit $P=X^3+2X^2+X+1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer $x_1+x_2+x_3$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ et $\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}+\frac{1}{x_3-2}$.

Solution. — Comme $P(0)P(2)\neq 0$, les questions sont pertinentes.

On calcule $P'=3X^2+4X+1=3(X+1)(X+\frac{1}{3})$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$-1/3$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$		1		$\frac{7}{9}$		$+\infty$

Le tableau (et le théorème des valeurs intermédiaires) prouvent l'existence d'une unique racine réelle $\alpha<-1$ de P. Comme $P(-2)=-1<0$, on peut même affirmer que $\alpha\in]-2,-1[$. Le polynôme P admet par ailleurs deux racines complexes conjuguées non réelles.

Le polynôme $P^*=X^3P(1/X)=X^3+X^2+2X+1$ a pour racines $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$. On en déduit que

$$s=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-1\,.$$

Le polynôme $Q=X^3P\left(\frac{1}{X}+2\right)=19X^3+21X^2+8X+1$ a pour racines $\frac{1}{x_1-2}$, $\frac{1}{x_2-2}$, $\frac{1}{x_3-2}$. On en déduit que

$$t=\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}+\frac{1}{x_3-2}=-\frac{21}{19}\,.$$

Remarque. — On peut aussi calculer les fonctions symétriques des racines $\sigma_1=x_1+x_2+x_3=-2$, $\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$ et $\sigma_3=x_1x_2x_3=-1$, puis exprimer s et t à l'aide des σ_i. On obtient $t=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ et $s=\frac{\sigma_2-4\sigma_1+12}{\sigma_3-2\sigma_2+4\sigma_1-8}$, et on retrouve les résultats précédents.

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

55. **RMS 2009 338 X ESPCI PC**
Soient P_1, P_2, P_3, P_4 dans $\mathbb{R}_3[X]$.

(a) On suppose que $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?
(b) On suppose que $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

Solution. —
(a) Oui, car il existe une famille $(Q_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que $P_i = (X-1)Q_i$. La famille (Q_i) étant de cardinal 4 dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, elle est liée, donc la famille (P_i) l'est aussi.
(b) Pas nécessairement : la base $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ fournit un contre-exemple.

56. **RMS 2012 273 X ESPCI PC**
Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n. Montrer que $(P, \Phi(P), \ldots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. —
(a) On constate que $\deg(\Phi - \mathrm{id})(P) = \deg P - 1$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré strictement positif, et on en déduit que $(\Phi - \mathrm{id})^{n+1} = 0$, donc que $\Phi - \mathrm{id}$ est nilpotent.
(b) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré n, la question précédente montre que la famille $(P, \Phi(P), \ldots, \Phi^n(P))$ est échelonnée en degré, donc libre. Comme elle comporte $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

57. **RMS 2009 339 X ESPCI PC**
Soit $(a_, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$. Quel est le rang de :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ?$$

Solution. — On note C_j les colonnes de A, et E_j les vecteurs colonnes de la base canonique, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Comme $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est contenu dans $\mathrm{Vect}(E_n, C_n)$, on a $0 \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. Plus précisément, il vaut 2 si au moins un des a_i et au moins un des b_j sont non nuls, zéro si tous sont nuls, et 1 dans les autres cas.

58. **RMS 2009 340 X ESPCI PC**
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall P \in E,\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$.

Solution. — L'application $\theta\colon P \mapsto \int_0^1 P$ est une forme linéaire non nulle sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\dim E^* = n+1$, il suffit alors de vérifier que la famille $(e_i\colon P \mapsto P(a_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre pour qu'elle soit une base de E : cela résulte du fait que les a_i sont deux à deux distincts. Les c_k sont alors les composantes de la forme linéaire θ dans la base des e_i.

59. **RMS 2012 286 X ESPCI PC**
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et F un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension p, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

(a) Montrer que la famille $(e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$ est libre.
(b) Donner une base de $E \times F$ ainsi que sa dimension.
(c) Soit G le sous-espace vectoriel de $E \times F$ engendré par les (e_i, f_j) pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$. Déterminer la dimension de G.

Solution. —
(a) Si les coefficients λ_i vérifient $\sum_{i=2}^n \lambda_i(e_i - e_1) = 0$ et si l'on pose $s = \sum_{i=2}^n \lambda_i$, alors $-se_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i = 0$. Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base on conclut que tous les λ_i sont nuls, donc $(e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$ est libre.
(b) La famille $\big((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$, dont la dimension est $n + p$.

(c) Le sous-espace G contient les vecteurs $(e_i, f_1) - (e_1, f_1) = (e_i - e_1, 0_F)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$, qui forment une famille libre d'après la question (a). On pose $G_1 = \mathrm{Vect}\big((e_i - e_1, 0_F),\ 2 \leqslant i \leqslant n\big)$, qui est donc un sous-espace vectoriel de G de dimension $n-1$. De la même manière, $G_2 = \mathrm{Vect}\big((0_E, f_j - f_1),\ 2 \leqslant j \leqslant n\big)$ est un sous-espace vectoriel de G de dimension $p-1$. Il est clair que $G_1 \cap G_2 = \{(0_E, 0_F)\}$, donc que G_1 et G_2 sont en somme directe, et la famille $((e_2 - e_1, 0_F), \dots, (e_p - e_1, 0_F), (0_E, f_2 - f_1), \dots, (0_E, f_p - f_1)$ est une base de $G_1 \oplus G_2$. Par suite,

$$\dim(G_1 \oplus G_2) = n + p - 2 \leqslant \dim G.$$

Le vecteur (e_1, f_1) appartient à G par définition, mais pas à $G_1 \oplus G_2$. Sinon, il existerait des scalaires α_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$ et β_j pour $2 \leqslant j \leqslant p$ tels que, si l'on note α (respectivement β) la somme des α_i (respectivement des β_j) :

$$(e_1, f_1) = \sum_{i=2} \alpha_i (e_i - e_1, 0_F) + \sum_{j=2}^{p} \beta_j (0_E, f_j - f_1) = \left(-\alpha e_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_i, -\beta f_1 + \sum_{j=2}^{p} \beta_j f_j \right).$$

Comme les e_i forment une base de E, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, et que $\alpha = -1$, ce qui est impossible, et achève la preuve de ce que $(e_1, f_1) \in G \setminus (G_1 \oplus G_2)$. Par suite $\dim(G_1 \oplus G_2) < \dim G$, ou encore

$$n + p - 1 \leqslant \dim G.$$

Enfin, si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p$ désignent les composantes dans $E \times F$ relatives à la base de la question (b), il est clair que tous les vecteurs (e_i, f_j) appartiennent à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j=1}^{p} y_j = 0$. Finalement,

$$\dim G = n + p - 1.$$

60. **RMS 2012 280 X ESPCI PC**

Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose la famille $(v_1, \dots, v_k)$ libre. Montrer que $(v_1\,{}^t\!v_1, \dots, v_k\,{}^t\!v_k)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la réciproque.

Solution. — Pour que les produits $v_i\,{}^t\!v_i$ soient des matrices carrées, il faut supposer que les v_i sont des vecteurs colonnes, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $u \cdot v = {}^t\!uv$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\,{}^t\!v_i = 0$. On multiplie à droite par v_1 cette relation, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\,{}^t\!v_i v_1 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i [v_i \cdot v_1]) v_i = 0.$$

Comme la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre, le scalaire $\lambda_i [v_i \cdot v_1]$ est nul pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, et en particulier $\lambda_1 \|v_1\|^2 = 0$. Comme $v_1 \neq 0$ (il fait partie d'une famille libre), c'est que $\lambda_1 = 0$. On répète cette démonstration pour les autres coefficients, ce qui montre que la famille de matrices $(v_1\,{}^t\!v_1, \dots, v_k\,{}^t\!v_k)$ est libre.

La réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple de la famille de trois vecteurs du plan (v_1, v_2, v_3) nécessairement liée avec

$$v_1\,{}^t\!v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2\,{}^t\!v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3\,{}^t\!v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille des trois matrices ci-dessus est libre, ce qui achève la présentation du contre-exemple.

Algèbre linéaire : applications linéaires

61. **RMS 2012 282 X ESPCI PC**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de $\{0_E\} \times F$ dans $E \times F$ est de la forme $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Solution. — On pose $G = \{0_E\} \times F$, et on note H un supplémentaire de G dans $E \times F$. On note $\mathbb{K}$ le corps de base.

- Soit $x \in E$. Comme $(x, 0) \in E \times F$, il existe un couple $((0, y), (z, t)) \in G \times H$ tel que $(x, 0) = (0, y) + (z, t) = (z, y + t)$, donc il existe au moins un couple de la forme (x, t) dans H.
- Soient x dans E et t_1 et t_2 dans F. Si (x, t_1) et (x, t_2) appartiennent à H, alors la différence $(0, t_2 - t_1)$ est dans H, mais c'est aussi un vecteur de G. Comme G et H sont supplémentaires, leur intersection est réduite au vecteur nul $(0_E, 0_F)$. On en déduit que $t_1 = t_2$, donc qu'il existe un unique $(x, t) \in H$ pour tout $x \in E$. Ceci permet de définir la fonction $f\colon E \to F$, qui à x associe l'unique t tel que $(x, t) \in H$.

– Il reste à voir que f est linéaire. Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Comme H est un sous-espace vectoriel de $E \times F$, le vecteur
$$\lambda_1(x_1, f(x_1)) + \lambda_2(x_2, (x_2)) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))$$
appartient à H. Comme $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in F$ et comme $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ est l'unique vecteur t de F tel que $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, t)$ appartienne à H, on en déduit que $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2, x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, ce qui achève la preuve.

62. **RMS 2009 346 X ESPCI PC**

Soient E, F G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer : $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w \iff \exists v \in \mathcal{L}(F, G),\ v \circ u = w$.

Solution. — On raisonne en deux temps.

- On suppose que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$. Soit H un supplémentaire dans F de l'image de u (on sait que H existe car F est de dimension finie). Soit $x \in F$ s'écrivant $x = y + z$ avec $y = u(t) \in \operatorname{Im} u$ et $z \in H$. Montrons que $w(t)$ ne dépend pas du vecteur t choisi dans E tel que $u(t) = y$: si on a aussi $u(t') = y$, alors $u(t - t') = y - y = 0$, donc $t - t' \in \operatorname{Ker} u$, donc $t - t' \in \operatorname{Ker} w$ donc $w(t) = w(t')$. Il est alors légitime de poser
$$v(x) = w(t)\ .$$
Par construction, on a $v \circ u = w$, et la vérification de la linéarité de v n'est qu'une formalité.
- Réciproquement, on suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $v \circ u = w$. Alors, si $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $w(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} w$.

63. **RMS 2009 347 X ESPCI PC**

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{id}_E$.

(a) Montrer que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.

(b) Donner un contre-exemple s'il n'y a pas unicité.

Solution. —

(a) Si l'on parvient à prouver que u est injectif, ce sera terminé, puisqu'alors, pour tout $x \in E$, on aura $u([v \circ u](x)) = [u \circ v](u(x)) = u(x)$, donc $[v \circ u](x) = x$ par injectivité de u, donc $v \circ u = \mathrm{id}_E$.

On raisonne par l'absurde en supposant que u n'est pas injectif. Il existe alors $x_0 \neq 0$ appartenant à $\operatorname{Ker} u$, et en particulier E n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit λ une forme linéaire non nulle sur E. On pose
$$\forall x \in E, \quad w(x) = v(x) + \lambda(x) \cdot x_0\ ,$$
ce qui définit un endomorphisme de E différent de v. Or $u \circ w = \mathrm{id}_E$, contredisant ainsi l'unicité de v.

Remarque. — Cette démonstration repose sur l'existence d'une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel non nul : c'est clair en dimension finie (où la question de l'exercice est par ailleurs banale). En dimension infinie, cela nécessite une des formes de l'axiome du choix, à savoir le théorème de la base incomplète en dimension quelconque, qui est hors programme.

(b) Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et $u \colon P \mapsto P'$. Soit v l'endomorphisme « primitive nulle en zéro » : $P \mapsto \int_0^X P(t)\,dt$. Alors il est clair que $u \circ v = \mathrm{id}_E$. Cependant,
$$\forall P \in E, \quad v(u(P)) = v(P') = P(X) - P(0)\ ,$$
ce qui montre que $v \circ u \neq \mathrm{id}_E$. Pour achever le contre-exemple, il convient de montrer qu'il existe au moins un endomorphisme $w \neq v$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}_E$. On applique la construction de la question précédente, en prenant pour x_0 le polynôme 1, qui est bien dans le noyau de la dérivation. On pose :
$$\forall P \in E, \quad w(P) = v(P) + \lambda(P) = v(P) + \lambda(P) \cdot 1\ ,$$
où λ est une forme linéaire non nulle quelconque sur $E = \mathbb{R}[X]$ (il y en existe, tout à fait explicites...), ce qui définit bien un endomorphisme de E qui vérifie $u \circ w = \mathrm{id}_E$, et qui est différent de v.

64. **RMS 2012 274 X ESPCI PC**

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

Solution. — Supposons que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. On pose $w = v_{/\operatorname{Im} u}$, et on note que
$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} v \circ u,$$
$$\operatorname{Ker} w = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v.$$

En effet, si $z \in G$, il appartient à $\operatorname{Im} w$ si et seulement s'il existe $y \in \operatorname{Im} u$ (l'ensemble de départ de w) tel que $z = w(y) = v(y)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $x \in E$ (l'ensemble de départ de u) tel que $z = v(u(x))$, ou encore si et seulement si $z \in \operatorname{Im} v \circ u$.

La deuxième égalité se prouve ainsi : $\operatorname{Ker} w$ est l'ensemble des vecteurs $y \in \operatorname{Im} u$ tels que $w(y) = v(y) = 0$, c'est-à-dires tels que $y \in \operatorname{Ker} v$.

On déduit de la première égalité que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si le rang de w est égal à la dimension de l'espace de départ de w, qui est $\operatorname{Im} u$. Or la formule du rang affirme que $\operatorname{rg} w = \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} w = 0$. Comme $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$, la démonstration est terminée.

65. **RMS 2012 278 X ESPCI PC**

Soient E un espace vectoriel, p et q des projecteurs de E qui commutent. Montrer sur $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.

Solution. — Dans les calculs suivants, le symbole $\underset{*}{=}$ indique qu'on utilise l'hypothèse $p \circ q = q \circ p$, et le symbole $\underset{\dagger}{=}$ indique qu'on utilise l'hypothèse $p^2 = p$ ou $q^2 = q$:

$$\begin{aligned}
(p \circ q)^2 &= p \circ q \circ p \circ q \underset{*}{=} p^2 \circ q^2 \underset{\dagger}{=} p \circ q, \\
(p + q - p \circ q)^2 &= p^2 + q^2 + (p \circ q)^2 + p \circ q + q \circ p - p \circ p \circ q - p \circ q \circ p - q \circ p \circ q - p \circ q \circ q, \\
&\underset{\dagger}{=} p + q + p \circ q + p \circ q + q \circ p - p \circ q - p \circ q \circ p - q \circ p \circ q - p \circ q, \quad \text{(grâce aussi au calcul précédent)}, \\
&\underset{*}{=} p + q + p \circ q + p \circ q + p \circ q - p \circ q - p \circ p \circ q - p \circ q \circ q - p \circ q, \\
&\underset{\dagger}{=} p + q + p \circ q + p \circ q + p \circ q - p \circ q - p \circ q - p \circ q - p \circ q, \\
&= p + q - p \circ q.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs.

– L'image de $p \circ q$ est
$$\operatorname{Im}(p \circ q) = p(\operatorname{Im} q) \underset{*}{=} q(\operatorname{Im} p).$$
– Le noyau de $p \circ q$ se calcul ainsi. Soit $x \in E$, qu'on écrit de manière unique $x = y + z$ avec $(y, z) \in \operatorname{Im} q \times \operatorname{Ker} q$. Alors $(p \circ q)(x) = 0 \iff p(y) = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} p$, et on en déduit que
$$\operatorname{Ker} p \circ q = \operatorname{Ker} q \oplus (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p) \underset{*}{=} \operatorname{Ker} p \oplus (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q).$$
– L'image de $p + q - p \circ q$ se calcule ainsi. Soit $x \in E$, qu'on écrit de manière unique $x = y + z$ avec $(y, z) \in \operatorname{Im} q \times \operatorname{Ker} q$. Alors $(p+q-p\circ q)(x) = p(y)+p(z)+q(y)+q(z)-p(q(y))-p(q(z)) = p(y)+p(z)+y-p(y) = y+p(z) \in \operatorname{Im} q+p(\operatorname{Ker} q)$, ce qui prouve que $\operatorname{Im}(p + q - p \circ q) \subset \operatorname{Im} q + p(\operatorname{Ker} q)$. L'inclusion réciproque est claire : il suffit de remonter les calculs. On apporte une précision supplémentaire en montrant que la somme $\operatorname{Im} q + p(\operatorname{Ker} q)$ est directe : en effet, si un vecteur $y \in \operatorname{Im} q$ est de la forme $p(z)$ avec $z \in \operatorname{Ker} q$, on a $y = q(y) = q(p(z)) \underset{*}{=} p(q(z)) = p(0) = 0$, et on conclut que
$$\operatorname{Im}(p + q - p \circ q) = \operatorname{Im} q \oplus p(\operatorname{Ker} q) \underset{*}{=} \operatorname{Im} p \oplus q(\operatorname{Ker} p).$$
– Le calcul mené à la question précédente montre, avec les mêmes notations, que $x \in \operatorname{Ker}(p+q-p\circ q) \iff y+p(z) = 0$. Comme on a établi que $\operatorname{Im} q$ et $p(\operatorname{Ker} q)$ sont en somme directe, ceci équivaut encore à $y = p(z) = 0$, ou encore à $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, et on conclut que
$$\operatorname{Ker}(p + q - p \circ q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.$$

66. **RMS 2012 279 X ESPCI PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ soit une base de E.

(a) Montrer que f est un isomorphisme.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est un polynôme en f.

Solution. — On note $\mathcal{B}$ la base $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$, et $\mathbb{K}$ le corps de base de E.

(a) Montrons que la famille $\mathcal{C} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E : pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, soient $\lambda_i \in \mathbb{K}$ des coefficients tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$. On compose par f et on obtient $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1} f^j(x_0) = 0$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, tous les coefficients λ_i sont nuls. Alors f transforme une base (à savoir $\mathcal{C}$) en une base (à savoir $\mathcal{B}$), donc f est un isomorphisme.

(b) Si l'endomorphisme g commute avec f, alors il commute avec tout polynôme en f et en particulier toute puissance de f. On écrit $g(x_0)$ sur la base $\mathcal{C}$ sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$, et on note P le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, de sorte que l'égalité $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ s'écrive $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Alors

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = f^i(P(f)(x_0)) = P(f)(f^i(x_0)),$$

et on en déduit que l'égalité $g(x) = P(f)(x)$ est vraie pour tout x par linéarité puisqu'elle est vraie sur la base $\mathcal{C}$. Par suite, $g = P(f)$, donc g est un polynôme en f.

67. **RMS 2012 281 X ESPCI PC**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

Solution. — Voir l'exercice 771 page 498.

68. **RMS 2012 283 X ESPCI PC**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.

(b) Peut-on avoir la condition supplémentaire $v \circ u \circ v = v$?

Solution. —

(a) Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, et H un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F (de tels sous-espaces existent car E et F sont de dimension finie). Le théorème du rang dit que $w := u_{/G}^{\backslash \operatorname{Im} u}$ est un isomorphisme. On définit v par ses restrictions aux deux supplémentaires $\operatorname{Im} u$ et H de F, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall y \in \operatorname{Im} u, &\quad v(y) = w^{-1}(y), \\ \forall y \in H, &\quad v(y) = 0_E. \end{aligned}$$

On montre ensuite que v convient, en calculant $u \circ v \circ u$ sur les deux supplémentaires $\operatorname{Ker} u$ et G de E :

$$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{Ker} u, &\quad (u \circ v \circ u)(x) = u(v(0_F)) = 0_F = u(x), \\ \forall x \in G, &\quad (u \circ v \circ u)(x) = u(v(w(x))) = u(w^{-1}(w(x))) = u(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que $(u \circ v \circ u)(x) = u(x)$ pour tout $x \in E$, donc $u \circ v \circ u = u$.

(b) On calcule $v \circ u \circ v$ sur les deux supplémentaires $\operatorname{Im} u$ et H de F :

$$\begin{aligned} \forall y \in \operatorname{Im} u, &\quad (v \circ u \circ v)(y) = v(u(w^{-1}(y)) = v(y), \\ \forall y \in H, &\quad (v \circ u \circ v)(y) = v(u(0_E)) = 0_E = v(y). \end{aligned}$$

On a donc la condition supplémentaire $v \circ u \circ v = v$ avec l'application linéaire v de la question précédente.

Remarque. — Une application linéaire v vérifiant les propriétés $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$ est *un* pseudo-inverse de u. Si E et F sont munis de structures euclidiennes, et si G (respectivement H) est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Ker} u$ (respectivement de $\operatorname{Im} u$), alors v est défini de manière unique et est appelé *le* pseudo-inverse de u.

69. **RMS 2012 289 X ESPCI PC**

Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie. On voit E comme un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et on le note alors $E_{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ que l'on voit aussi comme $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{R}})$.

(a) Vérifier que $f_{\mathbb{R}}$ est bien un endomorphisme de $E_{\mathbb{R}}$.

(b) Exprimer $\operatorname{tr}(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\operatorname{tr}(f)$.

(c) Exprimer $\det(f_{\mathbb{R}})$ en fonction de $\det(f)$.

Solution. —

(a) Soient $(x, y) \in E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est un $\mathbb{C}$–endomorphisme de E, on a $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, donc $f_{\mathbb{R}}$ est bien un endomorphisme de $E_{\mathbb{R}}$.

(b) Soient $n = \dim_{\mathbb{C}}(E)$, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{C}$–base de E. Tout x de E s'écrit de manière unique $\sum_{k=1}^n z_k e_k$, avec $z_k = a_k + i b_k \in \mathbb{C}$ où $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$. Alors x s'écrit (de manière unique)

$$x = \sum_{k=1}^n a_k e_k + \sum_{k=1}^n b_k (i e_k),$$

ce qui montre que $(e_1,\dots,e_n,ie_1,\dots,ie_n)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$, donc que $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{R}})=2n$.
Soit $Z=(z_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$, avec $z_{k,\ell}=a_{k,\ell}+ib_{k,\ell}$, où $(a_{k,\ell},b_{k,\ell})\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$f_{\mathbb{R}}(e_j)=\sum_{k=1}^n a_{k,\ell}e_{k,\ell}+\sum_{k=1}^n b_{k,\ell}(ie_k)=a_{k,j}e_j+\cdots,$$
$$f_{\mathbb{R}}(ie_j)=if_{\mathbb{R}}(e_j)=\sum_{k=1}^n a_{k,\ell}(ie_{k,\ell})-\sum_{k=1}^n b_{k,\ell}e_k=a_{k,j}(ie_j)+\cdots$$

où les points de suspension indiquent une combinaison linéaire de vecteurs $\neq e_j$ dans la première ligne, et de vecteurs $\neq ie_j$ dans la seconde. On en déduit que
$$\operatorname{tr}(f_{\mathbb{R}})=2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}f).$$

(c) On pose $A=(a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ et $B=(b_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, qui sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $M=\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f_{\mathbb{R}})$, qui est un élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Grâce aux calculs de la question précédente,

$$Z=A+iB\quad\text{et}\quad M=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}.$$

On en déduit dans un premier temps que

$$\det f=\det Z=\det(A+iB).$$

Dans un deuxième temps, les transformations élémentaires $L_k\leftarrow L_k+iL_{n+k}$ pour $1\leqslant k\leqslant n$, puis $C_{n+k}\leftarrow C_{n+k}-iC_k$ pour $1\leqslant k\leqslant n$, effectuées sur la matrice M, montrent que

$$\det(f_{\mathbb{R}})=\det M=\begin{vmatrix}A+iB&-B+iA\\B&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+iB&i(A+iB)\\B&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+iB&0\\B&A-iB\end{vmatrix},$$
$$=\det(A+iB)\det(A-iB)=\det f\,\overline{\det f}=|\det f|^2.$$

70. **RMS 2009 345 X ESPCI PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $u\in\mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$, $u(e_i)=e_{i+1}$ et $u(e_n)=0$.

(a) Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

(b) Caractériser les espaces $\operatorname{Ker}(u^k)$ pour $1\leqslant k\leqslant n$.

(c) Déterminer les sous-espaces de E stables par u.

Solution. — Les deux premières questions étant extrêmement classiques, elles sont rédigées de manière expéditive.

(a) Il est clair que $u^{n-1}\neq 0$ et que $u^n=0$.

(b) On a $\operatorname{Ker}(u^k)=\operatorname{Vect}(e_{n-k+1},\dots,e_{n-1},e_n)$ pour $1\leqslant k\leqslant n$.

(c) Les sous-espaces $\{0\}$ et $\operatorname{Ker}(u^k)$ pour $1\leqslant k\leqslant n$ sont évidemment stables par u. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit F un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On note A l'ensemble des entiers $i\in\{1,\dots,n\}$ tels que $F\subset\operatorname{Vect}(e_i,\dots,e_n)$: l'ensemble A n'est pas vide car il contient 1, et il est majoré par n. Il admet donc un maximum, noté p. Par définition de p, on a $F\subset\operatorname{Vect}(e_p,\dots,e_n)$ et il existe un vecteur $x\in F\setminus\{0\}$ s'écrivant $x=\sum_{i=p}^n\alpha_ie_i$ avec $\alpha_p\neq 0$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il contient (on a posé $\lambda_i=\frac{\alpha_i}{\alpha_p}$) :

$$y=\frac{1}{\alpha_p}x=e_p+\sum_{i=p+1}^n\lambda_ie_i\,.$$

Comme F est stable par u, il contient $u^{n-p}(y)=e_n$. On effectue ensuite un algorithme du pivot : F contient $z=y-\lambda_ne_n=e_p+\sum_{i=p+1}^{n-1}\lambda_ie_i$, donc aussi $u^{n-p-1}(z)=e_{n-1}$, et ainsi de suite jusqu'à e_p. Finalement, F contient $e_p,\dots,e_n$, donc contient $\operatorname{Vect}(e_p,\dots,e_n)$, et on conclut que

$$F=\operatorname{Vect}(e_p,\dots,e_n)\,.$$

71. **RMS 2009 365 X ESPCI PC**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u est nilpotent si et seulement si $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Solution. — Si u est nilpotent, alors zéro est son unique valeur propre, et il en est de même de u^p pour $p \geqslant 2$. Comme u est trigonalisable, la trace de u^p est la somme de ses valeurs propres, donc $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Réciproquement, supposons que, pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on ait $\mathrm{tr}(u^p) = 0$, et que u ne soit pas nilpotent. Soit χ_u le polynôme caractéristique de u que l'on écrit sous la forme$\chi_u(X) = (-1)^n X^{\alpha_0}(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}$, où les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts (χ_u est scindé dans $\mathbb{C}[X]$). L'hypothèse sur les traces s'écrit $\sum_{j=1}^r \alpha_j \lambda_j^p = 0$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$. Par conséquent, le système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_r$

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r &= 0\,, \\ \lambda_1^2 x_1 + \cdots + \lambda_r^2 x_r &= 0\,, \\ & \vdots \\ \lambda_1^r x_1 + \cdots + \lambda_r^r x_r &= 0\,, \end{cases}$$

admet la solution non nulle $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Le déterminant — donné par la formule de Vandermonde — de ce système est donc nul :

$$\lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r}^{r} (\lambda_j - \lambda_i) = 0\,.$$

Par suite, un des λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$ est nul ou deux d'entre eux sont égaux, ce qui contredit l'hypothèse.

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

72. **RMS 2009 343 X ESPCI PC**

(a) Montrer : $\mathrm{Vect}\{AB - BA,\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

(b) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA)$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.

Solution. — On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de la forme $AB-BA$, et $H = \mathrm{Ker(tr)}$ l'hyperplan des matrices de trace nulle. On rappelle que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$ pour toutes matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, et que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) La propriété fondamentale de la trace rappelée ci-dessus montre que $F \subset H$. L'égalité sera établie si l'on parvient à trouver dans F une famille libre contenant $n^2 - 1$ matrices. Pour cela, considérer
- les $n^2 - n$ matrices $E_{i,j} = E_{i,1}E_{1,j} - E_{1,j}E_{i,1}$ pour $i \neq j$;
- les $n - 1$ matrices $E_{1,1} - E_{j,j} = E_{1,j}E_{j,1} - E_{j,1}E_{1,j}$ pour $j \neq 1$.

(b) On constate que $I_n \notin H$, donc que H et la droite engendrée par I_n sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice A s'écrit donc $B + \lambda I_n$ avec $B \in H$, donc $\mathrm{tr}(B) = \phi(B) = 0$. On calcule alors

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda\, \mathrm{tr}(I_n) = \lambda n\,,$$
$$\phi(A) = \lambda \phi(I_n) = \frac{\phi(I_n)}{n}\, \mathrm{tr}(A)\,,$$

ce qui prouve que $\phi = k \cdot \mathrm{tr}$, avec $k = \frac{\phi(I_n)}{n}$.

73. **RMS 2012 275 X ESPCI PC**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

Solution. — Voir aussi l'exercice 371 page 254.

Pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, soient $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{j,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ les matrices élémentaires. On calcule le terme (i,j) de la matrice $\Phi(E_{i,j})$: il vaut $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i,k}\delta_{k,i}\delta_{j,\ell}b_{\ell,j} = a_{i,i}b_{j,j}$. Par suite

$$\mathrm{tr}\,\Phi = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} [\Phi(E_{i,j})]_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,i}b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^n b_{j,j}\right) = \mathrm{tr}\,A \times \mathrm{tr}\,B.$$

74. **RMS 2012 276 X ESPCI PC**
Soit $f\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer la trace de f.

Solution. — Voir aussi l'exercice 567 page 389 .
Comme $f \circ f = \mathrm{id}$, l'endomorphisme f est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que f est diagonalisable, et que ses deux sous-espaces propres sont $E_1(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\operatorname{tr} f = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

75. **RMS 2012 285 X ESPCI PC**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que f est soit injectif, soit nul.

Solution. — On suppose que f n'est pas injectif. Soit A_0 une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(A_0) = 0$. On note $r \geqslant 1$ le rang de A_0. Alors A_0 est équivalente à la matrice canonique de rang r, notée J_r, ce qui se traduit par l'existence de P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $J_r = PA_0Q$. Comme $J_r = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$, les formules $E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d}$ de multiplication des matrices élémentaires montrent que $E_{i,j} = E_{i,1}J_rE_{1,j}$. Par suite, comme f est un morphisme multiplicatif et comme $f(A_0) = 0$, on en déduit que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad f(E_{i,j}) = f(E_{i,1}PA_0QE_{1,j}) = f(E_{i,j})f(P)f(A_0)f(Q)f(E_{1,j}) = 0.$$

Comme l'endomorphisme f prend la valeur zéro sur une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est nul.

Algèbre linéaire : matrices

76. **RMS 2012 284 X ESPCI PC**
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont dans $\mathbb{N}$. Montrer que A est une matrice de permutation.

Solution. — Les matrices de permutations ne sont pas au programme de la filière PC. On note $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice A^{-1}. L'égalité $AB = I_n$ se traduit par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

Supposons qu'une ligne de A, disons la ligne i, comporte au moins deux éléments non nuls : a_{i,j_1} et a_{i,j_2}. On peut supposer que $j_1 \neq i$. L'égalité $\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} = 0$ pour $j \neq i$ montre que $\forall j \neq i,\ b_{j_1,j} = 0$ (une somme de nombres positifs ne peut être nulle que si tous sont nuls). De plus, $b_{j_1,i} \neq 0$ (une matrice inversible comme B ne peut avoir de ligne nulle).
Comme $BA = I_n$, on a $\sum_{k=1}^n b_{j_1,k}a_{k,j} = b_{j_1,i}a_{i,j} = 0$ pour tout $j \neq j_1$, donc $a_{i,j} = 0$ pour tout $j \neq j_1$, ce qui contredit l'hypothèse $a_{i,j_2} \neq 0$. Par suite, chaque ligne de A contient au plus un terme non nul, et en fait exactement un terme non nul (une matrice inversible n'a pas de ligne nulle). Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $\sigma(i)$ l'unique entier j tel que $a_{i,j} \neq 0$, ce qui définit une fonction σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.
Comme la transposée de A est inversible et à coefficients dans $\mathbb{N}$, d'inverse ${}^tB$, le même raisonnement montre que chaque *colonne* de A comporte exactement un élément non nul. Par suite, σ est injective, donc bijective, car elle va d'un ensemble fini dans lui-même. Alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i} = a_{i\sigma(i)}b_{\sigma(i),i} = 1,$$

avec $a_{i,\sigma(i)}$ et $b_{\sigma(i),i}$ dans $\mathbb{N}$: la seule possibilité est $a_{i,\sigma(i)} = b_{\sigma(i),i} = 1$, donc A est la matrice de permutation

$$P_\sigma = (\delta_{j,\sigma(i)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

77. **RMS 2012 287 X ESPCI PC**
Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + (\operatorname{tr} A)\,{}^tA = (2/n)I_n$.

Solution. — Si A est solution, $\operatorname{tr} A + (\operatorname{tr} A)^2 = 2$, donc $\operatorname{tr} A \in \{1, -2\}$.
- Si $\operatorname{tr} A = 1$, on doit résoudre $(*)$ $A + {}^tA = (2/n)I_n$. l'application $\varphi\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto A + {}^tA$ est linéaire et a pour noyau l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. Comme $(1/n)I_n$ est une solution particulière, les solutions de l'équation $(*)$ sont
$$A = \frac{1}{n}I_n + M,$$
où M est une matrice antisymétrique quelconque. Réciproquement, une telle matrice a bien pour trace 1 (la trace d'une matrice antisymétrique est nulle), donc est solution de l'équation initiale.

– Si $\operatorname{tr} A = -2$, on doit résoudre $(**)$ $A - 2\,{}^tA = (2/n)I_n$. L'application $\psi\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto A - 2\,{}^tA$ est linéaire et injective (si $M \in \operatorname{Ker}\Psi$, alors $M = 2\,{}^tM = 2\,{}^t(2\,{}^tM) = 4M$, donc $M = 0$). Comme $-(2/n)I_n$ est une solution particulière de l'équation $(**)$, c'est la seule :

$$A = -\frac{2}{n}I_n.$$

Réciproquement, cette matrice a bien pour trace -2, donc est solution de l'équation initiale.

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{1}{n}I_n + M,\ M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})\right\} \cup \left\{-\frac{2}{n}I_n\right\}.$$

78. **RMS 2012 290 X ESPCI PC**

Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et tel que $\forall (M,N) \in \mathcal{A}^2,\ MN = 0 \Rightarrow M = 0$ ou $N = 0$.

(a) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on avoir $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(b) On suppose que $I_n \in \mathcal{A}$. Montrer que toute matrice M non nulle de $\mathcal{A}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathcal{A}$. *Ind.* Considérer $f\colon N \in \mathcal{A} \mapsto MN$.
Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{A}$?

(c) Donner un exemple de sous-espace $\mathcal{A}$ ne contenant pas l'identité.

Solution. —

(a) On suppose $n \geqslant 2$ et on pose $M = E_{1,1}$ et $N = E_{2,2}$. Alors $MN = 0$ bien que ni M ni N ne soit nulle, donc on ne peut pas avoir $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $n \geqslant 2$. En revanche, c'est possible pour $n = 1$, puisque $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ en tant qu'anneau

(b) Comme $\mathcal{A}$ est stable par le produit matriciel, la fonction f proposée dans l'indication est à valeurs dans $\mathcal{A}$. Par ailleurs, la linéarité de f est claire. L'hypothèse «$\forall (M,N) \in \mathcal{A}^2,\ MN = 0 \Rightarrow M = 0$ ou $N = 0$» montre que f est injective. Alors f est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{A}$, donc f est bijectif. Comme $I_n \in \mathcal{A}$, il existe une unique matrice $N \in \mathcal{A}$ telle que $f(N) = I_n$, c'est-à-dire telle que $MN = I_n$. En d'autres termes, M est inversible, et son inverse appartient à A. On va en déduire que

$$\mathcal{A} = \operatorname{Vect}(I_n), \quad \text{donc que} \quad \dim \mathcal{A} = 1.$$

Soit M une matrice non nulle de $\mathcal{A}$ et λ une de ses valeurs propres complexes. Alors $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible, et appartient par ailleurs à $\mathcal{A}$ en tant que combinaison linéaire d'éléments du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$. Comme ce dernier ne contient que des matrices inversibles ou nulles, c'est que $M - \lambda I_n$ est nulle, donc que $M = \lambda I_n$. On vient de démontrer que $\mathcal{A} \subset \operatorname{Vect}(I_n)$. L'inclusion inverse résulte de ce que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel contenant I_n.

(c) Soit M une matrice de projecteur non nul et différent de l'identité (ce qui suppose $n \geqslant 2$). Alors la droite $\mathcal{A} = \operatorname{Vect}(M)$ satisfait les hypothèses de l'énoncé et ne contient pas I_n. En effet, $\mathcal{A}$ est stable par produit et est intègre car $(\alpha M)(\beta M) = \alpha\beta M$ appartient à $\mathcal{A}$ et ne peut être nul que si α ou β l'est.
On remarque qu'un tel sous-espace $\mathcal{A}$ ne peut contenir de matrice inversible. Dans le cas contraire, si $M \in \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et si $P = \sum_{k=r}^{s} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de M de valuation r (avec $a_r \neq 0$, donc), on aurait $\sum_{k=r}^{s} a_k M^k = 0$, donc $\sum_{k=r}^{s} a_k M^{k-r} = 0$ en multipliant par M^{-r}. Il en résulterait que

$$I_n = -\frac{1}{a_r}\sum_{k=r+1}^{s} a_k M^{k-r}$$

appartiendrait à $\mathcal{A}$, qui est stable par combinaison linéaire et produit (donc par élévation à une puissance non nulle).
Peut-on donner un exemple de sous-espace $\mathcal{A}$ ne contenant pas l'identité de dimension au moins 2 ? ?

79. **RMS 2009 344 X ESPCI PC**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que la matrice de u dans toute base de $\mathbb{R}^n$ est diagonale. Que peut-on dire de u ?

Solution. — Tout vecteur x non nul pouvant être complété en une base, on en déduit que x est un vecteur propre de u : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Il est classique que u est alors une homothétie. La réciproque est banale.

Autre rédaction (en fait, une démonstration de l'exercice classique évoqué ci-dessus) : fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et notons $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de u sur $\mathcal{B}$. Le vecteur $e_1 + e_2$ étant propre pour u (pour une valeur propre notée α), on a

$$u(e_1 + e_2) = \alpha e_1 + \alpha e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\,.$$

La liberté de la famille (e_1, e_2) montre que $\lambda_1 = \lambda_2$. On répète cette démonstration pour les autres valeurs propres de u, qui sont finalement toutes égales à une même valeur α, donc u est l'homothétie vectorielle de rapport α.

80. **RMS 2009 348 X ESPCI PC**

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| < 1$ pour tout i. Montrer que $I_n - M$ est inversible.

Solution. — Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur colonne non nul de $\mathbb{C}^n$ tel que $(I_n - M)X = 0$. Soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty > 0$. En égalant les composantes i_0 de l'égalité $MX = X$ et en divisant par x_{i_0}, on obtient $\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} = 1$. Or l'inégalité triangulaire et la définition de i_0 montrent que

$$\left|\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |m_{i_0,j}|\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |m_{i_0,j}| < 1\,,$$

d'où une contradiction. Par suite, le noyau de $I_n - M$ est réduit à $\{0\}$, donc $I_n - M$ est inversible.

Remarque. — C'est un grand classique, posé habituellement sous la forme suivante : montrer qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$, est inversible. Ici, $A = I_n - M$ est à diagonale strictement dominante.

81. **RMS 2009 351 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a équivalence entre :
(i) $\exists\lambda\in\mathbb{C}^*,\ A = \lambda I_n$;
(ii) $\forall(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ A = MN \Rightarrow A = NM$.

Solution. — Il faut en fait supposer $n \geqslant 2$, car si $n = 1$, tous les nombres complexes vérifient (ii) — c'est la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$ —, et pas seulement les nombres complexes non nuls (i).
(i)⇒(ii) On suppose que $A = \lambda I_n$ avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Alors, si $A = MN$, on a $I_n = M(\frac{1}{\lambda}N)$, donc l'inverse (à droite) de M est $\frac{1}{\lambda}N$, c'est donc aussi son inverse à gauche, donc $(\frac{1}{\lambda}N)M = I_n$, c'est-à-dire que $NM = \lambda I_n = A$.
(ii)⇒(i) Soit M une matrice inversible. On pose $N = M^{-1}A$, de sorte que $A = MN$. Alors, par hypothèse, $A = NM = M^{-1}AM$, ou encore $MA = AM$: la matrice A commute avec toute matrice inversible, donc (voir le rappel) elle est scalaire. Il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_n$.
Il est impossible que $A = 0$, car la matrice nulle ne vérifie pas l'implication $A = MN \Rightarrow A = NM$. On considère pour cela les matrices

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad MN = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad NM = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

complétées par des blocs de zéros pour en faire des matrices de taille $n\geqslant 2$. Par suite, $\lambda\neq 0$, et on bien démontré (i).

Rappel. — Une matrice A qui commute avec toute matrice inversible est scalaire. En effet, elle commute en particulier avec les matrices $I_n + E_{i,j}$ (toutes inversibles), donc elle commute avec toutes les $E_{i,j}$, donc $a_{k,\ell} = 0$ si $k\neq\ell$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$ si $i\neq j$ (l'écrire), ce qui signifie bien que A est scalaire.

82. **RMS 2012 295 X ESPCI PC**

(a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A est nilpotente.
(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = AB - BA$. On suppose que $AN = NA$. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} N^k = 0$. En déduire que N est nilpotente.
(c) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = AB - BA$. On suppose que $AN = NA$ et que N est nilpotente. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\operatorname{Ker} A^k$ est stable par AB. En déduire que AB est nilpotente.

Solution. —

(a) Si A est nulle, le résultat est clair. On suppose $A\neq 0$ pour le reste de la question. On pose $\varphi\colon M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto MB - BM\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\varphi(A) = A$ par hypothèse, ce qui signifie que 1 est une valeur propre de φ et que A (non nulle) est un vecteur propre associé. On montre ensuite par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \varphi(A^k) = kA^k.$$

On vient d'établir la propriété pour $k = 1$. Si elle est vraie pour k, alors

$$\begin{aligned}\varphi(A^{k+1}) &= A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^kB) - BA^{k+1} = A\varphi(A^k + BA^k) - BA^{k+1} = A(kA^k + BA^k) - BA^{k+1},\\ &= kA^{k+1} + (AB - BA)A^k = kA^{k+1} + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}.\end{aligned}$$

Si A n'était pas nilpotente, l'endomorphisme φ aurait une infinité de valeurs propres (tous les entiers naturels non nuls au moins), ce qui est impossible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc A est nilpotente.
Voir aussi l'exercice 634 page 419.

(b) Comme A et N commutent, A commute avec toute puissance de N. Alors, pour $k \geqslant 1$, si l'on pose $M = BN^{k-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} N^k &= \operatorname{tr}(NN^{k-1}) = \operatorname{tr}((AB-BA)N^{k-1}) = \operatorname{tr}(ABN^{k-1}) - \operatorname{tr}(BAN^{k-1}) = \operatorname{tr}(ABN^{k-1}) - \operatorname{tr}(BN^{k-1}A),\\ &= \operatorname{tr}(AM) - \operatorname{tr}(MA) = 0,\end{aligned}$$

en vertu de la linéarité de la trace et de la propriété $\forall (A,M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(MA)$.
Voir ensuite l'exercice 71 page 127 pour établir que la condition de nullité des traces entraîne que N est nilpotente.

(c) Soit $X \in \operatorname{Ker} A^k$. On montre par récurrence finie sur $p \in [\![0,k]\!]$ que $A^k(ABX) = A^{k+1-p}BA^pX$. La relation est évidente pour $p = 0$. Si elle est vraie pour un entier $p \leqslant k-1$, alors, comme N commute à toute puissance de A et comme $A^kX = 0$,

$$\begin{aligned}A^k(ABX) &= A^{k+1-p}BA^pX = A^{k+1-(p+1)}ABA^pX = A^{k+1-(p+1)}(N+BA)A^pX,\\ &= A^{k+1-(p+1)}NA^pX + A^{k+1-(p+1)}BA^{p+1}X = NA^kX + A^{k+1-(p+1)}BA^{p+1}X = A^{k+1-(p+1)}BA^{p+1}X.\end{aligned}$$

Pour $p = k$, on obtient $A^k(ABX) = ABA^kX = 0$, ce qui montre que $ABX \in \operatorname{Ker} A^k$.
A terminer ? ?

83. **RMS 2012 298 X ESPCI PC**

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes ?

Solution. — La solution est due à François Fayard. On va montrer que la dimension maximale recherchée est

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes. Si $S \in \mathcal{N}$ est une matrice symétrique, alors elle est diagonalisable, et comme son unique valeur propre est zéro (elle est nilpotente), on en déduit que $A = 0$. On vient de montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Par suite,

$$\dim(\mathcal{N} \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim \mathcal{N} + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{N} + n(n+1)/2 \leqslant n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

donc $\dim \mathcal{N} \leqslant n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.
Par ailleurs, il existe un sous-espace vectoriel bien connu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices nilpotentes : celui des matrices triangulaires supérieures strictes, qui est de dimension $n(n-1)/2$, ce qui achève la preuve.

84. **RMS 2012 277 X ESPCI PC**

(a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes. La matrice $A+B$ est-elle nilpotente ?
(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A, B et $A+B$ sont nilpotentes. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

Solution. — On suppose $n \geqslant 2$.

(a) Pas nécessairement. Les matrices $A = E_{1,2}$ et $B = E_{2,1}$ sont nilpotentes, mais

$$(A+B)^n = \begin{cases} A+B & \text{si } n \text{ est impair,}\\ E_{1,1}+E_{2,2} & \text{si } n \text{ est pair,}\end{cases}$$

donc $A+B$ n'est pas nilpotente. On sait par ailleurs que la réponse est positive dans le cas où A et B sont permutables (appliquer la formule du binôme à $(A+B)^{p+q}$, où p et q sont les ordres de nilpotence respectifs de A et B).

(b) Le résultat est obtenu à l'aide des points suivants : si une matrice M est nilpotente, alors M^2 aussi (clair), sa trace est nulle (elle n'a que zéro comme valeur propre et une trigonalisation sur $\mathbb{C}$ donne le résultat), et enfin, on sait que $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$ pour toutes matrices M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$0 = \operatorname{tr}((A+B)^2) = \operatorname{tr}(A^2+B^2+AB+BA) = \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2) + \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA) = 2\operatorname{tr}(AB),$$

ce qui achève la preuve.

85. **RMS 2012 288 X ESPCI PC**

Comparer $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 = 0\}$ et $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr} A = 0\}$.

Solution. — Si $A^2 = 0$, sa seule valeur propre est zéro, et comme A est trigonalisable, sa trace est nulle, donc $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$. L'inclusion est stricte, car la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

est manifestement de trace nulle et inversible, donc n'est pas nilpotente.

Algèbre linéaire : déterminants

86. **RMS 2009 342 X ESPCI PC**
Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j}=\sin(a_i+a_j)$. Calculer $\det(A)$.

Solution. — On note C et S les vecteurs colonnes d'ordre n dont les composantes sont $\cos a_i$ et $\sin a_i$. Si C_j désigne la colonne j de la matrice A, on a $C_j=\sin a_j C+\cos a_j S$, donc $\operatorname{rg}(A)\leqslant 2$. Par suite, $\det(A)=0$ pour tout $n\geqslant 3$. Un calcul direct dans le cas $n=2$ donne $\det(A)=-\sin^2(a_1-a_2)$.

87. **RMS 2009 349 X ESPCI PC**
Soit $(a_1,\dots,a_n,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Calculer

$$\det\begin{pmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x\\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & x\\ x & \cdots & x & x+a_n\end{pmatrix}.$$

Solution. — Soit U le vecteur colonne d'ordre n dont toutes les composantes valent 1, et E_j (pour $1\leqslant j\leqslant n$) les vecteurs colonnes de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $\det_{\mathcal{B}}$ désigne le déterminant sur $\mathcal{B}$, il s'agit de calculer $\det_{\mathcal{B}}(xU+a_1E_1,\dots,xU+a_nE_n)$.

- Le caractère multilinéaire de $\det_{\mathcal{B}}$ permet de développer le déterminant à calculer en une somme de 2^n termes de la forme $\det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_n)$ où la colonne C_j est soit xU, soit a_jE_j.
- Le caractère alterné montre que les déterminants évoqués ci-dessus sont nuls dès que deux (au moins) des colonnes sont égales à xU.

Il ne reste donc que $n+1$ termes : le déterminant ne contenant aucune colonne xU, et les n déterminants en contenant exactement une, à savoir

$$\det_{\mathcal{B}}(a_1E_1,\dots,a_nE_n)+\sum_{j=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}(a_1E_1,\dots,xU,a_{j+1}E_{j+1},\dots,a_nE_n)\,.$$

Le calcul est alors immédiat et donne $\sigma_n+x\sigma_{n-1}$, les σ_k désignent les fonctions symétriques élémentaires des nombres $a_1,\dots,a_n$, c'est-à-dire que le déterminant étudié vaut

$$\prod_{k=1}^{n}a_k+x\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}a_i\,.$$

88. **RMS 2009 350 X ESPCI PC**
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) On suppose que $AB=BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2)\geqslant 0$.
   (b) Donner un exemple où A et B sont inversibles, vérifient $AB=BA$ et $\det(A^2+B^2)=0$.
   (c) Donner un exemple où $\det(A^2+B^2)<0$.

Solution. —
   (a) Les matrices $M=A+iB$ et $P=A-iB$ appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et vérifient

$$MP=(A+iB)(A-iB)=A^2-B^2+i(BA-AB)=A^2+B^2\,,$$

puisque A et B commutent. Les éléments de P étant les conjugués de ceux de M, et la conjugaison étant un homomorphisme du corps des complexes, on a $\det(P)=\overline{\det(M)}$. Alors

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\det(MP)=\det(M)\det(P)=\det(M)\overline{\det(M)}=|\det(M)|^2\geqslant 0\,.$$

   (b) On suppose que $n=2$, on choisit $A=I_2$, et B la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour la structure euclidienne orientée canonique. Il est clair qu'il s'agit de deux matrices inversibles, qu'elles commutent, et, comme $B^2=-I_2$, la matrice A^2+B^2 est nulle :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad A^2+B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

On fabrique ensuite un contre-exemple en dimension n en adjoignant à A et B la matrice I_{n-2} pour en faire des matrices d'ordre n diagonales par blocs.

(c) Voici un exemple en dimension 2 (qu'on transporte en dimension n comme indiqué dans la question précédente) :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad A^2+B^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad \det\left(A^2+B^2\right)=-3\,.$$

89. **RMS 2010 295 X ESPCI PC**

À quelle condition une matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ a-t-elle son inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$?

Solution. — On généralise la question au cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ avec n quelconque, et on va prouver que la condition nécessaire et suffisante est : $\det(A)=\pm1$. Dans ce qui suit, on convient que l'adjectif *inversible* fait référence à l'inversibilité en tant que matrice à coefficients réels, et on désigne par A^{-1} l'inverse de A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

La condition est nécessaire. Si A est inversible et si $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, et si on applique le morphisme det à l'égalité $AA^{-1}=I_n$, on obtient $\det(A)\det(A^{-1})=1$. Comme A et A^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, il en est de même de leurs déterminants, donc $\det(A)$ est un entier relatif inversible (dans $\mathbb{Z}$), donc $\det(A)=\pm1$.

La condition est suffisante. Si $\det(A)=\pm1$, alors A est inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}\,A=\pm\,{}^t\mathrm{com}\,A\,.$$

La comatrice de A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ puisque A l'est (les éléments de $\mathrm{com}\,A$ sont des déterminants extraits de A), donc sa transposée aussi, donc A^{-1} aussi.

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

90. **RMS 2012 296 X ESPCI PC**

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ a_{i,j}>0$ et $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}=1$.

(a) Montrer que 1 est valeur propre de A. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

(b) Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$.

Solution. —

(a) Si X_1 est le vecteur colonne d'ordre n dont tous les éléments valent 1, alors $AX_1=X_1$, ce qui prouve que 1 est une valeur propre de A. Si $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1, et si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}|$ soit maximale (donc non nulle, puisque X est propre), on déduit de l'égalité $X=AX$ que $x_{i_0}=\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j$. En divisant par le nombre non nul x_{i_0} et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$1=\left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}=1.$$

Il faut donc que les deux inégalités ci-dessus soient des égalités.

- La première (l'inégalité triangulaire) est une égalité si et seulement si tous les termes $a_{i_0,j}x_j/x_{i_0}$ sont de même signe. Comme les $a_{i,j}$ sont strictement positifs, cela revient à ce que tous les quotients x_j/x_{i_0} soient de même signe, c'est-à-dire à ce que tous les x_j soient du signe de x_{i_0}.
- La deuxième inégalité (qui résulte de ce que $|x_{i_0}|$ est maximale parmi les composantes de X) est une égalité si et seulement si tous les quotients $|x_j/x_{i_0}|$ valent 1. On utilise là encore le fait que les coefficients $a_{i,j}$ sont *strictement* positifs.

En rassemblant les deux conditions, on obtient l'égalité $x_j=x_{i_0}$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, donc X est colinéaire à X_1. Le sous-espace propre $E_1(A)$ est donc la droite engendrée par X_1.

(b) La démarche est la même qu'à la question précédente. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On note encore i_0 un indice tel que le module $|x_{i_0}|$ soit maximal, et on déduit de l'égalité $X=AX$ que $\lambda x_{i_0}=\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j$. En divisant par le nombre non nul $|x_{i_0}|$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda|=\left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}=1.$$

91. **RMS 2009 353 X ESPCI PC**

(a) Soient $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}. Que dire si on suppose seulement $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Soient $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de A.

(b) Montrer que $\det(I_n + A\overline{A})$ est réel.

(c) Soit λ une valeur propre de $A\overline{A}$. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $A\overline{A}$. Trouver un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

(a) Comme $\det(A^{-1})\det(A) = 1$, on a

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det(A^{-1})\det(XI_n - AB)\det(A) = \det(A^{-1}[XI_n - AB]A) = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}.$$

Si on suppose seulement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite (A_n) de matrices inversibles de limite A, pour lesquelles $\chi_{A_nB} = \chi_{BA_n}$. Comme le produit matriciel est continu, et comme l'application $A \mapsto \chi_A$ l'est aussi (elle est polynomiale), on en déduit que $(\chi_{A_nB})_n$ converge vers χ_{AB} et que $(\chi_{BA_n})_n$ converge vers χ_{BA}, d'où l'égalité

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

par passage à la limite.

(b) Le fait que la conjugaison soit un morphisme pour $+$ et $\times$ dans $\mathbb{C}$ montre que $\chi_{\overline{B}} = \overline{\chi_B}$ pour toute matrice B. Alors le calcul suivant prouve que le nombre $\det(I_n + A\overline{A})$ est réel :

$$\det\left(I_n + A\overline{A}\right) = \chi_{A\overline{A}}(1) = \chi_{\overline{A}A}(1) = \chi_{\overline{A\overline{A}}}(1) = \overline{\chi_{A\overline{A}}(1)} = \overline{\det\left(I_n + A\overline{A}\right)}\,.$$

(c) Soit λ une valeur propre de $A\overline{A}$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\backslash\{0\}$ tel que $A\overline{A}X = \lambda X$. En conjuguant cette relation on obtient $\overline{A}A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$. Comme A est supposée inversible, $\overline{A}$ l'est aussi ($\det\overline{A} = \overline{\det A} \neq 0$), et on peut écrire :

$$A\overline{X} = \overline{\lambda}\left(\overline{A}\right)^{-1}\overline{X}\,,$$

soit encore $\left(A\overline{A}\right)\left(\overline{A}\right)^{-1}\overline{X} = \overline{\lambda}\left(\overline{A}\right)^{-1}\overline{X}$. Comme $\left(\overline{A}\right)^{-1}$ est inversible, $\left(\overline{A}\right)^{-1}\overline{X} \neq 0$ et donc $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $A\overline{A}$ et $\left(\overline{A}\right)^{-1}\overline{X}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

92. **RMS 2009 364 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et ${}^tA$ ont-elles le même spectre ? Les mêmes espaces propres ?

Solution. — On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme une matrice et sa transposée ont le même déterminant, on a $\chi_A = \chi_{{}^tA}$, donc A et ${}^tA$ ont le même spectre. En revanche, elles n'ont pas nécessairement les mêmes espaces propres, comme le montre l'exemple de $A = I_2 + E_{1,2}$, dont l'unique sous-espace propre est la droite engendrée par e_1, alors que l'unique sous-espace propre de ${}^tA$ est la droite engendrée par e_2.

93. **RMS 2009 352 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Solution. — Le polynôme $X^2 + 1$ est annulateur de A. Les valeurs propres complexes de A sont donc parmi les racines de ce polynôme : il s'agit donc de i, avec multiplicité p, et de $-i$, avec multiplicité $n - p$, pour un certain entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{tr}(A) = pi - (n-p)i = (2p - n)i$. Par ailleurs, A est à coefficients réels, donc sa trace est réelle ce qui implique que $n = 2p$ (en particulier, n est pair), et alors

$$\det(A) = (i)^p(-i)^{n-p} = i^{n/2}(-i)^{n/2} = 1^{n/2} = 1\,.$$

94. **RMS 2012 299 X ESPCI PC**

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

Solution. — On remarque que si Q divise P et que $Q(M) = 0$, alors $P(M) = 0$.

(a) La réponse est oui. Le théorème de d'Alembert et Gauss donne l'existence d'une racine complexe λ de P. La matrice $M = \lambda I_n$ convient, en vertu de la remarque initiale appliquée à $Q = X - \lambda$.

(b) Si P possède une racine réelle, on utilise le même raisonnement qu'à la question (a). Sinon, c'est que n est pair, et on l'écrit $n = 2p$. Soit $Q = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ un facteur irréductible de P, avec $a^2 - 4b < 0$. Le polynôme Q possède deux racines complexes conjuguées non réelles, notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -b & -a \\ ab & a^2 - b \end{pmatrix}$$

vérifie $Q(A) = 0$. par conséquent, la matrice diagonal par blocs $M = \mathrm{diag}(A, \dots, A)$ convient, en vertu de la remarque initiale et du calcul par blocs $\forall R \in \mathbb{R}[X],\ R(M) = \mathrm{diag}(R(A), \dots, R(A))$.

95. **RMS 2012 300 X ESPCI PC**

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, puis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0$, et A la matrice de f dans la base canonique.

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Montrer que X^n divise P.

(b) Soit $\mathcal{E} = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. À quelle condition la matrice $P(A)$ est-elle nilpotente ?

Solution. —

(a) On vérifie aisément que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A^{n-1} = E_{1,n},\ \text{ et } \forall k \geqslant n,\ A^k = 0.$$

Si $P = \sum_{k=0} +\infty a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, la suite (a_k) étant nulle à partir d'un certain rang, on déduit des calculs de puissances de A que

$$P(A) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ddots & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, si $P(A) = 0$, alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, ce qui prouve que X^n divise P.

(b) Le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ est non vide car il contient la matrice nulle et il est clairement stable par combinaison linéaire. La question précédente montre que l'application

$$\varphi\colon (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ddots & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{E}$. Sa linéarité étant claire, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et on en déduit que $\dim \mathcal{E} = n$.

(c) On va montrer que la condition nécessaire et suffisante est : X divise P.
Avec les notations de la question (a), les termes diagonaux de $P(A)^k$ valent a_0^k. Pour que $P(A)$ soit nilpotente, il faut donc que $a_0 = 0$. Réciproquement, si $a_0 = 0$, c'est-à-dire si X divise P, ce que l'on écrit $P = XQ$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(A)^n = (X^n Q^n)(A) = A^n Q(A) = 0$ puisque $A^n = 0$.

96. **RMS 2012 301 X ESPCI PC** .

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Montrer que A et B commutent si et seulement s'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et P et Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.

Solution. — Si A et B commutent, elles sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $R^{-1}AR$ et $R^{-1}BR)$ soient diagonales, respectivement égales à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Le théorème d'interpolation de Lagrange aux points $1,\dots,n$ — deux à deux distincts — affirme l'existence (et l'unicité) de polynômes P et Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $P(k)=\lambda_k$ et $Q(k)=\mu_k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Si D désigne la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1,2,\dots,n)$, on a alors

$$\begin{aligned}A&=R\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)R^{-1}=RP(D)R^{-1}=P(RDR^{-1})=P(C),\\ B&=R\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)R^{-1}=RQ(D)R^{-1}=Q(RDR^{-1})=Q(C),\end{aligned}$$

où C désigne la matrice RDR^{-1}.

La réciproque vient de ce que deux polynômes en la même matrice C commutent.

97. **RMS 2009 355 X ESPCI PC**

Soit $T: P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto(3-X)P'+X^2P''-P\in\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T est il injectif ? Diagonalisable ?

Solution. — La fonction polynomiale $f\colon x\mapsto x^2-2x-1$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, et n'a pas de racines entières (l'étudier).

On calcule $T(X^k)=k(3-X)X^{k-1}+k(k-1)X^2X^{k-2}-X^k=(k^2-2k-1)X^k+3kX^{k-1}$. La matrice de T sur la base canonique est donc une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les $f(k)=k^2-2k-1$: ce sont donc les valeurs propres de T.

Comme f n'a pas de racines entières, T est injectif (aucune valeur propre n'est nulle).

Comme $f(0)=-1=f(2)$, et comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, le nombre -1 est la seule valeur propre multiple de T (et elle est double) lorsque $n\geqslant 2$ (si $n\leqslant 1$, les valeurs propres sont simples). La diagonalisabilité de T est donc équivalente à $\dim(E_{-1}(T))=2$.

Or $T(P)=-P$ équivaut à $(3-X)P'+X^2P''=0$. Comme on le constate aisément en résolvant l'équation différentielle correspondante, les seuls polynômes solution sont ceux de $\mathbb{R}_0[X]=E_{-1}(T)$, qui est de dimension 1.

Finalement, T est diagonalisable si et seulement si $n=0$ ou 1.

98. **RMS 2009 356 X ESPCI PC**

Déterminer les éléments propres de

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\\0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

Solution. — On note A la matrice à étudier, dont les colonnes sont notées C_j, pour $1\leqslant j\leqslant n$. On note E_i les vecteurs colonnes de la base canonique. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $n\geqslant 2$ (si $n=1$, la matrice A n'a guère de sens).

Si $n=2$, les valeurs propres de A sont 1 et -1, et les sous-espaces propres sont les droites respectivement engendrées par E_1+E_2 et E_1-E_1 (A est la matrice de la symétrie par rapport à la première et de base la seconde).

Voici ensuite trois solutions pour $n\geqslant 3$.

- On constate que $\operatorname{Im}(A)=\operatorname{Vect}(C_1,C_2)$, ces deux colonnes formant une famille libre. Alors $\operatorname{rg}(A)=2$ et $\dim(\operatorname{Ker}A)=n-2$, donc A admet zéro comme valeur propre, et on voit qu'une base de son noyau est $(E_1-E_j)_{3\leqslant j\leqslant n}$. On constate aisément que la famille $\mathcal{B}'=(E_1',\dots,E_n')$ définie par $E_1'=E_1$, $E_2'=E_2$ et $E_i'=E_1-E_i$ pour $i\geqslant 3$ est une base, et que, si P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, on a

$$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&n-1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\\0&-1&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

  Seule la deuxième colonne mérite une justification : $A'E_2'=AE_2=E_1+E_3+\cdots+E_n=E_1'+(E_1-E_3')+\cdots+(E_1-E_n')=(n-1)E_1'-E_3'-\cdots-E_n'$. Un calcul par blocs immédiat donne $\chi_A(X)=\chi_{A'}(X)=(-X)^{n-2}(X^2-(n-1))$.

  Les deux valeurs propres restantes de A sont donc $\pm\sqrt{n-1}$: elles sont distinctes, donc simples, et les droites propres correspondantes sont engendrées par $(1,\pm\sqrt{n-1},1,\dots,1)$.

– On calcule χ_A par des transformations élémentaires (d'abord $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $3 \leqslant j \leqslant n$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n L_i$) :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -X & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 1 & X & \cdots & X \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix},$$
$$= (-X)^{n-2}(X^2 - (n-1)).$$

Alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\}$, et on conclut comme précédemment.

– On constate que la rang de A vaut 2, donc que zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n-2$. Il reste au plus deux valeurs propres à découvrir, que l'on note λ_1 et λ_2. Comme la diagonale de A^2 est formée des termes $1, n-1, 1, 1, \dots, 1$ le calcul de la trace de A et de la trace de A^2 donnent le système

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(n-1).$$

On en déduit que la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ vaut $\{\sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\}$, et on conclut comme ci-dessus pour la recherche des deux droites propres $E_{\pm\sqrt{n-1}}(A)$.

Remarque. — On vérifie aisément que les vecteurs propres trouvés forment une famille orthogonale.

99. **RMS 2009 357 X ESPCI PC**

Déterminer les éléments propres de

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. — On note A la matrice à étudier, dont les colonnes sont notées C_j, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. On note E_i les vecteurs colonnes de la base canonique. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $n \geqslant 2$.

Il est clair que $\mathrm{rg}(A) = 2$, donc que $\dim(\mathrm{Ker}\, A) = n-2$, et la forme de A met en évidence la base suivante de son noyau : $(E_1 - E_2, \dots, E_1 - E_{n-1})$.

On calcule χ_A par des transformations élémentaires (d'abord, $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $2 \leqslant j \leqslant n-1$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=3}^n L_i$), et enfin un développement par rapport à la première colonne, suivi d'un développement par rapport à la première ligne :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -X & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -X & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & X & X & \cdots & X+1 \\ 0 & -X & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -X & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & -X & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -X & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix},$$
$$= (1-X)(-X)^{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ -X & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -X & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -X & 1 \end{vmatrix},$$
$$= (1-X)(-X)^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^n(n-1)(-X)^{n-2},$$
$$= (-1)^{n-1}X^{n-2}[-X^2 + X + n - 1]$$

Par suite $\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$. On a déjà calculé $E_0(A) = \mathrm{Ker}\, A$. Si λ est une des deux autres valeurs propres, on vérifie sans peine que $E_\lambda(A)$ est la droite engendrée par $(1, \dots, 1, \lambda)$.

Méthode alternative. — Une fois déterminé le noyau, il reste deux valeurs propres (distinctes ou confondues) à calculer : on les note λ_1 et λ_2. La trace de A fournit une première équation : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. La diagonale de A^2 est constituée de $(1, \dots, 1, n)$. La trace de A^2 fournit alors une deuxième équation : $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2n - 1$. Par substitution, on en déduit que λ_1 et λ_2 sont les deux racines du polynôme $2(X^2 - X + 1 - n)$, et on retrouve les résultats déjà obtenus.

100. **RMS 2012 297 X ESPCI PC**
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ m_{i,j} = a^{i-j}$.

(a) La matrice M est-elle diagonalisable ?

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

SOLUTION. —

(a) Les lignes de A sont colinéaires à la première ($L_i = a^i L_1$) et non nulles, donc A est de rang 1, donc zéro est valeur propre de A d'ordre $m_0 \geqslant n-1$. Il reste une valeur propre à découvrir, notée λ. On l'obtient grâce à la trace : $(n-1) \times 0 = \lambda = \operatorname{tr} A = n$, donc $\lambda = n \neq 0$. C'est donc une valeur propre simple, et $m_0 = n-1 = \dim E_0(A)$, donc A est diagonalisable.

(b) Une équation de l'hyperplan $E_0(A)$ est $\sum_{j=1}^n a^{-j} x_j = 0$. On vérifie sans peine que la droite $E_n(A)$ est engendrée par le vecteur $(1, a, a^2, \dots, a^{n-1})$.

101. **RMS 2012 302 X ESPCI PC**
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION. —

102. **RMS 2012 303 X ESPCI PC**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.

(b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

SOLUTION. — Voir aussi l'exercice 460 page 323.

(a) On suppose que λ est valeur propre de M. Il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Si l'on écrit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$MX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} X_2 & = & \lambda X_1, \\ AX_1 & = & \lambda^2 X_1. \end{array} \right.$$

Il est impossible que X_1 soit nul, car alors X_2 le serait aussi, donc X serait nul. Par suite, l'égalité $AX_1 = \lambda^2 X_1$ prouve que λ^2 est valeur propre de A.
Réciproquement, si λ^2 est valeur propre de A, il existe un vecteur non nul $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 = \lambda^2 X_1$. Si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\},$$

on vérifie sans peine que $MX = \lambda X$, donc que λ est une valeur propre de M.

(b) On en déduit de la question précédente que les valeurs propres de B sont les racines carrées (complexes) des valeurs propres de A et que, si $\lambda \in \operatorname{Sp}(B)$, alors

$$E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}, \quad X_1 \in E_{\lambda^2}(A) \right\}.$$

La structure de $E_\lambda(B)$ montre que l'application $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ sur $E_\lambda(B)$, donc

$$\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda^2}(A).$$

Si μ est une valeur propre de A, elle admet deux racines carrées complexes distinctes λ et $-\lambda$, sauf si $\mu = 0$, auquel cas elle n'en possède qu'une seule, qui est zéro. On en déduit la discussion suivante, qui prouve l'équivalence attendue :

– ou bien A est inversible et diagonalisable, et alors $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) = 2n$, donc B est diagonalisable ;
– ou bien A n'est pas inversible, et alors $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) - \dim(E_0(A)) \leqslant 2n - \dim(\operatorname{Ker} A) < 2n$, donc B n'est pas diagonalisable ;

– ou bien A est inversible, mais non diagonalisable, et alors $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(B)}\dim(E_\lambda(B)) = 2\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(A)}\dim(E_\mu(A)) < 2n$, donc B n'est pas diagonalisable.

Algèbre linéaire : réduction

103. **RMS 2012 291 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$.

(a) Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

(b) Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$?

Solution. —

(a) Comme la somme des valeurs propres de A, comptées avec leur ordre de multiplicité, qui vaut $\operatorname{tr} A$, est nulle, il y a deux cas.

– Ou bien le spectre de A est réduit à $\{0\}$. Comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, elle est semblable à une matrice B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $B^2 = 0$, on a aussi $A^2 = 0$, donc A est nilpotente.

– Ou bien le spectre de A est de la forme $\{\lambda, -\lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$. Alors A possède deux valeurs propres simples donc est diagonalisable.

(b) Ce n'est plus le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$, comme le montre l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle n'est pas diagonalisable car $\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1$, et elle n'est pas nilpotente car la diagonale de A^n est constante et non nulle.

104. **RMS 2012 292 X ESPCI PC**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Solution. — Comme M est trigonalisable, on peut choisir $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T := P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux (distincts ou non) de T. Comme $\mathbb{C}$ est infini, on peut trouver des nombres complexes $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distincts tels que les sommes $\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n$ soient elles aussi deux à deux distinctes. Posons $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$: c'est une matrice diagonale donc diagonalisable. Comme $T + D$ possède n valeurs propres simples, elle est diagonalisable. Il en est de même de $A = P(-D)P^{-1}$ et $B = P(T + D)P^{-1}$. L'égalité

$$M = PTP^{-1} = A + B$$

achève la preuve.

105. **RMS 2012 293 X ESPCI PC**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

Solution. — Le commutant de A, noté $C(A)$, contient la matrice nulle et est stable par combinaison linéaire : si B_1 et B_2 sont deux éléments de $C(A)$ et si α_1 et α_2 sont deux scalaires, alors $A(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) = \alpha_1 AB_1 + \alpha_2 AB_2 = \alpha_1 B_1 A + \alpha_2 B_2 A = (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A$.

On note ensuite $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A, et $n_1, \dots, n_r$ les dimensions des sous-espaces propres associés. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à A, et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale sous cette forme :

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r}).$$

Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. On sait que si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v. Par conséquent, si $B \in C(A)$, la matrice $P^{-1}BP$ est diagonale par blocs de la forme $\operatorname{diag}(B_1, \dots, B_r)$ avec $B_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Réciproquement une telle matrice diagonale par blocs commute à $P^{-1}AP$. Ce raisonnement montre que l'application

$$(B_1, \dots, B_r) \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{C}) \mapsto P \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_r) P^{-1} \in C(A)$$

est une bijection. Comme elle est manifestement linéaire, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels et on en déduit que

$$\dim C(A) = \dim \prod_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2 = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (\dim E_\lambda(A))^2 .$$

106. **RMS 2012 294 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ pour que A soit semblable à $-A$.

Solution. — On montre que la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$\operatorname{tr} A = \det A = 0.$$

Si A est semblable à $-A$, alors, comme la trace et le déterminant sont des invariants de similitude, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(-A) = -\operatorname{tr} A$, donc $\operatorname{tr} A = 0$, et $\det A = \det(-A) = (-1)^3 \det A$, donc $\det A = 0$.

Réciproquement, si $\operatorname{tr} A = \det A = 0$, la matrice A n'est pas inversible donc zéro est l'une de ses valeurs propres, et on note m_0 sa multiplicité. Il y a au plus deux autres valeurs propres de A, notées λ et μ, et la condition relative à la trace montre que $\lambda + \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. On utilisera plusieurs fois la transitivité de la similitude matricielle, sous la forme suivante : si A est semblable à la fois à B et à $-B$, alors A est semblable à $-A$. On discute suivant la valeur de m_0.

- Si $m_0 = 1$, alors A possède les trois valeurs propres distinctes $0, \lambda, -\lambda$, donc est diagonalisable, et semblable à $D = \operatorname{diag}(0, \lambda, -\lambda)$. En d'autres termes, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ propre de u avec $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = \lambda e_2$ et $u(e_3) = -\lambda e_3$. Comme la matrice de u sur la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$ vaut $-D$, on en déduit que A est aussi semblable à $-D$, donc que A est semblable à $-A$.
- Si $m_0 \geqslant 2$, alors $m_0 = 3$, en vertu de l'étude sur les valeurs propres menée ci-dessus, c'est-à-dire que zéro est la seule valeur propre de A. On discute ensuite suivant la valeur de $\dim \operatorname{Ker} u$.
  - Si $\dim \operatorname{Ker} u = 3$, alors $A = 0$ est semblable à $-A$.
  - Si $\dim \operatorname{Ker} u = 2$, la trigonalisation de u montre que $u^2 = 0$ donc que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit e_1 un vecteur de $\mathbb{C}^3$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u$. On pose $e_2 = u(e_1) \in \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$: c'est un vecteur non nul. On choisit un vecteur $e_3 \in \operatorname{Ker} u$ de sorte que (e_2, e_3) soit une base de $\operatorname{Ker} u$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$: en effet, si $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k e_k = 0$, on applique u à cette égalité ce qui donne $\alpha_1 e_2 = 0$, donc $\alpha_1 = 0$ car $e_2 \neq 0$. Il reste $\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$, ce qui entraîne que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ puisque (e_2, e_3) est une base de $\operatorname{Ker} u$. La matrice de u sur $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    La famille $\mathcal{B}' = (e_1, -e_2, e_3)$ est aussi une base de $\mathbb{C}^3$, et la matrice de u sur $\mathcal{B}'$ est $-B$. On conclut comme précédemment que A est semblable à $-A$.
  - Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, l'image de u est un plan, stable par u. La trigonalisation de u montre que u est nilpotent d'ordre 3. Soit alors e_1 un vecteur de $\mathbb{C}^3$ n'appartenant pas à $\operatorname{Im} u$. On pose $e_2 = u(e_1) \in \operatorname{Im} u \setminus \operatorname{Ker} u$ et $e_3 = u(e_2) \in \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u$, avec $e_3 \neq 0$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$: si $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k e_k = 0$, on applique u^2 à cette égalité, ce qui donne $\alpha_1 e_3 = 0$ avec e_3 non nul, donc $\alpha_1 = 0$, puis on applique u, ce qui montre que $\alpha_2 = 0$, et enfin $\alpha_3 = 0$. La matrice de u sur $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    La famille $\mathcal{B}' = (e_1, -e_2, e_3)$ est aussi une base de $\mathbb{C}^3$, et la matrice de u sur $\mathcal{B}'$ est $-B$. On conclut là encore que A est semblable à $-A$.

107. **RMS 2009 341 X ESPCI PC**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. — On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On ne parle dans cet exercice que de réduction sur le corps des nombres complexes. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que 1 est l'unique valeur propre de A, que $E_1(A) = \operatorname{Vect}(E_1)$, donc que A n'est pas diagonalisable. Si V est un vecteur propre de X, associé à la valeur propre complexe λ, alors $AV = X^n V = \lambda^n V$, donc $\lambda \in \mathcal{U}_n$ et V est colinéaire à E_1, donc E_1 est propre pour X, de valeur propre λ. La matrice X n'a qu'une seule valeur propre, sinon elle serait diagonalisable, et $A = X^n$ le serait aussi. Par suite, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + \alpha E_{1,2}\,.$$

Comme I_2 et $E_{1,2}$ commutent, on a $A = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}\alpha E_{1,2}$, ce qui implique que $n\lambda^{n-1}\alpha = 1$, donc que $\alpha = \frac{\lambda}{n}$, puisque $\lambda^n = 1$. La réciproque étant évidente, les solutions sont les n matrices

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda \in \mathcal{U}_n.$$

108. **RMS 2010 296 X ESPCI PC**

Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. — On note B la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et P le polynôme $X^2 + X + 1$. Comme B est une matrice de symétrie qui n'est pas $\pm I_2$, elle possède les deux valeurs propres 1 et -1. Comme B est une matrice de symétrie carrée d'ordre 2, ses deux valeurs propres sont donc simples, donc ses sous-espaces propres sont deux droites, respectivement engendrées par $E_1 + E_2$ et $E_1 - E_2$.

Si A est solution de l'équation proposée, A et B commutent puisque B est un polynôme en A. Alors les deux droites propres de B sont stables par A, ce qui signifie qu'elles sont aussi des droites propres de A : cette dernière et B sont donc codiagonalisables. La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est telle que

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A. Alors

$$P(A) = B \iff Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}BQ \iff P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}BQ \iff \begin{cases} P(\lambda_1) & = 1, \\ P(\lambda_2) & = -1, \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1(\lambda_1 + 1) & = 0, \\ \lambda_2^2 + \lambda_2 + 2 & = 0. \end{cases}$$

On trouve alors $\lambda_1 = 0$ ou -1 et $\lambda_2 = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$. Comme $A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)Q^{-1}$, on obtient tous calculs faits :

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A \in \left\{ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{7} & 1 - i\sqrt{7} \\ 1 - i\sqrt{7} & -1 + i\sqrt{7} \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 - i\sqrt{7} & 1 + i\sqrt{7} \\ 1 + i\sqrt{7} & -1 - i\sqrt{7} \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 + i\sqrt{7} & -1 - i\sqrt{7} \\ -1 - i\sqrt{7} & -3 + i\sqrt{7} \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 - i\sqrt{7} & -1 + i\sqrt{7} \\ -1 + i\sqrt{7} & -3 - i\sqrt{7} \end{pmatrix} \right\}.$$

109. **RMS 2010 297 X ESPCI PC**

Trouver les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution. — On pose

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On constate que $B^2 = 0$, donc que si $A^2 = B$, alors $A^4 = B^2 = 0$, donc que X^4 est annulateur de A, donc que zéro est la seule valeur propre de A. Comme A est trigonalisable, elle est donc semblable à une matrice de la forme $\alpha E_{1,2}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$, donc A^2 est semblable à $\alpha^2 E_{1,2}^2 = 0$, donc $A^2 = B = 0$, ce qui est faux.

L'équation proposée n'a pas de solution.

110. **RMS 2009 354 X ESPCI PC**

Soit $\mathcal{E}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathcal{E},\ A^2 = I_n$.

(a) Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables.

(b) Montrer que $\mathcal{E}$ est fini. Que dire de son cardinal ?

Solution. —

(a) La première question va résulter de la combinaison des deux propriétés suivantes : tout groupe dont les éléments sont des idempotents d'ordre 2 est commutatif, et toute famille d'endomorphismes diagonalisables et qui commutent est simultanément diagonalisable.

Pour la première : de $(AB)^2 = I_n$, on déduit que $BA(AB)^2 = BA$, et comme $BA(AB)^2 = BAABAB = BBAB = AB$, on a prouvé que $\mathcal{E}$ est commutatif.

Pour la seconde, on renvoie à tout recueil d'exercices.

Comme tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des symétries, donc sont diagonalisables, c'est fait.

(b) Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ pour toute $A \in \mathcal{E}$. Le cardinal de $\mathcal{E}$ est donc fini et au plus égal à 2^n.

Remarque. — On démontre aisément que les sous-groupes $\mathcal{E}$ possibles sont, à conjugaison près, formés des matrices diagonales dont les k premiers éléments sont ± 1, les derniers valant 1, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

111. **RMS 2009 358 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est de rang 1. Montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Solution. — Comme A est de rang 1, son noyau est de rang $n-1$, donc zéro est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. Par suite, χ_A s'écrit $(-X)^{n-1}(a-X)$, où $a \in \mathbb{K}$. On discute ensuite suivant la valeur de a :
- Si $a = 0$, alors la multiplicité de zéro est n alors que $\dim(E_0(A)) = n-1$, donc A n'est pas diagonalisable.
- Si $a \neq 0$, alors a est une valeur propre simple non nulle de A, donc $E_a(A)$ est une droite, donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$, donc A est diagonalisable.

On conclut que A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$. Or la trace de A est, au signe près, le coefficient de X^{n-1} dans χ_A, en l'occurrence a au signe près, et l'exercice est terminé.

112. **RMS 2009 359 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. — Non : toute matrice nilpotente d'ordre 2 non nulle ($E_{1,n}$, entre autres) fournit un contre-exemple.

113. **RMS 2009 360 X ESPCI PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Inversible ? Montrer que $\mathrm{rg}\, A \leqslant \frac{n}{2}$.

Solution. — Le polynôme X^2 est annulateur de A, donc la seule valeur propre de A est zéro. Elle est alors diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

Elle n'est pas inversible, puisque zéro est une valeur propre de A (on peut aussi raisonner par l'absurde : si A inversible, $A^2 = 0$ implique $A = 0\ldots$ qui n'est pas inversible).

La condition $A^2 = 0$ équivaut à $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, A$, donc $\mathrm{rg}\, A \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, A)$: cette dernière valant $n - \mathrm{rg}\, A$, l'inégalité demandée s'ensuit immédiatement.

114. **RMS 2009 361 X ESPCI PC**

Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension n.

(a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si u est diagonalisable, alors la restriction de u à tout sous-espace stable est également diagonalisable.

(b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u(e_i) = ie_i$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Solution. —

(a) Il s'agit d'un théorème du cours. Rappelons la démonstration. Comme u est diagonalisable, il possède un polynôme annulateur P scindé à racines simples, c'est-à-dire que $P(u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. Si F est stable par u, l'égalité $P(u)(x) = 0_E$ est vraie *a fortiori* pour tout $x \in F$, c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur (scindé à racines simples) de la restriction $u_{/\!\!/F}$: cette dernière est donc diagonalisable.

(b) Les valeurs propres de u sont $1, 2, \ldots n$, et elles sont simples. Les sous-espaces propres associés sont les droites $\mathbb{K}e_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u de dimension $k \geqslant 1$, il possède une base propre pour u, qui est nécessairement constituée de vecteurs des droites $\mathbb{K}e_i$, donc F est de la forme $\mathrm{Vect}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. Réciproquement, un tel sous-espace est stable par u (c'est clair).

En ajoutant le sous-espace nul, on trouve finalement 2^n sous-espaces stables, en bijection avec les parties de $[\![1, n]\!]$.

115. **RMS 2009 362 X ESPCI PC**

(a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable est de la forme $aI_2 + N$ où $a \in \mathbb{C}$ et N est nilpotente et non nulle.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$X^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. — On utilise le fait qu'une matrice nilpotente carrée de taille n a un ordre de nilpotence au plus égal à n.

(a) On suppose que M n'est pas diagonalisable. Alors elle admet une unique valeur propre complexe a (si elle en admettait deux distinctes, elles seraient simples et M serait diagonalisable). Comme M est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure M' de la forme $aI_2 + bE_{1,2}$, *via* une matrice de passage P. Alors

$$M = PMP^{-1} = aI_2 + bPE_{1,2}P^{-1} = aI_2 + N\,,$$

où N est nilpotente car $N^2 = b^2PE_{1,2}^2P^{-1} = 0$, puisque $E_{1,2}^2 = 0$. De plus, N est non nulle, sinon $M = aI_2$ serait diagonalisable. La réciproque de cette propriété est vraie, mais n'est pas demandée : si M est de la forme citée, alors $(X-a)^2$ est un polynôme annulateur de M, donc a est l'unique valeur propre complexe de M, et si M était diagonalisable, elle serait égale à aI_2, ce qui contredirait l'hypothèse.

(b) On pose

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on calcule $\chi_B = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. L'unique valeur propre de B est 1, et B n'est pas diagonalisable, sinon elle serait égale à I_2. Une matrice X solution n'est donc pas diagonalisable (sinon $X^n = B$ le serait). Il existe donc un nombre $a \in \mathbb{C}$ et une matrice N nilpotente non nulle tels que $X = aI_2 + N$. Comme a est valeur propre de X, alors a^n est valeur propre de B, donc $a^n = 1$ (et $a^{n-1} = 1/a$). Comme $N^2 = 0$ et comme I_2 et N commutent, il est légitime d'utiliser la formule du binôme, et on obtient

$$X^n = a^nI_2 + na^{n-1}N = I_2 + \frac{n}{a}N\,.$$

L'équation $X^n = B$ entraîne donc

$$N = \frac{a}{n}(B - I_2) = \frac{a}{n}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dont on vérifie immédiatement qu'il s'agit d'une matrice nilpotente d'ordre 2. Cela permet de prouver que $X = aI_n + N$, où a est racine n-ième de l'unité et N donnée par la relation ci-dessus, est solution de $X^n = B$. Finalement, l'équation proposée admet n solutions, qui sont les

$$aI_2 + N = a\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}, \qquad \text{pour } a \in \mathcal{U}_n.$$

Remarque. — Comparer cette solution avec celle, plus géométrique, de l'exercice 107 page 140.

116. **RMS 2009 363 X ESPCI PC**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

À quelle condition portant sur A la matrice B est-elle diagonalisable ?

Solution. — La condition nécessaire et suffisante cherchée est A diagonalisable.

Montrons qu'elle est nécessaire. Si B est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples et annulateur de B. Pour exploiter cette hypothèse, on est amené à calculer $P(B)$, en commençant par B^k : montrons par récurrence l'existence d'un nombre x_k tel que

$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & x_kA^k \\ 0 & 3^kA^k \end{pmatrix}.$$

C'est vrai pour $k = 0$ avec $x_k = 0$, et pour $k = 1$ avec $x_1 = 2$. Si B^k a la forme ci-dessus, alors

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} A^k & x_kA^k \\ 0 & 3^kA^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (2+3x_k)A^{k+1} \\ 0 & 3^{k+1}A^k \end{pmatrix}.$$

C'est bien la forme annoncée, avec $x_{k+1}=3x_k+2$. La résolution de cette relation de récurrence donne $x_k=\alpha 3^k-1$ pour une certaine constante α, déterminée par les conditions initiales. On trouve $\alpha=1$, et finalement

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad B^k=\begin{pmatrix}A^k & (3A)^k-A^k\\ 0 & (3A)^k\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad \forall Q\in\mathbb{R}[X],\quad Q(B)=\begin{pmatrix}Q(A) & Q(3A)-Q(A)\\ 0 & Q(3A)\end{pmatrix}.$$

Lorsque $Q=P$, polynôme annulateur scindé à racines simples de B, on en déduit que $P(A)=0$, donc que A est diagonalisable. On en déduit aussi que $\operatorname{Sp}B=\operatorname{Sp}A\cup(3\operatorname{Sp}A)$, avec des notations évidentes.

Réciproquement, si A est diagonalisable, on note R un polynôme annulateur scindé à racines simples et unitaire de A, que l'on écrit $R=\prod_{i=1}^k(X-\lambda_i)$. On pose $\Lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ et $S=\prod_{i=1}^k(X-3\lambda_i)$, qui est clairement un polynôme annulateur de $3A$. Les ensembles Λ et 3Λ n'étant pas nécessairement distincts, on note $\mu_1,\dots,\mu_\ell$ les éléments deux à deux distincts de la réunion $\Lambda\cup 3\Lambda$, puis on pose $T=\prod_{j=1}^{\ell}(X-\mu_i)$.
Par construction, R et S divisent T, donc T est annulateur de A et de $3A$, donc

$$T(B)=\begin{pmatrix}T(A) & T(3A)-T(A)\\ 0 & T(3A)\end{pmatrix}=0\,.$$

Comme T est scindé à racines simples, B est diagonalisable.

Remarque. — On peut aussi noter que la matrice $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ est diagonalisable, puisque $\chi_M=(X-1)(X-3)$ est scindé à racines simples. Un calcul facile donne $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Si l'on pose $P_n=\begin{pmatrix}I_n&I_n\\0&I_n\end{pmatrix}$, on vérifie que $BP=PC$ avec $C=\begin{pmatrix}A&0\\0&3A\end{pmatrix}$. Comme $P\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on vient de montrer que B est semblable à C, donc que B est diagonalisable si et seulement si C l'est.
Si A est diagonalisable, il existe $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D:=Q^{-1}AQ$ soit diagonale. Alors $R=\operatorname{diag}(Q,Q)$ appartient à $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et vérifie $R^{-1}CR=\operatorname{diag}(Q^{-1}AQ,3Q^{-1}AQ)=\operatorname{diag}(D,3D)$: ceci montre que C, donc B, est diagonalisable.
Réciproquement, si B est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur P de B scindé à racines simples. Il est aussi annulateur de C, donc $P(C)=\operatorname{diag}(P(A),P(3A))=0$, donc $P(A)=0$, donc A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

117. **RMS 2012 304 X ESPCI PC**

Soient $A_1,\dots,A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $A_1\times\cdots\times A_n$.

Solution. — Une matrice nilpotente n'a que zéro comme valeur propre. Comme elle est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
On admet que des matrices individuellement trigonalisables et qui commutent sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage commune $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k\in\{1,\dots,n\}$, $P^{-1}A_kP=T_k$ soit triangulaire supérieure stricte. Alors

$$A_1\cdots A_n=P(T_1\cdots T_n)P^{-1},$$

et il suffit de démontrer que le produit de n matrices $T_1,\dots,T_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures strictes est nul. On peut le démontrer par un calcul matriciel pur, ou par une interprétation en termes d'endomorphismes. Pour cette dernière méthode, on note u_k l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à T_k. Si l'on pose $F_i=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, le caractère triangulaire supérieur strict de T_k montre que u_k vérifie $u(F_i)\subset F_{i-1}$, avec la convention $F_0=\{0\}$. Alors

$$(u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_n)(E)=(u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_n)(F_n)=(u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_{n-1})(F_{n-1})=\cdots=u_1(F_1)=F_0=\{0\},$$

ce qui signifie que $u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_n=0$, et achève la preuve.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

118. **RMS 2012 305 X ESPCI PC**

Soient (E,N) un $\mathbb{R}$–espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la norme N euclidienne si et seulement si

$$\forall(x,y)\in E^2,\quad N(x+y)^2+N(x-y)^2=2N(x)^2+2N(y)^2.$$

Solution. — Si N est une norme euclidienne associée à un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$, la bilinéarité et la symétrie entraînent l'identité dite d'Al Kachî : $\forall(x,y)\in E^2$, $N(x+y)^2=N(x)^2+2\langle x,y\rangle+N(y)^2$. On en déduit que

$$\forall(x,y)\in E^2,\quad N(x+y)^2+N(x-y)^2=N(x)^2+2\langle x,y\rangle+N(y)^2+N(x)^2-2\langle x,y\rangle+N(y)^2=2N(x)^2+2N(y)^2.$$

Réciproquement, on suppose que N vérifie la propriété de l'énoncé, et on montre que l'expression

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right]$$

est bien celle d'un produit scalaire (en effet, on connaît les identités de polarisations qui permettent de calculer la valeur du produit scalaire à partir de la norme euclidienne associée). Sans indication supplémentaire, la démonstration ci-dessous est difficile à inventer dans le temps imparti à un oral. En existe-t-il une plus naturelle ? ?

Toutes les égalités qui suivent seront implicitement précédées de quantificateurs universels sur leurs variables.

(a) La symétrie est évidente, car $N(y-x) = N(x-y)$.

(b) On montre que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. En effet, comme N est positivement homogène,

$$\langle -x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[N(-x+y)^2 - N(-x-y)^2\right] = \frac{1}{4}\left[N(x-y)^2 - N(x+y)^2\right] = -\langle x, y\rangle.$$

(c) On montre que $\langle x+u, v\rangle - \langle x-u, v\rangle = 2\langle u, v\rangle$. Pour cela, on substitue y par $u+v$ puis par $u-v$ dans la propriété satisfaite par N, et on effectue ensuite la différence des deux premières lignes :

$$\begin{aligned} N(x+u+v)^2 + N(x-u-v)^2 &= 2N(x)^2 + 2N(u+v)^2,\\ N(x+u-v)^2 + N(x-u+v)^2 &= 2N(x)^2 + 2N(u-v)^2,\\ N(x+u+v)^2 + N(x-u-v)^2 - N(x+u-v)^2 - N(x-u+v)^2 &= 2N(u+v)^2 - 2N(u-v)^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \langle x+u, v\rangle - \langle x-u, v\rangle &= \frac{1}{4}\left[N(x+u+v)^2 - N(x+u-v)^2 - N(x-u+v)^2 + N(x-u-v)^2\right],\\ &= \frac{1}{2}\left[N(u+v)^2 - N(u-v)^2\right],\\ &= 2\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

(d) On montre que $\langle 2u, v\rangle = 2\langle u, v\rangle$. Il suffit de substituer x par u dans le point (c), et de constater que $\langle 0, v\rangle = \frac{1}{4}\left[N(0+v)^2 - N(0-v)^2\right] = 0$.

(e) On montre que $\langle z+t, v\rangle = \langle z, v\rangle + \langle t, v\rangle$. D'après le point (b), l'égalité du point (c) se réécrit $\langle x+u, v\rangle + \langle u-x, v\rangle = 2\langle u, v\rangle$. En l'appliquant à $u = \frac{1}{2}(z+t)$ et $x = \frac{1}{2}(z-t)$, on obtient $\langle z, v\rangle + \langle t, v\rangle = 2\langle \frac{1}{2}(z+t), v\rangle$. En appliquant le point (d), on trouve finalement

$$\langle z, v\rangle + \langle t, v\rangle = \langle z+t, v\rangle.$$

(f) On montre que $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. La démonstration se fera pour λ entier positif, puis entier relatif, puis rationnel, tout cela de manière algébrique. On passera aux nombres réels par densité.

   i. En utilisant le point (f), on montre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$.

   ii. En utilisant le point (b), on montre que $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   iii. Soit $r = p/q \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $q\langle \frac{p}{q}x, y\rangle = \langle px, y\rangle$ en vertu du point (f)i, et $\langle px, y\rangle = p\langle x, y\rangle$ en vertu du point (f)ii. On en déduit que $\langle \frac{p}{q}x, y\rangle = \frac{p}{q}\langle x, y\rangle$, c'est-à-dire que $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$.

   iv. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et (r_n) une suite de nombres rationnels de limite λ. Comme la fonction norme $N\colon (E, N) \to \mathbb{R}$ est continue sur l'espace vectoriel normé (E, N), on a

$$\langle r_n x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[N(r_n x+y)^2 - N(r_n x-y)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\left[N(\lambda x+y)^2 - N(\lambda x-y)^2\right] = \langle \lambda x, y\rangle.$$

   D'après le point (f)iii, $\langle r_n x, y\rangle = r_n\langle x, y\rangle$, et cette dernière quantité tend vers $\lambda\langle x, y\rangle$ quand n tend vers $+\infty$. L'unicité de la limite donne finalement $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

   On a donc démontré la linéarité à gauche de $\langle\ ,\ \rangle$, et le point (a) entraîne la bilinéarité.

(g) On montre le caractère défini positif : $\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}N(2x)^2 = N(x)^2$ car N est positivement homogène. Comme N est définie positive, il en est de même de $\langle\ ,\ \rangle$ qui est finalement un produit scalaire dur E.

(h) Enfin, il faut vérifier que N est bien la norme euclidienne associée à ce produit scalaire : c'est le calcul mené au point précédent.

119. **RMS 2012 306 X ESPCI PC**
Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $n \geqslant 2$ et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E tels que $\forall i,\ \|v_i\| = 1$ et $\forall i \neq j, \langle v_i, v_j\rangle \leqslant -1/k$. Montrer que $k+1 \geqslant n$.

Solution. — à rédiger

120. **RMS 2012 307 X ESPCI PC**
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

(a) Si $n \geqslant 1$, montrer que P_n est de degré n et admet n racines distinctes dans $]-1, 1[$.
(b) Trouver un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille $(P_n)_{n \geqslant 0}$ est orthogonale. La famille est-elle orthonormée ?

Solution. — à rédiger

121. **RMS 2012 334 X ESPCI PC**
Déterminer $\inf\{\int_0^1 f^2,\ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f(0) = f(1) = 1\}$.

Solution. — à rédiger ? ?

122. **RMS 2012 335 X ESPCI PC**
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})\ f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t,\ f \in E\}$.

Solution. — à rédiger ? ?

123. **RMS 2012 336 X ESPCI PC**
Déterminer $\inf\{\int_{-\pi}^{\pi}(|t| - a - b\cos t)^2\,\mathrm{d}t,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Solution. — à rédiger ? ?

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

124. **RMS 2009 366 X ESPCI PC**
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $A+B$ et AB sont-elles dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

Solution. — Non ($2I_n = I_n + I_n \notin \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$), et oui ($\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$).

125. **RMS 2012 308 X ESPCI PC**
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Déterminer les A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \langle X, AX\rangle = 0$.

Solution. — à rédiger

126. **RMS 2012 311 X ESPCI PC**
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$.

Solution. — à rédiger

127. **RMS 2012 312 X ESPCI PC**
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leqslant p < n$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B = {}^tAA$.

(a) Montrer que B est inversible.
(b) Montrer que $AB^{-1}\,{}^tA$ est un projecteur de rang p.

Solution. — à rédiger

128. **RMS 2012 313 X ESPCI PC**
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer deux des trois propriétés impliquent la troisième :

(i) f est une isométrie ;
(ii) $f^2 = -\mathrm{id}$;
(iii) $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0$.

Solution. — à rédiger

129. **RMS 2012 314 X ESPCI PC**
Soient $A \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AP) \leqslant \mathrm{tr}\,A$.

Solution. — à rédiger

130. **RMS 2012 315 X ESPCI PC**
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, et p et q les projecteurs orthogonaux sur F et G.

(a) Montrer que pqp est symétrique.
(b) Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.
(c) Montrer que pq est diagonalisable.

Solution. — à rédiger

131. **RMS 2012 316 X ESPCI PC**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.
(b) Si $p \in \{1, \dots, n-1\}$, soit $A_p = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\det(A_p) \geqslant 0$.

Solution. — à rédiger

132. **RMS 2012 317 X ESPCI PC**
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $a\|X\|^2 \leqslant \langle X, AX\rangle \leqslant b\|X\|^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x/in[a, b]$, $P(x) > 0$. Montrer que $P(A)$ est symétrique définie positive.

Solution. — à rédiger

Espaces euclidiens de dimension 3, produit vectoriel

133. **RMS 2012 309 X ESPCI PC**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$. Montrer que f est une rotation.

Solution. — à rédiger

134. **RMS 2012 310 X ESPCI PC**
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Soient a, b dans $\mathbb{R}^3$ et $f\colon x \mapsto \langle a, x\rangle b + b \wedge x$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que f soit un isomorphisme.
(b) Sous ces conditions, déterminer f^{-1}.

Solution. — à rédiger

Analyse

Espaces vectoriels normés

135. **RMS 2012 318 X ESPCI PC**
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties fermées, bornées et non vides de $\mathbb{R}^3$. Pour tous A et B éléments de $\mathcal{E}$, on pose $d(A, B) = \sup_{x\in A} (\inf_{y\in B} d(x, y)) + \sup_{y\in B} (\inf_{x\in A} d(x, y))$.

(a) Montrer cette application est bien définie.
(b) Montrer que $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$.
(c) Montrer que $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3,\ d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

Solution. — Il est sous-entendu dans l'énoncé que la distance d sur $\mathbb{R}^3$ est associée à une norme, que l'on notera $\|\ \|$. La fonction d étudiée ici est proche de la distance δ de Hausdorff sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^3$, donnée par $\delta(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A} (\inf_{y\in B} d(x, y)), \sup_{y\in B} (\inf_{x\in A} d(x, y))\right)$.

(a) Les ensembles $\{d(x, y),\ y \in B\}$ à x fixé dans A, et $\{d(x, y),\ x \in A\}$ à y fixé dans B, sont non vides et minorés par zéro, donc leurs bornes inférieures existent.
Comme A et B sont bornées, il existe deux nombres réels a et b tels que $\forall (x, y) \in A \times B$, $\|x\| \leqslant a$ et $\|y\| \leqslant b$. Alors, pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a $d(x, y) = \|x - y\| \leqslant a + b$. On en déduit que les ensembles $\{d(x, y),\ y \in B\}$ à x fixé dans A, et $\{d(x, y),\ x \in A\}$ à y fixé dans B sont aussi majorés par $a + b$, donc leurs bornes inférieures sont majorées par $a + b$.
Par suite, les ensembles $\{\inf_{y\in B} d(x, y),\ x \in A\}$ et $\{\inf_{x\in A} d(x, y),\ y \in B\}$ sont non vides et majorés, donc admettent des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de $d(A, B)$.

(b) On commence par démontrer que $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)=0$ si et seulement si $A\subset B$.
- Si $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)=0$, alors $\inf_{y\in B} d(x,y)=0$ pour tout $x\in A$ (la borne supérieure d'un ensemble de nombres positifs est nulle si et seulement si cet ensemble est réduit à $\{0\}$). Pour tout $x\in A$, il existe donc une suite (y_n) d'éléments de B qui converge vers x. Comme B est fermée, la limite de cette suite appartient à B, c'est-à-dire que $x\in B$: on vient d'établir que $A\subset B$.
- Si $A\subset B$, l'ensemble $\{d(x,y), y\in B\}$ contient zéro (faire $y=x$) et est inclus dans $\mathbb{R}_+$, donc $\inf_{y\in B} d(x,y)=0$ pour tout $x\in A$, donc $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)=0$.

Voici la démonstration principale : si $d(A,B)=0$, alors $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)=0$ et $\sup_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} d(x,y)\right)=0$, car une somme de nombres positifs est nulle seulement si chacun de ses termes est nul. D'après le raisonnement ci-dessus, $A\subset B$, et $B\subset A$ symétriquement, donc $A=B$.

Réciproquement, si $A=B$, alors $A\subset B$ donc $\sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)=0$, et $B\subset A$, donc $\sup_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} d(x,y)\right)=0$, donc $d(A,B)=0$.

(c) Dans ce qui suit, on utilise le lemme suivant : si $\forall z\in C,\ f(z)\leqslant a+g(z)$, où a est indépendant de z, alors

$$\inf_{z\in C} f(z)\leqslant a+\inf_{z\in C} g(z).$$

En effet, comme la borne inférieure est un minorant particulier, on a d'abord $\forall z\in C$, $\inf_{t\in C} f(t)\leqslant f(z)\leqslant a+g(z)$, donc $\forall z\in C$, $\inf_{t\in C} f(t)-a\leqslant g(z)$. Le membre de gauche est indépendant de z, c'est donc un minorant de g sur C, et comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on en déduit que $\inf_{t\in C} f(t)-a\leqslant \inf_{z\in C} g(z)$, qui est l'inégalité attendue, au nom près de la variable muette t.

L'inégalité triangulaire dit que $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ pour tout $(x,y,z)\in A\times B\times C$. On déduit du lemme ci-dessus que $\inf_{z\in C} d(x,z)\leqslant d(x,y)+\inf_{z\in C} d(y,z)$, puis, comme la borne supérieure est un majorant particulier, que

$$\inf_{z\in C} d(x,z)\leqslant d(x,y)+\sup_{y\in B}\left(\inf_{z\in C} d(y,z)\right).$$

Le membre de gauche et le terme $\sup_{y\in B}\left(\inf_{z\in C} d(y,z)\right)$ étant indépendants de y, on déduit du lemme (appliqué à la variable y cette fois) que $\inf_{z\in C} d(x,z)\leqslant \inf_{y\in B} d(x,y)+\sup_{y\in B}\left(\inf_{z\in C} d(y,z)\right)$. Une variante du lemme (avec une borne supérieure au lieu d'une borne inférieure) montre enfin que

$$\sup_{x\in A}\left(\inf_{z\in C} d(x,z)\right)\leqslant \sup_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} d(x,y)\right)+\sup_{y\in B}\left(\inf_{z\in C} d(y,z)\right).$$

En permutant les rôles de x et de z, on obtient de la même manière

$$\sup_{z\in C}\left(\inf_{x\in A} d(x,z)\right)\leqslant \sup_{z\in C}\left(\inf_{y\in B} d(z,y)\right)+\sup_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} d(y,x)\right).$$

Enfin, en ajoutant les deux dernières égalités, et en utilisant le caractère symétrique de d, on obtient

$$d(A,C)\leqslant d(A,B)+d(B,C).$$

136. **RMS 2012 319 X ESPCI PC**

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix}1 & a/n\\ -a/n & 1\end{pmatrix}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. — On pose

$$A_n=\begin{pmatrix}1 & a/n\\ -a/n & 1\end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A_n vaut $X^2-2X+1+a^2/n^2$. Les valeurs propres complexes de A_n sont simples et valent $1\pm ia/n$, donc A_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On résout $AX=(1+\varepsilon ia/n)X$, avec $X={}^t\!\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $\varepsilon\in\{-1,1\}$:

$$AX=\left(1+\varepsilon i\frac{a}{n}\right)X\iff x+\frac{a}{n}y=\left(1+\varepsilon i\frac{a}{n}\right)x\iff y=\varepsilon ix.$$

Les deux droites propres de A_n sont donc indépendantes de n. Si l'on pose

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\quad\text{alors}\quad P^{-1}A_nP=\operatorname{diag}\left(1+i\frac{a}{n},1-i\frac{a}{n}\right)\quad\text{donc}\quad A_n^n=P\operatorname{diag}\left(\left(1+i\frac{a}{n}\right)^n,\left(1-i\frac{a}{n}\right)\right)P^{-1}.$$

Il suffit de déterminer la limite dans $\mathbb{C}$ des suites de terme général $\left(1+\varepsilon i\frac{a}{n}\right)^n$. Il est tentant de procéder comme dans le cas réel, avec un développement limité du logarithme, et on obtient $\lim\left(1+\varepsilon i\frac{a}{n}\right)^n=e^{ia}$.

On justifie ce résultat sans recourir à la fonction logarithme dans le plan complexe, en écrivant la forme trigonométrique des valeurs propres :

$$1+\varepsilon i\frac{a}{n}=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}e^{i\arctan(\varepsilon a/n)}$$

Il en résulte que $\left(1+\varepsilon i\frac{a}{n}\right)^n=(1+\frac{a^2}{n^2})^{n/2}e^{in\arctan(\varepsilon a/n)}=\exp\left(\frac{n}{2}\ln(1+\frac{a^2}{n^2})+in\arctan(\varepsilon a/n)\right)=\exp\left(\frac{a^2}{2n}+\varepsilon ia+\mathrm{o}(1)\right)$, qui tend bien vers $e^{\varepsilon ia}$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent

$$\lim A_n^n=P\operatorname{diag}(e^{ia},e^{-ia})P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia}&0\\0&e^{-ia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{ia}&e^{-ia}\\ie^{ia}&-ie^{-ia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos a&\sin a\\-\sin a&\cos a\end{pmatrix}.$$

La limite cherchée est donc la matrice de la rotation d'angle $-a$ dans le plan euclidien orienté.

137. **RMS 2012 320 X ESPCI PC**

Déterminer les $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que les suites (A^n) et (A^{-n}) soient bornées.

Solution. — On fixe arbitrairement une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, notée $\|\ \|$. Si $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on remarque alors que $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mapsto\|M\|_P=\|P^{-1}MP\|$ est aussi une norme.

On distingue deux cas.

– Ou bien A est diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, et alors $P^{-1}A^{-1}P=\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1})$. Comme $\|\ \|_P$ est une norme, équivalente à $\|\ \|$ puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est de dimension finie, les suites (A^n) et (A^{-n}) sont bornées si et seulement si les suites $(\operatorname{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n))$ et $(\operatorname{diag}(\lambda_1^{-n},\lambda_2^{-n}))$ sont bornées. On vérifie ce caractère borné à l'aide de la norme $M=(m_{i,j})\mapsto\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}|m_{i,j}|$: pour cela, il faut et il suffit que les suites géométriques (λ_k^n) et (λ_k^{-n}) soient bornées pour $k\in\{1,2\}$, ou encore que les modules $|\lambda_k|$ et $|\lambda_k^{-1}|$ de leurs raisons soient inférieurs ou égaux à 1. Cela équivaut finalement à

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1.$$

– Ou bien A n'est pas diagonalisable. Elle possède une unique valeur propre λ, et elle est trigonalisable. On note $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $z\in\mathbb{C}^*$ (il n'est pas nul sinon $A=\lambda I_2$ est diagonalisable) tels que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda&z\\0&\lambda\end{pmatrix}=\lambda I_2+zE_{1,2}\quad\text{et alors}\quad P^{-1}A^{-1}P=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&-z\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}=\lambda^{-1}I_2-zE_{1,2}.$$

La suite (A^n) est bornée si et seulement si la suite $((\lambda I_2+zE_{1,2})^n)$ l'est. Comme I_2 et $E_{1,2}$ sont permutables, et comme $E_{1,2}$ est nilpotente d'ordre 2, la formule du binôme donne

$$(\lambda I_2+zE_{1,2})^n=\lambda^nI_2+nz\lambda^{n-1}E_{1,2}=\begin{pmatrix}\lambda^n&nz\lambda^{n-1}\\0&\lambda^n\end{pmatrix}.$$

On vérifie ce caractère borné à l'aide de la même norme que précédemment : pour que (A^n) soit bornée, il faut et il suffit que les deux suites de termes généraux λ^n et $nz\lambda^{n-1}$ soient bornées, ce qui équivaut à $|\lambda|<1$. De la même manière, (A^{-n}) est bornée si et seulement si $|\lambda^{-1}|<1$, ce qui est incompatible avec la condition précédente.

La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc : A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

138. **RMS 2012 321 X ESPCI PC**

Soit $n\geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.

Solution. — On admet un instant l'existence d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et semblable à $2A$. Si $\|\ \|$ était une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude, on aurait $\|A\|=\|2A\|=2\|A\|$ avec $\|A\|\neq 0$ puisque $A\neq 0$, ce qui est impossible.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est la matrice élémentaire $E_{1,2}$. Soit $\mathcal{B}'$ la famille $(e_1/2,e_2,\dots,e_n)$: il est clair que c'est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de u sur cette base vaut $2E_{1,2}=2A$, car $u(e_2)=e_1=2(e_1/2)$ et $u(e_i)=0$ pour tout $i\neq 2$. Il existe donc bien une matrice non nulle A semblable à $2A$.

139. **RMS 2009 367 X ESPCI PC**

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure possédant une unique valeur propre a. Montrer l'équivalence entre : (i) $|a|<1$; (ii) $M^p\to 0$ quand $p\to+\infty$; (iii) $\sum M^p$ converge.

Solution. — On constate que $M=aI_n+N$, où N est une matrice triangulaire stricte d'ordre n, donc nilpotente d'ordre au plus n (vérification extrêmement classique). Comme I_n et N commutent, on peut calculer M^p par la formule du binôme de Newton : $M^p=\sum_{k=0}^p\binom{p}{k}a^{p-k}N^k$. Si $p\geqslant n$, la matrice N étant nilpotente d'ordre au plus n, il ne reste que

$$M^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}a^{p-k}N^k\ .$$

Il s'agit ci-dessus d'une somme de $n+1$ termes, où n est fixe (c'est p qui est la variable des suites ou des séries). Il suffira de prouver la convergence des $n+1$ séries (ou suites) dont les termes généraux sont $\binom{p}{k}a^{p-k}N^k$ pour établir la convergence de la série (ou suite) de terme général M^p. On choisit la norme définie par $\|A\| = \max_{i,j}|a_{i,j}|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on pose $m = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\|N^k\|$. On donne alors une démonstration circulaire.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Le coefficient binomial peut être majoré de la manière suivante : $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \leqslant \frac{p^k}{k!}$. Alors, pour $p \geqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\left\|\binom{k}{p}a^{p-k}N^k\right\| \leqslant \frac{m}{k!}p^k|a|^{p-k}\ .$$

Comme $|a| < 1$, les $n+1$ suites $(p^2 \times p^k a^{p-k})_{p\geqslant n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont toutes convergentes (comparaison entre suites géométriques et suites puissances), donc les $n+1$ séries $\sum_{p\geqslant 0}\binom{p}{k}a^{p-k}N^k$ convergent absolument, par application de la règle de Riemann, donc convergent. Par conséquent, la série $\sum_{p\geqslant 0} M^p$ converge.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Si une série converge, son terme général tend vers zéro.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme (M^p) converge vers la matrice nulle, l'élément $(1,1)$ de la matrice M^p est le terme général d'une suite de limite nulle. Or cet élément vaut a^p, et on sait bien que, si a^p tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$, alors $|a| < 1$.

Suites : généralités

140. **RMS 2009 369 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe.

(a) On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle nécessairement convergente ?

(b) On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle nécessairement convergente ?

Solution. —

(a) Non, pas nécessairement, puisqu'aucun des termes de la suite extraite $(u_{6n+5})_{n\geqslant 0}$ ne figure dans les deux suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n\geqslant 0}$. Un contre exemple est donné par $u_{6n+5} = 1$ et $u_k = 0$ si k n'est pas de la forme $6n+5$.

(b) Oui. On note ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites des suites extraites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ respectivement. La suite $(u_{3(2n+1)+1})$ est extraite à la fois de (u_{3n+1}) et de (u_{2n}) donc elle converge vers ℓ_1 et ℓ_3 à la fois, donc $\ell_1 = \ell_3$. La suite $(u_{3(2n)+1})$ est extraite à la fois de (u_{2n+1}) et de (u_{3n+1}) donc elle converge vers ℓ_2 et ℓ_3 à la fois, donc $\ell_2 = \ell_3$. On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$, et c'est un exercice classique que de démontrer que, si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers *la même* limite, alors la suite (u_n) converge.

141. **RMS 2009 370 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{2n} \to \ell_1$, $u_{2n+1} \to \ell_2$ et $u_{n^2} \to \ell_3$, où les ℓ_k sont trois nombres complexes. Que dire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

Solution. — La suite $(u_{(2n)^2})$ est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{n^2}) donc elle converge vers ℓ_1 et ℓ_3 à la fois, donc $\ell_1 = \ell_3$. La suite $(u_{(2n+1)^2})$ est extraite à la fois de (u_{2n+1}) et de (u_{n^2}) donc elle converge vers ℓ_2 et ℓ_3 à la fois, donc $\ell_2 = \ell_3$. On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$, et c'est un exercice classique que de démontrer que, si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers *la même* limite, alors la suite (u_n) converge.

142. **RMS 2009 377 X ESPCI PC**

(a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (k_n)_{n\geqslant 0},\ u_{k_n} \to x\}$ est un intervalle (la suite (k_n) est supposée strictement croissante).

(b) Trouver un exemple pour lequel $A = [0,1]$.

Solution. — On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe, c'est-à-dire si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (x,y) \in A^2,\ [x,y] \in A$. Comme la suite est bornée, le théorème de Bolzano et Weierstrass affirme que A est non vide. C'est la seule fois où l'on invoquera le caractère borné de (u_n).

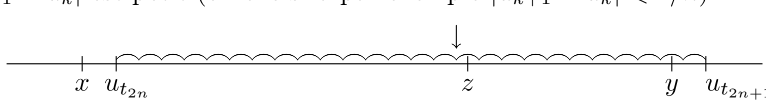
(a) Il s'agit de prouver que A est convexe. Si A est réduit à un seul élément, c'est vrai. Dans le cas contraire, on fixe x et y dans A, avec $x < y$, et $z \in]x,y[$. Il existe deux suites extraites (u_{k_n}) et (u_{ℓ_n}) de limites respectives x et y.

On va alors construire une autre suite extraite $(u_{t_n})_{n\geqslant 2n_0}$ qui respecte les trois conditions suivantes :

i. $u_{t_{2n}}$ est strictement plus petit que z, ce qui sera réalisé en le choisissant proche de x ;

ii. $u_{t_{2n+1}}$ est strictement plus grand que z, ce qui sera réalisé en le choisissant proche de y ;

iii. si $k \geqslant t_{2n}$, alors $|u_{k+1} - u_k|$ est petit (on choisira par exemple $|u_{k+1} - u_k| \leqslant 1/n$).



Comme on le voit sur le dessin, pour aller de $u_{t_{2n}}$ à $u_{t_{2n+1}}$, on doit faire de petits pas, donc passer près de z, et cela se produit une infinité de fois, ce qui nous fait comprendre qu'une certaine suite extraite de u [qui n'est pas (u_{t_n}), mais plutôt la suite dont le terme général est indiqué par la flèche] va converger vers z. Le dessin est un peu faux, car il laisse croire que la suite (u_k) est croissante pour $t_{2n} \leqslant k \leqslant t_{2n+1}$, mais ce n'est *a priori* pas le cas.

Comme les suites extraites (u_{k_p}) et (u_{ℓ_p}) convergent vers x et y respectivement, pour chaque réel strictement positif ε, les ensembles

$$K_\varepsilon = \{p \in \mathbb{N}, \forall j \geqslant p,\ |x - u_{k_j}| \leqslant \varepsilon\},$$
$$L_\varepsilon = \{p \in \mathbb{N},\ \forall j \geqslant p,\ |y - u_{\ell_j}| \leqslant \varepsilon\},$$

sont des voisinages entiers de $+\infty$, c'est-à-dire des ensembles de la forme $[N, +\infty[\cap\mathbb{N}$. Comme la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers zéro, l'ensemble

$$U_\varepsilon = \{p \in \mathbb{N},\ \forall j \geqslant p,\ |u_{j+1} - u_j| \leqslant \varepsilon\}$$

est lui aussi un voisinage entier de $+\infty$. On remarque enfin que l'intersection d'un nombre fini de tels voisinages est encore un voisinage entier de $+\infty$.

Voici la construction de l'extractrice (t_n) par récurrence. On choisit tout d'abord $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < \min(|z - x|, |y - z|)$.

- On pose $t_{2n_0} = \min(K_{n_0} \cap U_{n_0})$ et $t_{2n_0+1} = \min(L_{n_0} \cap [t_{2n_0} + 1, +\infty[)$. Ces nombres sont bien définis car les ensembles dont on prend le minimum sont des parties non vides de $\mathbb{N}$, puisque ce sont des voisinages entiers de $+\infty$. Par construction, $|u_{t_{2n_0}} - x| \leqslant \frac{1}{n_0}$, $|u_{t_{2n_0+1}} - y| \leqslant \frac{1}{n_0}$ et de plus, $u_{t_{2n_0}} < z < u_{t_{2n_0+1}}$ (bien noter les inégalités strictes). Enfin, $|u_{k+1} - u_k| \leqslant \frac{1}{n_0}$ pour tout $k \geqslant 2n_0$
- Supposons construits $t_{2n_0} < t_{2n_0+1} < \ldots < t_{2n} < t_{2n+1}$ satisfaisant les conditions citées plus haut. On pose alors

$$t_{2n+2} = \min\left(K_{\frac{1}{n_0}} \cap U_{\frac{1}{n+1}} \cap [t_{2n+1} + 1, +\infty[\right),$$
$$t_{2n+3} = \min\left(L_{\frac{1}{n_0}} \cap [t_{2n+2} + 1, +\infty[\right).$$

  On vérifie alors que $t_{2n+1} < t_{2n+2} < t_{2n+3}$, que $u_{t_{2n+2}} < z < u_{t_{2n+3}}$ et que, pour tout $k \geqslant t_{2n+2}$, on a $|u_{k+1} - u_k| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

On passe enfin à la construction de l'extractrice $(s_n)_{n\geqslant n_0}$, qui est simple, une fois que $(t_n)_{n\geqslant 2n_0}$ est construite :

$$s_n = \max\{i \in \mathbb{N},\ \ i \geqslant t_{2n},\ \ \forall j \in [\![t_{2n}, i]\!],\ \ u_j \leqslant z\}.$$

Le nombre s_n existe car l'ensemble dont on prend le maximum est non vide, puisque t_{2n} en fait partie, et il est majoré, puisque tous les entiers supérieurs ou égaux à t_{2n+1} n'en font pas partie. Un tel sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet bien un maximum. Par construction, $u_{s_n} \leqslant z < u_{s_n+1}$, donc

$$|u_{s_n} - z| \leqslant |u_{s_n+1} - u_{s_n}| \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui montre que $(u_{s_n})_{n\geqslant n_0}$ converge vers z.

(b) Plutôt que la suite (u_n), on va construire ses pas (c'est-à-dire les nombres $u_{n+1} - u_n$), en nous inspirant du dessin de la question (a).

Quelques préparatifs : on note a_k le nombre $k(k+1)/2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $a_0 = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique k_n — noté k ci-après par commodité typographique — tel que $a_k \leqslant n < a_{k+1}$, ou encore $k(k+1) \leqslant 2n < (k+1)(k+2)$. On cherche une estimation asymptotique de k en fonction de n : pour cela, on minore $k(k+1)$ par k^2 et on majore $(k+1)(k+2)$ par $(k+2)^2$, de sorte que $\sqrt{2n} - 2 < k \leqslant \sqrt{2n}$, et finalement

$$k_n \sim_{+\infty} \sqrt{2n}\,.$$

On définit alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![a_k, a_{k+1} - 1]\!], \quad v_n = \frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

En d'autres termes, $v_0 = 1$. Ensuite, $v_1 = v_2 = -1/2$ (deux demis, munis d'un signe moins), $v_3 = v_4 = v_5 = 1/3$ (trois tiers, munis d'un signe plus), $v_6 = v_7 = v_8 = v_9 = -1/4$ (quatre quarts, munis d'un signe moins) *etc.* On définit enfin $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$$

Voici les premières valeurs de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{5}$

Pour $n \geqslant 1$, le nombre u_n apparaît comme la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} v_p$, et oscille donc de plus en plus lentement entre les valeurs zéro et 1, tout en restant entre ces deux valeurs. Comme

$$u_{a_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases}$$

on a $\{0,1\} \subset A$. Comme $|u_{n+1} - u_n| = |v_n| \sim 1/\sqrt{2n}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, la question (a) s'applique, et on conclut que $[0,1] \subset A$. Mais comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ par construction, on a finalement $A = [0,1]$.

Suites : étude asymptotique

143. **RMS 2012 323 X ESPCI PC**

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$.

Solution. — Il s'agit d'effectuer un développement asymptotique pour n tendant vers $+\infty$:

$$u_n = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{\sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\right) = \exp\left(\frac{\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(n\pi\left[1 + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)}\right) = \exp\left(\frac{\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right),$$

$$= \exp\left(\frac{\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \exp\left(\frac{1+\mathrm{o}(1)}{\frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

144. **RMS 2012 324 X ESPCI PC**

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Déterminer la limite de $u_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Solution. — Comme $f\colon t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/t$ est continue et décroissante, une comparaison série-intégrale donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_{n+1}^{kn+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\frac{kn+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \int_n^{kn} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln k.$$

Comme le minorant tend vers $\ln k$ quand n tend vers l'infini, le théorème d'encadrement montre que $\lim u_n = \ln k$.

145. **RMS 2012 325 X ESPCI PC**

Soient $\alpha > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n (k!)^\alpha$. Donner un équivalent de u_n.

Solution. — On va démontrer que $u_n \sim (n!)^\alpha$.

Dans un premier temps, on suppose $\alpha \geqslant 1$. Alors

$$1 \leqslant \frac{u_n}{(n!)^\alpha} = 1 + \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{k!}{n!}\right)^\alpha \leqslant 1 + \frac{1}{n^\alpha} + (n-2)\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^\alpha \leqslant 1 + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Comme le majorant tend vers 1 quand n tend vers l'infini, le théorème d'encadrement montre que $\lim \frac{u_n}{(n!)^\alpha} = 1$, c'est-à-dire que $u_n \sim (n!)^\alpha$.

Dans un deuxième temps, on suppose que $\alpha < 1$, et on fixe un entier $p \geqslant 2$ tel que $1/p < \alpha$. Alors, pour tout $n \geqslant p$,

$$1 \leqslant \frac{u_n}{(n!)^\alpha} = 1 + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots + \left(\frac{(n-p+1)!}{n!}\right)^\alpha + \sum_{k=1}^{n-p}\left(\frac{k!}{n!}\right)^\alpha \leqslant 1 + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots + \left(\frac{(n-p+1)!}{n!}\right)^\alpha + (n-p)\left(\frac{(n-p)!}{n!}\right)^\alpha.$$

Or $(n-p)\left(\frac{(n-p)!}{n!}\right)^\alpha = \frac{n-p}{(n(n-1)\cdots(n-p+1))^\alpha} \sim \frac{n}{n^{\alpha p}}$. Comme $\alpha p > 1$, ce terme tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Le majorant de l'encadrement ci-dessus est donc la somme de 1 et d'un nombre *fixé* de suites qui convergent vers zéro, donc il tend vers 1, et on conclut comme dans le cas $\alpha \geqslant 1$.

146. **RMS 2009 372 X ESPCI PC**
Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $\left(\prod_{k=1}^n(a+kb)\right)^{1/n}\sim b(n!)^{1/n}$.

Solution. — Il s'agit de prouver que $x_n=\left(\prod_{k=1}^n\frac{a+kb}{kb}\right)^{1/n}$ tend vers 1, ou encore que $y_n=\ln x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln(1+\frac{a}{kb})$ tend vers zéro. L'encadrement $0\leqslant\ln(1+u)\leqslant u$, valable pour tout $u\geqslant 0$, montre que

$$0\leqslant y_n\leqslant\frac{a}{bn}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\leqslant\frac{a(1+\ln n)}{bn}\ ,$$

la dernière égalité provenant d'une comparaison série-intégrale. On en déduit la limite souhaitée.

147. **RMS 2009 373 X ESPCI PC**
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $a_n=\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $a_n\to 0$. Montrer qu'il existe $C\in\mathbb{R}_+^*$ telle que $a_n\sim\frac{C}{\sqrt{n}}$.

Solution. — Les a_n sont positifs, ce qui justifie le calcul suivant : $\ln a_n=\sum_{k=1}^n\ln(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}})$. Un développement limité donne

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+\frac{(-1)^{k-1}}{k^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)=\alpha_k+\beta_k+\gamma_k+\mathrm{o}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

avec des notations évidentes. La série $\sum_{k\geqslant 1}\alpha_k$ converge, par application du théorème spécial des séries alternées. La série harmonique $\sum_{k\geqslant 1}\beta_k$ diverge (vers $-\infty$), et les deux séries suivantes convergent absolument (par majoration par des séries de Riemann convergentes). Il en résulte que la suite de terme général $\ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$, donc que (a_n) converge vers zéro.
L'équivalent souhaité revient à prouver que la suite de terme général $a_n\sqrt{n}$ converge vers une limite strictement positive, ou encore que la suite de terme général $b_n=\ln(a_n\sqrt{n}\,)=\ln a_n+\frac{1}{2}\ln n$ converge, ou encore que la série de terme général $c_n=b_n-b_{n-1}$ converge. Or

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\ln(n-1)+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\left[\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]+\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)\ ,\\&=\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\end{aligned}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente.

148. **RMS 2009 375 X ESPCI PC**

(a) Montrer que la suite de terme général $u_n=\ln n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ est convergente.
(b) Étudier la suite de terme général $v_n=n+\ln n-\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}$.

Solution. —

(a) Le résultat préparatoire au théorème de comparaison séries-intégrales affirme que, si $f\in\mathcal{C}^0([a,+\infty[\,,\mathbb{R})$ est positive et décroissante, alors la série de terme général $w_n=\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$ converge ($n\geqslant a+1$). Ici, f est la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$, et $\sum_{k=2}^n w_k=\sum_{k=2}^n(\int_{k-1}^k\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{1}{k})=\ln n+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}=u_n-1$, d'où la convergence de la suite (u_n).
(b) La convexité de la fonction exponentielle montre que $e^x\geqslant 1+x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Par suite,

$$v_n\leqslant n+\ln n-\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln n-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=u_n\ .$$

Comme la suite (u_n) converge, on en déduit que (v_n) est majorée. Par ailleurs, un développement limité donne

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=n+1+\ln(n+1)-n-\ln n-e^{\frac{1}{n+1}}=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+1/n}}\\&=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)-e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)}\ ,\\&=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\left[1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)+\frac{1}{6n^3}\right]+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{6n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\ .\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (v_n) est croissante à partir d'un certain rang. Comme elle est majorée, elle converge.

Suites récurrentes

149. **RMS 2009 371 X ESPCI PC**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n,\ a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. Déterminer les valeurs de a_0 pour que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante.

Solution. — L'équation homogène a pour solutions les suites de terme général $k\,(-3)^n$, où $k \in \mathbb{R}$. Il existe une solution particulière de la forme $\lambda 2^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On trouve $\lambda = 1/5$, et a_n est de la forme $k(-3)^n + 2^n/5$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n = \left(a_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^n + \frac{2^n}{5}\,\cdot$$

Cette suite est croissante si et seulement si $(a_0 - 1/5)(-3)^{n+1} + 2^{n+1}/5 \geqslant (a_0 - 1/5)(-3)^n + 2^n/5$ pour tout n, ou encore $-4(a_0 - 1/5)(-3)^n \geqslant -2^n/5$ pour tout n, ou encore $(a_0 - 1/5)(-1)^n \leqslant \frac{1}{20}(2/3)^n$ pour tout n. En distinguant deux cas suivant la parité de n, on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad b_k := \frac{1}{5} - \frac{1}{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} \leqslant a_0 \leqslant c_k := \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\,.$$

La suite de terme général b_k (respectivement c_k) étant croissante et convergente (respectivement décroissante et convergente), la condition ci-dessus est équivalente à $\lim_{+\infty} b_k \leqslant a_0 \leqslant \lim_{+\infty} c_k$. Les deux limites étant égales à $1/5$, on obtient une seule valeur possible :

$$a_0 = \frac{1}{5}\,\cdot$$

150. **RMS 2009 368 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de son premier terme u_0.

Solution. — Soit $f\colon x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ définie et continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. On pose $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: c'est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$. Il est facile de vérifier les faits suivants :
– Les deux intervalles $I_1 = [0, \ell]$ et $I_2 = [\ell, +\infty[$ sont stables par f,
– Sur I_1, la fonction f vérifie $f(x) \geqslant x$, et sur I_2, la fonction f vérifie $f(x) \leqslant x$.
Ceci entraîne que, si $u_0 \in I_1$, la suite (u_n) est croissante, majorée par ℓ, et convergente vers ℓ, et que, si $u_0 \in I_2$, la suite (u_n) est décroissante, minorée par ℓ, et convergente vers ℓ.

151. **RMS 2009 374 X ESPCI PC**

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n}}}}$.

(a) On suppose que : $\exists a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = a$. Étudier $(y_n)_{n\geqslant 1}$.

(b) On suppose que : $\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = ab^{2^n}$. Étudier $(y_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) Montrer qu'on a l'équivalence entre $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge et $(x_n^{2^{-n}})_{n\geqslant 1}$ bornée.

Solution. — La première question fait appel à l'étude des suites récurrentes $y_{n+1} = f(y_n)$: on n'y rappelle pas explicitement tous les théorèmes utilisés.

(a) Dans ce cas, $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$ pour tout n. Soit $f\colon x \mapsto \sqrt{a+x}$, définie et continue sur $I = [0, +\infty[$. On pose $\ell = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$: c'est l'unique point fixe de f sur I. Il est facile de vérifier les faits suivants :
– Les deux intervalles $I_1 = [0, \ell]$ et $I_2 = [\ell, +\infty[$ sont stables par f.
– Sur I_1, la fonction f vérifie $f(x) \geqslant x$, et sur I_2, la fonction f vérifie $f(x) \leqslant x$.
Ceci entraîne que, si $y_1 \in I_1$, la suite (y_n) est croissante, majorée par ℓ, et convergente vers ℓ, et que, si $y_1 \in I_2$, la suite (y_n) est décroissante, minorée par ℓ, et convergente vers ℓ.

On peut préciser que c'est toujours le premier cas qui se produit, car $y_1 = \sqrt{a} \leqslant \ell = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ pour tout a.

(b) On note (z_n) la suite de la question précédente, définie par $z_1 = \sqrt{a}$ et $z_{n+1} = \sqrt{a + z_n}$, et (y_n) la suite associée à (x_n), où $x_n = ab^{2^n}$. On pose en outre, pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$y_{n,p} = \sqrt{x_p + \sqrt{x_{p+1} + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n}}}}.$$

On fixe ensuite $n \in \mathbb{N}^*$, et on montre par récurrence descendante sur p que $y_{n,p} = b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}$. Pour $p = n$, on a $y_{n,n} = \sqrt{x_n} = \sqrt{ab^{2^n}} = b^{2^{n-1}}\sqrt{a} = b^{2^{n-1}} z_1$: la propriété est vérifiée. Si $y_{n,p} = b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}$ avec $2 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$y_{n,p-1} = \sqrt{x_{p-1} + y_{n,p}} = \sqrt{ab^{2^{p-1}} + b^{2^{p-1}} z_{n-p+1}} = b^{2^{p-2}}\sqrt{a + z_{n-p+1}} = b^{2^{p-2}} z_{n-p+2} = b^{2^{p-2}} z_{n-(p-1)+1}\,.$$

C'est bien la propriété au rang $p-1$, et on déduit de ce calcul que $y_n = y_{n,1} = bz_n$, donc que (y_n) converge, et que sa limite vaut $b\ell$, avec les notations de la question précédente.

(c) Commençons par établir le lemme suivant : si (x_n) et (x'_n) sont deux suites positives, si (y_n) et (y'_n) sont les suites de racines emboîtées qui leur sont associées, et si $x_n \leqslant x'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $y_n \leqslant y'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer cela, on reprend les notations de la question précédente, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve par récurrence descendante sur p que $y_{n,p} \leqslant y'_{n,p}$.

Si $p = n$, il s'agit d'établir que $\sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{x'_n}$, ce qui est vrai puisque $x_n \leqslant x'_n$. Supposons que $y_{n,p} \leqslant y'_{n,p}$. Alors, comme $x_{p-1} \leqslant x'_{p-1}$, on a $x_{p-1} + y_{n,p} \leqslant x'_{p-1} + y'_{n,p}$, donc

$$y_{n,p-1} = \sqrt{x_{p-1} + y_{n,p}} \leqslant \sqrt{x'_{p-1} + y'_{n,p}} = y'_{n,p-1}\,.$$

On en déduit (pour $p = 1$) que $y_{n,1} = y_n \leqslant y'_{n,1} = y'_n$, ce qui établit le lemme.

Par conséquent, la suite (y_n) est croissante : il suffit d'appliquer le lemme à la suite (x'_n) définie par $x'_n = x_n + \sqrt{x_{n+1}}$ et $x'_k = x_k$ pour tout $k \neq n$. Alors on a en particulier $y_n \leqslant y'_n$, ce qui s'écrit

$$y_n \leqslant y'_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n+1}}}}}} = y_{n+1}\,.$$

On peut alors prouver l'équivalence demandée.

$\Rightarrow$ On suppose que (y_n) converge. La rédaction qui suit montre la nécessité de bien choisir son hypothèse de récurrence. Soit $M > 0$; montrons par récurrence sur n la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_n) \qquad\qquad (\forall k \in [\![1, n]\!], \quad y_k \leqslant M) \Rightarrow x_n \leqslant M^{2^n}\,.$$

Pour $n = 1$, la majoration $y_1 = \sqrt{x_1} \leqslant M$ entraîne en effet $x_1 \leqslant M^2 = M^{2^1}$. Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit vraie, et que $y_k \leqslant M$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Définissons la suite (x'_n) par $x'_{n-1} = x_{n-1} + \sqrt{x_n}$ et $x'_k = x_k$ pour tout $k \neq n-1$. Alors $y'_k = y_k$ pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $y'_{n-1} = y_n$: on a donc $y'_k \leqslant M$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et l'hypothèse $(\mathcal{P}_{n-1})$ affirme que $x'_{n-1} \leqslant M^{2^{n-1}}$. Or $x_n = (x'_{n-1} - x_{n-1})^2$, ce qui entraîne que

$$x_n \leqslant \left(x'_{n-1}\right)^2 \leqslant \left(M^{2^{n-1}}\right)^2 = M^{2^n},$$

ce qui établit la propriété $(\mathcal{P}_n)$. Comme la suite (y_n) converge, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $y_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $x_n \leqslant M^{2^n}$, puis que la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée (par M).

$\Leftarrow$ On suppose que la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par M. Alors $x_n \leqslant x'_n = M^{2^n}$. La question (b) montre que la suite (y'_n) converge, donc est majorée. Le lemme établi ci-dessus montre que (y_n) est elle aussi majorée. Comme elle est croissante (conséquence du lemme), elle converge.

152. **RMS 2009 376 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite (u_n) et en donner un équivalent simple

Solution. — On donne deux méthodes.

L'usage du théorème de Cesaro. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$, la suite étudiée est croissante. Si elle convergeait, sa limite finie ℓ devrait satisfaire $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ ce qui est impossible. Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. La relation définissant la suite entraîne que $u_n^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Si l'on pose $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$, on obtient

$$\lim_{+\infty} v_n = \lim_{+\infty}\left(2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}\right) = 2\,,$$

puisque (u_n) diverge vers $+\infty$. Le théorème de Cesàro implique alors que la moyenne arithmétique $V_n = (v_1 + \cdots + v_n)/n$ converge elle aussi vers 2. Or V_n est une somme télescopique et vaut $(u_n^2 - u_0^2)/n$. On en déduit que u_n^2/n converge vers 2, donc que

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{2n}\,.$$

L'usage d'une comparaison série intégrale. En partant de la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2}$, on montre aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1}(1/u_k^2)$, donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant u_0^2 + 2n$. Comme $u_k^2 \geqslant u_0^2 + 2k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leqslant u_0^2 + 2n + \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_0^2 + 2k} \leqslant u_0^2 + 2n + \frac{1}{u_0^2} + \int_0^{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{(u_0^2 + 2x)^2} = u_0^2 + 2n + \frac{1}{u_0^2} + \left[\frac{-1}{2(u_0^2 + 2x)}\right]_0^{n-1}, \\ &= u_0^2 + 2n + \frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{2(u_0^2 + 2(n-1)} + \frac{1}{2u_0^2} \leqslant u_0^2 + 2n + \frac{3}{2u_0^2}. \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{2n + u_0^2} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n + u_0^2 + \frac{3}{2u_0^2}}.$$

Comme le majorant et le minorant sont équivalents à $\sqrt{2n}$, on retrouve le résultat $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand n tend vers l'infini.

Remarque. — Une question supplémentaire de calcul numérique est souvent associée à l'étude de cette suite. Elle peut prendre la forme suivante : si $u_0 = 5$, prouver que $45 \leqslant u_{1000} \leqslant 45{,}1$. En effet, l'encadrement ci-dessus donne $\sqrt{2025} = 45 \leqslant u_{1000} \leqslant \sqrt{2025{,}06} \approx 45{,}0007$.

153. **RMS 2012 322 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$.

(a) Quelles sont les limites possibles pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

(b) Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Solution. — L'énoncé d'origine ne comportait que la première question.

(a) Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. La limite éventuelle de la suite étudiée est un réel $\geqslant 1$ ou $+\infty$. Le premier cas est à exclure, car alors la suite de terme général n/u_n, donc celle de terme général u_{n+1}, divergerait vers $+\infty$. La seule limite possible de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc $+\infty$.

(b) Montrons que la suite (u_n) est croissante et vérifie

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On commence par établir que (u_n) est croissante. Comme $u_{n+1} - u_n = (-u_n^2 + u_n + n)/u_n$, on détermine les deux racines de $-X^2 + X + n$: elles valent $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4n+1}\,)$. Montrer que la suite (u_n) croît, c'est montrer que u_n est compris entre ces deux racines pour tout n. Comme la plus petite est négative, cela revient à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}\,)$. On va établir cette propriété par récurrence. L'hérédité va nécessiter la preuve de l'inégalité $u_{n+1} = 1 + n/u_n \leqslant \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4(n+1)+1}\,)$, ou encore de $n/u_n \leqslant \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{4n+5}\,)$. On va donc adopter comme hypothèse de récurrence l'encadrement précis suivant :

$$\frac{2n}{-1 + \sqrt{4n+5}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2}. \tag{H_n}$$

Pour $n = 1$, il s'agit de vérifier que $2/(-1 + \sqrt{9}\,) \leqslant u_0 = 1 \leqslant (1 + \sqrt{5}\,)/2$, ce qui est vrai, car le minorant vaut 1 et le majorant vaut environ $1,6$. Si (H_n) est vraie, alors $u_{n+1} \leqslant (1 + \sqrt{4(n+1)+1}\,)/2$ puisque tout à été fait pour cela, et il n'y a plus qu'à vérifier que $2n/(-1 + \sqrt{4n+5}\,) \leqslant u_{n+1} = 1 + n/u_n$, ou encore que

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant n\frac{-1 + \sqrt{4n+5}}{2n+1 - \sqrt{4n+5}} = n\frac{-(2n+1) + (4n+5) + \sqrt{4n+5}(2n+1-1)}{(2n+1)^2 - (4n+5)} = n\frac{2n + 4 + 2n\sqrt{4n+5}}{4n^2 - 4}, \\ &= \frac{n^2}{n^2-1}\,\frac{1 + \sqrt{4n+5} + \frac{2}{n}}{2}. \end{aligned}$$

Or ceci est vrai, car $u_n \leqslant (1 + \sqrt{4n+1}\,)/2$ par hypothèse de récurrence et $n^2/(n^2-1) \geqslant 1$ et $1 + \sqrt{4n+5} + 2/n \geqslant 1 + \sqrt{4n+1}$. Par suite, (u_n) est croissante, donc admet une limite finie ou infinie, et l'étude menée plus haut montre que (u_n) diverge vers $+\infty$. On effectue ensuite des développements asymptotiques du majorant et du minorant

$$\begin{aligned} \frac{2n}{-1 + \sqrt{4n+5}} &= \frac{\sqrt{n}}{-1/2n + \sqrt{1 + 5/4n}} = \frac{\sqrt{n}}{-1/\sqrt{2n} + 1 + 5/8n + \mathrm{o}(1/n)} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{5}{8n} + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\ \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2} &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n}}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + 1 + \frac{1}{8n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Comme le majorant et le minorant valent $\sqrt{n} + 1/2 + \mathrm{O}(1/\sqrt{n})$, le développement asymptotique annoncé s'en déduit, mais comme les coefficients des termes en $1/\sqrt{n}$ diffèrent, on ne peut pas déduire de l'encadrement (H_n) un développement de u_n plus précis.

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

154. **RMS 2009 383 X ESPCI PC**

Déterminer la limite, quand $x \to 0$, de $x \mapsto \frac{\tan(\sin(x+\sqrt{3}\,x))}{\operatorname{sh}(\tanh(2x+\sin x))}$.

Solution. — La limite recherchée vaut $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. Pour démontrer cela, on effectue un développement limité d'ordre 1, ce qui revient à calculer un équivalent du numérateur et du dénominateur de l'expression proposée :

$$\frac{\tan(\sin(x+\sqrt{3}\,x))}{\operatorname{sh}(\tanh(2x+\sin x))} = \frac{\tan(x(1+\sqrt{3}\,)+\mathrm{o}(x)))}{\operatorname{sh}(\tanh(3x+\mathrm{o}(x)))} = \frac{x(1+\sqrt{3}\,)+\mathrm{o}(x))}{\operatorname{sh}(3x+\mathrm{o}(x))} = \frac{x(1+\sqrt{3}\,)+\mathrm{o}(x))}{3x+\mathrm{o}(x)} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}+\mathrm{o}(1)\,.$$

155. **RMS 2009 387 X ESPCI PC**

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+1) = f\left(x+\sqrt{2}\right)$.

Solution. — Il s'agit de rechercher les fonctions continues qui sont à la fois 1–périodiques et 2π–périodiques. Montrons que ce sont exactement les fonctions constantes. On donne deux solutions : la première est due à François Fayard, la seconde à Sophie Sidaner.

Usage de la densité de l'ensemble des périodes. L'ensemble $\mathcal{T}_g = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x+T) = g(x)\}$ des périodes d'une fonction quelconque $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. La démonstration est facile, et on note qu'une telle fonction est périodique si et seulement si $\mathcal{T}_g$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Par suite, tout nombre de la forme $a+b\sqrt{2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ est une période de la fonction f de l'énoncé. C'est en particulier le cas de

$$T_n = \left(\sqrt{2}-1\right)^n\ ,$$

dont le développement par la formule du binôme fournit les nombres entiers relatifs a et b souhaités. On constate que la suite (T_n) converge vers zéro.

Voici alors la démonstration principale. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme f est continue en zéro, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout nombre réel y vérifiant $|y| \leqslant \alpha$, on ait $|f(y)-f(0)| \leqslant \varepsilon$. Choisissons n assez grand pour que $0 < T_n < 2\alpha$. Le sous-ensemble $S = \{x+kT_n,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une $\mathbb{Z}$–suite arithmétique dont deux termes consécutifs sont à une distance au plus 2α, donc $S \cap [-\alpha,\alpha]$ est non vide : soit y un de ses éléments.

– Par périodicité, $f(x) = f(y)$.
– Par continuité, $|f(y)-f(0)| \leqslant \varepsilon$.

On en déduit que $|f(x)-f(0)| \leqslant \varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par suite, $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est bien constante.

Usage des séries de Fourier. On considère ici que f est 1–périodique. On pose $\varepsilon_n\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi nx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\langle g,h\rangle = \int_0^1 \overline{g(t)}h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $(g,h) \in (\mathcal{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C}))^2$, ce qui définit le produit scalaire hermitien pour lequel la famille $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale. On pose aussi

$$c_n(g) = \langle \varepsilon_n, f\rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nt}g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Comme la fonction f de l'énoncé est continue, on dispose de l'égalité $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\varepsilon_n$ au sens de la norme $\|\ \|_2$.

Soient $\tau \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et g_τ la fonction translatée $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x+\tau)$. On sait que $c_n(g_\tau) = e^{2i\pi n\tau}c_n(g)$. En particulier, si $g = f$ et $\tau = \sqrt{2}$, la translatée $f_{\sqrt{2}}$ est égale à f par périodicité, et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f)\left(1-e^{2i\pi n\sqrt{2}}\right) = 0\,.$$

Si $n \neq 0$, alors $e^{2i\pi n\sqrt{2}} \neq 1$, sinon $\sqrt{2}$ serait rationnelle. On en déduit que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, donc que $f = c_0(f)$, donc que f est constante.

156. **RMS 2012 332 X ESPCI PC**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Solution. — à rédiger ? ?

157. **RMS 2012 342 X ESPCI PC**

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède une infinité d'antécédents par f.

Solution. — à rédiger ? ?

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

158. **RMS 2011 370 X ESPCI PC**

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Solution. — Comme P est à coefficients réels et de degré impair, il possède au moins une racine réelle, notée a. L'hypothèse montre alors que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$, et on note S le segment $[a, x]$ ou $[x, a]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f sur S s'écrit alors

$$|f(x)| \leqslant M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\ ,$$

où M_{n+1} est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur S. L'hypothèse de l'énoncé montre qu'on peut choisir $M_{n+1} = \sup_{t \in S} |P(t)|$, nombre qui ne dépend pas de n. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient alors $|f(x)| \leqslant 0$, et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est identiquement nulle.

159. **RMS 2012 329 X ESPCI PC**

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 4f(x) + 3x + 1$.

Solution. — Analyse. Si f vérifie la relation de l'énoncé, alors (en dérivant deux fois) on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, 4f''(2x) = 4f''(x)$, ou encore, en changeant x en $x/2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f''\left(\frac{x}{2}\right)\cdot$$

On en déduit aisément par récurrence que $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ f''(x) = f''(x/2^n)$. Comme f'' est continue, le passage à la limite quand n tend vers l'infini donne $f''(x) = f''(0)$. Comme f'' est constante, f est affine : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. L'égalité de l'énoncé se traduit alors par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ax + b = 4(ax + b) + 3x + 1 = (4a + 3)x + 4b + 1,$$

ou encore $2a = 4a + 3$ et $b = 4b + 1$. On trouve $a = -3/2$ et $b = -1/3$.
Synthèse. On vérifie aisément que la fonction suivante convient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\cdot$$

160. **RMS 2009 384 X ESPCI PC**

Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \frac{\sin nx}{n} \leqslant 1$.

Solution. — On suppose $x > 0$ (sinon la somme est nulle et c'est clair). On utilise l'inégalité $\sin u \leqslant u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, puis l'inégalité $\lfloor u \rfloor \leqslant u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (qu'on multiplie par le nombre positif x), ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \frac{\sin nx}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \frac{nx}{n} = x\lfloor 1/x \rfloor \leqslant \frac{x}{x} = 1\ .$$

161. **RMS 2009 386 X ESPCI PC**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ (x + y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

Solution. — On constate que l'inégalité est vraie lorsque $\alpha = 1$, cas que l'on écarte de la résolution qui suit.
En factorisant et en simplifiant par le nombre strictement positif x^α, et en posant $u = y/x$, la condition demandée est équivalente à $\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ (1 + u)^\alpha \geqslant 1 + u^\alpha$. On pose $h_\alpha(u) = (1 + u)^\alpha - (1 + u^\alpha)$, ce qui définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'_\alpha(u) = \alpha[(1+u)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}] = \frac{\alpha}{u^\alpha}\left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} - 1\right] = \frac{\alpha}{u^\alpha}\left[g_\beta\left(1 + \frac{1}{u}\right) - 1\right]\ ,$$

où $\beta = \alpha - 1$ et $g_\beta \colon t \mapsto t^\beta$. La fonction g_β est strictement croissante (respectivement décroissante) sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\beta > 0$ (respectivement lorsque $\beta < 0$). Comme $1 + 1/u > 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, le calcul ci-dessus montre que :

- Si $\alpha > 1$, alors $g_\beta(1 + \frac{1}{u}) - 1 > g_\beta(1) - 1 = 0$, donc h_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $\lim_0 h_\alpha = 0$ (on rappelle que $\alpha > 0$), on en déduit que $h_\alpha > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Si $\alpha < 1$, alors $g_\beta(1+\frac{1}{u}) - 1 < g_\beta(1) - 1 = 0$, donc h_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $\lim_0 h_\alpha = 0$, on en déduit que $h_\alpha < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement la condition nécessaire et suffisante cherchée est :

$$\alpha \geqslant 1 .$$

162. **RMS 2012 333 X ESPCI PC**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si $v = (v_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $\Delta(v)$ la suite de terme général $v_{n+1} - v_n$. montrer : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in]n, n+p[\,,\ \Delta^p(u)_n = f^{(p)}(x)$.

Solution. — à rédiger

163. **RMS 2012 338 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ croissante et bornée. On suppose que f'' est bornée. Montrer que f' possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Solution. — à rédiger ? ?

164. **RMS 2012 339 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant M|f(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Solution. — à rédiger ? ?

165. **RMS 2012 340 X ESPCI PC**

Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, et f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable en a, que $g(a) = g'(a) = 0$ et que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant |g(x)|$. Montrer que f est dérivable en a.

Solution. — à rédiger ? ?

166. **RMS 2012 343 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que pour tout $x \in [-\alpha,\beta]$, il existe un unique $y \in [-\alpha,\beta]$ tel que $f(x) = f(y)$ et $xy \leqslant 0$.

(b) Si $x \in [-\alpha,\beta]$, on note $\varphi(x)$ l'unique y de la question (a). Étudier la continuité et la dérivabilité de φ. Déterminer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Solution. — à rédiger ? ?

167. **RMS 2012 344 X ESPCI PC**

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$ et $(f,g,h) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^3$. On pose $D(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c)\end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $(\beta,\gamma) \in [a,c]^2$ tel que $D(a,b,c) = \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)H(\beta,\gamma)$ où $H(\beta,\gamma) = \det\begin{pmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(b) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(b) & h''(\gamma)\end{pmatrix}$.

Solution. — à rédiger ? ?

168. **RMS 2012 331 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe et non affine. Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) + f(a-x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Solution. — à rédiger ? ?

169. **RMS 2012 337 X ESPCI PC**

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est majorée et qu'il existe $\lambda > 0$ telle que $f'' \geqslant \lambda f$.

(a) Montrer que f' a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

(b) Montrer que f a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

(c) Trouver des fonctions vérifiant ces conditions.

Solution. — à rédiger ? ?

Fonctions d'une variable réelle : intégration sur un segment

170. **RMS 2012 330 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 1/2$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Solution. — à rédiger ? ?

171. **RMS 2009 385 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x)$.

Solution. — La formule de Taylor avec reste intégral pour f, en zéro, à l'ordre 1 (ou tout simplement le lien entre intégrales et primitives) donne, après le changement de variable $t = ux$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f'(ux)\,\mathrm{d}u\,.$$

On pose alors $g(x) = \int_0^1 f'(ux)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 h(x,u)\,\mathrm{d}u$, avec des notations évidentes. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et l'intervalle d'intégration est un segment : $[0,1]$. Cela suffit (corollaire du théorème de Leibniz) pour assurer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xg(x)$.

172. **RMS 2009 388 X ESPCI PC**

Soit $r \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\prod_{k=1}^n (1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$.

(b) Pour $|r| \neq 1$, calculer $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) On pose $P_n = X^{2n} - 1$. Les racines de P_n sont les racines $2n$-ièmes de l'unité. On pose $\omega = \exp(i\pi/n)$. En factorisant les deux seules racines réelles (1 et -1), on obtient

$$P_n = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}[(X-\omega^n)(X-\overline{\omega}^n)] = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left[X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right].$$

On en déduit que $\prod_{k=1}^n (1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2) = \frac{r+1}{r-1}P_n(r) = \frac{(r+1)(r^{2n}-1)}{r-1}$.

(b) La fonction $f\colon t \mapsto \ln(1 - 2r\cos t + r^2)$ est définie et continue sur le segment $[0,\pi]$, car

$$\forall t \in [0,\pi], \quad 0 < (1-|r|)^2 = 1 - 2|r| + r^2 \leqslant 1 - 2r\cos t + r^2\,,$$

au vu des hypothèses sur r. Alors $I(r)$ est la limite de la suite des sommes de Riemann $R_n(f) = \frac{\pi-0}{n}\sum_{k=1}^n f(0 + k\frac{\pi-0}{n})$ quand n tend vers $+\infty$. La positivité de $1 - 2r\cos t + r^2$ sur $[0,\pi]$ et la question (a) montrent que

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left|1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right| = \frac{\pi}{n}\ln\left|\prod_{k=1}^n\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)\right|\,, \\ &= \frac{\pi}{n}\left(\ln|r+1| + \ln|r^{2n}-1| - \ln|r-1|\right). \end{aligned}$$

On discute ensuite suivant la position de $|r|$ par rapport à 1.

i. Si $|r| < 1$, la quantité entre parenthèses ci-dessus tend vers $\ln|r+1| - \ln|r-1|$, donc $R_n(f)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

ii. Si $|r| > 1$, la quantité entre parenthèses ci-dessus est équivalente à $\ln(|r|^{2n}) = 2n\ln|r|$, donc $R_n(f)$ tend vers $\pi\ln|r|$ quand n tend vers l'infini.

En résumé,

$$\forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1, \\ \pi\ln|r| & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

173. **RMS 2009 389 X ESPCI PC**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$. L'application Φ est-elle majorée ? Minorée ? Déterminer les extrema éventuels de Φ et les fonctions en lesquels ils sont atteints.

Solution. — L'ensemble $F = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel (alors que E ne l'est pas), et $(g|h) = \int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t$ définit sur F un produit scalaire réel. Si $f \in E$, et si l'on pose $g = \sqrt{f}$ et $h = 1/\sqrt{f}$, ce qui définit deux éléments de F, on constate que $\Phi(f) = \|g\|^2\|h\|^2$. L'inégalité de Cauchy et Schwarz prouve alors que

$$(g|h)^2 = \int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t = b - a \leqslant \Phi(f)\,,$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda/\sqrt{f}$, ou encore si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda$. On vient de prouver que Φ est minorée sur E, avec

$$\min_E \Phi = b - a, \quad \text{atteint pour les fonctions constantes strictement positives, et elles seulement.}$$

On montre ensuite que Φ n'est pas majorée en calculant l'image par Φ de la fonction affine par morceaux, continue, et strictement positive f_n, définie pour $n \geqslant 1$ par $f_n(a) = f_n(b) = 1$ et $f_n((a+b)/2) = n$. Les graphes de f_n et de son inverse sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = (a+b)/2$, et on a $f_n(t) = 1 + 2(n-1)(t-a)/(b-a)$ pour tout $t \in [a, (a+b)/2]$. On en déduit que (le premier calcul est géométrique : aires d'un rectangle et d'un triangle)

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)(1+n/2)\,,$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f_n(t)} = 2\left[\frac{(b-a)}{2(n-1)}\ln\left(1 + 2(n-1)\frac{t-a}{b-a}\right)\right]_a^{\frac{a+b}{2}} = \frac{(b-a)}{(n-1)}\ln n\,.$$

Il en résulte que $\Phi(f_n) \sim (\ln n)/2$ quand n tend vers $+\infty$, donc Φ n'est pas majorée sur E.

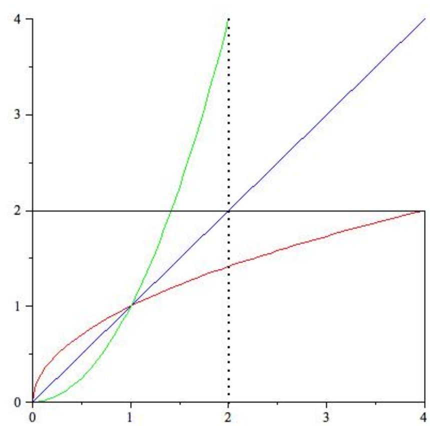
174. **RMS 2009 390 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)\,.$$

Solution. — Comme f est continue et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, on a nécessairement $f(0) = 0$ et f strictement croissante, et il en est de même pour f^{-1}. On donne deux solutions.

Solution géométrique. Elle est illustrée par la figure ci-dessous, où f est la fonction racine carrée, et où $x = 4$. La quantité $xf(x)$ représente l'aire géométrique du rectangle dont les sommets sont l'origine et les points de coordonnées $(x,0)$, $(0, f(x))$ et $(x, f(x))$.



Le graphe de f (ici, en rouge) divise ce rectangle en deux parties : la partie inférieure a pour aire $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Grâce aux propriétés de symétrie des graphes de f et de f^{-1}, la partie supérieure a pour aire $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$. C'est fait !

Solution analytique. On pose $H(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme f et f^{-1} sont continues (par hypothèse pour f, et suivant un théorème démontré en première année pour f^{-1}), et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction H est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad H'(x) = f(x) + f'(x) \times f^{-1}(f(x)) - xf'(x) + f(x) = 0\,.$$

Il en résulte que H est constante, et comme $H(0) = 0$, que H est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qu'il fallait démontrer.

175. **RMS 2009 391 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$.

Solution. — Elle est due à Marc Becker.

Comme $f(1)=0$, on dispose de l'identité $\forall x\in[0,1],\ f(x)=-\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$. L'inégalité de Cauchy et Schwarz et la croissance de l'intégrale des fonctions positives par rapport à l'intervalle d'intégration montrent alors que

$$f^2(x)=\left(\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_x^1\mathrm{d}t\right)\left(\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)=(1-x)\left(\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant(1-x)\left(\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En intégrant cette inégalité entre zéro et 1, on obtient

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)=\frac12\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarque. — L'égalité est réalisée si seulement si les premières majorations écrites ci-dessus sont des égalités. La deuxième implique que f'^2 est identiquement nulle, donc que f est constante, et comme $f(1)=0$, que f est nulle. La réciproque étant évidente, l'égalité est réalisée si et seulement si f est nulle.

176. **RMS 2009 392 X ESPCI PC**

Soit $E=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=f(1)=0\}$. Montrer qu'il existe $M>0$, que l'on déterminera, tel que $\forall f\in E,\ \int_0^1 f\leqslant M\sup_{[0,1]}|f''|$.

Solution. — On calcule $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par double intégration par parties, en primitivant deux fois la fonction 1, de sorte que le polynôme de degré 2 obtenu admette zéro et 1 comme racines, le but étant d'éliminer le crochet de la deuxième intégration par parties. La seule possibilité est donc de choisir la chaîne suivante de primitives : $1\to t-\frac12\to\frac{t(t-1)}{2}$. On obtient alors (la première ligne vient de ce que $f(0)=f(1)=0$) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t&=\left[\left(t-\frac12\right)f(t)\right]_0^1-\int_0^1\left(t-\frac12\right)f'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\left(t-\frac12\right)f'(t)\,\mathrm{d}t\,,\\&=-\left[\frac{t(t-1)}{2}f'(t)\right]_0^1+\int_0^1\frac{t(t-1)}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t(t-1)}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Si h désigne la fonction $t\mapsto\frac{t(t-1)}{2}$, l'inégalité triangulaire et l'inégalité de la moyenne montrent que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^1 h(t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|h(t)f''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\sup_{[0,1]}|f''|\times\int_0^1|h(t)|\,\mathrm{d}t=M\sup_{[0,1]}|f''|$$

avec

$$M=\frac12\int_0^1 t(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac12\left(\frac12-\frac13\right)=\frac1{12}\,.$$

Remarque. — On peut se demander si l'égalité $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac1{12}\sup_{[0,1]}|f''|$ est possible (et dans ce cas, pour quelles fonctions f), voire seulement optimale. L'examen des trois inégalités ci-dessus montre que l'égalité est réalisée si et seulement si :
- f est positive ;
- hf'' est de signe fixe ;
- f'' est constante.

La troisième condition donne f de la forme $t\mapsto at^2+bt+c$. La condition de l'énoncé ($f(0)=f(1)=0$) donne $c=0$ et $a+b=0$, donc f est de la forme $t\mapsto at(t-1)$, c'est-à-dire $f=-2ah$. La première condition impose alors que $a\leqslant0$ et, dans ce cas, $hf''=2ah\geqslant0$ sur $[0,1]$, donc la seconde condition est automatiquement satisfaite.

On conclut que l'égalité est réalisée si et seulement si f est de la forme $t\mapsto at(t-1)$ avec $a\leqslant0$.

177. **RMS 2009 405 X ESPCI PC**

Soient $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction 2π–périodique, et $c\in\mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction 2π–périodique $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f=h'+c$?

Solution. — On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. Si c'est le cas, alors $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=h(0)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-cx$, relation obtenue en intégrant entre zéro et x.

Synthèse. Une telle fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est 2π–périodique si et seulement si (la deuxième égalité provient du fait que f est 2π–périodique) :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x+2\pi)-h(x)=\int_x^{x+2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t-2\pi c=\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t-2\pi c=0\,,$$

ou encore si et seulement si $c=\frac1{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est la valeur moyenne de f.

La réponse à la question posée est donc : une telle h existe si et seulement si c est la valeur moyenne de f.

178. **RMS 2012 341 X ESPCI PC**
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. Déterminer la limite de la suite de terme général nu_n.

Solution. — à rédiger ? ?

179. **RMS 2012 350 X ESPCI PC**
Soit $q \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[\,,\mathbb{R})$ telle que $q(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$. Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}\int_1^x \frac{q(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — à rédiger ? ?

Séries numériques

180. **RMS 2009 378 X ESPCI PC**
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n+\sin^2 n)}$?

Solution. — Il s'agit d'effectuer un développement limité :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{\sin^2 n}{n}\right)\right]} = \frac{(-1)^n}{n\left[\ln n + \frac{\sin^2 n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \frac{(-1)^n}{n\ln n}\,\frac{1}{1+\frac{\sin^2 n}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n\ln n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ converge, en vertu du théorème spécial des séries alternées, et le second terme est dominé par $\frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. En conclusion, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

181. **RMS 2009 379 X ESPCI PC**
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$?

Solution. — La série proposée n'est pas alternée, car la distribution des signes de ses termes est $(+--++--++\cdots)$. On a alors l'idée de la regrouper par paquets de deux à partir du terme u_2. On calcule

$$v_p = u_{2p}+u_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2p(2p+1)}} + \frac{(-1)^p}{\sqrt{(2p+1)(2p+2)}} = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2(2p+1)}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right).$$

Il est clair que la suite de terme général v_p est alternée et converge vers zéro. Si l'on prouve que le quotient suivant est plus petit que 1,

$$\frac{|v_{p+1}|}{|v_p|} = \frac{\sqrt{2p+1}}{\sqrt{2p+3}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{p+1}}+\frac{1}{\sqrt{p+2}}}{\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p+1}}}\,,$$

le théorème spécial des séries alternées montrera que $\sum v_p$ est convergente. Or, si U_n (respectivement V_n) désigne la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ (respectivement de $\sum_{p\geqslant 1} v_p$), on a

$$\begin{aligned} U_{2n} &= u_1 + V_{n-1} + u_{2n}\,,\\ U_{2n+1} &= u_1 + V_n\,. \end{aligned}$$

Comme la suite $(V_p)_{p\geqslant 1}$ converge, disons vers V, et comme la suite (u_{2n}) converge vers zéro, alors les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent *vers la même limite*, qui vaut u_1+V. On en déduit que la suite (U_n) converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Une réduction au même dénominateur et une simplification par $\sqrt{p+1}$ donnent $|v_{p+1}/v_p| \leqslant 1$ si et seulement si

$$\sqrt{p(2p+1)}\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p+2}\right) \leqslant \sqrt{(p+2)(2p+3)}\left(\sqrt{p}+\sqrt{p+1}\right).$$

Les deux nombres ci-dessus étant positifs, l'inégalité est encore équivalente à (on élève au carré) :

$$\begin{aligned} A &:= p(2p+1)\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p+2}\right)^2 = p(2p+1)\left(2p+3+2\sqrt{p+1}\sqrt{p+2}\right)\\ &\leqslant B := (p+2)(2p+3)\left(\sqrt{p}+\sqrt{p+1}\right)^2 = (p+2)(2p+3)\left(2p+1+2\sqrt{p}\sqrt{p+1}\right)\,. \end{aligned}$$

Or on peut simplifier par $p(2p+1)(2p+3)$ dans la différence $B-A$ pour obtenir

$$\begin{aligned} B-A &= 2(2p+3)(2p+1) + 2(p+2)(2p+3)\sqrt{p}\sqrt{p+1} - 2p(2p+1)\sqrt{p+1}\sqrt{p+2}\,,\\ &= 2(2p+3)(2p+1) + 2\sqrt{p}\sqrt{p+1}\sqrt{p+2}\left[(2p+3)\sqrt{p+2}-(2p+1)\sqrt{p}\right]\,. \end{aligned}$$

Cette quantité est manifestement positive, ce qui achève la preuve.

182. **RMS 2009 380 X ESPCI PC**
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$?

Solution. — Il s'agit d'effectuer un développement limité :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On constate que u_n est la somme d'un terme qui relève du théorème spécial des séries alternées, et d'un terme équivalent à $-1/n$ (de signe fixe), dont la série diverge. En conclusion, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

183. **RMS 2009 381 X ESPCI PC**
Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et tel que la série de terme général u_n diverge.

Solution. — Voir l'exercice 182 page 164 : la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ convient.

184. **RMS 2012 326 X ESPCI PC**
Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi e n!)$?

Solution. — On sait que $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/k!$. Pour n assez grand, on a donc

$$en! = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + n(n-1)}_{\text{entier pair}} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Par ailleurs,

$$0 \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+2+k)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e}{(n+1)(n+2)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il en résulte que

$$u_n = \sin\left((n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme les séries de termes généraux $(-1)^{n+1}\pi/(n+1)$ et $\mathrm{O}(1/n^2)$ convergent, on conclut que $\sum u_n$ converge. Plus précisément, elle est semi-convergente car $\sum(-1)^{n+1}\pi/(n+1)$ l'est et $\sum \mathrm{O}(1/n^2)$ est absolument convergente.

185. **RMS 2012 327 X ESPCI PC**
Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(3n)!$.

Solution. — La convergence résulte, par exemple, de ce que $n^2/(3n)!$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
Soit $j = \exp(2i\pi/3)$. La suite (j^k) est périodique de période 3, et comme $1 + j + j^2 = 0$ (racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ avec $n = 3$), on en déduit que

$$1^k + j^k + (j^2)^k = \begin{cases} 3 & \text{si } k \text{ est multiple de } 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}(1 + j^k + j^{2k})/k! = \sum_{n=0}^{+\infty} 1/(3n)!$. Comme $\exp(j^2) = \exp(\bar{j}) = \overline{\exp(j)}$, et comme $\exp(j) = \exp(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = e^{-1/2}(\cos(\sqrt{3}/2) + i\sin(\sqrt{3}/2))$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}(e + 2\,\mathrm{Re}\, e^j) = \frac{1}{3}\left(e + 2e^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

186. **RMS 2012 328 X ESPCI PC**
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Solution. — Comme la série converge, la suite (u_n) converge vers zéro, et comme elle décroît, elle est positive. On note S la somme de la série de terme général u_n. On effectue une transformation d'Abel sur la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$: la positivité des u_n permet d'écrire que

$$S \geqslant S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1-k)u_k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)u_k - \sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n+1} ku_{k-1} - \sum_{k=0}^{n} ku_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^{n} k(u_{k-1} - u_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} k(u_{k-1} - u_k).$$

Comme la suite (u_n) décroît, la série $\sum k(u_k - u_{k-1})$ est à termes positifs, et l'inégalité ci-dessus montre que ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. par différence, on en déduit que la suite de terme général $(n+1)u_n = S_n - \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ converge. On note ℓ sa limite. Si cette limite est non nulle, alors $u_n \sim \ell/(n+1)$, et la série $\sum u_n$ diverge, ce qui est impossible. Par suite, $\ell = 0$, et l'égalité $(n+1)u_n = nu_n + u_n$ avec (u_n) de limite nulle montre que

$$\lim(nu_n) = 0.$$

187. **RMS 2009 382 X ESPCI PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to 0$ et la série de terme général u_n diverge. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = \lambda$.

Solution. — Comme $\sum u_n$ diverge, $\sum |u_n|$ diverge *a fortiori*. Voici comment on construit la suite des signes : on ajoute les premiers termes $|u_n|$ jusqu'à ce que la somme dépasse λ, puis on retranche les $|u_n|$ suivants jusqu'à repasser en deçà de λ, puis on recommence à ajouter les $|u_n|$ suivants jusqu'à dépasser λ *etc.*

Notations et construction formelle : il s'agit d'expliciter les trois lignes qui précèdent. Pour n et p entiers tels que $n \leqslant p$, on pose $U_{n,p} = \sum_{i=n}^p |u_i|$. La divergence de la série $\sum |u_n|$ montre que pour tout n entier fixé, $\lim_{p\to+\infty} U_{n,p} = +\infty$: cette justification sera implicitement utilisée ci-après, à chaque fois qu'on définira un nouvel entier n_k. On construit donc une suite d'entiers (n_k) strictement croissante, par récurrence, de la manière suivante :

– On pose $n_0 = \min\{p \in \mathbb{N},\ U_{0,p} > \lambda\}$ et $n_1 = \min\{p > n_0,\ U_{0,n_0} - U_{n_0+1,p} < \lambda\}$.

– On suppose construits des entiers $n_0, n_1, \dots, n_{2k}, n_{2k+1}$ vérifiant, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$:

$$U_{0,n_0} + \sum_{i=0}^{2j-1} (-1)^{i+1} U_{n_i+1,n_{i+1}} > \lambda \quad \text{et} \quad U_{0,n_0} + \sum_{i=0}^{2j} (-1)^{i+1} U_{n_i+1,n_{i+1}} < \lambda\,.$$

On pose alors (c'est nettement plus long à écrire qu'à comprendre)

$$n_{2k+2} = \min\left\{p > n_{2k+1},\quad U_{0,n_0} + \sum_{i=0}^{2k} (-1)^{i+1} U_{n_i+1,n_{i+1}} + U_{n_{2k+1}+1,p} > \lambda\right\}\,,$$

$$n_{2k+3} = \min\left\{p > n_{2k+2},\quad U_{0,n_0} + \sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^{i+1} U_{n_i+1,n_{i+1}} - U_{n_{2k+2}+1,p} < \lambda\right\}\,.$$

Les conditions d'alternance par rapport à la valeur λ sont alors bien respectées, et on définit la suite de signes par les conditions suivantes : si $0 \leqslant i \leqslant n_0$, alors $\varepsilon_i u_i = |u_i|$ et, pour tout $k \geqslant 0$, si $n_k < i \leqslant n_{k+1}$, alors $\varepsilon_i u_i = (-1)^k |u_i|$.

On note S_p les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n u_n$: en particulier, $S_{n_k} = U_{0,n_0} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} U_{n_i+1,n_{i+1}}$, et la construction de la suite (n_k) prouve que :

– Pour tout k, on a $|S_{n_k} - \lambda| \leqslant |u_{n_k - 1}|$.

– Pour tout $p \geqslant n_0$, il existe un unique $k = \phi(p)$ tel que $n_k < p \leqslant n_{k+1}$, et alors λ et S_p appartiennent au segment $[S_{n_k}, S_{n_{k+1}}]$ ou $[S_{n_{k+1}}, S_{n_k}]$, suivant la parité de k.

On en déduit que

$$\forall p \geqslant n_0, \quad |S_p - \lambda| \leqslant \left|S_{n_{\phi(p)}} - S_{n_{\phi(p)+1}}\right| \leqslant \left|S_{n_{\phi(p)}} - \lambda\right| + \left|\lambda - S_{n_{\phi(p)+1}}\right| \leqslant \left|u_{n_{\phi(p)}-1}\right| + \left|u_{n_{\phi(p)+1}-1}\right|\,.$$

Comme $(n_k)_{k\geqslant 0}$ est strictement croissante, la suite $(\phi(p))_{p\geqslant 0}$ est croissante (au sens large seulement) et diverge vers $+\infty$. Comme la suite u est de limite nulle, la majoration ci-dessus montre que $\lim_{+\infty}(S_p) = \lambda$, ou encore que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = \lambda$.

Intégration sur un intervalle quelconque

188. **RMS 2009 393 X ESPCI PC**

Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — On désigne par f la fonction intégrée. Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ fournit

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{g(x)} - \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{h(x)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(kx)/x^m$, où k est une constante, ont des intégrales semi-convergentes sur $[1,+\infty[$ lorsque $0 < m \leqslant 1$. Il résulte alors du développement ci-dessus que l'intégrale proposée est convergente (elle est seulement semi-convergente, mais la preuve n'est pas demandée).

Rappel. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On démontre ici que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente si $0 < \alpha \leqslant 1$. On fixe $m > 0$, et on intègre par parties : $\int_1^m \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = [-\frac{\cos x}{x^\alpha}]_1^m - \alpha \int_0^m \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x$. Le crochet a pour limite $\cos 1$ quand m tend vers $+\infty$, et la fonction $x \mapsto \cos x / x^{m+1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, puisque $m+1 > 1$. Par suite, l'intégrale $\int_1^m \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand m tend vers $+\infty$.

189. **RMS 2009 394 X ESPCI PC**
Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{a\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Solution. — La limite est $2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Voici l'intuition qui permet de trouver cette valeur : une fonction intégrable est une fonction dont toute la masse est concentrée autour de l'origine (comprendre que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|\approx\int_{-M}^{+M}|f|$). Si a est assez grand pour que les segments $[-a-M,-a+M]$ et $[-M,M]$ soient disjoints, alors $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\approx\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t+\int_{-M}^{+M}|f|\approx 2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Rendons cela rigoureux : on pose

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\ell=2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|=\int_{-M}^{+M}|f|$ à 2ε près (car chacun des restes $\int_{-\infty}^{-M}|f|$ et $\int_{M}^{+\infty}|f|$ est plus petit que ε). Le changement de variables $u=t+a$ montre alors que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f|=\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t$ à 2ε près. On pose

$$\ell'=\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t+\int_{-M}^{+M}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Alors $\ell=\ell'$ à 4ε près.
L'inégalité triangulaire montre que $\int_{-\infty}^{-a-M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\infty}^{-a-M}|f(t+a)|+\int_{-\infty}^{-a-M}|f(t)|=\int_{-\infty}^{M}|f(u)|+\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|\leqslant 2\varepsilon$. De même, $\int_{M}^{-\infty}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\varepsilon$.
Choisissons a tel que les segments évoquées plus haut soient disjoints, c'est-à-dire tel que $-a+M<-M$, ou encore tel que $a>2M$. Alors les bornes des intégrales suivantes sont toutes dans le bon sens et les inégalités sont justifiées :

$$\begin{aligned}\int_{-a+M}^{-M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-a+M}^{-M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t+\int_{-a+M}^{-M}|f(t)|\,\mathrm{d}t&=\int_{M}^{a-M}|f(u)|\,\mathrm{d}t+\int_{-a+M}^{-M}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,,\\&\leqslant\int_{M}^{+\infty}|f(u)|\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|\,\mathrm{d}t\,,\\&\leqslant 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Les trois majorations que l'on vient d'effectuer montrent que $I(a)=I'(a)$ à 6ε près, où l'on a posé

$$I'(a)=\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{-M}^{+M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

On majore maintenant la distance entre $I'(a)$ et ℓ' :

$$\begin{aligned}|I'(a)-\ell'|&\leqslant\left|\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t-\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{-M}^{M}|f(t+a)-f(t)|\,\mathrm{d}t-\int_{-M}^{M}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\,,\\&\leqslant\int_{-a-M}^{-a+M}\Big||f(t+a)-f(t)|-|f(t+a)|\Big|\,\mathrm{d}t+\int_{-M}^{M}\Big||f(t+a)-f(t)|-|f(t)|\Big|\,\mathrm{d}t\,,\\&\leqslant\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{-M}^{M}|f(t+a)|\,\mathrm{d}t\,,\\&=\int_{-a-M}^{-a+M}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{a-M}^{a+M}|f(u)|\,\mathrm{d}t\,,\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{M}^{+\infty}|f(u)|\,\mathrm{d}t\,,\\&\leqslant 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Finalement, $I(a)=\ell$ à 12ε près, pour vu que a soit suffisamment grand : c'est fait. Ma rédaction est lourde : à améliorer ? ?

190. **RMS 2009 395 X ESPCI PC**
Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^a)}{x^b}\,\mathrm{d}x$ si $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$.

Solution. — Soit $f\colon x\mapsto\frac{\sin(x^a)}{x^b}$ la fonction intégrée. On sépare la résolution en deux parties.

Étude sur $]0,1]$. Comme $f(x) \sim \frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$ au voisinage de zéro, et comme les fonctions intégrées y sont de signe fixe, l'intégrale $\int_{]0,1]} f$ converge si et seulement si $b - a < 1$.

Étude sur $[1, +\infty[$. Soit $M > 1$. Le changement de variable $u = x^a$ montre que

$$\int_1^M f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_1^{M^a} \frac{\sin u}{u^c}\,\mathrm{d}u \quad \text{avec} \quad c = \frac{b+a-1}{a}\,.$$

Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^c}\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si $c > 0$ (voir l'exercice 188 page 165). Comme $a > 0$, on a $\lim_{M\to+\infty} M^a = +\infty$, et $\int_{[1,+\infty[} f$ converge si et seulement si $b + a - 1 > 0$.

En conclusion, l'intégrale proposée converge si et seulement si $1 - a < b < 1 + a$, ou encore $|b-1| < a$.

191. **RMS 2012 345 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[\,, \mathbb{R})$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $t \mapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Solution. — à rédiger ? ?

Suites et séries de fonctions

192. **RMS 2009 396 X ESPCI PC**

Soit $S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Déterminer le domaine de définition de S. Étudier la continuité de S.

Solution. — On pose $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} = xr^n$, avec $r = (1+x^2)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour $x = 0$ car chaque terme est nul dans ce cas, et converge pour $x \neq 0$, car c'est alors une série géométrique de raison $r \in]0,1[$. Par suite, $D_S = \mathbb{R}$. De plus,

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x}{1-r} = x + \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que S est continue partout sauf en zéro.

193. **RMS 2012 346 X ESPCI PC**

Étudier la convergence de la suite $f_n\colon x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

Solution. — à rédiger ? ?

194. **RMS 2012 347 X ESPCI PC**

Étudier $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{inx}}{(1+n^2)(1+\ln n)}$.

Solution. — à rédiger ? ?

Séries entières

195. **RMS 2009 397 X ESPCI PC**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $n^k z^n$.

Solution. — C'est 1, car la suite $(n^k z^n)$ converge vers zéro si $|z| < 1$ (comparaisons usuelles), et n'est pas bornée sinon.

196. **RMS 2009 398 X ESPCI PC**

(a) Factoriser $P(X) = X^2 - 2\operatorname{ch} aX + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Décomposer $\frac{1}{P(X)}$ en éléments simples.

(c) Développer en série entière en zéro la fonction $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$. Donner son rayon de convergence.

Solution. — Si $a = 0$, alors $P(X) = (X-1)^2$, la fraction rationnelle $\frac{1}{P(X)}$ est déjà un élément simple, et, en vertu du théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{P(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\,.$$

On écarte désormais ce cas.

(a) On constate que $P(X) = (X - e^a)(X - e^{-a})$.

(b) On trouve $\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{2\operatorname{sh} a}\left(\frac{1}{X-e^a} - \frac{1}{X-e^{-a}}\right)$.

(c) En vertu des résultats sur les séries géométriques, $\frac{1}{x-e^a}=\frac{-e^{-a}}{1-e^{-a}x}=-e^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-na}x^n$ pour tout x tel que $|x|<e^a$, et $\frac{1}{x-e^{-a}}=\frac{-e^a}{1-e^ax}=-e^a\sum_{n=0}^{+\infty}e^{na}x^n$ pour tout x tel que $|x|<e^{-a}$.

Le théorème relatif aux sommes de deux fonctions développables en série entière affirme alors que $x\mapsto\frac{1}{P(x)}$ est développable en série entière au voisinage de zéro avec un rayon de convergence au moins égal à $e^{-|a|}=\min(e^a,e^{-a})$, et que ce développement est donné par

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{2\operatorname{sh}a}\left(-e^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-na}x^n+e^a\sum_{n=0}^{+\infty}e^{na}x^n\right)=\frac{1}{\operatorname{sh}a}\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{sh}([n+1]a)x^n$$

Comme $|\operatorname{sh}([n+1]a)x^n|\sim\frac{e^{|a|}}{2}(e^{|a|}x)^n$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $R=e^{-|a|}$.

197. **RMS 2009 399 X ESPCI PC**

Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$.

(a) Calculer I_1 et I_2. Exprimer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le nombre I_{n+2} en fonction de I_{n+1} et de I_n.

(b) On pose $I_0=1$. Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$. Montrer que le rayon de convergence R de f est non nul.

(c) Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-R,R[$ et la résoudre.

(d) Déterminer R.

Solution. — On note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des involutions sur $\{1,\dots,n\}$, de sorte que $I_n=\operatorname{Card}\mathcal{I}_n$.

(a) On a $I_1=1$ et $I_2=2$: l'unique involution de $\{1\}$ est l'identité, les deux involutions de $\{1,2\}$ sont l'identité et la transposition échangeant 1 et 2.

On établit ensuite une partition de $\mathcal{I}_{n+2}$, en considérant l'action d'une involution $f\in\mathcal{I}_{n+2}$ sur le point $n+2$:

– Ou bien $n+2$ est fixe par f, et f est entièrement déterminée par l'involution $g\in\mathcal{I}_{n+1}$ induite par f sur $\{1,\dots,n+1\}$. Il y a I_{n+1} telles involutions f.

– Ou bien $f(n+2)=a<n+2$, et f est entièrement déterminée par l'involution h induite par f sur $\{1,\dots,n+1\}\setminus\{a\}$, qui est de cardinal n. Une fois que a est fixé, il y a I_n involutions h possibles, et comme a est à choisir parmi les $n+1$ éléments de $\{1,\dots,n+1\}$, il y a finalement $(n+1)I_n$ telles involutions f.

On obtient alors

$$I_{n+2}=I_{n+1}+(n+1)I_n\,.$$

(b) Comme $\mathcal{I}_n$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations, on a $I_n\leqslant n!$. On en déduit que $|\frac{I_n}{n!}z^n|\leqslant|z|^n$, donc que $R\geqslant 1$.

(c) On multiplie la relation de la question (a) par $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (pour $|x|<R$), et on somme. Les règles de calcul sur les séries entières montrent que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)-[I_0+I_1x]\right)=f'(x)-1$. On obtient alors

$$f'(x)-1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^{n+1}=f(x)-1+xf(x)\quad\text{ou encore}\quad f'(x)-(1+x)f(x)=0\,.$$

Les solutions (réelles) de cette équation différentielles sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\exp(x+\frac{x^2}{2})$, où λ est une constante réelle. Parmi elles, la fonction f correspond à $\lambda=1$.

(d) Comme $f(x)=\exp(x)\exp(\frac{x^2}{2})$ est le produit de Cauchy de deux sommes de séries entières de rayon de convergence infini, alors $R=+\infty$.

198. **RMS 2009 400 X ESPCI PC**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière de terme général a_nx^n a un rayon de convergence $R>0$. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n)a_nx^n$?

Solution. — On note R' le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n)a_nz^n$.

On fixe un nombre positif $\rho<R$. Alors la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée : on note M un réel tel que $|a_n\rho^n|\leqslant M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si z est un nombre complexe tel que $|z|<\rho$, alors

$$|P(n)a_nz^n|=\left|P(n)\left(\frac{z}{\rho}\right)^na_n\rho^n\right|\leqslant M|P(n)|\left|\frac{z}{\rho}\right|^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\,,$$

en vertu des théorèmes de comparaison sur les suites usuelles. On en déduit que le terme général de la série entière étudiée tend vers zéro pour tout z de module $<R$, donc que $R'\geqslant R$.

Si maintenant z est tel que $|z| > R$, alors la suite de terme général $a_n z^n$ est non bornée, et comme $|P(n)|$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, la suite de terme général $P(n)a_n z^n$ est elle aussi non bornée. On en déduit que $R' \leqslant R$, et finalement que
$$R' = R\,.$$

199. **RMS 2009 401 X ESPCI PC**

Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R.

(a) Montrer que $\forall r \in]0, R[,\ f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.

(b) Soit $g_n \colon z \mapsto z^n$. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r$, montrer que $g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

(c) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r < R$, montrer que $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) On a $\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t))\,\mathrm{d}t$ avec $h_n(t) := a_n r^n e^{int}\,\mathrm{d}t$. Comme $\|h_n\|_\infty = |a_n|r^n$ avec $r < R$, on conclut à la convergence normale de la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 0} h_n$ sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors intervertir somme et intégrale :
$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_0 = 2\pi f(0)\,,$$
puisque $\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{n,0}$. Le résultat s'ensuit.

(b) De même, $\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{g_n(re^{it})}{1-\frac{z}{r}e^{-it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(\sum_{k=0}^{+\infty} r^n(\frac{z}{r})^k e^{i(n-k)t})\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k(t))\,\mathrm{d}t$ avec $\ell_k(t) := r^n(\frac{z}{r})^k e^{i(n-k)t}$. Comme $\|\ell_k\|_\infty = r^n|\frac{z}{r}|^k$ avec $|z| < r$, on conclut à la convergence normale de la série de fonctions continues $\sum_{k\geqslant 0}\ell_k$ sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors intervertir somme et intégrale :
$$\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} r^n\left(\frac{z}{r}\right)^k\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi z^n\,.$$

(c) On constate que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} m_n(t)\,\mathrm{d}t$, où l'on a posé $m_n(t) = a_n re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}$. Comme $|z| < r$, on a $|re^{it} - z| \geqslant |re^{it}| - |z| = r - |z| > 0$, donc $\left|\frac{1}{re^{it}-z}\right| \leqslant \frac{1}{r-|z|}$. Par suite, $\|m_n\| \leqslant \frac{r}{r-|z|}|a_n|r^n$; comme $r < R$, on conclut à la convergence normale de la série de fonctions continues $\sum_{k\geqslant 0}\ell_k$ sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors intervertir somme et intégrale, et la question précédente fournit :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z)\,.$$

200. **RMS 2012 348 X ESPCI PC**

Soit D le disque fermé unité et $F\colon D \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence 1. On suppose que F est nulle sur le cercle unité et que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall(x, y) \in D^2,\ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que F est nulle.

Solution. — à rédiger ? ?

201. **RMS 2012 349 X ESPCI PC**

Soient $\ell \in \mathbb{R}^*$, $(b_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ est égal à 1, que la série de terme général b_n est divergente, et que $a_n/b_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ est égal à 1.

(b) Déterminer la limite de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand $x \to 1^-$.

(c) Montrer que $(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n)/(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n)$ tend vers ℓ quand $x \to 1^-$.

Solution. — à rédiger ? ?

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

202. **RMS 2009 402 X ESPCI PC**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant x$. Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f^2(x)}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de (I_n).

Solution. — Le taux d'accroissement τ de f en zéro, défini par $\tau(0) = 1$ et $\tau(x) = f(x)/x$ est continu sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\tau \geqslant 1$ par hypothèse. Le changement de variable $u = nx$ permet d'écrire que

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2 \tau^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2 \tau^2(u/n)}\,.$$

Comme $\lim_0 \tau = 1$, la suite de fonctions $g_n \colon u \mapsto [1 + u^2\tau^2(u/n)]^{-1}$ converge simplement vers la fonction continue $g \colon u \mapsto 1/(1+u^2)$ sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on dispose de la domination $|g_n| \leqslant g$, puisque $\tau \geqslant 1$. Comme g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de convergence dominée montre que la suite (I_n) converge vers

$$\int_0^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

203. **RMS 2009 403 X ESPCI PC**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(x + ne^{-x})(x^3+1)}{e^x + n}\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (u_n).

Solution. — On note f_n la fonction intégrée. Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_n(x) = \frac{\left(e^{-x} + \frac{x}{n}\right)(x^3+1)}{1 + \frac{e^x}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}(x^3+1)\,.$$

La suite de fonctions continues (f_n) converge donc simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction continue $f \colon x \mapsto e^{-x}(x^3+1)$. Par ailleurs,

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^3+1}{e^x+n}\left(ne^x + x - e^{-x}[n + e^x]\right)\right| = \left|\frac{(x^3+1)(x-1)}{e^x+n}\right| \leqslant g(x) := e^{-x}(x^3+1)|x-1|\,.$$

La fonction g étant intégrable sur $[0, +\infty[$, et la suite de fonctions $(f - f_n)$ convergeant simplement vers la fonction nulle, le théorème de convergence dominée affirme alors que (u_n) converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, la valeur 7 étant obtenue par intégrations par parties.

204. **RMS 2009 404 X ESPCI PC**

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $a_n \to 0$.

(b) Déterminer la limite de na_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. — Le changement de variable $u = t^n$, pour lequel $t = u^{1/n}$, donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{n} u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u$, conduit à

$$a_n = \frac{1}{n}\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} f(u) u^{-1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On sait que $x_n = (1 + 1/n)^n$ est le terme général d'une suite qui converge vers e (par valeurs inférieures car $\ln(x_n) = n\ln(1+1/n) \leqslant 1$, en appliquant l'inégalité $\ln(1+v) \leqslant v$ pour tout $v > -1$). On peut donc définir une suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[1, e]$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} f(u)u^{-1+1/n} & \text{si } u \in [1, x_n],\\ 0 & \text{si } u \in]x_n, e]. \end{cases}$$

Les g_n sont continues par morceaux sur $[1, e]$, la suite (g_n) converge simplement sur $[0, e[$ vers la fonction $u \mapsto f(u)/u$, et on dispose de l'hypothèse de domination

$$\forall u \in [1, e], \quad |g_n(u)| \leqslant |f(u)|\,.$$

La fonction f étant intégrable sur $[1, e[$, puisque continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée dit alors que la suite de terme général $\int_1^e g_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge vers $\int_1^e f(u)/u\,\mathrm{d}u$. Ceci donne les réponses aux deux questions de l'énoncé :

$$\lim_{+\infty} a_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty}(na_n) = \int_1^e \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Intégrales à paramètre

205. **RMS 2012 351 X ESPCI PC**
Soit $f\colon x \mapsto \int_0^1 xe^{-xt\ln t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier sa régularité.

(b) Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de zéro.

Solution. — à rédiger ? ?

206. **RMS 2012 352 X ESPCI PC**
Déterminer la limite de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution. — à rédiger ? ?

Séries de Fourier

207. **RMS 2012 353 X ESPCI PC**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π–périodique. On suppose que la restriction de f à $[0, 2\pi[$ est concave et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que les coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sont tous négatifs.

Solution. — à rédiger ? ?

Équations différentielles linéaires

208. **RMS 2009 406 X ESPCI PC**
Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.

Solution. — On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. Si f est une telle fonction, alors elle est nécessairement de classe C^2, et $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$, donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $A\cos + B\sin$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. Une telle fonction est solution de l'équation de départ si et seulement si $-A\sin x + B\cos x = A\cos x - B\sin x$ pour tout x réel. La famille $(\cos, \sin)$ étant libre, ceci est possible si et seulement si $A = B$, et on conclut que les solutions sont les fonctions

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto A(\cos x + \sin x) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

209. **RMS 2012 354 X ESPCI PC**
Soit y une solution de $y''(x) = xy(x)$ sur $[0, 1]$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ |y'(x)| + |y(x)| \leqslant e^x$.

Solution. — à rédiger ? ?

210. **RMS 2012 355 X ESPCI PC**
Soit (E) l'équation différentielle $y''(x) + (1 + e^{-x^2})y(x) = 0$.

(a) Montrer que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit y une solution non nulle de (E). Montrer que y s'annule au moins une fois sur tout intervalle de la forme $[a, a + \pi]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Solution. — à rédiger ? ?

211. **RMS 2012 356 X ESPCI PC**
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

(a) Soit f une solution non nulle de (E). Montrer que les zéros de f sont isolés.

(b) Soient f et g deux solutions non nulles de (E). On suppose que f et g ont un zéro en commun. Montrer que f et g sont proportionnelles.

(c) Soient f et g deux solutions linéairement indépendantes de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g.

Solution. — à rédiger ? ?

Équations différentielles non linéaires

212. **RMS 2009 407 X ESPCI PC**
Soit ϕ une solution maximale de $y' = y^2 + x^2$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que I est borné.

Solution. — Supposons que ϕ soit définie sur un voisinage de $+\infty$. Comme $\phi'(x) = \phi^2(x)+x^2 \geqslant x^2$, on a $\lim_{+\infty} \phi' = +\infty$. Alors il en est de même de ϕ (choisir m tel que $\phi'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant m$, et écrire que $\phi(x) = \phi(m) + \int_m^x \phi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \phi(m) + x - m$ pour tout $x \geqslant m$). Il existe donc a tel que ϕ ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$. On peut alors écrire que

$$\forall x \geqslant a, \quad \frac{\phi'(x)}{\phi(x)^2} = 1 + \frac{x^2}{\phi^2(x)} \cdot$$

En intégrant sur $[a, x]$, on obtient, par positivité de $\frac{1}{\phi(x)}$ et de $\frac{t^2}{\phi^2(t)}$:

$$\forall x \geqslant a, \quad \frac{1}{\phi(a)} \geqslant \left[-\frac{1}{\phi(t)}\right]_a^x = \frac{1}{\phi(a)} - \frac{1}{\phi(x)} = x - a + \int_a^x \frac{t^2}{\phi^2(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant x - a\,.$$

Par suite, $x \leqslant a + \frac{1}{\phi(a)}$ serait majoré sur $[a, +\infty[$, ce qui est faux.
On démontrerait de la même manière que ϕ ne peut être définie sur un voisinage de $-\infty$, et finalement, que I est borné.

213. **RMS 2009 408 X ESPCI PC**
Soit (E) l'équation différentielle $y'^2 = 4y$.

(a) Soient f une solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ tels que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.
(b) Résoudre (E) en cherchant des solutions ne s'annulant pas sur I.
(c) Trouver des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne sont pas des deux types précédents.

Solution. — Comme $y = y'^2/4$, on a $y \geqslant 0$ pour toute solution y de (E).

(a) La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, on peut poser $m = \sup_{[a,b]} f \geqslant 0$, et trouver $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.
Si $x_0 \in \{a, b\}$, alors $m = f(a) = f(b) = 0$, et f est identiquement nulle sur $[a, b]$.
Si $x_0 \in]a, b[$, alors f' s'annule en x_0, et $m = f(x_0) = f'^2(x_0)/4 = 0$, et la conclusion est la même.
(b) Si y ne s'annule pas sur I, alors $y > 0$ sur I et (E) équivaut à $y'/(2\sqrt{y}) = (\sqrt{y})' = \pm 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{y(x)} = \pm x + k$ pour tout $x \in I$, ou encore (on a changé k en $\pm k$) :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = (x + k)^2\,.$$

Les intervalles maximaux correspondants sont alors $] - \infty, -k[$ et $] - k, +\infty[$ (la solution y ne doit pas s'annuler).
(c) Les fonctions des trois types suivants sont solutions, où k et k' sont des constantes réelles telles que $k \leqslant k'$:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -k, \\ (x+k)^2 & \text{si } x \geqslant -k, \end{cases} \qquad y(x) = \begin{cases} (x+k)^2 & \text{si } x \leqslant -k, \\ 0 & \text{si } x \geqslant -k, \end{cases} \qquad y(x) = \begin{cases} (x+k)^2 & \text{si } x \leqslant -k, \\ 0 & \text{si } -k \leqslant x \leqslant -k', \\ (x+k')^2 & \text{si } x \geqslant -k'. \end{cases}$$

Si l'on ajoute la fonction nulle, on peut montrer qu'on a décrit ainsi toutes les solutions maximales.

Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

214. **RMS 2009 409 X ESPCI PC**
Soient $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x + y \leqslant 2\}$ et $f\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2(x^2 + y^2)$. Déterminer le maximum de f sur C.

Solution. — Le maximum existe, puisque f est continue et que C est une partie compacte. S'il est atteint dans $\mathring{C}$, alors il s'agit d'un maximum local de f sur $\mathbb{R}^2$, donc le gradient de f y est nul. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2(x^2 + y^2) + 2x^3y^2 = 2xy^2(2x^2 + y^2)\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2yx^2(2y^2 + x^2)\,.$$

On constate que les points critiques de f forment la réunion des deux axes de coordonnées, dont aucun point n'est dans $\mathring{C}$. Par suite, le maximum de f sur C est atteint sur le bord de C : comme il s'agit d'un triangle, il reste qu'à examiner f sur les trois côtés (deux suffisent en fait, par la symétrie de f). Comme $f(x, y) = 0$ dès que $x = 0$ ou $y = 0$, et comme f

est manifestement positive, on vient de montrer que le maximum de f sur C est nécessairement atteint sur l'hypoténuse de C. On étudie alors sur $[0,2]$ la fonction ϕ définie par

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x, 2-x) = [x(2-x)]^2\left(x^2+(2-x)^2\right) = (x^4-4x^3+4x^2)(2x^2-4x+4) = 2x^6-12x^5+28x^4-32x^3+16x^2,\\ \phi'(x) &= 12x^5-60x^4+112x^3-96x^2+32x = 4x(3x^4-15x^3+28x^2-24x+8) = 4x(x-1)(3x^3-12x^2+16x-8),\\ &= 4x(x-1)(x-2)(3x^2-6x+4)\,.\end{aligned}$$

Comme le discriminant de $3X^2-6X+4$ est négatif, ϕ' est du signe de $1-x$ sur $[0,2]$, donc ϕ est croissante sur $[0,1]$ puis décroissante sur $[1,2]$, donc f est maximale sur C en le point $(1,1)$ seulement, et

$$\max_C f = f(1,1) = 2\,.$$

215. **RMS 2009 410 X ESPCI PC**

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $S=\{x\in\mathbb{R}^3,\ \|x\|=1\}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les extrema de $\Phi:(x,y,z)\mapsto\langle x,y\rangle+\langle y,z\rangle+\langle z,x\rangle$ sur S^3.

Solution. — La fonction Φ est définie et continue de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}$, et $S^3\subset\mathbb{R}^6$ est compacte. Par suite, Φ est bornée et atteint ses bornes sur S^3.

L'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que $\forall (x,y,z)\in S^3,\ \Phi(x,y,z)\leqslant \|x\|\|y\|+\|y\|\|z\|+\|z\|\|x\|\leqslant 3$. Par ailleurs, $\Phi(x,x,x)=3$ pour tout $x\in S$, ce qui montre que

$$\max_{S^3}\Phi = 3\,.$$

Pour $(x,y,z)\in S^3$, l'égalité

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+2\left(\langle x,y\rangle+\langle y,z\rangle+\langle z,x\rangle\right) = 3+2\Phi(x,y,z)$$

montre que $0\leqslant 3+2\Phi$ sur S^3. Par ailleurs, l'égalité est réalisée si et seulement si $x+y+z=0$, ce qui est possible sur la sphère. Il suffit de prendre x,y,z formant les trois sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de S. On a démontré que

$$\min_{S^3}\Phi = -\frac{3}{2}\,\cdot$$

Remarque. — L'étude du cas d'égalité $\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|$ (si et seulement si x et y sont positivement colinéaires, ce qui, sur la sphère, revient à $x=y$), montre que le maximum de Φ sur S^3 n'est réalisé que pour les triplets (x,y,z) de la forme (x,x,x). On peut aussi montrer que le minimum n'est réalisé que pour les situations géométriques invoquées ci-dessus (triangles équilatéraux inscrits dans un grand cercle).

216. **RMS 2009 411 X ESPCI PC**

Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f_1' ne s'annule pas. On pose $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$. Montrer l'existence d'un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme Φ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on ait $\Phi^{-1}(f(x))=(x,0)$. A-t-on unicité ?

Solution. — Comme f_1' ne s'annule pas, f_1 est continue et strictement monotone, et elle réalise un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur son image, qui est un intervalle ouvert, que l'on notera $J=]a,b[$, avec $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

Un point (u,v) du plan appartient au support C de l'arc paramétré $(\mathbb{R},f)$ si et seulement s'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $u=f_1(x)$ et $v=f_2(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $x\in J$ et $v=(f_2\circ f_1^{-1})(u)$. En d'autres termes, C est le graphe de la fonction $f_2\circ f_1^{-1}:J\to\mathbb{R}$.

Pour fabriquer Φ comme le demande l'énoncé, il faut que la deuxième composante de $\Phi(u,v)$ s'annule quand (u,v) est sur C, i.e. quand $v=(f_2\circ f_1^{-1})(u)$. Ici, on interprète l'énoncé comme laissant la possibilité de choisir l'ensemble de départ de Φ : on choisit $J\times\mathbb{R}$, et on pose

$$\forall (u,v)\in J\times\mathbb{R},\quad \Phi(u,v)=\left(f_1^{-1}(u), v-(f_2\circ f_1^{-1})(u)\right)\,.$$

Tout d'abord, $\Phi(f(x))=\Phi(f_1(x),f_2(x))=(f_1^{-1}(f_1(x)),f_2(x)-(f_2\circ f_1^{-1})(f_1(x)))=(x,0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Ensuite, Φ réalise bien une bijection de $J\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$: en effet, si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est donné,

$$\Phi(u,v)=(\alpha,\beta)\iff\begin{cases}f_1^{-1}(u) &=\alpha,\\ v-(f_2\circ f_1^{-1})(u) &=\beta,\end{cases}\iff\begin{cases}u &= f_1(\alpha),\\ v &=\beta+f_2(\alpha).\end{cases}$$

On vient de prouver que Φ est bijective et que $\Phi^{-1}(\alpha,\beta)=(f_1(\alpha),\beta+f_2(\alpha))$ pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Enfin, les expressions de Φ et de Φ^{-1} montrent qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$, puisque f_1, f_2 et f_1^{-1} le sont, donc Φ est bien un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme.

Il n'y a pas unicité : si $(k,\ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le lecteur vérifiera que la fonction $\Phi_{k,\ell}$ définie sur $J \times \mathbb{R}$ par

$$\Phi_{k,\ell}(u,v) = \left(f_1^{-1}(u) + k[v - (f_2 \circ f_1^{-1})(u)], \ell[v - (f_2 \circ f_1^{-1})(u)]\right)$$

convient aussi.

217. **RMS 2009 412 X ESPCI PC**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les couples (f,g) de fonctions tels que $U : (t,x) \mapsto f(t)g(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times [0,L]$, $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $U(t,0) = U(t,L) = 0$.

Solution. — Si f ou g est identiquement nulle, alors U est solution.

On exclut désormais ce cas : il existe $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+ \times [0,L]$ tel que $f(t_0)g(x_0) \neq 0$. Alors les égalités $f(t) = U(t,x_0)/g(x_0)$ et $g(x) = U(t_0,x)/g(t_0)$, valables pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,L]$, montrent que f et g sont de classe C^2. L'équation aux dérivées partielles proposée est alors équivalente à

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,L], \quad f'(t)g(x) = a^2 f(t)g''(x)\,.$$

En posant $\lambda = a^2 g''(x_0)/g(x_0)$, on en déduit en particulier que $f'(t) = \lambda f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = Ae^{\lambda t}\,.$$

En reportant dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient

$$\forall x \in [0,L], \quad g''(x) - \frac{\lambda}{a^2} g(x) = 0\,.$$

Si $\lambda > 0$, on écrit $\lambda/a^2 = \omega^2$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, et g est de la forme $x \mapsto B\,\mathrm{sh}(\omega x) + C\,\mathrm{ch}(\omega x)$ avec $(B,C) \in \mathbb{R}^2$. La condition $U(t,0) = 0$ pour tout t impose $g(0) = C = 0$. La condition $U(t,L) = 0$ pour tout t impose alors $B = 0$, donc g est identiquement nulle, ce que l'on a exclu. Le cas $\lambda > 0$ est donc impossible.

Si $\lambda = 0$, alors g est affine et doit être nulle en zéro et L, donc doit être identiquement nulle : de nouveau, c'est impossible.

Alors $\lambda < 0$, et l'on écrit $\lambda/a^2 = -\omega^2$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, et g est de la forme $x \mapsto B\sin(\omega x) + C\cos(\omega x)$ avec $(B,C) \in \mathbb{R}^2$. La condition $U(t,0) = 0$ pour tout t impose $g(0) = C = 0$. La condition $U(t,L) = 0$ pour tout t impose alors $B\sin(\omega L) = 0$. Il faut que $B \neq 0$, sinon g est identiquement nulle, donc ω est de la forme $n\pi/L$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, pour qu'une solution $(t,x) \mapsto U(t,x) = f(x)g(t)$ soit non identiquement nulle, il faut qu'il existe $(A,B,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = A\exp\left(\frac{a^2n^2\pi^2 t}{L^2}\right),$$
$$\forall x \in [0,L], \quad g(x) = B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On vérifie ensuite aisément la réciproque.

218. **RMS 2012 357 X ESPCI PC**

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x)-f(y)\| \geqslant \|x-y\|$. Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Solution. — à rédiger ? ?

219. **RMS 2012 358 X ESPCI PC**

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + a\cos y, y + b\sin x) \in \mathbb{R}^2$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. — à rédiger ? ?

220. **RMS 2012 359 X ESPCI PC**

Soit E l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer $\iint_E x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Solution. — à rédiger ? ?

Géométrie

221. **RMS 2009 413 X ESPCI PC**

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$. On suppose : $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$, et $C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$. Montrer que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$.

Solution. — Il s'agit du théorème de Helly, en dimension 2. On raisonne par l'absurde, posant $K := C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$ et en supposant que $K \cap C_4 = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \emptyset$. On utilisera, sans le rappeler à chaque fois, le fait que l'intersection de convexes (respectivement fermés) est convexe (respectivement fermée).

On admet momentanément que, si A et B sont deux parties convexes disjointes du plan, avec A compacte et B fermée, alors il existe une droite qui les sépare strictement, c'est-à-dire que A et B se trouvent chacun dans un des deux demi-plans ouverts définis par D. On applique ce résultat de séparation à $A = K$ (qui est bien convexe et compacte) et $B = C_4$ (qui est bien convexe, fermée, et disjointe de K, par hypothèse).

Comme $C_1 \cap C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$, et comme $C_1 \cap C_2 \cap K = K \neq \emptyset$, la partie $C_1 \cap C_2$ contient au moins un point M_{C_4} dans le demi-plan ouvert défini par D et contenant C_4, et au moins un point M_K dans le demi-plan ouvert défini par D et contenant K. Comme $C_1 \cap C_2$ est convexe, le segment $[M_{C_4}, M_K]$ est contenu dans $C_1 \cap C_2$, et il coupe évidemment D, ce qui prouve que

$$D \cap C_1 \cap C_2 \neq \emptyset\,.$$

On montre de même que $D \cap C_2 \cap C_3$ et $D \cap C_1 \cap C_3$ sont non vides. Les trois parties $S_i = D \cap C_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ sont non vides, convexes, fermées, et bornées car les C_i le sont : ce sont donc des segments de la droite D, et on vient de montrer que $S_1 \cap S_2 = D \cap C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, que $S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$ et $S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$.

Le lecteur vérifiera sans peine que si trois segments d'une même droite se coupent deux à deux, alors ils ont un point commun. En l'occurrence,

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = D \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 = D \cap K \neq \emptyset\,,$$

ce qui contredit le caractère séparant de la droite D, et achève de prouver que l'hypothèse $\cap_{i=1}^4 C_i = \emptyset$ est fausse.

Remarques. — 1. Le raisonnement mené ci-dessus s'étend aisément en une récurrence sur la dimension d de l'espace, qui permet de prouver que, si les C_i, pour $1 \leqslant i \leqslant d+2$, sont des convexes compacts d'un espace vectoriel de dimension d, tels que l'intersection de $d+1$ quelconques d'entre eux est non vide, alors l'intersection $\cap_{i=1}^{d+2} C_i$ est non vide.

2. Le résultat de séparation utilisé ci-dessus est une conséquence du théorème de Hahn-Banach : voir par exemple Berger, Géométrie, Tome 2, Nathan.

3. Cette rédaction ne me satisfait pas. A améliorer ? ?

222. **RMS 2009 414 X ESPCI PC**

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans une ellipse.

Solution. — L'aire maximale vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$, si l'équation réduite de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En effet, dans ce cas, on considère l'affinité orthogonale plane de base l'axe Ox et de rapport $\frac{b}{a}$. Elle envoie le cercle de centre O de rayon a sur l'ellipse en question, et multiplie les aires par $\frac{b}{a}$. Elle conserve l'inscription des triangles dans le cercle (respectivement l'ellipse), et conserve aussi la propriété de maximalité des aires.

On se ramène ainsi à la recherche de l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle : il est classique que cette aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux (et eux seulement), dont l'aire est $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. L'affirmation initiale s'en déduit immédiatement.

A reprendre ? ?

223. **RMS 2012 360 X ESPCI PC**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ponts du plan. Existe-t-il $B_1, \dots, B_n$ dans le plan tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, le point A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ et A_n est le milieu de $[B_n, B_1]$.

Solution. — à rédiger ? ?

Mines Ponts MP

Algèbre

224. **RMS 2011 398 Mines Ponts MP**

Aujourd'hui, mercredi 14 juillet 2010. Quel jour sera-t-on le 14 juillet 2011 ?

Solution. — Comme 2010 n'est pas divisible par 4, l'année 2010 comporte 365 jours. Comme $365 \equiv 1 \mod 7$, le 14 juillet 2011 (365 jours plus tard qu'aujourd'hui) sera un jeudi.

225. **RMS 2011 399 Mines Ponts MP**

On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Montrer que $F_n \wedge F_m = 1$.

(b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Solution. —

(a) Voir l'exercice 44 page 116.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le plus petit nombre premier qui divise F_n. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective en vertu de la question (a), donc ses termes constituent une infinité de nombres premiers.

226. **RMS 2012 366 Mines Ponts MP**

Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 7y &= 3, \\ 6x - 7y &= 0, \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

Solution. — On confond les classes modulo 36 ou 37 avec les nombres relatifs eux-mêmes, pour des raisons typographiques. On détaille deux méthodes de résolution.

– Dans un anneau commutatif, les formules de Cramer restent valables à condition que le déterminant du système soit un inversible de cet anneau. Ici, $\det(S) = -21 - 42 = -63 = 9$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ n'est pas inversible, alors qu'il est non nul donc inversible dans le corps $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ (et il y vaut 11).
  L'algorithme d'Euclide fournit l'inverse de 11 dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 37 &= 11 \times 3 + 4, \\ 11 &= 4 \times 2 + 3, \\ 4 &= 3 \times 1 + 1, \end{aligned}$$

  donc $1 = 4 - 3 = 4 - (11 - 4 \times 2) = 3 \times 4 - 11 = 3 \times (37 - 11 \times 3) \times 4 - 11 = 3 \times 37 - 10 \times 11$, donc $1/11 = -10$ dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$. Par suite, (S) possède une unique solution dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}}{11} = 10 \times 21 = 25 = -12,$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{11} = 10 \times 18 = 72 = 32 = -5.$$

– On utilise la méthode du pivot. La transformation $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donne le système équivalent

$$\begin{cases} 9x &= 3, \\ 6x - 7y &= 0. \end{cases}$$

  La première équation est impossible dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ (en multipliant par 4, elle donne $0 = 12$), donc le système n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
  En revanche, dans le corps $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, la première équation équivaut à $x = 3/9 = 1/3$; comme $3 \times (-12) = -36 = 1$ dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, on obtient $x = -12 = 25$. En reportant dans la deuxième équation, on trouve $y = 6x/7 = -72/7 = 2/7$. Comme $37 = 7 \times 5 + 2$, $7 = 2 \times 3 + 1$, on tire $1 = 7 - (37 - 7 \times 5) \times 3 = 16 \times 7 - 3 \times 37$, donc $1/7 = 16$, et on trouve $y = 2 \times 16 = 32 = -5$: ce sont sont bien les même résultats qu'avec la méthode précédente.

227. **RMS 2011 400 Mines Ponts MP**

(a) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, a dans $\mathbb{Z}$ tel que $a \wedge n = 1$. Montrer : $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

(b) Si p est un nombre premier et a dans $\mathbb{Z}$, montrer : $a^p \equiv a\ [p]$.

(c) Si m et n sont dans $\mathbb{Z}$, montrer : $m^{19}n \equiv n^{19}m\,[798]$.

(d) Soient n un entier $\geqslant 2$, a dans $\mathbb{Z}$ tel que $a^{n-1} \equiv 1\,[n]$ et tel que, pour tout diviseur m de $n-1$ dans $\mathbb{N}^*$ autre que $n-1$, on ait : $a^m \not\equiv 1\,[n]$. Montrer que n est premier.

Solution. — à rédiger ? ?

228. **RMS 2007 311 Mines Ponts MP**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini tel que $\forall g \in G, g^2 = e$, où e est le neutre de G. On suppose G non réduit à $\{e\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Solution. — On commence par démontrer (résultat classique) que tout groupe, fini ou non, vérifiant $\forall g \in G,\ g^2 = e$ est commutatif. En effet, soient x et y deux éléments de G. On a $(xy)^2 = e$, c'est-à-dire que $xy = (xy)^{-1}$. Or, dans un groupe, on a toujours $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, et ici, $x^{-1} = x$ et $y^{-1} = y$. Finalement

$$xy = yx\,,$$

ce qui montre que G est commutatif. Par suite, on notera $+$ la loi de G.

On munit ensuite G d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où l'addition interne est la loi de G (notée additivement, on le rappelle), et où la loi externe est définie par $\dot{0} \cdot g = e$ et $\dot{1} \cdot g = g$ pour tout $g \in G$ (aucune autre définition n'est possible).

Il faut alors vérifier que $(G, +, \cdot)$ est bien un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$–espace vectoriel :

EV1 $(G, +)$ est bien un groupe commutatif par hypothèse.

EV2 $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ pour tout $(\lambda, x, y) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times G \times G$: prendre successivement $\lambda = \dot{0}$ et $\lambda = \dot{1}$. C'est évident.

EV3 $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ pour tout $(\lambda, \mu, x) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times G$: même méthode.

EV4 $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ pour tout $(\lambda, \mu, x) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times G$: même méthode.

EV5 $\dot{1} \cdot x = x$ pour tout $x \in G$: vrai par définition.

Comme G est fini, il possède une famille génératrice finie (prendre tous les éléments de G...). On reconnaît la définition d'un espace vectoriel de dimension finie. En tant qu'espace vectoriel sur un corps commutatif, non réduit au vecteur nul, et de dimension finie, G possède une base finie, disons $\mathcal{B} = (g_1, \dots, g_n)$.

L'isomorphisme habituel d'espaces vectoriels entre un espace E de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}^n$, via les coordonnées sur la base $\mathcal{B}$, montre alors que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ en tant qu'espace vectoriel, donc aussi en tant que groupe additif.

229. **RMS 2007 347 Mines Ponts MP**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Solution. — On suppose que $n \geqslant 2$ dans cet exercice, et on remarque (exemple classique) que l'expression du produit scalaire utilisé ici est

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)\,.$$

On pose $s_1(M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}$ (somme de tous les éléments de M) et $s_2(M) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ (somme des carrés de tous les éléments de M). Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par I_n et J. L'énoncé demande le calcul de la distance de M à $\mathcal{P}$. On sait que cette distance vaut

$$d = \|\overrightarrow{MP}\|\,,$$

où P est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. On sait aussi que, si (E_1, E_2) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$, la matrice P est donnée par $\langle E_1, M\rangle E_1 + \langle E_2, M\rangle E_2$. Le théorème de Pythagore montre que

$$d^2 = \|M\|^2 - \|P\|^2 = \|M\|^2 - \langle E_1, M\rangle^2 - \langle E_2, M\rangle^2\,.$$

Pour déterminer une base possible (E_1, E_2), on applique le procédé de Gram et Schmidt à la famille (I_n, J). Comme $\|I_n\|^2 = \operatorname{tr} I_n = n$, on pose

$$E_1 = \frac{I_n}{\sqrt{n}}\,\cdot$$

Ensuite, $E_2' = J - \langle E_1, J\rangle E_1 = J - I_n$ est orthogonale à E_1. Comme $\|E_2'\|^2 = \|J\|^2 - 2\langle I_n, J\rangle + \|I_n\| = n^2 - 2n + n = n(n-1)$, on pose

$$E_2 = \frac{J - I_n}{\sqrt{n^2 - n}}\,\cdot$$

Comme $\langle J, M\rangle = \operatorname{tr}({}^tJM) = \operatorname{tr}(JM) = s_1(M)$ et $\langle M, M\rangle = \operatorname{tr}({}^tMM) = s_2(M)$ on obtient

$$d^2 = s_2(M) - \frac{(\operatorname{tr} M)^2}{n} - \frac{[s_1(M) - \operatorname{tr}(M)]^2}{n^2 - n}\,.$$

Remarque. — On a calculé P en passant : $P = \frac{\operatorname{tr}(M)}{n} I_n + \frac{s_1(M) - \operatorname{tr}(M)}{n^2 - n}(J - I_n)$.

230. **RMS 2007 397 Mines Ponts MP**

Déterminer le rang de la forme quadratique q définie par $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n,\ i\neq j}x_ix_j$.

Solution. — Il s'agit de déterminer le rang de la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, matrice donnée par

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\ddots&&\vdots&&\\\vdots&&\ddots&\vdots&&\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

Les transformations élémentaires sur les colonnes $C_i\leftarrow C_i-C_1$ pour $2\leqslant i\leqslant n$, puis $C_1\leftarrow C_1+\sum_{i=2}^nC_i$ conduisent successivement aux matrices

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&&\vdots&&\\\vdots&&\ddots&\vdots&&\\1&0&0&\cdots&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}\begin{pmatrix}n-1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&&\vdots&&\\\vdots&&\ddots&\vdots&&\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}.$$

La dernière matrice est triangulaire à éléments diagonaux non nuls : son rang, donc le rang de A, donc celui de q, vaut n.

231. **RMS 2007 398 Mines Ponts MP, RMS 2010 478 Mines Ponts MP**

Condition pour que la forme quadratique Q_α définie par $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ Q_\alpha(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^nx_i^2-\alpha\left(\sum_{i=1}^nx_i\right)^2$ soit définie positive ?

Solution. — L'inégalité de Cauchy et Schwarz pour le produit scalaire canonique (noté $\langle\ ,\ \rangle$, sa norme étant notée $\|\cdot\|$), appliquée aux vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(1,\dots,1)$, affirme que

$$\langle x,y\rangle^2=\left(\sum_{i=1}^nx_i\right)^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2=n\sum_{i=1}^nx_i^2\ ,$$

et qu'il existe des vecteurs x non nuls pour lesquels l'égalité est réalisée : les vecteurs colinéaires à y. Alors,

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\ ,\quad Q_\alpha(x_1,\dots,x_n)\geqslant\left(\frac{1}{n}-\alpha\right)\left(\sum_{i=1}^nx_i\right)^2\ ,$$

avec égalité pour certains vecteurs x non nuls. Par suite, pour que Q_α soit définie positive, il faut et il suffit que $\alpha<1/n$.

232. **RMS 2010 477 Mines Ponts MP**

Soit q la forme quadratique définie par $q(x,y,z)=x^2+4z^2+2xy+4xz+2yz$. Exprimer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Déterminer tous les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels q est définie positive.

Solution. — L'algorithme de Gauss fournit

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad q(x,y,z)=(x+y+2z)^2-y^2-2yz=(x+y+2z)^2-(y+z)^2+z^2.$$

Les formes linéaires en question sont $\ell_1\colon(x,y,z)\mapsto x+y+2z$, $\ell_2\colon(x,y,z)\mapsto y+z$ et $\ell_3\colon(x,y,z)\mapsto z$, et la famille (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}^3$.

Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$. Il admet une équation de la forme $\ell(x,y,z)=0$, où ℓ est une forme linéaire non nulle. Par suite, il existe un unique triplet $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ de réels non tous nuls tels que $\ell=\sum_{k=1}^3\alpha_k\ell_k$. Supposons par exemple que $\alpha_1\neq0$. Alors $\ell_1+\beta_2\ell_2+\beta_3\ell_3=0$ est une autre équation de p, où l'on a posé $\beta_k=\alpha_k/\alpha_1$ pour $k\in\{2,3\}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in P,\quad q(x,y,z)&=[\ell_1(x,y,z)]^2-[\ell_2(x,y,z)]^2+[\ell_3(x,y,z)]^2,\\&=[-\beta_2\ell_2(x,y,z)-\beta_3\ell_3(x,y,z)]^2-[\ell_2(x,y,z)]^2+[\ell_3(x,y,z)]^2,\\&=(\beta_2^2-1)[\ell_2(x,y,z)]^2+(\beta_3^2+1)[\ell_3(x,y,z)]^2+2\beta_2\beta_3\ell_2(x,y,z)\ell_3(x,y,z),\end{aligned}$$

à terminer ? ?

Analyse

233. **RMS 2007 407 Mines Ponts MP**

On munit l'espace des suites bornées réelles $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente n'est pas un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Solution. —

(a) Soit $(u^{(k)})$ une suite de suites convergentes appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{R})$: pour chaque k, on écrit $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(u^{(k)})$ converge vers une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{R})$. On souhaite montrer que a est une suite convergente. Voici deux solutions.

i. On montre que la suite a est de Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant K$, on ait $\|u^{(k)} - a\|_\infty \leqslant \varepsilon$, ce qui implique que $\forall k \geqslant K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)} - a_n| \leqslant \varepsilon$.
La suite $u^{(K)}$ est convergente, donc elle est de Cauchy : il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous n et $p \geqslant N$, on ait $|u_n^{(K)} - u_p^{(K)}| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tous n et $p \geqslant N$, on a :

$$|a_n - a_p| \leqslant |a_n - u_n^{(K)}| + |u_n^{(K)} - u_p^{(K)}| + |u_p^{(K)} - a_p| \leqslant 3\varepsilon.$$

ii. On utilise le procédé diagonal, consistant à étudier la suite $(u_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, on montre que cette suite diagonale est de Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la suite $(u^{(k)})$ est de Cauchy dans l'espace $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$, il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous n et $p \geqslant K$, on ait $\|u^{(n)} - u^{(p)}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tous n et $p \geqslant K$, on a

$$\begin{aligned}
|u_n^{(n)} - u_p^{(p)}| &\leqslant |u_n^{(n)} - u_n^{(K)}| + |u_n^{(K)} - u_p^{(K)}| + |u_p^{(K)} - u_p^{(p)}|\,, \\
&\leqslant \|u^{(n)} - u^{(K)}\|_\infty + |u_n^{(K)} - u_p^{(K)}| + \|u^{(K)} - u^{(p)}\|_\infty\,, \\
&\leqslant 2\varepsilon + |u_n^{(K)} - u_p^{(K)}|.
\end{aligned}$$

Le nombre K étant fixé, la suite $u^{(K)}$ étant de Cauchy puisque convergente, on trouve K' tel que *etc.*, puis on pose $K'' = \max(K, K')$, et alors pour n et $p \geqslant K''$, on a $|u_n^{(n)} - u_p^{(p)}| \leqslant 3\varepsilon$. On note alors ℓ la limite de la suite $(u_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Enfin, l'inégalité

$$|a_n - \ell| \leqslant |a_n - u_n^{(n)}| + |u_n^{(n)} - \ell| \leqslant \|a - u^{(n)}\|_\infty + |u_n^{(n)} - \ell|$$

permet de prouver que a converge vers ℓ.

(b) Voici deux contre-exemples à la caractérisation séquentielle des fermés.

i. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u^{(k)}$ de terme général

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leqslant k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ est évidemment convergente, et sa somme vaut le nombre harmonique H_{k+1}. Soit a la suite bornée de terme général $a_n = \frac{1}{n+1}$.
On a $\|u^{(k)} - a\|_\infty = \sup_{n\geqslant k+1}(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{k+2}$, donc la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mais la limite a n'est pas une suite dont la série converge.

ii. On peut aussi considérer, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(k)}$ de terme général $1/(n+1)^{1+\frac{1}{k+1}}$. Il s'agit bien d'une suite bornée, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ est absolument convergente (série de Riemann positive d'exposant $\alpha = 1 + \frac{1}{k+1} > 1$).
Par ailleurs, pour $\alpha \in]1, 2]$, la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$ (calculer sa dérivée). Ceci permet de montrer que la suite $(u^{(k)})$ converge vers la suite harmonique dans l'espace $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, et on conclut comme précédemment.

234. **RMS 2007 408 Mines Ponts MP**

On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0, +\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(t))^2\,\mathrm{d}t}$. On note E_0 l'ensemble des fonctions de E nulles en dehors d'un certain segment, et F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(e^{-x})\exp(-x^2/2)$, où P est un polynôme à coefficients réels quelconque.

(a) Montrer que E_0 est dense dans E.

(b) Montrer que F est dense dans E.

Solution. — On remarque pour commencer que toute fonction du type $g\colon x \mapsto P(e^{-x})\exp(-x^2/2)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $x^2 g(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

(a) Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = [2^n(1+|f(n)|^2)]^{-1}$: ce choix sera justifié par les calculs ultérieurs. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leqslant x < n, \\ -\frac{f(n)}{a_n}(x-n-a_n) & \text{si } n \leqslant x < n+a_n, \\ 0 & \text{si } n+a_n \leqslant x. \end{cases}$$

En d'autres termes, f_n coïncide avec f sur $[0,n]$, est nulle sur $[n+a_n,+\infty[$, et est affine sur $[n,n+a_n]$ de sorte qu'elle soit continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est nulle en dehors d'un segment, elle appartient à E_0. En utilisant la majoration $(a-b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|f-f_n\|_2^2 &= \int_n^{n+a_n} (f(t)-f_n(t))^2\,dt + \int_{n+a_n}^{+\infty} (f(t))^2\,dt, \\ &\leqslant 2\int_n^{n+a_n} (f(t))^2\,dt + 2\int_n^{n+a_n} (f_n(t))^2\,dt + \int_{n+a_n}^{+\infty} (f(t))^2\,dt, \\ &\leqslant 3\int_n^{+\infty} (f(t))^2\,dt + 2\int_n^{n+a_n} (f_n(t))^2\,dt. \end{aligned}$$

La quantité $\int_n^{+\infty}(f(t))^2\,dt$ est un reste d'intégrale convergente, donc tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, sur le segment $[n,n+a_n]$, on a $|f_n(t)| \leqslant |f(n)|$ par construction, donc $\int_n^{n+a_n}(f_n(t))^2\,dt \leqslant a_n|f(n)|^2 \leqslant \frac{1}{2^n}$, par choix de a_n. Finalement, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f pour la norme $\|\ \|_2$, ce qui achève de montrer que E_0 est dense dans $(E,\|\ \|_2)$.

(b) Il suffit de montrer que, pour toute fonction f de E_0 et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un polynôme P tel que la fonction h définie par $h(x) = P(e^{-x})\exp(-\frac{x^2}{2})$ vérifie $\|f-h\|_2 \leqslant \varepsilon$.
? ?à terminer

235. **RMS 2007 413 Mines Ponts MP**

Soit A un compact d'intérieur non vide de $E = \mathbb{R}^n$ et $L_A = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u(A) \subset A\}$. Montrer que L_A est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

Solution. — On note $\|\ \|$ la norme sur E et $|||\ \ |||$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(E)$. Ce dernier étant de dimension finie, il suffit de montrer que L_A est fermé et borné.

Comme l'intérieur de A est non vide, il existe $a \in A$ et $r > 0$ tels que $B_o(a,r) \subset A$. Quitte à modifier légèrement a, on peut supposer que $a \neq 0$, et le compléter pour former une base $(a,e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Si λ est un réel non nul suffisamment proche de zéro, tous les vecteurs λe_i ont une norme $< r$. On considère alors la famille

$$\mathcal{C} = (a, a+\lambda e_2, \dots, a+\lambda e_n)\,.$$

Par construction, il s'agit d'une famille de vecteurs de A. De plus, c'est une base, car elle est obtenue à partir de la base $(a,e_2,\dots,e_n)$ par des transformations élémentaires.

Variante pour montrer que A contient une base : sinon, $\mathrm{Vect}(A)$ est inclus dans un hyperplan de E, et on sait que les hyperplans sont d'intérieur vide.

On note désormais $\mathcal{B} = (f_1,\dots,f_n)$ une base de E formée de vecteurs de A. Comme A est compact, il est borné : il existe $M > 0$ tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout $x \in A$. En particulier, si $u \in L_A$, on a $\|u(f_i)\| \leqslant M$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. Par suite, si $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$ est un vecteur quelconque de E et $u \in L_A$, on aura

$$\|u(y)\| \leqslant \sum_{i=1}^n |y_i|\|u(f_i)\| \leqslant MN_1(y)\,,$$

où N_1 est la norme 1 attachée à la base $\mathcal{B}$. Comme N_1 est équivalente à $\|\ \|$, on en déduit l'existence de M' tel que $\|u(y)\| \leqslant M'\|y\|$ pour tout $y \in E$, ce qui montre que les normes subordonnées $|||u|||$ des éléments de L_A sont majorées : L_A est borné.

Soit ensuite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $u \in \mathcal{L}(E)$ formée d'éléments u_k de L_A. Soit $x \in A$. Alors la suite de terme général $u_k(x)$ converge vers $u(x)$ et, comme A est fermé, $u(x) \in A$, ce qui montre que $u \in L_A$: finalement, L_A est fermé et borné, donc compact.

236. **RMS 2002 212 Mines Ponts MP**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $(f \circ f)(a) = a$. La fonction f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.

Solution. — La réponse est oui : pour le prouver, on raisonne par contraposition. On pose $g\colon x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$. Si f n'a pas de points fixes, alors g ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que g conserve un signe fixe, qu'on suppose strictement positif pour fixer les idées : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$. Alors

$$f(f(a)) > f(a) > a,$$

et il est impossible que $(f \circ f)(a) = a$.

Plus généralement, si f est continue et si une de ses itérées au sens de la composition admet un point fixe, alors f admet un point fixe.

237. **RMS 1992 0000 Mines Ponts MP**

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$ la suite $(f(x+n))$ converge vers zéro. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.

Solution. — Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est uniformément continue, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|u - v| < \alpha$, on ait $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/2$. En appliquant l'hypothèse aux suites $(f(k\alpha + n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k\alpha \leqslant 1$ — c'est-à-dire telles que $0 \leqslant k \leqslant \lfloor 1/\alpha \rfloor$ —, on établit l'existence d'entiers n_k tels que

$$\forall k \in [\![0, \lfloor 1/\alpha \rfloor]\!], \quad \forall n \geqslant n_k, \quad |f(k\alpha + n)| < \varepsilon/2.$$

On pose $N = \max_{0\leqslant k\leqslant\lfloor 1/\alpha\rfloor}(n_k)$, et on va montrer que $\forall x \geqslant N$, $|f(x)| < \varepsilon$. Soit donc x un tel réel, $p \geqslant N$ sa partie entière, et $k = \lfloor (x - p)/\alpha \rfloor$. Comme $k \leqslant \frac{x-p}{\alpha} < k + 1$, on a $k\alpha \leqslant x - p < (k + 1)\alpha$, donc $0 \leqslant x - (k\alpha + p) < \alpha$. Par suite

$$|f(x)| = |f(x) - f(k\alpha + p)| + |f(k\alpha + p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

238. **RMS 1990 0000 Mines Ponts MP** .

Soit f une application dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe des réels distincts $y_1, \dots, y_n$ de $[0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^n f'(y_k) = n$.

Solution. — On écrit que

$$1 = f(1) - f(0) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right],$$

puis on applique le théorème (égalité) des accroissements finis sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$: il existe y_k dans l'intervalle ouvert $]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$ (donc les y_k sont deux à deux distincts) tel que $f'(y_k)(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}) = \frac{f'(y_k)}{n} = f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})$. En substituant $f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})$ par $\frac{f'(y_k)}{n}$ dans la somme ci-dessus, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} f'(y_k) = n.$$

239. **RMS 2006 413 Mines Ponts MP**

(a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$, que l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

(b) Étudier la convergence de (x_n).

Solution. — On note P_n le polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n$, que l'on confond dans l'étude qui suit avec sa fonction polynomiale associée.

(a) Comme $P_n'(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0		-1		$+\infty$

Ce tableau et la continuité de P_n montrent que l'équation $nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$ a une unique solution x_n dans $]1, +\infty[$, donc dans $\mathbb{R}_+$.

(b) La relation $P_{n+1} = (n+1)X^{n+2} - (n+2)X^{n+1} = X(nX^{n+1} - (n+1)X^n) + X^{n+2} - X^{n+1} = XP_n(X) + X^{n+1}(X-1)$ montre que
$$P_{n+1}(x_n) = x_n + x_n^{n+1}(x_n - 1) > 0\,.$$
On en déduit, à l'aide du tableau de variation de P_{n+1}, que $x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n), décroissante et minorée par 1, converge vers une limite finie $\ell \geqslant 1$ et strictement plus petite que tous les termes x_n. Si la limite ℓ était strictement plus grande que 1, on aurait $P_n(x_n) > P_n(\ell) = \ell^n(n\ell - n - 1) \sim n(\ell-1)\ell^n$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduirait que la suite de terme général $P_n(x_n)$ divergerait vers $+\infty$, en contradiction avec l'égalité $P_n(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il résulte de ce raisonnement par l'absurde que
$$\lim x_n = 1\,.$$

240. **RMS 2006 414 Mines Ponts MP**

Étudier les suites de termes généraux $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{k}$ et $v_n = u_n^n$.

Solution. — Si $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $1 \leqslant \sqrt[n]{k} \leqslant \sqrt[n]{n}$, donc
$$1 \leqslant u_n \leqslant \sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$
Comme la suite majorante converge vers 1, on en déduit que u converge vers 1.

Par ailleurs, la concavité de la fonction logarithme et la technique de comparaison série-intégrale montrent que
$$\ln(v_n) = n\ln(u_n) \geqslant \sum_{k=1}^n \ln\left(\sqrt[n]{k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left[n\ln n - n + 1\right] = \ln n - 1 + \frac{1}{n}\cdot$$
On en déduit que $\ln v$ diverge vers $+\infty$, donc v aussi.

241. **RMS 2007 414 Mines Ponts MP**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$. Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Solution. — On calcule la dérivée :
$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right) = \Re\left(e^{ix}\frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right) = \Re\left(e^{inx/2}\frac{2i\sin(\frac{nx}{2})}{2i\sin(\frac{x}{2})}\right) = \cos\left(\frac{[n+1]x}{2}\right)\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\cdot$$
Le premier zéro strictement positif de f_n' est celui du cosinus : il vaut $\frac{\pi}{n+1}$. Comme f_n' est positive de zéro à $\frac{\pi}{n+1}$ et change de signe ensuite, la fonction f_n y présente un maximum local, donc
$$x_n = \frac{\pi}{n+1}\cdot$$
Il s'agit donc d'étudier la suite de terme général $y_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\sin(\frac{k\pi}{n+1})$. Si l'on pose $h(0)$ et $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, ce terme général s'écrit encore
$$y_n = \frac{\pi - 0}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} h\left(0 + k\frac{\pi - 0}{n+1}\right) = \frac{b-a}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} h\left(a + k\frac{b-a}{n+1}\right)\cdot$$
On reconnaît une somme de Riemann d'ordre $n+1$ de la fonction continue h sur le segment $[a,b] = [0,\pi]$. Le théorème de Riemann affirme alors que (y_n) converge vers l'intégrale de h sur $[a,b]$:
$$\lim f_n(x_n) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

242. **RMS 2006 415 Mines Ponts MP**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$.

Solution. — Dans un premier temps, on suppose que $f(0) = 0$. Alors le développement limité de f en zéro à l'ordre 1 s'écrit $f(x) = xf'(0) + x\theta(x)$, où θ est une fonction de limite nulle en zéro. On en déduit que
$$u_n = f'(0)\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\theta\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}f'(0) + v_n\,,$$

avec $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrons que la suite de terme général v_n converge vers zéro. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in [0,\alpha[$, on ait $|\theta(x)| < \varepsilon$. Posons $N = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$. Alors, pour tout $n > N$, on a $\frac{1}{n} < \alpha$, donc $\frac{k}{n^2} \in [0,\alpha[$ quel que soit l'entier k entre 1 et n. Par suite, pour tout $n > N$,

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\left|\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \frac{n+1}{2n}\varepsilon < \varepsilon\,.$$

On vient de montrer que v converge vers zéro, donc que u converge vers $\frac{1}{2}f'(0)$.

Dans un second temps, on suppose que $f(0) \neq 0$, et on pose $g = f - f(0)$, fonction qui vérifie $g(0) = 0$. On note w la suite associée à g, de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n^2})$. Alors

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = nf(0) + w_n\,.$$

Comme w converge et $f(0) \neq 0$, on en déduit que u diverge [vers $\pm\infty$ suivant le signe de $f(0)$].

243. **RMS 2006 416 Mines Ponts MP**
Soit u la suite définie par $u_0 \in]0,\pi/2[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Étudier la convergence de u.
(b) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que : $u_n \sim An^\alpha$ quand n tend vers $+\infty$. En considérant $u_{n+1} - u_n$, trouver α.
(c) On ne suppose plus l'existence de α ni de A. De l'étude de $u_{n+1}^{1/\alpha} - u_n^{1/\alpha}$, déduire l'existence et la valeur de α.

Solution. — L'inégalité $\sin x < x$ sur $]0,\pi/2[$ et la positivité du sinus sur ce même intervalle montrent que $]0,\pi/2[$ est stable par la fonction sinus, donc que u est une suite à valeurs dans $]0,\pi/2[$.

(a) L'inégalité $\sin x < x$ déjà citée montre que u décroît (strictement). Comme elle minorée (par zéro), elle converge vers une limite $\ell \in [0,\pi/2]$. Comme la fonction sinus est continue, ℓ est un point fixe de f. Enfin, comme le seul point fixe du sinus sur $\mathbb{R}$ est zéro, on en déduit que u converge vers zéro.
(b) ? ? à terminer On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que : $u_n \sim An^\alpha$ quand n tend vers $+\infty$. En considérant $u_{n+1} - u_n$, trouver α.
(c) à terminer ? ? On ne suppose plus l'existence de α ni de A. De l'étude de $u_{n+1}^{1/\alpha} - u_n^{1/\alpha}$, déduire l'existence et la valeur de α.

244. **RMS 2006 418 Mines Ponts MP**
Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n}\right)$.

Solution. — Un développement limité fournit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n} - \frac{1}{2n(\ln n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2n(\ln n)^2}\right)\,.$$

Dans l'ordre, apparaissent ci-dessus un terme qui satisfait les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, un terme équivalent au terme général d'une série de Bertrand convergente. En conclusion, la série proposée converge.
L'étude de la série de terme général $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ se fait par comparaison série–intégrale : si f désigne la fonction $t \in [2,+\infty[\mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$, dont on vérifie aisément la continuité et le caractère décroissant, on sait que $\sum_{n\geqslant 2} b_n$ converge si et seulement si $\int_{[2,+\infty[} f$ converge. Or $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$ tend vers la limite finie $\frac{1}{\ln 2}$ quad x tend vers $+\infty$. On en déduit que $\sum b_n$ converge.

245. **RMS 2006 421 Mines Ponts MP**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle ne prenant pas la valeur -1. On définit une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1+u_k)}$.

(a) On suppose ici que $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Calculer sa somme dans le cas où la série de terme général u_n diverge.
(b) On suppose ici que $u_n = a^{2^n}$, où a est un élément fixé de $[0,1[$. Calculer la somme de la série de terme général v_n.
(c) Étudier la série de terme général v_n pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, puis pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Solution. —

(a) On écrit le numérateur u_n de v_n sous la forme $1 + u_n - 1$, de sorte que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = h_{n-1} - h_n \ ,$$

où h est la suite définie par $h_0 = 1$ et $h_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1+u_k)}$. La somme partielle V_n de la série de terme général v_n apparaît alors comme une somme télescopique :

$$V_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (h_{k-1} - h_k) = h_0 - h_n = 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1+u_k)} \cdot$$

Comme les u_k sont $\geqslant 0$, la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1+u_k)$ est croissante (et strictement positive), donc elle admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$.

Si $\ell = +\infty$, alors la suite de terme général V_n converge vers 1, c'est-à-dire que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge de somme 1, et si ℓ est finie, alors $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge de somme $1 - \frac{1}{\ell}$. Dans tous les cas, la série de terme général v_n converge. On note V sa somme.

Dans la suite, on utilise constamment la relation $-\ln(h_n) = \ln[\prod_{k=1}^n (1+u_k)] = \sum_{k=1}^n \ln(1+u_k)$.

- Si la série de terme général u_n diverge grossièrement, alors il en est de même de la série de terme général (positif) $\ln(1+u_n)$, donc la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1+u_k)]$ diverge vers $+\infty$, et $V = 1$.
- Si la série de terme général u_n diverge avec (u_n) de limite nulle, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et la règle des équivalents de signe fixe montre que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge. On conclut comme dans le cas précédent que $V = 1$.

(b) Tous les nombres entiers $p \geqslant 1$ admettent une décomposition $p = \sum_{i=1}^m 2^{e_i}$ en base 2, où les exposants e_i sont deux à deux distincts. Par conséquent

$$\prod_{k=1}^n (1+u_k) = \prod_{k=1}^n \left(1 + a^{2^k}\right) = \sum_{m=0}^n \sum_{(k_1,\dots,k_m)\in [\![1,n]\!]^m} a^{2^{k_1}+\cdots+2^{k_m}} = \sum_{p\in I} a^p \ ,$$

où I est un ensemble d'exposants qui contient tous les entiers de zéro à n, et qui est contenu dans $\mathbb{N}$. On en déduit l'encadrement suivant

$$\sum_{p=0}^n a^p = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \leqslant \prod_{k=1}^n (1+u_k) \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} a^p = \frac{1}{1-a} \cdot$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, et en utilisant la relation $V_n = 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1+u_k)}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-a}} = a \ .$$

(c) Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, un développement limité fournit

$$\ln(1+u_n) = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \ .$$

On en déduit que la série de terme général $\ln(1+u_n)$, somme d'une série semi-convergente et de deux séries absolument convergentes, est convergente. Alors la suite de terme général h_n converge, et il en est de même de la série de terme général v_n.

Si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, un développement limité fournit

$$\ln(1+u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{3(n+1)^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \ .$$

On en déduit que la série de terme général $\ln(1+u_n)$, somme d'une série divergente (vers $-\infty$) et de trois séries convergentes, diverge vers $-\infty$. Alors le produit $\prod_{k=1}^n (1+u_k)$ converge vers zéro par valeurs positives, et la suite de terme général h_n diverge vers $+\infty$, et il en est de même de la série de terme général v_n.

246. **RMS 2006 422 Mines Ponts MP**

Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels > 0 telle que $u_n^{1/n} = 1 - 1/n^\alpha + \mathrm{o}(1/n^\alpha)$. La série de terme général u_n converge-t-elle ?

Solution. — Un développement limité donne

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)\right) = \exp\left(-n^{1-\alpha} + \mathrm{o}\left(n^{1-\alpha}\right)\right)$$

On discute ensuite suivant les valeurs de α.

– Si $\alpha > 1$, la suite de terme général $-n^{1-\alpha}$ tend vers zéro, donc la suite de terme général u_n tend vers 1, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
– Si $\alpha = 1$, la suite de terme général u_n tend vers $1/e$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
– Si $0 < \alpha < 1$, les comparaisons usuelles montrent que la suite de terme général $n^2 u_n$ tend vers zéro, donc $\sum u_n$ converge.

247. **RMS 2006 426 Mines Ponts MP**
Nature, si $0 < \alpha < 1$, de la série de terme général $u_n = 1/[(\ln n)^{1/3} + (-1)^n n^\alpha]$?

Solution. — Un développement limité donne

$$u_n = \frac{1}{(-1)^n n^\alpha \left(1 + (-1)^n \frac{(\ln n)^{1/3}}{n^\alpha}\right)} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - (-1)^n \frac{(\ln n)^{1/3}}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{(\ln n)^{1/3}}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} - \underbrace{\frac{(\ln n)^{1/3}}{n^{2\alpha}}}_{w_n} + \mathrm{o}\left(\frac{(\ln n)^{1/3}}{n^{2\alpha}}\right).$$

L'équivalent $u_n - v_n \sim -w_n + \mathrm{o}(w_n)$ que l'on déduit du développement limité ci-dessus, et le signe fixe (négatif) de $-w_n$ montrent que les deux séries de terme généraux $u_n - v_n$ et w_n ont même nature. Or la série (de Bertrand) de terme général w_n converge si et seulement si $2\alpha > 1$, ou encore $\alpha > 1/2$.

Par ailleurs, la série de terme général v_n est alternée et la suite de terme général $|v_n|$ décroît et converge vers zéro (car $\alpha > 0$). Le théorème de Leibniz (ou théorème spécial des séries alternées) affirme que $\sum v_n$ converge. Par suite, la nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum (u_n - v_n)$. En rappelant que l'énoncé suppose que $0 < \alpha < 1$, on en déduit finalement que $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1\,.$$

Voir aussi l'exercice 880 page 547.

248. **RMS 2006 427 Mines Ponts MP**
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = (e^{x^2} - 1)/x$. Montrer que f se prolonge en un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Solution. — Tout d'abord, le développement limité $f(x) = (1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2) - 1)/x = x + \mathrm{o}(x)$ montre que f est prolongeable par continuité en zéro en posant $f(0) = 0$. Dans la suite, on désigne encore par f ce prolongement.

Le développement en série entière de la fonction exponentielle, valable sur $\mathbb{R}$, ainsi que le prolongement par continuité que l'on vient d'effectuer, montrent que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}\,.$$

Étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La positivité des coefficients montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\frac{x^{2n-2}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\frac{x^{2n-2}}{n!} \geqslant 1 > 0\,.$$

On en déduit que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme sur son image : voir le rappel plus bas. Comme f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (utiliser l'expression $f(x) = (e^{x^2} - 1)/x$ et les comparaisons usuelles) et vaut zéro en zéro, l'image en question est $\mathbb{R}_+$.

Enfin, comme f est impaire, on déduit de l'étude sur $\mathbb{R}_+$ que f réalise un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Rappel. — Le résultat relatif aux difféomorphismes utilisé plus haut est le suivant. Soit f une fonction de I dans J, deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point et soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Alors f est un $\mathcal{C}^p$–difféomorphisme de I sur J si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
– La fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.
– La fonction f' ne s'annule jamais sur I.
– La fonction f est surjective de I sur J.

249. **RMS 2011 479 Mines Ponts MP**
La fonction $x \mapsto 1/(1 + x^6 \sin^2 x)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Solution. —

250. **RMS 2007 454 Mines Ponts MP**
Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2x(1-x)$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n), où $f_n = f \circ \cdots \circ f$ est la n-ième itérée de f.

Solution. — Tout d'abord, comme $[0,1]$ est stable par f, le problème a un sens. Plus précisément f croît de 0 à 1/2 sur $[0, 1/2]$, et décroît de 1/2 à 0 sur $[0,1]$, donc l'intervalle $[0, 1/2]$ est stable par f.

On fixe $x \in [0,1]$, et on étudie la suite récurrente donnée par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. L'étude ci-dessus montre que u_1 est à coup sûr dans $[0,1/2]$, donc que $u_n \in [0,1/2]$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si $u_0 \in \{0,1\}$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc (u_n) converge vers zéro.

Sinon, $0 < u_1 \leqslant 1/2$, et la croissance de f sur $[0,1/2]$ montre que la suite (u_n) est monotone. Comme $f(x) \geqslant x$ sur cet intervalle, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Comme elle est majorée par $1/2$, elle converge, et comme f est continue, elle converge vers un point fixe de f dans $[u_1, 1/2]$. Comme il n'y en a qu'un qui vaut $1/2$, la suite (u_n) converge vers $1/2$.

En résumé, on vient de montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1, \\ 1/2 & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme, car toutes les f_n sont continues et f ne l'est pas.

251. **RMS 2007 455 Mines Ponts MP**

Pour $x \geqslant 0$, on pose $f_p(x) = (1+x)^{-1-1/p}$. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Solution.— Il est clair que la suite (f_p) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f\colon x \mapsto (1+x)^{-1}$.

On pose $g_p = f - f_p$, qui est positive sur $\mathbb{R}_+$, et on cherche à majorer g_p uniformément, si cela est possible. On étudie cette fonction :

$$g_p'(x) = -(1+x)^{-2} + \left(1 + \frac{1}{p}\right)(1+x)^{-2-1/p} = (1+x)^{-2-1/p}\left(1 + \frac{1}{p} - (1+x)^{1/p}\right).$$

Il est clair que $x \mapsto 1 + \frac{1}{p} - (1+x)^{1/p}$ est décroissante, et que g_p' s'annule en un seul point $x_p = p\ln(1+1/p) - 1$. Par suite,

$$\|g_p\|_\infty = g_p(x_p) = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{-p}\left(1 - \frac{1}{1+1/p}\right) = \frac{1}{p+1}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{ep},$$

quantité qui tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme.

252. **RMS 2011 512 Mines Ponts MP**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π–périodique et telle que $f'(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(\theta)| \leqslant 1$. Montrer que f est la fonction sinus.

Solution.— Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est ponctuellement la somme de sa série de Fourier, ce que l'on écrit

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[c_k(f)e^{ik\theta} + c_{-k}(f)e^{-ik\theta}\right].$$

On connaît la relation $c_k(f') = ikc_k(f)$ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π–périodique. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit par une récurrence facile sur n que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_{\pm k}(f)| = \left|\frac{c_{\pm k}(f^{(n)})}{(ik)^n}\right| \leqslant \frac{1}{k^n},$$

puisque $|c_{\pm k}(f^{(n)})| = (2\pi)^{-1}|\int_0^{2\pi} e^{\pm ik\theta} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta| \leqslant (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \leqslant 1$, par hypothèse sur $f^{(n)}$. Pour tout $k \geqslant 2$, on obtient alors $c_{\pm k}(f) = 0$ en passant à la limite quand n tend vers l'infini. La première égalité se réduit alors à

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = c_0(f) + c_1(f)e^{i\theta} + c_{-1}(f)e^{-i\theta} = c_0(f) + a_1(f)\cos\theta + b_1(f)\sin\theta.$$

La condition $f'(0) = 1$ donne $b_1(f) = 1$, d'où $f' = -a_1(f)\sin + \cos$. Comme f est à valeurs réelles, $a_1(f)$ est réel, donc $\|f'\|_\infty = \sqrt{1 + a_1(f)^2}$. La condition $\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique alors que $a_1(f) = 0$, donc $f = c_0(f) + \sin$. Alors $\|f\|_\infty = 1 + |c_0(f)|$, et l'hypothèse $\|f\|_\infty \leqslant 1$ entraîne $c_0(f) = 0$. Finalement, f est la fonction sinus (la réciproque est vraie et banale).

Remarque. — Une coquille dans l'énoncé d'origine proposait de démontrer le même résultat pour les fonctions à valeurs complexes. Le résultat est inexact : la fonction $\theta \mapsto -ie^{i\theta}$ convient aussi.

Géométrie

253. **RMS 2011 526 Mines Ponts MP**

Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

Solution. — à rédiger ? ?

Dans un repère orthonormé, une parabole admet l'équation réduite $y^2 = 2px$, où $p \in \mathbb{R}_+^*$. Soit M un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{R}$. La tangente à la parabole au point $T = (t^2/2p, t)$ est dirigée par le vecteur $u = (t/p, 1)$, donc a pour équation

$$u \cdot \overrightarrow{TM} = 0 \iff \frac{t}{p}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + (y - t) = 0.$$

Elle passe par M_0

254. **RMS 2011 527 Mines Ponts MP**

Étudier l'arc paramétré $x(t) = 2\cos t + \cos(2t)$, $y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$.

Solution. — Les fonctions x et y étant 2π–périodiques, on mène l'étude sur $[-\pi, \pi]$. Comme x est paire et y impaire, on étudie l'arc sur $[0, \pi]$, puis on obtient la totalité du support par la symétrie orthogonale par rapport à Ox.

Les dérivées sont données par $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -2(\sin t + \sin(2t))$ et $y'(t) = 2(\cos t - \cos(2t))$. Comme

$$\sin(t) = -\sin(2t) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad t = -2t + 2k\pi \quad \text{ou} \quad t = \pi + 2t + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad t = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad t = -\pi + 2k\pi,$$

$$\cos(t) = \cos(2t) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad t = 2t + 2k\pi \quad \text{ou} \quad t = -2t + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad t = -2k\pi \quad \text{ou} \quad t = \frac{2k\pi}{3},$$

le tableau de variation est le suivant sur $[0, \pi]$:

t	0		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$-$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	-4
$x(t)$	3		$-3/2$		0
$y(t)$	0		$3\sqrt{3}/2$		0

On note la présence de deux points singuliers, dont on détermine la nature grâce à des développements limités. En zéro,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 - t^2/2) + 1 - (2t)^2/2 + \mathrm{o}(t^3) \\ 2(t - t^3/6) - (2t - (2t)^3/6) + \mathrm{o}(t^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^3 + \mathrm{o}(t^3),$$

donc $p = 2$ et $q = 3$, la tangente est dirigée par l'axe Ox et l'arc présente un rebroussement de première espèce. En $2\pi/3$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(2\pi/3 + h) \\ y(2\pi/3 + h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos h - \sqrt{3}\sin h - \cos(2h)/2 + \sqrt{3}\sin(2h)/2 \\ \sqrt{3}\cos h - \sin h + \sqrt{3}\cos(2h)/2 + \sin(2h)/2 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} -1 + h^2/2 - \sqrt{3}h + \sqrt{3}h^3/6 - 1/2 + h^2 + \sqrt{3}h - 2\sqrt{3}h^3/3 + \mathrm{o}(t^3) \\ \sqrt{3} - \sqrt{3}h^2/2 - h + h^3/6 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{3}h^2 + h - 2h^3/3 + \mathrm{o}(t^3) \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} h^2 + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} h^3 + \mathrm{o}(h^3),
\end{aligned}$$

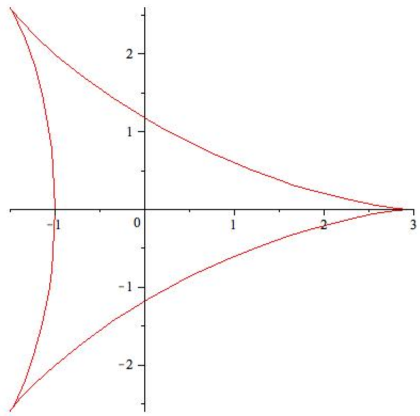
donc $p = 2$ et $q = 3$, la tangente est dirigée par le vecteur $(1, -\sqrt{3})$, c'est-à-dire par la droite d'angle polaire $-\pi/3$, et l'arc présente, là encore, un rebroussement de première espèce.

Les calculs ont été vérifiés par les commandes

```
x:=2*cos(t)+cos(2*t);y:=2*sin(t)-sin(2*t);
taylor(x,t=0,4);taylor(y,t=0,4);taylor(x,t=2*Pi/3,4);taylor(y,t=2*Pi/3,4);
```

et le tracé a été obtenu par

```
with(plots):plot([x,y,t=-Pi..Pi]);
```



255. **RMS 2011 528 Mines Ponts MP**

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 1/\cos(\theta/3)$.

Solution. — On note (Γ) la courbe à étudier.

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3\pi}{2} + 3k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble de définition de ρ. Comme la fonction ρ est 6π–périodique, on mène l'étude sur $[-3\pi, 3\pi] \cap D$. Comme elle est paire, on mène l'étude sur $[0, 3\pi] \cap D$, puis on effectue la symétrie orthogonale s d'axe Ox. Comme $\rho(3\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, et comme les points de coordonnées polaires $(3\pi - \theta, -r)$ et (θ, r) sont déduits l'un de l'autre par la même symétrie s, il suffit de mener l'étude sur $[0, 3\pi/2] \cap D = [0, 3\pi/2[$.

Comme $\rho'(\theta) = \frac{\sin(\theta/3)}{3\cos^2(\theta/3)}$, le tableau de variation est le suivant :

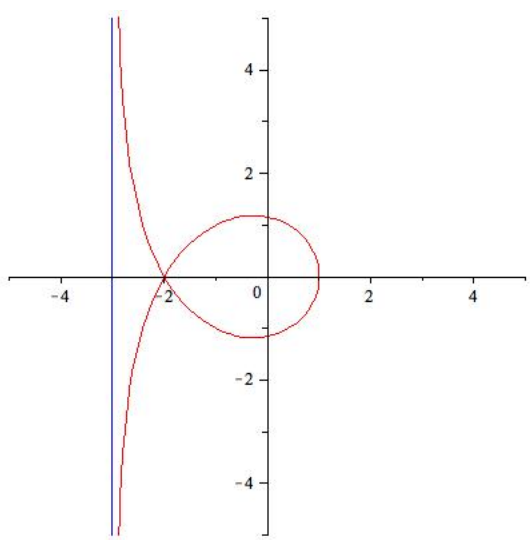
θ	0		$\pi/2$		π	$3\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$+$		$+$	$+$	
$\rho(\theta)$	1		$2/\sqrt{3}$		2	$+\infty$

On pose $h = \theta - 3\pi/2$. Dans le repère $(O, u(3\pi/2), v(3\pi/2))$, l'ordonnée $Y(\theta)$ vaut

$$\begin{aligned}\rho(\theta)\sin(h) &= \frac{\sin h}{\cos(\pi/2 + h/3)} = -\frac{\sin h}{\sin(h/3)} = -\frac{h - h^3/6 + \mathrm{o}(h^3)}{h/3 - h^3/6 \times 27 + \mathrm{o}(h^3)} \\ &= -3(1 - h^2/6 + \mathrm{o}(h^2))(1 + h^2/54 + \mathrm{o}(h^2)) = -3(1 - 4h^2/27 + \mathrm{o}(h^2)),\end{aligned}$$

qui tend vers -3 par valeurs supérieures à -3 quand h tend vers zéro. Par suite, (Γ) admet l'asymptote $x = -3$ et elle est à droite de cette asymptote (on est revenu dans le repère d'origine). Voici le tracé obtenu en Maple par les commandes

```
with(plots):
F:=polarplot([1/cos(t/3),t,t=0..3*Pi],discont=true):
asymptote:=plot([-3,t,t=-5..5],color=blue):
display([F,asymptote],view=[-5..5,-5..5]);
```



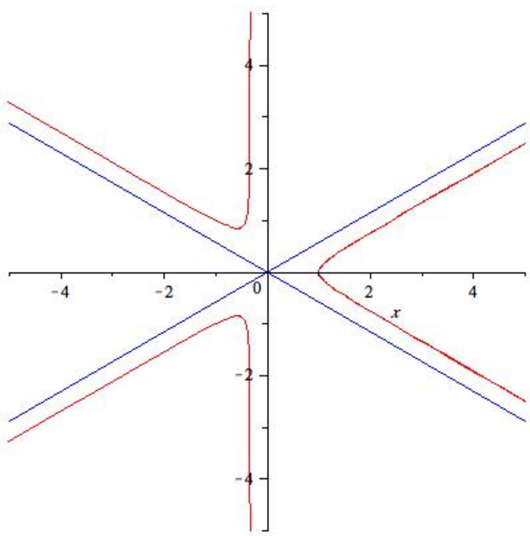
256. **RMS 2011 529 Mines Ponts MP**
Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 1/\cos(3\theta)$.

Solution. — On note (Γ) la courbe à étudier.
Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/6 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble de définition de ρ. Cette fonction est $2\pi/3$ périodique, donc on trace la courbe pour $\theta \in [-\pi/3, \pi/3] \cap D$, puis on effectue deux rotations de centre O et d'angle $2\pi/3$. De plus, elle est paire, donc on trace la courbe pour $\theta \in [0, \pi/3] \cap D$, puis on effectue la symétrie orthogonale d'axe Ox. Enfin, $\rho(\pi/3 - \theta) = 1/\cos(\pi - 3\theta) = -1/\cos(3\theta) = -\rho(\theta)$, donc on trace la courbe pour $[0, \pi/6] \cap D = [0, \pi/6[$, puis on effectue la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle orthogonale à celle d'angle polaire $\pi/6$, c'est-à-dire par rapport à la droite d'angle polaire $2\pi/3$.
Sur l'intervalle en question ρ croît de 1 à $+\infty$. La tangente en $\theta = 0$ est invariante par la symétrie s citée plus haut, donc elle est parallèle à Ox ou à Oy. Dans le premier cas, le point serait un rebroussement de première espèce, donc le vecteur dérivé s'annulerait, ce qui est impossible ailleurs qu'en l'origine pour une courbe en coordonnées polaires. C'est donc le second cas qui est vrai (on peut aussi calculer le vecteur dérivé...).
On pose $h = \theta - \pi/6$. Dans le repère $\mathcal{R}(\pi/6) = (O, u(\pi/6), v(\pi/6))$, l'ordonnée $Y(\theta)$ vaut

$$\begin{aligned}\rho(\theta)\sin h &= \frac{\sin h}{\cos(\pi/2 + 3h)} = -\frac{\sin h}{\sin 3h} = -\frac{1 - h^2/6 + \mathrm{o}(h^2)}{3 - 9h^2/2 + \mathrm{o}(h^2)},\\ &= -\frac{1}{3}(1 - h^2/6 + \mathrm{o}(h^2))(1 + 3h^2/2 + \mathrm{o}(h^2)) = -\frac{1}{3}(1 + 4h^2/3 + \mathrm{o}(h^2)),\end{aligned}$$

qui tend vers $-1/3$ par valeurs inférieures quand h tend vers zéro. Par suite, (Γ) admet une asymptote d'équation $Y = -1/3$ dans $\mathcal{R}(\pi/6)$, et Γ est sous cette droite au voisinage de $\pi/6$ à gauche. Le tracé a été obtenu dans Maple par les commandes

```
with(plots):
G:=polarplot([1/cos(3*t),t,t=0..2*Pi],discont=true):
asymptote1:=plot(tan(Pi/6)*x,x=-5..5,color=blue):
asymptote2:=plot(-tan(Pi/6)*x,x=-5..5,color=blue):
display([G,asymptote1,asymptote2],view=[-5..5,-5..5]);
```



257. **RMS 2011 530 Mines Ponts MP**
Étudier la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = a(a - 2\cos\theta)$, où $a > 0$. Une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine coupe $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. On note I le milieu de $[PQ]$. Déterminer le lieu de I lorsque $\mathcal{D}$ varie.

Solution. — La fonction ρ est paire et 2π–périodique. On l'étudie sur $[0, \pi]$, puis on obtient la totalité de la courbe par la symétrie orthogonale par rapport à Ox. L'allure de la courbe dépend de la position du paramètre a par rapport à 2. On donne les trois tableaux de signe et les trois allures possibles (comme $\rho'(\theta) = 2a\sin\theta$, la fonction ρ est croissante sur $[0, \pi]$) :

θ	0		$\arccos(a/2)$		π
$\rho(\theta)$	$a(a-2)$	$-$	0	$+$	$a(a+2)$

$0 < a < 2$

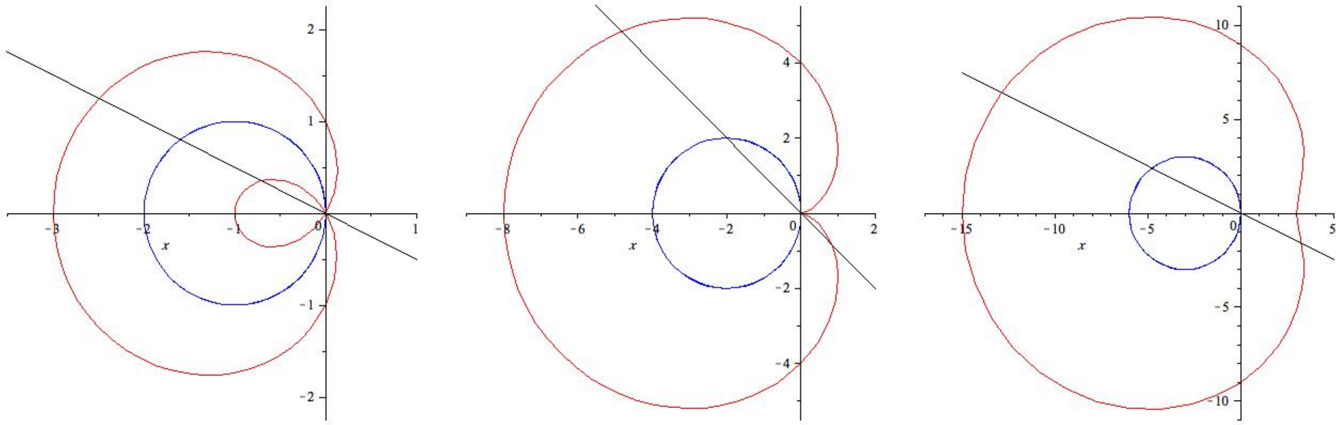
θ	0		π
$\rho(\theta)$	0	$+$	4

$a = 2$

θ	0		π
$\rho(\theta)$	$a(a-2)$	$+$	$a(a+2)$

$2 < a$

Dans le cas où $a \neq 2$, comme $\rho'(0) = 0$ et $\rho(0) \neq 0$, la tangente en zéro est parallèle à Oy. Dans le cas où $a = 2$, comme $\rho(0) = 0$ est une racine isolée, la tangente est dirigée par Ox.
Enfin, dans le cas où $a < 2$, la tangente en $\theta_0 = \arccos(a/2)$, qui est une racine isolée de ρ, est dirigée par $u(\theta_0)$; on note la présence d'une boucle intérieure dans ce cas. Les courbes obtenues sont appelées des limaçons de Pascal, et on reconnaît une cardioïde dans le cas particulier $a = 2$.



Dans les cas où $a \leqslant 2$, une droite passant par l'origine, dirigée par $u(\theta)$ coupe $\mathcal{C}$ en trois points : $\rho(\theta)u(\theta)$, $\rho(\theta+\pi)u(\theta+\pi)$ et l'origine elle-même, certains de ces points étant parfois confondus. On supposera dans la suite que les points dont parle l'énoncé sont $P = P(\theta) = \rho(\theta)u(\theta)$ et $Q = Q(\theta) = \rho(\theta+\pi)u(\theta+\pi)$. Alors

$$I = I(\theta) = \rho(\theta)u(\theta) + \rho(\theta+\pi)u(\theta+\pi) = [\rho(\theta) - \rho(\theta+\pi)]u(\theta) = \frac{a}{2}(a - 2\cos\theta - a + 2\cos(\theta+\pi))u(\theta) = -2a\cos\theta\, u(\theta).$$

Le point I décrit donc la courbe d'équation polaire $r = -2a\cos\theta$, c'est-à-dire le cercle de centre le point de coordonnées $(-a, 0)$ et de rayon a. Les tracés des courbes $\mathcal{C}$, du lieu des points I et d'un exemple de droite permettant de définir les points P et Q ont été obtenus par les commandes suivantes :

```
with(plots):rho:=(a,t)->a*(a-2*cos(t));
C1:=polarplot(rho(1,t),t=-Pi..Pi):
C2:=polarplot(rho(2,t),t=-Pi..Pi):
C3:=polarplot(rho(3,t),t=-Pi..Pi):
CC1:=polarplot(-2*cos(t),t=-Pi..Pi,color=blue):
CC2:=polarplot(-4*cos(t),t=-Pi..Pi,color=blue):
CC3:=polarplot(-6*cos(t),t=-Pi..Pi,color=blue):
DD:=plot(-x/2,x=-4..1,color=black):
DDD:=plot(-x,x=-9..2,color=black):
DDDD:=plot(-x/2,x=-15..5,color=black):
display([C1,CC1,DD],view=[-3.5..1,-2.25..2.25]);
display([C2,CC2,DDD],view=[-9..2,-5.5..5.5]);
display([C3,CC3,DDDD],view=[-17..5,-11..11]);
```

258. **RMS 2011 531 Mines Ponts MP**
Déterminer la courbure en tout point de $\Gamma : y = \ln x$ avec $x > 0$.

Solution. — Voir l'exercice 517 page 361.

259. **RMS 2011 532 Mines Ponts MP**
Soit $M : s \in \mathbb{R} \mapsto M(s) \in \mathbb{R}^2$ un arc birégulier au paramétrage normal.

(a) Définir la courbure $\gamma(s)$ au point de paramètre s.
(b) On suppose que $\gamma(s) = \mathrm{O}(e^{-s})$ quand $s \to +\infty$. Montrer que $(\mathbb{R}, M)$ possède une asymptote.

Solution. —

(a) Lorsque le paramétrage est normal, la courbure est donnée par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \gamma(s) = \alpha'(s),$$

où α est un relèvement (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'angle $\widehat{M'(s), i}$ que fait le vecteur tangent avec l'axe des abscisses. Comme $M'(s)$ est de norme 1, il s'écrit $(\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$. On obtient donc aussi la courbure en dérivant ce vecteur :

$$T'(s) = M''(s) = \alpha'(s) \cdot (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)) = \gamma(s)N(s)\ ,$$

où le vecteur $N(s)$ est défini par le fait que $(T(s), N(s))$ est une base orthonormale directe, et on a aussi $T' = -\gamma N$ (ce sont les formules de Frenet dans le cas d'un paramétrage normal).

(b) La courbure est une notion géométrique orientée, c'est-à-dire qu'elle est invariante par changement de paramétrage admissible orienté. Dans une certaine mesure, elle ne dépend que du support : la courbure d'une portion de droite (quel que soit son paramétrage) est identiquement nulle, celle d'une portion de cercle est constante *etc.*

L'hypothèse $\gamma(s) = \mathrm{O}(e^{-s})$ dit que la courbure est très proche de zéro au voisinage de l'infini, «donc» que le support ressemble fortement à une droite au voisinage de l'infini : il n'est pas surprenant qu'on demande de prouver l'existence d'une asymptote. Dans la démonstration qui suit, on remarquera qu'une droite du plan est donnée par deux éléments (deux points, ou un point et un vecteur directeur), et que l'existence de ces deux éléments est obtenue *via* deux constantes d'intégration bien choisies (la courbure est une dérivée d'ordre 2 par rapport à l'arc).

Comme $\gamma(s) = \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-s})$, la fonction $\gamma = \alpha'$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $[s, +\infty[$. Alors $s \mapsto -\int_s^{+\infty} \alpha'(s)\,\mathrm{d}s$ est une primitive de α, et il existe donc une constante réelle α_0 telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \alpha(s) = \alpha_0 - \int_s^{+\infty} \gamma(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par intégration de la relation de comparaison $\gamma(s) = \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-s})$, on obtient $\int_s^{+\infty} \gamma(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-s})$. Par suite, au voisinage de $+\infty$, une formule d'addition et des développements limités (on détaille seulement le premier) fournissent

$$\begin{aligned}
\cos\alpha(s) &= \cos(\alpha_0 + \mathrm{O}(e^{-s})) = \cos\alpha_0 \cos\mathrm{O}(e^{-s}) - \sin\alpha_0 \sin\mathrm{O}(e^{-s}) = \cos\alpha_0 + \mathrm{O}(e^{-s}),\\
\sin\alpha(s) &= \sin\alpha_0 + \mathrm{O}(e^{-s}),\\
M'(s) &= u(\alpha_0) + \mathrm{O}(e^{-s}).
\end{aligned}$$

Le dernier « O » ci-dessus est un vecteur du plan, les précédents sont scalaires. On constate alors que $M' - u(\alpha_0)$ est une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme $[s, +\infty[$, et que $\int_s^{+\infty}[M'(t) - u(\alpha_0)]\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(e^{-s})$. Comme les fonctions

$$\begin{aligned}
s &\mapsto \int_0^s [M'(t) - u(\alpha_0)]\,\mathrm{d}t = M(s) - M(0) + su(\alpha_0),\\
s &\mapsto -\int_s^{+\infty} [M'(t) - u(\alpha_0)]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

sont deux primitives, sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de la même fonction, elles diffèrent d'une constante. On note cette constante $M_0 - M(0)$, de sorte que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad M(s) = M_0 + s\,u(\alpha_0) - \int_s^{+\infty} [M(t) - u(\alpha_0)]\,\mathrm{d}t = M_0 + s\,u(\alpha_0) + \mathrm{O}_{+\infty}(e^{-s}).$$

On lit dans l'égalité ci-dessus que la droite passant par M_0 et dirigée par $u(\alpha_0)$ est asymptote à l'arc $(\mathbb{R}, M)$ en $+\infty$.

260. **RMS 2011 533 Mines Ponts MP**

(a) Reconnaître la quadrique Q d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(b) Déterminer les droites tracées sur Q.

Solution. —

(a) On reconnaît un hyperboloïde à une nappe, par son équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Il est de révolution d'axe Oz, car $a = b$.

(b) Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de Q contenu dans le plan Oxz. On cherche les vecteurs non nuls $u = (a, b, c)$ — on les supposera pour cela unitaires — tels que la droite (D) passant par M_0 dirigée par u soit contenue dans Q, c'est-à-dire tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(x_0 + ta)^2 + (y_0 + tb)^2 - (z_0 + tc)^2 = 1$.

Comme Q est de révolution d'axe Oz, on peut supposer en plus que M_0 appartient au plan Oxz, c'est-à-dire que $y_0 = 0$. La ou les droites obtenues en un tel point permettront alors de décrire, par rotation d'axe Oz la ou les droites tracées sur Q en tout point de Q.

Comme $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = x_0^2 - z_0^2 = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, cette condition se réécrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1 - 2c^2)t^2 + 2(ax_0 - cz_0)t = 0.$$

Une fonction polynôme étant identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, la condition équivaut finalement à $c = \varepsilon/\sqrt{2}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $ax_0 = \varepsilon z_0/\sqrt{2}$ (avec la condition supplémentaire $a^2 + b^2 = 1/2$). Comme $x_0^2 - z_0^2 = 1$, on a $x_0 \neq 0$ et $|x_0| > |z_0|$. L'équation $ax_0 = \varepsilon z_0/\sqrt{2}$ est alors équivalente à

$$a = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_0}{x_0},$$

et le nombre a obtenu vérifie $|a|^2 < 1/2$. Il existe alors exactement deux nombres b tels que $a^2 + b^2 = 1/2$, donnés par $b = \varepsilon' \sqrt{1/2 - a^2} = \varepsilon' \sqrt{(x_0^2 - z_0^2)/(2x_0^2)} = \varepsilon' \sqrt{1/(2x_0^2)} = \varepsilon''/(x_0\sqrt{2})$, avec $\varepsilon'' \in \{-1, 1\}$. Les vecteurs u cherchés sont donc de la forme

$$\frac{\varepsilon}{x_0\sqrt{2}} (1, \varepsilon'', x_0)\,.$$

Comme les vecteurs u et λu pour λ non nul dirigent la même droite passant par un point donné, on conclut que, par $M_0 = (x_0, 0, z_0) \in Q$, passent exactement deux droites tracées sur Q, respectivement dirigées par

$$u_+ = (1, 1, x_0) \quad \text{et} \quad u_- = (1, -1, x_0).$$

Si maintenant $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ est un point quelconque de Q, on pose $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Le point M_1 se déduit alors de $M_0 = (r, 0, z_1) \in Q$ par la rotation d'axe Oz orienté par $(0, 0, 1)$ et d'angle θ donné par $\cos\theta = x_1/r$ et $\sin\theta = y_1/r$. On connaît la matrice d'une telle rotation dans la base canonique, et on peut calculer l'image par cette rotation des vecteurs $u_\pm$ définis plus haut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\frac{x_1}{r} - y_1 \\ \pm\frac{y_1}{r} + x_1 \end{pmatrix}.$$

L'invariance de Q par rotation autour de Oz montre que, par le point $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in Q$, passent exactement deux droites tracées sur Q , dirigés par les deux vecteurs calculés ci-dessus :

$$\left(1, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - y_1, \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + x_1\right) \quad \text{et} \quad \left(1, -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - y_1, -\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + x_1\right).$$

Voici un point de vue légèrement différent : l'intersection de Q avec tout plan parallèle à Oxy est un cercle. Une droite contenue dans un tel plan ne peut donc être contenue dans Q. Par suite, si (D) est contenue dans Q, elle est sécante à tout plan parallèle à Oxy, et en particulier à Oxy lui-même. Elle passe donc par l'un des points du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans ce plan. Soit $M = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ le point d'intersection.

En adoptant les mêmes notations que pour le premier point de vue, on cherche les $u = (a, b, c)$ unitaires tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\cos\theta + ta)^2 + (\sin\theta + tb)^2 - (tc)^2 = 1$, ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1 - 2c^2)t^2 + 2(a\cos\theta + b\sin\theta)t = 0.$$

On trouve de nouveau $c = \varepsilon/\sqrt{2}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, le couple (a, b) devant satisfaire les relations $a^2 + b^2 = 1/2$ et $a\cos\theta + b\sin\theta = 0$. Il s'agit de rechercher les vecteurs (a, b) du plan euclidien de norme $1/\sqrt{2}$ et orthogonaux au vecteur non nul $(\cos\theta, \sin\theta)$: on sait qu'il en existe exactement deux, donnés par $(a, b) = \varepsilon'(-\sin\theta, \cos\theta)/\sqrt{2}$, avec $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$.

Finalement, en posant $\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$, quatre vecteurs unitaires conviennent : $\frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}}(-\sin\theta, \cos\theta, \varepsilon'')$. Comme deux vecteurs colinéaires non nuls dirigent la même droite passant par un point donné, on conclut que les droites contenues dans Q sont celles passant par les points $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et dirigées par les vecteurs

$$(-\sin\theta, \cos\theta, 1) \quad \text{et} \quad (-\sin\theta, \cos\theta, -1).$$

Mines Ponts PSI

Algèbre

261. **RMS 2010 581 Mines Ponts PSI** .

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unipotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. L'ordre de M est alors le plus petit entier naturel non nul k tel que $M^k = I_n$.

(a) Montrer que toute matrice unipotente est diagonalisable.

(b) Montrer que si M est unipotente d'ordre p alors $M^k = I_n$ si et seulement si $k \in p\mathbb{Z}$.

(c) Soient V_n l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et O_n l'ensemble des ordres des éléments de V_n. Montrer que V_n n'est pas vide, et que O_n est fini.

(d) Déterminer O_2.

Solution. —

(a) Soit M une matrice unipotente d'ordre k. Alors M admet le polynôme annulateur $X^k - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc M est diagonalisable. De plus, ses valeurs propres sont des racines k-ièmes de l'unité.

(b) Soit k tel que $M^k = I_n$. Si $k = pq + r$ est la division euclidienne de k par p, alors $M^k = (M^p)^q M^r = M^r = I_n$ avec $0 \leqslant r \leqslant< p$, par définition d'un reste. Comme p est le plus petit entier k *strictement* positif tel que $M^k = I_n$, on a nécessairement $r = 0$, donc $k \in p\mathbb{Z}$. La réciproque est claire.

(c) La matrice I_n appartient à V_n, qui est donc non vide.

On note P_n l'ensemble des polynômes caractéristiques des éléments de V_n : ce sont des polynômes à coefficients entiers, dont toutes les racines sont des nombres complexes de module 1 d'après la question (a). Si $P = (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un tel polynôme, on a (σ_k désignant la k-ième fonction symétrique des racines)

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad |a_k| = |(-1)^k \sigma_{n-k}| \leqslant \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

car σ_k est une somme de $\binom{n}{k}$ produits de nombres complexes de module 1. Comme a_k est un entier, il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Par conséquent, P_n est *fini*. L'ensemble des valeurs propres des éléments de V_n est donc lui aussi fini : ces valeurs propres sont de la forme $\exp(2ik\pi/\ell)$ pour ℓ appartenant à un ensemble fini D_n de dénominateurs entiers, et $0 \leqslant k \leqslant \ell$.

Si l'on pose $m_n = \operatorname{ppcm}(\ell,\ \ell \in D_n)$, alors $A^{m_n} = I_n$ pour tout $A \in V_n$, donc les ordres des éléments de V_n sont bornés par m_n, donc sont en nombre fini.

(d) Soit $M \in V_2$, d'ordre k, que l'on écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4.$$

Ses valeurs propres, notées λ_1 et λ_2, étant de module 1, on a $|\operatorname{tr} M| = |a+d| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leqslant 2$. Comme $a+d$ est entier, la trace peut prendre seulement les cinq valeurs suivantes : $-2, -1, 0, 1, 2$. On discute ensuite suivant le caractère réel ou non des valeurs propres de M.

- Si l'une des valeurs propres est réelle, l'autre aussi par différence avec la trace. Comme ces valeurs propres sont de module 1, elles valent 1 ou -1.
  - Si A est semblable à $\operatorname{diag}(1, 1) = I_2$, donc égale à I_2, son ordre vaut 1.
  - Si A est semblable à $\operatorname{diag}(-1, -1) = -I_2$, donc égale à $-I_2$, son ordre vaut 2.
  - Si A est semblable à $\operatorname{diag}(1, -1)$, son ordre vaut 2 aussi.
- Si aucune des valeurs propres n'est réelle, elles sont complexes conjuguées, de la forme $\lambda_1 = \exp(2ip\pi/k)$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Alors $\operatorname{tr} M = 2\cos(2p\pi/k) \in]-2, 2[$ car $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Il y a trois possibilités.
  - Si $\operatorname{tr} M = -1$, alors $\cos(2p\pi/k) = -1/2$, donc $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\exp(2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3)\}$, et l'ordre de M vaut 3.
  - Si $\operatorname{tr} M = 0$, alors $\cos(2p\pi/k) = 0$, donc $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{i, -i\}$, et l'ordre de M vaut 4.
  - Si $\operatorname{tr} M = 1$, alors $\cos(2p\pi/k) = 1/2$, donc $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\exp(i\pi/3), \exp(-i\pi/3)\}$, et l'ordre de M vaut 6.

On conclut que

$$O_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Remarque. — Marc Becker propose de montrer le caractère fini de P_n sans utiliser les relations entre coefficients et racines. On sait que les deux fonctions $Q \mapsto \|Q\|_\infty := \sup_{|x|\leqslant 1} |Q(x)|$ et $Q = \sum_{j=0}^n a_k X^k \mapsto N_\infty(Q) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$ sont deux normes sur $\mathbb{C}_n[X]$. Ce denier étant de dimension finie, les normes en question sont équivalentes. Or, si $Q \in P_n$, il s'écrit (suivant la définition qu'on adopte du polynôme caractéristique) $\pm\prod_{j=1}^n (X-\lambda_j)$, les λ_j étant de module 1. On en déduit que $\|Q\|_\infty \leqslant 2^n$. L'équivalence des normes montre alors que les $N_\infty(Q)$ pour $Q \in P_n$ sont bornées, donc que les coefficients de ces polynômes sont bornés. On conclut ensuite comme ci-dessus.

Analyse

262. **RMS 2007 546 Mines Ponts PSI**

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.

(a) Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.

(b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ pour toute $f \in E$.

(c) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution. —

(a) Si $\|f\| = 0$, alors f est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 linéaire homogène $f + 2f' + f'' = 0$. Or le théorème de Cauchy et Lipschitz pour ces équations affirme l'unicité d'une solution vérifiant des conditions initiales données. Ici, $f(0) = f'(0) = 0$, donc f est identiquement nulle.

Le caractère positivement homogène et l'inégalité triangulaire sont simples à vérifier.

(b) Soit $f \in E$. On pose $h = f' + f$, puis $g = f'' + 2f' + f = h' + h$. Les techniques usuelles de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants montrent qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in [0,1],\ h(t) = e^{-t}(\int_0^t e^u g(u)\,\mathrm{d}u + c)$. Par hypothèse, $h(0) = f(0) + f'(0) = 0$, donc $c = 0$, puis

$$\forall t \in [0,1], \quad h(t) = f'(t) + f(t) = e^{-t}\int_0^t e^u g(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

La même méthode montre qu'il existe une constante $d \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}(\int_0^x e^t h(t)\,\mathrm{d}t + d)$. Par hypothèse, $f(0) = 0$, donc $d = 0$, puis

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t h(t)\,\mathrm{d}t = e^{-x}\int_0^x \left(\int_0^t e^u g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\,.$$

Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}|f(x)| = e^{-x}\left|\int_0^x \left(\int_0^t e^u g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant e^{-x}\int_0^x \left(\int_0^t e^u \|g\|_\infty\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t,\\ &= \|g\|_\infty e^{-x}\int_0^x \left(e^t - 1\right)\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty e^{-x}(e^x - 1 - x) = \|g\|_\infty \varphi(x),\end{aligned}$$

où l'on a posé $\varphi\colon x \in [0,1] \mapsto e^{-x}(e^x - 1 - x) = 1 - e^{-x}(1+x)$. L'étude rapide de φ, avec $\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = e^{-x}x$, montre que $\|\varphi\|_\infty = \varphi(1) = 1 - 2e^{-1}$, donc la constante $C = 1 - 2e^{-1}$ convient.

(c) La réponse est non : si elles étaient équivalentes, alors toute suite de fonctions bornée pour une norme serait bornée pour l'autre. Or la suite de terme général $f_n\colon x \mapsto x^n$ pour $n \geqslant 2$ est bien dans E, et est bornée pour $\|\ \|_\infty$ par 1. Comme $\forall x \in [0,1],\ (f_n'' + 2f_n' + f_n)(x) = x^{n-2}[x^2 + 2nx + n(n-1)]$, on a $\|f_n\| = \|f_n'' + 2f_n' + f_n\|_\infty = 1 + n + n^2$ (valeur atteinte en $x = 1$), la suite (f_n) n'est pas bornée pour $\|\ \|$.

263. **RMS 2007 547 Mines Ponts PSI**

Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+pk}\binom{n}{k}$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Solution. — On remarque que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 t^{kp}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{kp}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^p)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

On pose $f(t) = (1-t^p)^n$ pour tout $t \in [0,1]$. La fonction $\varphi\colon u \mapsto u^{1/p}$ induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur lui-même. Comme f est intégrable sur $]0,1[$ puisqu'elle est polynomiale, on peut effectuer le changement de variable $t = \varphi(u) = u^{1/p}$, pour lequel $\varphi'(u) = (1/p)u^{\frac{1}{p}-1}$ (il est nécessaire d'utiliser ce théorème car l'intégrale obtenue est impropre lorsque $p \geqslant 2$) :

$$S_n = \frac{1}{p}\int_0^1 (1-u)^n u^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Pour tout nombre réel $\alpha > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I(n,\alpha) = \int_0^1 (1-u)^n u^\alpha \,\mathrm{d}u$, ce qui définit une intégrale convergente car $(1-u)^n u^\alpha \sim_0 u^\alpha$ et $\alpha > -1$. Une intégration par parties donne

$$\forall n \geqslant 1, \quad I(n,\alpha) = \left[\frac{(1-u)^n u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 + \frac{n}{\alpha+1}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{\alpha+1}\,\mathrm{d}u = \frac{n}{\alpha+1} I(n-1,\alpha+1)\,.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que

$$\begin{aligned} I(n,\alpha) &= \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} I(0,\alpha+n)\,, \\ &= \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\int_0^1 u^{\alpha+n}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)(\alpha+n+1)}\,. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\alpha = \frac{1}{p} - 1$, on obtient

$$S_n = \frac{1}{p} I\left(n, \frac{1}{p} - 1\right) = \frac{1}{p} \times \frac{n!}{\prod_{k=0}^n \left(\frac{1}{p} + k\right)} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} + k\right)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{kp}\right)}\,.$$

On commence alors la recherche d'un équivalent, en calculant le logarithme de S_n :

$$\ln(S_n) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{kp}\right) = -\sum_{k=1}^n g(k)$$

où l'on désigne par g la fonction $x \in [1,+\infty[\mapsto \ln(1+1/(px)) = \ln(px+1) - \ln(px)$, qui est continue par morceaux, décroissante et positive. Le théorème de comparaison série intégrale affirme que la série de terme général $w_k = \int_{k-1}^k g(t)\,\mathrm{d}t - g(k)$ converge. On en déduit que,

$$\ln(S_n) = -\sum_{k=1}^n g(k) = -g(1) + \sum_{k=2}^n \left(w_k - \int_{k-1}^k g(t)\,\mathrm{d}t\right) = -g(1) + \sum_{k=2}^n w_k - \int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t + c + \mathrm{o}(1)\,,$$

où c désigne la constante $-g(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$. On calcule ensuite l'intégrale (d désigne un nombre indépendant de n dans le calcul ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^n [\ln(px+1) - \ln(px)]\,\mathrm{d}t\,, \\ &= \left[\frac{(px+1)\ln(px+1) - (px+1)}{p} - x\ln(px) + x\right]_{x=1}^n\,, \\ &= \frac{(pn+1)\ln(pn+1) - (pn+1)}{p} - n\ln(pn) + n - d\,, \\ &= n\left[\left(1 + \frac{1}{pn}\right)\left(\ln(pn) + \ln\left(1 + \frac{1}{pn}\right)\right) - 1 - \frac{1}{pn}\right] - n\ln(pn) + n - d\,, \\ &= n\left[\left(1 + \frac{1}{pn}\right)\left(\ln(pn) + \frac{1}{pn} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{pn}\right] - n\ln(pn) + n - d\,, \\ &= n\left[\ln(pn) + \frac{\ln(pn)}{pn} - 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] - n\ln(pn) + n - d\,, \\ &= \frac{\ln(pn)}{p} + \mathrm{o}(1) - d\,. \end{aligned}$$

Finalement, $\ln(S_n) = -(\ln n)/p + k + \mathrm{o}(1)$, où $k = c + d - (\ln p)/p$ est une constante (par rapport à la variable n), et on en déduit qu'il existe une constante strictement positive $a = e^k$ telle que

$$S_n \sim \frac{a}{n^{1/p}}\,.$$

Remarque. — Si $p = 1$, alors $a = 1$. En effet, S_n est alors égale à $\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u = 1/(n+1)$.
Si $p = 2$, alors $a = \sqrt{\pi}/2$. En effet, en reprenant une des expressions de S_n calculée plus haut et en multipliant numérateur et dénominateur par les nombres pairs qui manquent pour former une factorielle, puis en utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$S_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + k\right)} = \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)\times(2n)!} \sim \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}{2n(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\,.$$

Plus généralement, une propriété de la fonction Γ donne $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right)$. Alors $S_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{p}+k\right)} \sim \frac{\Gamma(1/p)}{pn^{1/p}}$, et on en déduit que la constante a vaut $\frac{1}{p}\Gamma(\frac{1}{p})$.

264. **RMS 2007 548 Mines Ponts PSI**

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est k–lipschitzienne si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Solution. — On rappelle que les fonctions f^+ et f^- sont définies par : $\forall x \in I,\ f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Ainsi, on dispose des relations

$$\forall x \in I, \quad (1)\begin{cases} |f(x)| &= f^+(x) + f^-(x)\,, \\ f(x) &= f^+(x) - f^-(x)\,, \end{cases} \qquad \text{ou encore} \quad (2)\begin{cases} f^+(x) &= \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}\,, \\ f^-(x) &= \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}\,. \end{cases}$$

On rappelle aussi l'inégalité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.

On fait enfin remarquer que, si $g\colon I \to \mathbb{R}$ (respectivement $h\colon I \to \mathbb{R}$) est k–lipschitzienne (respectivement ℓ–lipschitzienne), et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $\alpha g + \beta h$ est $(|\alpha|k + |\beta|\ell)$–lipschitzienne. En effet,

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \big|(\alpha g + \beta h)(x) - (\alpha g + \beta h)(y)\big| \leqslant |\alpha|\big|g(x) - g(y)\big| + |\beta|\big|h(x) - h(y)\big| \leqslant (|\alpha|k + |\beta|\ell)|x - y|\,.$$

Condition nécessaire. Si f est k–lipschitzienne, l'inégalité qui vient d'être rappelée prouve que

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|\,,$$

donc $|f|$ est k-lipschitzienne. Les relations (2) et la remarque appliquée avec $g = |f|$, $h = f$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = \pm 1/2$ montrent alors que f^+ et f^- sont k–lipschitziennes.

Condition suffisante. Si f^+ et f^- sont k–lipschitziennes, les relations (1) et la remarque montrent que f est $2k$–lipschitzienne (ainsi que $|f|$). Pour améliorer la valeur du rapport de Lipschitz et descendre jusqu'à k, il faut procéder autrement. Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. On discute suivant les signes de $f(x)$ et $f(y)$.

- Si $f(x)$ et $f(y)$ sont de même signe au sens large — on les suppose positifs dans un premier temps —, alors $|f(x) - f(y)| = |f^+(x) - f^+(y)| \leqslant k|x - y|$ car f^+ est k–lipschitzienne. S'ils sont négatifs, alors $|f(x) - f(y)| = |-f^-(x) + f^-(y)| \leqslant k|x - y|$ car f^- est k–lipschitzienne.
- Si $f(x)$ et $f(y)$ sont de signes contraires au sens strict, on peut appliquer à f le théorème des valeurs intermédiaires : en effet, on a constaté que f est lipschitzienne (de rapport $2k$ pour le moment), et en particulier f est continue. Il existe donc $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0 = f^+(z) = f^-(z)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose que $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$, donc $f(x) = f^+(x)$ et $f(y) = -f^-(y)$. Alors, comme f^+ et f^- sont k–lipschitziennes,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \big|f^+(x) - f^+(z) - f^-(z) + f^-(y)\big|\,, \\ &\leqslant \big|f^+(x) - f^+(z)\big| + \big|f^-(z) - f^-(y)\big|\,, \\ &\leqslant k|x - z| + k|z - y| = k(z - x + y - z) = k(y - x) = k|x - y|\,. \end{aligned}$$

On a bien montré que, dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, donc f est k–lipschitzienne.

265. **RMS 2007 549 Mines Ponts PSI**

Soient p et q strictement supérieurs à 1 tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2,\ \alpha\beta \leqslant \alpha^p/p + \beta^q/q$. En déduire, si f et g sont dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$, $|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant (\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t)^{1/p}(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t)^{1/q}$.

Solution. — Si α ou β est nul, l'inégalité est banale. On suppose désormais α et β strictement positifs. Comme la fonction logarithme est concave, et comme $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q) = \ln(\alpha) + \ln(\beta) = \ln(\alpha\beta)\,.$$

Il suffit de composer par l'exponentielle, fonction croissante, pour obtenir l'inégalité attendue.

On pose $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t)^{1/p}$ et $\|g\|_q = (\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t)^{1/q}$. Si l'un de ces deux nombres est nul, c'est que f ou g est la fonction nulle, en vertu de la propriété de positivité stricte de l'intégrale des fonctions continues ; dans ce cas, l'inégalité demandée est banale. On suppose désormais que ni f ni g n'est identiquement nulle. Soit $t \in [a,b]$. On applique l'inégalité qu'on vient d'établir avec $\alpha = |f(t)|/\|f\|_p$ et $\beta = |g(t)|/\|g\|_q$:

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{\|f\|_q^q}\,.$$

On intègre ensuite cette inégalité pour $t \in [a, b]$; on obtient :

$$\frac{\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\|f\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

On en déduit que $\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q$ puis, grâce à l'inégalité triangulaire, que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

266. **RMS 2007 550 Mines Ponts PSI**

Soit $T > 0$ et $f : [-T, T] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est impaire si et seulement si $\int_{-T}^T t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À quelle condition f est-elle paire ? Nulle ?

Solution. — On commence par rappeler deux résultats.

– On sait que $(f|g) = \int_{-T}^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-T, T]; \mathbb{R})$. On notera $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée. Si f et g sont deux fonctions de E respectivement paire et impaire, le produit fg est impair, donc $(f|g) = 0$ puisque c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment centré en zéro. Les sous-espaces vectoriels F et G formés des fonctions paires et impaires sont donc orthogonaux. Comme on sait, par ailleurs, qu'ils sont supplémentaires au sens algébrique, ce sont deux supplémentaires orthogonaux :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G\,.$$

Par ailleurs, la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'approximation uniforme est plus fine que $\|\cdot\|_2$, car il existe $\beta = \sqrt{2T} > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \left(\int_{-T}^T f(t)^2\right)^{1/2} \leqslant (2T\|f\|_\infty^2)^{1/2} = \beta\|f\|_\infty\,.$$

– Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Un théorème de Weierstrass affirme que $\mathcal{P}$ est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On raffine ce résultat, en montrant que le sous-espace $\mathcal{P}_p$ des fonctions polynomiales paires est dense dans F pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour cela, on fixe $f \in F$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $\forall t \in [-T, T]$, $|f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$. En substituant t par $-t$ et en tenant compte de la parité de f, on obtient $\forall t \in [-T, T]$, $|f(t) - P(-t)| \leqslant \varepsilon$. Si Q désigne la partie paire de P, c'est-à-dire la fonction polynomiale paire donnée par $Q(t) = [P(t) + P(-t)]/2$, on en déduit que

$$\forall t \in [-T, T], \quad |f(t) - Q(t)| \leqslant \frac{1}{2}|f(t) - P(t)| + \frac{1}{2}|f(t) - P(-t)| \leqslant \varepsilon\,.$$

En d'autres termes, $\|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$, ce qui achève de prouver que $\mathcal{P}_p$ est dense dans F pour $\|\cdot\|_\infty$.

Condition nécessaire. Si f est impaire ($f \in G$), comme $X^{2n} : t \mapsto t^{2n}$ est paire, alors $(f|X^{2n}) = \int_{-T}^T t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Condition suffisante. Si $\int_{-T}^T t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n, comme la famille $(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}_p$, on en déduit que $(f|Q) = 0$ pour toute fonction polynomiale paire Q. Si g est une fonction paire quelconque et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on vient de montrer qu'il existe une fonction polynomiale paire Q telle que $\|f - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz et la comparaison entre les normes euclidienne et uniforme :

$$\big|(f|g)\big| = \big|(f|g - Q) + (f|Q)\big| = \big|(f|g - Q)\big| \leqslant \|f\|_2\|g - Q\|_2 \leqslant \beta\|f\|_2\|g - Q\|_\infty \leqslant \beta\|f\|_2\varepsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $(f|g) = 0$, et ceci pour toute $g \in F$. Par suite $f \in F^\perp = G$, donc f est impaire.

De la même manière, on prouverait que f est paire si et seulement si $\int_{-T}^T t^{2n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que f est nulle (c'est-à-dire à la fois paire et impaire) si et seulement si $\int_{-T}^T t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

267. **RMS 2007 551 Mines Ponts PSI**

On pose $f_n(x) = e^{i2^n x}/n^n$. Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que sa série de Taylor en zéro est de rayon de convergence nul.

Solution. — Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(k)}(x) = (i2^n)^k e^{i2^n x}/n^n$. Il en résulte que $\|f_n^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} = 2^{kn}/n^n$, donc que $n^2\|f_n^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} = \exp(-(n-2)\ln n + kn\ln 2)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. La série des dérivées

k-ièmes des f_n converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout k, ce qui montre que S est définie sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (i2^n)^k \frac{e^{i2^n x}}{n^n} = i^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{kn}}{n^n} e^{i2^n x} .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $S^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{kn}}{n^n}$. On va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la suite de terme général $x^k S^{(k)}(0)/k!$ n'est pas bornée, ce qui prouve que la série de Taylor de S en zéro a un rayon de convergence nul. On va en fait montrer que la suite extraite formée des termes d'indice pair n'est pas bornée. Pour cela, on minore $|S^{(2k)}(0)|$ de la manière suivante :

$$|S^{(2k)}(0)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2kn}}{n^n} \geqslant \sum_{n=1}^{2^k} \left(\frac{2^{2k}}{n}\right)^n \geqslant \sum_{n=1}^{2^k} \left(2^k\right)^n = \frac{2^{2^k+1} - 2^k}{2^k - 1} \cdot$$

En utilisant l'équivalent de Stirling, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left|\frac{S^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!}\right| &\geqslant \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \frac{2^{2^k+1} - 2^k}{2^k - 1} \sim \frac{|x|^{2k} e^{-2k}}{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}} (2^{2^k+1-k}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left([2^k + 1 - k] \ln 2 + 2k[\ln|x| - 1 - \ln(2k)] - \frac{1}{2} \ln k \right) . \end{aligned}$$

Dans l'argument de l'exponentielle, le terme prépondérant est $2^k \ln 2$, ce qui entraîne que $\lim \exp(\cdots) = +\infty$ quand k tend vers $+\infty$, donc que la suite extraite $S^{(2k)}(0)x^{2k}/(2k)!$ n'est pas bornée, et ceci achève la preuve.

268. **RMS 2007 552 Mines Ponts PSI**

On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n})$. Préciser le rayon de convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1.

Solution. — On note R le rayon de convergence cherché et S sa somme. Comme $a_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$, on constate que $a_n \times 1^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (donc $R \geqslant 1$), et que la série de terme général $|a_n 1^n|$ diverge (donc $R \leqslant 1$), et on conclut que

$$R = 1 .$$

Un développement limité permet de savoir si la série entière converge pour $z = 1$ ou $z = -1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{3}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) , \\ a_n(-1)^n &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \cdot \end{aligned}$$

Comme les séries de termes généraux $(-1)^n/\sqrt{n}$, $3(-1)/(2n)$ et $\mathrm{O}(1/n^{3/2})$ sont convergentes alors que celles de termes généraux $3/(2n)$ et $1/\sqrt{n}$ sont divergentes, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ diverge en 1 et -1. Par suite, l'ensemble de définition de la somme est

$$]-1, 1[.$$

Voici comment on devine l'équivalent en 1 de la somme. En multipliant le développement limité de a_n par x^n et en sommant, on obtient, sans aucun souci de justification, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) x^n = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x)$, avec des notations évidentes des sommes S_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$. Comme les sommes $S_1(x)$ et $S_3(x)$ convergent pour $x = 1$, et comme $S_2(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 1, on va montrer que

$$S(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} S_2(x) = -\frac{3}{2} \ln(1-x) .$$

On calcule pour cela la différence $S(x) - S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - \frac{3}{2n}) x^n$. On pose $b_n = a_n - \frac{3}{2n}$: d'après le développement limité calculé plus haut, la série de terme général b_n converge. Par suite, la somme $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ est continue en 1 d'après le théorème de convergence radiale d'Abel. En particulier, B est bornée au voisinage de 1, donc est négligeable devant $\ln(1-x)$, ce qui établit l'équivalent annoncé.

Remarque. — L'énoncé d'origine demandait un équivalent en -1. La démarche est la même : repérer dans le développement limité de a_n le terme qui fait diverger $S(x)$ en $x = -1$ [en l'occurrence, c'est $(-1)^n/\sqrt{n}$], poser $C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n/\sqrt{n}$, puis montrer que la différence $S(x) - C(x)$ reste bornée au voisinage de -1, alors que $|C(x)|$ tend vers l'infini en -1, ce qui établit que $S(x) \sim C(x)$ quand x tend vers -1. La petite difficulté technique consiste à établir que $\lim_{-1} |C(x)| = +\infty$ mais surtout, le résultat est moins intuitif, car la somme C n'est pas une fonction usuelle au niveau des classes préparatoires, contrairement à l'étude en 1, où l'équivalent obtenu est un logarithme. La littérature mathématique appelle fonction polylogarithme d'indice a, noté $\mathrm{polylog}(a,z)$, la somme de la série entière de terme général z^n/n^a, où a est un nombre complexe quelconque. Ici, $C(x)=\mathrm{polylog}(1/2,-x)$, ce qui ne nous avance guère. Merci de relire cette solution qui me laisse perplexe ? ?

269. **RMS 2007 553 Mines Ponts PSI**

Déterminer le le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} a_n x^n$ avec $a_k=\int_k^{2k} e^{-x}/x\,\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il sur le bord du disque de convergence ?

Solution. — On encadre le coefficient a_k :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\int_k^{2k} e^{-x}\,\mathrm{d}x}{2k}=\frac{e^{-k}-e^{-2k}}{2k}\leqslant a_k\leqslant \frac{\int_k^{2k} e^{-x}\,\mathrm{d}x}{k}=\frac{e^{-k}-e^{-2k}}{k}$$

Pour tout nombre complexe z non nul, on en déduit que $\alpha_k\leqslant |a_kz^k|\leqslant 2\alpha_k$ avec

$$\alpha_k=\frac{e^{-k}-e^{-2k}}{2k}|z|^k\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{|z/e|^k}{k}\,.$$

On en déduit que $\lim_{k\to+\infty}\alpha_k$ vaut zéro (respectivement $+\infty$) lorsque $|z|<e$ (respectivement $|z|>e$), donc que

$$R=e\,.$$

Soit maintenant $z=Re^{i\theta}=e\times e^{i\theta}$ appartenant au cercle de convergence. Alors $a_kz^k=b_ke^{ik\theta}$ avec $b_k=a_ke^k$. On pose $\sigma_n=\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$. Si $\theta\neq 0[2\pi]$, on sait que

$$\sigma_n=e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\quad\text{donc que}\quad |\sigma_n|\leqslant M:=\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}\,.$$

– On suppose que $\theta\neq 0[2\pi]$, c'est-à-dire que $z\neq e$, donc (σ_n) est une suite bornée. Une transformation d'Abel montre que

$$S_n=\sum_{k=1}^n a_kz^k=\sum_{k=1}^n b_ke^{ik\theta}=\sum_{k=1}^n b_k(\sigma_k-\sigma_{k-1})=\sum_{k=1}^n b_k\sigma_k-\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\sigma_k=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})\sigma_k+b_n\sigma_n\,.$$

L'encadrement de a_k donné plus haut montre que $(1-e^{-n})/(2n)\leqslant b_n\leqslant (1-e^{-n})/n$, donc que b_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Comme (σ_n) est une suite bornée, $b_n\sigma_n$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. On montre ensuite que la série de terme général $(b_k-b_{k+1})\sigma_k$ converge absolument. Pour cela, on évalue précisément la différence b_k-b_{k+1} (l'encadrement de a_k ne suffit plus) :

$$\begin{aligned}b_k-b_{k+1}&=e^k\int_k^{2k}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-e^{k+1}\int_{k+1}^{2k+2}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_k^{2k}\frac{e^{k-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{k+1}^{2k+2}\frac{e^{k-(x-1)}}{x}\,\mathrm{d}x\,,\\&=\int_k^{2k}\frac{e^{k-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_k^{2k+1}\frac{e^{k-y}}{y+1}\,\mathrm{d}y=\int_k^{2k}e^{k-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x-\int_{2k}^{2k+1}\frac{e^{k-y}}{y+1}\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Il en résulte la majoration suivante (on a majoré $1/x(x+1)$ par $1/k^2$ dans la première intégrale, puis $\int_k^{2k}e^{k-x}\,\mathrm{d}x$ par $\int_k^{+\infty}e^{k-x}\,\mathrm{d}x=1$, et $e^{k-y}/(y+1)$ par e^{-k} dans la seconde intégrale) :

$$|(b_k-b_{k+1})\sigma_k|\leqslant M\left(\int_k^{2k}\frac{e^{k-x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x+\int_{2k}^{2k+1}\frac{e^{k-y}}{y+1}\,\mathrm{d}y\right)\leqslant M\left(\frac{1}{k^2}+e^{-k}\right)\,.$$

Les séries de termes généraux $1/k^2$ et e^{-k} étant convergentes, on a bien prouvé la convergence absolue de $\sum(b_k-b_{k+1})\sigma_k$.

– On suppose que $\theta=0[2\pi]$, c'est à dire que $z=e$. Alors $a_kz^k=a_ke^k\geqslant(1-e^{-k})/(2k)\sim_{+\infty}1/(2k)$, donc la série $\sum a_kz^k$ diverge.

En résumé, $\sum_{k\geqslant 1}a_kz^k$ est convergente sur le cercle de convergence privé de e.

270. **RMS 2007 554 Mines Ponts PSI**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels convergeant respectivement vers a et b. On suppose a et b strictement positifs. Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2}=a_nu_{n+1}+b_nu_n$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_nz^n$ est supérieur ou égal à la racine positive de bX^2+aX-1.

Solution. — Le discriminant de bX^2+aX-1 est $\Delta=a^2+4b>0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes $r_1=(-a-\sqrt{\Delta})/2$ et $r_2=(-a+\sqrt{\Delta})/2$. De plus $r_1<0<r_2$ et $|r_2|<|r_1|$.

Soient (v_n) la/une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $v_{n+2} = av_{n+1}+bv_n$, et (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (w_n) satisfait la relation de récurrence

$$w_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n - av_{n+1} - bv_n = a_n(w_{n+1} + v_{n+1}) + b_n(w_n + v_n) - av_{n+1} - bv_n = u_n(a_n - a)w_{n+1} + (b_n - b)w_n$$

à terminer ? ?

271. **RMS 2007 555 Mines Ponts PSI**

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $(E)\ :\ y'' + qy = 0$. Montrer que si f est une solution bornée de (E), alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. En déduire que (E) admet des solutions non bornées.

Solution. — Soit f une solution bornée de $y'' + qy = 0$, et soit M un réel positif tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En intégrant l'équation différentielle sur le segment $[0, x]$, on obtient $\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x) - f'(0) + \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et, par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or la fonction qf est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $|qf| \leqslant M|q|$. Par suite, $\int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et il en est de même de f'. Soit ℓ la limite de f' en $+\infty$. On suppose que ℓ est non nulle, strictement positive pour fixer les idées. Il existe dans ce cas un x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$. L'égalité des accroissements finis dit alors que, pour $x > x_0$, on aura $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c) \geqslant \frac{\ell}{2}$, pour un certain $c \in]x_0, x[$, donc

$$f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

On aurait alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$, ce qui contredit le caractère borné de f. Si $\ell < 0$, on montrerait que $\lim_{+\infty} f = -\infty$, obtenant la même contradiction. On a ainsi démontré que $\lim_{+\infty} f' = 0$.

La deuxième étape du raisonnement fait intervenir le wronskien d'un couple (f, g) de solutions de (E). Par définition,

$$w = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad w' = \begin{vmatrix} f' & g \\ f'' & g' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g' \\ f' & g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g \\ -qf & g' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g' \\ f' & -qg \end{vmatrix} = f'g' + qfg - qfg - f'g' = 0\,.$$

Par suite, w est une fonction constante (non nulle si et seulement si (f, g) est une base de l'espace vectoriel des solutions, c'est-à-dire un système fondamental de solutions).

On entame maintenant le raisonnement principal, par l'absurde : on suppose que toutes les solutions de (E) sont bornées. Soit (f, g) un système fondamental de solutions. Alors f et g sont bornées, et f' et g' ont des limites nulles en $+\infty$, donc $w = f'g - fg'$ a aussi une limite nulle en $+\infty$, ce qui contredit le fait que w est une fonction constante non nulle. On a donc prouvé que si q est continue et intégrable, l'équation (E) : $y'' + qy = 0$ possède au moins une solution non bornée.

272. **RMS 2007 556 Mines Ponts PSI**

Trouver la solution maximale du problème de Cauchy $y'' = 2y^3$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Solution. — Le théorème de Cauchy et Lipschitz s'applique à cette équation différentielle, de la forme $y'' = f(x, y, y')$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Il existe donc une unique solution maximale, définie sur un intervalle noté $I_{\max}$, telle que $y(0) = y'(0) = 1$.

On raisonne par conditions nécessaires : si y est cette solution maximale, alors $y''y' = 2y^3y'$, donc (en intégrant), il existe une constante λ telle que $\frac{1}{2}(y')^2 = \frac{1}{2}y^4 + \lambda$. Comme $y(0) = y'(0) = 1$, on obtient $\lambda = 0$. Soit J le plus grand intervalle contenu dans $I_{\max}$ et contenant zéro sur lequel y' ne s'annule pas. Comme $y'(0) = 1$ et comme y' est continue, on en déduit que $y' > 0$ sur J. Par conséquent,

$$\forall x \in J, \quad y' = y^2\,.$$

Comme y' ne s'annule pas sur J, on peut diviser par y^2 et intégrer entre zéro et t. On obtient

$$\forall t \in J, \quad t = \int_0^t \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{1}{y(t)}\,.$$

Il en résulte que $y(t) = 1/(1 - t)$ pour tout $t \in J$, donc que $y'(t) = 1/(1 - t)^2$ pour tout $t \in J$. L'intervalle J maximal sur lequel $y' > 0$ est donc $] - \infty, 1[$, et c'est aussi l'intervalle maximal sur lequel y est définie. On vérifie enfin que $y''(t) = 2/(1 - t)^3 = 2y(t)$ et que $y(0) = y'(0) = 1$. En d'autres termes

$$I_{\max} =] - \infty, 1[\quad \text{et} \quad \forall t \in I, \quad y(t) = \frac{1}{1 - t}\,.$$

273. **RMS 2007 557 Mines Ponts PSI**

Résoudre l'équation différentielle $ay'' + (a+b)y' + by = e^x$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution. — La résolution se fera sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, l'équation différentielle s'écrit $b(y' + y) = e^x$, ce qui implique que $b \neq 0$. Ses solutions sont les fonctions telles que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{2b} e^x .$$

On remarque que, si l'on pose $z = y + y'$, l'équation différentielle s'écrit $z' + (b/a)z = e^x/a$, ce qui ramène sa résolution à deux résolutions d'équations différentielles d'ordre 1, et on vient, à peut de choses près, de résoudre celle qui porte sur z.

– Si $a + b \neq 0$, c'est-à-dire si $b/a \neq -1$, les fonctions solutions de $z' + (b/a)z = e^x/a$ sont celles qui vérifient

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda e^{-bx/a} + \frac{1}{a+b} e^x .$$

– Si $a + b = 0$, c'est-à-dire si $b/a = -1$, on résout directement l'équation différentielle de départ, qui s'écrit $y'' - y = e^x/a$. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha x e^x$ car 1 est racine simple de l'équation caractéristique, et on trouve

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x}{2a} e^x .$$

Il ne reste plus qu'à résoudre $y' + y = \lambda e^{-bx/a} + \frac{1}{a+b} e^x$ dans le cas où $a + b \neq 0$. On doit de nouveau discuter

– Si $b/a \neq 1$, c'est-à-dire si $a \neq b$, les solutions sont de la forme (on a posé $\lambda' = \frac{\lambda a}{a-b}$)

$$\exists (\lambda', \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \mu e^{-x} + \lambda' e^{-bx/a} + \frac{1}{2(a+b)} e^x .$$

– Si $a = b$, il s'agit de résoudre $y' + y = \lambda e^{-x} + \frac{1}{2a} e^x$. Les solutions sont de la forme

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \mu e^{-x} + \lambda x e^{-x} + \frac{1}{4a} e^x .$$

Remarque. — Dans le cas où $a \neq 0$, la méthode directe consistant à calculer le discriminant puis les racines du polynôme caractéristique $aX^2 + (a+b)X + b$, qui valent $\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$, puis $r_1 = [-a - b - (a-b)]/2a = -1$ et $r_2 = [-a - b + (a-b)]/2a = -b/a$, est sans doute aussi rapide.

274. **RMS 2007 558 Mines Ponts PSI**

Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = y^2 - \frac{2}{x} y$.

Solution. — L'équation différentielle est de la forme $y' = f(x,y)$, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, d'expression $f(x,y) = y^2 - 2/x$. Par conséquent, le théorème de Cauchy et Lipschitz s'applique : pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale (I, y) de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$, définie sur un intervalle I dont x_0 est intérieur, et inclus dans $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ suivant de le signe de x_0. La fonction nulle étant manifestement solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution maximale (I, y) qui n'est pas la fonction nulle ne prend jamais la valeur zéro sur I, ce que l'on supposera désormais. Alors, si l'on note ε_1 le signe (fixe) de x sur I et ε_2 le signe (fixe) de y sur I, et Y une primitive quelconque de y sur I, un raisonnement par conditions nécessaires donne

$$\begin{aligned}
(I, y) \text{ est solution de } (E) &\Longrightarrow \forall x \in I, \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = y(x) - \frac{2}{x} , \\
&\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad \ln(\varepsilon_2 y(x)) = Y(x) - 2\ln(\varepsilon_1 x) + \lambda , \\
&\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad \varepsilon_1 y(x) = e^\lambda \frac{e^{Y(x)}}{x^2} , \\
&\Longrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = \mu \frac{e^{Y(x)}}{x^2} , \quad (\text{on a posé } \mu = \varepsilon_1 e^\lambda), \\
&\Longrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \in I, \quad -Y'(x) e^{-Y(x)} = -\frac{\mu}{x^2} , \\
&\Longrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \exists \nu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad e^{-Y(x)} = \frac{\mu}{x} + \nu , \\
&\Longrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \exists \nu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad Y(x) = -\ln\left(\frac{\mu}{x} + \nu\right) , \\
&\Longrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \exists \nu \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = \frac{\mu/x^2}{\mu/x + \nu} , \\
&\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = \frac{1}{x + cx^2} , \quad (\text{on a posé } c = \nu/\mu).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si une fonction y définie sur un intervalle I a pour expression $y(x) = 1/(x + cx^2)$ où c est une constante réelle, on a $y'(x) = -(1 + 2cx)/(x + cx^2)$ et $y^2(x) - \frac{2}{x}y(x) = \frac{1}{(x+cx^2)^2} - \frac{2}{x(x+cx^2)} = \frac{1-2(1+cx)}{(x+cx^2)^2} = \frac{-1-2cx}{(x+cx^2)^2}$: on obtient la même chose, ce qui prouve que y est bien solution de (E) sur I.
Comme $x+cx^2 = x(1+cx)$ s'annule en zéro et, éventuellement, en $-1/c$, il existe six types de solutions maximales de (E) :

$$\begin{array}{lll}
c \geqslant 0, & I =]-\infty, 0[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,,\\
c \leqslant 0, & I =]0, +\infty[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,,\\
c > 0, & I = \left]-\infty, -\frac{1}{c}\right[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,,\\
c > 0, & I = \left]-\frac{1}{c}, 0\right[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,,\\
c < 0, & I = \left]0, -\frac{1}{c}\right[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,,\\
c < 0, & I = \left]-\frac{1}{c}, +\infty\right[\,, & y(x) = \frac{1}{x(1+cx)}\,.
\end{array}$$

Géométrie

275. **RMS 2007 559 Mines Ponts PSI**

Soient z, z', z'' trois nombres complexes. Montrer que leurs images sont alignées si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \overline{z} & \overline{z'} & \overline{z''} \end{vmatrix} = 0$.

Solution. — Si les nombres complexes ne sont pas deux à deux distincts, les images sont alignées et le déterminant, ayant au moins deux colonnes égales, est nul. On supposera dans la suite que z, z' et z'' sont deux à deux distincts. On note A, A' et A'' les images dans le plan $\mathbb{R}^2$ des nombres z, z', z''. En soustrayant la première colonne des deux autres, on montre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \overline{z} & \overline{z'} & \overline{z''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & z'-z & z''-z \\ \overline{z} & \overline{z'}-\overline{z} & \overline{z''}-\overline{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z'-z & z''-z \\ \overline{z'}-\overline{z} & \overline{z''}-\overline{z} \end{vmatrix} = \alpha'\overline{\alpha''} - \overline{\alpha'}\alpha''\,,$$

où l'on a posé $\alpha' = z - z'$ et $\alpha'' = z - z''$. Puisqu'on a supposé $\alpha'' \neq 0$, on dispose des équivalences suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z' & z'' \\ \overline{z} & \overline{z'} & \overline{z''} \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha'\overline{\alpha''} = \overline{\alpha'\overline{\alpha''}} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \alpha'\overline{\alpha''} = \lambda \iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \alpha' = \frac{\lambda}{\overline{\alpha''}} = \frac{\lambda}{|\alpha''|^2}\alpha''\,,$$

$$\iff \exists k\in\mathbb{R},\quad \alpha' = k\alpha'' \iff \exists k\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AA''}$$

Compte-tenu de ce que A, A', A'' sont distincts, cette dernière condition est équivalente à l'alignement de ces trois points.

276. **RMS 2007 560 Mines Ponts PSI**

Soit u un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire et de l'orientation usuels.

(a) Préciser la forme de la matrice de u dans la base canonique.
(b) Montrer qu'il existe un unique vecteur $\omega \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = \omega \wedge x$ pour tout x.
(c) Justifier la convergence de $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.
(d) Montrer que $\exp u$ est une rotation, dont on précisera l'axe et l'angle.

Solution. —

(a) La base canonique étant orthonormale, la matrice A de u dans cette base est antisymétrique, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ (les composantes sont exprimées dans la base canonique), soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $v(x) = \omega \wedge x$, et B la matrice de v dans la base canonique. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$v(x) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité de deux endomorphismes étant équivalente à l'égalité de leurs matrices dans la base canonique, il existe un unique vecteur $\omega \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = \omega \wedge x$ pour tout x : c'est le vecteur $\omega = (-c, b, -a)$.

(c) C'est du cours : l'algèbre $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3), +, \cdot, \circ)$ étant de dimension finie, elle est complète pour n'importe quelle norme. Comme la série de terme général $u^n/n!$ est absolument convergente, elle est convergente.

(d) Si $\omega = 0$, alors $u = 0$ et $\exp u = \mathrm{id}$. On écarte désormais ce cas.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe telle que $e_1 = \omega/\|\omega\|$. Dans $\mathcal{B}$, la matrice de u vaut

$$M = \|\omega\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \|\omega\| \operatorname{diag}(0, J) \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $J^2 = -I_2$, on en déduit que $J^{2k} = (-1)^k I_2$ et $J^{2k+1} = (-1)^k J$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite, la matrice de $\exp u$ dans $\mathcal{B}$ vaut

$$\begin{aligned}
\exp(M) &= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right], \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k+1}}{(2k+1)!} & 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\|\omega\|^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\|\omega\|) & -\sin(\|\omega\|) \\ 0 & \sin(\|\omega\|) & \cos(\|\omega\|) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On reconnaît que $\exp u$ est la rotation d'axe dirigé par ω et d'angle $\|\omega\|$.

277. **RMS 2007 561 Mines Ponts PSI**

Déterminer les extrema éventuels de la norme euclidienne sur l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

Solution. — Si $n = 1$, l'ensemble en question est le point $\{1\}$ dans $\mathbb{R}$, et la norme euclidienne y est constante et vaut 1. On suppose désormais que $n \geqslant 2$. L'ensemble H en question est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$. Il contient des points tels que $\|\overrightarrow{OM}\|$ est arbitrairement grande, comme $(x, 1-x, 0, \dots, 0)$, pour x parcourant $\mathbb{R}$. Par conséquent, la norme euclidienne n'a pas de maximum sur H.

Soit M_0 le projeté orthogonal de l'origine sur H. Le théorème de Pythagore montre que

$$\forall M \in H, \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_0}\|^2 + \|\overrightarrow{M_0M}\|^2.$$

On en déduit que $\|\overrightarrow{OM}\| \geqslant \|\overrightarrow{OM_0}\|$ avec égalité si et seulement si $M = M_0$, donc la norme euclidienne est minimale sur H en M_0, et en M_0 seulement. Comme $M_0 = (1/n, \dots, 1/n)$ — c'est l'intersection de la droite $H^\perp$ engendrée par $(1, \dots, 1)$ avec H —, on en déduit que

$$\min_{M \in H} \|\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mines Ponts PC

Algèbre

278. **RMS 2009 690 Mines Ponts PC**
Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}$.

Solution. — On pose $S_0=\sum_{k\geqslant 0,\,3k\leqslant n}\binom{n}{3k}$, $S_1=\sum_{k\geqslant 0,\,3k+1\leqslant n}\binom{n}{3k+1}$ et $S_2=\sum_{k\geqslant 0,\,3k+2\leqslant n}\binom{n}{3k+2}$. On note j la racine cubique de l'unité $\exp(2i\pi/3)$. En distinguant, dans chaque somme donnée par la formule du binôme de Newton, les termes dont les indices sont congrus à zéro, 1 ou 2 modulo 3, on obtient

$$\begin{aligned}(1+1)^n&=S_0+S_1+S_2\,,\\(j+1)^n&=S_0+jS_1+j^2S_2\,,\\(j^2+1)^n&=S_0+j^2S_1+jS_2\end{aligned}$$

En tenant compte des relations $1+j+j^2=0$, $1+j=\exp(i\pi/3)$ et $1+j^2=\exp(-i\pi/3)$, la somme des trois lignes ci-dessus donne $(1+1)^n+(j+1)^n+(j^2+1)^n=3S_0$, ou encore

$$S_0=\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}=\frac13\left[2^n+e^{in\pi/3}+e^{-in\pi/3}\right]=\frac13\left[2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]=\begin{cases}\frac13\,[2^n+2] & \text{si } n\equiv 0 \mod 6,\\ \frac13\,[2^n+1] & \text{si } n\equiv 1 \text{ ou } 5 \mod 6,\\ \frac13\,[2^n-1] & \text{si } n\equiv 2 \text{ ou } 4 \mod 6,\\ \frac13\,[2^n-2] & \text{si } n\equiv 3 \mod 6.\end{cases}$$

279. **RMS 2010 606 Mines Ponts PC**
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X)=XP(X+1)$.

Solution. — La solution est due à Alain Walbron.

Le polynôme nul est solution. On écarte désormais ce cas.

Analyse. Pour une solution non nulle P, on a :

$$P(0)=P(-1)=P(-2)=P(-3)=0\,,$$

donc il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=X(X+1)(X+2)(X+3)Q$.

Synthèse. Ensuite la propriété demande que :

$$X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X)=X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)\,,$$

soit que $Q(X)=Q(X+1)$ ce qui équivaut à $Q=$ constante (le polynôme $Q-Q(0)$ admet une infinité de racines).

Conclusion. Les solutions sont les polynômes de la forme $P=\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

280. **RMS 2009 691 Mines Ponts PC**
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^3$ divise $P(X)-1$.

Solution. — On donne deux solutions, dues à Alain Walbron et Anatole Castella.

Première solution. Elle utilise l'arithmétique des polynômes.

Analyse. Si une solution P existe dans $\mathbb{R}_5[X]$, alors il existe nécessairement U et V dans $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(X)=-1+2(X-1)^3U(X)=1+2(X+1)^3V(X)$. Par différence, on a :

$$(X-1)^3U(X)-(X+1)^3V(X)=1\quad\text{avec}\quad\deg U\leqslant 2\quad\text{et}\deg V\leqslant 2.$$

Synthèse. Réciproquement, $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ étant premiers entre eux, les théorèmes de Bézout et de Gauss *et la condition de degré* donnent (de façon classique) l'existence et l'unicité d'un couple (U,V) satisfaisant l'égalité et les conditions de degré ci-dessus.

Le polynôme $P=-1+2(X-1)^3U(X)$ est alors l'unique solution du problème envisagé.

Calculs. En remontant l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD de $(X-1)^3$ et $(X+1)^3$ on obtient :

$$U=-\frac{1}{16}(3X^2+9X+8)\quad\text{et}\quad V=-\frac{1}{16}(3X^2-9X+8)\,,$$

de sorte que l'unique solution est :

$$P=-1-\frac{1}{8}(3X^2+9X+8)(X-1)^3\,.$$

Deuxième solution. Si $(X-1)^3|(P+1)$ et $(X+1)^3|(P-1)$, alors $(X-1)^2|P'$ et $(X+1)^2|P'$. Comme $\deg(P')\leqslant 4$, on a nécessairement $P'=\lambda(X-1)^2(X+1)^2$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$. D'où, en développant et intégrant, $P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{2}{3}X^3+X)+\mu$ pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Le système

$$\begin{cases}P(1)=\frac{8}{15}\lambda+\mu=-1,\\ P(-1)=-\frac{8}{15}\lambda+\mu=1\end{cases}$$

donne alors $(\lambda,\mu)=(-\frac{15}{8},0)$ et donc $P=-\frac{1}{8}(3X^5-10X^3+15X)$. Ce polynôme P convient bien, car le choix de (λ,μ) montre que $(X-1)$ divise $P+1$ et $X+1$ divise $P-1$, et la forme de P' montre que $(X-1)^2$ divise $(P+1)'=P'$ et $(X+1)^2$ divise $(P-1)'=P'$. Par suite, $(X-1)^3$ divise $P+1$ et $(X+1)^3$ divise $P-1$.

Usage du calcul formel. Comme $(X-a)^m$ divise P si et seulement si $P(a)=P'(a)=\cdots=P^{(m-1)}(a)=0$, les conditions sur $P=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$ sont équivalentes au système

$$\begin{cases}a+b+c+d+e+f&=&1\,,\\ -a+b-c+d-e+f&=&-1\,,\\ 5a+4b+3c+2d+e&=&0\,,\\ 5a-4b+3c-2d+e&=&0\,,\\ 20a+12b+6c+2d&=&0\,,\\ 20a-12b+6c-2d&=&0\,.\end{cases}$$

On obtient une solution unique avec Maple :

$$P=\frac{1}{8}(-3X^5+10X^3-15X),\quad P(X)+1=-\frac{1}{8}(X-1)^3(3X^2+9X+8),\quad P(X)-1=-\frac{1}{8}(X+1)^3(3X^2-9X+8).$$

Voici le code en Maple :

```
P:=x->a*x**5+b*x**4+c*x**3+d*x**2+e*x+f;
eq1:=P(1)+1=0;eq2:=P(-1)-1=0;eq3:=D(P)(1)=0;eq4:=D(P)(-1)=0;eq5:=(D@D)(P)(1)=0;eq6:=(D@D)(P)(-1)=0;
sols:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6},{a,b,c,d,e,f});
assign(sols):P(x);factor(P(x)+1);factor(P(x)-1);
```

281. **RMS 2009 692 Mines Ponts PC**

Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels >0 deux à deux distincts. Soit $f_k\colon x\in\mathbb{R}\mapsto 1/(x^2+a_k^2)$. La famille $(f_1,\dots,f_n)$ est-elle libre ?

Solution. — La réponse est oui. On donne deux méthodes (la première est due à Alain Walbron).

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n\lambda_kf_k=0$. On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_k}{x^2+a_k^2}=0\,.$$

Si on pose $P_k=\prod_{\ell=1,\,\ell\neq k}^n(X^2+a_\ell^2)$ pour $k\in\{1,\dots,n\}$, la condition ci-dessus s'écrit

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\sum_{k=1}^n\lambda_kP_k(x)=0\,,$$

et le polynôme formel $\sum_{k=1}^n\lambda_kP_k\in\mathbb{R}[X]$ est nul (il possède une infinité de racines). Ainsi, ses valeurs sur nombres complexes sont également nulles. En évaluant l'égalité ci-dessus en ia_j (où $i^2=-1$) pour $j\in\{1,\dots,n\}$, on obtient

$$\lambda_jP_j(ia_j)=0\,,$$

puisque $P_k(ia_j)=0$ si j est différent de k. De plus, $P_j(ia_j)=\prod_{\ell=,\,\ell\neq j}^n(-a_j^2+a_\ell^2)\neq 0$, puisque les a_k sont distincts et >0, donc leurs carrés sont également distincts. Par suite, $\lambda_j=0$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$.

Voici une autre méthode. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n\lambda_kf_k=0$. On note F_k la fraction rationnelle $1/(X^2+a_k^2)$ de $\mathbb{C}(X)$ associé à f_k, et on pose $F=\sum_{k=1}^n\lambda_kF_k$, de sorte que l'hypothèse est que $\forall x\in\mathbb{R}\,,F(x)=0$. Or une fraction rationnelle ayant une infinité de racines est nulle [en tant qu'élément de $\mathbb{C}(X)$]. En décomposant F_i en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on obtient l'identité suivante dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\sum_{k=1}^n\left[\frac{\lambda_k/2ia_k}{X-ia_k}-\frac{\lambda_k/2ia_k}{X+ia_k}\right]=0\,.$$

Si $\lambda_k \neq 0$, comme les a_k sont deux à deux distincts et positifs, un seul terme dans la somme ci-dessus contient le pôle ia_k, donc ia_k est effectivement un pôle de la fraction rationnelle qui figure dans le membre de gauche, alors qu'il n'est pas un pôle du membre de droite : c'est impossible. Il faut donc que $\lambda_k = 0$, ceci pour tout k.

282. **RMS 2009 693 Mines Ponts PC**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer M^{10}.

Solution. — On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1. Alors $M = (a-b)I_n + bJ$. On constate ensuite que I_n et J commutent, et que $J^2 = nJ$, donc que $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \geqslant 1$, par une récurrence immédiate. Il s'ensuit que

$$M^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} b^k J^k (a-b)^{n-k} = (a-b)^{10} I_n + \left(\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} n^{k-1} b^k (a-b)^{n-k}\right) J = (a-b)^{10} I_n + \frac{1}{n}\left[(nb+a-b)^{10} - 1\right] J\,.$$

283. **RMS 2009 694 Mines Ponts PC**

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver BA.

Solution. — On donne deux solutions, la première étant due à Alain Walbron.

Première solution. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

- $\{ABe_2, ABe_3\}$ est libre dans $\mathbb{K}^3$ donc $\mathcal{B} = \{Be_2, Be_3\}$ est libre dans $\mathbb{K}^2$ et c'en est une base.
- On voit que rg $A = 2$ donc A est injective.
- Par ailleurs AB est un projecteur donc $ABABe_i = ABe_i$ pour $i = 2, 3$ et comme A est injective $(BA)Be_i = Be_i$ pour $i = 2, 3$. Enfin, comme $\mathcal{B} = \{Be_2, Be_3\}$ est une base, on en déduit $BA = I_2$.

Deuxième solution. On note que AB est une matrice de projecteur, c'est-à-dire que $(AB)^2 = AB$. On en déduit un renseignement sur le rang de BA, puis sa valeur, comme suit.

– Comme le rang d'un produit de matrices est inférieur au minimum des rangs des matrices en question, on a

$$2 = \mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(AB)^2 = \mathrm{rg}[A(BA)B] \leqslant \mathrm{rg}(BA)\,.$$

Comme BA est carrée d'ordre 2, ceci montre que $\mathrm{rg}(BA) = 2$, ou encore que $BA \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

– En transposant le membre de droite de $(AB)^2 = AB$ dans celui de gauche, on obtient $A(BA - I_2)B = 0$, puis $BA(BA - I_2)BA = 0$ en multipliant à gauche par B et à droite par A. Comme BA est inversible, on peut simplifier pour obtenir

$$BA = I_2\,.$$

284. **RMS 2009 695 Mines Ponts PC**

On considère A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Solution. — On va montrer que $(AB - BA)^2 = 0$, en utilisant le lemme suivant : si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est un endomorphisme de rang 1, alors $u^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,u = 0$. Il suffira d'appliquer ce résultat à l'endomorphisme u canoniquement associé à $AB - BA$: cet endomorphisme est bien de rang 1 — par hypothèse —, et de trace nulle — puisque $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n.

Voici la preuve du lemme. Si $\mathrm{rg}(u) = 1$, alors $\dim(\mathrm{Ker}\,u) = n - 1$ par la formule du rang. Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\,u$, complétée par un vecteur e_1 pour obtenir une base de $\mathbb{K}^n$, notée $\mathcal{B}$. La droite $\mathrm{Im}\,u$ est alors engendrée par le vecteur (non nul) $u(e_1)$. Sur cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{tr}\,u = m_{1,1}$, on dispose des équivalences suivantes :

$$\mathrm{tr}\,u = 0 \iff u(e_1) \in \mathrm{Ker}\,u \iff \mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u \iff u^2 = 0\,.$$

285. **RMS 2009 696 Mines Ponts PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace de E de dimension p et G un sous-espace de E de dimension q. Soit $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset G\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Calculer sa dimension.

Solution. — L'ensemble $\mathcal{E}$ contient l'endomorphisme nul ; si u et v sont deux éléments de $\mathcal{E}$, si λ et μ sont deux scalaires, alors

$$\forall x \in F, \quad (\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) \in G\,,$$

puisque $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à G par hypothèse sur u et v, et puisque G est un sous-espace vectoriel. Ceci montre que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Soit ensuite F' un sous-espace vectoriel supplémentaire de F. On considère l'application

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(F',E) \\ & & u & \mapsto & \left(u_{/F}^{\backslash G}, u_{/F'}\right)\,, \end{array}$$

où $u_{/F}^{\backslash G}$ désigne l'application u restreinte à F et corestreinte à G, ce qui est possible puisque $u(F) \subset G$ pour tout $u \in \mathcal{E}$. L'application φ est manifestement linéaire, et elle est bijective car on sait qu'un endomorphisme u de E est uniquement déterminé par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires (en l'occurrence, F et F') : c'est donc un isomorphisme. On en déduit que

$$\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(F',E) = \dim \mathcal{L}(F,G) + \dim \mathcal{L}(F',E) = (\dim F)(\dim G) + (\dim F')(\dim E) = pq + (n-p)n\,.$$

286. **RMS 2009 697 Mines Ponts PC**

Soit $p \geqslant 2$. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$?

Solution. — La solution est due à Alain Walbron.

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^p = J$. Comme $J^n = 0$, on a $M^{np} = 0$ et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$, de sorte que la trigonalisation de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit

$$P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \cdots & \cdots & t_{n,n} \\ 0 & 0 & t_{2,3} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,.$$

Mais alors

$$P^{-1}M^2P = T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t'_{1,3} & \cdots & t'_{n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t'_{n-2,n} \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme P est inversible on a $\dim \operatorname{Ker} M^2 = \dim \operatorname{Ker} T^2 \geqslant 2$ et la contradiction est que

$$1 = \dim(\operatorname{Ker} J) = \dim(\operatorname{Ker} M^p) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} M^2) \geqslant 2\,.$$

287. **RMS 2009 698 Mines Ponts PC**

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$. On pose $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Déterminer $\det(e_1 + b_1 a, \dots, e_n + b_n a)$, où $\det$ désigne le déterminant dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Solution. — Le déterminant étant multilinéaire, le nombre cherché se développe sous la forme d'une somme de 2^n termes du type $\det(c_1, \dots, c_n)$, où c_i vaut e_i ou bien $b_i a$. Comme le déterminant est de plus alterné, un tel terme est nul dès qu'il existe deux indices $i \neq j$ avec $c_i = b_i a$ et $c_j = b_j a$. Dans la somme en question, il ne reste donc que le terme ne contenant aucune fois a, et les n termes contenant une seule fois a :

$$\begin{aligned}\det(e_1 + b_1 a, \ldots, e_n + b_n a) &= \det(e_1, \ldots, e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, b_i a, e_{i+1}, \ldots, e_n)\,, \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \det(e_1, \ldots, e_{i-1}, a, e_{i+1}, \ldots, e_n)\,.\end{aligned}$$

En écrivant que $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, et en utilisant de nouveau la multilinéarité et l'alternance du déterminant, ainsi que la condition de normalisation $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$, on obtient finalement

$$\det(e_1 + b_1 a, \ldots, e_n + b_n a) = 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i\,.$$

288. **RMS 2009 699 Mines Ponts PC**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$ et B soit nilpotente d'indice r. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Solution. — La solution est due à Alain Walbron.

On remarque déjà que, si une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\det(I_n + N) = 1$ (trigonaliser N).

Ensuite, on discute deux cas

Premier cas : A est inversible. Il vient $\det(A + B) = \det(A[I_n + A^{-1}B]) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}B)$. Or A^{-1} commute aussi avec B car $AB = BA \Leftrightarrow B = A^{-1}BA \Leftrightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$. On en déduit que $N = A^{-1}B$ est nilpotente d'indice r puisque $N^r = (A^{-1})^r B^r = 0$. Par la remarque initiale, il vient $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$, et on a bien $\det(A+B) = \det(A)$.

Deuxième cas : A n'est pas inversible. Les matrices $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$ sont inversibles pour k assez grand et commutent avec B. Pour un certain entier k_0, on a donc $\forall k \geqslant k_0\,, \det(A_k + B) = \det(A_k)$. L'application det étant continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on passe à la limite dans ce qui précède, et on obtient

$$\det(A + B) = \det(A)\,.$$

Remarque. — On peut aussi traiter le deuxième cas sans la densité. Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement. Comme $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ et comme f et g commutent, $\operatorname{Ker} f$ est stable par g. Si $\widetilde{g}$ désigne l'endomorphisme induit par g sur $\operatorname{Ker} f$, on a $\widetilde{g}^{\,r} = 0$, donc $\operatorname{Ker} \widetilde{g} \neq \{0\}$.

Ainsi, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq \{0\}$, donc $\operatorname{Ker}(f + g) \neq \{0\}$. Alors $\det(f + g) = 0 = \det f$.

289. **RMS 2009 700 Mines Ponts PC**

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale ayant comme coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$. Combien y a-t-il de matrices M qui commutent avec D et qui sont semblables à D ?

Solution. — La réponse est $n!$.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à D. On recherche les endomorphismes v de $\mathbb{R}^n$ commutant à u et semblables à u.

Analyse. Soit v un tel endomorphisme. Comme les droites engendrées par les e_i sont stables par u et que v commute avec u, ces droites sont aussi stables par v, c'est-à-dire que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}\,, v(e_i) = \lambda_i e_i$. On en déduit que le spectre de v est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Comme par ailleurs v est semblable à u, les spectres de ces deux endomorphismes sont égaux, donc $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Une matrice M commutant à D et semblable à D est donc nécessairement diagonale et comporte les nombres $1, \ldots, n$ dans sa diagonale. Il y a $n!$ telles matrices.

Synthèse. Il est immédiat de vérifier que les $n!$ matrices $\operatorname{diag}(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, conviennent.

290. **RMS 2009 701 Mines Ponts PC**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $n + 1$ complexes r tels que $A + rB$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Solution. — La solution est due à Alain Walbron.

Soient $r_1, \ldots, r_{n+1}$ des complexes distincts tels que $N_k = A + r_k B$ est nilpotente, pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Un exercice classique prouve que $N_k^n = 0$.

- Dans un premier temps, on suppose que A et B commutent, et on donne une solution purement algébrique. En développant les égalités $(A + r_k B)^n = 0$ par la formule du binôme, on obtient le système de $n + 1$ relations matricielles :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n + 1\}, \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} r_k^p A^{n-p} B^p = 0\,,$$

ce qui s'écrit formellement

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1}r_1 & \binom{n}{2}r_1^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_1^n \\ 1 & \binom{n}{1}r_2 & \binom{n}{2}r_2^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_2^n \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & \binom{n}{1}r_{n+1} & \binom{n}{2}r_{n+1}^2 & \cdots & \binom{n}{n}r_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1}B \\ \vdots \\ \\ AB^{n-1} \\ B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice M de ce système a pour déterminant $\det M = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}V(r_1,\dots,r_n,r_{n+1})$, où le déterminant de Vandermonde $V(r_1,\dots,r_n,r_{n+1})$ est non nul car les r_k sont distincts (autre exercice classique, n'exigeant pas d'ailleurs la précision de la formule exacte). On multiplie alors à gauche par M^{-1} et il vient

$$\begin{pmatrix} A^n \\ A^{n-1}B \\ \vdots \\ \\ AB^{n-1} \\ B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne en particulier $A^n = B^n = 0$.
Remarque. — Pour ceux que ce calcul formel gêne, on écrit que l'on a les relations (L_k), pour $k \in \{1,\dots,n+1\}$:

$$\sum_{p=1}^{n+1} m_{k,p}A^{n+1-p}B^{p-1} = 0\,.$$

On remarque que $M = (m_{k,p})$ est inversible dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, et on note $(m'_{k,p})$ son inverse. La combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k}L_k$ des lignes du système ci-dessus donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k}\left(\sum_{p=1}^{n+1} m_{k,p}A^{n+1-p}B^{p-1}\right) = 0\,,$$

soit $\sum_{p=1}^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} m'_{1,k}m_{k,p}\right)A^{n+1-p}B^{p-1} = 0$. Comme $M^{-1}M = I_n$, on en déduit que $A^n = 0$.
De manière similaire on obtient $B^n = 0$.

– Dans un deuxième temps, on donne une solution analytique pour le cas général, où les matrices A et B ne sont pas supposées commuter. On part du système de $n+1$ relations matricielles :

$$\forall k \in \{1,\dots,n+1\} \quad (A + r_kB)^n = 0\,.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, écrivons la matrice $(A+zB)^k$ sous la forme $(P_{k,i,j}(z))_{i,j}$. On prouve aisément par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, la fonction $z \mapsto P_{k,i,j}(z)$ est polynomiale en z de degré $\leqslant k$. En particulier, l'égalité $(A+zB)^n = (P_{n,i,j}(z))_{i,j}$ et l'hypothèse donnent, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ fixé :

$$\forall k \in \{1,\dots,n+1\}, \quad P_{n,i,j}(r_k) = 0\,.$$

  Le polynôme $P_{n,i,j}$ est de degré $\leqslant n$ et admet au moins $n+1$ racines distinctes $r_1,\dots,r_{n+1}$: il est nul. Cela étant vérifié pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, il vient : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(A+zB)^n = 0$.
- Pour $z = 0$, on obtient $A^n = 0$. En divisant par $z \neq 0$, et en faisant tendre z vers $+\infty$, il vient $B^n = 0$.

291. **RMS 2009 702 Mines Ponts PC**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Solution. — On donne deux solutions.

(a) Solution analytique. On utilise la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: voir pour cela l'exercice 91 page 133.

(b) Solution algébrique. On constate les identités matricielles par blocs suivantes, d'ordre $2n$:

$$\begin{pmatrix} -XI_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - XI_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -XI_n & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & -XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -XI_n & 0 \\ -B & XI_n - BA \end{pmatrix}$$

Si l'on note M la matrice de gauche dans les deux égalités, on obtient, en prenant le déterminant :

$$\det(M) = \chi_{AB} ,$$
$$\det(M)(-X)^n = (-X)^n \chi_{BA} .$$

On en déduit l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

292. **RMS 2009 703 Mines Ponts PC**

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Solution. — La réponse est oui, et voici un exemple : $(E_{i,i} + E_{j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cette famille comportant n^2 matrices, il suffit de vérifier qu'elle est libre et que tous ses éléments sont diagonalisables.

– Elle est libre. Si $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_{i,j}(E_{i,i} + E_{j,i}) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} 2\lambda_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \lambda_{i,j}(E_{i,i} + E_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n}\left(2\lambda_{i,i} + \sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}\right)E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \lambda_{i,j}E_{j,i} = 0 .$$

La famille des matrices élémentaires étant libre, on en déduit d'abord que $\lambda_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, puis que $2\lambda_{i,i}+\sum_{j\neq i}\lambda_{i,j} = 2\lambda_{i,i} = 0$, ce qui achève la preuve.

– Ses éléments sont diagonalisables. C'est clair pour $E_{i,i} + E_{i,i} = 2E_{i,i}$ qui est diagonale. Si $i \neq j$, on calcule aisément $\chi_{E_{i,i}+E_{j,j}} = X^{n-1}(X-1)$. Comme $n-1$ colonnes de la matrice $E_{i,i} + E_{j,i}$ sont nulles, le noyau possède la dimension maximale $n-1$. L'autre valeur propre étant simple, on a bien montré que le polynôme caractéristique est scindé et que les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité des valeurs propres.

293. **RMS 2009 704 Mines Ponts PC**

Déterminer les éléments propres de $(\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Solution. — Pour $n \geqslant 2$, on note A_n la matrice étudiée. On a donc

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n+3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que A_n est symétrique réelle, donc qu'elle est orthodiagonalisable. De plus, ses colonnes $C_2, \ldots, C_n$ étant égales et non colinéaires à C_1, elle est de rang 2, donc zéro est valeur propre d'ordre $n-2$ et

$$E_0(A_n) = \mathrm{Vect}(E_1 - E_k, 2 \leqslant k \leqslant n-1) .$$

Il reste deux valeurs propres à découvrir, notées λ et μ. Comme A_n est diagonalisable, on a le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 0 + \cdots + 0 &= \operatorname{tr} A_n &= 2 , \\ \lambda^2 + \mu^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 &= \operatorname{tr}(A_n^2) &= 2n+2 . \end{cases}$$

On obtient alors $\lambda = 1 + \sqrt{n}$ et $\mu = 1 - \sqrt{n}$ (ou l'inverse), donc

$$\mathrm{Sp}(A_n) = \left\{0, 1+\sqrt{n}, 1-\sqrt{n}\right\} .$$

On cherche ensuite les deux droites propres $E_{1+\sqrt{n}}(A_n)$ et $E_{1-\sqrt{n}}(A_n)$:

$$A_nX = (1 \pm \sqrt{n})X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad x_n &= (1 \pm \sqrt{n})x_k , \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + 2x_n &= (1 \pm \sqrt{n})x_n . \end{cases}$$

On vérifie aisément que les valeurs $x_k = 1$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $x_n = 1 \pm \sqrt{n}$ donnent une solution non nulle de ce système, ce qui suffit :

$$E_{1\pm\sqrt{n}}(A_n) = \mathrm{Vect}\left({}^t\big(1, \ldots, 1, 1 \pm \sqrt{n}\big)\right) .$$

294. **RMS 2009 705 Mines Ponts PC**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

(a) Montrer que A est inversible.

(b) Soient $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de B. Montrer qu'il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|b_{i,i}-\lambda| \leqslant \sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$.

Solution. — Une matrice A vérifiant l'hypothèse de départ est dite *à diagonale strictement dominante*.

(a) On raisonne par contraposition. Si A n'est pas inversible, il existe $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$. Soit i un indice tel que $|x_i| = \max(|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$: comme X est non nul, il en n'est de même de x_i. La i-ème ligne de l'égalité $AX = 0$ s'écrit $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0$. En transposant le terme numéro i et en divisant par le nombre non nul x_i, on obtient $a_{i,i} = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}\frac{x_j}{x_i}$. L'inégalité triangulaire et le choix de l'indice i montrent alors que

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,,$$

ce qui achève le raisonnement par contraposition.

(b) Comme $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible, elle ne peut pas être à diagonale strictement dominante d'après la question (a).

295. **RMS 2009 706 Mines Ponts PC**

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension $2p$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(e_1,\dots,e_p,f(e_1),\dots,f(e_p))$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :
(i) $M^2 = -I_n$;
(ii) n est pair et M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) On raisonne en deux temps.
Étape 1. Si $x \in E$ est non nul, alors la famille $(x, f(x))$ est libre et le plan $P_x = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
Comme $x \neq 0$, il suffit de montrer que $f(x)$ n'est pas proportionnel à x, donc que x n'est pas un vecteur propre de f. Or f n'a pas de valeurs propres réelles (elles devraient être parmi les racines réelles de X^2+1, qui est un polynôme annulateur de f). Il n'a donc pas non plus de vecteurs propres. Ensuite, P_x est bien un plan, et sa stabilité par f résulte de ce que $f(x)$ et $f(f(x)) = -x$ sont dans P_x.

Étape 2. Pour tout $r \in [\![1,p]\!]$, il existe $e_1,\dots e_r$ dans E tels que les plans $P_{e_1},\dots,P_{e_r}$ soient en somme directe.
On raisonne par récurrence sur r. Pour $r = 1$, seule l'existence d'un plan P_{e_1} est à démontrer : appliquer l'étape 1 à un vecteur non nul e_1 de G. On suppose que $r \leqslant p-1$, et qu'il existe des vecteurs $e_1,\dots e_r$ dans E tels que les plans $P_{e_1},\dots,P_{e_r}$ soient en somme directe. Alors $\dim(P_{e_1}\oplus\cdots\oplus P_{e_r}) = 2r < \dim(E)$, et il existe un vecteur e_{r+1} non nul de E qui n'appartient pas à $F := P_{e_1}\oplus\cdots\oplus P_{e_r}$. Il suffit de montrer que F et $P_{e_{r+1}}$ sont en somme directe. Pour cela, soit $x \in F \cap P_{e_{r+1}}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = ae_{r+1} + bf(e_{r+1})$ et $x \in F$. Chacun des plans P_{e_i} étant stable par f, il en est de même de leur somme F, donc $f(x) = af(e_{r+1}) - be_{r+1} \in F$. Par suite,

$$ax - bf(x) = (a^2+b^2)e_{r+1} \in F\,.$$

Il faut donc que $a^2+b^2 = 0$, sinon $e_{r+1} = \frac{1}{a^2+b^2}(ax - bf(x))$ serait dans F, ce qui est contraire au choix de ce vecteur. Par suite, $a = b = 0$, ce qui termine l'étape 2.

On est donc assuré de l'existence de $e_1,\dots,e_p$ dans E tels que $E = P_{e_1}\oplus\cdots\oplus P_{e_p}$. La famille $(e_1, f(e_1),\dots,e_n,f(e_n))$ est alors une base de E, puisqu'elle est obtenue en mettant bout à bout des bases d'une décomposition de E en somme directe. En permutant les vecteurs, on obtient la base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p,f(e_1),\dots,f(e_p))$ souhaitée.

(b) L'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i) est immédiate. On détaille seulement le sens direct (i) $\Rightarrow$ (ii). En appliquant le déterminant à l'égalité $M^2 = -I_n$, on obtient $\det(M)^2 = (-1)^n$, ce qui prouve que n est pair, ce que l'on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On appelle ensuite f l'endomorphisme canoniquement associé à M. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de la question (a) étant

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix},$$

l'exercice est terminé.

296. **RMS 2009 707 Mines Ponts PC**

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr} M = n$.

Solution. — On va montrer que la matrice I_n convient et que c'est la seule.

Analyse. Le polynôme $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ étant annulateur de M, on en déduit que le spectre de M est contenu dans $\{0, 1, j, \bar{j}\}$. Si m_0, m_1, m_j et $m_{\bar{j}}$ désignent les multiplicités de ces quatre nombres (avec la convention que $m_\lambda = 0$ si λ n'est pas valeur propre de M), on doit avoir

$$n = \operatorname{tr} M = 0 \times m_0 + 1 \times m_1 + j \times m_j + \bar{j} m_{\bar{j}} = m_1 + j m_j + \bar{j} m_{\bar{j}} = m_1 - \frac{1}{2}(m_j + m_{\bar{j}}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(m_j - m_{\bar{j}}) .$$

Comme la partie imaginaire du nombre ci-dessus doit être nulle, il faut que $m_j = m_{\bar{j}}$. Alors $n = m_1 - m_j$, où m_1 et m_j sont des nombres entiers naturels $\leqslant n$. La seule possibilité est que $m_1 = n$ et $m_j = 0$. Dans ce cas, $m_0 = 0$ aussi (la somme des multiplicités valant n), donc M est inversible, donc on peut simplifier par M^2 l'hypothèse de départ pour obtenir $M^3 = I_3$. Alors M possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, qui est $X^3 - 1$, donc elle est diagonalisable. Comme elle n'admet que 1 comme valeur propre, elle vaut nécessairement I_n.

Synthèse. La matrice I_n convient évidemment.

297. **RMS 2009 708 Mines Ponts PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que le rang de A est pair.

Solution. — La première est due à Alain Walbron.

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. La relation $A^3 - A^2 + 2A = 0$ donne aisément que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc l'endomorphisme g induit par f sur le sous-espace vectoriel stable $\operatorname{Im} f$ n'a pas la valeur propre zéro.
  Si $r = \dim \operatorname{Im} f$ était impaire, le polynôme caractéristique de g (à coefficients réels) de degré r, impair, aurait au moins une racine réelle λ non nulle (par ce qui précède).
  Le nombre λ serait alors une valeur propre réelle de f, donc serait racine du polynôme annulateur de f :
  $$P = X^3 - X^2 + 2X = X(X^2 - X + 2) .$$
  Or la seule racine réelle de P est zéro. C'est impossible.
- Le polynôme $X^3 - X^2 + 2X = X(X^2 - X + 2)$ est annulateur de A. Comme $X^2 - X + 2$ est sans racines réelles, l'unique valeur propre réelle possible de A est zéro, et A possède éventuellement des valeurs propres complexes non réelles conjuguées $\lambda = (1 + i\sqrt{7})/2$ et $\bar{\lambda}$. On note m_0, m_λ et $m_{\bar{\lambda}}$ leurs multiplicités respectives (qui valent éventuellement zéro si le nombre en question n'est pas valeur propre de A).
  Comme $X^3 - X^2 + 2X$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et en particulier $m_0 = \dim(\operatorname{Ker} A)$, donc
  $$\operatorname{rg} A = n - \dim(\operatorname{Ker} A) = n - m_0 = m_\lambda + m_{\bar{\lambda}} .$$
  Il suffit alors de démontrer que $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$ pour établir que le rang de A est pair. On obtient ce résultat en évaluant la trace de A
  $$\operatorname{tr} A = m_0 \times 0 + m_\lambda \times \lambda + m_{\bar{\lambda}} \times \bar{\lambda} = (m_\lambda + m_{\bar{\lambda}}) \operatorname{Re}(\lambda) + i(m_\lambda - m_{\bar{\lambda}}) \operatorname{Im}(\lambda) .$$
  Comme A est à coefficients réels, sa trace est réelle, donc il faut que $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$.

298. **RMS 2009 709 Mines Ponts PC**

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $\Phi : P \in E \mapsto (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi$ et $\operatorname{Im} \Phi$.

(c) Déterminer les éléments propres de Φ.

Solution. —

(a) Le degré de $\Phi(P)$ est au plus 2 pour tout $P \in E$. Comme $n \geqslant 2$, cela prouve que l'image de Φ est incluse dans E. La linéarité est évidente. Par suite, Φ est un endomorphisme de E.

(b) Soit $P \in E$. L'équation $\Phi(P) = 0$ équivaut à $X^2[P(1) + P(-1)] + X[P(-1) - P(1)] = 0$ ou encore à $P(1) = P(-1) = 0$, donc
$$\operatorname{Ker} \Phi = \{P \in E, \quad P(1) = P(-1) = 0\} = \left\{(X^2 - 1)Q, \quad Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\right\} .$$
L'expression de Φ montre que $\operatorname{Im} \Phi \subset \operatorname{Vect}(X, X^2)$, qui est de dimension 2. Par ailleurs, l'image de Φ contient les polynômes non proportionnels $\Phi(X-1) = -2(X^2 + X)$ et $\Phi(X+1) = 2(X^2 - X)$, donc $\operatorname{rg} \Phi \geqslant 2$. Finalement,
$$\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Vect}(X, X^2) .$$

Remarque. — On peut écrire que $\operatorname{Ker}\Phi = H_1 \cap H_{-1}$ où H_1 et H_{-1} sont les deux hyperplans de E qui sont les noyaux respectifs des formes linéaires non nulles $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(-1)$. Les hyperplans en question étant distincts, on a $H_1 + H_{-1} = E$, et la formule de Grassmann montre alors que $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = \dim(H_1 \cap H_{-1}) = \dim H_1 + \dim H_{-1} - \dim(H_1 + H_{-1}) = \dim E - 2$. La formule du rang donne ensuite $\operatorname{rg}\Phi = 2$, et on conclut comme ci-dessus en constatant que l'image de Φ est incluse dans $\operatorname{Vect}(X, X^2)$, puis égale à ce sous-espace vectoriel.

(c) On sait que zéro est valeur propre d'ordre au moins $\dim E - 2 = n - 1$. On constate ensuite que $\operatorname{Im}\Phi \cap \operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, donc que l'image de Φ est un supplémentaire de son noyau. Sur une base de E adaptée à cette décomposition en somme directe, la matrice de Φ est donc diagonale par blocs de la forme $\operatorname{diag}(O, A)$, où O est la matrice nulle d'ordre $n-1$ et A une matrice carrée d'ordre 2. Il suffit d'étudier A pour déterminer les éléments propres manquants de Φ. On choisit pour cela la base (X, X^2) de $\operatorname{Im}\Phi$. Un heureux hasard donne $\Phi(X) = -2X$ et $\Phi(X^2) = 2X^2$. On peut donc conclure que Φ est diagonalisable avec

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp}\Phi &= \{0, 2, -2\} \quad \text{avec} \quad m_0 = n-1, \quad \text{et} \quad m_2 = m_{-2} = 1\,,\\
E_0(\Phi) &= \left\{(X^2-1)Q,\ Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\right\}\,,\\
E_2(\Phi) &= \operatorname{Vect}(X^2)\,,\\
E_{-2}(\Phi) &= \operatorname{Vect}(X)\,.
\end{aligned}$$

299. **RMS 2009 710 Mines Ponts PC**

Soit $\Phi\colon \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui à $\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} b & c & f\\ a & e & i\\ d & g & h\end{pmatrix}$. Montrer que Φ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?

Solution. — La vérification de ce que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))$ est immédiate. L'action de Φ consistant à faire tourner d'une position les huit éléments du bord d'une matrice, il est clair que Φ^8 est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc Φ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples : $X^8 - 1$. Par suite, Φ est diagonalisable.

300. **RMS 2009 711 Mines Ponts PC**

Soit $\Phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à M de colonnes $(C_1, \dots, C_n)$, associe M' de colonnes $(C'_1, \dots, C'_n)$, où $C'_i = \sum_{k\neq i} C_k$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

Solution. — La vérification de ce que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est immédiate. On note $p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à M de colonnes $(C_1, \dots, C_n)$, associe M'' de colonnes $(C'', \dots, C'')$, où

$$C'' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C_k\,.$$

Il est clair que p est linéaire, et que $p^2 = p$: c'est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\Phi = np - \mathrm{id}$, on en déduit que $p = (1/n)(\Phi + \mathrm{id})$, donc que $(1/n^2)(\Phi + \mathrm{id})^2 = (1/n)(\Phi + \mathrm{id})$, ou encore

$$\Phi^2 + (2-n)\Phi + (1-n)\mathrm{id} = 0\,.$$

On vient donc de prouver que le polynôme $Q = X^2 + (2-n)X + (1-n)$ est annulateur de Φ. Son discriminant valant $(2-n)^2 - 4(1-n) = n^2 > 0$, le polynôme Q est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, donc Φ est diagonalisable.

301. **RMS 2009 712 Mines Ponts PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0\\ A & A\end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Solution. — La condition cherchée est $A = 0$. Elle est évidemment suffisante.

On suppose que B est diagonalisable. Il existe alors un polynôme annulateur de B scindé à racines simples, noté Q. Le calcul des premières puissances de B indique que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0\\ kA^k & A^k\end{pmatrix}$, ce que l'on démontre par récurrence sur k. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on en déduit aisément que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0\\ [XP'](A) & P(A)\end{pmatrix}$. En particulier,

$$Q(B) = 0 = \begin{pmatrix} Q(A) & 0\\ [XQ'](A) & Q(A)\end{pmatrix}\,.$$

Il faut donc que Q et XQ' soient annulateurs de A. Par suite, le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines communes à Q et à XQ'. Comme Q est à racines simples, Q et Q' n'ont pas de racine commune, ce qui entraîne que zéro est la seule valeur propre de A. Comme $Q(A) = 0$ et comme Q est scindé à racines simples, A est diagonalisable. N'ayant que zéro pour valeur propre, elle est nulle.

302. **RMS 2009 713 Mines Ponts PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Solution. — On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes de A^2. Alors le polynôme $\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$ est annulateur de A^2, ce qui signifie que $\prod_{i=1}^k (A^2 - \lambda_i I_n) = 0$, ou encore que

$$\prod_{i=1}^k \left(A - \sqrt{\lambda_i} I_n\right)\left(A + \sqrt{\lambda_i} I_n\right) = 0\,.$$

On lit ci-dessus que le polynôme $Q := \prod_{i=1}^k (X - \sqrt{\lambda_i}\,)(X + \sqrt{\lambda_i}\,)$ est annulateur de A. Comme les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts, la famille $(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}, -\sqrt{\lambda_1}, \ldots, -\sqrt{\lambda_k}\,)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts, donc Q est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Il en résulte que A est diagonalisable.

303. **RMS 2009 714 Mines Ponts PC**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron. Voir aussi l'exercice 17 page 102.

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors A et B sont semblables, donc ont mêmes valeurs propres. Comme A est diagonalisable elle possède au moins une valeur propre λ, qui est bien une valeur propre commune à A et à B.

Dans la suite, on note r le rang de M, et on suppose que $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Il existe alors P et Q inversibles telles que $PJ_rQ = M$. Comme on a $APJ_rQ = PJ_rQB$, il vient $(P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$.

- On décompose alors en blocs non triviaux (inspirés de J_r) les matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  La relation $A'J_r = J_rB'$ donne alors : $A'_1 = B'_1$, $A'_3 = 0$, et $B'_2 = 0$. Ainsi on a :

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}.$$

  Par suite, $\chi_{A'} = \chi_{A'_1}\chi_{A'_4}$ et $\chi_{B'} = \chi_{A'_1}\chi_{B'_4}$.
- Comme A est diagonalisable, la matrice $A' = P^{-1}AP$ l'est aussi, ainsi que A'_1 (on le voit avec le sous-espace stable de l'endomorphisme canoniquement associé). Alors $\chi_{A'_1}$ admet au moins une racine λ et le réel λ est valeur propre de A' et de B' donc, par similitude, de A et de B.

304. **RMS 2009 715 Mines Ponts PC**

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de E ?

Solution. — La réponse est non, et voici un contre-exemple : E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, et u est l'endomorphisme de décalage qui, à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme non nul ($a_d \neq 0$). Alors l'image de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P(u)$ est la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \sum_{k=0}^d a_k x_{n+k}\,.$$

Toutes les suites telles que $x_d = 1 - (\sum_{k=0}^{d-1} a_k x_k)/a_d$ vérifient $y_0 = 1$, donc ces suites ne sont pas dans le noyau de $P(u)$, donc $P(u)$ n'est pas l'endomorphisme nul, donc P n'est pas annulateur de u, et ceci pour tout P.

305. **RMS 2009 716 Mines Ponts PC**

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est 1–lipschitzienne. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

Solution. — On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E, et $\|\ \|$ la norme associée.

Première étape. On montre que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe. Soit x dans l'intersection des deux sous-espaces en question. Il existe alors $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$, et il vérifie $x = u(x)$. Mais alors $x = u^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x = u^{k+1}(y) - u^k(y)\,.$$

En sommant ces égalités pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient, par télescopage,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x = u^{n+1}(y) - y\,.$$

L'inégalité triangulaire permet d'en déduire que $(n+1)\|x\| \leqslant \|u^{n+1}(y)\| + \|y\|$. Comme u est 1–lipschitzienne, il est est de même de toutes les puissances de u, donc $\|u^{n+1}(y)\| \leqslant \|y\|$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x\| \leqslant \frac{2\|y\|}{n+1}\,.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|x\| = 0$, donc $x = 0$, ce qui démontre que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

Deuxième étape. Les sous-espaces étudiés sont supplémentaires. Comme E est euclidien, il est de dimension finie. La formule du rang appliquée à l'endomorphisme $v = u - \mathrm{id}_E$ montre que $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E) = \dim E$. Cette formule et l'étape précédente montrent que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)\,.$$

Troisième étape. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. On va démontrer que p est 1–lipschitzien, ce qui prouvera d'après le cours que p est un projecteur orthogonal ; il en résultera que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. Pour cela, on va établir l'expression suivante p à l'aide de u :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k(x) \right)\,.$$

On pose dans la suite $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$.
- Si $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, alors $u^k(x) = x$ pour tout k, donc $v_n(x) = x$ pour tout n, la limite vaut x, et il est vrai que $p(x) = x$ par définition du projecteur p.
- Si $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$, et $u^k(x) = u^{k+1}(y) - u^k(y)$. Par télescopage, $v_n(x) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(y) - y)$, et on montre comme à la première étape que la limite de cette quantité est nulle. Or il est vrai que $p(x) = 0$ par définition du projecteur p.
- Si x est quelconque dans E, il s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. Alors $v_n(x) = v_n(x_1) + v_n(x_2)$ par linéarité, puis $\lim v_n(x_1) = x_1$ et $\lim v_n(x_2) = 0$ d'après les deux points précédents. On en déduit que la suite de terme général $v_n(x)$ converge vers x_1, qui vaut bien $p(x)$ par définition de p.

Comme chaque u^k est 1–lipschitzienne, l'inégalité triangulaire montre que

$$\forall x \in E, \quad \|v_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|u^k(x)\| \leqslant \|x\|\,.$$

En passant à la limite dans l'inégalité large ci-dessus, on obtient $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, ce qui achève la résolution de l'exercice.

306. **RMS 2009 717 Mines Ponts PC**

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer qu'il existe un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = T(B)$.

Solution. — Comme A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable : on note $\lambda_1 \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes, et P une matrice de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$: les valeurs propres sont répétées avec leur ordre de multiplicité. On note aussi H le polynôme $X^3 + X + 1$, de sorte que ${}^tPBP = {}^tPH(A)P = H({}^tPAP) = \operatorname{diag}(H(\lambda_1), \dots, H(\lambda_r))$.

La dérivée de la fonction polynomiale $\tilde{H}$ associée vaut $x \mapsto \tilde{H}'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc $\tilde{H}$ est injective, et en particulier $H(\lambda_1), \dots, H(\lambda_r)$ sont deux à deux distincts. Le théorème d'interpolation de Lagrange montre alors qu'il existe alors un (unique) polynôme $T \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $T(H(\lambda_i)) = \lambda_i$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors

$$T[B] = T[P \operatorname{diag}(H(\lambda_1), \dots, H(\lambda_r))\, {}^tP] = P \operatorname{diag}(T[H(\lambda_1)], \dots, T[H(\lambda_r)])\, {}^tP = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)\, {}^tP = A\,.$$

Analyse

307. **RMS 2009 644 Mines Ponts PC**

Soient $E = \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$ et $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'|$. Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Solution. — Soient $f \in E$. Si $N(f) = 0$, alors $|f(a)| = \int_a^b |f'| = 0$. Comme $|f'|$ est continue et positive, la nullité de l'intégrale entraîne que $f' = 0$, donc f est constante. Comme $f(a) = 0$, la fonction f est nulle. Le caractère positivement homogène de N est clair, et l'inégalité triangulaire pour N résulte de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et de la croissance de l'intégrale.

Soient $f \in E$ et $x \in [a,b]$. Comme $f(x) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduit que $|f(x)| \leqslant |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$, donc que

$$\|f\|_\infty \leqslant N(f)\,.$$

Néanmoins, les deux normes ne sont pas équivalentes : pour le prouver, on exhibe une suite (f_n) de fonctions de E bornées pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et non bornée pour la norme N. Par exemple $f_n \colon x \in [a,b] \mapsto \exp(inx)$ vérifie $\|f_n\|_\infty = 1$ et, comme $f_n' = inf_n$, on en déduit que $N(f) = 1 + n(b-a)$.

308. **RMS 2009 645 Mines Ponts PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1/\sqrt{n+(-1)^k k}$. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Solution. — En distinguant les termes d'indice pair de ceux d'indice impair dans la somme, on obtient

$$u_n = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^k k}} + \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^k k}} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \frac{1}{\sqrt{n+2j}} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor} \frac{1}{\sqrt{n-(2j+1)}}\,.$$

On discute ensuite suivant la parité de n.

– Si n est pair, ce que l'on écrit $n = 2p$, alors

$$u_n = u_{2p} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2p+2j}} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2p-(2j+1)}} = \frac{p}{\sqrt{2p}}\left[\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{1+j/p}}\right] + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} = \sqrt{\frac{p}{2}}R_p + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}}\,,$$

où R_p est la somme de Riemann régulière d'ordre p associée à la fonction continue $g \colon t \mapsto 1/\sqrt{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. Comme g est continue, on sait que $R_p = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1) = 2\sqrt{2} - 2 + \mathrm{o}(1)$, donc que $\sqrt{\frac{p}{2}}R_p = (2-\sqrt{2})\sqrt{p} + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,)$. Par ailleurs, une comparaison série–intégrale donne

$$\sqrt{2p+1} - 1 = \int_0^p \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t+1}} \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \leqslant 1 + \int_0^{p-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t+1}} = \sqrt{2p-1}\,,$$

et on en déduit que $\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} = \sqrt{2}\,p + \mathrm{o}(\sqrt{p})$. La conclusion de ce cas est

$$u_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{p} = \sqrt{2(2p)}\,.$$

– Si n est impair, ce que l'on écrit $n = 2p+1$, alors

$$\begin{aligned}
u_n = u_{2p+1} &= \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{2p+1+2j}} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2p+1-(2j+1)}}\,,\\
&= \left(\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{2p+1+2j}} + \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{2p+1+2j+1}}\right) - \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{2p+1+2j+1}} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k}}\,,\\
&= \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{1}{\sqrt{2p+1+k}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{p+1+j}} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k}}\,,\\
&= \sqrt{2p+1}\left[\frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{2p+1}}}\right] - \frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{j}{p+1}}}\right] + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k}}\,,\\
&= \sqrt{2p+1}\,R_{2p+1} - \sqrt{\frac{p+1}{2}}R_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k}}\,,
\end{aligned}$$

où les R_N ont la même signification que plus haut. Alors $\sqrt{2p+1}\,R_{2p+1} - \sqrt{\frac{p+1}{2}}R_{p+1} = (\sqrt{2} - 1/\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2)\sqrt{p} + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,) = (2-\sqrt{2})\sqrt{p} + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,)$. Une comparaison série–intégrale donne $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2p} + \mathrm{o}(\sqrt{p})$, et la conclusion de ce cas est

$$u_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2(2p+1)}\,.$$

En rassemblant les deux cas, on obtient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\,.$$

309. **RMS 2009 646 Mines Ponts PC**

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$. À quelle condition la série de terme général u_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer la somme.

Solution. — Un développement limité du terme général fournit

$$\begin{aligned}u_n&=(a+b+c)\ln n+b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \;=\; (a+b+c)\ln(n)+b\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+c\left(\frac{2}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\&=(a+b+c)\ln n+\frac{b+2c}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut que la suite (u_n) converge, ce qui nécessite $a+b+c=0$. On suppose cette condition réalisée. Si $b+2c\neq 0$, alors $u_n\sim\alpha/n$ avec $\alpha\neq 0$, donc la série diverge. Il faut donc aussi que $b+2c=0$. Réciproquement, si les deux conditions ci-dessus sont réalisées, alors $u_n=\mathrm{O}(1/n^2)$, donc $\sum u_n$ converge (absolument).

En résumé, la série proposée converge si et seulement si $b=-2c$ et $a=c$, c'est-à-dire si et seulement si u_n est de la forme

$$u_n=a\left[\ln n-2\ln(n+1)+\ln(n+2)\right]\ .$$

Pour calculer la somme, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série. Alors

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{a}&=\sum_{k=1}^n u_k=\sum_{k=1}^n\left[\ln k-2\ln(k+1)+\ln(k+2)\right]=\sum_{k=1}^n\ln k-2\sum_{k=2}^{n+1}\ln k+\sum_{k=3}^{n+2}\ln k\,,\\&=\ln 1+\ln 2-2\ln 2-2\ln(n+1)+\ln(n+1)+\ln(n+2)=-\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+1}\,.\end{aligned}$$

On conclut que la somme de la série vaut $-a\ln 2$.

310. **RMS 2009 648 Mines Ponts PC**

Que dire de la nature d'une série de terme général $v_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}+\frac{2}{n^{2/3}}+\mathrm{o}(\frac{1}{n^{2/3}})$?

Solution. — Une telle série diverge. En effet, si l'on pose $a_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ et $b_n=\frac{2}{n^{2/3}}+\mathrm{o}(\frac{1}{n^{2/3}})$, la série de terme général a_n converge en vertu du théorème de Leibniz, et comme on dispose de l'équivalent entre termes positifs $b_n\sim\frac{1}{n^{2/3}}$, la série de terme général b_n diverge. Alors la série de terme général a_n, somme d'une série divergente et d'une série divergente, diverge.

311. **RMS 2009 649 Mines Ponts PC**

Nature de la série de terme général $u_n=\sin(\pi n^3(\ln(\frac{n}{n-1}))^2)$.

Solution. — On effectue un développement limité du terme général. La présence du carrée sur le logarithme permet d'écrire que $\ln(\frac{n}{n-1})^2=(\ln\frac{n-1}{n})^2=(\ln(1-\frac{1}{n}))^2$, et donc

$$\begin{aligned}u_n&=\sin\left(\pi n^3\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2\right)=\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^2\right),\\&=\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{11}{12n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\pi\frac{11}{12n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\alpha\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ ,\end{aligned}$$

avec $\alpha=11\pi/12$. Comme la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge en vertu du théorème de Leibniz et comme une série de terme général $\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$ est absolument convergente, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

312. **RMS 2009 719 Mines Ponts PC**

Soit $P_n(X)=\prod_{k=0}^n(X-k)$. Montrer que P_n' possède une unique racine $r_n\in]0,1[$. Déterminer un équivalent de r_n quand n tend vers l'infini.

Solution. — Comme P_n possède les $n+1$ racines $0,1,\dots,n$, le théorème des valeurs intermédiaires dit que P_n' possède au moins une racine dans chacun des intervalles $]k,k+1[$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, ce qui fait déjà n racines pour P_n'. Comme $\deg(P_n')=n$, il n'en possède pas d'autres, et elles sont simples. En particulier, P_n' possède une unique racine $r_n\in]0,1[$.

Si $x\in]0,1[$, alors $P_n(x)$ est le produit de $n+1$ facteurs dont le premier — qui est x — est positif, et dont les n suivants sont négatifs, donc P_n est du signe de $(-1)^n$ sur $]0,1[$. Un raisonnement analogue montre que P_n' est du signe de $(-1)^n$ sur $]-\infty,r_n[$.

On commence par montrer que la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Pour cela, on exprime P_{n+1} en fonction de P_n, on dérive la relation obtenue, et on l'évalue en r_n :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (X-[n+1])P_n\ , \\ P'_{n+1} &= (X-[n+1])P'_n + P_n\ , \\ P'_{n+1}(r_n) &= P_n(r_n)\ . \end{aligned}$$

Les études de signe menées plus haut montrent que $P'_{n+1}(r_n) = P_n(r_n)$ est du signe de $(-1)^n$. Comme P'_{n+1} est du signe de $(-1)^{n+1}$ sur $]-\infty, r_{n+1}[$, cela prouve que $r_n > r_{n+1}$. En particulier, comme $P_1 = X(X-1)$ et $P'_1 = 2X-1$, on a $r_1 = 1/2$, donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 < r_{n+1} < r_n \leqslant 1/2\ .$$

On en déduit que $(r_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et que sa limite ℓ vérifie $0 \leqslant \ell < 1/2$: la valeur de ℓ sera évidente à l'issue de l'étude du comportement asymptotique de r_n. On utilise pour cela la fraction rationnelle

$$\frac{P'_n}{P_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X-k}\ .$$

En substituant X par r_n, on obtient $0 = \sum_{k=0}^{n} 1/(r_n - k)$. En isolant le premier terme de la somme, on trouve

$$\frac{1}{r_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-r_n}\ .$$

Comme $0 \leqslant r_n \leqslant 1/2$, le terme $1/(1-r_n)$ est compris entre 1 et 2. Comme $0 \leqslant r_n \leqslant 1$, les autres termes vérifient $1/k \leqslant 1/(k-r_n) \leqslant 1/(k-1)$. On en déduit l'encadrement suivant, où l'on a noté $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ le n-ième nombre harmonique :

$$H_n \leqslant \frac{1}{r_n} \leqslant 2 + H_{n-1}\ .$$

L'équivalent classique $H_n \sim \ln n$, obtenu au moyen d'une comparaison série-intégrale, montre que $1/r_n \sim \ln n$, et finalement que

$$r_n \sim \frac{1}{\ln n}\ .$$

313. **RMS 2009 720 Mines Ponts PC**

Donner, suivant la valeur de $p \in \mathbb{Z}$, la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right)$.

Solution. — On effectue un développement limité du quotient qui figure dans le terme général :

$$\begin{aligned} \frac{2n^2+pn-1}{2n+1} &= n\left(1+\frac{p}{2n}-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1} = n\left(1+\frac{p}{2n}-\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\ , \\ &= n + \frac{p-1}{2} - \frac{p+1}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ . \end{aligned}$$

On en déduit que $u_n = (-1)^n \sin\left[\frac{(p-1)\pi}{2} - \frac{(p+1)\pi}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$, puis on discute suivant la parité de p.

– Si p est impair, on l'écrit $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et alors

$$u_n = (-1)^n \sin\left[k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = (-1)^{n+k}\cos\left[-\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

– Si p est pair, on l'écrit $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et alors

$$u_n = (-1)^n \sin\left[k\pi - \frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = (-1)^{n+k}\sin\left[-\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = c\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ ,$$

où l'on a posé $c = (-1)^{k+1}\pi/4$. On en déduit que $\sum u_n$ est convergente (et n'est pas absolument convergente).

314. **RMS 2009 721 Mines Ponts PC**

Déterminer, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$. Calculer la somme si la série converge.

Solution. — Un développement limité du terme général fournit

$$u_n = \sqrt{n}\left[a + b\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + c\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right] = \sqrt{n}\left[a + b\left(1+\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + c\left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right],$$
$$= (a+b+c)\sqrt{n} + \frac{b/2+c}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut que la suite (u_n) converge, ce qui nécessite $a+b+c=0$. On suppose cette condition réalisée. Si $c+b/2 \neq 0$, alors $u_n \sim \alpha/\sqrt{n}$ avec $\alpha \neq 0$, donc la série diverge. Il faut donc aussi que $c+b/2=0$. Réciproquement, si les deux conditions ci-dessus sont réalisées, alors $u_n = \mathrm{O}(1/n^{3/2})$, donc $\sum u_n$ converge (absolument). En résumé, la série proposée converge si et seulement si $b=-2c$ et $a=c$, c'est-à-dire si et seulement si u_n est de la forme

$$u_n = a\left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right).$$

Dans ce cas, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est télescopique et vaut $a\left(\sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2\sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} + \sum_{k=0}^n \sqrt{k+2}\right) = a\left(\sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2} \sqrt{k+2}\right) = a\left(1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = a\left(1 + 1/\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)\right)$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = a.$$

315. **RMS 2009 722 Mines Ponts PC**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{a+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+n}$.

Solution. — Comme le dénominateur de u_n tend vers l'infini avec n, il ne s'annule plus au delà d'un certain rang, donc u_n est défini à partir d'un certain rang. On calcule un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{a+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+a\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1},$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+a\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a+1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Comme les deux séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent, la série de terme général $\sum u_n$ converge si et seulement celle de terme général $\frac{a+1}{n}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $a=-1$. Dans ce cas, elle est semi-convergente.

316. **RMS 2009 723 Mines Ponts PC**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}+(-1)^{n-1}}$.

Solution. — On calcule un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}+\frac{1}{n^{2/3}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

Comme les trois séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$, $\frac{(-1)^n}{n}$ et $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ convergent et comme la série de terme général $\frac{1}{n^{2/3}}$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge.

317. **RMS 2009 724 Mines Ponts PC**

Nature de la série de terme général $u_n = \left(1+(-1)^n\frac{\ln n}{n^{1/5}}\right)^{1/4} - 1$.

Solution. — Comme $\frac{\ln n}{n^{1/5}}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, $1+(-1)^n\frac{\ln n}{n^{1/5}}$ est ultimement positif, donc u_n est défini à partir d'un certain rang. On calcule un développement limité du terme général :

$$\left(1+(-1)^n\frac{\ln n}{n^{1/5}}\right)^{1/4} - 1 = (-1)^n\frac{\ln n}{4n^{1/5}} - \frac{3(\ln n)^2}{32n^{2/5}}\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^{2/5}}\right)\right).$$

En d'autres termes, si l'on pose $v_n = (-1)^n\frac{\ln n}{4n^{1/5}}$ et $w_n = -\frac{3(\ln n)^2}{32n^{2/5}}$, on a $u_n - v_n \sim w_n$, où $\sum w_n$ est une série divergente dont le terme général est de signe constant. La série de terme général $u_n - v_n$ est donc divergente. Comme $\sum v_n$ converge, par application du théorème spécial des séries alternées, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

318. **RMS 2009 725 Mines Ponts PC**
Pour $n \geqslant 2$, soit $P_n : x \mapsto x^n - nx + 1$. Soit r_n l'unique racine de P_n dans $[0,1]$.

(a) Étudier la suite $(r_n)_{n\geqslant 2}$.

(b) Étudier la série de terme général $r_n - 1/n$.

Solution. — Voir l'exercice 481 page 338 : comme $r_n - 1/n \sim 1/n^{n+1}$ quand n tend vers l'infini, la série étudiée converge.

319. **RMS 2009 726 Mines Ponts PC**
Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}+(-1)^n n^{2/3}(\ln n)^3}$. Montrer que u_n est défini pour n assez grand. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Solution. — Les comparaisons entre suites usuelles montrent que le dénominateur de u_n est équivalent à $n^{4/5}$ quand n tend vers l'infini, donc ne s'annule pas si n est assez grand, et u_n est alors défini. On calcule ensuite un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}}\left(1+(-1)^n\frac{(\ln n)^3}{n^{2/15}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}}\left(1-(-1)^n\frac{(\ln n)^3}{n^{2/15}} + \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^6}{n^{4/15}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}} - \frac{(\ln n)^3}{n^{14/15}} + \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^6}{n^{16/15}}\right).$$

Comme $14/15 < 1 < 16/15$, les séries de termes généraux $\frac{(\ln n)^3}{n^{14/15}}$ et $\mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^6}{n^{16/15}}\right)$ sont respectivement divergente et convergente. Comme $\sum \frac{(-1)^n}{n^{4/5}}$ est convergente en vertu du théorème spécial des séries alternées, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

320. **RMS 2009 727 Mines Ponts PC**
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Nature de la série de terme général $a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$?

Solution. — Elle est du à Alain Walbron.
On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$, donc

$$b_n = \ln\left(\frac{(n+1)^a a_{n+1}}{n^a a_n}\right) = a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Ainsi la série de terme général b_n converge absolument. Or cette série est télescopique puisque $b_n = \ln\left((n+1)^a a_{n+1}\right) - \ln\left(n^a a_n\right)$. Il vient donc que $\ell := \lim_{n\to+\infty} \ln(n^a a_n)$ existe dans $\mathbb{R}$, donc

$$a_n \sim \frac{e^\ell}{n^a}\cdot$$

Par la règle des équivalents positifs, $\sum a_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

321. **RMS 2009 728 Mines Ponts PC**
Nature de la série de terme général $u_n = e^{-n^4}\int_0^n e^{t^4}\,\mathrm{d}t$?

Solution. — Le changement de variable affine $t = nu$ permet d'écrire $u_n = ne^{-n^4}\int_0^1 e^{(nu)^4}\,\mathrm{d}u$. Soit $a \in]0,1[$ que l'on choisira plus tard. La relation de Chasles et le caractère croissant de $u \mapsto e^{(nu)^4}$ montrent que

$$u_n = ne^{-n^4}\int_0^{1-a} e^{(nu)^4}\,\mathrm{d}u + ne^{-n^4}\int_{1-a}^1 e^{(nu)^4}\,\mathrm{d}u \leqslant ne^{-n^4+n^4(1-a)^4} + na = ne^{-4n^4a+6n^4a^2-4n^4a^3+n^4a^4} + na\,.$$

On choisit alors a de sorte que les deux termes de la somme ci-dessus soient des termes généraux de séries convergentes : par exemple $a = 1/n^3$. Alors $an = 1/n^2$ convient et, comme l'exposant $-4n^4a + 6n^4a^2 - 4n^4a^3 + n^4a^4$ vaut $-4n + \mathrm{o}(1)$, on en déduit que le premier terme de la somme ci-dessus est équivalent à ne^{-4n}, qui convient aussi (car $n^2 \times ne^{-4n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini). En conclusion, $\sum u_n$ converge.

322. **RMS 2009 729 Mines Ponts PC**
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bijective et $g = f^{-1}$. Montrer que la série de terme général $1/f(n)$ converge si et seulement si la série de terme général $g(n)/n^2$ converge.

Solution. — On formule une hypothèse supplémentaire minime pour pouvoir résoudre l'exercice : f' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+$, de sorte que la réciproque $g = f^{-1}$ sera aussi de de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, le caractère bijectif et continu de f de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même impose que $f(0) = g(0) = 0$ et que f et g sont strictement croissantes et de limite $+\infty$ en $+\infty$. Ces arguments seront utilisés au fil de la démonstration sans être systématiquement rappelés. Enfin, les séries considérées sont définies pour $n \geqslant 1$. On prouve séparément les deux implications.

On suppose que $\sum 1/f(n)$ converge. Comme $1/f$ est strictement décroissante, continue et positive, le théorème de comparaison série intégrale affirme que $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/f(t)$ converge. Une intégration par parties sur le segment $[1,a]$ avec $a>1$, suivie du changement de variable $t=g(u)=f^{-1}(u)$, pour lequel $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u/f'(g(u))$, donnent

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \left[\frac{t}{f(t)}\right]_1^a + \int_1^a \frac{tf'(t)}{f^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{f(a)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(a)} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Comme g est positive, il en résulte la majoration suivante, où l'on a posé $b=f(a)$:

$$\forall b \geqslant f(1),\quad \int_{f(1)}^{b} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{f(1)} + \int_1^{g(b)} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} - \frac{g(b)}{b} \leqslant \frac{1}{f(1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\,.$$

Les intégrales partielles de la fonction positive $h\colon u\mapsto g(u)/u^2$ étant majorées, on en déduit que $\int_1^{+\infty} g(u)/u^2\,\mathrm{d}u$ converge. Il ne reste plus qu'à montrer la convergence de la série de terme général $g(n)/n^2$. Cela ne résulte pas d'une comparaison série intégrale appliquée à la fonction h définie ci-dessus, car on n'en connaît pas le sens de variation. On remarque que

$$\forall n\geqslant 1,\quad \frac{g(n)}{(n+1)^2} \leqslant \frac{g(n)}{n^2} = \frac{g(n)}{(n+1)^2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant 4\frac{g(n)}{(n+1)^2}\,,$$

de sorte que la convergence de $\sum g(n)/n^2$ est équivalente à la convergence de $\sum g(n)/(n+1)^2$. En majorant séparément numérateur et dénominateur (g est croissante et $u\mapsto 1/u^2$ est décroissante), on obtient :

$$\forall k\geqslant 1,\quad \frac{g(k)}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{g(k)}{(k+1)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_k^{k+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

On en déduit les majorations suivantes des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

qui prouvent que $\sum g(n)/(n+1)^2$ converge, et finalement que $\sum g(n)/n^2$ converge.

Réciproquement, on suppose que $\sum g(n)/n^2$ converge. Comme précédemment, on montre que la série de terme général $g(n+1)/n^2$ (ou de terme général $g(n)/(n-1)^2$, ce qui revient au même) converge. La minoration suivante

$$\forall n\geqslant 1,\quad \int_n^{n+1} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_n^{n+1} \frac{g(n+1)}{n^2}\,\mathrm{d}u = \frac{g(n+1)}{n^2}$$

permet d'en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(u)/u^2\,\mathrm{d}u$ converge. On montre ensuite que $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/f(t)$ converge en reprenant la relation $\forall b>g(1)$, $\int_1^{g(b)} \mathrm{d}t/f(t) = g(b)/b - 1/f(1) + \int_{f(1)}^b g(u)/u^2\,\mathrm{d}u$ établie dans la première partie. Cette fois, pour montrer que les intégrales partielles de $1/f$ sont majorées, il faut de plus prouver que $g(b)/b$ est bornée au voisinage de l'infini. On va en fait montrer que $g(b)/b$ est de limite nulle en $+\infty$, en utilisant une technique à la Cauchy.

Comme $\int_1^{+\infty} g(u)/u^2\,\mathrm{d}u$ converge, son reste $R(b)=\int_b^{+\infty} g(u)/u^2\,\mathrm{d}u$ est défini et tend vers zéro quand b tend vers l'infini. Alors, comme g est décroissante et positive et comme $u\mapsto 1/u^2$ est décroissante,

$$0\leqslant \frac{1}{4}\times\frac{g(b)}{b} = \int_b^{2b} \frac{g(b)}{(2b)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_b^{2b} \frac{g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = R(b)-R(2b)\,,$$

et le théorème d'encadrement prouve la limite annoncée. Une fois que la convergence de $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/f(t)$ est établie, il suffit d'appliquer le théorème de comparaison série intégrale à la fonction positive décroissante $1/f$ pour en déduire que $\sum 1/f(n)$ converge.

323. **RMS 2009 730 Mines Ponts PC**

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sigma(n)/n^2$.

Solution. — On va montrer qu'elle diverge, par une technique à la Cauchy. On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série étudiée. Les n nombres entiers $\sigma(k)$ pour $n+1\leqslant k\leqslant 2n$ étant deux à deux distincts, la somme $\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)$ est plus grande que la plus petite somme de n entiers strictement positifs distincts, à savoir $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$. On en déduit que

$$S_{2n}-S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k) \geqslant \frac{n+1}{8n} \geqslant \frac{1}{8}\,.$$

Alors la suite de terme général $S_{2n}-S_n$ ne converge pas vers zéro, ce qu'elle devrait faire si la série étudiée était convergente.

324. **RMS 2009 731 Mines Ponts PC**

Trouver les $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in [0,1[,\ \int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Solution. — On raisonne par analyse et synthèse, et on va montrer que les solutions sont les fonctions linéaires $x \mapsto bx$.

Analyse. Si f satisfait les conditions de l'énoncé, elle est dérivable sur $[0,1[$ avec $\forall x \in [0,1[,\ f'(x) = f(1-x)/(1-x)$: attention, il y a deux signes moins dans le calcul de cette dérivée. On en déduit que f est deux fois dérivable sur $]0,1[$ avec

$$\forall x \in]0,1[,\quad f''(x) = -\frac{f'(1-x)}{1-x} + \frac{f(1-x)}{(1-x)^2} = -\frac{f(x)}{x(1-x)} + \frac{f'(x)}{1-x}\,.$$

Il en résulte que f est solution de l'équation différentielle $x(1-x)y'' - xy' + y = 0$ sur $]0,1[$. On remarque que l'identité $x \mapsto x$ est une des solutions et qu'elle ne s'annule pas sur $]0,1[$. On applique alors la méthode d'abaissement de l'ordre, en cherchant les solutions sous la forme $y\colon x \in]0,1[\mapsto xg(x)$, où g est deux fois dérivable sur $]0,1[$.

Alors $y'(x) = xg'(x) + g(x)$, $y''(x) = xg''(x) + 2g'(x)$ et l'équation différentielle devient $\forall x \in]0,1[,\ x(1-x)[xg''(x) + 2g'(x)] - x[xg'(x) + g(x)] + xg(x) = x^2(1-x)g''(x) + x[2(1-x) - x]g'(x) = 0$, ou encore

$$\forall x \in]0,1[,\quad x(1-x)g''(x) + (2-3x)g'(x) = 0\,.$$

On pose $h = g'$, on décompose en éléments simples $(2-3x)/[x(1-x)] = 2/x - 1/(1-x)$, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 en h suivante :

$$\forall x \in]0,1[,\quad h'(x) + \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}\right] h(x) = 0\,.$$

Ses solutions sont les fonctions d'expression $h(x) = a\exp(-2\ln|x| - \ln|x-1|) = a/[x^2(1-x)]$, où a est une constante réelle. Une autre décomposition en éléments simples donne $1/[x^2(1-x)] = 1/x^2 + 1/x + 1/(1-x)$. On en déduit que les fonctions g ont pour expression $g(x) = a[-1/x + \ln x - \ln(1-x)] + b$, où b est une constante réelle. Finalement,

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in]0,1[,\quad f(x) = a\left[-1 + x\ln x - x\ln(1-x)\right] + bx\,.$$

Synthèse. Pour qu'une fonction dont l'expression sur $]0,1[$ donnée ci-dessus soit prolongeable par continuité en 1, il faut que $a = 0$. Alors $f\colon x \mapsto bx$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ avec la même expression, et on vérifie que

$$\forall x \in [0,1[,\quad \int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1-x}^{1} \frac{bt}{t}\,\mathrm{d}t = bx = f(x)\,.$$

325. **RMS 2009 733 Mines Ponts PC**

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — Comme $(\ln t)/(1-t^2) \sim \ln t$ quand t tend vers zéro, comme les fonctions en question sont de signe fixe (négatif), et comme ln est intégrable sur $]0,1/2]$ d'après le cours, on en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto (\ln t)/(1-t^2)$ sur $]0,1/2]$. Comme $(\ln t)(1-t^2) \sim -1/(1+t)$ quand t tend vers 1, la fonction intégrée est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[1/2,1[$. Finalement, l'intégrale proposée est absolument convergente.

Pour tout $t \in]0,1[$, l'identité suivante est satisfaite : $(\ln t)/(1-t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\ln t$. On pose $f_n\colon t \in]0,1[\mapsto t^n \ln t$, ce qui définit une fonction continue et intégrable sur $]0,1[$ (cela résulte du cours pour $n = 0$, et f_n est prolongeable par continuité en zéro pour $n \geqslant 1$). Son intégrale, notée I_n, se calcule par parties (il conviendrait, par prudence, d'intégrer sur $[a,1]$ avec $a > 0$ puis de faire tendre a vers zéro) :

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on montre que $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = 1/(n+1)^2$, donc la série de terme général $\int_0^1 |f_{2n}(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Le théorème de permutation séries-intégrales impropres montre alors que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_{2n}(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Remarque. — On peut calculer une valeur exacte de la somme de cette série, en admettant que $S = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ (voir par exemple l'exercice 608 page 405). On écrit ensuite que $S = S_p + S_i$, où S_p (resp. S_i) est la somme portant sur les termes d'indice pair (resp. impair). Comme $S_p = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/(2n)^2 = S/4$, on en déduit que

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -S_i = -\frac{3}{4}S = -\frac{\pi^2}{8}\,.$$

326. **RMS 2009 734 Mines Ponts PC**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_{-\infty}^0 (n^3t^2e^{-n^2t^2})/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

Solution. — On note f_n la fonction $t \in \mathbb{R}_- \mapsto (n^3t^2e^{-n^2t^2})/(1+t^2)$. Comme $t^2 f_n \sim n^3t^2\exp(-n^2t^2)$, quantité qui tend vers zéro quand t tend vers $-\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $]-\infty, 0]$, donc I_n existe.
Le changement de variable $u = nt$ montre que

$$I_n = \int_{-\infty}^0 \frac{u^2e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{n^2}}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^0 g_n(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

avec une notation évidente pour la fonction continue g_n. La suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction continue $g\colon u \in \mathbb{R}_- \mapsto u^2e^{-u^2}$, et satisfait l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leqslant g$, avec g intégrable. Le théorème de convergence dominée donne alors la limite de (I_n), qui se calcule ensuite par intégration par parties, et en invoquant la valeur bien connue de l'intégrale de Gauss :

$$\lim I_n = \int_{-\infty}^0 g(u)\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{ue^{-u^2}}{2}\right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\cdot$$

327. **RMS 2009 735 Mines Ponts PC**
Soient $I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, $K = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}/(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$ pour $a > 0$. Calculer I, puis calculer K à l'aide de $J(a)$.

Solution. — L'existence des trois intégrales proposées vient de la règle de Riemann : les trois fonctions intégrées sont dominées par $1/x^{3/2}$ au voisinage de l'infini.
Dans l'intégrale I, on effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif $u \in \mathbb{R}_+ \mapsto x = u^2 \in \mathbb{R}_+$. On obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{u^4+1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Le dénominateur u^4+1 se factorise sur $\mathbb{R}$ en $(u^2+\sqrt{2}\,u+1)(u^2-\sqrt{2}\,u+1)$, et la fraction rationnelle à intégrer se décompose en éléments simples sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{u}{u^2-\sqrt{2}\,u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}\,u+1}\right],\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}\,u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}\,u+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2-\sqrt{2}\,u+1} + \frac{1}{u^2-\sqrt{2}\,u+1}\right],\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}\,u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}\,u+1}\right] + \frac{1}{(\sqrt{2}\,u-1)^2+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}\,u+1)^2+1}\cdot
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{2u^2}{u^4+1}\,\mathrm{d}u\,,\\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}\,u+1}{u^2+\sqrt{2}\,u+1}\right)\right]_0^b + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\,u-1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\,u+1\right)\right]_0^b\right),\\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,\cdot
\end{aligned}$$

Le changement de variable $x = ay$ dans $J(a)$ donne

$$\forall a > 0, \quad J(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{I}{\sqrt{a}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\,\cdot$$

On montre ensuite que la fonction J de la variable a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et se dérive sous le signe d'intégration, en vérifiant les hypothèses du théorème de Leibniz : d'une part, la fonction $h\colon (a,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}/(x^2+a^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\frac{\partial h}{\partial a}(a,x) = -2a\sqrt{x}/(x^2+a^2)^2$. D'autre part, si l'on fixe $0 < \alpha < \beta < +\infty$, la dérivée partielle satisfait l'hypothèse de domination locale

$$\forall (a,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial a}(a,x)\right| \leqslant \varphi(x) := \frac{2\beta\sqrt{x}}{(x^2+\alpha^2)^2}\,,$$

où φ est une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\forall a>0,\ J'(a)=\int_0^{+\infty}(\partial g/\partial a)(a,x)\,\mathrm{d}x=-2a\int_0^{+\infty}\sqrt{x}/(x^2+a^2)^2\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, l'expression simple de $J(a)$ obtenue plus haut montre que $\forall a>0,\ J'(a)=-\pi\sqrt{2}/(4a^{3/2})$. En égalant les deux expressions de $J'(a)$ pour $a=1$, on obtient

$$K=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\cdot$$

328. **RMS 2010 660 Mines Ponts PC**

La fonction $f\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \sin x/x$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Solution. — La réponse est non, car elle n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. En revanche, elle l'est sur $]0,1]$, puisque le sinus cardinal se prolonge par continuité en zéro.

On note F l'intégrale partielle $x\mapsto\int_1^x|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Si le sinus cardinal était intégrable sur $[1,+\infty[$, alors F admettrait une limite finie en $+\infty$, donc la série (télescopique) de terme général $F((k+1)\pi)-F(k\pi)$ convergerait. Or le changement de variable $t=u+k\pi$ et la π–périodicité de la fonction $|\sin|$ montrent que

$$F((k+1)\pi-F(k\pi)=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=\int_0^\pi\left|\frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi}\right|\mathrm{d}u=\int_0^\pi\frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u\geqslant\frac{c}{(k+1)\pi},$$

où c est la constante strictement positive $\int_0^\pi\sin u\,\mathrm{d}u$ (elle vaut 2). Comme la série de terme général $1/(k+1)$ diverge, le résultat suit par contraposition.

329. **RMS 2009 736 Mines Ponts PC**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{x}{n})$. Déterminer l'ensemble de définition de f. La fonction f est-elle continue ?

Solution. — On pose $f_n(x)=(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{x}{n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in D_n=]-n,+\infty[$ (c'est l'ensemble de définition de f_n). Pour que $f(x)$ soit défini, il faut d'abord que $x\in\cap_{n\geqslant1}D_n=]-1,+\infty[$. On constate aussi que $f(0)$ est défini et vaut zéro.

On suppose $x\neq0$ fixé dans D. Le développement limité pour n tendant vers l'infini

$$f_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

montre que $f_n(x)$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes (semi-convergente pour la première, absolument convergente pour la seconde). On en déduit que l'ensemble de définition de f est $D_f=]-1,+\infty[$.

On établit la continuité de f en regroupant deux par deux les fonctions f_n. Pour $k\geqslant1$, on pose $g_k=f_{2k-1}+f_{2k}$ de sorte que, pour tout $x\in D_f$:

$$g_k(x)=\ln\left(1+\frac{x}{2k-1}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{2k}\right),$$
$$g_k'(x)=\frac{1}{2k-1+x}-\frac{1}{2k+x}\cdot$$

On fixe un segment $[a,b]\subset D_f$. Comme g_k' est positive, g_k est monotone sur $[a,b]$, donc la norme infinie de g_k restreinte à $[a,b]$ vaut $\max(|g_k(a)|,|g_k(b)|)$. Or, pour $c\in D_f$ fixé, un développement limité donne

$$g_k(c)=\ln\left(1+\frac{x}{2k(1-1/2k)}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{2k}\right)=\ln\left(1+\frac{x}{2k}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)-\ln\left(1+\frac{x}{2k}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\cdot$$

On en déduit que $\sum g_k$ converge normalement sur $[a,b]$. Comme toutes les g_k sont continues et comme $[a,b]$ est un segment quelconque de D_f, on en déduit que $f=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k$ est continue sur D_f.

330. **RMS 2009 737 Mines Ponts PC**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$, $u_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n/(n+2)$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général u_nx^n.

Solution. — On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. On note R le rayon de convergence cherché, et on suppose qu'il est strictement positif. On note f la somme de la série entière de terme général u_nx^n. Soit $x\in]-R,R[$. On multiplie la relation de l'énoncé par $(n+2)x^{n+1}$, on écrit que

$(n+2)u_{n+1}x^{n+1} = x[(n+1)u_{n+1}x^n] + u_{n+1}x^{n+1}$, et on somme pour n variant de zéro à l'infini. Comme f est indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R,R[$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^{n+2}\right) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1}\right) - x\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) - u_0 - u_1 x\right) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) - u_0\right) - \left(f(x) - u_0\right) - xf(x), \\
&= (1-x)f'(x) - (1+x)f(x) + u_0 - u_1\,, \\
&= (1-x)f'(x) - (1+x)f(x) + 1\,, \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $J =]-1,1[\cap]-R,R[$, L'équation différentielle homogène associée (H) est $y'(x) - \frac{1+x}{1-x}y(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$ sur cet intervalle est $x \mapsto -x - 2\ln(1-x)$, donc les solutions de (H) sur cet intervalle sont de la forme

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \forall x\in J,\quad y(x) = \lambda\exp\left(-x - 2\ln(1-x)\right) = \lambda\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}\,.$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète $y'(x) - \frac{1+x}{1-x}y(x) = \frac{1}{x-1}$ par la méthode de variation de la constante : on obtient $\lambda'(x)\frac{e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{1}{x-1}$, ou encore

$$\forall x\in J,\quad \lambda'(x) = (x-1)e^x\,.$$

On choisit $\lambda(x) = (x-2)e^x$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions de la forme

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \forall x\in J,\quad y_\lambda(x) = \lambda\frac{e^{-x}}{(1-x)^2} + \frac{x-2}{(1-x)^2}\,.$$

Toutes les fonctions ci-dessus sont définies au moins sur $]-1,1[$ et y sont développables en série entière, en vertu du théorème sur le produit de Cauchy de deux sommes de séries entières (ici $x \mapsto \lambda e^{-x} + x - 2$, de rayon de convergence infini, et $x \mapsto 1/(1-x)^2$, de rayon de convergence 1). On peut affirmer, toujours d'après ce théorème, que le rayon de convergence de la série de somme y_λ est supérieur ou égal à $1 = \min\{+\infty, 1\}$.
Il reste à chercher s'il existe λ pour que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. La première de ces conditions impose $y_\lambda(0) = \lambda - 2 = u_0 = 1$, donc $\lambda = 3$. Alors

$$y_3(x) = (3e^{-x} + x - 2)(1-x)^{-2} = (3 - 3x + \mathrm{o}(x) + x - 2)(1 + 2x + \mathrm{o}(x)) = 1 + \mathrm{o}(x)\,,$$

ce qui prouve que la seconde condition est alors satisfaite.

Synthèse. Comme $y_3(x) \sim (3e^{-1} - 1)/(1-x)^2$ au voisinage de 1, il n'est pas possible de prolonger y_3 par continuité en 1, ce qui prouve que le rayon de convergence de son développement en série entière vaut 1. En particulier, il est non nul ce qui achève le raisonnement, et on conclut que

$$R = 1 \quad\text{et}\quad \forall x\in]-1,1[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{3e^{-x} + x - 2}{(1-x)^2}\,.$$

Remarque. — On peut alors donner une expression close des coefficients u_n, car $3e^{-x} + x - 2 = 1 - 2x + 3\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k x^k/k!$ et $(1-x)^{-2} = \sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)x^j$, cette dernière expression étant obtenue par dérivation terme à terme de $(1-x)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$. Le théorème relatif au produit de Cauchy affirme alors que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
u_n &= 1\times(n+1) - 2\times n + 3\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{n+1-k}{k!}\,, \\
&= -n + 1 + 3\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n+1-k}{k!} - 3(n+1) + 3n\,, \\
&= -n - 2 + 3\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n+1-k}{k!}\,.
\end{aligned}$$

On constate que cette expression reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Comme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \sim e$ quand n tend vers l'infini, on en déduit que $u_n \sim (3e-1)n$ quand n tend vers l'infini.

331. **RMS 2009 738 Mines Ponts PC**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\sum_{k=0}^n a_ka_{n-k}$. Soit $f\colon x\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}a_nx^n$. Donner une expression simple de f.

Solution. — On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$ est strictement positif. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $b_n=\sum_{k=0}^n a_ka_{n-k}$. Le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries entières affirme alors que le rayon de convergence de $\sum b_nx^n$ est au moins égal à R, et que $\forall x\in\,]-R,R[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n)^2$. En d'autres termes, compte-tenu de l'hypothèse $b_n=a_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f satisfait l'équation fonctionnelle

$$\forall x\in\,]-R,R[\setminus\{0\},\quad \frac{1}{x}(f(x)-a_0)=\frac{1}{x}(f(x)-1)=f(x)^2.$$

Cette égalité se réécrit $\forall x\in\,]-R,R[\,,\ xf(x)^2-f(x)+1=0$, puisqu'on constate qu'elle reste valable pour $x=0$. Le discriminant de cette équation de degré 2 en $f(x)$ est $1-4x$, ce qui entraîne que $R\leqslant 1/4$. On déduit alors que, pour tout

$$\forall x\in\,]-R,R[\setminus\{0\},\quad f(x)=f_1(x):=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\quad\text{ou bien}\quad f(x)=f_2(x):=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\,.$$

L'alternative présentée ci-dessus est justifiée car $f_1(x)$ est toujours différent de $f_2(x)$, et signifie *a priori* que $f(x)$ vaut $f_1(x)$ pour certaines valeurs de x et $f_2(x)$ pour d'autres. On va démontrer que $f=f_2$ sur $]-R,R[$.
Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe x_0 tel que $f(x_0)=f_1(x_0)$ et, dans un premier temps, on suppose que $x_0\in]0,R[$. On note J le plus grand intervalle contenu dans $]0,R[$ et contenant x_0 tel que $f_{/J}=(f_1)_{/J}$. Comme $f_1(x_0)\neq f_2(x_0)$, comme f, f_1 et f_2 sont continues, J est un voisinage de x_0 (il contient un intervalle ouvert contenant x_0). On note $a\geqslant 0$ la borne inférieure de J. Si a était strictement positive, la continuité de f montrerait que $f(a)=\lim_{a+}f(x)=\lim_{a+}f_1(x)=f_1(a)$. Le raisonnement que l'on vient de tenir en x_0 établirait alors que f coïncide avec f_1 sur un intervalle ouvert contenant a, ce qui contredirait la définition de $a=\inf J$. Par conséquent, $a=0$, mais alors $f(0)=a_0=1=\lim_{0+}f(x)=\lim_{0+}f_1(x)=+\infty$, ce qui est absurde. On en déduit que $f=f_2$ sur $]0,R[$, et on prouverait de même que $f=f_2$ sur $]-R,0[$. La notion de connexité, qui n'est pas au programme de la filière PC, permet de rédiger de manière plus concise.

Synthèse. Il suffit de démontrer que la fonction f_2, prolongée par la valeur $\lim_0 f_2=1$ en zéro, est développable en série entière au voisinage de zéro. Or on sait que $\forall x\in]-1/4,1/4[,\ \sqrt{1-4x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n$, et on en déduit que

$$\forall x\in\left]-\frac14,\frac14\right[\,,\quad f_2(x)=-\frac12\sum_{n=1}^{+\infty}(-4)^n\binom{1/2}{n}x^{n-1},$$

ce qui fournit l'argument voulu.

Remarque. — On obtient non seulement une expression simple de f, à savoir $f(x)=(1-\sqrt{1-4x})/2x$ sur $]-1/4,1/4[$, mais aussi une expression simple des coefficients : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=-\frac{(-4)^{n+1}}{2}\binom{1/2}{n+1}=(-1)^n2^{2n+1}\frac{\frac12(\frac12-1)\cdots(\frac12-n)}{(n+1)!}=2^{2n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}=2^n\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots(2n)(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

Le nombre a_n est appelé le n-ième nombre de Catalan. Comme l'indique la définition par récurrence de la suite (a_n) donnée dans l'énoncé, a_n compte le nombre de parenthèsages bien formés de l'expression $a_0*a_1*a_2*\cdots*a_n$, où $*$ désigne une loi non associative. On retrouve les nombres de Catalan dans de nombreux problèmes de dénombrement.

332. **RMS 2009 739 Mines Ponts PC**

Calculer $\sum_{p=0}^n\binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}$. On pourra utiliser $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

Solution. — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\binom{2n}{n}$ et on commence par calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$. Pour $x\neq 0$, on pose $u_n=a_nx^n$; alors

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}|x|=\frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)![(n+1)!]^2}|x|=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|=\frac{4n+2}{n+1}|x|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}4|x|\,.$$

La règle de d'Alembert affirme alors que $R=1/4$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose ensuite $b_n=\sum_{p=0}^n\binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}=\sum_{p=0}^n a_pa_{n-p}$, de sorte que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit le carré de Cauchy de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}b_nx^n$ est au moins égal à R et que $\forall x\in\,]-R,R[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=f(x)^2$.

On calcule maintenant $f(x)$. Si l'on note g la série primitive de f (de même rayon de convergence que f), l'exercice 331 page 226 montre que $\forall x \in]1/4, 1/4[\,,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^{n+1} = (1-\sqrt{1-4x})/2$. On peut aussi utiliser la technique de l'exercice 819 page 518. Par suite,

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\,, \quad f(x) = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\,.$$

On en déduit que $\forall x \in]-1/4, 1/4[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = f(x)^2 = 1/(1-4x)$. Les résultats sur les séries géométriques permettent de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p} = 4^n\,.$$

333. **RMS 2009 740 Mines Ponts PC**

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sin(\frac{1}{3}\arcsin x)$.

Solution. — On note f la fonction de l'énoncé, et on commence par déterminer une équation différentielle satisfaite par f, à l'aide des calculs de dérivée suivants : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(\frac{1}{3}\arcsin x)}{3\sqrt{1-x^2}}\,, \\ f''(x) &= -\frac{\sin(\frac{1}{3}\arcsin x)}{9(1-x^2)} + \frac{x\cos(\frac{1}{3}\arcsin x)}{3(1-x^2)^{-3/2}} = -\frac{f(x)}{9(1-x^2)} + \frac{xf'(x)}{(1-x^2)}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $9(1-x^2)f''(x) - 9xf'(x) + f(x) = 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Analyse. Comme f est impaire, si elle admet un développement en série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors il est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ et vérifie

$$\begin{aligned} 9(1-x^2)&\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)(2n)a_n x^{2n-1} - 9x\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[9(2n+3)(2n+2)a_{n+1} - 9(2n+1)(2n)a_n - 9(2n+1)a_n + a_n]x^{2n+1}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[9(2n+3)(2n+2)a_{n+1} - (9(2n+1)^2-1)a_n]x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[9(2n+3)(2n+2)a_{n+1} - (6n+4)(6n+2)a_n]x^n, \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{(6n+4)(6n+2)}{9(2n+3)(2n+2)}a_n = \frac{4(3n+2)(3n+1)}{9(2n+3)(2n+2)}a_n$, ou encore que

$$\forall n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{4(3n-1)(3n-2)}{9(2n+1)(2n)}a_{n-1} = \frac{4(3n)(3n-1)(3n-2)}{27n(2n+1)(2n)}a_{n-1}\,.$$

Comme a_0 est le coefficient de x dans $f(x) = \sin(\frac{1}{3}\arcsin x) = \sin(\frac{1}{3}(x + \mathrm{o}(x)))$, on obtient $a_0 = 1/3$. Il s'ensuit que les a_n sont tous non nuls, donc on peut calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^{2n+1}$ par la règle de d'Alembert : si $x \neq 0$, et si $u_n = a_n x^{2n+1}$, alors

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n}x^2 = \frac{(6n+4)(6n+2)}{9(2n+3)(2n+2)}x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2\,.$$

On en déduit que $R = 1$, donc que f est développable en série entière, avec

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{3^{3n+1}}\frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{4}{27}\right)^n\binom{3n}{n}x^{2n+1}\,.$$

334. **RMS 2009 745 Mines Ponts PC**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^n \mathrm{d}x/(1+x+\cdots+x^n)$. Étudier la suite (u_n) : monotonie, convergence, développement asymptotique.

Solution. — On définit une suite (f_n) de fonctions sur $[0,+\infty[$ en posant

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+x+\cdots+x^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = 1, \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^{n+1}-1} & \text{si } x \in [0,n] \setminus \{1\}, \\[2ex] 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

On peut alors écrire $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$, puisque cette dernière intégrale est faussement impropre en 1.

Étude de la monotonie. On va montrer que la suite (u_n) décroît à partir d'un certain rang. Comme f_n est une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \int_0^n [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\,\mathrm{d}x - \int_n^{n+1} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ &\geqslant \int_0^n [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\,\mathrm{d}x - f_{n+1}(n)\int_n^{n+1} \mathrm{d}x = \int_0^n [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\,\mathrm{d}x - \frac{n-1}{n^{n+2}-1}\,\cdot \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f_n \geqslant f_{n+1}$ sur $[0,+\infty[$, donc on peut encore minorer la différence $u_n - u_{n+1}$ comme suit :

$$u_n - u_{n+1} \geqslant \int_0^1 [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\,\mathrm{d}x - \frac{n-1}{n^{n+2}-1}\,\cdot$$

Or, sur le segment $[0,1]$, on peut minorer $f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(1+x+\cdots+x^n)(1+x+\cdots+x^{n+1})}$ par $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, et on en déduit que

$$u_n - u_{n+1} \geqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} - \frac{n-1}{n^{n+2}-1} = \frac{n^{n+2} + P(n)}{(n+1)(n+2)^2(n^{n+2}-1)}\,,$$

où P est un polynôme de degré 4. Si $n \geqslant 3$, le numérateur du quotient ci-dessus est plus grand que $n^5 + P(n)$, quantité qui est positive à partir d'un certain rang.

Remarque. — Maple indique en fait que la suite décroît à partir du rang 2.

Étude de la convergence. Comme (u_n) est positive et décroissante à partir d'un certain rang, elle converge. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Pour $n \geqslant 2$, l'hypothèse de domination $|f_n| \leqslant f_2$, avec f_2 intégrable sur $[0,+\infty[$, permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim u_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\cdot$$

Étude d'un développement asymptotique. On évalue la différence entre u_n et sa limite :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_1^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

On constate que $0 \leqslant \int_n^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{+\infty} \mathrm{d}x/x^n = 1/[(n+1)n^{n+1}] = \mathrm{O}(1/n^{n+2})$. Par suite,

$$\int_1^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{n+2}}\right)\,\cdot$$

Dans l'intégrale de f_n sur $[1,+\infty[$, on effectue le changement de variable $x = 1/u$. Comme $f_n(1/u) = u^n f_n(u)$ et $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u/u^2$, on obtient

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^3)}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{n+2}}\right)\,.$$

à terminer ? ?

$$\frac{1-a}{1-a^{n+1}}\left(\frac{1-a^{n-1}}{n-1}+\frac{1-a^{n+2}}{n+2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-2}(1-x)(1+x^3)}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

335. **RMS 2009 746 Mines Ponts PC**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $u_n=\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-1/n}\,\mathrm{d}x$. Existence et calcul de la limite de (u_n).

Solution. — Soit $f_n\colon x\in[1,+\infty[\mapsto(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-1/n}$: on vient de définir une fonction continue. Comme $f_1(x)\sim 1/x^2$ au voisinage de l'infini, f_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$. Ensuite, pour $n\geqslant 2$, on a $|f_n(x)|\leqslant(1+\frac{x}{n})^{-n}\sim k/x^n$ au voisinage de l'infini, où k est la constante n^{-n}. On en déduit que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

On fixe $x\in[1,+\infty[$ et on effectue un développement asymptotique quand n tend vers l'infini :

$$f_n(x)=\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=\exp\left(-n\left[\frac{x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)=\exp\left(-x+\mathrm{o}(1)\right)\ .$$

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers $f\colon x\mapsto e^{-x}$.

On démontre ensuite que $(1+\frac{x}{n})^{-n}\leqslant(1+\frac{x}{2})^{-2}$ pour tout $n\geqslant 2$ et tout $x\geqslant 0$. Comme la fonction $u\mapsto 1/u$ est décroissante, cette inégalité équivaut à $(1+\frac{x}{n})^n\geqslant(1+\frac{x}{2})^2=1+x+x^2/4$. Or la formule du binôme de Newton montre que

$$\forall n\geqslant 2,\quad \forall x\geqslant 0,\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\geqslant 1+x+\frac{n(n-1)x^2}{2n^2}\cdot$$

Il suffit donc de montrer que $n(n-1)/2n^2\geqslant 1/4$, ou encore que $2n(n-1)=2n^2-2n\geqslant n^2$, ou encore que $n^2-2n=n(n-2)\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 2$, ce qui est vrai.

Comme $x^{-1/n}=\exp(-[\ln x]/n)\leqslant 1$ pour tout $x\geqslant 1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on en déduit que f_n vérifie l'hypothèse de domination

$$\forall n\geqslant 2,\quad \forall x\in[1,+\infty[,\quad |f_n(x)|\leqslant\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}\cdot$$

La fonction $x\mapsto(1+\frac{x}{2})^{-2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, le théorème de convergence dominée prouve que

$$\lim_{+\infty}u_n=\int_1^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{e}\cdot$$

336. **RMS 2009 747 Mines Ponts PC**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^n}\,\mathrm{d}t$.

(a) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.

(b) Déterminer un équivalent de I_n.

Solution. — On pose $f_n\colon t\in[0,+\infty[\mapsto t^2/(1+t^4)^n$. Comme $f_n(t)\sim 1/t^{4n-2}$ au voisinage de l'infini et comme $4n-2\geqslant 2$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale I_n est bien définie.

(a) On intègre I_n par parties en dérivant le dénominateur :

$$\begin{aligned}I_n&=\left[\frac{t^3}{3(1+t^4)^n}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{t^3\times 4nt^3}{3(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{4n}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\ ,\\&=\frac{4n}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^2(1+t^4-1)}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{4n}{3}\left(I_n-I_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que $I_{n+1}=[(4n-3)/4n]I_n=(1-3/4n)I_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

(b) On déduit de la question précédente que $I_n=I_0\prod_{k=1}^n(1-3/4k)$. La question revient à calculer un équivalent du produit $p_n=\prod_{k=1}^n(1-3/4k)$.

Dans un premier temps (même si cette étape n'est pas nécessaire), on montre que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers zéro. Comme $\ln p_n=\sum_{k=1}^n\ln(1-3/4k)$ et comme $\ln(1-3/4k)\sim -3/4k$, comme la série de terme général $-3/4n$ diverge vers $-\infty$, le théorème relatif aux équivalents de signe fixe montre que la série dont la somme partielle d'ordre n est $\ln p_n$ diverge vers $-\infty$. On en déduit que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers zéro, et qu'il en est de même de $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

On montre dans un second temps qu'il existe une constante $k>0$ et un exposant $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $p_n\sim k/n^\alpha$. Cela revient (technique de télescopage) à montrer que la suite de terme général $a_n=n^\alpha p_n$ converge vers une limite strictement positive, on encore que la suite de terme général $b_n=\ln a_n$ converge, ou encore que la série de terme général $c_n=b_{n+1}-b_n$ converge. Or

$$\begin{aligned}c_n &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\left(1-\frac{3}{4[n+1]}\right)\right]=\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{3}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\ &=\frac{\alpha-3/4}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que la série de terme général c_n converge si et seulement si $\alpha=3/4$. Alors

$$I_n\sim\frac{kI_0}{n^{3/4}}\,.$$

La valeur de I_0 est calculée à l'exercice 327 page 223 : on a $I_0=\pi\sqrt{2}/4$.

337. **RMS 2009 748 Mines Ponts PC**

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^{\pi/2}(\cos(\frac{2}{\pi}\sin x))^n\,\mathrm{d}x$. Étudier la suite (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général u_n^α pour $\alpha\in\mathbb{R}$?

Solution. — Elle mériterait d'être améliorée ? ?

On pose $f_n\colon t\in[0,\pi/2]\mapsto(\cos(\frac{2}{\pi}\sin x))^n$, ce qui définit une suite de fonctions continues sur $[0,\pi/2]$. On constate que $\forall x\in\,]0,\pi/2]$, $|\cos(\frac{2}{\pi}\sin x)|<1$, et on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux f sur $[0,\pi/2]$ définie par $f(0)=1$ et $f(x)=0$ si $0<x\leqslant\pi/2$. L'hypothèse de domination $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant 1$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim u_n=\int_0^{\pi/2}f(x)\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Comme $u_n>0$ pour tout n (on intègre une fonction continue et strictement positive), le terme général u_n^α est bien défini pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, et, si $\alpha\leqslant 0$, il ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini : dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ est divergente.

On suppose désormais que $\alpha>0$. La fonction sinus étant convexe sur $[0,\pi/2]$, son graphe est situé au dessus-de sa corde sur ce segment et au-dessous de sa tangente en zéro : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$. On multiplie cette inégalité par $2/\pi$, ce qui donne trois nombres du segment $[0,1]$, et on applique la fonction cosinus, décroissante sur $[0,1]$:

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad \cos\left(\frac{2}{\pi}x\right)\leqslant\cos\left(\frac{2}{\pi}\sin x\right)\leqslant\cos\left(\frac{4}{\pi^2}x\right).$$

On obtient trois nombres positifs : on peut donc élever à la puissance n, effectuer les changements de variables respectifs $u=2x/\pi$ et $u=4x/\pi^2$, et élever à la puissance positive α pour obtenir

$$\left(\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos^n u\,\mathrm{d}u\right)^\alpha=\left(\int_0^{\pi/2}\cos^n\left(\frac{2}{\pi}x\right)\mathrm{d}x\right)^\alpha\leqslant u_n^\alpha\leqslant\left(\int_0^{\pi/2}\cos^n\left(\frac{4}{\pi^2}x\right)\mathrm{d}x\right)^\alpha=\left(\frac{\pi^2}{4}\int_0^{2/\pi}\cos^n u\,\mathrm{d}u\right)^\alpha.$$

Pour tout $a\in\,]0,\pi[$, on prouve (voir plus bas) que l'intégrale $\int_0^a\cos^n u\,\mathrm{d}u$ est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes strictement positives b et c telles que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\frac{b}{\sqrt{n}}\leqslant\int_0^a\cos^n u\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{c}{\sqrt{n}}\,.$$

L'encadrement précédent prouve alors l'existence de deux constantes strictement positives m et M telles que $\frac{m}{n^{\alpha/2}}\leqslant u_n^\alpha\leqslant\frac{M}{n^{\alpha/2}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il en résulte que la série de terme général u_n^α converge si et seulement si

$$\alpha>2\,.$$

On prouve maintenant le résultat annoncé sur l'ordre de grandeur de $v_n:=\int_0^a\cos^n u\,\mathrm{d}u$, en suivant la démarche utilisée pour les intégrales de Wallis, c'est-à-dire pour le cas où $a=\pi/2$. Une intégration par parties donne une relation de récurrence entre v_n et v_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$:

$$v_n = \int_0^a \cos^{n-2}(1-\sin^2 u)u\,\mathrm{d}u = v_{n-2} - \int_0^a (\cos^{n-2} u \sin u) \times \sin u\,\mathrm{d}u\,,$$
$$= v_{n-2} + \left[\frac{\cos^{n-1} u}{n-1}\sin u\right]_0^a - \frac{1}{n-1}\int_0^a \cos^n u\,\mathrm{d}u = v_{n-2} - \frac{v_n}{n-1} + \frac{\cos^{n-1} a}{n-1}\sin a\,.$$

On en déduit que $v_n = \frac{n-1}{n}v_{n-2} + \frac{\cos^{n-1} a}{n}\sin a$. En divisant cette égalité par le nombre non nul v_{n-2}, et en faisant tendre n vers l'infini, on établit que

$$v_n \sim v_{n-2}\,.$$

Par ailleurs, la suite de terme général v_n est décroissante (on rappelle que $\cos u \in [0,1]$ pour tout $u \in [0,a]$). En divisant l'encadrement $v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant v_{n-2}$ par le nombre strictement positif v_n, on prouve enfin que

$$v_n \sim v_{n-1}\,.$$

On pose ensuite $w_n = nv_nv_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. La relation de récurrence, qui s'écrit encore $nv_n = (n-1)v_{n-2} + \cos^{n-1} a \sin a$ pour tout $n \geqslant 2$, montre que

$$\forall n \geqslant 2, \quad w_n = nv_nv_{n-1} = \big((n-1)v_{n-2} + \cos^{n-1} a \sin a\big)\, v_{n-1} = w_{n-1} + \cos^{n-1} a \sin a\, v_{n-1}\,.$$

Il en résulte immédiatement que $w_n = w_1 + \sin a \sum_{k=1}^{n-1} v_k \cos^k a$ pour tout $n \geqslant 2$, et on constate que cela reste vrai pour $n = 1$. Comme $0 \leqslant v_k \leqslant \int_0^a \mathrm{d}u = a$, on en déduit (tous les termes étant positifs) que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$w_1 \leqslant w_n \leqslant w_1 + a\sin a \sum_{k=1}^{n-1}\cos^k a = w_1 + a\sin a\cos a\frac{1-\cos^{n-1} a}{1-\cos a} \leqslant w_1 + \frac{a\sin a\cos a}{1-\cos a}\,.$$

En d'autres termes, la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée par deux constantes strictement positives. Comme $w_n = nv_nv_{n-1} \sim nv_n^2$, il en résulte que la suite (v_n), à termes strictement positifs, est elle aussi bornée par deux constantes strictement positives : il existe $(c,d) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $c \leqslant nv_n^2 \leqslant d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la preuve.

338. **RMS 2009 749 Mines Ponts PC**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ périodique de période 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. — La condition cherchée est « La valeur moyenne de f est nulle : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ». On note u_n le terme général de la série à étudier.

Elle est suffisante. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, ce qui revient à supposer que $\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour n'importe quel nombre réel x. On note F la primitive de f qui s'annule en zéro : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette fonction F est périodique de période 1, car $F(x+1) = F(x) + \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ grâce à la relation de Chasles, puis $F(x+1) = F(x)$ au vu de l'hypothèse sur f. En particulier, pour tout n entier naturel, $F(n) = F(0) = 0$. On intègre par parties le terme général :

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{F(n+1)}{n+1} - \frac{F(n)}{n} + \int_n^{n+1} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme F est continue et périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence d'une constante $k > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant k\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{k}{n^2}\,.$$

Il en résulte que $\sum u_n$ converge.

Elle est nécessaire. On raisonne par contraposition, en supposant que $m = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. On pose alors $g = f - m$, ce qui définit une fonction continue de valeur moyenne nulle, et on pose $v_n = \int_n^{n+1} \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. La démarche ci-dessus montre que $\sum v_n$ converge. Or

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)-m+m}{t}\,\mathrm{d}t = v_n + m\underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{w_n}\,.$$

Comme la somme partielle d'ordre n de la série de terme général w_n vaut $m\ln n$ avec $m \neq 0$, la série $\sum w_n$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge aussi.

339. **RMS 2009 752 Mines Ponts PC**
Soit $f\colon x \mapsto \int_x^{+\infty} \mathrm{d}t/[t(e^{\sqrt{t}}-1)]$. Montrer que f est continue puis que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Solution. — Tout d'abord, la fonction $g\colon t \mapsto 1/[t(e^{\sqrt{t}}-1)]$ est définie et intégrable sur $[x,+\infty[$ pour tout $x>0$, car $t^2 g(t) = t/(e^{\sqrt{t}}-1)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Ainsi, f est définie sur $]0,+\infty[$. De plus, $-f$ est une primitive de la fonction continue g, puisque $-f(x) = \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$ où c est une constante, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc est *a fortiori* continue.

Étude f au voisinage de zéro. La positivité de g et l'inégalité de convexité $\forall u \in \mathbb{R},\ 1+u \leqslant e^u$ entraînent que $\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ 1/(e^u-1) \leqslant 1/u$, puis

$$\forall x \in]0,1],\quad 0 \leqslant f(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} + f(1) = [-2t^{-1/2}]_x^1 + f(1) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2 + f(1)\,.$$

Cet encadrement prouve que f est intégrable sur $]0,1]$.

Étude f au voisinage de l'infini. Les comparaisons usuelles montrent que $e^u \geqslant u^4+1$ au voisinage de l'infini, donc $1/(e^{\sqrt{t}}-1) \leqslant 1/t^2$, puis que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2x^2}$$

au voisinage de l'infini. Cet encadrement prouve que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

340. **RMS 2009 761 Mines Ponts PC**
Soit $f\colon x \mapsto \int_x^{x^2} \mathrm{d}t/\ln t$.

(a) Montrer que f est définie sur $]0,1[$. Déterminer les limites de f quand $x \to 0^+$ et quand $x \to 1^-$.

(b) Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) Si $x \in]0,1[$, le segment $[x^2,x]$ est inclus dans $]0,1[$, intervalle où la fonction logarithme est définie et ne s'annule pas, donc f est définie sur $]0,1[$. Comme la fonction logarithme est négative et décroissante sur $]0,1[$, son inverse est une fonction croissante, donc $\forall t \in [x^2,x],\ 1/\ln(x^2) \leqslant 1/\ln t \leqslant 1/\ln x$, donc

$$\forall x \in]0,1[\,,\quad \frac{x-x^2}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x-x^2}{\ln x}\,.$$

Le théorème d'encadrement montre alors que $\lim_{0^+} f = 0$. On va démontrer ensuite que

$$\lim_{1^-} f = \ln 2\,.$$

Les résultats relatifs à l'intégration des relations de comparaison n'étant pas au programme de la filière PC, on montre à la main que la différence suivante tend vers zéro quand x tend vers 1 :

$$f(x) - \ln 2 = f(x) - \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \ln 2 = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t + \ln|x^2-1| - \ln|x-1| - \ln 2\,,$$
$$= \underbrace{\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t}_{u(x)} + \underbrace{\ln|x+1| - \ln 2}_{v(x)}\,.$$

Il est clair que $\lim_1 v(x) = 0$. Il reste donc à étudier $u(x)$. Or $\ln t \sim t-1$ au voisinage de 1, donc $1/\ln t \sim 1/(t-1)$ au voisinage de 1, ce qui signifie que $\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} = \mathrm{o}(\frac{1}{t-1})$ au voisinage de 1.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in [1-\alpha,1[$, on ait $|\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{|t-1|}$. Il existe alors $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in [1-\beta,1[$, on ait $1-\alpha \leqslant x^2 \leqslant x < 1$. Alors (on prendra garde d'intégrer sur le segment $[x^2,x]$ puisque $x^2 \leqslant x$) :

$$\forall x \in [\beta,1[\,,\quad |u(x)| \leqslant \int_{x^2}^x \left|\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_{x^2}^x \frac{\mathrm{d}t}{|t-1|} = \varepsilon[-\ln(1-t)]_{x^2}^x = \varepsilon \ln(1+x) \leqslant (\ln 2)\varepsilon\,.$$

On a bien démontré que $\lim_{1^-} u = 0$, ce qui achève le calcul de $\lim_{1^-} f$.

(b) On pose $g(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ pour tout $t \in]0,1[$. La fonction ainsi définie est continue, prolongeable par continuité en zéro par la valeur $g(0) = 0$ et en 1 par la valeur $g(1) = 1$, en vertu de l'équivalent usuel du logarithme en 1. L'intégrale proposée est donc bien convergente.

Soit $x \in]0,1[$. On calcule $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (t/\ln t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{d}t/\ln t$ en effectuant le changement de variable $u = t^2$ dans la première intégrale : comme $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ et $2\ln t = \ln u$, on obtient

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

La question précédente montre alors que

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_{1^-} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{1^-} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \ln 2\,.$$

341. **RMS 2009 767 Mines Ponts PC**

Résoudre $R^2 + 2R'^2 - RR'' = 0$ avec $R(0) = a > 0$ et $R'(0) \neq 0$.

Solution. — Elle est due à Marc Becker.

On remarque que R ne s'annule pas sur un voisinage Vde zéro puisque $R(0) \neq 0$. On peut donc effectuer, sur V, le changement de fonction $u = 1/R$. Alors

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{R'}{R^2}\,, \\ u'' &= -\frac{R''}{R^2} + 2\frac{R'^2}{R^3} = \frac{2R'^2 - RR''}{R^3}\,. \end{aligned}$$

En divisant par R^3 l'équation différentielle de l'énoncé, on montre que cette dernière est équivalente, sur V, à $u'' + u = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \lambda \cos + \mu \sin$. Si l'on désigne par b la valeur de $R'(0)$, on obtient $\lambda = 1/a$ et $\mu = u'(0) = -R'(0)/R^2(0) = -b/a^2$. Par suite,

$$\forall t \in V, \quad R(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{a^2}{a\cos t - b \sin t}\,.$$

Le plus grand intervalle $V_{\max}$ contenant zéro sur lequel l'expression ci-dessus a un sens est

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \left]\arctan\left(\frac{a}{b}\right) - \pi, \arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right[\,, \quad \text{si } b > 0, \\ V_{\max} &= \left]\arctan\left(\frac{a}{b}\right), \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi\right[\,, \quad \text{si } b < 0. \end{aligned}$$

342. **RMS 2009 768 Mines Ponts PC**

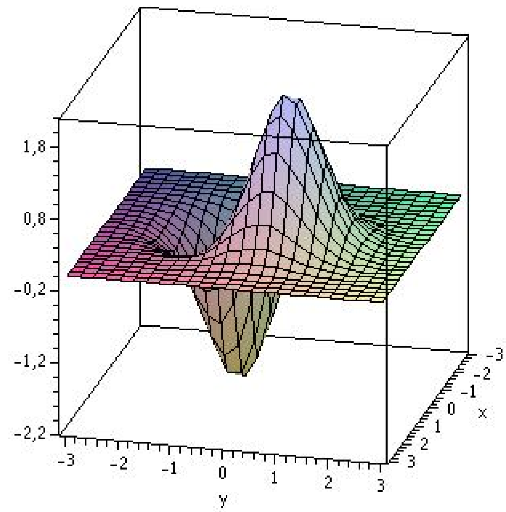
Déterminer les extrema de $(x,y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$.

Solution. — L'ouvert de départ considéré est bien sûr $\mathbb{R}^2$, et on note f la fonction à étudier. Les comparaisons usuelles prouvent que $|f(x,y)|$ tend vers zéro quand la norme du vecteur (x,y) tend vers l'infini, la fonction f est continue, et ces deux arguments assurent l'existence d'extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on recherche ses extrema locaux en déterminant ses points critiques :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3 - 2x(3x+4y))\,e^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (4 - 2y(3x+4y))\,e^{-x^2-y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} 3 - 2x(3x+4y) = 0\,, \\ 4 - 2y(3x+4y) = 0\,, \end{cases} \iff \begin{cases} (3x+4y) = 3/(2x)\,, \\ 4 - (3y/x) = 0\,, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (3x + 16x/3) = 3/(2x)\,, \\ y = 4x/3\,, \end{cases} \iff \begin{cases} 25x^2 = 9/2\,, \\ y = 4x/3\,, \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}(3,4)\ . \end{aligned}$$

Comme on sait déjà que f va admettre au moins un minimum global donc local, et un maximum global donc local, les deux point déterminés ci-dessus sont nécessairement les points où f atteint ses bornes, et il ne reste plus qu'à vérifier qui est qui. Or $f(\frac{\sqrt{2}}{10}(3,4)) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $f(-\frac{\sqrt{2}}{10}(3,4)) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$: la fonction f atteint son maximum en le premier point et le minimum en le second. Voici une vue du graphe $z = f(x,y)$ de f fournie par Maple



Géométrie

343. **RMS 2010 701 Mines Ponts PC**

On se place dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit Ω un point de la droite $y = x$ différent de O. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note P le point d'intersection de (Oy) et de la droite passant par Ω et dirigée par $\overrightarrow{u_\theta}$, et Q le point d'intersection de (Ox) et de la droite passant par Ω et dirigée par $\overrightarrow{u}_{\theta+\pi/2}$, et enfin H le projeté orthogonal de O sur (PQ). Déterminer le lieu des points H lorsque θ varie.

Solution. — Les calculs de cet exercice me paraissent excessivement longs et difficiles à réaliser sans un outil de calcul formel. On peut d'ailleurs les consulter intégralement dans le fichier Maple correspondant. Merci de vérifier, et de m'indiquer l'erreur probable ? ?

On note $\mathcal{R}$ le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{B}$ la base sous-jacente, et D_θ la droite passant par Ω dirigée par $\overrightarrow{u_\theta}$. On suppose que $\Omega = (a, a)$ dans $\mathcal{R}$. Alors une équation de D_θ dans $\mathcal{R}$ est $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u_\theta}) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x-a & \cos\theta \\ y-a & \sin\theta \end{vmatrix} = (x-a)\sin\theta - (y-a)\cos\theta = 0.$$

Cette droite est sécante avec Oy si et seulement si $\theta \not\equiv \pi/2 \mod \pi$, et alors le point P a pour coordonnées $(0, a(1-\tan\theta))$ dans $\mathcal{R}$. La droite $D_{\theta+\pi/2}$, d'équation $(x-a)\cos\theta + (y-a)\sin\theta = 0$ dans $\mathcal{R}$, est sécante avec Ox pour la même condition, et alors le point Q a pour coordonnées $(a(1+\tan\theta), 0)$ dans $\mathcal{R}$.

La droite (PQ) a pour équation $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})$ dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x & a(1+\tan\theta) \\ y - a(1-\tan\theta) & -a(1-\tan\theta) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou encore} \quad (1-\tan\theta)x + (1+\tan\theta)y = a(1-\tan^2\theta).$$

Le point H est défini par les deux conditions $H \in (PQ)$ et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, c'est-à-dire par le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1-\tan\theta)x + (1+\tan\theta)y & = & a(1-\tan^2\theta), \\ (1+\tan\theta)x - (1-\tan\theta)y & = & 0. \end{array} \right.$$

On trouve que le lieu des points H est le support de la courbe paramétrée suivante :

$$x = a\frac{(1-\tan\theta)(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan^2)^2} = \frac{a}{2}F(\tan\theta),$$
$$y = a\frac{(1+\tan\theta)(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan^2)^2} = \frac{a}{2}G(\tan\theta),$$

où F et G sont les fractions rationnelles $(1 - X - X^2 + X^3)/(1 + X^4)$ et $(1 + X - X^2 - X^3)/(1 + X^4)$.

Dans la suite, on suppose que $a = 2$. La fonction tangente étant π-périodique, on mène l'étude de la courbe paramétrée sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Comme cette fonction est de plus impaire, et comme $F(-X) = G(X)$, l'ensemble d'étude sera en fait $[0, \pi/2[$, et on obtiendra la totalité de la courbe par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.
Comme $x'(\theta) = F'(\tan\theta)\tan'(\theta)$, que $\tan'(\theta) > 0$ sur $[0, \pi/2[$ et que $\tan\theta$ décrit $\mathbb{R}_+$ quand θ décrit $[0, \pi/2[$, il suffit d'étudier le signe de F' sur $\mathbb{R}_+$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -\frac{x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{(1+x^4)^2} = -\frac{(x-1)(x^5 - x^4 - 4x^3 - 3x - 1)}{(1+x^4)^2}.$$

Si l'on pose $N(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 - 3x - 1$, on a $N'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 3$, $N''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 24x = 4x(5x^2 - 3x - 6)$. En posant $x_0 = (3 + \sqrt{129})/10$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
$N''(x)$	0	$-$	0			$+$			
$N'(x)$	-3		$-$		0		$+$		$+\infty$
$N(x)$	-1			$-$			0	$+$	$+\infty$

Comme $N(2) = -23 < 0$ et $N(3) = -44 > 0$, on peut affirmer que $x_2 \in]2, 3[$. Un calcul numérique plus précis donne $x_2 \approx 2,67$ et $F(x_2) \approx 0,20$ au centième près. Le tableau de variation de x sur $[0, \pi/2[$ est donc le suivant

θ	0		$\pi/4$		$\arctan(x_2)$		$+\infty$
$x'(\theta)$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(\theta)$	1		0		$F(x_2)$		0

On profite ensuite de la relation $G(X) = F(-X)$ pour calculer $y'(\theta) = -F'(-\tan\theta)\tan'\theta$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -F'(-x) = \frac{x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{(1+x^4)^2} = \frac{(x+1)(x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x + 1)}{(1+x^4)^2}.$$

Si l'on pose $R(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x + 1 = -N(-x)$, on a $R'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 3$, $R''(x) = 20x^3 + 12x^2 - 24x = 4x(5x^2 + 3x - 6)$. En posant $y_0 = (-3 + \sqrt{129})/10$, on en déduit le tableau de variation suivant :

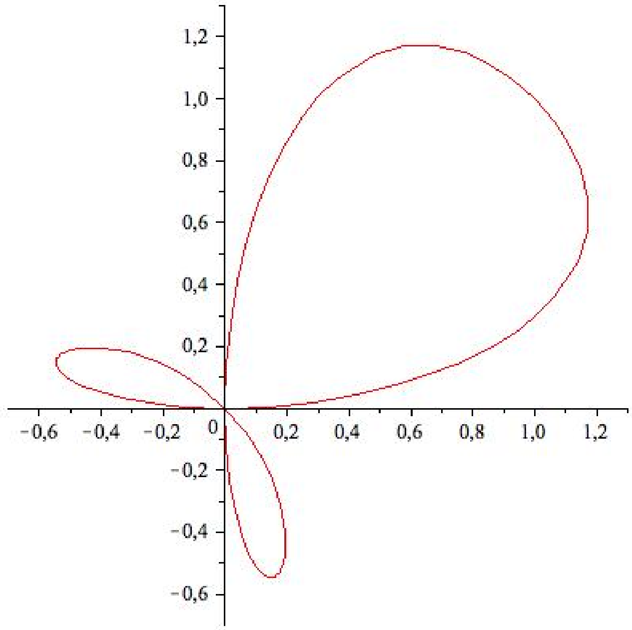
x	0		y_2		y_0		y_1		y_3		$+\infty$
$R''(x)$	0		$-$		0			$+$			
$R'(x)$	-3			$-$			0		$+$		$+\infty$
$R(x)$	1	$+$	0			$-$			0	$+$	$+\infty$

La valeur $R(y_0) = -2,94 < 0$ justifie la disposition des deux racines positives y_2 et y_3 de R. Un calcul numérique précis donne $y_2 \approx 0,30$, $y_3 \approx 1,75$ et $G(y_2) \approx 1,17$, $G(y_3) \approx -0,55$ au centième près. Le tableau de variation de y sur $[0, \pi/2[$ est donc le suivant

θ	0		$\arctan(y_2)$		$\pi/4$		$\arctan(y_3)$		$+\infty$
$y'(\theta)$	1	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	
$y(\theta)$	1		$G(y_2)$		0		$G(y_3)$		0

Une fois calculées les valeurs approchées $x(\arctan y_2) = F(y_2) = 0,62$, $x(\arctan y_3) = F(y_3) = 0,15$ et $y(\arctan x_2) = G(x_2) \approx -0,43$, on peut tracer la courbe. On l'a obtenue ci-dessous grâce aux commandes Maple suivantes :

```
F:=x->(1-x-x**2+x**3)/(1+x**4);G:=x->F(-x);x:=t->F(tan(t));y:=t->G(tan(t));
with(plots):plot([x(t),y(t),t=-Pi/2..Pi/2],view=[-0.7..1.3,-0.7..1.3]);
```



344. **RMS 2010 702 Mines Ponts PC**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit F d'équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$. Déterminer la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F.

Solution. — Le sous-espace F est l'intersection de deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^4$, donc il est de dimension 2 (utiliser la formule de Grassmann, par exemple). Les vecteurs $e_1 = (1,-2,1,0)$ et $e_2 = (2,-3,0,1)$ appartiennent à F et ne sont pas colinéaires, donc ils en forment une base.

On applique ensuite le procédé de Gram et Schmidt : on construit le vecteur

$$e_1'' = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0).$$

Le vecteur $e_2' := e_2 - \langle e_1'', e_2\rangle e_1'' = e_2 - \frac{1}{6}\langle e_1, e_2\rangle e_1 = e_2 - \frac{4}{3}e_1 = \frac{1}{3}(2,-1,-4,3)$ est orthogonal à e_1, et il ne reste plus qu'à le rendre unitaire, en posant

$$e_2'' = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3).$$

La famille (e_1'', e_2'') est une base orthonormale de F et on sait que la projection orthogonale p sur F a pour expression $\forall x \in \mathbb{R}^4,\ p(x) = \langle e_1'', x\rangle e_1'' + \langle e_2'', x\rangle e_2''$. En désignant par (i,j,k,l) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$\begin{array}{ll} p(i) &= \frac{1}{6}(1,-2,1,0) + \frac{2}{30}(2,-1,-4,3), \\ p(j) &= \frac{-2}{6}(1,-2,1,0) + \frac{-1}{30}(2,-1,-4,3), \\ p(k) &= \frac{1}{6}(1,-2,1,0) + \frac{-4}{30}(2,-1,-4,3), \\ p(l) &= \frac{0}{6}(1,-2,1,0) + \frac{3}{30}(2,-1,-4,3). \end{array} \qquad M = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 & -12 & -3 & 6 \\ -12 & 21 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & 21 & -12 \\ 6 & -3 & -12 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

345. **RMS 2010 703 Mines Ponts PC**

Soit Γ la courbe $(x(t) = t^2/2 + t,\ y(t) = t^3/3 + t^2/2)$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux tangentes à Γ orthogonales entre elles.

Solution. — On note $M(t) = (x(t), y(t))$ le point courant de Γ. Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = (t+1, t^2+t) = (t+1)(1,t)$, le vecteur $(1,t)$ dirige la tangente à Γ en $M(t)$ pour tout $t \neq -1$. Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ M''(t) = (1, 2t+1)$, on a en particulier $M''(-1) = (1,-1) \neq 0$, et on constate finalement que le vecteur $(1,t)$ dirige la tangente à Γ en $M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, les tangentes à Γ en $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire $(1,t_1)\cdot(1,t_2) = 1 + t_1t_2$ est nul. On cherche alors l'intersection de la droite passant par $M(t)$ dirigée par $(1,t)$ et de la droite passant par $M(-1/t)$ dirigée par $(1,-1/t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. On résout donc le système suivant [on utilise la factorisation

$t^6+1=(t^2+1)(t^4-t^2+1)]$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} t\left(x-x(t)\right)-\left(y-y(t)\right) &=& 0,\\ -\frac{1}{t}\left(x-x\left(-\frac{1}{t}\right)\right)-\left(y+y\left(-\frac{1}{t}\right)\right) &=& 0,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t\left(x-\dfrac{t^2}{2}-t\right)-\left(y-\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}\right) &=& 0,\\ \dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{t}\right)+\left(y+\dfrac{1}{3t^3}-\dfrac{1}{2t^2}\right) &=& 0,\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} tx-y &=& \dfrac{t^3}{6}+\dfrac{t^2}{2},\\ \dfrac{x}{t}+y &=& \dfrac{1}{6t^3}-\dfrac{1}{2t^2},\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} tx-y &=& \dfrac{t^3}{6}+\dfrac{t^2}{2},\\ x+ty &=& \dfrac{1}{6t^2}-\dfrac{1}{2t},\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{\frac{t^4}{6}+\frac{t^3}{2}+\frac{1}{6t^2}-\frac{1}{2t}}{t^2+1},\\ y &=& \dfrac{\frac{1}{6t}-\frac{1}{2}-\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}}{t^2+1},\end{array}\right.$$

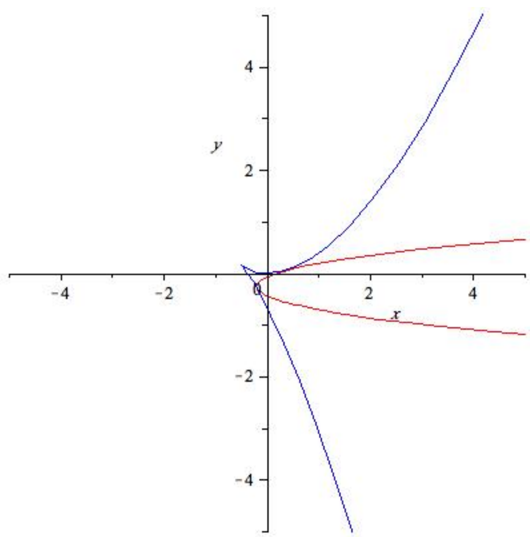
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{\frac{1}{6}(t^6+1)+\frac{t}{2}(t^4-1)}{t^2(t^2+1)},\\ y &=& \dfrac{\frac{1}{6}(1-t^4)-\frac{t}{2}(1+t^2)}{t(t^2+1)},\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{\frac{1}{6}(t^4-t^2+1)+\frac{t}{2}(t^2-1)}{t^2},\\ y &=& \dfrac{\frac{1}{6}(1-t^2)-\frac{t}{2}}{t},\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{t^4+3t^3-t^2-3t+1}{6t^2},\\ y &=& \dfrac{-t^2-3t+1}{6t}.\end{array}\right.$$

Voici les tracés de la courbe d'origine $t\mapsto M(t)$ en bleu et du lieu recherché (en rouge), obtenus grâce aux commandes suivantes :

```
x:=t->t**2/2+t;y:=t->t**3/3+t**2/2;
e1:=diff(y(t),t)*(u-x(t))-diff(x(t),t)*(v-y(t));
e2:=subs(t=-1/t,e1);solve({e1,e2},{u,v});
assign(%);
A:=plot([u,v,t=-1..1],x=-1..5,y=-1..5):
B:=plot([x(t),y(t),t=-5..5],x=-5..5,y=-5..5,color=blue):
display([A,B]);
```



346. **RMS 2010 704 Mines Ponts PC**

Déterminer les coniques $\mathcal{C}$ telles que $(0,2)$ et $(1,0)$ soient sur $\mathcal{C}$, la tangente en $(0,2)$ à $\mathcal{C}$ soit parallèle à l'axe des ordonnées et la tangente en $(1,0)$ à $\mathcal{C}$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

Solution. — à rédiger ? ?

347. **RMS 2010 705 Mines Ponts PC**

Soient $R > 0$ et Γ la courbe $(x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = xR)$. Trouver la tangente à Γ en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Solution. — Voir l'exercice 522 page 366 pour les justifications des affirmations théoriques qui vont suivre.

La courbe Γ est l'intersection de la sphère de centre O de rayon R — d'équation $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ — et du cylindre d'équation $C(x, y, z) := (x - R/2)^2 + y^2 - (R/2)^2 = 0$, cylindre de rayon $R/2$ d'axe parallèle à Oz et tangent intérieurement à la sphère en le point $(R, 0, 0)$.

On vérifie que $\operatorname{grad} S(x, y, z) = 2(x, y, z)$ et $\operatorname{grad} C(x, y, z) = (2x - R, 2y, 0)$ ne sont jamais nuls respectivement sur S et sur C, donc qu'ils dirigent la normale aux plans tangents en tous points de S et C respectivement.

Si, en un point M_0 de Γ, ces plans tangents sont distincts, la tangente à Γ en ce point est l'intersection desdits plans tangents, donc est dirigée par le produit vectoriel des vecteurs gradients. On trouve (on abandonne les indices zéro) :

$$\operatorname{grad} S(x, y, z) \wedge \operatorname{grad} C(x, y, z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2x - R \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2yz \\ 2xz - Rz \\ Ry \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est nul si et seulement si $y = 0$ et ($z = 0$ ou $x = R/2$). De tels points se trouvent-ils sur Γ ?

– Si $z = 0$, il s'agit d'un point de la forme $(x, 0, 0)$, qui se trouve sur Γ si et seulement si $x = R$, c'est-à-dire si et seulement si c'est le point de tangence de S et C.
– Si $x = R/2$, il s'agit d'un point de la forme $(R/2, y, 0)$, qui se trouve sur S si et seulement si $y = \pm\sqrt{3}R/2$, et se trouve sur C si et seulement si $y = \pm R/2$: il ne peut donc pas se trouver sur Γ.

On conclut que si $M = (x_0, y_0, z_0) \neq (R, 0, 0)$ appartient à Γ, la tangente à Γ y est dirigée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2y_0z_0 \\ 2x_0z_0 - Rz_0 \\ Ry_0 \end{pmatrix}.$$

En le point particulier $(R, 0, 0)$, la courbe présente un point double, et on invite le lecteur à se reporter à l'exercice cité au début de la résolution pour des calculs et des figures.

348. **RMS 2010 706 Mines Ponts PC**

Nature de la surface d'équation $2x^2 + 3y - 4z^2 = 5$.

Solution. — On reconnaît l'équation réduite $y' = \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$ d'un paraboloïde hyperbolique, avec $y' = y - \frac{5}{3}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Il est possible qu'un carré ait disparu dans l'énoncé : l'équation $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 5$ est celle d'un hyperboloïde à une nappe.

349. **RMS 2010 707 Mines Ponts PC**

Nature de la surface d'équation $5x^2 + 7y^2 - 2z^2 = 5$.

Solution. — Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.

350. **RMS 2010 708 Mines Ponts PC**

Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $\mathcal{S}$ la surface d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ coupant (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement en A, B et C avec $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Solution. — Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en (x_0, y_0, z_0) est normal au gradient de $f \colon (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, puisqu'il n'est jamais nul sur $\mathcal{S}$. Il a donc pour équation

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} - 1 = 0.$$

Un tel plan est sécant avec les trois axes de coordonnées si et seulement si $x_0y_0z_0 \neq 0$, et alors les points d'intersections sont donnés par $A = (\frac{a^2}{x_0}, 0, 0)$, $B = (0, \frac{b^2}{y_0}, 0)$ et $C = (0, 0, \frac{c^2}{z_0})$. La condition cherchée est donc $\frac{x_0}{a^2} = \frac{y_0}{b^2} = \frac{z_0}{c^2}$, ce qui permet d'exprimer $y_0 = \frac{b^2}{a^2}x_0$ et $z_0 = \frac{c^2}{a^2}x_0$ en fonction de x_0. On reporte alors ces valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde, et on trouve

$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^4}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \exists\varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad x_0 = \varepsilon\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On calcule des expressions analogues pour y_0 et z_0, et comme $\frac{x_0}{a^2} = \frac{y_0}{b^2} = \frac{z_0}{c^2}$, les trois coordonnées ont le même signe. Finalement, il existe deux tels points (on vérifie immédiatement qu'ils conviennent) :

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\left(a^2, b^2, c^2\right).$$

351. **RMS 2010 709 Mines Ponts PC**

Déterminer le lieu des projections orthogonales de O sur les plans tangents à la surface d'équation $xyz = a^3$ avec $a > 0$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 618 page 412.

Soit $f\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz - a^3$, de sorte que la surface étudiée, notée (S), ait pour équation $f(x, y, z) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{grad} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)\,.$$

Le vecteur gradient étant non nul sur (S), il dirige la normale au plan tangent (P) à (S) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, qui a donc pour équation

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + y_0z_0(z - z_0) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3\,.$$

La droite vectorielle dirigée par $\operatorname{grad} f(M_0)$ intersecte (P) en le projeté orthogonal H_0 de O sur (P). Les points de cette droite vectorielle sont ceux de la forme $\lambda(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Un tel point appartient à (P) si et seulement si $\lambda(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2}) = 3$, ou encore $\lambda = \lambda_0 := 3(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{-1}$. Alors

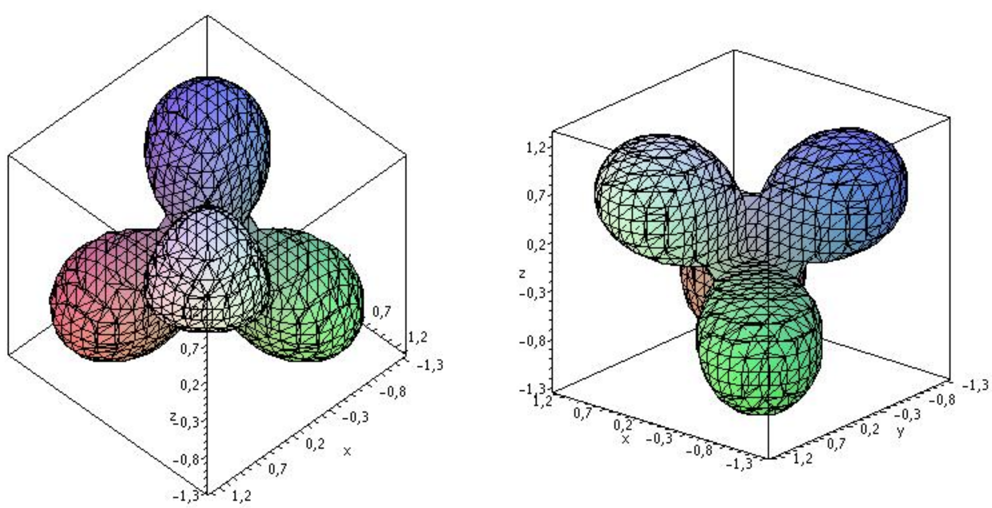
$$H_0 = \lambda_0(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1}) = \frac{3}{(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})}(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1}).$$

Il faut maintenant décrire l'ensemble $\mathcal{H}$ des points H_0 lorsque M_0 parcourt (S). On commence par laisser tomber l'indice zéro, et on définit u, v et w comme les coordonnées de H, fonctions de x, y et z. On note que $u^2 + v^2 + w^2 = \lambda^2(x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 9(x^{-2} + y^{-2} + z^{-2})^{-1} = 3\lambda$ et que $uvw = \lambda^3/(xyz) = \lambda^3/a^3$. Par suite, $\mathcal{H}$ est contenu dans la surface d'équation

$$(u^2 + v^2 + w^2)^3 = 27a^3uvw.$$

On prouverait l'inclusion réciproque ? ? Voici deux vues de $\mathcal{H}$ pour $a = 1$, obtenues en Maple grâce à

```
with(plots):r:=1.3:
implicitplot3d((x^2+y^2+z^2)^3=27*x*y*z,x=-r..r,y=-r..r,z=-r..r,grid=[20,20,20]);
```



Centrale MP

Algèbre

352. **RMS 2007 626 Centrale MP**

Montrer que toute M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles.

Solution. — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un nombre réel non nul qui n'est pas une valeur propre de M (il en existe). Alors λI_n et $M - \lambda I_n$ sont inversibles, et l'égalité $M = (\lambda I_n) + (M - \lambda I_n)$ achève la démonstration.

353. **RMS 2007 627 Centrale MP**

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer qu'il y a exactement 4 sous-espaces vectoriels stables par tous les u_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Solution. — Les sous-espaces évidents $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont stables par tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donc par les u_σ. Il en est de même de la droite $\mathcal{D}$ engendrée par $f = \sum_{i=1}^n e_i$ (car f est fixe par chaque u_σ), et de l'hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ dans la base e (car la somme des composantes d'un vecteur dans la base e est invariante par toute permutation des dites composantes). On va montrer que ce sont les seuls.

Pour commencer, soit D une droite stable par tous les u_σ, engendrée par un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Il existe au moins un indice x_i non nul. Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, on considère la transposition τ échangeant i et j. Par hypothèse, $u_\tau(x)$ est colinéaire à x : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_\tau(x) = \lambda x$. En particulier

$$x_j = \lambda x_i \ ,$$
$$x_i = \lambda x_j \ .$$

On en déduit que $x_i = \lambda^2 x_i$ et, comme $x_i \neq 0$, que $\lambda = \pm 1$, puis que $x_j = \pm x_i$. L'indice j étant quelconque, il en résulte que D est engendrée par un vecteur dont toutes les composantes appartiennent à $\{-1, 1\}$.

- Si $n = 2$, les deux vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ engendrent des droites stables par les u_σ (la première est la droite notée $\mathcal{D}$ ci-dessus, la seconde est l'hyperplan $\mathcal{H}$). Les vecteurs $(-1, -1)$ et $(1, -1)$ étant les opposés des précédents, ils engendrent les mêmes droites.
- Si $n \geqslant 3$, on montre qu'un vecteur x à composantes dans $\{-1, 1\}$ qui engendre une droite stable par les u_σ est nécessairement $(1, \ldots, 1)$ ou son opposé. Sinon, x contiendrait une composante, d'indice i, égale à 1, et une autre, d'indice j, égale à -1. Soit τ la transposition (i, j). Le raisonnement conduit plus haut montre que les vecteurs x et $u_\tau(x)$ sont colinéaires avec un coefficient de proportionnalité λ égal à ± 1. Si on examine les composantes i et j, on trouve que $\lambda = -1$. Mais, comme $n \geqslant 3$, il existe au moins une autre composante, qui a même valeur dans x et dans $u_\tau(x)$, et qui montre que $\lambda = 1$: contradiction. On en déduit que $\mathcal{D}$ est la seule droite stable par tous les u_σ.

On munit ensuite $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Les u_σ transforment la base canonique (orthonormale) e en une base orthonormale, donc sont des automorphismes orthogonaux. Par suite, si un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est stable par un (respectivement tous les) u_σ, il en est de même de $V^\perp$.

On en déduit que, si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les $u\sigma$, il en est de même de la droite $H^\perp$. L'étude faite ci-dessus en dimension $n \geqslant 3$ montre que $H^\perp = \mathcal{D}$, donc que $H = \mathcal{H}$ nécessairement (en dimension 2, les droites et les hyperplans sont confondus, et on retrouve les deux bissectrices).

Il ne reste plus qu'au montrer qu'il n'y a pas de sous-espace stable par les u_σ qui soit de dimension d avec $2 \leqslant d \leqslant n - 2$

A terminer ? ?

354. **RMS 2010 742 Centrale MP (calcul formel)**

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si le polynôme caractéristique de M est égal à $\prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})$.

(a) Trouver les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{P}$.

(b) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, comparer la somme des carrés des termes diagonaux de M et la somme des carrés des valeurs propres de M comptées avec multiplicité. En déduire les matrices symétriques réelles vérifiant $\mathcal{P}$.

(c) Trouver les matrices antisymétriques réelles vérifiant $\mathcal{P}$.

Solution. — Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note P_M le polynôme $\prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})$ défini dans l'énoncé, et χ_M son polynôme caractéristique, défini par $\chi_M = \det(XI_n - M)$: cette définition est nécessaire pour obtenir un polynôme unitaire. Dans le cas contraire, la condition $P_M = \chi_M$ de l'énoncé ne serait jamais réalisée en dimension impaire. Comme $\chi_M = \det(XI_n - M)$ est aussi la définition adoptée par Maple, tout est pour le mieux. Les matrices étudiées dans cet exercice sont celles dont les valeurs propres sont les termes diagonaux, ou *matrices à diagonale propre*. Elles ont fait l'objet de la deuxième épreuve des concours communs polytechniques de la filière MP en 2008.

(a) Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ et $P_M = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$. L'égalité entre ces deux polynômes est réalisée si et seulement si $bc = 0$, c'est-à-dire si et seulement si M est triangulaire. Il n'est nul besoin de Maple pour résoudre cette question.

En revanche, on peut écrire un programme qui détermine les matrices M vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ en toutes dimensions :

```
matricesP:=proc(n)
local M, chi, P, Lchi, LP, sols, s;
M:=matrix(n,n);
chi:=collect(charpoly(M,x),x);
P:=collect(product(x-M[i,i],i=1..n),x);
Lchi:=[subs(x=0,chi),seq(coeff(chi,x**i),i=1..n)];
LP:=[subs(x=0,P),seq(coeff(P,x**i),i=1..n)];
sols:=solve({seq(Lchi[i]=LP[i],i=1..n+1)},{seq(seq(M[i,j],i=1..n),j=1..n)});
matricestypes:=[];
for s in {sols} do matricestypes:=[op(matricestypes),subs(s,evalm(M))] end do;
op(matricestypes);
end proc;
```

Dans le programme ci-dessus, `chi` et `P` sont les polynômes χ_M et P_M définis plus haut, et `Lchi` et `LP` sont les listes des coefficients de χ_M et de P_M respectivement, classés par ordre croissant des puissances de l'indéterminée. On résout ensuite le système formé par l'identification des deux listes susdites, par rapport aux inconnues qui sont les n^2 éléments de M. La lecture du résultat, noté `sols`, est peu explicite. C'est pourquoi on demande à la procédure `matricesP` d'écrire les types de matrices correspondants, obtenus par les commandes `subs(s,evalm(M))` pour `s` parcourant `sols`.

Pour $n = 3$, on obtient ainsi 10 types de matrices dont les valeurs propres sont sur la diagonale, dont 6 sont évidents (au sens où l'on peut vérifier de tête que M satisfait $\mathcal{P}$) :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & 0 \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix},$$

Voir la session Maple pour les 4 derniers types de matrices à diagonale propre en dimension 3.

(b) Comme $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale : M est orthosemblable à une matrice $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors la somme des carrés des valeurs propres de M comptées avec multiplicité est la trace de D^2. La trace étant invariante par similitude, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr} D^2 = \operatorname{tr} M^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,i} \right) .$$

Comme M est symétrique, la dernière somme ci-dessus vaut $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2$, et on en déduit l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}^2 ,$$

avec égalité si et seulement les $m_{i,k}$ avec $i \neq k$ sont tous nuls, c'est-à-dire si et seulement si M est diagonale.

Si une matrice M symétrique réelle vérifie $\mathcal{P}$, alors la liste des coefficients diagonaux de M est aussi la liste de valeurs propres de M comptées avec multiplicité, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}^2$. L'étude du cas d'égalité que l'on vient de mener montre que M est nécessairement diagonale. La réciproque étant évidente, on conclut que les matrices symétriques réelles vérifiant $\mathcal{P}$ sont exactement les matrices diagonales.

(c) Soit A une matrice antisymétrique réelle à diagonale propre. Toutes les matrices antisymétriques ayant leurs coefficients diagonaux nuls, on en déduit que zéro est l'unique valeur propre de A. Comme A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc $A^n = 0$ (calcul classique). Mais alors, comme ${}^tA = -A$ commute avec A, on a aussi $({}^tAA)^n = ({}^tA)^n A^n = 0$. Or ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme elle est nilpotente, zéro est sa seule valeur propre, et comme elle est diagonalisable, elle est nulle. Or l'élément (i,i) de ${}^tAA = -A^2$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} (-a_{k,i}) a_{k,i} = -\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 .$$

On en déduit que tous les $a_{k,i}$ sont nuls, et ceci quels que soient i et k, donc que A est nulle. La réciproque étant évidente, on conclut que la seule matrice antisymétrique réelle vérifiant $\mathcal{P}$ est la matrice nulle.

Remarque. — Si on admet le théorème de réduction des matrices antisymétriques réelles (elles sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ dans une base orthonormale, avec des valeurs propres imaginaires pures), le résultat est immédiat. Si A est antisymétrique réelle et vérifie $\mathcal{P}$, alors $\chi_A = X^n$, puisque les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par suite, zéro est l'unique valeur propre de A, et comme A est diagonalisable, elle est nulle.

On peut avoir l'intuition du résultat, en demandant à Maple de calculer le polynôme caractéristique d'une matrice antisymétrique réelle générique pour les petits ordres, grâce à la procédure `det_anti` que voici :

```
det_anti:=proc(n,x)
local A, i ,j;
A:=matrix(n,n);
for i from 1 to n do for j from 1 to i-1 do A[i,j]:=-A[j,i] end do end do;
for i from 1 to n do A[i,i]:=0 end do;
charpoly(A,x)
end proc;
```

Les polynômes caractéristiques obtenus sont tous de la forme $x^n + a_{n-2}(A)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \det(A)$: le terme de degré $n-1$ est nul, puisque les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique A sont nuls, donc sa trace l'est aussi. La commande `coeff(P,x,k)`, qui donne le coefficient de x^k dans le polynôme P, permet de sélectionner la valeur de $a_{n-2}(M)$, et on observe (voir la session Maple) que, pour les petites valeurs de n :

$$a_{n-2}(A) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}^2 \,.$$

On en déduit que si $\chi_A = X^n$, alors $a_{n-2}(A) = 0$, donc tous les coefficients non diagonaux de A sont nuls, donc A est nulle. Voici une preuve de l'observation ci-dessus. En utilisant l'expression

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \,,$$

on montre que le coefficient de x^{n-2} dans le déterminant de $M = xI_n - A$ est la somme des $\prod_{k=1}^n m_{\sigma(k),k}$ pour les permutations σ ayant $n-2$ points fixes (il faut que exactement $n-2$ facteurs $m_{\sigma(k),k}$ soient diagonaux, c'est-à-dire égaux à x). En d'autres termes, ces permutations sont les transpositions $\tau = \tau_{i,j}$, définies par le choix de deux indices i et j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Dans ce cas $m_{\tau(i),i} = m_{j,i} = -a_{j,i} = a_{i,j}$ (la dernière égalité résulte du caractère antisymétrique de A), et $m_{\tau(j),j} = -a_{i,j}$. Comme la signature d'une transposition vaut -1, le terme $\varepsilon(\tau)\prod_{k=1}^n m_{\tau(k),k}$ vaut $a_{i,j}^2 x^{n-2}$, et la formule attendue en résulte.

Analyse

355. RMS 2007 691, Centrale MP

On pose $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|y+tx|}{1+t+t^2}$ et $E(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Montrer que N est une norme sur le plan $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer les bornes sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de N/E.

Solution. — La complexité des calculs qui suivent me laissent penser qu'il y a une erreur, le recours au calcul formel me semblant inévitable. Des idées ? ?

(a) Comme le trinôme du dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et comme $t \mapsto \frac{|y+tx|}{1+t+t^2}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$, donc est bornée, la fonction N est bien définie.

Si $N(x,y) = 0$, c'est que la fonction affine $t \mapsto y + tx$ est identiquement nulle, donc que ses coefficients sont nuls, donc que $(x,y) = (0,0)$.

Le caractère positivement homogène et l'inégalité triangulaire sont simples à vérifier.

(b) Comme N est une norme, elle est équivalente à la norme euclidienne E. Les bornes en question sont donc finies et strictement positives. Il n'est pas facile de les calculer. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $q(x,y) = N(x,y)/E(x,y)$. On commence par évaluer, pour $y \neq 0$:

$$q(0,y) = \frac{1}{|y|} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+t+t^2} = \frac{1}{\inf_{t\in\mathbb{R}}(1+t+t^2)} = \frac{4}{3} \,.$$

Ensuite, pour $x \neq 0$, on pose $u = y/x$ et on calcule

$$q(x,y) = \frac{1}{|x|\sqrt{1+u^2}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x||u+t|}{1+t+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_u(t)|\,,$$

où l'on a posé $f_u(t) = (u+t)/(1+t+t^2)$. On étudie la fonction f_u : sa dérivée est donnée par

$$f_u'(t) = \frac{-t^2-2ut+1+u}{(1+t+t^2)^2}\,.$$

Le discriminant réduit du numérateur vaut $\Delta' = u^2-u+1$. Il est strictement positif pour tout $u \in \mathbb{R}$, et on en déduit le tableau de variation de f_u :

t	$-\infty$		$-u-\sqrt{\Delta'}$		$-u$		$-u+\sqrt{\Delta'}$		$+\infty$
$f_u'(t)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f_u(t)$	0		$-m_1(u)$		0		$m_2(u)$		0

On a posé $m_1(u) = -f_u(-u-\sqrt{\Delta'}) > 0$ et $m_2(u) = f_u(-u+\sqrt{\Delta'}) > 0$; ainsi $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_u(t)| = \max(m_1(u), m_2(u))$. Grâce à la définition de Δ', on peut simplifier comme suit :

$$m_1(u) = \frac{\sqrt{\Delta'}}{1-u-\sqrt{\Delta'}+(-u-\sqrt{\Delta'})^2} = \frac{\sqrt{\Delta'}}{1-u+u^2-\sqrt{\Delta'}+2u\sqrt{\Delta'}+\Delta'} = \frac{1}{2u+2\sqrt{\Delta'}-1}\,,$$
$$m_2(u) = \frac{\sqrt{\Delta'}}{1-u+\sqrt{\Delta'}+(-u+\sqrt{\Delta'})^2} = \frac{\sqrt{\Delta'}}{1-u+u^2+\sqrt{\Delta'}-2u\sqrt{\Delta'}+\Delta'} = \frac{1}{-2u+2\sqrt{\Delta'}+1}\,.$$

La factorisation canonique de Δ' est $(u-1/2)^2+3/4 = \frac{3}{4}(v^2+1)$, où l'on a posé $v = \frac{2}{\sqrt{3}}(u-1/2)$. Comme $2u-1 = \sqrt{3}v$, on obtient

$$m_1(u) = \frac{1}{\sqrt{3}\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)}, \quad m_2(u) = \frac{1}{\sqrt{3}\left(-v+\sqrt{v^2+1}\right)}\,,$$

$$q(x,y) = \frac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{1+\left(4+\sqrt{3}\,v\right)^2}} \times \frac{1}{\min\left(\sqrt{v^2+1}+v, \sqrt{v^2+1}-v\right)} = \begin{cases} \dfrac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{g_+(v)}} & \text{si } v \leqslant 0, \\ \dfrac{2/\sqrt{3}}{\sqrt{g_-(v)}} & \text{si } v \geqslant 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $g_\pm(v) = \left[4+\left(4+\sqrt{3}\,v\right)^2\right]\left[\sqrt{v^2+1}\pm v\right]^2 = \left[3v^2+2\sqrt{3}\,v+5\right]\left[2v^2+1\pm 2v\sqrt{v^2+1}\right]$. Une étude menée à l'aide de Maple montre que, si $a = 348\sqrt{3}+108\sqrt{31}$ et $b = -(1/9)a^{1/3}-(4/3)a^{-1/3}-(5/3)\sqrt{3}$, alors

$$\forall v \in \mathbb{R}_-, \quad 0,55 \ \approx\ g_+(b) \leqslant g_+(v) \leqslant g_+(0) = 5\,,$$
$$\forall v \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{3}{4} = \lim_{+\infty} g_- \leqslant g_+(v) \leqslant g_-(0) = 5\,,$$

On en déduit que $\frac{2}{\sqrt{15}} \leqslant q(x,y) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3g_+(b)}} \approx 1,55$ si $v \leqslant 0$ et $\frac{2}{\sqrt{15}} \leqslant q(x,y) \leqslant \frac{4}{3} \approx 1,33$ si $v \geqslant 0$. Ces encadrements et le résultat calculé pour $x = 0$ montrent finalement que, les bornes de N/E sur le plan privé de l'origine sont

$$\inf \frac{N}{E} = \frac{2}{\sqrt{15}} \approx 0,52 \qquad \text{et} \qquad \sup \frac{N}{E} = \frac{2}{\sqrt{3g_+(b)}} \approx 1,55\,.$$

356. **RMS 2010 747 Centrale MP**

Soient $n \in \mathbb{N}$, puis E un espace normé de dimension n et de boule unité fermée B, et Φ une forme n-linéaire alternée sur E non identiquement nulle.

(a) Montrer que Φ atteint un maximum > 0 sur B^n. On note $(e_1, \dots, e_n)$ un élément de B^n en lequel Φ est maximale.

(b) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et que les e_i dont unitaires.

(c) Soit x dans B, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Montrer que les $|x_i| \leqslant 1$.

(d) Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une base quelconque de E formée de vecteurs unitaires, est-il vrai que les vecteurs de B ont leurs coordonnées dans $(u_1,\dots,u_n)$ de module $\leqslant 1$?

Solution. —

(a) En tant qu'application n–linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie, Φ est continue. Comme B est compacte (E est de dimension finie), il en est de même de B^n. Alors Φ admet un maximum sur B^n.

Comme Φ n'est pas identiquement nulle, il existe $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ tel que $\Phi(x_1,\dots,x_n)\neq 0$. Si l'on pose $y_i = x_i/\|x_i\|$, on a $y := (y_1,\dots,y_n)\in B^n$ et $\Phi(y)\neq 0$. Par ailleurs $z := (-y_1,y_2,\dots,y_n)$ est aussi dans B^n et $\Phi(z) = -\Phi(y)$ par linéarité de Φ par rapport à la première variable, donc Φ prend à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives sur B^n.

Il s'ensuit que le maximum de Φ sur B^n est strictement positif.

(b) Si $(e_1,\dots,e_n)$ n'était pas une base de E, alors $\Phi(e_1,\dots,e_n)$ vaudrait zéro, ce qui est faux (on peut évoquer le fait que Φ est proportionnelle au déterminant sur une base quelconque, ou bien expliciter la preuve, en exprimant l'un des e_i comme combinaison des autres, et développer $\Phi(e_1,\dots,e_n)$ par multilinéarité, puis utiliser le caractère alterné de Φ).

Si l'un des e_i, par exemple e_1, n'était pas unitaire, on aurait $\|e_1\|<1$, le n-uplet $(e_1/\|e_1\|,e_2,\dots,e_n)$ serait encore dans B^n, et on en déduirait que

$$\Phi\left(\frac{e_1}{\|e_1\|},e_2,\dots,e_n\right) = \frac{1}{\|e_1\|}\Phi(e_1,e_2,\dots,e_n) > \Phi(e_1,e_2,\dots,e_n)\,.$$

Cela contredirait le caractère maximal de la valeur $\Phi(e_1,e_2,\dots,e_n)$ sur B^n.

(c) La linéarité de Φ par rapport à la première variable et son caractère alterné donnent

$$\Phi(x,e_2,\dots,e_n) = \sum_{i=1}^n x_i\Phi(e_i,e_2,\dots,e_n) = x_1\Phi(e_1,\dots,e_n).$$

Comme $(x,e_2,\dots,e_n)\in B^n$, on a $\Phi(x,e_2,\dots,e_n)\leqslant \max_{B^n}\Phi = \Phi(e_1,e_2,\dots,e_n)$, et on en déduit, en divisant par le nombre strictement positif $\Phi(e_1,e_2,\dots,e_n)$, que $x_1\leqslant 1$. Le même calcul, mené avec $-x$ (qui est aussi dans B) à la place de x montre que $-x_1\leqslant 1$. On déduit de ces deux inégalités que

$$|x_1|\leqslant 1\,.$$

On calcule de même $\Phi(e_1\dots,e_{i-1},\pm x,\dots,e_n)$ pour $2\leqslant i\leqslant n$, et on montre ainsi que $|x_i|\leqslant 1$ pour tout i.

(d) La réponse est non, et voici un contre-exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie donnée par $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$. Soit $u_1 = (1,0)$ et $u_2 = (-1,1/2)$, qui forment une base du plan et sont unitaires pour la norme considérée. Le vecteur

$$2u_1+2u_2 = (0,1)$$

est unitaire, donc appartient à B, et ses composantes dans la base (u_1,u_2) ont toutes des valeurs absolues strictement plus grandes que 1.

357. **RMS 2006 743, Centrale MP**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $a_n\in\{0,1\}$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n+k}$.

(a) Étudier (A_n) si (a_n) est constante.

(b) Que dire de (A_n) si on modifie un nombre fini de termes de (a_n) ?

(c) Trouver (a_n) telle que (A_n) diverge.

(d) Si (A_n) converge, montrer que sa limite est située dans $[0,\ln 2]$.

(e) Soit $\ell\in]0,\ln 2[$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $m\geqslant n$ et $b_1,\dots,b_m\in\{0,1\}$ tels que $\ell\leqslant\sum_{k=1}^m\frac{b_k}{m+k}\leqslant \ell+\frac{1}{m}$. Montrer l'existence de $(a_n)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim A_n = \ell$.

Solution. — On utilisera sans le rappeler à chaque fois la minoration (respectivement la majoration) d'une somme de nombres réels par le nombre de termes fois le plus petit (respectivement le plus grand).

(a) Dans ce cas, $A_n = a\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k} = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$, où $f\colon t\in[0,1]\mapsto\frac{1}{1+t}$. Comme f est continue, la somme de Riemann régulière $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, donc

$$\lim_{+\infty} A_n = a\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = a\ln 2\,.$$

(b) On note (b_n) une suite d'éléments de $\{0,1\}$ déduite de (a_n) par modification d'un nombre fini de termes, et (B_n) la suite associée. Comme les modifications portent sur un nombre fini de termes, il existe un entier n_0 au delà duquel $a_n = b_n$. Il en résulte que, pour tout $n > n_0$:

$$|A_n - B_n| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k - b_k}{n+k}\right) + \left(\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k - b_k}{n+k}\right)\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k - b_k}{n+k}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{n_0}{n+1}\,.$$

Comme le majorant est de limite nulle quand n tend vers l'infini, on en déduit en particulier que (A_n) converge si et seulement si (B_n) converge et que, dans ce cas, elles ont la même limite.

(c) Soit (a_n) la suite composée d'une alternance de blocs de 0 et de 1, les longueurs des blocs étant successivement égales aux factorielles des entiers : ainsi, on trouvera 1 zéro, puis 2 uns, puis $6 = 3!$ zéros, puis $24 = 4!$ uns *etc.* On espère que les grandes longueurs des blocs, et le fait que la longueur d'un bloc soit négligeable par rapport à la longueur du bloc suivant [$n!$ par rapport à $(n+1)!$], feront osciller la suite (A_n) avec une amplitude suffisante pour l'empêcher de converger.

On pose $s_n = 1! + 2! + \cdots + n!$, et on constate que $s_n \sim n!$, puisque

$$\left|\frac{s_n}{n!} - 1\right| = \left|\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n-1)} \leqslant \frac{2}{n}\,,$$

quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Alors

$$A_{s_{2n}} = \sum_{k=1}^{s_{2n}} \frac{a_k}{s_{2n}+k} = \sum_{k=1}^{s_{2n-1}} \frac{a_k}{s_{2n}+k} + \sum_{k=s_{2n-1}+1}^{s_{2n}} \frac{1}{s_{2n}+k} \geqslant \sum_{k=s_{2n-1}+1}^{s_{2n}} \frac{1}{s_{2n}+k} \geqslant \frac{(2n)!}{s_{2n}+(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,,$$

$$A_{s_{2n+1}} = \sum_{k=1}^{s_{2n+1}} \frac{a_k}{s_{2n}+k} = \sum_{k=1}^{s_{2n}} \frac{a_k}{s_{2n+1}+k} + 0 \leqslant \sum_{k=1}^{s_{2n}} \frac{1}{s_{2n+1}+k} \leqslant \frac{s_{2n}}{s_{2n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1}\,.$$

Comme la suite extraite $(A_{s_{2n+1}})$ converge vers zéro et que ce n'est pas le cas de la suite extraite $(A_{s_{2n}})$, on conclut que (A_n) diverge.

(d) Comme $0 \leqslant A_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et que la suite majorante converge vers $\ln 2$ — voir la question (a) —, un passage à la limite sous l'hypothèse où (A_n) converge donne $0 \leqslant \lim A_n \leqslant \ln 2$.

(e) Je n'utilise pas l'indication de l'énoncé, mais l'idée de la question (c), en adaptant cette fois la longueur des blocs pour obtenir l'effet contraire : la convergence de (A_n).

i. Variations de (A_n) dans le cas général.
Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{0,1\}$. On calcule

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n+k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n+1+k)(n+k)} + \frac{a_{n+1}}{2n+2}\,.$$

Si $a_{n+1} = 0$, il est clair que $A_{n+1} < A_n$, sauf dans le cas où la suite a est nulle avant le rang n.
Si $a_{n+1} = 1$, on montre que $A_{n+1} > A_n$ en majorant $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n+1+k)(n+k)}$ par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1+k)(n+k)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}$, valeur obtenue par télescopage. Il suffit alors de prouver que

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+2}\,.$$

Or cette inégalité équivaut à $n(2n+2) < (n+1)(2n+1)$ ou encore à $2n^2 + 2n < 2n^2 + 3n + 1$, ce qui est vrai.

ii. La différence $A_{n+1} - A_n$ tend vers zéro dans le cas général.
En effet, l'étude faite ci-dessus montre que $|A_{n+1} - A_n| \leqslant \frac{1}{2n+2}$.

iii. Cas où la suite (a_n) est stationnaire à la valeur a.
D'après les questions (a) et (b), la suite (A_n) converge vers $a \ln 2$.

iv. Construction.
Un nombre $\ell \in]0, \ln 2[$ étant donné, on construit une suite (a_n) possible par l'algorithme suivant :
– On choisit $a_1 = 0$, de sorte que $A_1 = 0 < \ell$.
– Tant que $A_n < \ell$, on prend $a_{n+1} = 1$. Les points (i) et (iii) montrent que la suite (A_n) se met à croître strictement et finira par dépasser strictement ℓ. Appliquer alors la règle suivante.

– Tant que $A_n > \ell$, on prend $a_{n+1} = 0$. Pour les mêmes raisons, la suite (A_n) se met à décroître et finira par revenir au dessous de ℓ. Appliquer alors la règle précédente.

La convergence de la suite (A_n) vers ℓ est assurée par le point (ii) : au moment d'un changement de monotonie, ℓ est situé entre deux termes A_n et A_{n+1}, donc $|\ell - A_n| \leqslant |A_{n+1} - A_n| \leqslant \frac{1}{2n+2}$. Durant les plages de monotonie, le terme courant A_n est situé entre ℓ et le terme $A_{p(n)}$ où s'est produit le dernier changement de monotonie, donc $|A_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2p(n)+2}$. Le résultat vient finalement de ce qu'il y a, par construction, une infinité de changements de monotonie, donc $p(n)$ tend vers l'infini avec n (je n'ai pas rédigé les détails, et on peut certainement mieux présenter la fin).

358. **RMS 2010 759, Centrale MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

(a) Montrer que $b_{2n} \sim \sqrt{2n}/2$. En déduire un équivalent de b_n.

(b) On pose $\lambda_n = b_n + b_{n+1}$. Montrer que (λ_n) converge vers une limite strictement négative.

(c) Quelle est la nature de la série de terme général $1/b_n$?

Solution. —

(a) En regroupant un terme d'indice impair avec celui d'indice pair qui vient après, on obtient

$$b_{2n} = \sum_{p=1}^{n} \left(-\sqrt{2p-1} + \sqrt{2p}\right) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1}}\,.$$

La fonction $f\colon t \in [1, +\infty[\mapsto 1/(\sqrt{2t} + \sqrt{2t-1}\,) = \sqrt{2t} - \sqrt{2t-1}$ est décroissante. Une comparaison série-intégrale montre que $-\sqrt{1} + \sqrt{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant b_{2n} \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le calcul qui suit, c désigne une constante qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter :

$$\begin{aligned}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}\right]_1^n - \left[\frac{1}{3}(2t-1)^{3/2}\right]_1^n = \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{3/2} - \frac{1}{3}(2n-1)^{3/2} + c\,,\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{3/2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3/2}\right) + c = \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{3/2}\left(1 - \left(1 - \frac{3}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) + c \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}\,.\end{aligned}$$

On démontre de la même manière que $\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{2n}/2$ quand n tend vers l'infini. L'encadrement de b_{2n} donné par la comparaison série intégrale entraîne alors que

$$b_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}\,.$$

Si $n = 2p$ est pair, $b_n = b_{2p} \sim \sqrt{2p}/2 = \sqrt{n}/2$ quand n tend vers l'infini. Si $n = 2p+1$ est impair, $b_n = b_{2p+1} = b_{2p} - \sqrt{2p+1} = \sqrt{2p}/2 + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,) - \sqrt{2p}(1 + 1/2p)^{1/2} = \sqrt{2p}/2 + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,) - \sqrt{2p}(1 + \mathrm{o}(1)) = -\sqrt{2p}/2 + \mathrm{o}(\sqrt{p}\,) \sim -\sqrt{2p}/2$. Or $2p = n-1$ et $\sqrt{2p} = \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ quand n tend vers l'infini, donc $b_n = b_{2p+1} \sim -\sqrt{n}/2$ dans ce cas. On rassemble les deux cas dans la formule

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}\,.$$

(b) Il revient au même de montrer que la série de terme général $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ (pour $n \geqslant 1$ puisque b_n est définie pour $n \geqslant 1$) converge. Or

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = b_{n+2} - b_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\,\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\,.$$

Grâce à l'expression ci-dessus, on voit que la série de terme général $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, car la fonction $t \mapsto 1/(\sqrt{t+2} + \sqrt{t+1}\,)$ est décroissante de limite nulle en $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ converge et sa somme, qui vaut $\lim(\lambda_n) - \lambda_1 = \lim(\lambda_n) - (\sqrt{2} - 2)$, est du signe de son premier terme, qui vaut $\lambda_2 - \lambda_1 = b_3 - b_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{2} < 0$. Par suite,

$$\ell := \lim(\lambda_n) < \sqrt{2} - 2 < 0\,.$$

(c) On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $1/b_n$. La question (a) montre que $1/b_n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par suite, il suffit de déterminer la nature de la suite (S_{2n}) pour obtenir celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/b_n$: en effet, la suite de terme général $S_{2n+1} = S_{2n} + 1/b_{2n+1}$ aura alors la même nature que (S_{2n}). Or, en regroupant les termes deux par deux, on obtient $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ avec

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{b_{2k-1}} + \frac{1}{b_{2k}} = \frac{1}{\lambda_{2k-1} - b_{2k}} + \frac{1}{b_{2k}} = \frac{1}{\ell + \mathrm{o}(1) - b_{2k}} + \frac{1}{b_{2k}} = \frac{1}{b_{2k}}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\ell}{b_{2k}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{b_{2k}}\right)}\right), \\ &= \frac{\ell}{b_{2k}^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{b_{2k}^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{b_{2k}^2}. \end{aligned}$$

Comme $b_{2k} \sim \sqrt{2k}/2$, on a $\ell/b_{2k}^2 \sim 2\ell/k$, et on conclut, grâce au théorème sur les équivalents des séries à termes positifs, que $\sum a_k$ diverge, donc que la série de terme général $1/b_n$ diverge.

359. **RMS 2003 488, Centrale MP**

Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant les rationnels sur les irrationnels et les irrationnels sur les rationnels ?

Solution. — Non. Si f est une telle application, et si g est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$, alors g est continue, et son image est contenue dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (car la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle).

La densité de $\mathbb{Q}$ et le théorème des valeurs intermédiaires entraînent alors que g est constante (raisonner par l'absurde si elle prend deux valeurs distinctes). Il existe donc un irrationnel c tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c$. Alors $f(c) = 2c$ est irrationnel, et f n'envoie pas tout irrationnel sur un rationnel, contrairement à l'hypothèse.

360. **RMS 1991 0000, Centrale MP**

Soit A une partie infinie de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $P(x) = e^x$.

Solution. — Supposons qu'un tel polynôme existe. Il n'est pas nul, on note d son degré, et on pose $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - P(x)$. Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_{d+1}$ des éléments de A : ils sont au nombre de $d + 2$.

Comme $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_{d+1}) = 0$, le théorème de Rolle montre l'existence de nombres $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f'(b_i) = 0$ pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant d$: les b_i sont au nombre de $d + 1$. Le théorème de Rolle appliquée à la fonction f' montre l'existence de nombres $c_i \in]b_i, b_{i+1}[$ tels que $f''(c_i) = 0$ pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant d - 1$: les c_i sont au nombre de d.

En appliquant ainsi le théorème de Rolle à f, f' *etc.*, on montre l'existence d'un nombre réel x tel que $f^{(d+1)}(x) = 0$. Or $f^{(d+1)}$ est la fonction exponentielle, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

361. **RMS 2010 771, Centrale MP**

Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers l'exponentielle sur tout segment de $\mathbb{R}$. On suppose que (x_n) est une suite strictement négative telle que la suite de terme général $P_n(x_n)$ converge vers zéro. Que dire de la suite (x_n) ?

Solution. — On va montrer que (x_n) diverge vers $-\infty$.

Voici une rédaction directe. Soit $A < 0$. On pose $\varepsilon = e^A/2 > 0$. Comme la suite $(P_n(x_n))$ converge vers zéro, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant n_0$, alors $|P_n(x_n)| < \varepsilon$, et en particulier

$$\forall n \geqslant n_0, \quad P_n(x_n) < \varepsilon\,.$$

Par ailleurs, sur le segment $[A, 0]$, la suite (P_n) converge uniformément vers l'exponentielle. Pour le même ε, il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$ et tout $x \in [A, 0]$, on a $|e^x - P_n(x)| < \varepsilon$, donc en particulier (en utilisant la monotonie de l'exponentielle et la valeur de ε) :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \forall x \in [A, 0], \quad P_n(x) > e^x - \varepsilon > e^A - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Si $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on constate grâce aux deux inégalités ci-dessus que x_n ne peut pas être dans le segment $[A, 0]$. Comme $x_n < 0$ par hypothèse, c'est donc que $x_n < A$, et on a bien établi que $\lim x_n = -\infty$.

Voici une rédaction alternative, par l'absurde. On suppose que (x_n) ne diverge pas vers $-\infty$, ce qui implique l'existence de $A \leqslant 0$ et d'une suite extraite (x_{n_k}) telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{n_k} \in [A, 0]$. Le segment $[A, 0]$ étant compact, on peut en extraire une suite convergente, notée $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$: c'est le théorème de Bolzano et Weierstrass. On note ℓ la limite de $(x_{n_{k_j}})$. Comme la suite (P_n) converge uniformément vers f sur le segment $[A, 0]$, le théorème de la double limite (ou de permutation des limites) s'applique et donne

$$\lim_{j\to+\infty} P_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) = e^{\ell} \neq 0\,.$$

Ceci contredit l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} P_n(x_n) = 0$, et achève le raisonnement par l'absurde.

362. **RMS 2006 763, Centrale MP**

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_1(t)=1$ et $f_{n+1}(t)=\int_0^t 2\sqrt{f_n(u)}\,du$.

SOLUTION. — Les calculs des premières fonctions conduisent à formuler l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_n)$ suivante : il existe deux nombres α_n et β_n tels que $f_n(t)=\alpha_n t^{\beta_n}$ pour tout $t\in[0,1]$.

Pour $n=1$, les nombres $\alpha_1=1$ et $\beta_1=0$ conviennent. Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ soit vraie. Alors

$$\forall t\in[0,1],\quad f_{n+1}(t)=2\sqrt{\alpha_n}\int_0^t\sqrt{u^{\beta_n}}\,du=2\sqrt{\alpha_n}\left[\frac{u^{1+\beta_n/2}}{1+\beta_n/2}\right]_0^t=\frac{4\sqrt{\alpha_n}}{2+\beta_n}t^{1+\beta_n/2}.$$

On a donc établi $(\mathcal{H}_{n+1})$ avec

$$\alpha_{n+1}=\frac{4\sqrt{\alpha_n}}{2+\beta_n}\,,$$
$$\beta_{n+1}=1+\frac{\beta_n}{2}\,.$$

Les solutions de la seconde relation sont les suites dont le terme général est de la forme $2+c/2^n$, où c est une constante réelle. La condition initiale $\beta_1=0$ donne $c=-4$. Alors

$$\alpha_{n+1}=\frac{4\sqrt{\alpha_n}}{2+2-4/2^n}=\frac{\sqrt{\alpha_n}}{1-2^{-n}}\,,$$
$$\beta_n=2-\frac{4}{2^n}\,.$$

La suite (β_n) converge vers 2. Étudions la suite de terme général $\gamma_n=\ln\alpha_n$. Elle est définie par la condition initiale et la relation de récurrence

$$\gamma_1=0\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\gamma_{n+1}=\frac12\gamma_n-\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

On vérifie alors immédiatement par récurrence que $\gamma_n\geqslant 0$ pour tout n. On calcule $\gamma_2=\ln 2$ et $\gamma_3=\ln(\frac{4\sqrt2}{3})<\gamma_2$. Montrons par récurrence que $\gamma_{n+1}\leqslant\gamma_n$ pour tout $n\geqslant 2$, ou encore, compte-tenu de la relation de récurrence, que $\gamma_n+2\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\geqslant 0$. On vient de vérifier que ceci est vrai pour $n=2$. Alors

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}+2\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)&=\frac12\gamma_n-\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\,,\\&\geqslant-\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2\left[\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]\,.\end{aligned}$$

Cette quantité est bien positive, puisque $1-\frac{1}{2^{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{2^n}$ et que le logarithme est croissant. La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 2}$ étant et décroissante et minorée par zéro, elle converge : on note ℓ sa limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence qui définit (γ_n), on obtient $\ell=\frac12\ell$, donc $\ell=0$, donc $(\alpha_n)_{n\geqslant}$ converge vers 1. On a alors prouvé que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$f\colon t\mapsto t^2\,.$$

Étudions la convergence uniforme. La majoration suivante, valable pour tout $t\in[0,1]$,

$$|f(t)-f_n(t)|=|t^2-\alpha_n t^{\beta_n}|\leqslant|t^2-t^{\beta_n}|+t^{\beta_n}|1-\alpha_n|\leqslant|t^2-t^{\beta_n}|+|1-\alpha_n|\,,$$

montre qu'il suffit de s'intéresser à $|t^2-t^{\beta_n}|$. Si $h(x)=t^x$ pour t fixé dans $]0,1]$, alors $h'(x)=(\ln t)t^x$ et l'égalité des accroissements finis dit qu'il existe c_n entre β_n et 2 tel que $|t^2-t^{\beta_n}|=|\ln t|t^{c_n}(2-\beta_n)$. Comme β_n tend vers 2, on a $c_n\geqslant 1$ pour n assez grand (en fait, pour tout $n\geqslant 1$). Alors $|t^2-t^{\beta_n}|\leqslant t|\ln t|(2-\beta_n)=4t|\ln t|/2^n$, Une étude rapide la fonction $t\mapsto t\ln t$ montre enfin que

$$\forall t\in[0,1],\quad|f_n(t)-f(t)|\leqslant\frac{4/e}{2^n}+|\alpha-\alpha_n|\,.$$

Cette relation reste vraie pour $t=0$, puisque le minorant est alors nul. Le majorant est indépendant de t et tend vers zéro quand n tend vers l'infini : la convergence est uniforme.

Géométrie

Centrale PSI

Algèbre

363. **RMS 2009 966 Centrale PSI**
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{Card}(X)$.

Solution. — Les parties $X\in\mathcal{P}(E)$ ont un cardinal p qui prend toutes les valeurs entre zéro et n. En regroupant la somme étudiée par parties de cardinal donné, on obtient $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{Card}(X)=\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}$, puisqu'il y a $\binom{n}{p}$ parties de E de cardinal p. Comme pour tout $p\geqslant 1$, on a $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$, on obtient

$$S=\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}=\sum_{p=1}^n p\binom{n}{p}=n\sum_{p=1}^n\binom{n-1}{p-1}=n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}=n2^{n-1}.$$

Une autre technique de calcul de cette somme consiste à introduire la fonction génératrice (ici, une fonction polynomiale) $f\colon x\mapsto\sum_{p=0}^n\binom{n}{p}x^p$ et de constater que $f'(x)=\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}x^{p-1}$, donc que la somme étudiée vaut $f'(1)$. Or $f(x)=(x+1)^n$, donc $f'(x)=n(x+1)^{n-1}$, donc

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{Card}(X)=n2^{n-1}\ .$$

364. **RMS 2010 810 Centrale PSI**
Calculer $\arctan(1/2)+\arctan(1/5)+\arctan(1/8)$.

Solution. — On note a le nombre à calculer. Comme les trois nombres $1/2$, $1/5$ et $1/8$ appartiennent à $[0,1]$, on peut affirmer que $0\leqslant a\leqslant 3\arctan(1)=3\pi/4$.

On calcule alors $\tan a$, en utilisant les formules d'addition $\tan(x+y)=(\tan x+\tan y)/(1-\tan x\tan y)$:

$$\tan a=\frac{1/2+\frac{1/5+1/8}{1-1/40}}{1-(1/2)\frac{1/5+1/8}{1-1/40}}=\frac{1/2+13/39}{1-13/78}=\frac{65}{65}=1\ .$$

Or l'unique angle appartenant $[0,3\pi/4]$ dont la tangente vaut 1 est $\pi/4$, donc

$$a=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot$$

Remarque. — Cette égalité est connue sous le nom de formule de Strassnitzky. Elle a permis au calculateur prodige Zacharias Dahse, en utilisant le développement en série entière de l'arctangente, de calculer 200 décimales de π en 1844 (cité par Jean-Paul Delahaye, *Le merveilleux nombre* π, Bibliothèque Pour la Science, 1997).

365. **RMS 2010 811 Centrale PSI** .
Soient α_1, α_2 α_3 les racines de X^3+X^2+1. Résoudre

$$\begin{cases} x+\alpha_1y+\alpha_1^2z &= \alpha_1^4\ ,\\ x+\alpha_2y+\alpha_2^2z &= \alpha_2^4\ ,\\ x+\alpha_3y+\alpha_3^2z &= \alpha_3^4. \end{cases}$$

Solution. — Pour tout $k\in\{1,2,3\}$, en utilisant deux fois l'égalité $\alpha_k^3=-\alpha_k^2-1$, on obtient $\alpha_k^4=\alpha_k(-\alpha_k^2-1)=-\alpha_k^3-\alpha_k=\alpha_k^2-\alpha_k+1$. Par conséquent, le triplet

$$(x,y,z)=(1,-1,1)$$

est solution. Par ailleurs, le déterminant du système est le déterminant de Vandermonde $V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Il est non nul, car le polynôme $P=X^3+X^2+1$ n'a que des racines simples (les racines de son polynôme dérivé $3X^2+2X$ sont zéro et $-2/3$, qui ne sont manifestement pas racines de P). Le système possède donc exactement une solution, qu'on a trouvée ci-dessus.

366. **RMS 2009 967 Centrale PSI**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Solution. — Si $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ est un polynôme à coefficients complexes, on note $\overline{Q}$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} X^k$.
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines *réelles* deux à deux distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$. Comme P est à coefficients réels, si z est une racine complexe non réelle de P, alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P, et avec la même multiplicité. De plus $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$, et la fonction polynomiale associée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Si l'on note $\{\beta_1, \overline{\beta_1}\}, \ldots, \{\beta_s, \overline{\beta_s}\}$ les paires deux à deux distinctes de racines complexes non réelles de P, de multiplicités respectives $\ell_1, \ldots, \ell_n$, on peut écrire

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} \left[(X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})\right]^{\ell_i}$$

La fonction polynomiale réelle $x \mapsto P(x)$ est du signe de $\prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k)^{m_k}$: cette quantité est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous les m_k sont pairs, ce que l'on écrit $m_k = 2n_k$, avec $n_k \in \mathbb{N}^*$. On pose alors

$$Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{s} (X - \beta_j)^{\ell_i} \in \mathbb{C}[X]\,,$$

de sorte que $P = Q\overline{Q}$. En décomposant chaque coefficient c_k de Q sous la forme cartésienne $c_k = a_k + ib_k$ avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$, on peut mettre Q sous la forme $A + iB$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, et donc $\overline{Q} = A - iB$. Par suite

$$P = Q\overline{Q} = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2\,.$$

367. **RMS 2011 820 Centrale PSI (calcul formel)**
Soient $p\colon x \mapsto e^x \cos x$, $q\colon x \mapsto e^x \sin x$, $r\colon x \mapsto e^{-x} \cos x$, $s\colon x \mapsto e^{-x} \sin x$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = (p, q, r, s)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $E = \operatorname{Vect}(p, q, r, s)$.
(b) Soit D l'opérateur de dérivation. Montrer que D est un automorphisme de E. Soit M la matrice de D dans $\mathcal{B}$. Donner M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ [par exemple M^{17} et en déduire $p^{(17)}(x)$].
(c) Donner M^{-1} ainsi que des primitives de p, q, r et s.
(d) Soit l'équation différentielle $y^{(4)} - y = e^x \sin x + 2e^{-x} \cos x$. Écrire cette équation différentielle sous forme d'un système du premier ordre. En déduire la structure des solutions. Résoudre alors cette équation différentielle.

Solution. — On note $\mathcal{B}$ la famille (p, q, r, s).

(a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ap + bq + cr + ds = 0$.
 – En multipliant cette égalité par $x \mapsto e^{-x}$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x + e^{-2x}(c\cos x + d\sin x) = a\cos x + b\sin x + \mathrm{o}_{x\to+\infty}(x) = 0\,.$$

En substituant x par $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $a + \mathrm{o}_{k\to+\infty}(k) = 0$, donc $a = 0$ par passage à la limite. En substituant x par $\pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $b + \mathrm{o}_{k\to+\infty}(k) = 0$, donc $b = 0$ par passage à la limite.
 – En simplifiant par e^{-x}, l'égalité de départ devient alors $\forall x \in \mathbb{R},\ c\cos x + d\sin x = 0$, et on conclut que $c = d = 0$ grâce aux mêmes substitutions que ci-dessus.

Finalement, $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc $E = \operatorname{Vect}(p, q, r, s)$ est de dimension 4.
On peut aussi faire travailler Maple en posant

```
f:=alpha*p+beta*q+gamma*r+delta*s;
eq[1]:=f(0)=0;eq[2]:=f(Pi/2)=0;eq[3]:=f(Pi)=0;eq[4]:=f(-Pi/2)=0;
systeme:={seq(eq[k],k=1..4)};inconnues:={alpha,beta,gamma,delta};
solve(systeme,inconnues);
```

On obtient $a = b = c = d = 0$, ce qui constitue une autre preuve de la liberté de $\mathcal{B}$.

(b) On calcule aisément $D(p) = p - q$, $D(q) = p + q$, $D(r) = -r - s$ et $D(s) = r - s$, puis

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(M_1, M_2)\,,$$

où M_1 et $M_2 = -{}^tM_1$ sont les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mises en évidence ci-dessus. Alors la formule de calcul des déterminants par blocs montre que $\det(M) = \det(M_1)\det(M_2) = 4 \neq 0$, donc M est inversible, donc D est un automorphisme de E. On peut aussi valider la ligne de commandes suivantes en Maple

```
with(linalg):M1:=matrix(2,2,[1,1,-1,1]);M2:=evalm(-transpose(M1));M:=diag(M1,M2);det(M);
```

On calcule ensuite les premières puissances de M grâce à `seq(evalm(M**k),k=1..17)`, et on voit en particulier que $M^4 = -4I_4$. Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \{0,1,2,3\}, \quad M^{4k+j} = (-4)^k M^j \ .$$

En particulier, $M^{17} = 256M$, et en lisant la première colonne, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $p^{(17)}(x) = 256\, e^x(\cos x - \sin x)$, ce que Maple fournit aussi au moyen de `(D@@17)(p)`.

(c) La commande `inverse(M)` donne

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,{}^tM\ ,$$

expression que l'on obtient en appliquant formellement les règles de la question précédente à la puissance négative -1 de M : comme $-1 = 4(-1)+3$, on trouve en effet $M^{-1} = 2(-4)^{-1}\,{}^tM\ldots$

En lisant la première (respectivement la deuxième, troisième, quatrième) colonne de cette matrice, on obtient l'unique primitive *dans* E de p (respectivement de q, r, s), à savoir $\frac{1}{2}(p+q)$, $\frac{1}{2}(-p+q)$, $\frac{1}{2}(-r+s)$ et $-\frac{1}{2}(r+s)$.

(d) L'équation différentielle étudiée, que l'on appelle $(\mathcal{E})$, s'écrit $y^{(4)} - y = q + 2r$. Si l'on note Y le vecteur colonne ${}^t(y, y', y'', y''')$, alors y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si Y est solution de $Y' = AY + B$, où

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ q+2r\end{pmatrix}.$$

Comme $q+2r$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même, le cours affirme que l'ensemble des solution du système linéaire du premier ordre $Y' = AX + B$ est un sous-espace affine de dimension 4 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$, donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de dimension 4 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La direction $\overrightarrow{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $Y' = AY$. On vérifie aisément que $A^4 = I_4$, donc que $X^4 - 1$ est annulateur de A, donc que la spectre complexe de A est inclus dans $\{1, -1, i, -i\}$. La commande `eigenvects` montre directement que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ de valeurs propres simples $\{1, -1, i, -i\}$. Les solutions complexes du système homogène $Y' = AY$ sont donc des combinaisons linéaires de $f\colon x \mapsto e^x$, $g\colon x \mapsto e^{-x}$, $h\colon x \mapsto e^{ix}$ et $k\colon x \mapsto e^{-ix}$ (il est inutile de diagonaliser effectivement A pour affirmer cela), et $\{f, g, h, k\}$ est une base de l'espace des solutions complexes de l'équation homogène.

La famille de fonctions réelles $f, g, \frac{h+k}{2}, \frac{h-k}{2i}$ est alors une base de l'espace des solutions réelles de l'équation homogène. En d'autres termes, les solutions de $y^{(4)} - y = 0$ sont les fonctions telles que

$$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ae^x + be^{-x} + c\cos x + d\sin x\ .$$

Il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière. On fait le pari qu'il en existe une dans E, que l'on écrit $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s$. En d'autres termes, le vecteur colonne des composantes de y dans la base $\mathcal{B}$ est $U = {}^t(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Le vecteur colonne des composantes sur $\mathcal{B}$ de $y^{(4)}$ est alors M^4U, et, comme $M^4 = -4I_4$, la fonction y vérifie l'équation complète si et seulement si

$$(M^4 - I_4)U = -5U = B\ .$$

Cette équation admet une et une seule solution $U = -B/5$, donc $-(q+2r)/5$ est la seule solution de $(\mathcal{E})$ appartenant à E. Finalement,

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto ae^x + be^{-x} + c\cos x + d\sin x - \frac{1}{5}e^x\cos x - \frac{2}{5}e^{-x}\sin x, \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Remarque. — Maple donne ce résultat en validant `dsolve(diff(y(x),x$4)-y(x)=exp(x)*cos(x)+2*exp(-x)*sin(x))`.

368. **RMS 2011 826 Centrale PSI (calcul formel)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in \mathbb{R}^*$. On considère les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par $d : P(X) \mapsto P'(X)$, $t_\delta : P(X) \mapsto P(X+\delta)$ et $f\colon P(X) \mapsto XP'(X)$.

(a) Soit $S \in \mathbb{R}[X]$. Donner les matrices de d et de $S(d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer le commutant de d et le commutant de f.

(c) Est-ce que t_δ appartient à $\mathbb{R}[d]$? Est-ce que d appartient à $\mathbb{R}[t_\delta]$?

SOLUTION. — L'usage de Maple dans cet exercice se limite à donner une idée de ce qui se passe pour les petites dimensions.

(a) On suppose que $S = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j X^j$, la somme étant à support fini. Comme $d(X^j) = jX^{j-1}$, la matrice D de d dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient l'affichage de la matrice correspondante pour $n = 4$ en validant les commandes suivantes :

```
M:=matrix(5,5,0): for k from 1 to 4 do M[k,k+1]:=k end do: evalm(M);
```

Dans toute la suite de l'exercice, on supposera, pour les calculs théoriques que les indices des rangées des matrices vont de zéro à n (ce qui correspond à la numérotation des polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par le degré). En revanche, dans la session Maple, les indices démarrent nécessairement à 1 (et iront donc jusqu'à $n+1$) lorsque l'on utilise la commande `matrix`.

La matrice de $S(d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est alors $S(D)$. Comme $d^p(X^j) = \frac{j!}{(j-p)!} X^{j-p}$, l'élément (i,j) de $S(D)$ vaut

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ \dfrac{j!}{i!} a_{j-i} & \text{si } i \leqslant j. \end{cases}$$

Ce résultat peut être illustré par `evalm(sum(a[k]*M**k,k=0..4))`.

(b) Pour avoir une idée du résultat dans le cas général, on valide les commandes suivantes :

```
A:=matrix(5,5):B:=evalm(A&*M-M&*A):
S:=solve({seq(seq(B[i,j]=0,i=1..5),j=1..5)}):assign(S):evalm(A);
```

On observe le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ 0 & a_{1,1} & 2a_{1,2} & 3a_{1,3} & 4a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & 3a_{1,2} & 6a_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{1,1} & 4a_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Dans cette question, on utilise la formule de multiplication des matrices élémentaires $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. Avec la convention que les indices des rangées des matrices vont de zéro à n, la matrice D vaut $\sum_{k=1}^{n} kE_{k-1,k}$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} = \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} a_{i,j}E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Alors A commute avec D si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} ka_{i,j}E_{k-1,k}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} ka_{i,j}E_{i,j}E_{k-1,k}, \text{ ou encore } \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} ka_{k,j}E_{k-1,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n} ka_{i,k-1}E_{i,k}\,.$$

Dans le membre de gauche de la deuxième égalité, on pose $k = i+1$ et $j = k$, de sorte que A commute avec D si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(i+1)a_{i+1,k}E_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n} ka_{i,k-1}E_{i,k}\,.$$

Comme la famille $(E_{i,k})_{(i,k)\in[\![0,n]\!]}$ est une base, donc une famille libre, on en déduit que A commute avec D si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![0, n-1]\!], &\quad a_{i+1,0} = 0\,, \\ \forall k \in [\![1, n]\!], &\quad a_{n,k-1} = 0\,, \\ \forall (i,k) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!], &\quad (i+1)a_{i+1,k} = ka_{i,k-1}\,. \end{aligned}$$

Les deux premières séries d'égalités disent que la première colonne et la dernière ligne de A sont nulles, sauf peut-être les termes diagonaux : A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \ddots & * & * \\ \vdots & * & * & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

On peut encore écrire la dernière série d'égalités sous la forme $\forall(j,k)\in[\![1,n]\!]$, $a_{j,k}=\frac{k}{j}a_{j-1,k-1}$.

- Si $j>k$, l'itération de cette relation conduit à $a_{j,k}=\frac{k!}{j(j-1)\cdots(j-k+1)}a_{j-k,0}=0$: la matrice A est triangulaire supérieure.
- Si $j\leqslant k$, on obtient
$$a_{j,k}=\frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}=\frac{k!}{j!(k-j)!}a_{0,k-j}=\binom{k}{j}a_{0,k-j}\ .$$
En d'autres termes, A est déterminée linéairement par les $n+1$ éléments de sa première ligne, qui sont quelconques (un élément de la première ligne détermine ceux placés diagonalement au-dessous de de lui).

Le commutant de D, donc de d, est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$, et on retrouve les résultats obtenus expérimentalement au début de la question.

La matrice F de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est
$$F=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&2&0&\cdots&0\\0&0&0&3&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&0&&\\0&0&0&\cdots&0&n\end{pmatrix}.$$
Par la même méthode que pour D (les calculs sont en fait plus simples), on montre que le commutant de F est l'ensemble des matrices diagonales, donc de dimension $n+1$ là encore.

(c) On donne deux démonstrations du fait que $t_\delta\in\mathbb{R}[d]$.
- La première démonstration utilise les questions précédentes. On commence par remarquer que, pour toute matrice carrée M, l'algèbre $\mathbb{R}[M]$ est incluse dans le commutant de M. Si $M=D$, la question (a) montre que $\mathbb{R}[D]$ est de dimension $n+1$, et la question (b) montre alors que $\mathbb{R}[D]$ est égale au commutant de D. L'assertion $t_\delta\in\mathbb{R}[d]$ est donc équivalente à «t_δ et d commutent ». Or ce fait est clair, donc
$$t_\delta\in\mathbb{R}[d]\ .$$
- La deuxième démonstration utilise la formule de Taylor : on sait que, si P est de degré au plus n, alors $P(X+\delta)=\sum_{k=0}^n\frac{\delta^k}{k!}P^{(k)}(X)$, ou encore
$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\quad t_\delta(P)=[Q_\delta(d)](P)\ ,$$
où Q est le polynôme $\sum_{k=0}^n\frac{\delta^k}{k!}X^k$. On en déduit que $t_\delta=Q(d)$, donc que $t_\delta\in\mathbb{R}[d]$.

Il existe donc $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $t_\delta=Q(d)$. Il est impossible que zéro soit racine de Q, c'est-à-dire que Q s'écrive XQ_1 avec $Q_1\in\mathbb{R}[X]$: dans ce cas, le degré de $Q(d)(H)=(Q_1(d))(H')$ serait strictement plus petit que le degré de H pour tout polynôme H non nul, alors que le degré de $t_\delta(H)=H(X+\delta)$ est égal à celui de H. Par suite, Q et X^{n+1} — un polynôme annulateur de d — sont premiers entre eux : il existe $(U,V)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que $UQ+VX^{n+1}=1$, donc
$$RP+VX^{n+2}=X\ ,$$
en ayant posé $R=XU$. Si l'on substitue X par d dans cette égalité, on obtient $R(P(d))=d$, ou encore $R(t_\delta)=d$, donc
$$d\in\mathbb{R}[t_\delta]\ .$$

369. **RMS 2007 767 Centrale PSI**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M=\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Solution. — Les transformations élémentaires (de type I) sur les colonnes $C_{n+i}\leftarrow C_{n+i}-C_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, suivies des transformations élémentaires sur les lignes $L_{n+i}\leftarrow L_{n+i}-L_i$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, montrent que M a le même rang que $N=\begin{pmatrix}A&0\\0&B-A\end{pmatrix}$. On en déduit (pour la dernière égalité, on pourra se reporter à l'exercice 450 page 315) que
$$\operatorname{rg}M=\operatorname{rg}N=\operatorname{rg}A+\operatorname{rg}(B-A)\ .$$
Comme les transformations élémentaires de type I (sur les lignes ou les colonnes) ne modifient pas la valeur du déterminant, on en déduit aussi que $\det(M)=\det(N)=\det(A)\det(B-A)$, donc que
$$M\in\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})\iff(A,B-A)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2.$$

On suppose désormais cette condition réalisée et on recherche l'inverse de M par blocs, avec des notations évidentes :

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A(C+D) & = & I_n\,, \\ AC+BD & = & 0\,, \\ A(E+F) & = & 0\,, \\ AE+BF & = & I_n\,, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C+D & = & A^{-1}\,, \\ I_n+(B-A)D & = & 0\,, \\ E+F & = & 0\,, \\ F(B-A) & = & I_n\,, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C & = & A^{-1}+(B-A)^{-1}\,, \\ D & = & -(B-A)^{-1}\,, \\ E & = & -(B-A)^{-1}\,, \\ F & = & (B-A)^{-1}\,. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

370. **RMS 2007 768 Centrale PSI**

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p (respectivement q) le projecteur sur F (respectivement G) parallèlement à G (resp. F). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

Solution. — Si $x \in E$, l'écriture $x = y+z$ supposera que (y,z) est l'unique couple de $F \times G$ vérifiant la relation $x = y+z$.

On suppose que F est stable par f. Soit $x = y+z \in E$. Alors, par définition des projecteurs p et q :

$$(q \circ f \circ p)(x) = (q \circ f)(y) = q\Big(\underbrace{f(y)}_{\in F}\Big) = 0\,.$$

Réciproquement, on suppose que $q \circ f \circ p = 0$. Soit $y \in F$. Alors $y = p(y)$, donc $q(f(y)) = (q \circ f \circ p)(y) = 0$, ce qui montre que $f(y)$ est dans le noyau de q, à savoir F.

371. **RMS 2007 769 Centrale PSI**

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = P^{-1}MP$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 73 page 127.

On note d_P (resp. g_Q) l'endomorphisme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de multiplication à droite (resp. à gauche) par P (resp. par Q), de sorte que $\varphi = d_P \circ g_{P^{-1}} = g_{P^{-1}} \circ d_P$. On utilise la formule de multiplication des matrices élémentaires $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ dans le calcul qui suit :

$$d_P(E_{i,j}) = E_{i,j}P = \sum_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} p_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} p_{j,\ell}E_{i,\ell}\,.$$

Si la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ordonnée de la manière suivante :

$$\mathcal{B} = (E_{1,1},\dots,E_{1,n},E_{2,1},\dots,E_{2,n},\dots,E_{n,1},\dots,E_{n,n})\,,$$

alors le calcul de $d_P(E_{i,j})$ mené ci-dessus montre que la matrice D_P de d_P dans $\mathcal{B}$ vaut $\mathrm{diag}({}^tP, {}^tP, \dots, {}^tP)$. En effet,
- le bloc diagonal numéro i de D_P, c'est-à-dire celui qui correspond aux lignes et aux colonnes d'indices $(i,1),\dots,(i,n)$ a un élément générique $\underbrace{(i,\ell)}_{\text{ligne}}, \underbrace{(i,j)}_{\text{colonne}}$ qui vaut $p_{j,\ell}$ [les indices j et ℓ sont inversés].
- les blocs non diagonaux sont nuls.

Il en résulte que $\det(d_P) = (\det P)^n$.

On montre de même que $g_Q(E_{i,j}) = QE_{i,j} = \sum_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} q_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{k,i}E_{k,j}$. Si la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ordonnée de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = (E_{1,1},\dots,E_{n,1},E_{1,2},\dots,E_{n,2},\dots,E_{1,n},\dots,E_{n,n})\,,$$

alors le calcul de $g_Q(E_{i,j})$ mené ci-dessus montre que la matrice G_Q de g_Q dans $\mathcal{C}$ vaut $\mathrm{diag}(Q,Q,\dots,Q)$. Il en résulte que $\det(g_Q) = (\det Q)^n$, et on conclut finalement que

$$\det\varphi = \det(d_P)\det(g_{P^{-1}}) = (\det P)^n(\det P^{-1})^n = 1\,.$$

Dans la suite, on suppose que $Q = P^{-1}$. Alors $\varphi(E_{i,j}) = g_Q\left(\sum_{\ell=1}^n p_{j,\ell}E_{i,\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^n p_{j,\ell}g_Q(E_{i,\ell}) = \sum_{\ell=1}^n p_{j,\ell}\sum_{k=1}^n q_{k,i}E_{k,\ell}$, ce qui montre que

$$\operatorname{tr}\varphi = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} p_{j,j}q_{i,i} = (\operatorname{tr}P)(\operatorname{tr}P^{-1})\,.$$

372. **RMS 2010 812 Centrale PSI**

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $M \in \mathcal{A}$ est inversible. Montrer que $M^{-1} \in \mathcal{A}$.

Solution. — La matrice M possède un polynôme annulateur non nul P. Si p désigne la valuation de P, on peut écrire $P = X^pQ$, où Q est de la forme $\sum_{k=0}^q a_kX^k$ avec $a_0 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Comme M est inversible, on peut multiplier par M^{-p} la relation $P(M) = M^pQ(M) = 0$, et on en déduit que $Q(M) = 0$. Comme $a_0 \neq 0$, l'égalité $Q(M) = 0$ peut encore se réécrire sous la forme

$$M \times \left(-\sum_{k=1}^d \frac{a_k}{a_0}M^k\right) = I_n\,,$$

ce qui montre que $M^{-1} = -\sum_{k=1}^q (a_k/a_0)M^k$ est un polynôme en M. Comme $M \in \mathcal{A}$, qui est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce polynôme en M appartient à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que $M^{-1} \in \mathcal{A}$.

373. **RMS 2010 813 Centrale PSI**

Déterminer les $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ MXN = 0$.

Solution. — L'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MXN$ est linéaire. Elle est identiquement nulle si et seulement si elle est nulle sur les éléments $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{\ell,j})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ de la base canonique. Or l'élément (a,b) de $ME_{i,j}N$ vaut

$$\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n m_{a,k}\delta_{i,k}\delta_{\ell,j}n_{\ell,b} = m_{a,i}n_{j,b}\,.$$

Ce produit doit être nul pour tous les quadruplets d'indices $(a,b,i,j) \in [\![1,n]\!]^4$. Alors, si l'un des éléments de M n'est pas nul, alors tous ceux de N doivent l'être, et vice-versa. Il faut donc que M ou N soit la matrice nulle. La réciproque est claire.

On conclut que les couples (M,N) qui conviennent sont ceux tels que $M = 0$ ou $N = 0$.

374. **RMS 2010 814 Centrale PSI**

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour toute $f \in E$, on pose $\Phi(f)\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

(a) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. L'application Φ est-elle injective ? Surjective ?

(b) Déterminer le noyau de Φ.

Solution. —

(a) La linéarité de Φ résulte de la linéarité de l'intégrale. Si $f \in E$, elle est continue, alors $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et en particulier $\Phi(f) \in E$. Il en résulte que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
L'application Φ n'est pas injective. En effet, si f désigne la fonction $\lfloor\cdot\rfloor - 1/2$, alors $\Phi(f) = 0$, car on sait que la partie entière est 1–périodique, donc $\int_x^{x+1}\lfloor t\rfloor\,dt = \int_0^1\lfloor t\rfloor\,dt = \int_0^1 t\,dt = 1/2$.
L'application Φ n'est pas non plus surjective, puisque $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour toute fonction $f \in E$, et qu'il existe des fonction continues qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Analyse. Soit $f \in E$. En dérivant par rapport à x la relation $\phi(f)(x) = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) - f(x) = 0$, donc f est 1–périodique. De plus, la valeur moyenne de f, qui vaut $\int_0^1 f(t)\,dt$, est nulle.
Synthèse. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$ pour toute fonction 1–périodique, la réciproque est établie.
On conclut que le noyau de Φ est l'ensemble des fonctions de E qui sont 1–périodiques et de valeur moyenne nulle.

375. **RMS 2009 970 Centrale PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant0}$ converge. Déterminer sa limite en fonction de A.

Solution. — Le polynôme $B = X^3 - X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4} = X^2(X-1) - \frac{1}{4}(X-1) = (X-\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2})(X-1)$ est annulateur de A par hypothèse. Si l'on note $R_k = a_kX^2 + b_kX + c_k$ le reste de la division euclidienne $X^k = BQ_k + R_k$ de X^k par B, la substitution de X par les racines (simples) de B fournit le système de gauche ci-dessous, que l'on résout par la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac14 a_k+\frac12 b_k+c_k &=& \frac{1}{2^k}\,, \\ \frac14 a_k-\frac12 b_k+c_k &=& \left(-\frac12\right)^k\,, \\ a_k+b_k+c_k &=& 1\,, \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{lcl} -\frac34 a_k-\frac12 b_k &=& \frac{1}{2^k}-1\,, \\ -\frac34 a_k-\frac32 b_k &=& \left(-\frac12\right)^k-1\,, \\ a_k+b_k+c_k &=& 1\,, \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{lcl} b_k &=& \frac{1}{2^k}[1-(-1)^k]\,, \\ -\frac34 a_k-\frac32 b_k &=& \left(-\frac12\right)^k-1\,, \\ a_k+b_k+c_k &=& 1\,, \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b_k &=& \frac{1}{2^k}[1-(-1)^k]\,, \\ a_k &=& -2b_k-\frac43\left[\left(-\frac12\right)^k-1\right]\,, \\ c_k &=& 1-a_k-b_k\,, \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b_k &=& \frac{1}{2^k}[1-(-1)^k]\,, \\ a_k &=& \frac{1}{3\cdot 2^{k-1}}\left[-3+(-1)^k\right]+\frac43\,, \\ c_k &=& -\frac13+\frac{1}{3\cdot 2^k}[3+(-1)^k]\,. \end{array}\right.$$

La substitution de X par A dans $X^k=BQ_k+R_k$ donne $A^k=R_k(A)$, et on déduit des valeurs de a_k, b_k et c_k que

$$\lim_{+\infty} A^k=\frac43 A^2-\frac13 I_n\,.$$

Les valeurs des coefficients sont confirmées par les commandes Maple suivantes :

```
eq1:=a/4+b/2+c=1/2**k;eq2:=a/4-b/2+c=(-1/2)**k;eq3:=a+b+c=1;
systeme:={eq1,eq2,eq3}:inconnues:={a,b,c};solve(systeme,inconnues);
```

376. **RMS 2009 971 Centrale PSI**

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j}=x_i^{j-1}$ si $j<n$ et $a_{i,n}=(\sum_{k\neq i}x_k)^{n-1}$.

Solution. — On note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de la matrice A et s la somme $x_1+\cdots+x_n$. On note aussi C_n' la colonne des $a_{i,n}'=x_i^{n-1}$, de sorte que la matrice dont les colonnes sont $C_1,\dots,C_{n-1},C_n'$ soit la matrice $V(x_1,\dots,x_n)$ de Vandermonde associée à la famille $(x_1,\dots,x_n)$. Comme $a_{i,n}=(s-x_i)^{n-1}=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}x_i^j s^{n-1-j}=\sum_{j=1}^n\alpha_j x_i^{j-1}$ avec $\alpha_j=(-1)^{j-1}s^{n-j}\binom{n-1}{j-1}$, on peut écrire

$$C_n=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j C_j+\alpha_n C_n'\,.$$

La multilinéarité et le caractère alterné du déterminant, ainsi que la valeur bien connue d'un déterminant de Vandermonde, montrent alors que

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\det(C_1,\dots,C_{n-1},C_j)+\alpha_n\det(C_1,\dots,C_{n-1},C_n')=(-1)^{n-1}\det V(x_1,\dots,x_n)=(-1)^{n-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

377. **RMS 2009 972 Centrale PSI**

Soit $f\colon P\in\mathbb{R}_2[X]\mapsto(2X+1)P-(X^2-1)P'$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

(b) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.

(c) L'endomorphisme f est-il inversible ? Si oui, donner son inverse.

Solution. —

(a) La linéarité de f vient de la linéarité de la dérivation. Les règles de calcul des degrés montrent la majoration évidente $\deg f(P)\leqslant 1+\deg P$. Mais en fait, si P est de degré 2 et si a est le coefficient de X^2 dans P, le coefficient de X^3 dans $f(P)$ est $2a-2a=0$, donc f arrive bien dans $\mathbb{R}_2[X]$. Finalement, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule ensuite la matrice A de f sur la base canonique : comme $f(1)=2X+1$, $f(X)=X^2+X+1$ et $f(X^2)=X^2+2X$, on obtient

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Un calcul sans difficulté montre alors que $\operatorname{Ker} f=\{0\}$ et le théorème du rang permet d'en déduire que $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}_2[X]$.

(b) On trouve que les valeurs propres de A valent -1, 1 et 3, et que les sous-espaces propres correspondants sont les droites respectivement engendrées par $(1,-2,1)$, $(1,0,-1)$ et $(1,2,1)$.

(c) On a déjà vu à la question (a) que f est inversible. Un calcul sans difficulté montre que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

378. **RMS 2009 973 Centrale PSI**

Soient A une matrice carrée et B la transposée de sa comatrice.

(a) Un vecteur propre pour A est-il vecteur propre pour B ?

(b) Comparer les valeurs propres de A et celles de B.

(c) Comparer la diagonalisabilité de A et celle de B.

Solution. — On note $\mathbb{K}$ le corps des coefficients, et on confond les matrices avec les applications linéaires qui leurs sont canoniquement associées. Il semble difficile de résoudre cet exercice sans avoir une idée du résultat donnant le rang de B en fonction de celui de A, selon les trois cas évoqués ci-dessous.

(a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. On va répondre positivement à la question, en discutant suivant le rang de A.

i. Si $\operatorname{rg} A = n$, on utilise la relation $BA = \det(A)I_n$, qu'on applique à X. On obtient $BAX = \det(A)I_nX$, c'est-à-dire $\lambda BX = \det(A)X$, donc

$$BX = \frac{\det(A)}{\lambda}X\,,$$

ce qui montre que X est aussi un vecteur propre de B, pour la valeur propre $\det(A)/\lambda$. En résumé,

$$E_\lambda(A) \subset E_{\det(A)/\lambda}(B)\,.$$

ii. Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$ est une droite engendrée par X. Comme A et B commutent ($AB = BA = \det(A)I_n = 0$ en l'occurrence), les sous-espaces propres de A sont stables par B, c'est le cas en particulier de $E_0(A)$, donc BX est colinéaire à X, qui est donc un vecteur propre de B.

iii. Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, on montre que $B = 0$, de sorte que tout vecteur est propre pour B, en particulier X. En effet, les éléments de B sont, au signe près, des déterminants de taille $n-1$ extraits de A. Comme $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, toute famille de $n-1$ colonnes extraites de A est liée, et il en est de même de toute famille de $n-1$ colonnes dont on a supprimé une ligne, donc tous les mineurs d'ordre $n-1$ de A sont nuls, donc $B = 0$.

(b) On discute encore selon le rang de A.

i. Si $\operatorname{rg} A = n$, la question précédente montre que $\phi\colon \lambda \in \operatorname{Sp}(A) \mapsto \det(A)/\lambda$ est une injection de $\operatorname{Sp}(A)$ dans $\operatorname{Sp}(B)$. Comme ceci a été établi en se basant uniquement sur la relation $BA = \det(A)I_n$, on prouve de même, en se basant sur la relation $AB = \det(A)I_n$, que $\psi : \lambda \in \operatorname{Sp}(B) \mapsto \det(A)/\lambda$ est une injection de $\operatorname{Sp}(B)$ dans $\operatorname{Sp}(A)$ (la matrice B est bien inversible). Les applications ϕ et ψ sont donc réciproques l'une de l'autre, et on a complètement décrit les valeurs propres de B en fonction de celles de A.

ii. Si $\operatorname{rg} A = n-1$, la relation $AB = BA = \det(A)I_n = 0$ montre que l'image de A, qui est un hyperplan, est contenue dans le noyau de B, donc que le rang de B vaut zéro ou 1. Comme il existe au moins un mineur de A d'ordre $n-1$ qui est différent de zéro (voir la remarque), B n'est pas nulle, donc $\operatorname{rg} B = 1$. Alors B admet la valeur propre zéro d'ordre au moins $n-1$, et l'éventuelle autre valeur propre $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} \operatorname{com} A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, qui est la somme des mineurs diagonaux de A.

iii. Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors $B = 0$ donc $\operatorname{Sp} B = \{0\}$.

(c) On discute encore selon le rang de A.

i. Si $\operatorname{rg} A = n$, on peut reprendre la démonstration de la question (a) pour montrer que $E_\lambda(A) = E_{\det(A)/\lambda}(B)$. La bijection entre le spectre de A et celui de B, établie à la question (b), montre alors que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

ii. Si $\operatorname{rg} A = n-1$, la question (b) montre que B est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle, indépendamment de la diagonalisabilité de A.

iii. Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors $B = 0$ est toujours diagonalisable.

Remarque. — Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier naturel $\leqslant \min(r,p)$. On montre ici que $\operatorname{rg} A = r$ si et seulement si r est le plus grand des ordres des déterminants non nuls extraits de A (vérifier si ce résultat figure au programme de PSI ou non ? ?).

– Si $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$, alors il existe au moins r colonnes de A formant une famille libre. On note $A' \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ une matrice extraite de A contenant r telles colonnes. Le rang de ${}^tA'$ étant égal au rang de A', il existe au moins r colonnes de ${}^tA'$ — qui sont des lignes de A' — formant une famille libre. Soit $A'' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre r extraite de A' contenant r telles colonnes. Alors $\det(A'')$ est un déterminant d'ordre r extrait de A et il est non nul.
– Si $\mathrm{rg}\, A \leqslant r$, alors toute famille de $r+1$ colonnes de A est liée. Comme précédemment, si on extrait encore de manière quelconque $r+1$ lignes de ces $r+1$ colonnes, on obtient une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$ et de rang r, donc de déterminant nul. Finalement, tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits de A sont nuls.

Ces deux points prouvent l'équivalence annoncée, et justifient l'un des arguments admis à la question (b).

379. **RMS 2009 974 Centrale PSI**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$. Comparer le spectre de B et celui de ${}^tAA$.

Solution. — On va démontrer que

$$\mathrm{Sp}({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(B) = \left\{\pm\sqrt{\mu},\ \mu \in \mathrm{Sp}({}^tAA)\right\} .$$

Première étape : si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, et $X \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On écrit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1 et X_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$BX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} AX_2 & = & \lambda X_1 , \\ {}^tAX_1 & = & \lambda X_2 \end{array} \right.$$

On en déduit, en multipliant la première équation par ${}^tA$, que ${}^tAAX_2 = \lambda^2 X_2$. On discute ensuite selon que λ est nul ou pas.
– Si $\lambda \neq 0$, il est impossible que $X_2 = 0$ (sinon, la première équation donnerait $0 = \lambda X_1$, donc $X_1 = 0$, et X serait le vecteur nul, donc ne serait pas un vecteur propre). Alors la relation ${}^tAAX_2 = \lambda^2 X_2$ montre que $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$.
– Si $\lambda = 0$, alors $AX_1 = {}^tAX_2 = 0$ et, comme au moins un des vecteurs X_i est non nul, on en déduit qu'au moins une des deux matrices A ou ${}^tA$ est singulière (et alors les deux le sont puisqu'elles ont même rang). Dans ce cas, ${}^tAA$ n'est pas inversible, donc $0^2 = 0 \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$.

Deuxième étape : si $\mu \in \mathrm{Sp}({}^tAA)$, alors $\pm\sqrt{\mu} \in \mathrm{Sp}(B)$.

On commence par montrer que $\mu \in \mathbb{R}_+$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à μ. En notant $\|\ \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient $\|AY\|^2 = {}^t(AY)(AY) = {}^YY^tAAY = {}^tY(\mu Y) = \mu\|Y\|^2$, donc

$$\mu = \frac{\|AY\|^2}{\|Y\|^2} \in \mathbb{R}_+ .$$

Outre les notations ci-dessus, on pose $\lambda = \pm\sqrt{\mu}$. On discute selon que μ est nul ou pas.
– Si $\mu \neq 0$, on pose $X_1 = AY$ et $X_2 = \lambda Y \neq 0$, puis $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, qui est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ (ces valeurs sont inspirées par la résolution du système $BX = \lambda X$ effectuée dans la première étape). Alors

$$BX = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AY \\ \lambda Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda AY \\ {}^tAAY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda AY \\ \mu Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda AY \\ \lambda^2 Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} AY \\ \lambda Y \end{pmatrix} = \lambda X ,$$

ce qui montre que $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$.
– Si $\mu = 0$, alors ${}^tAAY = 0$, et en multipliant par ${}^tY$, on obtient $\|AY\|^2 = 0$, donc $AY = 0$. On pose alors $X = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$, qui est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, et on constate que $BX = \begin{pmatrix} AY \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, donc que $0 \in \mathrm{Sp}(B)$, ce qui achève la preuve.

380. **RMS 2009 975 Centrale PSI**

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi\colon (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tBMA)$. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement M est définie positive.

Solution. — On remarque que φ est bilinéaire (cela résulte de la bilinéarité du produit matriciel et de la linéarité de la trace) sans hypothèse particulière sur M, et qu'elle est symétrique dès que M l'est. Cela résulte de ce que la trace d'une matrice est égale à celle de sa transposée et de ce que M est symétrique :

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tBMA) = \mathrm{tr}({}^t[{}^tBMA]) = \mathrm{tr}({}^tA{}^tM\,B) = \mathrm{tr}({}^tAMB) = \varphi(B, A) .$$

L'équivalence demandée se réduit donc à : φ est définie positive si et seulement si M l'est.

Dans un premier temps, on adopte la définition suivante d'une matrice M symétrique définie positive : ses valeurs propres sont strictement positives. On utilisera le théorème spectral : comme M est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathrm{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $D = P^{-1}MP = {}^tPMP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On suppose que φ est définie positive. Alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, en posant $C = P^{-1}A = {}^tPA$, on a

$$\varphi(A, A) = \varphi(PC, PC) = \mathrm{tr}({}^tC\,{}^tPPD\,{}^tPPC) = \mathrm{tr}({}^tCDC) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_{i,j}^2 > 0\,.$$

Comme A est quelconque, C parcourt $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, si C est la matrice élémentaire $E_{k,\ell}$, on obtient $\lambda_k > 0$ pour tout k, donc M est définie positive.

Réciproquement, si M est définie positive, le calcul ci-dessus montre que $\varphi(A, A) > 0$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, donc φ est définie positive.

Dans un deuxième temps, on adopte la définition suivante d'une matrice M symétrique définie positive : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.

On suppose que φ est définie positive. Soit X un vecteur colonne non nul de composantes $x_1, \dots, x_n$. On note A la matrice carrée d'ordre n dont toutes les colonnes valent X : en d'autres termes, $[A]_{i,j} = x_i$ pour tous indices i et j. Le coefficient (i, j) du produit ${}^tAMA$ vaut $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [{}^tA]_{i,k} m_{k,\ell} [A]_{\ell,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k m_{k\ell} x_\ell$. Par suite

$$\varphi(A, A) = \mathrm{tr}({}^tAMA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k m_{k\ell} x_\ell\right) = n \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k m_{k\ell} x_\ell = n\,{}^tXMX > 0\,,$$

ce qui prouve que M est définie positive.

Pour la réciproque, il paraît difficile d'éviter le théorème spectral (voir ci-dessus).

381. **RMS 2010 828 Centrale PSI (calcul formel)**

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

et f et g les endomorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM$ et $g(M) = MA$.

(a) Déterminer les spectres de f et de g ainsi que les espaces propres associés.

(b) Montrer que $h = f - g$ est auto-adjoint. Donner une base de l'image et du noyau de h.

Solution. — On aura besoin dans cet exercice de plusieurs procédures auxiliaires. La première donne la matrice élémentaire $E_{i,j}$ d'ordre 3 :

```
E:=proc(i,j)
local A;
A:=matrix(3,3,0); A[i,j]:=1;evalm(A);
end proc;
```

La base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. On décide d'ordonner ses matrices dans l'ordre lexicographique, comme l'indique le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$
q	0	0	0	1	1	1	2	2	2
r	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Les deux dernières lignes du tableau donnent respectivement le quotient q et le reste r de la division de $k-1$ par 3, c'est-à-dire que $k - 1 = 3q + r$ avec $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leqslant r \leqslant 2$. Voici alors une fonction qui, à chaque nombre k entre 1 et 9, fait correspondre le couple (i, j) d'indices du tableau ci-dessus :

```
elementaire:=k->[iquo(k-1)+1,irem(k-1,3)+1];
```

(a) Si u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$, qui est carrée d'ordre 9, sera obtenue grâce à la procédure suivante :

```
matrice9:=proc(u)
     local image, F, k, l;
     F:=matrix(9,9);
     for k from 1 to 9 do
          for l from 1 to 9 do
               image:=evalm(u(E(op(elementaire(l)))));F[k,l]:=image[op(elementaire(k))]
          end do
     end do;
     evalm(F);
end proc;
```

On définit ensuite les endomorphismes f et g par `f:=M->evalm(A&*M);g:=M->evalm(M&*A)`, puis on calcule leurs matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$, notées F et G, grâce à `matrice9(f);matrice9(g)`. On obtient

$$F=\begin{pmatrix}2&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&2&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&2&0&0&1\\1&0&0&1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&2&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&2\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}2&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&2&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&2\end{pmatrix}.$$

On obtient les éléments propres de f et g grâce à `EPF:=[eigenvects(F)]; EPG:=[eigenvects(G)]`. Les vecteurs propres sont alors donnés sous forme d'une liste de 9 coordonnées, qu'on peut transformer en la matrice carrée d'ordre 3 correspondante, grâce à la procédure suivante, où v est supposé être un vecteur de $\mathbb{R}^9$:
`donnematrice:=v->evalm(add(v[i]*E(op(elementaire(i))),i=1..9));`
La validation de `seq([EPF[k][1],EPF[k][2],map(donnematrice,EPF[k][3])],k=1..nops(EPF))` donne le même résultat que `eigenvects(F)`, mais les vecteurs propres sont cette fois présentés sous forme matricielle :

$$\left[4,3,\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\right],$$

$$\left[1,6,\left\{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\right].$$

On lit ci-dessus que les valeurs propres de f sont 4 et 1, et que les sous-espaces propres associés sont respectivement de dimensions 3 et 6. On en déduit que f est diagonalisable, ce qui était prévisible puisque F est une matrice symétrique réelle. On lit aussi une base de chacun des sous-espaces propres.
Les résultats analogues pour g sont les suivants, et sont donnés sans commentaires : le spectre et les dimension des sous-espaces propres sont les mêmes, et les matrices propres données par Maple (dans ma session, au moins) sont les transposées des matrices propres de f, ou leurs opposées.

(b) Dans ce qui suit, on utilise le caractère symétrique de A et les égalités ${}^t(PQ)={}^tQ\,{}^tP$ et $\mathrm{tr}(PQ)=\mathrm{tr}(QP)$, valables pour toutes matrices P et Q carrées d'ordre 3, ainsi que la linéarité de la trace et de la transposition. Pour M et N quelconques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on calcule

$$\begin{aligned}\langle h(M),N\rangle=\langle AM-MA,N\rangle&=\mathrm{tr}({}^t[AM-MA]N)=\mathrm{tr}([{}^tMA-A\,{}^tM]N)=\mathrm{tr}({}^tMAN)-\mathrm{tr}(A\,{}^tMN)\,,\\&=\mathrm{tr}({}^tMAN)-\mathrm{tr}({}^tMNA)=\mathrm{tr}({}^tMAN-{}^tMNA)=\mathrm{tr}({}^tM[AN-NA])=\langle M,h(N)\rangle.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $h=f-g$ est auto-adjoint. On valide ensuite `H:=evalm(F-G)`, qui calcule la matrice H de h dans la base $\mathcal{B}$, puis on utilise les commandes `colspace` et `nullspace`, qui calculent respectivement une base de l'image et une base du noyau (la commande `kernel` est synonyme de `nullspace`). Pour présenter le résultat sous forme matricielle, on valide en fait `map(donnematrice,colspace(H));map(donnematrice,nullspace(H))`, ce qui donne

$$\mathrm{Im}\,h=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathrm{Ker}\,h=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Remarque. — On voit apparaître deux matrices de permutation dans la base de $\operatorname{Ker} h$. Cela n'a rien d'étonnant car, A étant une matrice symétrique, permuter ses lignes revient à permuter ses colonnes : en d'autres termes, $AP_\sigma = P_\sigma A$ pour toute matrice P_σ de permutation. On en déduit que $P_\sigma \in \operatorname{Ker} h$ pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On peut vérifier par ailleurs que $\operatorname{Vect}\{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_3\}$ est de dimension 5, ce qui prouve l'égalité entre ce sous-espace et le noyau de h.

382. **RMS 2011 836 Centrale PSI (calcul formel)**

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\phi\colon (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto -\det \left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline {}^tY & 0 \end{array}\right)$.

(a) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. À quelle condition définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

(b) On pose $A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 & 5 & -4 \\ 5 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$. Montrer que ϕ est un produit scalaire et donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale pour ϕ sur le plan d'équation $2x + y - z = 0$.

Solution. — Dans tout l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$, sauf dans le calcul du déterminant $D(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z_1, \dots, z_n)$ à la question (a). par ailleurs, les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont implicitement considérés par l'énoncé comme des vecteurs colonnes.

(a) Le déterminant d'une matrice étant égal à celui de sa transposée, on constate que, pour tous X et Y de $\mathbb{R}^n$,

$$\phi(Y,X) = -\det\left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline {}^tX & 0 \end{array}\right) = -\det\left[{}^t\left(\begin{array}{c|c} {}^tA & X \\ \hline {}^tY & 0 \end{array}\right)\right] = -\det\left(\begin{array}{c|c} {}^tA & X \\ \hline {}^tY & 0 \end{array}\right) = -\det\left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline {}^tY & 0 \end{array}\right) = \phi(X,Y)\,,$$

l'avant-dernière égalité venant de ce que A est symétrique. Il en résulte que ϕ est une forme symétrique. Il suffit alors de vérifier la linéarité à droite, par exemple, qui résulte de la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne.

Comme A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable : il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $P^{-1}AP = {}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_n, \dots, \lambda_1)$: l'ordre inhabituel de numérotation des valeurs propres est choisi pour faciliter la preuve par récurrence donnée plus bas. Si l'on pose $Q = \operatorname{diag}(P, 1)$, alors $Q \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ d'inverse $\operatorname{diag}(P^{-1}, 1)$, et

$$\left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline {}^tX & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1}A & P^{-1}X \\ \hline {}^tX & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1}AP & P^{-1}X \\ \hline {}^t[P^{-1}X] & 0 \end{array}\right).$$

Deux matrices semblables ayant le même déterminant, si l'on note $Z = {}^t(z_n, \dots, z_1)$ le vecteur $P^{-1}X$, on en déduit que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(X,X) = -\det\left(\begin{array}{c|c} A' & Z \\ \hline {}^tZ & 0 \end{array}\right) = -\begin{vmatrix} \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & z_n \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & z_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & z_1 \\ z_n & z_{n-1} & \cdots & z_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On note $D(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z_1, \dots, z_n)$ le déterminant ci-dessus, qui est d'ordre $n+1$. En le développant par rapport à sa première colonne, puis en développant le déterminant intermédiaire par rapport à sa première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} D(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z_1, \dots, z_n) &= \lambda_n D(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}) - (-1)^{n+2} z_n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & z_n \\ \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & z_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & z_1 \end{vmatrix}, \\ &= \lambda_n D(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}) + (\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}) z_n^2. \end{aligned}$$

On démontre alors, par récurrence sur $n \geqslant 1$, l'égalité suivante :

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \lambda_i\right) z_k^2\,.$$

Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que $D(\lambda_1, z_1) = z_1^2$, ce qui est vrai, puisque $D(\lambda_1, z_1) = -\begin{vmatrix} \lambda_1 & z_1 \\ z_1 & 0 \end{vmatrix}$. On suppose la propriété établie pour $n-1$. Alors la relation de récurrence établie plus haut montre que $D(\lambda_1, \dots, \lambda_n, z_1, \dots, z_n) = \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i \in [\![1,n-1]\!] \setminus \{k\}} \lambda_i\right) z_k^2 + (\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}) z_n^2 = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \lambda_i\right) z_k^2$, ce qui achève la preuve.

Voici un résultat intermédiaire, dont la démonstration est aisée : si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, la forme quadratique $Z = {}^t(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n\mapsto\sum_{k=1}^n\alpha_k z_k^2$ est définie positive si et seulement si $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k>0$. On démontre maintenant la caractérisation suivante : ϕ est un produit scalaire si et seulement si

i. ou bien n est pair et $A\in\mathcal{S}_n^{++}$;

ii. ou bien n est impair et A ou $-A\in\mathcal{S}_n^{++}$.

Condition nécessaire. On suppose que ϕ est un produit scalaire. Comme $X\mapsto Z=P^{-1}X$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que la forme quadratique $q : Z\in\mathbb{R}^n\mapsto\sum_{k=1}^n\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}\lambda_i\right)z_k^2$ est définie positive. Alors tous les λ_i sont non nuls en vertu du résultat intermédiaire et, en désignant par $\lambda\neq 0$ le produit $\prod_{i=1}^n\lambda_i$ des valeurs propres de A, on peut écrire l'expression de q sous la forme

$$q(Z)=\sum_{k=1}^n\frac{\lambda}{\lambda_k}z_k^2\,.$$

Il faut alors que les quotients λ/λ_k soient tous strictement positifs. De deux choses l'une :

– ou bien $\lambda>0$, donc tous les λ_k sont strictement positifs, donc $A\in\mathcal{S}_n^{++}$;

– ou bien $\lambda<0$, donc tous les λ_k sont strictement négatifs, donc $-A\in\mathcal{S}_n^{++}$, et il faut en outre que λ, qui est le produit de n nombres strictement négatifs, soit strictement négatif, donc que n soit impair.

Condition suffisante. Elle est claire.

(b) Il est clair que A est symétrique. Les commandes

```
with(linalg):A:=(1/12)*matrix(3,3,[11,5,-4,5,11,-4,-4,-4,20]);eigenvals(A);
```

montrent ensuite que le spectre de A vaut $\{1,2,1/2\}$, donc que A est définie positive. Par conséquent, ϕ est un produit scalaire.

On note H le plan (hyperplan) d'équation $2x+y-z=0$. La famille (U,V) avec $U={}^t(1,-2,0)$ et $V={}^t(1,0,2)$ est une base de H. Un vecteur W de $\mathbb{R}^3$ est ϕ–orthogonal à H si et seulement si $\phi(U,W)=\phi(V,W)=0$. En validant les commandes

```
phi:=(X,Y)->-det(stackmatrix(augment(A,X),matrix(1,4,[seq(Y[k],k=1..3),0])));
U:=vector([1,-2,0]);V:=vector([1,0,2]);W:=vector(3);S:={phi(U,W)=0,phi(V,W)=0};
s:=solve(S,{seq(W[k],k=1..3)});
```

on obtient $W_1=W_1, W_2=(25/31)W_1, W_3=-(32/31)W_3$. On choisit alors un vecteur orthogonal à H et unitaire (pour le produit scalaire ϕ) grâce à `W:=vector([31,25,-32]);w:=evalm(W/ sqrt(phi(W,W)));` et on utilise la formule du cours pour la projection orthogonale π sur un hyperplan H d'un espace euclidien (E,ϕ) dont ont connaît un vecteur normal et unitaire w : $\forall x\in E$, $\pi(x)=x-\phi(x,w)w$. La matrice de π dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est obtenue par

```
pi:=X->evalm(X-phi(X,w)*w):E[1]:=vector([1,0,0]):E[2]:=vector([0,1,0]):E[3]:=vector([0,0,1]):
B:=augment(pi(E[1]),pi(E[2]),pi(E[3]));
```

On lit alors à l'écran la matrice

$$\frac{1}{119}\begin{pmatrix}57&-31&31\\-50&94&25\\64&32&87\end{pmatrix}.$$

On peut vérifier les calculs en validant `evalm(B&*U);evalm(B&*V);evalm(B&*W);` et on obtient bien U, V et 0.

383. **RMS 2011 849 Centrale PSI (calcul formel)**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\forall(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $L : P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto(aX^2+bX-1)P''+(cX+d)P'$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

(a) Trouver (a,b,c,d) pour que L soit autoadjoint.

(b) Montrer l'existence de $\max\{\frac{\langle P,L(P)\rangle}{\langle P,P\rangle}, P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus\{0\}\}$. Conjecturer sa valeur pour $n\leqslant 10$. Démontrer la conjecture.

(c) Trouver les éléments propres de L.

Solution. —

(a) L'endomorphisme L est autoadjoint lorsque $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]$, $\langle L(P),Q\rangle=\langle P,L(Q)\rangle$. La bilinéarité et la symétrie du produit scalaire montrent que cette condition équivaut à

$$\forall j\in[\![0,n]\!],\quad\forall i\in[\![j+1,n]\!],\quad\langle L(X^i),X^j\rangle=\langle X^i,L(X^j)\rangle\,.$$

On obtient ainsi $n(n+1)/2$ équations, pour 4 inconnues (a, b, c et d). Il n'est pas clair que ce système possède au moins une solution (si n est grand), ou n'en possède qu'une (si n est petit). On va donc faire résoudre le système `S` correspondant par Maple pour différentes valeurs de n. Voici les commandes utilisées (les polynômes seront dans tout l'exercice des expressions en la variable x, et on commence par définir le produit scalaire `ps` et l'endomorphisme `L`) :

```
ps:=(P,Q)->int(P*Q,x=-1..1); L:=P->(a*x**2+b*x-1)*diff(P,x$2)+(c*x+d)*diff(P,x);
S:=n->{seq(seq(ps(L(x**i),x**j)-ps(x**i,L(x**j))=0,i=j+1..n),j=0..n)};
seq(solve(S(n),{a,b,c,d}),n=0..5);solve(S(10);
```

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
n=0, &\quad \{a=a, b=b, c=c, d=d\}\,, \\
n=1, &\quad \{a=a, b=b, c=c, d=0\}\,, \\
n=2, &\quad \{a=3-c, c=c, b=0, d=0\}\,, \\
n=3, &\quad \{a=1, c=2, b=0, d=0\}\,, \\
n=4, &\quad \{a=1, c=2, b=0, d=0\}\,, \\
n=5, &\quad \{a=1, c=2, b=0, d=0\}\,, \\
n=10, &\quad \{a=1, c=2, b=0, d=0\}\,.
\end{aligned}$$

On constate en effet que pour $n = 0$, 1 ou 2, le système admet une infinité de solutions (avec respectivement 4, 3 ou 1 degré de liberté). En revanche, à partir de $n = 3$, il semble qu'il y ait une unique solution. Pour le confirmer, on attribue à (a, b, c, d) la valeur $(1, 0, 2, 0)$ grâce à la commande `assign(S(3))`, et on valide la ligne `ps(L(x**i),x**j)-ps(x**i,L(x**j))`. Le résultat étant nul, on a prouvé que $(1, 0, 2, 0)$ est l'unique valeur du quadruplet (a, b, c, d) qui rend L autoadjoint, pourvu que $n \geqslant 3$, ce que l'on supposera dans la suite.

(b) Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, la sphère unité $S = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\| = 1\}$ est compacte. L'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P, L(P)\rangle$ est continue, puisque L et le produit scalaire le sont (c'est encore un argument de dimension finie). Par suite, cette application possède un maximum sur S. Enfin, comme $\langle P, L(P)\rangle/\langle P, P\rangle = \varphi(P/\|P\|)$, l'existence du maximum demandée est établie.

On peut faire calculer naïvement ce maximum, mais les procédures sont trop lourdes pour $n \geqslant 6$. La procédure `q` prend en argument une liste `e` de coefficients et rend le quotient $\langle P, L(P)\rangle/\langle P, P\rangle$ (la séparation en les deux procédures `q` et `qq` permet de rendre globales les variables que sont les coefficients e_i, sans quoi les dérivées partielles apparaîtraient comme nulles) :

```
q:=proc(e)
local P;
P:=sum(e[i+1]*x**i,i=0..nops(e)-1);
ps(P,L(P))/ps(P,P);
end proc;
qq:=n->q([seq(e[i],i=0..n)]);
sols:=n->[solve({seq(diff(qq(n),e[j]),j=0..n)},{seq(e[j],j=0..n)})];
for n from 3 to 5 do seq(subs(sols(n)[k],qq(n)),k=1..nops(sols(n))) end do;
```

Ensuite, `sols` détermine les points critiques de `q`, puis on substitue les valeurs trouvées dans le quotient : la plus grande sera le maximum cherché. Voici les trois seuls que j'ai trouvés :

$$\begin{aligned}
n=3, &\quad 0, 6, 12, 2, \\
n=5, &\quad 0, 6, 20, 12, 2, \\
n=5, &\quad 0, 12, 30, 20, 6, 2.
\end{aligned}$$

On constate que les maxima trouvés sont $12 = 3 \times 4$, $20 = 4 \times 5$ et $30 = 5 \times 6$. On conjecture alors que

$$\max\left\{\frac{\langle P, L(P)\rangle}{\langle P, P\rangle},\ P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}\right\} = n(n+1)\,.$$

L'endomorphisme L étant symétrique, il est diagonalisable sur une base orthonormale. Soit donc $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que $L(P_k) = \lambda_k P_k$, où l'on a supposé que les valeurs propres λ_k sont rangées par ordre croissant. Si $P = \sum_{k=0}^n c_k P_k \neq 0$, on a

$$\frac{\langle P, L(P)\rangle}{\langle P, P\rangle} = \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k c_k^2}{\sum_{k=0}^n c_k^2} \leqslant= \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_n c_k^2}{\sum_{k=0}^n c_k^2} = \lambda_n\,.$$

Par ailleurs, $\langle P_n, L(P_n)\rangle/\langle P_n, P_n\rangle = \lambda_n$, ce qui prouve que le maximum cherché est la plus grande valeur propre de L. A terminer ? ?

(c) Trouver les éléments propres de L. Ce sont les $k(k+1)$ pour $k = 0, \dots, n$. A rédiger ? ?

384. **RMS 2010 829 Centrale PSI (calcul formel)**

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & b\\ b & c & d & a\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

(a) On suppose que $a=1/3$. Déterminer les matrices $A\in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Montrer qu'une telle matrice est semblable à $\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$ avec $R\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Déterminer R.

(b) On suppose que $a=1/2$. Déterminer les matrices $A\in\mathrm{O}_4(\mathbb{R})$.

Solution. — Au début de la session, on charge la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`.

(a) On valide les lignes suivantes :

```
A:=matrix(4,4,[a,b,c,d,d,a,b,c,c,d,a,b,b,c,d,a]);I4:=Matrix(4,4,shape=identity);
B:=subs(a=1/3,evalm(A));BB:=evalm(transpose(B)&*B-I4);
systeme1:={seq(seq(BB[i,j]=0,j=1..4),i=1..4),det(B)=1};solve(systeme1,{b,c,d});
```

On obtient deux solutions :

$$(b,c,d)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\left(\frac{-\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}.$$

Comme dans toute résolution d'équations algébriques, Maple donne en fait les solutions complexes, exprimées à l'aide de la commande `RootOf`. Il se trouve que les polynômes arguments de `RootOf` sont ici de degré 2, et que leurs racines sont évidentes : $\pm\sqrt{2}$ et $\pm i$. Le cadre de l'exercice étant les matrices à coefficients réels, on élimine la seconde possibilité. On définit les matrices B correspondant à ces deux solutions par

```
B1:=subs({b=sqrt(2)/3,c=2/3,d=-sqrt(2)/3},evalm(B));
B2:=subs({b=-sqrt(2)/3,c=2/3,d=sqrt(2)/3},evalm(B));
```

On remarque que B_2 est la transposée de B_1.

On note u_1 et u_2 les automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés à B_1 et B_2. Le calcul des éléments propres, grâce à la commande `eigenvects`, montre que u_1 et u_2 admettent la valeur propre 1 et que les sous-espaces propres associés sont des plans, respectivement notés F_1 et F_2. En vertu du théorème affirmant que, si F est un sous-espace stable par un automorphisme orthogonal, alors $F^\perp$ l'est aussi, les plans orthogonaux $F_1^\perp$ et $F_2^\perp$ sont stables par u_1 et u_2 respectivement. Ceci prouve que, sur une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^4=F_i\oplus F_i^\perp$, la matrice de u_i est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & R_i\end{pmatrix},$$

où $R_i\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, comme $u_i\in\mathrm{SO}(\mathbb{R}^4)$, il faut que $R_i\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, tout ceci étant valable pour $i=1$ ou 2.

Pour déterminer R_1, qui est nécessairement de la forme

$$R(\theta_1)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},$$

on peut tenter d'identifier les deux expressions du polynôme caractéristique de R_1 que l'on connaît désormais. L'une est donnée par le calcul en Maple grâce à `factor(charpoly(B1,x))`. Après avoir divisé $\chi_{B_1}(x)$ par x^2-1, on obtient

$$\chi_{R_1}(x)=x^2+\frac{2}{3}x+1\,.$$

L'autre est donnée par le calcul théorique $\chi_{R(\theta_1)}(x)=x^2-2\cos\theta_i+1$. On en déduit que $\cos\theta_1=-1/3$. Comme $B_2={}^tB_1$, on sait a priori que $R_2={}^tR_1$, avec $R_1=R(\arccos(-1/3))$ ou $R_1=R(-\arccos(-1/3))$. Il n'est pas possible de lever l'ambiguïté de manière canonique, puisque le choix dépend de l'orientation du plan $F_1^\perp$ (qui est par ailleurs aussi le plan $F_2^\perp$). On en restera donc là.

(b) Comme à la question (a), on valide

```
C:=subs(a=1/2,evalm(A));CC:=evalm(transpose(C)&*C-I4);
systeme2:={seq(seq(CC[i,j]=0,j=1..4),i=1..4)};solve(systeme2,{b,c,d});
```

On obtient quatre solutions :

$$(b,c,d)\in\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Analyse

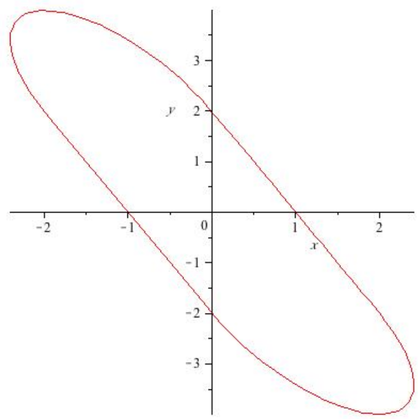
385. **RMS 2009 976 Centrale PSI (calcul formel)**

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y)=\int_0^1 |x+ty|\,\mathrm{d}t$. Cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, représenter sa boule unité avec Maple.

Solution. — Soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
- Si $N(x,y)=0$, alors $x+ty=0$ pour tout $t\in[0,1]$ (propriété de l'intégrale des fonctions continue et positives. Cela en traîne que $x=0$ (faire $t=0$), puis $y=0$ (faire $t=1$).
- La linéarité de l'intégrale montre que $N(\lambda\cdot(x,y))=|\lambda|N(x,y)$.
- L'inégalité triangulaire montre que $N((x,y)+(x',y'))=N(x+x',y+y')=\int_0^1|x+x'+t(y+y')|\,\mathrm{d}t=\int_0^1|(x+ty)+(x'+ty')|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|x+ty|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|x'+ty'|\,\mathrm{d}t=N(x,y)+N(x',y')$.

Par conséquent, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

En validant `N:=(x,y)->int(abs(x+t*y),t=0..1); with(plots): implicitplot(N(x,y)=1,x=-3..3,y=-4..4)`, on obtient le tracé de la sphère unité :



Ce tracé peut être justifié par une étude directe. Le caractère positivement homogène de N montre que $N(-(x,y))=N(x,y)$, donc qu'on peut se contenter de déterminer l'intersection de la boule unité avec le demi plan défini par $y\geqslant 0$.

- Si $x\geqslant 0$, alors $N(x,y)=\int_0^1(x+ty)\,\mathrm{d}t=x+(y/2)$, donc la boule unité est délimité par la droite d'équation $x+(y/2)=1$, ou encore $y=-2x+2$.
- Si $x<0$, pour calculer $N(x,y)$, il faut déterminer si $x+ty$ change de signe lorsque t parcourt $[0,1]$.
  - C'est le cas si et seulement si $-x/y\leqslant 1$, c'est-à-dire $x+y\geqslant 0$. Alors

$$N(x,y)=\int_0^{-x/y}-(x+ty)\,\mathrm{d}t+\int_{-x/y}^1(x+ty)=\frac{x^2}{y}-\frac{x^2}{2y}+x\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{y}{2}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y}{2}\cdot$$

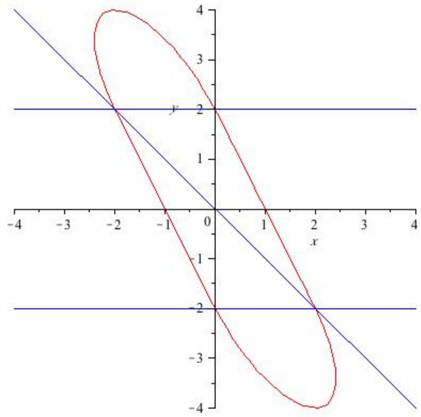
  Dans le secteur angulaire déterminé par $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 0$ et $x<0$, la boule unité de N est délimitée par l'ellipse d'équation $x^2+xy+y^2/2=y$.
  - Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le secteur angulaire déterminé par $y\geqslant 0$, $x+y<0$ et $x<0$,

$$N(x,y)=\int_0^1-(x+ty)\,\mathrm{d}t=-x-y/2\,,$$

  et la boule unité de N est délimitée par la droite d'équation $-x-y/2=1$, ou encore $y=-2x-2$.

Pour obtenir le tracé de la boule unité ainsi que des diverses droites dont il est question dans l'étude ci-dessus, on valide

```
A:=implicitplot(N(x,y)=1,x=-3..3,y=-4..4): B:=plot(-x,x=-4..4,color=blue):
C:=plot(2,x=-4..4,color=blue): E:=plot(-2,x=-4..4,color=blue): display([A,B,C,E]);
```



386. **RMS 2009 977 Centrale PSI**
Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. — On rappelle que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1. C'est donc l'image réciproque du singleton $\{1\}$, qui est une partie fermée de $\mathbb{R}$, par l'application continue $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc
$$\overline{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\,.$$
Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto tM$ est continue et $\varphi(t)$ tend vers $\varphi(1) = M$ quand t tend vers 1. Or $\det(\varphi(t)) = \det(tM) = t^n \neq 1$ dans un voisinage épointé de 1, ce qui montre que toute boule ouverte centrée en M contient des matrices qui ne sont pas dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par suite
$$\overset{\circ}{\mathrm{SL}_n}(\mathbb{R}) = \emptyset\,.$$

387. **RMS 2009 831 Centrale PSI**
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des deux normes définies par $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$ et $N(M) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$. Soient $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + {}^tM$ et $v : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - {}^tM$. Calculer les normes d'opérateurs de u et v pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N.

Solution. — On notera $|||\cdot|||_\infty$ la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ et $\tilde{N}$ celle subordonnée à N. On suppose que $n \geqslant 2$ (si $n = 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}$, les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont confondues avec la valeur absolue, l'opérateur u est la multiplication par 2 et v est l'application nulle : leurs normes d'opérateur sont respectivement 2 et zéro).

(a) Calcul de $|||u|||_\infty$ et de $|||v|||_\infty$.
La majoration suivante, valable pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\|u(M)\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j} + m_{j,i}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} (|m_{i,j}| + |m_{j,i}|) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| + \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{j,i}| = 2\|M\|_\infty$$
montre que $|||u|||_\infty \leqslant 2$. La matrice non nulle $M = E_{1,2} + E_{2,1}$ est telle que $\|M\|_\infty = 1$ et vérifie $u(M) = 2M$ (plus généralement, on peut utiliser n'importe quelle matrice symétrique non nulle). On conclut que
$$|||u|||_\infty = 2\,.$$
On montre de même que $|||v|||_\infty = 2$, en utilisant l'inégalité triangulaire $|m_{i,j} - m_{j,i}| \leqslant |m_{i,j}| + |m_{j,i}|$ ainsi que l'exemple de la matrice antisymétrique non nulle $E_{1,2} - E_{2,1}$.

(b) Calcul de $\tilde{N}(u)$ et de $\tilde{N}(v)$.
On commence par majorer $N(u(M))$ de la même façon que précédemment :
$$\begin{aligned} N(u(M)) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j} + m_{j,i}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n (|m_{i,j}| + |m_{j,i}|) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{j,i}|\,, \\ &= N(M) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |m_{j,i}|\,. \end{aligned}$$

On majore ensuite brutalement chaque terme $|m_{j,i}|$ comme suit : $|m_{j,i}| \leqslant \sum_{k=1}^n |m_{j,k}| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{k=1}^n |m_{j,k}| = N(M)$. Il en résulte que $N(u(M)) \leqslant (n+1)N(M)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc que

$$\tilde{N}(u) \leqslant n+1\,.$$

L'exemple de la matrice M vérifiant

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad N(M) = 1, \quad \text{et} \quad u(M) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad N(u(M)) = n+1\,,$$

montre que $\tilde{N}(u) = n+1$.

Les coefficients diagonaux de $v(M)$ étant tous nuls, les calculs sont légèrement différents :

$$\begin{aligned} N(v(M)) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} |m_{i,j} - m_{j,i}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} (|m_{i,j}| + |m_{j,i}|)\,, \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} |m_{i,j}| + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} |m_{j,i}| \ \leqslant\ N(M) + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} |m_{j,i}|\,. \end{aligned}$$

La majoration $|m_{j,i}| \leqslant N(M)$ établie plus haut permet d'en déduire que $N(v(M)) \leqslant nN(M)$, donc que $\tilde{N}(v) \leqslant n$.
L'exemple de la matrice M vérifiant

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad N(M) = 1, \ \text{et} \ v(M) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ \text{donc} \ N(v(M)) = n\,,$$

montre que $\tilde{N}(v) = n$.

388. **RMS 2009 832 Centrale PSI**

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}(\prod_{k=1}^n (3k-1))^{1/n}$.

Solution. — On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. On en déduit que le quotient $q_n = n!/[(n/e)^n\sqrt{2\pi n}]$ tend vers 1, donc que $q_n^{1/n} = \exp((\ln q_n)/n)$ converge vers 1, c'est-à-dire que $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/2n}$. Comme $(2\pi n)^{1/2n} = \exp([\ln(2\pi n)]/2n)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, il en résulte que

$$(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}\,\cdot$$

En majorant le terme $3k-1$ par $3k$ pour tout $k \geqslant 1$ et en le minorant par $3k-3$ pour tout $k \geqslant 2$, on obtient l'encadrement

$$\forall n \geqslant 2, \quad 2 \times 3^{n-1}(n-1)! = \frac{2}{3n}3^n n! \leqslant \prod_{k=1}^n (3k-1) \leqslant 3^n n!\,.$$

Si l'on pose $v_n = \frac{3}{n}(n!)^{1/n}$, il en résulte que $\forall n \geqslant 2$, $\left(\frac{2}{3n}\right)^{1/n} v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. Le rappel entraîne que la suite de terme général v_n converge vers $3/e$. Comme la suite de terme général $(\frac{2}{3n})^{1/n} = \exp([\ln 2 - \ln(3n)]/n)$ converge vers 1, on en déduit finalement que

$$\lim_{n\to} u_n = \frac{3}{e}\,\cdot$$

389. **RMS 2009 833 Centrale PSI**

Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $u_n = (e - (1+\frac{1}{n})^n)^{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Solution. — Il s'agit d'effectuer un développement asymptotique de u_n quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(\left[n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} - n\right] \ln\left[e - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right]\right)\,, \\ &= \exp\left(\left[\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \ln\left[e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\right)\,, \\ &= \exp\left(\left[\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \ln\left[e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\right) = \exp\left(\left[\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \ln\left[\frac{e}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\,, \\ &= \exp\left(\left[\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] [-\ln n + \mathrm{o}(\ln n)]\right) = \exp\left(-\frac{\ln n}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,. \end{aligned}$$

390. **RMS 2009 978 Centrale PSI**

Rappeler le domaine de définition de la fonction Arccos. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de u_0 ?

SOLUTION. — à reprendre entièrement ? ?

On désigne par $f^{[n]}$ la n-ième itérée d'une fonction f, c'est-à-dire que $f^{[0]}$ est l'identité et que $f^{[n]} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois)pour $n \geqslant 1$.

Une récurrence immédiate montre que $u_0 = \cos^{[n]}(u_n)$, donc que $u_0 \in \operatorname{Im} \cos^{[n]} = \cos^{[n]}(\mathbb{R})$. On montre ensuite par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$\cos^{[2k]}(\mathbb{R}) = \left[\cos^{[2k]}(0), \cos^{[2k-1]}(0)\right] \subset [0,1]\,,$$
$$\cos^{[2k+1]}(\mathbb{R}) = \left[\cos^{[2k]}(0), \cos^{[2k+1]}(0)\right] \subset [0,1]\,.$$

On constate que l'intervalle $[0,1]$ est stable par le cosinus, donc les inclusions dans $[0,1]$ ci-dessus se transmettent de façon automatique (on n'y reviendra pas).

Dans un premier temps, $\cos^{[1]}(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1,1] = [-\cos(0), \cos(0)]$. Ensuite, comme le cosinus est pair et décroissant (et continu) sur $[0,1]$, on a $\cos^{[2]}(\mathbb{R}) = \cos([0,1]) = \cos([0,\cos(0)]) = [\cos^{[2]}(0), \cos^{[1]}(0)] = [\cos(1), 1]$, et cet intervalle est contenu dans $[0,1]$. Pour terminer l'initialisation de la récurrence, on invoque de nouveau la décroissance stricte et la continuité du cosinus sur $[0,1]$, qui montre que $\cos^{[3]}(\mathbb{R}) = \cos([\cos^{[2]}(0), \cos^{[1]}(0)]) = [\cos^{[2]}(0), \cos^{[3]}(0)]$.

L'hérédité repose sur les mêmes arguments, et ne présente aucune difficulté.

On montre enfin que les suites $(a_k)_{k\geqslant 1} = (\cos^{[2k]}(0))_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1} = (\cos^{[2k-1]}(0))_{k\geqslant 1}$ sont adjacentes. Tout d'abord, ce sont deux suites récurrentes associées à la fonction $f = \cos\circ\cos$, de valeurs initiales respectives $\cos(1)$ et $\cos(0) = 1$. L'intervalle $[0,1]$ est stable par f, dont la restriction à cet intervalle est croissante. Il suffit donc de comparer les deux premiers termes pour connaître le sens de variation des suites en question (il suffit en fait de connaître le sens de variation d'une des deux suites). Or $\cos^{[3]}(0) = \cos(\cos(1)) < 1 = \cos^{[1]}(0)$, et, comme f est croissante et comme $0 < \cos(1) = \cos^{[2]}(0)$, on a $\cos^{[2]}(0) < \cos^{[4]}(0)$.

Soit $m = \sin(1)$. La fonction $f = \cos^{[2]}$ est contractante sur $[0,1]$ car $f' = -\sin\times(\sin\circ\cos)$, donc $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant m < 1$. Ceci démontre que les deux suites sont adjacentes (rappel de la démonstration : l'inégalité des accroissements finis donne $|a_k - b_k| = |f(a_{k-1}) - f(b_{k-1})| \leqslant k|a_{k-1} - b_{k-1}|$, et on en déduit que $|a_k - b_k| \leqslant m^{k-1}|a_1 - b_1|$, d'où le résultat puisque $0 < m < 1$).

Il en résulte que u_0 est la limite commune ℓ des deux suites (a_k) et (b_k), qui est le point fixe de la fonction cosinus. Par conséquent, la suite (u_n) est constante égale à ℓ.

391. **RMS 2009 979 Centrale PSI**

On considère l'équation $e^x - x^n = 0$.

(a) Montrer que, pour n assez grand, cette équation a exactement deux solutions positives $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(b) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ ; donner un équivalent de $u_n - \ell$.

(c) La suite (v_n) converge-t-elle ? Déterminer un équivalent de v_n.

(d) Déterminer un développement asymptotique de v_n.

SOLUTION. — On note que x doit être strictement positif pour être solution de l'équation, qui est donc équivalente à $x = \ln(x^n) = n \ln x$, où encore à

$$f(x) := \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{n}\cdot$$

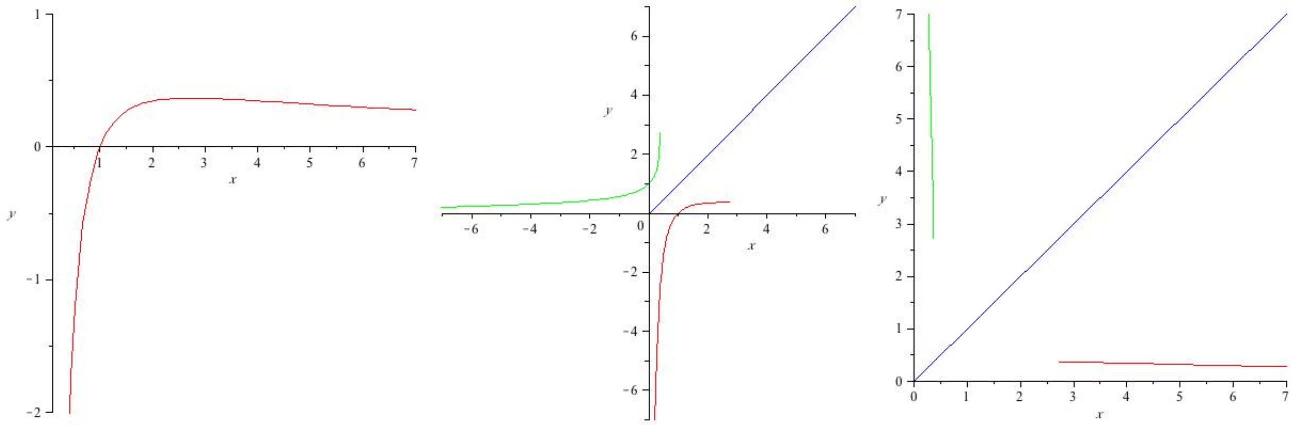
(a) Une étude rapide de f (avec $f'(x) = (1-\ln x)/x^2$) donne le tableau de variation suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$1/e$	0

Cette étude prouve que, si $n \geqslant 3$, de sorte que $1/n < 1/e$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède deux solutions u_n et v_n vérifiant l'encadrement :

$$1 < u_n < e < v_n\,.$$

Voici le graphe de f (à gauche), ainsi que les graphes des fonctions g et h et de leurs réciproques (voir la question suivante) :



(b) On note g la restriction de f à l'intervalle $]0,e[$. Comme g est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ avec $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]0,e[$) et strictement croissante, elle réalise une bijection sur son image, qui est $]-\infty,1/e[$, et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$). Par suite

$$u_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} g^{-1}(0) = 1 = \ell\,.$$

Plus précisément, $u_n = g^{-1}(1/n) = g^{-1}(0) + [g^{-1}]'(0)/n + \mathrm{o}(1/n)$. Comme $[g^{-1}]'(0) = 1/g'(g^{-1}(0)) = 1/f'(1) = 1$, on obtient

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

(c) On note h la restriction de f à l'intervalle $]e,+\infty[$. Comme h est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]e,+\infty[$) et strictement décroissante, elle réalise une bijection sur son image, qui est $]0,1/e[$, et sa bijection réciproque est continue et strictement décroissante (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$). Par suite

$$v_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lim_{0} h^{-1} = +\infty\,,$$

donc la suite (v_n) diverge. Il suffit ensuite de déterminer un équivalent de h^{-1} en zéro, et de l'appliquer à $1/n$. Or

$$x>e \text{ et } y = f(x) = \frac{\ln x}{x} \iff x>e \text{ et } h^{-1}(y) = x = \frac{\ln x}{y} = \frac{\ln(\ln x/y)}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln x)}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln h^{-1}(y))}{y}\,.$$

On va démontrer ci-dessous que $\ln[\ln h^{-1}(y)]$ est négligeable devant $\ln y$ quand y tend vers zéro, ce qui donnera l'équivalent en zéro $h^{-1}(y)\sim -\frac{\ln y}{y}$. En substituant y par $1/n$, on obtient l'équivalent suivant en $+\infty$:

$$v_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{\ln 1/n}{1/n} = n\ln n\,.$$

Montrer que $\ln[\ln h^{-1}(y)] = \mathrm{o}(\ln y)$ en zéro est équivalent, par substitution dans les relations de comparaison, à montrer que $\ln(\ln x) = \mathrm{o}(\ln[f(x)])$ en $+\infty$: on passe d'une relation à l'autre en substituant y par $f(x) = h(x)$ quand $x>e$, donc au voisinage de l'infini. Or, quand x tend vers $+\infty$,

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln(\ln x) - \ln x \sim -\ln x.$$

Comme $\ln(\ln x)$ est négligeable en $+\infty$ devant $\ln x$, on a bien établi que $\ln(\ln x) = \mathrm{o}(\ln[f(x)])$ en $+\infty$.

(d) Pour déterminer un développement asymptotique de v_n, il suffit de poursuivre le calcul de la question précédente :

$$\begin{aligned} x>e \text{ et } y = f(x) = \frac{\ln x}{x} \iff x>e \text{ et } x = h^{-1}(y) &= -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln x)}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln[(\ln x)/y])}{y},\\ &= -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln[\ln x] - \ln y)}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln[\ln h^{-1}(y)] - \ln y)}{y}\,. \end{aligned}$$

Puisqu'on a déjà établi que $\ln[\ln h^{-1}(y)]$ est négligeable devant $\ln y$ quand y tend vers zéro, on en déduit le développement suivant quand y tend vers zéro :

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(\ln[\ln h^{-1}(y)] - \ln y)}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln((-\ln y)[1+\mathrm{o}(1)])}{y} = -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(-\ln y) + \mathrm{o}(1)}{y},\\ &= -\frac{\ln y}{y} + \frac{\ln(-\ln y)}{y} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{y}\right)\,. \end{aligned}$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$v_n = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = n\ln n + n\ln(\ln n) + \mathrm{o}(n).$$

392. **RMS 2009 984 Centrale PSI (calcul formel)**

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $f_k(n) = n + \lfloor \sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} \rfloor$. Déterminer $\{f_k(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

Solution. — Cet exercice était la troisième question du concours général de mathématiques en 1998. On programme f en Maple comme une fonction de deux variables : `f:=(k,n)->n+floor(root[k](n+root[k](n)))`.

Pour $k = 1$, on constate que $f_1(n) = 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc l'image de f_1 est l'ensemble des multiples de 3. On suppose désormais que $k \geqslant 2$. Les commandes respectives `seq(f(2,n),n=0..100)` et `seq(f(3,n),n=0..100)` ont pour résultat tous les nombres entre zéro et $f_2(100)$ (respectivement $f_3(100)$) sauf les carrés (respectivement les cubes). On conjecture alors que l'image de f_k est l'ensemble des entiers naturels privé des puissances k-ièmes strictement positives.

Pour comprendre la démonstration, on examine le tableau suivant, tiré des calculs en Maple :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\cdots$
$f_2(n)$	0	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20	21	22	23	24	26	$\cdots$

Les doubles barres verticales signalent les entiers où f_2 évite un carré : il s'agit de déterminer ces endroits, et, plus généralement, de déterminer les entiers où f_k évite une puissance k-ième. Le tableau ci-dessus s'interprète de la manière suivante :

– pour $1 \leqslant n < 3$, on a $f_2(n) = n + 1$;
– pour $3 \leqslant n < 7$, on a $f_2(n) = n + 2$;
– pour $7 \leqslant n < 13$, on a $f_2(n) = n + 3$;
– pour $13 \leqslant n < 21$, on a $f_2(n) = n + 4$...

Il est donc légitime, un entier $p \geqslant 1$ étant fixé, de chercher les n tels que $f_k(n) = n + p$. Or

$$\begin{aligned} f(n) = n + p &\iff \left\lfloor \sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} \right\rfloor = p \iff p \leqslant \sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} < p + 1\,, \\ &\iff p^k \leqslant n + \sqrt[k]{n} < (p+1)^k \iff p^k \leqslant g_k(n) < (p+1)^k, \end{aligned}$$

où l'on a noté g_k la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ d'expression $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_k(n) = n + \sqrt[n]{n}$. On est donc ramené à la résolution de $n + \sqrt[k]{n} = p^k$. On tente une résolution approchée, basée sur le fait que $\sqrt[k]{n}$ est négligeable devant n à l'infini, donc $n = p^k + \mathrm{o}(n)$, ou encore $n = p^k + \mathrm{o}(p^k)$. En substituant cette relation dans l'équation $n + \sqrt[k]{n} = p^k$ itérée deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} n &= p^k - \sqrt[k]{p^k - \sqrt[k]{p^k + \mathrm{o}(p^k)}} = p^k - p\left(1 - \frac{1}{p^{k-1}}(1 + \mathrm{o}(1))^{1/k}\right)^{1/k} = p^k - p\left(1 - \frac{1}{p^{k-1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^{k-1}}\right)\right)^{1/k}, \\ &= p^k - p + \frac{1}{kp^{k-2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^{k-2}}\right). \end{aligned}$$

Comme on recherche une valeur entière de n, on a le choix entre $n = u_p := p^k - p$ et $n = v_p := p^k - p + 1$. C'est en fait la seconde qui convient, comme on le vérifie directement, au moyen d'un raisonnement par équivalences :

$$\begin{aligned} p^k \leqslant g_k(v_p) = v_p + \sqrt[k]{v_p} &\iff p - 1 \leqslant \sqrt[k]{p^k - p + 1}\,, \\ &\iff (p-1)^k + p - 1 \leqslant p^k = (p-1)^k + k(p-1)^{k-1} + \text{termes positifs}, \end{aligned}$$

en écrivant que $p^k = ((p-1)+1)^k$ et en développant par la formule du binôme. Cette dernière inégalité est vraie car $k \geqslant 2$. Par suite, on a bien $p^k \leqslant g_k(v_p)$.

On a aussi

$$\begin{aligned} g_k(v_{p+1} - 1) < (p+1)^k &\iff (p+1)^k - p - 1 + \sqrt[k]{(p+1)^k - p - 1} < (p+1)^k\,, \\ &\iff \sqrt[k]{(p+1)^k - p - 1} < p + 1\,, \\ &\iff (p+1)^k - p - 1 < (p+1)^k\,. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie car $p \geqslant 1$. Par suite, on a bien $g_k(v_{p+1} - 1) < (p+1)^k$.

En rassemblant les résultats, on vient de démontrer que

$$\forall p \geqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_k(n) = n + p \iff v_p \leqslant n < v_{p+1}\,.$$

On en déduit en particulier que, si $v_p \leqslant n < v_{p+1}$ alors $f_k(n)$ prend toutes les valeurs entières entre $v_p + p = p^k + 1$ et $v_{p+1} - 1 + p = (p+1)^k - 1$ au sens large. Comme de plus $f_k(0) = 0$, et comme la suite d'entiers (v_p) est strictement croissante, on a bien démontré que l'image de f_k est formée de tous les entiers naturels qui ne sont pas des puissances k-ièmes strictement positives.

393. **RMS 2009 985 Centrale PSI (calcul formel)**

Soit $c\colon x \mapsto x^2$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(a) Calculer à l'aide du logiciel de calcul formel le développement limité d'ordre 4 en zéro de $f \circ c$.

(b) Déterminer le développement limité d'ordre n en zéro de $f \circ c$.

Solution. —

(a) On valide `taylor(f(x**2),x=0,5)` et on obtient $f(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2}x^4 + \mathrm{O}(x^5)$. On peut utiliser la commande `series` à la place de `taylor` : les deux commandes prennent en argument le point de $\overline{\mathbb{R}}$ où l'on effectue le développement, ainsi que l'ordre du développement (avec une petite différence avec le cours de mathématiques).

(b) Il suffit de substituer x par x^2, et de tronquer à l'ordre n :

$$(f \circ c)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{2k} + \mathrm{o}(x^n)\,.$$

Remarque. — Il est possible que l'énoncé soit incomplet.

394. **RMS 2010 834 Centrale PSI**

Soit $f\colon t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$. Étudier la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$.

Solution. — On calcule $f'(t) = -(t/2)(1+t)^{-3/2} + (1+t)^{-1/2}$. Comme $f(0) = 0$, l'exercice 242 page 182 montre que u_n tend vers $f'(0)/2 = 1/2$.

395. **RMS 2010 835 Centrale PSI**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $u_{n+1}/u_n \to x$.

(a) Montrer que si $x < 1$ alors u_n tend vers zéro et que si $x > 1$ alors u_n tend vers $+\infty$.

(b) Étudier $v_n = \sqrt[n]{u_n}$.

Solution. — Il s'agit de la technique de comparaison à une suite géométrique, qui permet la démonstration de la règle de d'Alembert : c'est donc une question de cours.

(a) Dans le cas où $x < 1$, on choisir un nombre r tel que $x < r < 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1}/u_n \leqslant r$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit $k > n_0$; en multipliant les inégalités précédentes (entre nombres strictement positifs) pour n variant de n_0 à $k-1$, on obtient un produit télescopique qui se simplifie en $u_k/u_{n_0} \leqslant r^{k-n_0}$, ou encore, en posant $M = u_{n_0}/r^{n_0}$:

$$\forall k > n_0, \quad 0 < u_k \leqslant M r^k\,.$$

Comme $0 < r < 1$, on en déduit que u_n tend vers zéro.

Dans le cas où $x > 1$, on choisit un nombre r tel que $1 < r < x$, et la même technique prouve l'existence d'un nombre d'un entier n_0 et d'un nombre réel $M > 0$ tels que $\forall k > n_0$, $Mr^k \leqslant u_n$. On en déduit que u_n tend vers l'infini.

(b) Un nombre $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ étant donné, il existe un entier n_0 et deux constantes a et b strictement positives tels que $a(x - \varepsilon/2)^n \leqslant u_n \leqslant b(x - \varepsilon/2)^n$ pour tout $n > n_0$ (appliquer les techniques de la question précédente à $r = x + \varepsilon/2$ et à $r = x - \varepsilon/2$ successivement). Il en résulte que $a^{1/n}(x - \varepsilon/2) \leqslant v_n \leqslant b^{1/n}(x + \varepsilon/2)$ pour tout $n > n_0$.

Comme $c^{1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini pour tout $c > 0$, il existe des nombres entiers n_1 et n_2 tels que, si $n > n_1$, alors $x - \varepsilon \leqslant a^{1/n}(x - \varepsilon/2)$ et si $n > n_2$, alors $x + \varepsilon \geqslant b^{1/n}(x + \varepsilon/2)$. Si l'on pose $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, on obtient

$$\forall n > n_3, \quad x - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant x + \varepsilon\,,$$

ce qui établit que $\lim v_n = x$.

Remarque. — Si $x = 0$, il ne faut conserver que les majorations de u_n et de v_n ci-dessus, et remplacer les minorations par zéro, ce qui conduit encore à $\lim v_n = 0 = x$.

396. **RMS 2010 836 Centrale PSI**

Si $j \in \mathbb{N}$, on note k_j le plus petit entier p tel que $\sum_{n=1}^p 1/n \geqslant j$.

(a) Justifier la définition de k_j.
(b) Montrer que k_j tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$.
(c) Montrer que $k_{j+1}/k_j \to e$ quand $j \to +\infty$.

SOLUTION. —

(a) On sait que la suite des sommes partielles $S_p = \sum_{n=1}^{p} 1/n$ est strictement croissante et diverge vers $+\infty$ (divergence de la série harmonique). La définition d'une suite divergente vers $+\infty$ justifie alors l'existence de la suite $(k_j)_{j\geqslant 0}$. On peut noter que $k_0 = k_1 = 1$ et $k_2 = 4$ car $S_3 = 1 + 1/2 + 1/3 = 11/12 < 2$ et $S_4 = S_3 + 1/4 = 7/6 > 2$.

(b) La majoration banale $S_p = \sum_{n=1}^{p} 1/n < p$ pour $p \geqslant 2$ montre que $k_j > j$ pour tout $j \geqslant 2$. On en déduit en particulier que k_j tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$.

(c) La définition de k_j et de k_{j+1} montre que

$$S_{k_j} - \frac{1}{k_j} < j \leqslant S_{k_j} \leqslant S_{k_{j+1}} - \frac{1}{k_{j+1}} < j+1 \leqslant S_{k_{j+1}} .$$

On en déduit que

$$1 - \frac{1}{k_j} < S_{k_{j+1}} - S_{k_j} < 1 + \frac{1}{k_{j+1}} ,$$

puis, comme (k_j) diverge vers $+\infty$, que la différence $S_{k_{j+1}} - S_{k_j}$ tend vers 1 quand j tend vers l'infini. Les techniques de comparaison série-intégrale, appliquées à la fonction continue et décroissante $t \mapsto 1/t$, montrent que

$$S_{k_{j+1}} - S_{k_j} = \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} \frac{1}{n} \leqslant \int_{k_j}^{k_{j+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{k_{j+1}}{k_j}\right) \leqslant \sum_{n=k_j}^{k_{j+1}-1} \frac{1}{n} = S_{k_{j+1}} - S_{k_j} - \frac{1}{k_{j+1}} + \frac{1}{k_j} ,$$

donc que $\ln(k_{j+1}/k_j) \to 1$ quand $j \to +\infty$, donc que $k_{j+1}/k_j \to e$ quand $j \to +\infty$.

397. **RMS 2010 837 Centrale PSI (calcul formel)**

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que la série de terme général $u_n = (n^7 + 3n^6)^{1/7} - P(n)^{1/3}$ soit convergente. Déterminer le polynôme pour lequel la convergence est la plus rapide et donner alors un équivalent du reste.

SOLUTION. — Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, d son degré, et a_d son coefficient dominant. Alors $u_n = (n + \mathrm{o}(n)) - (a_d^{1/3} n^{d/3} + \mathrm{o}(n^{d/3}))$. On en déduit que si $d \neq 3$, alors $u_n \sim v_n$ quand n tend vers l'infini, où $v_n = n$ ou $-a_d^{d/3} n^{d/3}$, suivant que d est plus petit ou plus grand que 3. En particulier, $\lim u_n \neq 0$, donc la série correspondante diverge.

Il faut donc que $d = 3$, puis que $a_d = 1$ en suivant le même raisonnement. Les autres coefficients de P seront calculés à l'aide de Maple, grâce aux commandes suivantes. La deuxième ligne calcule la partie régulière `PR1` du développement asymptotique `DL` de u_n quand n tend vers l'infini, puis transforme cette partie régulière en polynôme en n, noté `PR2`, pour pouvoir extraire ensuite plus facilement (en troisième ligne) le coefficient constant et celui de $1/n$ de `DL`.

```
P:=n**3+b*n**2+c*n+d;u:=(n**7+3*n**6)**(1/7)-P**(1/3);
DL:=taylor(u,n=infinity,3);PR1:=convert(DL,polynom);PR2:=subs(n=1/n,PR1);
systeme:={coeff(PR2,n,0)=0,coeff(PR2,n,1)=0};solutions:=solve(systeme,{b,c});assign(solutions);
```

On obtient $b = 9/7$ et $c = -54/49$, donc les polynômes tels que la série de terme général u_n converge sont ceux de la forme

$$X^3 + \frac{9}{7}X^2 - \frac{54}{49}X + d, \quad d \in \mathbb{R} .$$

Celui pour lequel la convergence est la plus rapide est (c'est plus ou moins un acte de foi, puisqu'on n'a pas défini précisément ce que signifiait une convergence plus rapide qu'une autre) celui tel que le coefficient de $1/n^2$ dans le développement asymptotique de u_n est nul. Grâce à `solve(coeff(PR2,n,2)=0,d)`, on trouve $d = 594/343$, valeur qu'on affecte ensuite à d. En poussant le développement un rang plus loin par `taylor(u,n=infinity,4)`, on obtient

$$u_n = -\frac{2673}{2401n^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) .$$

On pose $v_n = -2673/2401n^3$ et $w_n = \mathrm{O}(1/n^4)$, et on note respectivement R_n, S_n et T_n les restes d'ordre n des séries (évidemment convergentes) de termes généraux u_n, v_n et w_n. Par définition de la relation de domination, il existe un nombre réel A tel que $|w_n| \leqslant A/n^4$ pour n assez grand. Alors, en utilisant les techniques usuelles de comparaison séries-intégrales, on obtient pour n assez grand :

$$|T_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |w_k| \leqslant A \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \leqslant A \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \frac{A}{3n^3} .$$

Les mêmes techniques de comparaison séries-intégrales montrent que

$$S_n = -\frac{2673}{2401}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2673}{2401}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{2673}{4802n^2}\,.$$

Comme $R_n = S_n + T_n$, on en déduit que R_n est équivalent à $2673/4802n^2$ quand n tend vers l'infini.

398. **RMS 2010 838 Centrale PSI**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $n\in\mathbb{N}^*$ ne comporte pas de 9 dans son écriture décimale, on pose $u_n = 1/n^\alpha$; sinon, on pose $u_n = 0$. Discuter, suivant la valeur de α, la nature de la série de terme général u_n.

Solution. — On va montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \alpha_0 := \ln 9/\ln 10 = \log_{10}(9)$.

Si $\alpha>\alpha_0$, la série étudiée étant à termes positifs, il suffit de démontrer qu'une suite extraite particulière de la suite (S_n) des sommes partielles est majorée. Pour cela, on fixe momentanément $k\in\mathbb{N}^*$. Les entiers n ne comportant pas de 9 dans leur écriture décimale et tels que $10^{k-1}\leqslant n<10^k$ (c'est-à-dire ayant k chiffres en base 10) sont au nombre de $8\times 9^{k-1}$: en effet, les chiffres de n peuvent prendre 9 valeurs sauf le chiffre de tête, qui ne peut être nul, et qui ne prend donc que 8 valeurs. Le plus petit de ces nombres entiers est 10^{k-1}. Il en résulte la majoration

$$\sum_{10^{k-1}\leqslant n<10^k} u_n \leqslant 8\left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^{k-1}.$$

On pose $r = 9/10^\alpha$: c'est un nombre strictement plus petit que 1 puisque $\ln r = \ln 9 - \alpha\ln 10 < 0$. En sommant les majorations ci-dessus pour $1\leqslant k\leqslant n$, on obtient $S_{10^n-1}\leqslant 8(1+r+\cdots+r^{n-1})\leqslant 8/(1-r)$, ce qui achève la preuve de la convergence de $\sum u_n$.

Si $\alpha\leqslant\alpha_0$, on reprend l'étude des entiers ne comportant pas de 9 dans leur écriture décimale et tels que $10^{k-1}\leqslant n<10^k$. Le plus grand d'entre eux est $88\cdots 8$ (avec k chiffres égaux à 8), et il est à son tour plus petit que 10^k. Il en résulte la minoration

$$8\times\frac{9^{k-1}}{10^{\alpha k}} = \frac{8}{9}\left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^k \leqslant \sum_{10^{k-1}\leqslant n<10^k} u_n\,.$$

Cette fois, $r\geqslant 1$, et on en déduit que $S_{10^n-1}\geqslant 8n/9$, donc que la suite des sommes partielles n'est pas bornée, donc que $\sum u_n$ diverge.

399. **RMS 2010 839 Centrale PSI**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Montrer que $\sum_{k=0}^n ku_k = \mathrm{o}(n)$.

Solution. — On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n ku_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n ku_k$. On note R_n le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$. Alors $u_k = R_{k-1}-R_k$ pour tout $k\geqslant 1$, et une transformation d'Abel donne

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n ku_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k(R_{k-1}-R_k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^n kR_k\right) = \frac{R_0}{n} - \frac{n+1}{n}R_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n R_k\,.$$

Comme R_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini et comme R_0 est une constante, le terme $R_0/n-(n+1)R_n/n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Enfin, le théorème de Cesàro assure que la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n R_k$ tend aussi vers zéro quand n tend vers l'infini, ce qui achève la preuve de ce que $\sum_{k=0}^n ku_k = \mathrm{o}(n)$.

400. **RMS 2009 980 Centrale PSI (calcul formel)**

(a) Étudier la convergence de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) Que dit Maple des séries de termes généraux $|\sin\ln n|/n$ et $(-1)^n|\sin\ln n|/n$?

(c) Étudier la suite de terme général $u_k = \sum|\sin\ln n|/n$, où la somme porte sur les entiers n tels que $\exp(k\pi+\pi/4)\leqslant n<\exp(k\pi+3\pi/4)$. En déduire la divergence de la série de terme général $|\sin\ln n|/n$.

(d) Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n|\sin\ln n|/n$.

Solution. —

(a) Un développement limité à l'ordre 3 du logarithme donne

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ relève du théorème des séries alternées, donc converge ; les séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}$ et $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont absolument convergentes ; enfin, la série de terme général $-\frac{1}{2n}$ diverge. On en déduit que la série de terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Le développement asymptotique peut être obtenu grâce à `series(ln(1+(-1)**n/ sqrt(n)),n=infinity,3)`. Le résultat observé à l'écran est alors

$$(-1)^n\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\frac{((-1)^n)^2}{n}+\frac{1}{3}((-1)^n)^3\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme aucun hypothèse n'est faite sur la variable n, il est légitime que les expressions $((-1)^n)^2$ et $((-1)^n)^3$ ne soient pas simplifiées en 1 et $(-1)^n$ respectivement. Néanmoins, l'ajout de l'hypothèse `assume(n,integer)` ne change rien au résultat, et je ne sais pas comment forcer Maple à effectuer la simplification ? ?

(b) Les commandes `sum(sin(ln(n))/n,n=2..infinity) ;sum((-1)**n*sin(ln(n))/n,n=2..infinity)` donnent des résultats non probants : Maple répond respectivement $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin\ln n}{n}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin\ln n}{n}$, ce qui ne signifie pas que les séries convergent, mais que leur nature, voire leur somme, n'a pu pas pu être déterminée.

On peut alors tenter un calcul numérique approché des sommes partielles grâce à

```
seq(evalf(add(sin(ln(n))/n,n=2..1000*p)),p=1..10);
seq(evalf(add((-1)**n*sin(ln(n))/n,n=2..1000*p)),p=1..10);
```

On obtient les résultats suivants

4.115837676,4.676615723, 5.078721512, 5.352874023, 5.542489547, 5.675140076, 5.768098644, 5.832565727, 5.876076310, 5.903866793,

0.1590726209,0.1590221816, 0.1589448932, 0.1588932600, 0.1588589787, 0.1588354581, 0.1588187949, 0.1588066694, 0.1587976525, 0.1587908283 .

Au vu de l'évolution des sommes partielles, il semble que la première série diverge et que la seconde converge. On remarque qu'une plus grande précision dans les calculs numériques, obtenue par exemple en validant `Digits:=50`, ne modifie pas les résultats obtenus. Les questions suivantes vont confirmer cette impression.

(c) Le logarithme étant une fonction strictement croissante, si $\exp(k\pi+\pi/4)\leqslant n<\exp(k\pi+3\pi/4)$, alors $k\pi+\pi/4\leqslant \ln n<k\pi+3\pi/4$, donc $|\sin\ln n|\geqslant\sin\pi/4$. On en déduit que

$$u_k\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\exp(k\pi+\pi/4)\leqslant n<\exp(k\pi+3\pi/4)}\frac{1}{n}.$$

Or le nombre d'entiers n contenus dans un intervalle $[a,b]$ de réels est au moins $b-a-1$. Tous les termes de la somme ci-dessus étant plus grands que $1/\exp(k\pi+3\pi/4)$, on peut encore minorer u_k comme suit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_k\geqslant\frac{\sqrt{2}\left[e^{k\pi+3\pi/4}-e^{k\pi+\pi/4}-1\right]}{2e^{k\pi+3\pi/4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-e^{-\pi/2}-e^{-k\pi-3\pi/4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-e^{-\pi/2}-e^{-3\pi/4}\right).$$

La constante $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-e^{-\pi/2}-e^{-3\pi/4}\right)$ est strictement positive, puisqu'elle est plus grande que $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-2e^{-1}\right)$, manifestement positive. Comme u_k est un paquet de Cauchy (voir le rappel) qui ne tend pas vers zéro quand k tend vers $+\infty$ on en déduit que la série de terme général $|\sin\ln n|/n$ diverge.

Rappel. — Une série $\sum x_n$ à termes dans un espace vectoriel normé complet (en particulier dans un espace de dimension finie) converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy des séries, qui n'est autre que le critère de Cauchy des suites appliqué à la suite de ses sommes partielles : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $N<p\leqslant q\Rightarrow|\sum_{n=p}^q x_n|<\varepsilon$. Dans ce contexte, la somme $\sum_{n=p}^q x_n$ est parfois appelée *paquet de Cauchy* associé à la série $\sum x_n$. Ce critère est mis défaut pour la série étudiée dans cette question avec $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-2e^{-1}\right)$: pour tout entier N, il existe k tel que $\exp(k\pi+\pi/4)>N$, et alors $|\sum_{n=p_k}^{q_k}x_n|\geqslant\varepsilon_0$, où $N<p_k=1+\lfloor\exp(k\pi+\pi/4)\rfloor\leqslant q_k=\lfloor\exp(k\pi+3\pi/4)\rfloor$.

(d) On pose $x_n=\frac{|\sin\ln n|}{n}$. Alors la série $\sum(-1)^n x_n$ à étudier est
– alternée ;
– telle que son terme général tend vers zéro, puisque $0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}$.

En revanche, il y a peu d'espoir de montrer que la suite (x_n) décroît, à cause des changements de signe de $\sin\ln n$. Plus précisément, si n et $n+1$ sont de part et d'autre de $e^{k\pi}$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$, alors $\ln n$ et $\ln(n+1)$ sont de part et d'autre de $k\pi$, donc leurs sinus ont des signes différents, et il est possible que l'un deux, disons $\sin\ln n$ soit très proche de zéro (n très proche de $e^{k\pi}$) et l'autre plus éloigné ($n+1$ proche de $e^{k\pi}+1$), de sorte qu'on pourrait avoir $0 \leqslant x_n < x_{n+1}$. La convergence de $\sum(-1)^n x_n$ ne sera donc pas démontrée à l'aide du théorème spécial des séries alternées (pour rendre plus consistante cette affirmation, il faudrait faire appel à des propriétés arithmétiques fines d'approximation des réels). On va établir que $\sum(-1)^n x_n$ converge en regroupant ses termes. Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \geqslant 1$, on pose

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n}(-1)^n x_n\ ,\\
y_k &= (-1)^{2k}x_{2k} + (-1)^{2k+1}x_{2k+1} = x_{2k} - x_{2k+1}\ ,\\
I_k &= [e^{k\pi}, e^{(k+1)\pi}[\ ,\\
J_k &= [k\pi, (k+1)\pi[\ .
\end{aligned}$$

Il s'agit alors de prouver que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ converge, ou encore que les deux suites $(S_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $(S_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ convergent vers la même limite. Or $S_{2p+1} = S_{2p} - x_{2p+1}$: comme x_{2p+1} tend vers zéro quand p tend vers l'infini, il suffit donc de prouver que (S_{2p}) converge. Comme $S_{2p} = \sum_{k=1}^{p} y_k$, on calcule un développement limité de y_k, en distinguant deux cas.

- Ou bien $2k$ et $2k+1$ appartiennent au même intervalle I_p, et alors $\ln(2k)$ et $\ln(2k+1)$ appartiennent au même intervalle J_p, donc leurs sinus ont le même signe, qui vaut $(-1)^p$. Dans ce premier cas,

$$\begin{aligned}
(-1)^p y_k &= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} - \frac{\sin(\ln(2k+1))}{2k+1}\ ,\\
&= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} - \frac{\sin\left(\ln(2k) + \frac{1}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{2k\left(1+\frac{1}{2k}\right)},\\
&= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} - \frac{1}{2k}\left[\sin(\ln(2k))\cos\left(\frac{1}{2k}\right) + \sin\left(\frac{1}{2k}\right)\cos(\ln(2k)) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right],\\
&= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} - \frac{1}{2k}\left[\sin(\ln(2k)) + \frac{\cos(\ln(2k))}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right],\\
&= \frac{\sin\ln(2k) - \cos\ln(2k)}{(2k)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\ .
\end{aligned}$$

  On en déduit que $y_k = \mathrm{O}(1/k^2)$ quand k tend vers l'infini. On peut tenter d'obtenir le même résultat grâce à Maple, mais les commandes `z:=n->sin(ln(n)):series(z(2*k)-z(2*k+1),k=infinity,3)` ne suffisent pas : le logiciel ne développe pas $\ln(2k+1)$ à l'intérieur du sinus. Après un certain nombre de tâtonnements, il faut biaiser en demandant

```
expand(z(2*k),trig)-series(expand(sin(series(ln(2*k+1),k=infinity,3)),trig)/(2*k+1),k=infinity,3);
combine(simplify(convert(%,polynom)),trig);
```

  On a alors la satisfaction de lire à l'écran

$$\frac{1}{4}\frac{\sin(\ln(2k)) - \cos(\ln(2k))}{k^2}\ .$$

  La ligne `combine(combine(simplify(convert(%,polynom)),trig),ln);` est nécessaire. D'une part, la conversion du développement limité en polynôme — du moins en somme — permet simplifier la partie régulière du développement limité (une simple commande de simplification traiterait le terme « $\mathrm{O}(1/k^3)$ » à l'égal des autres, et le réduirait au même dénominateur k^2). D'autre part, les linéarisations, obtenues en Maple grâce à `combine(expr,trig)` et à `combine(expr,ln)`, présentent le résultat sous la forme la plus condensée possible.
- Ou bien $2k$ et $2k+1$ n'appartiennent pas au même intervalle I_p. Comme ces intervalles ont une longueur strictement plus grande que 1, c'est que $2k$ et $2k+1$ appartiennent à deux intervalles consécutifs, disons $2k \in I_{p-1}$ et $2k+1 \in I_p$. Alors $\ln(2k) \in J_{p-1}$ et $\ln(2k+1) \in J_p$, donc leurs sinus ont des signes contraires, valant respectivement $(-1)^{p-1}$ et $(-1)^p$. Dans ce deuxième cas, et en abrégeant les calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
(-1)^{p-1} y_k &= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} + \frac{\sin(\ln(2k+1))}{2k+1}\ ,\\
&= \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} + \frac{1}{2k}\left[\sin(\ln(2k)) + \frac{\cos(\ln(2k))}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{2k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right],\\
&= \frac{\sin(\ln(2k))}{k} + \frac{\sin\ln(2k) - \cos\ln(2k)}{(2k)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\ .
\end{aligned}$$

  Le terme en $1/k$ semble poser problème, mais son numérateur $\sin\ln(2k)$ est très petit puisque $\ln(2k)$ est très proche de $p\pi$. Plus précisément, comme $2k < e^{p\pi} \leqslant 2k+1$, on peut écrire que $2k = e^{p\pi} - u$ avec $u \in]0,1[$. Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\ln(2k))}{k} &= \frac{\sin(\ln(e^{p\pi}-u))}{e^{p\pi}-u},\\ &= \sin(p\pi - ue^{-p\pi} + \mathrm{o}(e^{-p\pi}))e^{-p\pi}(1+\mathrm{o}(1)),\\ &= (-1)^p e^{-p\pi}\sin[-ue^{-p\pi} + \mathrm{o}(e^{-p\pi})][1+\mathrm{o}(1)],\\ &= (-1)^{p+1}ue^{-2p\pi} + \mathrm{o}(e^{-2p\pi}).\end{aligned}$$

Il en résulte que $\frac{\sin(\ln(2k))}{k} = \mathrm{O}(e^{-2p\pi})$ quand p tend vers $+\infty$, et l'encadrement $2k < e^{p\pi} < 2k+1$ montre qu'un $\mathrm{O}(e^{-2p\pi})$ quand p tend vers $+\infty$ est un $\mathrm{O}(1/k^2)$ quand k tend vers $+\infty$. Finalement, là aussi, $y_k = \mathrm{O}(1/k^2)$ quand k tend vers l'infini.

On déduit de cette étude que la série de terme général $(-1)^n|\sin\ln n|/n$ converge.

401. **RMS 2009 981 Centrale PSI**

Étudier les séries de termes généraux

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1+\frac{b}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln(n)/n}\cdot$$

Solution. — Un premier développement limité donne

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1+\frac{b}{n}\right) = \exp\left(n\ln\left[\frac{1+1/n}{1-2/n}\right]\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right),\\ &= \exp\left(n\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right),\\ &= \exp\left(n\ln\left[1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right) = \exp\left(n\left[\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{9}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right),\\ &= \exp\left(3+\frac{3}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right) = e^3\left(1+\frac{3}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - a\left(1+\frac{b}{n}\right),\\ &= (e^3-a) + \frac{1}{n}\left(\frac{3e^3}{2}-ab\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $e^3 - a = 3e^3/2 - ab = 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$a = e^3 \quad \text{et} \quad b = \frac{3}{2}\cdot$$

Un second développement limité donne

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n}\times\frac{1}{1+(-1)^n\ln(n)/n^2} = \frac{(-1)^n}{n}\times\frac{1}{1+\mathrm{O}(1/n^2)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\cdot$$

On constate que v_n est la somme de deux termes de séries convergentes (l'une relève du théorème spécial des séries alternées, l'autre est dominée par une série de Riemann d'exposant 3), donc que $\sum v_n$ converge.

402. **RMS 2009 982 Centrale PSI**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)},\quad u_{3n+1} = -\frac{1}{\ln(n+3)},\quad u_{3n+2} = -\frac{1}{\ln(n+3)}\cdot$$

(a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. La série de terme général a_n^2 est-elle convergente ?

(c) Soit $p\in\mathbb{N}$ avec $p\geqslant 2$. Montrer que la série de terme général u_n^p est divergente.

Solution. —

(a) On va, de plus, calculer la somme. Il s'agit de démontrer que la suite (S_n) des sommes partielles converge. Pour cela, il suffit de montrer que les trois suites de termes généraux S_{3n-1}, S_{3n} et S_{3n+1} convergent vers la même limite. De plus, comme $S_{3n} = S_{3n-1} + u_{3n}$ et $S_{3n+1} = S_{3n-1} + u_{3n} + u_{3n+1}$ et comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro, il suffit de démontrer que $(S_{3n-1})_{n\geqslant 0}$ converge ; sa limite sera alors la somme de la série. Or, en regroupant trois par trois les termes ci-dessous, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{3n-1} = \sum_{k=0}^{3n-1} u_k = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{3i} + u_{3i+1} + u_{3i+2}) = \sum_{i=0}^{n-1} 0 = 0\,.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que sa somme est nulle.

(b) La série de terme général a_n^2 n'est pas nécessairement convergente, comme le montre l'exemple de $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ (la convergence de $\sum a_n$ est obtenue en appliquant le théorème spécial des séries alternées), pour lequel $a_n^2 = 1/n$ est le terme général d'une série divergente.

Remarque. — Si on suppose de plus que $a_n \geqslant 0$ pour tout n assez grand, la réponse devient positive. En effet, si $\sum a_n$ converge, alors (a_n) converge vers zéro, donc $0 \leqslant a_n^2 \leqslant a_n$ pour n assez grand, ce qui entraîne que $\sum a_n^2$ converge.

(c) On reprend les idées de la question (a), cette fois pour minorer S_{3n-1}, en minorant $2^p - 2$ par 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{3n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2^p}{[\ln(n+3)]^p} + \frac{(-1)^p}{[\ln(n+3)]^p} + \frac{(-1)^p}{[\ln(n+3)]^p} \right) &\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2^p}{[\ln(n+3)]^p} - \frac{1}{[\ln(n+3)]^p} - \frac{1}{[\ln(n+3)]^p} \right) \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{[\ln(n+3)]^p}\,. \end{aligned}$$

On montre enfin que la série de terme général $1/[\ln(n+3)]^p$ diverge : les comparaisons usuelles montrent qu'au voisinage de l'infini, $1/[\ln(n+3)]^p \geqslant 1/n$, ce qui achève la preuve.

403. **RMS 2009 983 Centrale PSI**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite monotone de réels positifs.

(a) Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_{n^2} sont de même nature.

(b) Qu'en est-il si l'on enlève l'une ou l'autre des hypothèses ?

Solution. — Si (u_n) est croissante et n'est pas décroissante, alors il existe n_0 tel que $0 \leqslant u_{n_0} < u_{n_0+1} \leqslant u_n$ pour tout $n > n_0$, donc les deux séries divergent nécessairement. On supposera donc dans tout l'exercice que (u_n) décroît.
On notera $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (respectivement $T_n = \sum_{k=0}^{n} ku_{k^2}$) la somme partielle d'ordre n de la première (respectivement de la seconde) série. Les deux séries étant à termes positifs, leur convergence équivaut au caractère borné de leur suite de sommes partielles.

(a) Les inégalités suivantes sont valables pour $k \geqslant 1$ car $(k-1)^2 + 1 \leqslant k^2 - k + 1$, la première résultant de la décroissance de (u_n) :

$$ku_{k^2} \leqslant \underbrace{u_{k^2-k+1} + u_{k^2-k+2} + \cdots + u_{k^2-1} + u_{k^2}}_{k \text{ termes}} \leqslant u_{(k-1)^2+1} + \cdots + u_{k^2}\,.$$

En sommant pour k variant de 1 à n , on obtient $T_n \leqslant S_{n^2} - u_0$. Par suite, la convergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum nu_{n^2}$.
Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}$, on note p l'unique nombre entier tel que $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$, et alors

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{(p+1)^2-1} u_i = \sum_{k=0}^{p} (\underbrace{u_{k^2} + u_{k^2+1} + \cdots + u_{(k+1)^2-1}}_{2k+1 \text{ termes}}) \leqslant \sum_{k=0}^{p} (2k+1)u_{k^2} \leqslant u_0 + \sum_{k=1}^{p} 3ku_{k^2} = u_0 + 3T_p\,.$$

Cette majoration prouve que la convergence de $\sum ku_{k^2}$ entraîne celle de $\sum u_n$.

Remarque. — On peut démontrer de la même manière, et sous les mêmes hypothèses, que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge : cette dernière équivalence est connue sous le nom de test de condensation de Cauchy, ou test de la loupe. Plus généralement, comme on le comprend à la lecture de la démonstration ci-dessus, il suffit de choisir une suite strictement croissante (n_k) de nombres entiers pour que la convergence de $\sum u_n$ soit équivalente à celle de $\sum (n_{k+1} - n_k)u_{n_k}$: ce résultat est connu sous le nom de théorème de Schlömlich.

Plus généralement, la convergence de $\sum u_n$ est équivalente à celle de $\sum f(n_{k+1} - n_k)u_{n_k}$, où f est une fonction telle que : $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $An \leqslant f(n) \leqslant Bn$.

(b) Si l'on enlève l'hypothèse de monotonie, tout en conservant la positivité, l'équivalence devient fausse, comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ donnée par

$$u_n = \begin{cases} 1/n^2 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré,} \\ 1/n & \text{si } n \text{ est un carré (c'est-à-dire si } n \text{ est de la forme } k^2 \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Alors $\sum_{k\geqslant 1} k u_{k^2} = \sum_{k\geqslant 1} k/k^2 = \sum_{k\geqslant 1} 1/k$ diverge, et on va montrer que $\sum u_n$ converge. Pour cela, on va calculer $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$ en faisant comme si tous les u_i valaient $1/i^2$, et en compensant l'erreur ensuite : si $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$, et si l'on pose $T_n = \sum_{i=1}^n 1/i^2$ et $R_n = \sum_{i=1}^n 1/i^4$, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4}\right) = T_n + T_p - R_p = T_n + T_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} - R_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\,.$$

Comme les séries de termes généraux $1/i^2$ et $1/i^4$ convergent, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
Si l'on conserve l'hypothèse de monotonie, alors la suite (u_n) est de signe fixe à partir d'un certain rang, et on est ramené à la question (a) — au besoin en multipliant par -1 si les u_n sont négatifs. L'hypothèse capitale est donc celle de monotonie.

404. **RMS 2010 840 Centrale PSI**

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ vérifiant $f(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f'(c)| > 2$.

(b) Que se passe-t-il si l'on suppose seulement que f est dérivable ?

Solution. — Comme l'existence de c reste vraie si l'on suppose seulement f dérivable, on traite uniquement la question (b).

On suppose pour commencer que $x_0 \neq 1/2$. Si $x_0 < 1/2$, on applique le théorème des accroissements finis à f entre les points d'abscisses zéro et x_0 : il existe $c \in]0, x_0[$ tel que

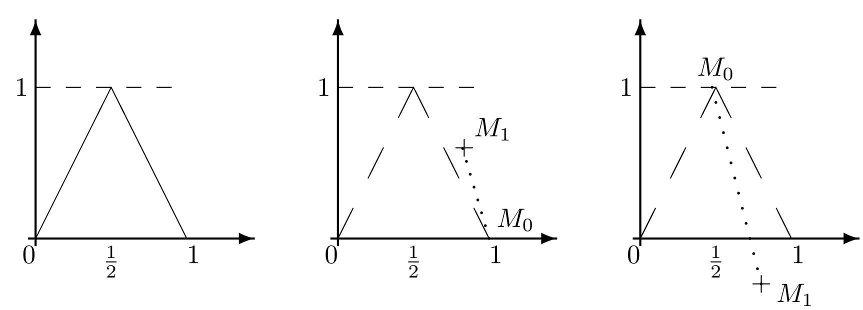
$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1}{x_0} = f'(c)\,.$$

Comme $x_0 < 1/2$, on obtient $f'(c) > 2$, donc $|f'(c)| > 2$.
Si $x_0 > 1/2$, on applique le théorème des accroissements finis à f entre les points d'abscisses x_0 et 1 : il existe $c \in]x_0, 1[$ tel que

$$\frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = -\frac{1}{1 - x_0} = f'(c)\,.$$

Comme $0 < 1 - x_0 < 1/2$, on obtient $f'(c) < -2$, donc $|f'(c)| > 2$.

On suppose maintenant que $x_0 = 1/2$. Il est impossible que f soit la fonction affine par morceaux g (à gauche dans la figure ci-dessous) coïncidant avec f en zéro, $1/2$ et 1, car g n'est pas dérivable en $1/2$. Il existe donc un point $M_1 = (x_1, f(x_1))$ du graphe de f qui n'appartient pas au graphe de g, donc en particulier $x_1 \notin \{0, 1/2, 1\}$. On a représenté ci-dessous au centre le cas où $x_1 > 1/2$ et $f(x_1) > g(x_1)$, et à droite le cas où $x_1 > 1/2$ et $f(x_1) < g(x_1)$:



Dans ces deux cas, la corde du graphe de f, dessinée en pointillés, d'extrémités M_1 et $M_0 = (1,0)$ [au centre] ou $M_0 = (1/2, 1)$ [à droite] possède une pente strictement plus petite que -2, et le théorème des accroissements finis appliqué à f entre les abscisses des points M_0 et M_1 prouve l'existence de $c \in]0,1[$ tel que $|f'(c)| > 2$. On raisonne de même si $x_1 < 1/2$.

405. **RMS 2010 841 Centrale PSI**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles de limite a. On suppose que $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose $u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < a < y_n$. Quelle est la limite de u_n ?

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a. Que dire de (u_n) ?

(c) Que se passe-t-il dans le cas général ?

Solution. —

(a) Comme f est dérivable en a, elle admet un développement limité d'ordre 1 en a qui s'écrit $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varphi(x)$, où φ est une fonction de limite nulle en a. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{f(a)+(y_n-a)f'(a)+(y_n-a)\varphi(y_n)-[f(a)+(x_n-a)f'(a)+(x_n-a)\varphi(x_n)]}{y_n-x_n}\,, \\ &= \frac{(y_n-x_n)f'(a)+(y_n-a)\varphi(y_n)-(x_n-a)\varphi(x_n)}{y_n-x_n}\,, \\ &= f'(a)+\underbrace{\frac{(y_n-a)\varphi(y_n)-(x_n-a)\varphi(x_n)}{y_n-x_n}}_{v_n}\,. \end{aligned}$$

On montre ensuite que (v_n) est une suite de limite nulle. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme les deux suites de termes généraux $\varphi(x_n)$ et $\varphi(y_n)$ convergent vers zéro, il existe un nombre entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $|\varphi(x_n)| \leqslant \varepsilon$ et $|\varphi(y_n)| \leqslant \varepsilon$. Compte-tenu des positions de x_n et y_n par rapport à a, on en déduit que

$$\forall n \geqslant N, \quad |v_n| \leqslant \frac{(y_n-a)|\varphi(y_n)|+(a-x_n)|\varphi(x_n)|}{y_n-x_n} \leqslant \frac{(y_n-a)\varepsilon+(a-x_n)\varepsilon}{y_n-x_n} = \varepsilon\,.$$

Il en résulte que $\lim u_n = f'(a)$.

(b) On va montrer que le résultat de la question (a) reste vrai. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire une formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre zéro pour f dans un voisinage V de a, ce qui consiste simplement à écrire que f est l'intégrale de sa dérivée :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour n assez grand, x_n et y_n sont dans le voisinage V, et on évalue la différence entre u_n et $f'(a)$ comme suit :

$$u_n - f'(a) = \frac{f(a)+\int_a^{y_n} f'(t)\,\mathrm{d}t-\left(f(a)+\int_a^{x_n} f'(t)\,\mathrm{d}t\right)}{y_n-x_n} - f'(a) = \frac{\int_{x_n}^{y_n} f'(t)\,\mathrm{d}t}{y_n-x_n} - f'(a) = \frac{1}{y_n-x_n}\int_{x_n}^{y_n}[f'(t)-f'(a)]\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f' est continue, il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $t \in U$, on ait $|f'(t)-f'(a)| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour n suffisamment grand pour que x_n et y_n appartiennent à $U \cap V$, on a

$$|u_n - f'(a)| \leqslant \frac{1}{|y_n-x_n|}\int_{\min(x_n,y_n)}^{\max(x_n,y_n)} |f'(t)-f'(a)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{\max(x_n,y_n)-\min(x_n,y_n)}\int_{\min(x_n,y_n)}^{\max(x_n,y_n)} \mathrm{d}t = \varepsilon\,,$$

ce qui achève de montrer que $\lim u_n = f'(a)$.

(c) Il est possible que la suite (u_n) diverge vers $\pm\infty$, voire diverge sans limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, ou converge vers une valeur qui n'est pas $f'(a)$. On considère la fonction f donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{Si } x = 0, \end{cases}$$

où α est un nombre réel tel que $1 < \alpha \leqslant 2$. Il s'agit d'une fonction manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et dérivable en zéro mais à dérivée discontinue en zéro. Pour prouver cela, on étudie le taux d'accroissement de f en zéro, qui vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

et la majoration évidente $|\tau(x)| \leqslant |x|^{\alpha-1}$ montre que f est dérivable en zéro de nombre dérivé $f'(0) = 0$. Par ailleurs, si $\varepsilon(x)$ désigne le signe de x, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \alpha\varepsilon(x)|x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Cette fonction dérivée n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en zéro, comme le prouve l'étude des deux suites de termes généraux $x_n = (2n\pi)^{-1}$ et $y_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$. Ces suites convergent vers zéro, et les suites des images par f' ont respectivement pour termes généraux $f'(x_n) = -|x_n|^{\alpha-2} = -(2n\pi)^{2-\alpha}$ et $f'(y_n) = \alpha|y_n|^{\alpha-1} = \alpha(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{1-\alpha}$. La première diverge vers $+\infty$ si $\alpha < 2$ et est constante égale à -1 si $\alpha = 2$, la seconde converge vers zéro : dans les deux cas, elles ont des limites distinctes.

On passe maintenant à l'étude de différentes suites (u_n), qui présentent toutes les situations évoquées au début de cette question (c).

– Si x_n et y_n ont les valeurs données ci-dessus, alors $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = |y_n|^\alpha = y_n^\alpha$, donc

$$u_n = \frac{y_n^\alpha}{y_n - x_n} = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-\alpha}}{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1} - (2n\pi)^{-1}} = -4n\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 2, \\ -\frac{2}{\pi} \neq f'(0) & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

– Si $x_n = (n\pi)^{-1}$ et $y_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-1}$, alors $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = (-1)^n|y_n|^\alpha = (-1)^n y_n^\alpha$, donc

$$u_n = (-1)^n\frac{y_n^\alpha}{y_n - x_n} = (-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-\alpha}}{(\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-1} - (n\pi)^{-1}} = (-1)^{n+1}2n\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi^{1-\alpha}(-1)^{n+1}n^{2-\alpha}\,.$$

On en déduit que (u_n) n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, tout en restant bornée si $\alpha = 2$, et sans être bornée si $\alpha < 2$.

406. **RMS 2010 842 Centrale PSI**

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Solution. — La réponse est oui. On note $f\colon x \mapsto \sin(x)\sin(x^2)$, on pose $u = x - 1/2$ et $v = x + 1/2$, et on note c et s les constantes $\cos(1/4)$ et $\sin(1/4)$ respectivement. Les formules de trigonométrie montrent que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x^2 - x) - \cos(x^2 + x)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(u^2 - \frac{1}{4}\right) - \cos\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\right]\,, \\ &= \frac{1}{2}\left[c\cos(u^2) + s\sin(u^2) - c\cos(v^2) - s\sin(v^2)\right]\,. \end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty}\cos(u^2)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\sin(u^2)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\cos(v^2)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty}\sin(v^2)\,\mathrm{d}x$ convergent. Compte-tenu des expressions de u et de v, cela revient à montrer que les deux intégrales $\int_1^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ convergent, ou encore que $\int_1^{+\infty}\exp(ix^2)\,\mathrm{d}x$ converge (le choix de la borne inférieure 1 est sans signification particulière : on veut juste éviter zéro pour le calcul qui va suivre).

Soit $y \geqslant 1$. Dans l'intégrale partielle $\int_1^y \exp(ix^2)\,\mathrm{d}x$, on effectue le changement de variable $x = \sqrt{t}$, pour lequel $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(2\sqrt{t})$, suivi de l'intégration par parties consistant à dériver $1/\sqrt{t}$:

$$\int_1^y \exp(ix^2)\,\mathrm{d}x = \int_1^{y^2}\frac{\exp(it)}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{it}}{2i\sqrt{t}}\right]_1^{y^2} + \int_1^{y^2}\frac{e^{it}}{4it^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{iy^2}}{2iy} - \frac{e^i}{2i} + \frac{1}{4i}\int_1^{y^2}\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Le terme $e^{iy^2}/(2iy)$ tend vers zéro quand y tend vers l'infini, et la majoration $|e^{it}/t^{3/2}| \leqslant 1/t^{3/2}$ montre que $\int_1^{+\infty} e^{it}/t^{3/2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Il s'ensuit que $\int_1^y \exp(ix^2)\,\mathrm{d}x$ possède une limite finie quand y tend vers l'infini, donc que $\int_0^{+\infty}\sin(x)\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ converge.

407. **RMS 2009 987 Centrale PSI (calcul formel)**

Pour $k \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \sum_{i=0}^k \sqrt{|x - i|}$.

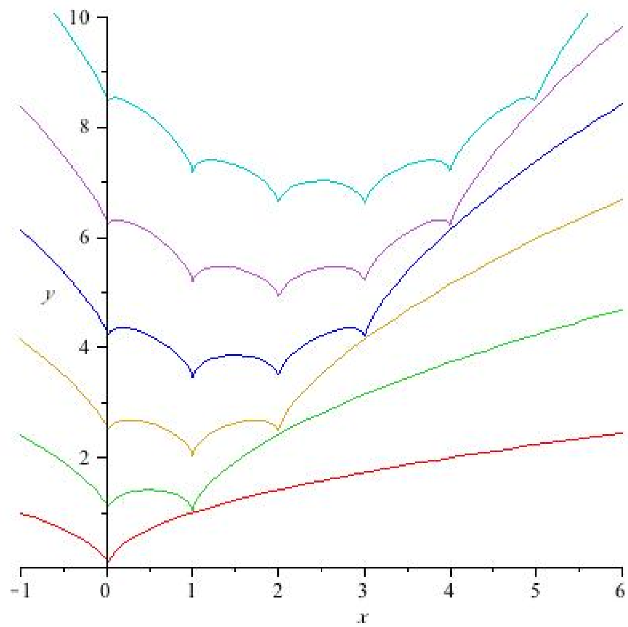
(a) Tracer l'allure de f_k pour quelques valeurs de k.

(b) Étudier l'intégrabilité de la fonction $1/f_k$.

(c) Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $1/f_k$.

Solution. — Dans les questions (b) et (c), on supposera que $k \geqslant 1$: en effet, la fonction $f_0\colon x \mapsto \sqrt{|x|}$ s'annule sur $\mathbb{R}$, donc on ne peut pas considérer la fonction $1/f_0$. Ce n'est pas le cas des f_k pour $k \geqslant 1$, qui sont toutes définies et strictement positives sur $\mathbb{R}$.

(a) On programme $x \mapsto f_k(x)$ comme une fonction de deux variables `f:=(k,x)->add(sqrt(abs(x-i)),i=0..k)`, puis on demande par exemple `plot([seq(f(k,x),k=0..5)],x=-1..6,y=0..10)` : ci-dessous, f_0 est en rouge, f_1 en vert, f_2 en orange, f_3 en bleu foncé, f_4 en violet et f_5 en bleu ciel.



Le changement d'indice $j = k - i$ montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(k-x) = \sum_{i=0}^{k} \sqrt{|i-k+x|} = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{|-j+x|} = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{|j-x|} = f_k(x)\,.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = k/2$ est un axe de symétrie du graphe de f_k, ce que la figure ci-dessus montre en effet.

(b) La fonction f_k étant définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété de symétrie qu'on vient de mettre en évidence, il suffit d'étudier f_k au voisinage de $+\infty$. Or $f_k(x) \sim (k+1)\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$, donc $1/f_k$ n'est intégrable ni sur $\mathbb{R}_-$ ni sur $\mathbb{R}_+$.

(c) On fixe un réel x et on pose $N = \max(1, 1+x)$. Pour $i \geqslant N$, on a $\sqrt{|x-i|} = \sqrt{i-x}$, et les techniques usuelles de comparaison série-intégrale montrent que $\int_{i-1}^{i} \sqrt{t-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{i-x} \leqslant \int_{i}^{i+1} \sqrt{t-x}\,\mathrm{d}t$. Par conséquent, pour $k \geqslant N$, on dispose de l'encadrement

$$\begin{aligned} f_k(N) + \frac{2}{3}\left[(k-x)^{3/2} - (N-1-x)^{3/2}\right] &= f_{N-1}(x) + \int_{N-1}^{k} \sqrt{t-x}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant f_k(x) \leqslant f_{N-1}(x) + \int_{N}^{k+1} \sqrt{t-x}\,\mathrm{d}t = f_k(N) + \frac{2}{3}\left[(k+1-x)^{3/2} - (N-x)^{3/2}\right]\,. \end{aligned}$$

On en déduit, toujours à x fixé, que $f_k(x) \sim \frac{2}{3}k^{3/2}$ quand k tend vers l'infini, donc que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} 1/f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On va montrer en fait que la convergence est normale, en déterminant $\inf_{\mathbb{R}} f_k$. Les graphes de la question (a) indiquent que la borne inférieure de f_k sur $\mathbb{R}$ est atteinte sur l'intervalle $[0, k]$: plus précisément, suivant la parité de k, elle semble être atteinte une seule fois en $k/2$ ou deux fois en $(k-1)/2$ et en $(k+1)/2$.

On prouve ci-après propriété un peu plus faible, mais suffisante pour établir la convergence normale de $\sum_{k\geqslant 1} 1/f_k$. Compte-tenu des propriétés de symétrie de la question (a), il suffit d'évaluer $\inf_{[k/2,+\infty[} f_k$.

- Pour $x \geqslant k$, on a $f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \sqrt{x-i}$, donc f_k est croissante sur cet intervalle, donc $f_k(x) \geqslant f_k(k) = \sum_{i=0}^{k} \sqrt{k-i} = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{j}$.
- Pour $x \in [k/2, k]$, on discute selon $p = \lfloor x \rfloor$, qui peut prendre les valeurs $\lfloor k/2 \rfloor$ à $k-1$. Dans ce cas,

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{p} \sqrt{x-i} + \sum_{i=p+1}^{k} \sqrt{i-x} \geqslant \sum_{i=0}^{p} \sqrt{p-i} + \sum_{i=p+1}^{k} \sqrt{i-p-1} = \sum_{j=1}^{p} \sqrt{j} + \sum_{j=1}^{k-p-1} \sqrt{j}\,.$$

Pour $\lfloor k/2 \rfloor \leqslant p \leqslant k$, on pose $x_p = \sum_{j=1}^{p} \sqrt{j} + \sum_{j=1}^{k-p-1} \sqrt{j}$, et on montre que cette suite est croissante. En effet, $x_{p+1} - x_p = \sqrt{p+1} - \sqrt{k-p-1} \geqslant 0$, car $p+1 \geqslant k-p-1$, puisque $p \geqslant \lfloor k/2 \rfloor \geqslant k/2 - 1$. Il s'ensuit que

$\inf_{[k/2,k[} f_k \geqslant \sum_{j=1}^{\lfloor k/2\rfloor} \sqrt{j} + \sum_{j=1}^{k-\lfloor k/2\rfloor-1} \sqrt{j}$. Comme $\lfloor k/2\rfloor \geqslant k - \lfloor k/2\rfloor - 1$, on peut encore minorer de la manière suivante :

$$\inf_{[k/2,k[} f_k \geqslant y_k := 2 \sum_{j=1}^{k-\lfloor k/2\rfloor-1} \sqrt{j}\ .$$

Cette valeur est clairement inférieure à $\inf_{[k,+\infty[} f_k = \sum_{j=1}^{k} \sqrt{j}$.

Finalement, on a montré que $\inf_{\mathbb{R}} f_k \geqslant y_k$, qui est un nombre strictement positif dès que $k \geqslant 3$: dans ces conditions,

$$N_\infty\left(\frac{1}{f_k}\right) = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{f_k} = \frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} f_k} \leqslant \frac{1}{y_k}\ .$$

Les techniques de comparaison série-intégrale montrent que, lorsque k tend vers l'infini,

$$y_k \sim 2\int_0^{k/2} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\left(\frac{k}{2}\right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} k^{3/2},$$

et on en déduit que $N_\infty(f_k) = \mathrm{O}(1/k^{3/2})$, ce qui établit la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} 1/f_k$.

Remarque. — Pour calculer de manière exacte $\inf_{\mathbb{R}} f_k$, il faudrait distinguer suivant la parité de k.

408. **RMS 2009 988 Centrale PSI (calcul formel)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto xe^{-(nx)^2}$.

(a) Représenter f_1, f_2, f_3 sur un intervalle bien choisi.

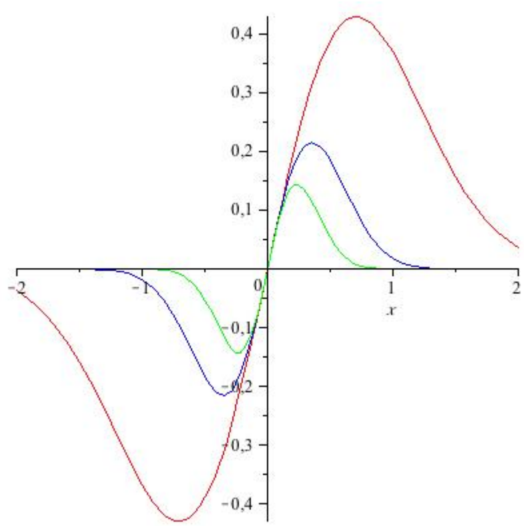
(b) Établir la convergence de la série de terme général f_n sur $[0, +\infty[$. Soit f sa somme.

(c) Représenter les premières sommes partielles. Représenter f.

(d) La fonction f est-elle bornée ? Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Solution. — On charge la bibliothèque graphique au début de la session par `with(plots)`.

(a) On définit f_n comme une fonction de deux variables par `f:=(n,x)->x*exp(-(n*x)**2)`, puis on valide la commande graphique `plot([f(1,x),f(2,x),f(3,x)], x=-2..2, color=[red,blue,green])`. On obtient l'image suivante :



On note que toutes les f_n sont impaires, ce qui justifie leur étude sur $\mathbb{R}_+$ seulement.

(b) On va étudier les trois types de convergence.

– Convergence simple. Pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle, donc la série correspondante converge et $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, les comparaisons usuelles montrent que $n^2 f_n(x) = n^2 xe^{-(nx)^2}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On conclut que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

– Convergence normale. Comme f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = (1 - 2n^2x^2)e^{-(nx)^2}$, on en déduit le tableau de variation de f_n sur $[0, +\infty[$, où C désigne la constante positive $(2e)^{-1/2}$:

x	0	$1/n\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0	C/n	0

Comme $\sum C/n$ diverge, la série de fonctions étudiée ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$. En revanche, si l'on fixe $a>0$ et pour tout n assez grand, on a $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$, donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Convergence uniforme. L'étude précédente montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a,+\infty[$ contenu dans $]0,+\infty[$. On va montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $]0,+\infty[$, ni *a fortiori* sur $[0,+\infty[$, en établissant que la somme f est discontinue en zéro : comme toutes les f_n sont continues sur $[0,+\infty[$ et comme $f_n(0)=0$, cela suffira, par contraposition du théorème d'interversion des limites. En effet,

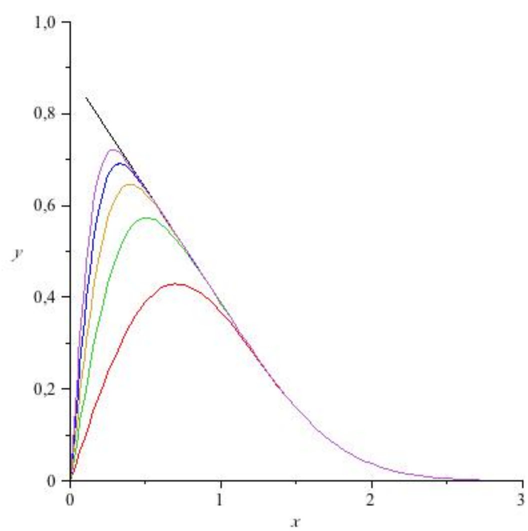
$$\forall x \in]0,1[\,,\quad f(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(nx)^2} \geqslant x\sum_{n=1}^{\lfloor 1/x\rfloor} e^{-(nx)^2} \geqslant e^{-1}x\,\lfloor 1/x\rfloor\ .$$

Comme le minorant $x\lfloor 1/x\rfloor$ tend vers 1 quand x tend vers zéro (écrire que $(1/x)-1<\lfloor 1/x\rfloor \leqslant 1/x$ et multiplier par x), on en déduit que $f(x)$ ne tend pas vers $f(0)=0$ quand x tend vers zéro.

(c) On valide les lignes

```
S:=(n,x)->add(f(i,x),i=1..n):Spartielles:=plot([seq(S(n,x),n=1..5)],x=0..3,y=0..1):
T:=sum(f(k,x),k=1..infinity);F:=plot(T,x=0..3,y=0..1,color=black):display([F,Spartielles]);
```

et on obtient l'image suivante :



On constate que Maple ne sait pas calculer une forme close de la somme $f(x)$, et que le tracé de cette somme semble poser des difficultés au voisinage de zéro. Si l'on prolonge le graphe de f (en noir), on obtiendrait $\lim_0 f \approx 0,9$, ce qui est compatible avec la minoration $f(x)\geqslant e^{-1}$ au voisinage de zéro, qu'on a prouvée à la question (b). Voir aussi la question suivante.

(d) Le graphe ci-dessus semble indiquer que f est bornée. En voici une démonstration, à l'aide d'une technique de comparaison série-intégrale. Pour $x>0$ fixé, la décroissance de la fonction $t\mapsto e^{-(tx)^2}$ entraîne que $x\int_n^{n-1} e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f_n(x) \leqslant x\int_{n-1}^{n} e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On en déduit que $x\int_1^{+\infty} e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant x\int_0^{+\infty} e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u=xt$ dans les deux intégrales donne

$$\forall x\in]0,+\infty[\,,\quad \int_x^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Le théorème d'encadrement, la valeur $f(0)=0$ et la valeur bien connue de l'intégrale de Gauss montrent alors que

$$\forall x\in [0,+\infty[\,,\quad f(x)\leqslant \lim_{0^+} f = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

La commande `evalf(sqrt(Pi)/2` donne la valeur numérique approchée $\lim_{0^+} f\approx 0,89$, en accord avec l'estimation graphique effectuée ci-dessus.

On va ensuite montrer que $f(x)$ est équivalent à son premier terme xe^{-x^2} au voisinage de l'infini. Pour cela, on majore le reste, de nouveau au moyen d'une série géométrique :

$$\forall x \geqslant 1, \quad R_1(x) = x\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-(nx)^2} = xe^{-4x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x^2(n^2-4)} \leqslant xe^{-4x^2}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{xe^{-4x^2}}{1-e^{-x^2}} \leqslant Kxe^{-4x^2},$$

où K désigne la constante $(1-e^{-1})^{-1}$. Comme $e^{-4x^2} = \mathrm{o}(e^{-x^2})$ au voisinage de $+\infty$, l'équivalent annoncé s'en déduit.

409. **RMS 2010 843 Centrale PSI**

Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1+n^2 f(x)^2}}$.

(a) Justifier l'existence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ?

(b) Montrer que si f est continue, S l'est aussi. Réciproque ?

Solution. — On étudie la série numérique de terme général $a_n(y) = (-1)^n y/\sqrt{1+n^2y^2}$ pour y fixé dans $\mathbb{R}^*$ (si $y=0$, le terme général est nul et la série converge). Il est clair que la suite $(a_n(y))$ est alternée, de limite nulle, et que la suite de terme général $|a_n(y)| = |y|/\sqrt{1+n^2y^2}$ décroît. Le théorème de Leibniz dit que $\sum a_n(y)$ converge, et que le reste à l'ordre n vérifie $|R_n(y)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(y)| \leqslant |a_{n+1}(y)|$. On note $g(y)$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(y)$.
Par ailleurs, $y \mapsto a_n(y)$ est une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Sa dérivée est donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad a_n'(y) = (-1)^n\left[\frac{1}{\sqrt{1+n^2y^2}} + y\frac{-2n^2y}{2(1+n^2y^2)^{3/2}}\right] = \frac{(-1)^n}{(1+n^2y^2)^{3/2}}\cdot$$

On en déduit que a_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et le caractère impair de a_n montre alors que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |a_n(y)| \leqslant \lim_{y\to+\infty} |a_n(y)| = \frac{1}{n}\cdot$$

(a) D'après l'étude menée ci-dessus, la série de terme général $u_n(x) = a_n(f(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'existence (c'est-à-dire la convergence simple) de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc établie. La convergence uniforme résulte de la majoration du reste et de l'étude de la fonction a_n menée ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(f(x))| \leqslant |a_{n+1}(f(x))| \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$

(b) Si f est continue, $u_n = a_n \circ f$ l'est aussi, et la continuité de S résulte de la convergence uniforme de la série de fonction $\sum u_n$.
On peut aussi dire que $\sum a_n$ converge uniformément vers g et, comme, les fonctions a_n sont continues, A l'est aussi. Il suffit enfin d'écrire que $S = A \circ f$ pour conclure.
C'est cette dernière relation qui va montrer que la réciproque est vraie : si S est continue, alors f l'est. Il suffit pour cela de montrer que A est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur son image. On en déduira que

$$f = A^{-1} \circ S,$$

donc que f est continue. Pour établir que A est un homéomorphisme sur son image, il suffit de montrer que A est continue (c'est déjà fait) et strictement monotone. Pour cela, on montre que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$: chaque a_n est de classe $\mathcal{C}^1$, l'expression de a_n' calculée ci-dessus montre que, pour $y_0 > 0$ fixé

$$\|a_n'\|_{\infty,[y_0,+\infty[} = \frac{1}{(1+n^2y_0^2)^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{y_0^2n^3}\cdot$$

On en déduit la convergence normale de $\sum a_n'$ sur $[y_0,+\infty[$, ce qui montre que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[y_0,+\infty[$ pour tout $y_0 > 0$, donc A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad A'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2y^2)^{3/2}}\cdot$$

De plus, pour $y > 0$ fixé, la série ci-dessus vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz, donc $A'(y)$ est du signe de son premier terme, qui vaut 1. Par suite, A est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en zéro en particulier, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, comme A est une fonction impaire, on conclut qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui achève la preuve.

410. **RMS 2009 989 Centrale PSI**

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ où $a_n = \lfloor \pi^n \rfloor$.

(b) Désormais (a_n) est une suite quelconque de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n)x^n$. Montrer que $R' \geqslant R$ avec égalité si $R > 1$.

(c) Trouver une suite (a_n) telle que $R' = 2R$. Déterminer les valeurs prises par R'/R.

Solution. —

(a) La définition de la partie entière implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi^n - 1 < a_n \leqslant \pi^n$, donc $a_n \sim \pi^n$ en l'infini. Par suite, pour tout $x \neq 0$, on a $a_n|x|^n \sim (\pi|x|)^n$. Comme la série géométrique de terme général $(\pi|x|)^n$ converge si et seulement si la raison $\pi|x|$ est strictement plus petite que 1, on obtient

$$R = \frac{1}{\pi} \cdot$$

(b) On utilise la majoration $|\sin u| \leqslant |u|$, valable pour tout nombre réel u. On en déduit que $\forall (x, n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $|\sin(a_n)x^n| \leqslant |a_n x^n|$. Si $|x| < R$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc il en est de même de la série $\sum \sin(a_n)x^n$ donc $|x| \leqslant R'$. Ceci montre que

$$R' \geqslant R\,.$$

Si l'on suppose de plus que $R > 1$, alors la suite (a_n) converge vers zéro (choisir un réel x_0 tel que $1 < x_0 < R$, alors la série $\sum a_n x_0^n$ converge, donc le terme général tend vers zéro, donc $|a_n x_0^n| \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, donc $|a_n| \leqslant |1/x_0^n|$, d'où la limite indiquée).

On en déduit que $0 \leqslant |a_n| \leqslant \pi/2$ à partir d'un certain rang N, et la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$ entraîne que $0 \leqslant (2/\pi)|a_n| \leqslant \sin|a_n|$ à partir de N, puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant N$, $(2/\pi)|a_n x^n| \leqslant (\sin|a_n|)|x^n| = |\sin(a_n)x^n|$. Cette inégalité montre que $R \geqslant R'$. Finalement, si $R > 1$,

$$R' = R\,.$$

(c) On va démontrer que R'/R peut prendre toutes les valeurs dans $[1, +\infty]$ (il suffira d'appliquer la construction qui va suivre à $\lambda = 2$ pour répondre à la première partie de la question).

La valeur 1 est prise par R'/R à chaque fois que $R > 1$, d'après la question (b). Ensuite, soit λ un réel strictement plus grand que 1, et $a_n = \pi + \lambda^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ vaut 1 et, pour tout $x \neq 0$, on dispose de l'équivalent suivant, qui vient de ce que $\lambda > 1$ (donc (λ^{-n}) converge vers zéro) et de ce que $\sin u \sim u$ au voisinage de zéro :

$$\sin(a_n)x^n = \sin(\pi + \lambda^{-n})x^n = -\sin(\lambda^{-n})x^n \underset{+\infty}{\sim} -\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n.$$

Il en résulte que le rayon R' de $\sum \sin(a_n)x^n$ vaut λ, donc que $R'/R = \lambda$.

Enfin, la valeur $+\infty$ est obtenue avec $a_n = \pi$ pour tout n. Dans ce cas, R vaut 1 et, comme $\sin(a_n) = 0$ pour tout n, le rayon R' vaut $+\infty$.

411. **RMS 2010 844 Centrale PSI (calcul formel)**

(a) Calculer avec Maple $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{4n}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n+1)2^{4n}}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière précédente et retrouver la somme sans Maple.

(c) Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n+1)2^{6n+1}}$.

Solution. —

(a) On obtient

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

après avoir validé `sum(binomial(4*n,2*n)*x**(2*n)/(2*n+1)/2**(4*n),n=0..infinity)`.

(b) Pour $x \neq 0$, on pose $a_n = \binom{4n}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n+1)2^{4n}}$, et on calcule

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{4n+4}{2n+2}\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)2^{4n+4}}}{\binom{4n}{2n}\frac{x^{2n}}{(2n+1)2^{4n}}} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{[(2n+2)(2n+1)]^2}\,\frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{x^2}{16} = \frac{(4n+3)(4n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\,\frac{x^2}{4}\,.$$

La limite de ce quotient quand n tend vers l'infini est x^2, et la règle de d'Alembert indique que la série de terme général a_n converge absolument si $|x|<1$ et diverge grossièrement si $|x|>1$, ce qui prouve que le rayon de convergence cherché vaut 1.

On pose $g(x)=xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{4n}{2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{4n}}$ pour tout $x\in]-1,1[$, ce qui définit une fonction, somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc dérivable terme à terme, avec

$$\forall x\in]-1,1[,\quad g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{4n}{2n}\frac{x^{2n}}{2^{4n}}\,.$$

On a introduit la fonction g pour pouvoir dériver et faire disparaître le facteur $2n+1$ du dénominateur. La fonction g' se présente ci-dessus comme la partie paire (voir la remarque) de la fonction $h\colon x\in]-1,1[\mapsto\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{2p}{p}\frac{y^p}{2^{2p}}$, c'est-à-dire que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad g'(x)=\frac{h(x)+h(-x)}{2}\,.$$

Il suffit de savoir calculer $h(x)$. Or le terme d'ordre p du développement en série entière de h vaut

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p}\frac{x^p}{2^{2p}}&=\frac{(2p)(2p-1)(2p-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{2^{2p}(p!)^2}x^p=\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots5\cdot3\cdot1}{2^pp!}x^p\,,\\&=(-1)^p\frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(3/2-p)(1/2-p)}{p!}x^p=\frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac12-1\right)\cdots\left(-\frac12-[p-1]\right)}{p!}(-x)^p\,,\\&=\binom{-1/2}{p}(-x)^p\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $h(x)=(1-x)^{-1/2}$ (le développement en série entière du binôme doit être connu, et si possible reconnu sous ses diverses formes, sinon la démarche ci-dessus paraît artificielle). On en déduit que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad g'(x)=xf'(x)+f(x)=\frac12\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\,.$$

Il suffit ensuite de résoudre l'équation différentielle pour trouver f (à rédiger ? ?)

Remarque. — Toute fonction f, à valeurs dans un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E, définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro (si $x\in D$, alors $-x\in D$) est la somme d'une fonction paire $P\in E^D$ et d'une fonction impaire $I\in E^D$, et ceci de manière unique. Pour le prouver, le plus rapide consiste à définir $s:f\in E^D\mapsto(x\mapsto f(-x))$, qui est un endomorphisme involutif de E^D, c'est-à-dire une symétrie vectorielle de E^D. À ce titre, E^D est la somme directe de la base $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$, qui est l'ensemble des fonctions paires, et de la direction $\mathrm{Im}(s+\mathrm{id})$, qui est l'ensemble des fonctions impaires. De plus, $P=[f+s(f)]/2$ et $I=[f-s(f)]/2$.

(c) La formule de Stirling permet d'obtenir l'équivalent en l'infini suivant :

$$u_n=\frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2(2n+1)2^{6n+1}}\sim\frac{(4n)^{4n}e^{-4n}\sqrt{8\pi n}}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^2(2n+1)2^{6n+1}}=\frac{1}{4\pi\sqrt2\,n^2}\,.$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum u_n$. On peut d'ailleurs faire faire ces calculs à Maple en validant

```
u:=binomial(4*n,2*n)*binomial(2*n,n)/(2*n+1)/2**(6*n+1);dlu:=asympt(u,n,3);map(simplify,dlu);
```

Il faut utiliser la dernière commande de préférence à `simplify(dlu)`, qui présente l'inconvénient de réduire le développement asymptotique au même dénominateur, en détruisant sa structure de somme : l'équivalent en $1/n^2$ plus le terme en $\mathrm{O}(1/n^3)$.

En revanche, je ne sais pas comment calculer sa somme. Maple donne une valeur de la fonction hypergéométrique ${}_3F_2$, à savoir

$$\frac12\,{}_3F_2\left(\begin{array}{ccc}1/4&1/2&3/4\\&1&3/2\end{array},1\right)$$

qui ne semble pas avoir d'expression algébrique simple. à terminer ? ?

412. **RMS 2009 990 Centrale PSI**

Étudier la fonction $x\mapsto\int_0^{\sin^2x}\arcsin\sqrt t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2x}\arccos\sqrt t\,\mathrm{d}t$.

Solution. — On note f la fonction à étudier. Comme elle est π–périodique et paire, on l'étudie sur $[0,\pi/2]$. Les fonctions arcsin, arcsin, sin et cos étant continues, f l'est. Les fonctions arcsin et arccos étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2[$ *a priori*, avec, pour tout $x\in]0,\pi/2[$,

$$f'(x)=2\sin x\cos x\arcsin\sqrt{\sin^2x}-2\cos x\sin x\arccos\sqrt{\cos^2x}=\sin(2x)\left(\arcsin\sin x-\arccos\cos x\right)=0\,.$$

Il en résulte que f est constante sur $]0,\pi/2[$, puis sur $[0,\pi/2]$ par continuité, puis sur $\mathbb{R}$ par parité et périodicité. Cette constante vaut (on a effectué le changement de variable $t=u^2$, puis une intégration par parties, justifiée par le caractère intégrable sur $[0,1[$ de $u\mapsto(1-u^2)^{-1/+2}$) :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2u\arcsin u\ \mathrm{d}u=\left[u^2\arcsin u\right]_0^1-\int_0^1\frac{u^2-1+1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u,$$
$$=\frac{\pi}{2}+\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u-[\arcsin u]_0^1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\,.$$

413. **RMS 2009 991 Centrale PSI**
Soit $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(at)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier l'existence de cette intégrale.
(b) Montrer que $I(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}$.
(c) Trouver un équivalent de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Solution. — On pose $f_a(t)=\sin(at)/(e^t-1)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$. Comme le sinus est impair, on peut se contenter d'étudier $I(a)$ pour $a\geqslant 0$. Comme $I(0)$ est manifestement convergente et vaut zéro, on peut supposer que $a>0$ si besoin.

(a) La limite en zéro $\lim f_a(t)=a$ montre que l'intégrale $\int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge. La majoration $|f_a(t)|\leqslant 1/(e^t-1)\sim_{+\infty}e^{-t}$ montre que $\int_1^{+\infty}f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Finalement, $I(a)$ converge pour tout $a\in\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $t>0$, on a

$$f_a(t)=\frac{\sin(at)}{e^t(1-e^{-t})}=\frac{\sin(at)}{e^t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\sin(at)e^{-nt}}_{g_{n,a}(t)}.$$

Pour démontrer que $I(a)=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}g_{n,a}(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}g_{n,a}(t)\,\mathrm{d}t$, On va appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles $S_{n,a}(t)=\sum_{k=1}^n g_{k,a}(t)$ plutôt que le théorème spécifique aux séries de fonctions intégrées sur des intervalles quelconques. Pour cela, on constate que la fonction f_a, prolongée par continuité par la valeur $f_a(0)=a$, est continue sur le compact $[0,1]$, donc bornée, disons par m. L'hypothèse de domination peut prendre la forme suivante :

$$|S_{n,a}(t)|=\left|\sin(at)\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}\right|=\left|\sin(at)e^{-t}\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}\right|\leqslant\varphi_a(t):=\begin{cases}m & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \frac{1}{e^t-1} & \text{si } t>1.\end{cases}$$

La fonction φ_a est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, les hypothèses faibles sont satisfaites, on en déduit donc que

$$I(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Im\left(e^{-nt+iat}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\Im\left[\frac{e^{-nt+iat}}{-n+ia}\right]_0^{+\infty}=\sum_{n=1}^{+\infty}\Im\left(\frac{1}{n-ia}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\,.$$

(c) On utilise la forme démontrée à la question (b) ainsi qu'une comparaison série-intégrale : comme $t\mapsto a/(t^2+a^2)$ décroît sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{a}\right)=\left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_1^{+\infty}=\int_1^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ I(a)$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{a}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t=\left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}\,.$$

On en déduit que $\lim_{+\infty}I(a)=\pi/2$, ce qui fournit du même coup un équivalent de $I(a)$ en l'infini.

414. **RMS 2009 992 Centrale PSI**
Soit $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $\forall t\in]0,1],\ f(t)=t^2+\int_0^t(1+\sin(1/u))\,\mathrm{d}u$.

(a) Monter que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1]$.
(b) Montrer que $f'([0,1])$ est un intervalle borné mais pas un segment.

Solution. —

(a) La fonction $g\colon u \mapsto (1+\sin(1/u))$ est continue et bornée sur $]0,1]$ donc intégrable sur $]0,1]$ ce qui justifie l'existence de f. La continuité de g sur $]0,1]$ entraîne alors que f, intégrale fonction de la borne supérieure de g (à la fonction $t \mapsto t^2$ près), est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, et *a fortiori* dérivable sur $]0,1]$.

La dérivabilité de f en zéro — qui entraîne sa continuité en zéro — est acquise en effectuant le changement de variable $v = 1/u$ ci-dessous :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\int_0^t \sin(1/u)\,\mathrm{d}u - \int_0^0 \sin(1/u)\,\mathrm{d}u}{t-0}\right| = \frac{1}{t}\left|\int_0^t \sin\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right| = \frac{1}{t}\left|\int_{1/t}^{+\infty} \frac{\sin v}{v^2}\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{1}{t}\int_{1/t}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = t\,.$$

La limite de ce taux d'accroissement est donc nulle en zéro, et on en déduit que $f'(0)$ existe et vaut 1.

(b) Pour $t \in]0,1]$, on a $2t \leqslant f'(t) = 2t+1+\sin(1/t) \leqslant 2t+2$, le majorant et le minorant étant tous deux atteints pour une infinité de valeurs de t arbitrairement proches de zéro. Par suite, $f'([0,1]) =]0,2[$, qui est un intervalle borné mais pas un segment.

415. RMS 2009 993 Centrale PSI

Existence, puis expression comme somme d'une série, de $I = \int_0^1 \ln(x)\ln(1-x^2)/x^2\,\mathrm{d}x$.

Solution. — On note f la fonction $x \in]0,1[\mapsto \ln(x)\ln(1-x^2)/x^2$. On dispose des équivalents $f(x) \sim_0 -\ln(x)$ et $f(x) \sim_1 (x-1)\ln(1-x)$, cette dernière quantité étant de limite nulle en 1. On déduit l'intégrabilité de f sur $]0,1[$.

Du développement en série entière $\forall u \in]-1,1[,\ \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u^n/n$, on déduit que

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{x^{2n-2}\ln(x)}{n}}_{f_n(x)}\,.$$

Le calcul de l'exercice 726 page 470 montre que $\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = 1/[n(2n-1)^2]$, qui est le terme général d'une série convergente. Les hypothèses faibles étant clairement satisfaites, on peut appliquer le théorème de permutation série intégrale impropre, pour obtenir

$$I = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)^2}\,.$$

Remarque. — La décomposition en éléments simples $1/[X(2X-1)^2] = 1/X + 2/(2X-1)^2 - 2/(2X-1)$ montre que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n-1)^2} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)^2} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} = H_N + 2\left[T_{2N} - \frac{T_N}{4}\right] - 2\left[H_{2N} - \frac{H_N}{2}\right],\\ &= 2\left[H_N - H_{2N} + T_{2N} - \frac{T_N}{4}\right],\end{aligned}$$

où H_N (respectivement T_N) est la somme partielle de rang N de la série harmonique (respectivement de la série de terme général $1/n^2$). Comme $H_{2N} - H_N = \sum_{k=0}^{N} 1/(N+k) = (1/N)\sum_{k=0}^{N} 1/(1+\frac{k}{N})$ est une somme de Riemann qui tend vers $\int_0^1 \mathrm{d}x/(1+x) = \ln 2$ quand N tend vers $+\infty$, et comme T_N tend vers $\zeta(2) = \pi^2/6$, on en déduit que

$$I = -2\ln 2 + 2\zeta(2)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -2\ln 2 + \frac{\pi^2}{4}\,.$$

416. RMS 2010 845 Centrale PSI

Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de f. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D ?

(b) Trouver une équation différentielle satisfaite par f.

(c) Soit $g\colon x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) On pose $h(x,t) = e^{-tx}/(1+t^2)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x \geqslant 0$, la majoration $0 \leqslant h(x,t) \leqslant 1/(1+t^2)$ montre que $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x < 0$, la limite de $h(x,t)$ quand t tend vers $+\infty$ vaut $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit que

$$D = \mathbb{R}_+\,.$$

La continuité de h et la domination $\forall(x,t)\in D\times\mathbb{R}_+,\ |h(x,t)|\leqslant d(t):=1/(1+t^2)$ avec d intégrable sur $\mathbb{R}_+$ montrent que f est continue sur D.

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ avec, pour tout $(x,t)\in D\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-\frac{t}{1+t^2}e^{-tx}\,,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=\frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}\,.$$

Soit $a>0$. Les dominations suivantes, valables pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, montrent que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,+\infty[$, puisque φ_a et ψ_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et ceci, pour tout $a>0$:

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\varphi_a(t)=\frac{t}{1+t^2}e^{-ta}\,,$$
$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right|=\psi_a(t)=\frac{t^2}{1+t^2}e^{-ta}\,.$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En revanche, f n'est pas dérivable en zéro, comme le montre l'examen de son taux d'accroissement en zéro (on a effectué le changement de variable $u=tx$) :

$$-\tau(x)=\frac{f(0)-f(x)}{x-0}=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-tx}}{x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\theta(u)\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

où θ désigne la fonction continue définie par $\theta(0)=1$ et $\theta(u)=(1-e^{-u})/u$ pour tout $u>0$. On étudie cette fonction : $\theta'(u)=(u+1-e^{u})e^{-u}/u^2$ pour tout $u>0$, donc $\theta'<0$ sur $]0,+\infty[$ grâce à l'inégalité de convexité stricte $1+u<e^u$ pour tout $u\in\mathbb{R}^*$. Par suite, θ décroît strictement de $\theta(0)=1$ à $\lim_{+\infty}\theta=0$ sur $\mathbb{R}_+$. On note u_0 l'unique nombre strictement positif tel que $\theta(u_0)=1/2$. Alors

$$\forall x>0,\quad -\tau(x)\geqslant\int_0^{u_0}\theta(u)\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{u_0}\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left[\ln(u^2+x^2)\right]_{u=0}^{u_0}=\frac{1}{4}\left[\ln(u_0^2+x^2)-2\ln(x)\right]\,.$$

Quand x tend vers zéro par valeurs positives, le minorant tend vers $+\infty$, ce qui achève de montrer que f n'est pas dérivable en zéro (mais, compte tenu de la continuité de f, son graphe possède en zéro une demi-tangente parallèle à Oy).

(b) La formule de Leibniz montre que, pour tout $x>0$,

$$f''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-f(x)\,.$$

La fonction f est donc une des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y''+y=\frac{1}{x}$.

(c) On fixe $x>0$. Tout d'abord, on vérifie la convergence de l'intégrale qui définit $g(x)$ en effectuant une intégration par parties : pour tout $m>0$, on obtient

$$\int_0^m\frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-\cos t}{t+x}\right]_{t=0}^m-\int_0^m\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\cos m}{m+x}+\frac{1}{x}-\int_0^m\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, la somme des deux premiers termes tend vers $1/x$, et l'intégrale converge absolument, en vertu de la majoration $|\cos t/(t+x)^2|\leqslant 1/(t+x)^2$. Par suite, g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, avec de plus

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g(x)=\frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

De plus $g(0)=\int_0^{+\infty}(\sin t/t)\,dt$ est définie aussi : la fonction sinus cardinal est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $]0,1]$, et la convergence de $\int_1^{+\infty}(\sin t/t)\,dt$ se démontre grâce à l'intégration par parties utilisée ci-dessus.

Pour prouver l'égalité $g=f$, on va établir que g est solution de la même équation différentielle que f sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+,\ k(x,t)=\sin t/(t+x)$, de sorte que $g(x)=\int_0^{+\infty}k(x,t)\,\mathrm{d}t$. Soit $a>0$. La fonction k est de classe $\mathcal{C}^2$, et ses dérivées partielles satisfont l'hypothèse de domination suivante : pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right|=\left|-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right|\leqslant\alpha_a(t)=\frac{1}{(t+a)^2}\,,$$
$$\left|\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,t)\right|=\left|2\frac{\sin t}{(t+x)^3}\right|\leqslant\beta_a(t)=\frac{1}{(t+a)^3}\,.$$

Comme α_a et β_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$, et ceci pour tout $a > 0$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, g'' est donnée par la formule de Leibniz

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(t+x)^3}\,\mathrm{d}t\,.$$

Une intégration par parties (qu'il faudrait d'abord effectuer sur un segment $[0, m]$) donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) = \left[-\frac{\sin t}{(t+x)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

En comparant à l'expression de $g(x)$ trouvée plus haut, on constate que g est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = 1/x$.

Il en résulte que $g - f$ est solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$, donc qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) - f(x) = A\cos x + B\sin x$. Par ailleurs, les majorations

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,,$$

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2} = \frac{2}{x}\,,$$

montrent que $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = 0$. Il en résulte que $\lim_{+\infty}(g - f) = \lim_{+\infty}(A\cos + B\sin) = 0$. Si $(A, B) \neq (0, 0)$, la fonction $A\cos + B\sin$ est 2π-périodique et non identiquement nulle, donc elle ne peut avoir une limite nulle en $+\infty$. Il faut donc que $(A, B) = (0, 0)$, donc que $g = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Il suffit de montrer que g est continue en zéro : comme f l'est aussi, l'égalité $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ se prolongera par passage à la limite en zéro, et on obtiendra

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

La continuité de g en zéro ne peut pas être obtenue directement par une domination de $k(x,t) = \sin t/(t+x)$, puisque l'intégrale $g(x)$ est semi-convergente. On va plutôt majorer directement la distance $|g(x) - g(0)|$:

$$|g(x) - g(0)| = \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t+x} - \frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{x\sin t}{t(t+x)}\right|\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \left|\frac{x\sin t}{t(t+x)}\right|\mathrm{d}t\,.$$

Dans l'intégrale sur $]0, 1]$, on majore la valeur absolue du sinus cardinal par 1 : $|\sin t/t| \leqslant 1$. Dans l'intégrale sur $[1, +\infty[$, on majore seulement $|\sin t|$ par 1, puis $1/t(t+x)$ par $1/t^2$ On obtient :

$$|g(x) - g(0)| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{x}{t+x}\right|\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \left|\frac{x}{t^2}\right|\mathrm{d}t = x\left(\ln(1+x) - \ln x + 1\right)\,.$$

Comme $\lim_0(x\ln x) = 0$, on en déduit que $\lim_0 |g(x) - g(0)| = 0$, ce qui termine l'exercice.

417. **RMS 2010 846 Centrale PSI (calcul formel)**

Pour tout $b \in]0, 1[$, on pose $F(b) = \int_0^{+\infty} x^{b-1}/(1+x)$.

(a) Justifier l'existence de F. Conjecturer une expression de $F(b)$ à l'aide des fonctions usuelles.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique dont l'expression sur $[-\pi, \pi]$ est $\cos(bx)$. Énoncer le théorème de Dirichlet et le théorème de convergence normale.

(c) Montrer que $\int_0^1 x^{b-1}/(1+x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/(n+b)$ et $\int_0^{+\infty} x^{b-1}/(1+x)\,\mathrm{d}x = 1/b + 2b\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}/(n^2 - b^2)$. En déduire l'expression de $F(x)$.

SOLUTION. —

(a) L'équivalent entre fonctions positives $x^{b-1}/(1+x) \sim 1/x^{1-b}$ quand x tend vers zéro montre que $\int_0^1 x^{b-1}/(1+x)\,\mathrm{d}x$ converge, puisque $1 - b < 1$.

L'équivalent entre fonctions positives $x^{b-1}/(1+x) \sim 1/x^{2-b}$ quand x tend vers l'infini montre que $\int_1^{+\infty} x^{b-1}/(1+x)\,\mathrm{d}x$ converge, puisque $2 - b > 1$.

On conclut que $F(b)$ est bien définie pour tout $b \in]0, 1[$. La commande Maple `int(x**(b-1)/(1+x),x=0..infinity)` renvoie le résultat $\pi\csc(\pi b)$, et l'aide indique que csc désigne la fonction cosécante, c'est-à-dire l'inverse de la fonction sinus. En d'autres termes, $F(b) = \pi/\sin(\pi b)$.

(b) Comme f est paire, $b_n(f)=0$ pour tout n. Le coefficient $a_n(f)$ est calculé par Maple

$$a_n(f)=(-1)^n\frac{2b\sin(b\pi)}{\pi(b^2-n^2)}\ ,$$

en validant la ligne de commandes suivante :

```
f:=x->cos(b*x):assume(n,integer):2/Pi*int(cos(n*x)*f(x),x=0..Pi);
```

Le théorème de Dirichlet affirme que, si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f, c'est-à-dire vers la fonction d'expression $\tilde{f}(x)=[f(x^+)+f(x^-)]/2$. Le théorème de convergence normale affirme que, si f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f. Dans le cas étudié ici, les deux théorèmes conduisent au résultat suivant :

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad \cos(bx)=\frac{\sin(b\pi)}{b\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{b\sin(b\pi)}{b^2-n^2}\cos(nx)\ .$$

(c) Pour tout $x\in]0,1[$, le développement de la série géométrique montre que $x^{b-1}/(1+x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{b-1+k}$, et on pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{b-1+k}$. La suite de terme général $(-1)^kx^{b-1+k}$ est alternée, converge vers zéro, et le module du terme général décroît avec k, car $0<x$ et $b<1$. Les résultats liés au théorème spécial des séries alternées s'appliquent donc, et en particulier, $S_1(x)=1-x^b\leqslant S_n(x)\leqslant S_0(x)=1$. On en déduit l'hypothèse de domination

$$\forall x\in]0,1[\,,\quad |S_n(x)|\leqslant 1\ .$$

Comme la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0,1[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$, et on obtient

$$\int_0^1\frac{x^{b-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{+\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{+\infty}\int_0^1S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^n\frac{x^{k+b}}{k+b}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+b}\ .$$

Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif $y\in]0,1[\mapsto x=\frac{1}{y}\in]1,+\infty[$ montre que

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{y^{-b}}{y+1}\,\mathrm{d}y\ .$$

Une démonstration analogue à celle que l'on vient de faire, et le changement d'indice final $n=k+1$, montrent que $\int_0^1\frac{y^{-b}}{y+1}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^ky^{-b+k}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1y^{-b+k}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-b+k+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-b}$. En additionnant les deux résultats, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+b}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-b}=\frac{1}{b}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n-b}-\frac{1}{n+b}\right]=\frac{1}{b}+2b\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-b^2}\cdot$$

En substituant x par zéro dans l'expression de $\cos(bx)$ obtenue à la question (b), on obtient

$$1=\frac{\sin(b\pi)}{b\pi}+\frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(b\pi)}{n^2-b^2}\ ,$$

d'où l'on tire, comme le prévoyait la question (a) :

$$F(b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(b\pi)}\cdot$$

Une vérification supplémentaire est donnée par la ligne de commandes suivante :

```
1/b+2*b*(sum((-1)**(n-1)/(n**2-b**2),n=1..infinity));combine(simplify(%),trig);
```

418. **RMS 2010 847 Centrale PSI (calcul formel)**

On rappelle que $\Gamma\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x>0$ vérifie : $\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

(a) Montrer que l'équation $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$ admet une solution développable en série entière dont on donnera le domaine de définition et dont on calculera les coefficients.

(b) On pose $f\colon x\mapsto\int_0^1\frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro et calculer ses coefficients.

(c) Montrer que f vérifie l'équation différentielle du (a).

SOLUTION. —

(a) *Analyse.* Si la série entière de somme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et de rayon de convergence $R>0$ est solution de l'équation différentielle proposée, alors le théorème de dérivation terme à terme montre que

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}[n(n-1)a_n+na_n-a_n+a_{n-2}]x^n-a_0=\sum_{n=2}^{+\infty}[(n+1)(n-1)a_n+a_{n-2}]x^n-a_0=0\,.$$

L'unicité du développement en série entière montre que $a_0=0$ et

$$\forall n\geqslant 2,\quad a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+1)(n-1)}\,.$$

On en déduit immédiatement que $a_{2p}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, et que

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_{2p+1}=(-1)^p\frac{1}{(2p+2)(2p)^2\times\cdots\times 4^2\times 2}a_1=\frac{(-1)^p}{p+1}\frac{a_1}{2^{2p}(p!)^2}\,.$$

Synthèse. Pour tout $x\neq 0$, on pose $u_p=\frac{(-1)^p}{p+1}\frac{x^{2p+1}}{2^{2p}(p!)^2}$. Alors

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|=\frac{x^2}{4(p+2)(p+1)}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

La règle de d'Alembert montre alors que $\sum u_p$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, et on en déduit que le rayon de convergence de $y(x)$ vaut $+\infty$:

$$\forall a_1\in\mathbb{R},\quad y\colon x\in\mathbb{R}\mapsto a_1\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}\frac{x^{2p+1}}{2^{2p}(p!)^2}\quad\text{est solution de}\quad x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0\,.$$

(b) Il suffit de prouver que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ pour établir qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir aussi la remarque finale pour une preuve directe). Pour cela, on pose $g(x,t)=\frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Comme $g(x,t)\sim\frac{\sin x}{2\sqrt{1-t}}$ quand t tend vers 1 lorsque $\sin x\neq 0$, l'intégrale $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien convergente (si $x=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la limite de $g(x,t)$ quand t tend vers 1 est nulle donc $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est là encore convergente). Par suite, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Le développement en série entière du sinus montre que

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\,]-1,1[,\quad g(x,t)=\sum_{p=0}^{+\infty}g_p(x,t)\quad\text{avec}\quad g_p(x,t)=\frac{(-1)^px^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{t^{2p+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

On pose ensuite $I_p=\int_0^1\frac{t^{2p}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, et on calcule cette intégrale convergente en établissant une relation de récurrence, grâce à une intégration par parties (on la légitimerait en intégrant sur $[0,a]$, puis en faisant tendre a vers 1 par valeurs inférieures) :

$$\begin{aligned}I_{p+1}&=\int_0^1\frac{t^{2p+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{2p}(t^2-1+1)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^{2p}\sqrt{1-t^2}+I_p\,,\\&=\left[\frac{t^{2p+1}}{2p+1}\sqrt{1-t^2}\right]_0^1-\frac{1}{2p+1}\int_0^1\frac{t^{2p+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t+I_p=-\frac{I_{p+1}}{2p+1}+I_p\,.\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{p+1}=\frac{2p+1}{2p+2}I_p$ puis, comme $I_0=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=[\arcsin t]_0^1=\frac{\pi}{2}$, que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{p+1}=\frac{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}{(2p+2)\times(2p)\times\cdots\times 2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p+1)!}{(p+1)2^{2p+2}(p!)^2}\pi\,.$$

Il en résulte que $\int_0^1|g_p(x,t)|\,\mathrm{d}t=\frac{\pi|x|^{2p+1}}{(p+1)2^{2p+2}(p!)^2}\leqslant c\frac{y^p}{p!}$, où l'on a posé $c=\pi|x|/4$ et $y=x^2$. La convergence de la série exponentielle $\sum_{p\geqslant 0}\frac{y^p}{p!}$ sur $\mathbb{R}$ montre alors que la série de terme général $\int_0^1|g_p(x,t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Les hypothèses faibles étant satisfaites, on peut appliquer le théorème de permutation séries-intégrales impropres, et on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^1\sum_{p=0}^{+\infty}g_p(x,t)\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 g_p(x,t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}\frac{x^{2p+1}}{2^{2p}(p!)^2}\,.$$

(c) D'après la question précédente, la fonction f possède la forme des solutions trouvées à la question (a) avec $a_1 = \pi/4$.

REMARQUE. — On peut résoudre cette question directement, en calculant les dérivées de f grâce à la formule de Leibniz. En effet, g est de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport au couple $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1[$, avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^2\cos(xt)/\sqrt{1-t^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -t^3\sin(xt)/\sqrt{1-t^2}$. Ces deux dérivées partielles sont dominées sur $\mathbb{R} \times [0,1[$ par la même fonction intégrable $\varphi\colon t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$. La formule de Leibniz conduit alors aux égalités suivantes, valables pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad f'(x) = \int_0^1 \frac{t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t, \quad f''(x) = -\int_0^1 \frac{t^3\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\begin{aligned}
x^2f''(x) + xf'(x) + (x^2-1)f(x) &= \int_0^1 \left(-x^2t^2\sin(xt) + xt\cos(xt) + (x^2-1)\sin(xt)\right)\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,,\\
&= \int_0^1 \left(x^2\sin(xt)(1-t^2) + xt\cos(xt) - \sin(xt)\right)\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\,,\\
&= \int_0^1 x^2t\sin(xt)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \Big[-(xt\cos(xt)-\sin(xt))\sqrt{1-t^2}\Big]_0^1\\
&\qquad + \int_0^1 (x\cos(xt) - x^2t\sin(xt) - x\cos(xt))\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,,\\
&= \int_0^1 x^2t\sin(xt)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x^2t\sin(xt)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,,\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Ces calculs donnent par ailleurs une preuve directe de la classe de f [voir la question (b)]. En effet, on établit aisément par récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\forall(p,x,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}\times[0,1[$, $\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = t^{p+1}\sin(xt+p\pi/2)/\sqrt{1-t^2}$. Comme toutes ces dérivées partielles sont dominées par la fonction φ introduite ci-dessus, le théorème de Leibniz permet de conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall(p,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $f^{(p)}(x) = \int_0^1 t^{p+1}\sin(xt+p\pi/2)/\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. Ce raisonnement fournit aussi le développement en série entière de f, à condition de calculer $f^{(p)}(0)$ en introduisant les intégrales I_p comme à la question (b), puis en montrant que la série de Taylor de f converge bien vers f, au moyen de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

419. **RMS 2010 848 Centrale PSI (calcul formel)**

Soient $\alpha \in]0,2[$ et $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt)/(\operatorname{sh} t)^\alpha\,\mathrm{d}t$.

(a) Donner les domaines de définition et de continuité de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Montrer que F est développable en série entière. Calculer les coefficients de cette série à l'aide du logiciel. Donner le rayon de convergence et préciser l'intervalle sur lequel elle représente F.

(c) Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

SOLUTION. — à terminer ? ? On note g la fonction $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \sin(xt)/(\operatorname{sh} t)^\alpha$.

(a) Comme $g(0,t) = 0$, l'intégrale $F(0)$ converge. Comme g est impaire par rapport à x, il suffit d'étudier le cas où $x > 0$. L'équivalent entre fonctions positives $g(x,t) \sim x/t^{\alpha-1}$ quand t tend vers zéro montre que $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, ce qui est le cas. La majoration $|g(x,t)| \leqslant 1/(\operatorname{sh} t)^\alpha \sim 2^{-\alpha}e^{-\alpha t}$ quand t tend vers l'infini prouve la convergence de $\int_1^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ puisque $\alpha > 0$. Finalement,

$$D_F = \mathbb{R}\,.$$

On fixe $a > 0$. On note sinc la fonction sinus cardinal définie par $\operatorname{sinc}(0) = 1$ et $\operatorname{sinc}(u) = (\sin u)/u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^*$. On sait que $|\operatorname{sinc}| \leqslant 1$, ce qui permet d'écrire la domination

$$\forall(x,t) \in [-a,a]\times\mathrm{R}_+^*, \quad |g(x,t)| = \left|\operatorname{sinc}(xt)\frac{xt}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\right| \leqslant \varphi_a(t) := a\frac{t}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,.$$

La fonction φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir les arguments donnés pour le calcul de D_F). Comme g est continue, il en résulte que F est continue sur $[-a,a]$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que F est continue sur $D_F = \mathbb{R}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, avec $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = t^n\frac{\sin(xt+n\pi/2)}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}$. On en déduit la domination

$$\forall(n,x,t) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \psi_n(t) := \frac{t^n}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,.$$

L'équivalent entre fonctions positives $\psi_n(t) \sim 1/t^{\alpha-n}$ quand t tend vers zéro, avec $\alpha - n < 2 - 1 = 1$ montre que ψ_n est intégrable sur $]0,1]$. L'équivalent $t^2\psi_n(t) \sim 2^{-\alpha}t^{n+2}e^{-\alpha t}$ quand t tend vers l'infini montre que $\lim_{+\infty} t^2\psi_n(t) = 0$, donc que ψ_n est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement, ψ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall(n,x) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R}, \quad F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^n\frac{\sin(xt+n\pi/2)}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) On sait que

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!(\operatorname{sh} t)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x,t)$$

avec des notations évidentes pour les fonctions g_n. On montre comme pour la fonction ψ_n étudiée plus haut que $t \mapsto g_n(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On prouve maintenant que la série de terme général $\int_0^{+\infty} |g_n(x,t)|\,\mathrm{d}t$ converge pour pouvoir permuter série et intégrale. Pour cela, voici trois résultats préliminaires.

– Si l'on note h_α la fonction $t \mapsto t/(\operatorname{sh} t)^\alpha$, on constate que h_α est intégrable sur $]0,1]$, et on pose $H_\alpha = \int_0^1 h_\alpha$. On en déduit que $\int_0^1 h_\alpha(t)t^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = H_\alpha$.
– Pour tout $t \geqslant 1$, on a $\operatorname{sh} t \geqslant e^t/4$: en effet, ceci équivaut à $e^t \geqslant 2e^{-t}$, ou encore à $e^{2t} \geqslant 2$, ce qui est clairement vrai pour $t \geqslant 1$. On en déduit que $1/(\operatorname{sh} t)^\alpha \leqslant 4^\alpha e^{-\alpha t}$ pour tout $t \geqslant 1$, puisque $\alpha > 0$.
– On montre aisément par récurrence sur l'entier naturel p que $\int_0^{+\infty} t^p e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = p!/\alpha^{p+1}$.

On peut alors majorer $\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ comme suit :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\int_0^1 h_\alpha(t)t^{2n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(H_\alpha + 4^\alpha \int_1^{+\infty} t^{2n+1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right), \\ &\leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(H_\alpha + 4^\alpha \int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right) = H_\alpha \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{4^\alpha}{\alpha}\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{2n+1}.\end{aligned}$$

La série de terme général $|x|^{2n+1}/(2n+1)!$ converge pour tout x, et celle, géométrique, de terme général $(|x|/\alpha)^{2n+1}$, converge si $|x| < \alpha$. Par conséquent, F est développable en série entière autour de zéro avec un rayon de convergence au moins égal à α, et

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Je n'ai pas réussi à faire calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2n+1}/(\operatorname{sh} t)^\alpha$ par Maple. Même si $\alpha = 1$, par exemple, la seule intégrale évaluée de manière lisible est $\int_0^{+\infty} t/\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$, qui vaut $\pi^2/4$. Dès que $n \geqslant 1$, les résultats sont donnés à l'aide de limites faisant intervenir des fonctions polylogarithmes. à élucider ? ?

On peut néanmoins démontrer que le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est α, en majorant cette fois $\operatorname{sh} t$ par $e^t/2$: $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh} t \leqslant e^t/2$. Alors $1/(\operatorname{sh} t)^\alpha \geqslant 2^\alpha e^{-\alpha t}$, et on en déduit que le terme général de la série entière de somme F vérifie

$$\left|(-1)^n \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(\operatorname{sh} t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \geqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(2^\alpha \int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{2^\alpha}{\alpha}\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{2n+1}.$$

Par conséquent, si $|x| \geqslant \alpha$, ce terme général ne tend pas vers zéro quand n tend vers l'infini, ce qui prouve que le rayon de convergence est bien α, et que la série entière diverge en $\pm\alpha$, donc que F coïncide avec la somme de sa série entière sur $]-\alpha,\alpha[$ exactement.

(c) On va montrer que $\lim_{+\infty} F = 0$? ? Si $\alpha < 1$, c'est le lemme de Lebesgue généralisé aux fonctions intégrables sur $]0,+\infty[$, en l'occurrence la fonction $t \mapsto 1/(\operatorname{sh} t)^\alpha$. Si $1 \leqslant \alpha < 2$, à terminer ? ?

Après avoir utilisé la relation de Chasles, on intègre par parties l'intégrale sur $[1,+\infty[$ en dérivant $1/(\operatorname{sh} t)^\alpha$. Après avoir effectué le calcul sur un intervalle $[1,m]$ puis après avoir fait tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t + \left[-\frac{\cos(xt)}{x(\operatorname{sh} t)^\alpha}\right]_1^{+\infty} - \frac{\alpha}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t, \\ &= \int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\left[\frac{\cos x}{(\operatorname{sh} 1)^\alpha} - \alpha\int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

Le quotient $\frac{\cos x}{(\operatorname{sh} 1)^\alpha}$ étant borné, et l'intégrale $|\int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t|$ étant majorée par le nombre $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ indépendant de x, le terme $\frac{1}{x}[\cdots]$ ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

420. **RMS 2010 849 Centrale PSI**

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \ln x/(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \ln x/(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} 1/(2n+1)^2$.

Solution. — Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f(x) = \ln x/(x^2-1)$.

(a) L'équivalent entre fonctions positives $f(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers zéro montre que f est intégrable sur $]0,1/2]$. Par ailleurs, $\lim_1 f = 1/2$ car $\ln x \sim x-1$ quand x tend vers 1 : la fonction f est prolongeable par continuité en 1, donc elle est intégrable sur $[1/2,1[$. Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$.

(b) On sait que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\ln x$. On pose $f_n(x) = x^{2n}\ln x$ pour tout $x \in]0,1[$. Comme $|f_n| \leqslant |\ln|$ sur $]0,1[$ et comme ln est intégrable sur $]0,1[$, on en déduit que f_n est intégrable. On vérifie ensuite que la série de terme général $\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge pour pouvoir appliquer le théorème de permutation série intégrale.
Une intégration par parties (qu'il faudrait écrire sur $[\varepsilon,1]$ avec $\varepsilon>0$, puis passer à la limite quand ε tend vers zéro), donne

$$\int_0^1 |x^{2n}\ln x|\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 |x^{2n}\ln x|\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

La série de terme général $1/(2n+1)^2$ étant convergente, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

421. **RMS 2010 850 Centrale PSI**
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^2(nx)/(4n^2-1)$.

Solution. — On calcule les coefficients de Fourier de la fonction f d'expression $|\sin x|$. Il s'agit d'une fonction 2π-périodique et paire, donc $b_n(f)=0$ pour tout n, et

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\,,\\
\forall n\geqslant 1,\quad a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin([n+1]x)-\sin([n-1]x))\,\mathrm{d}x\,,\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos([n+1]x)}{n+1}+\frac{\cos([n-1]x)}{n-1}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right]\,,\\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2p+1}-\frac{2}{2p-1}\right] = -\frac{4}{\pi(4p^2-1)} & \text{si } n=2p \text{ est pair,}\\ 0 & \text{si } n=2p+1 \text{ est impair.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de convergence normale s'applique et donne

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = |\sin x| = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)] = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{4p^2-1}\,.$$

On écrit ensuite que $\cos(2px) = 1-2\sin^2(px)$ pour obtenir

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin x| = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}+\frac{8}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(px)}{4p^2-1}\,.$$

En substituant x par zéro, on obtient $0 = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}$, puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}\,.$$

422. **RMS 2010 851 Centrale PSI (calcul formel)**
Soient $\alpha\in]0,\pi[$ et $g_\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction π-périodique définie par $\forall t\in[0,\alpha], g_\alpha(t)=t$ et $\forall t\in]\alpha,\pi],\ g_\alpha(t) = \frac{\alpha(\pi-t)}{\pi-\alpha}$.

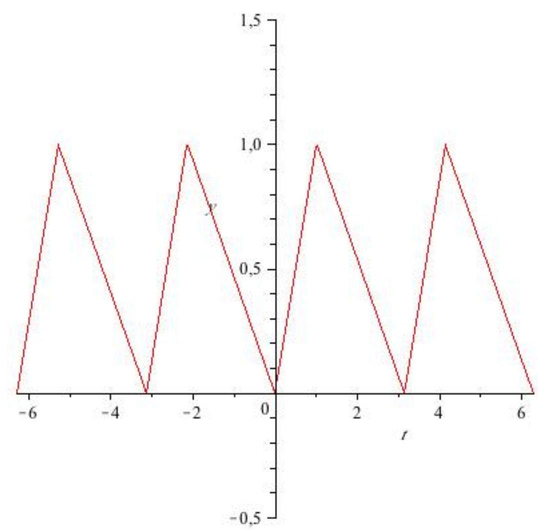
(a) Étudier la régularité de g_α. Tracer le graphe de g_α sur $[-2\pi,2\pi]$.
(b) Déterminer le développement en série de Fourier de g_α. Que dire de la convergence de la série de Fourier ?
(c) Tracer les graphes de quelques sommes partielles de la série de Fourier de g_1.

Solution. —

(a) Comme $\lim_{0^+} g_\alpha = \lim_{\pi^-} g_\alpha = 0$ et $\lim_{\alpha^-} g_\alpha = \lim_{\alpha^+} g_\alpha = \alpha$, la fonction g_α est continue sur $\mathbb{R}$. comme elle est affine sur les intervalles ouverts $]0, \alpha[$ et $]\alpha, \pi[$, elle est affine par morceaux sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On choisit $\alpha = 1$ pour le tracé. On pourrait profiter de la π-périodicité de g_α, en définissant la restriction f_α de g_α à $[0, \pi]$, puis en appliquant la relation $\forall t \in \mathbb{R},\ g_\alpha(t) = f_\alpha(t - \lfloor t/\pi \rfloor \pi)$. Malheureusement, Maple refuse de tracer correctement une fonction g_α définie de cette manière (à élucider ? ?). J'ai donc choisi, pour le tracé sur $[-2\pi, 2\pi]$, une définition manuelle de $g_\alpha(t)$, comme suit (α est noté a) :

```
with(plots):
f:=(a,t)->a*(Pi-t)/(Pi-a);
g:=piecewise(t<=-2*Pi+a,t+2*Pi,t<-Pi,f(a,t+2*Pi),t<=-Pi+a,t+Pi,t<0,f(a,t+Pi),t<=a,t,t<Pi,f(a,t),
t<=Pi+a,t-Pi,t<2*Pi,f(a,t-Pi));
a:=1;
plot(g,t=-2*Pi..2*Pi,y=-0.5..1.5);
```



(b) Dans cette question, on commence par redonner à α une valeur littérale par `a:='a'`. On considère ensuite g_α comme une fonction π-périodique, donc on applique les formules $a_n(g_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_\alpha(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(g_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_\alpha(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que le calcul soit possible, il faut, d'une part, préciser que $\alpha \in]0, \pi[$, ce qui se fait au moyen de la commande `assume(0<a and a<Pi)`, et d'autre part, que n est entier, par `assume(n,integer)`. On valide ensuite

```
2/Pi*int(g*cos(2*n*t),t=0..Pi);factor(combine(%,trig));
2/Pi*int(g*sin(2*n*t),t=0..Pi);factor(combine(%,trig));
```

Les commandes de factorisation et, surtout, de linéarisation (`combine`) sont indispensables pour présenter le résultat de façon lisible. En n'oubliant pas de calculer $a_0(g_\alpha)$ à part, au moyen de `simplify(2/Pi*int(g,t=0..Pi))`, on obtient :

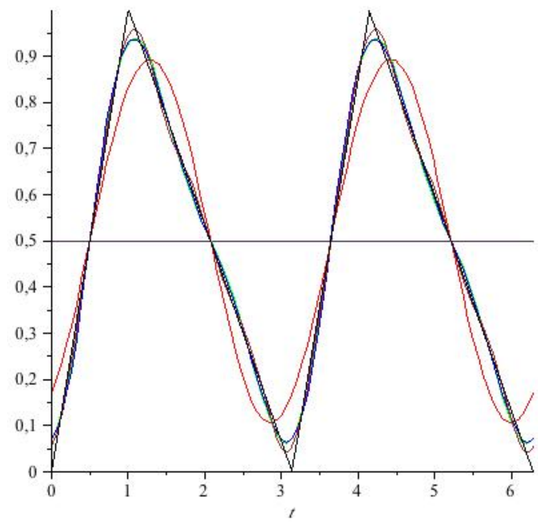
$$a_0(g_\alpha) = \alpha\,,$$
$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n(g_\alpha) = \frac{\cos(2\alpha n) - 1}{2n^2(\pi - \alpha)}\,,$$
$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n(g_\alpha) = \frac{\sin(2\alpha n)}{2n^2(\pi - \alpha)}\,.$$

Comme g_α est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers g_α.

(c) On donne à nouveau à α la valeur 1, et on définit la somme partielle les coefficients ainsi que la somme partielle d'ordre n par

```
an:=n->2/Pi*int(g*cos(2*n*t),t=0..Pi);
bn:=n->2/Pi*int(g*sin(2*n*t),t=0..Pi);
S:=(n,x)->a(0)/2+add(an(k)*cos(2*k*x)+bn(k)*sin(2*k*x),k=1..n);
```

La commande `plot([seq(S(n,t),n=0..4),g],t=0..2*Pi,color=[yellow,red,green,blue,brown,black])` permet de visualiser ce tracé. On note que les graphes de S_2 et S_3, en vert et bleu, sont presque confondus. Ce phénomène est dû au fait que l'harmonique d'ordre 3 de g_1 possède une petite norme uniforme, car $\cos(6) - 1$ et $\sin(6)$ — qui sont les numérateurs de $a_3(g_1)$ et $b_3(g_1)$ — sont proches de zéro, puisque 6 est proche de 2π.



423. **RMS 2010 852 Centrale PSI**

(a) Soit $Q = X^2 + pX + 1$ avec $p \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$. On note r_1 et r_2 les racines de Q. Montrer qu'il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, r_2\}$, $\frac{1}{Q(z)} = \frac{c_1}{z-r_1} + \frac{c_2}{z-r_2}$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $t \mapsto 1/(\operatorname{ch} a + \cos t)$ est développable en série de Fourier. *Ind.* Poser $z = e^{it}$.

(c) En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)/(\operatorname{ch} a + \cos t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) Il s'agit d'appliquer le théorème de décomposition en éléments simples à la fraction rationnelle $1/Q$, qui est de degré $-2 < 0$ (la partie entière est donc nulle), et qui possède deux pôles simples (puisque le discriminant $\Delta = p^2 - 4$ de Q est non nul). Les valeurs de c_1 ou c_2 sont obtenues par la technique de multiplication par $X - r_1$ ou $X - r_2$, suivie de la substitution de X par r_1 ou r_2. On obtient

$$c_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} = -c_2\,.$$

(b) Dans cette question et la suivante, on supposera de plus que $a > 0$, ce qui ne change rien puisque f est invariant par le changement de a en $-a$. Comme $\operatorname{ch} a > 1$, la fonction $f\colon t \mapsto 1/(\operatorname{ch} a + \cos t)$ est définie sur $\mathbb{R}$, et y est de classe $\mathcal{C}^1$. Sa série de Fourier converge donc normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ pour tout $\mathbb{R}$ et $a_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)/(\operatorname{ch} a + \cos t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale dont la valeur est demandée à la question suivante. On va obtenir le développement en série de Fourier de f en suivant l'indication. Les formules d'Euler donnent

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} a + (z + 1/z)/2} = \frac{2z}{z^2 + (2\operatorname{ch} a)z + 1} = \frac{2z}{Q(z)}\,,$$

où Q est le polynôme $X^2 + (2\operatorname{ch} a)X + 1$. Son discriminant réduit vaut $\operatorname{ch}^2 a - 1 = \operatorname{sh}^2 a$, et ses racines sont

$$r_1 = -\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a = -e^{-a}\,,$$
$$r_2 = -\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a = -e^{a}\,.$$

Les coefficients de la question (a) valent $c_1 = 1/2\operatorname{sh} a = -c_2$. On en déduit que

$$f(t) = \frac{2z}{Q(z)} = \frac{z}{\operatorname{sh} a}\left(\frac{1}{z + e^{-a}} - \frac{1}{z + e^{a}}\right).$$

Avec l'hypothèse $a > 0$, on a $e^a > 1$ et $0 < e^{-a} < 1$. On effectue donc les transformations suivantes avant de développer les séries géométriques (on rappelle que $z = e^{it}$ est de module 1) :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{z}{\operatorname{sh} a}\left(\frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}e^{-a}} - \frac{e^{-a}}{1 + e^{-a}z}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{-n} e^{-na} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{n+1} e^{-(n+1)a}\right), \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n z^{-n} e^{-na} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n z^{n} e^{-na}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}[z^n + z^{-n}]\right), \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\cos(nt)\right). \end{aligned}$$

(c) L'unicité des coefficients de Fourier pour les fonctions continues montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\operatorname{ch} a + \cos t}\,\mathrm{d}t = 2(-1)^n \frac{e^{-na}}{\operatorname{sh} a}\,\cdot$$

424. **RMS 2010 853 Centrale PSI (calcul formel)**
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodiques. Si $f \in E$, on pose $\Phi(f)\colon x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - e^{-2\pi})^{-1} \int_0^{2\pi} f(x+t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\Phi(f)$ est l'unique solution 2π-périodique de l'équation différentielle $y' - y + f = 0$.
(b) On suppose, dans cette question, que $f\colon x \mapsto |\sin x|$. Calculer $\Phi(f)$ et tracer son graphe sur $[0,\pi]$.
(c) Exprimer les coefficients de Fourier de $\Phi(f)$ en fonction de ceux de f.
(d) On définit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $f_0\colon x \mapsto |\sin x|$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} = \Phi(f_n)$. Montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,\pi]$ vers la fonction constante $x \mapsto 2/\pi$.
(e) Montrer que Φ est injective et déterminer son image.

Solution. —

(a) La 2π-périodicité de $\Phi(f)$ résulte clairement de celle de f. On effectue ensuite le changement de variable $u = t + x$ dans $\Phi(f)(x)$, où l'on note α la constante $1/(1-e^{-2\pi})$:

$$\Phi(f)(x) = \alpha \int_x^{x+2\pi} f(u)e^{-u+x}\,\mathrm{d}u = \alpha e^x \int_x^{x+2\pi} f(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Comme f est continue, $u \mapsto f(u)e^{-u}$ l'est aussi, et l'intégrale de droite ci-dessus est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x. Par suite, $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
[\Phi(f)]'(x) &= \alpha e^x \left[\int_x^{x+2\pi} f(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u + f(x+2\pi)e^{-(x+2\pi)} - f(x)e^{-x}\right],\\
&= \alpha e^x \left[\int_x^{x+2\pi} f(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u + f(x)e^{-x}(e^{-2\pi}-1)\right] = [\Phi(f)](x) - f(x)\,.
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que Φ est solution de l'équation différentielle $y' - y + f = 0$. Il reste à montrer l'unicité. Si g est une solution 2π-périodique de cette équation différentielle, alors $\Phi(f) - g$ est 2π-périodique et est solution de l'équation homogène $y' - y = 0$. Il existe donc une constante réelle k telle que $\Phi(f) - g = k\exp$. Or la seule fonction proportionnelle à l'exponentielle et qui soit 2π-périodique est la fonction nulle, donc $g = \Phi(f)$.

On peut résoudre cette question à l'aide de Maple, en suivant la démarche décrite ci-dessus. Il faut pour cela charger la bibliothèque `student` et valider les commandes suivantes

```
Phi:=(f,x)-> 1/(1- exp(-2*Pi))*int(f(x+t)*exp(-t),t=0..2*Pi);
with(student):
Phi2:=(f,x)->changevar(x+t=u,Phi(f,x),u);simplify(diff(Phi2(f,x),x)-Phi2(f,x)+f(x));
```

On voit alors apparaître à l'écran le résultat

$$\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}[f(x+2\pi) - f(x)]\,.$$

Le caractère 2π-périodique de f achève de prouver que $\Phi(f)$ est solution de $y' - y + f = 0$.

(b) Après avoir validé `f:=x->abs(sin(x))`, on tente d'aider Maple pour le calcul en précisant `assume(0<x and x<Pi)`, ou bien `assume(Pi<=x and x<2*Pi)`, et en demandant ensuite `Phi2`. Le résultat est peu probant, car il fait intervenir des nombres entiers non calculés de la forme $\lfloor (x+2\pi)/\pi \rfloor$ ou $\lceil x/\pi \rceil$. Faute de mieux, pour $x \in [0,\pi]$, on valide

```
a:=(1- exp(-2*Pi))**(-1):
r:=a*exp(x)*(int(sin(u)*exp(-u),u=x..Pi)+int(-sin(u)*exp(-u),u=Pi..2*Pi)
+int(sin(u)*exp(-u),u=2*Pi..2*Pi+x));
r1:=simplify(expand(normal(r)));
```

On obtient le résultat suivant, que Maple n'est pas capable de simplifier, alors qu'on voit bien que c'est possible (à élucider ? ?)

$$\frac{\cos(x)e^{2\pi} + \sin(x)e^{2\pi} + 2e^{\pi+x} + 2e^x - \cos(x) - \sin(x)}{2(e^{2\pi}-1)}$$

On constate que cette expression vaut

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \Phi(|\sin|)(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(e^{2\pi}-1) + 2e^x(1+e^\pi)}{2(e^{2\pi}-1)} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{e^x}{e^\pi - 1}\,.$$

Si $x \in [\pi, 2\pi]$, on valide

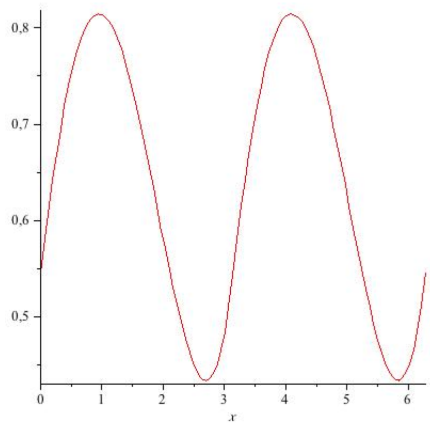
```
s:=a*exp(x)*(int(-sin(u)*exp(-u),u=x..2*Pi)+int(sin(u)*exp(-u),u=2*Pi..3*Pi)
+int(-sin(u)*exp(-u),u=3*Pi..2*Pi+x)):
s1:=simplify(expand(normal(s)));
```

On obtient $(\cos x + \sin x + 2e^x + 2e^{x-\pi} - e^{2\pi}\cos x - e^{2\pi}\sin x)/2(e^{2\pi}-1)$, qui se simplifie en

$$\forall x \in [\pi, 2\pi], \quad \Phi(|\sin|)(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(1-e^{2\pi}) + 2e^{x-\pi}(1+e^\pi)}{2(e^{2\pi}-1)} = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{e^{x-\pi}}{e^\pi - 1}\,.$$

En validant `simplify(diff(r1,x)-r1+sin(x));simplify(diff(s1,x)-s1- sin(x));` et en obtenant zéro dans les deux cas, on vérifie que les calculs sont corrects. Le graphe de $\Phi(|\sin|)$ sur $[0, 2\pi]$ est obtenu par

```
plot(piecewise(x<Pi,r1,x<2*Pi,s1),x=0..2*Pi);
```



(c) Comme $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ses coefficients de Fourier vérifient les relations $c_n([\Phi(f)]') = inc_n(\Phi(f))$. On déduit alors des relations $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i[c_n - c_{-n}]$ et de l'équation différentielle de la question (a) que $inc_n(\Phi(f)) - c_n(\Phi(f)) + c_n(f) = 0$, donc que

$$c_n(\Phi(f)) = \frac{c_n(f)}{1-in}\,,$$
$$a_n(\Phi(f)) = \frac{c_n(f)}{1-in} + \frac{c_{-n}(f)}{1+in} = \frac{c_n(f) + c_{-n}(f) + in[c_n(f) - c_{-n}(f)]}{1+n^2} = \frac{a_n(f) + nb_n(f)}{1+n^2}\,,$$
$$b_n(\Phi(f)) = i\left[\frac{c_n(f)}{1-in} - \frac{c_{-n}(f)}{1+in}\right] = i\left[\frac{c_n(f) - c_{-n}(f) + in[c_n(f) + c_{-n}(f)]}{1+n^2}\right] = \frac{b_n(f) - na_n(f)}{1+n^2}\,.$$

(d) Dans cette question, on note plutôt k l'indice de la suite de fonctions, définie donc par $f_0 = f$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_{k+1} = \Phi(f_k)$, et $n \in \mathbb{Z}$ l'indice des coefficients de Fourier exponentiels. Comme toutes les f_k pour $k \geqslant 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, ces fonctions sont sommes de leur série de Fourier, au sens de la convergence simple comme au sens de la convergence uniforme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = c_0(f_k) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_n(f_k)e^{inx} + c_{-n}(f_k)e^{-inx}\right]\,.$$

Pour $n \geqslant 1$ fixé, la première relation de la question (c) montre que $|c_n(f_{k+1})| = |c_n(f_k)|/\sqrt{1+n^2}$. Si l'on pose $r_n = 1/\sqrt{1+n^2}$, la suite des modules $(|c_n(f_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $r_n \in]0,1[$. Par ailleurs, $c_0(f_k) = c_0(f)$ ne dépend pas de k.

De façon plus précise, comme $0 < r_n^k \leqslant 1/n^k$ est le terme général d'une série convergente, on a

$$\|f_k - c_0(f_k)\|_\infty = \|f_k - c_0(f)\|_\infty \leqslant |c_1(f_k)| + |c_{-1}(f_k)| + \sum_{n=2}^{+\infty}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|) \leqslant \frac{2}{r_1^k} + 2\sum_{2=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\,.$$

Une comparaison série intégrale donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\leqslant\int_1^{+\infty}\mathrm{d}t/t^k=1/(k+1)$. Comme $c_0(f)=(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=(1/\pi)\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2/\pi$, on en déduit que

$$\left\|f_k-\frac{2}{\pi}\right\|_\infty\leqslant\frac{2}{r_1^k}+\frac{2}{k+1}\,,$$

ce qui montre que la suite (f_k) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $x\mapsto 2/\pi$.

(e) L'opérateur Φ est linéaire. On détermine son noyau, si $\Phi(f)=0$, alors $c_n(\Phi(f))=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, donc $c_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et on sait que l'application $f\in E\mapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective, donc $f=0$. Finalement, Φ est injective.

La question (a) montre que l'image de Φ est incluse dans l'espace vectoriel $F=\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodiques. Réciproquement, si $g\in F$, on cherche une fonction $f\in E$ telle que $\Phi(f)=g$ par analyse et synthèse. Si f existe, $[\Phi(f)]'=g'=\Phi(f)-f=g-f$, donc $f=g-g'$ nécessairement.
Réciproquement, comme $g-g'\in E$, on peut calculer $\Phi(g-g')=\Phi(g)-\Phi(g')$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de dérivation de Leibniz sur un segment affirme que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad [\Phi(g)]'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\int_0^{2\pi}g(x+t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)=\alpha\int_0^{2\pi}g'(x+t)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\Phi(g')(x)\,.$$

Alors $\Phi(f)=\Phi(g-g')=\Phi(g)-[\Phi(g)]'=g$, d'après la question (a), ce qui achève de prouver que

$$\mathrm{Im}(\Phi)=F=\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})\,.$$

425. **RMS 2009 995 Centrale PSI**

Résoudre $y''+y=|t|$.

Solution. — On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on résout l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$, puis on effectue un recollement des solutions.
Comme $t\mapsto t$ est une solution particulière évidente sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad y_+(t)=a\cos t+b\sin t+t\,.$$

De même, les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions de la forme

$$\exists(c,d)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall t\in\mathbb{R}_-^*,\quad y_-(t)=c\cos t+d\sin t-t\,.$$

Le recollement par continuité équivaut à $\lim_{0^+}y_+=a=\lim_{0^-}y_-=c$. La classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction ainsi prolongée équivaut à $\lim_{0^+}y_+'=b+1+\lim_{0^-}y_-'=d-1$. Il faut donc que les solutions sur $\mathbb{R}$ soient de la forme

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\begin{cases}a\cos t+b\sin t+t, & \text{si } t\geqslant 0,\\ a\cos t+(b+2)\sin t-t & \text{si } t<0.\end{cases}$$

Dans ce cas, y' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$y''(t)=\begin{cases}-a\cos t-b\sin t & \text{si } t>0,\\ -a\cos t-(b+2)\sin t & \text{si } t<0.\end{cases}$$

On a donc $\lim_{0^+}y''(t)=-a=\lim_{0^-}y''(t)$. Alors le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ affirme que y' est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $y''(0)=-a$, c'est-à-dire que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sans condition supplémentaire. On vérifie enfin qu'une telle fonction est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

426. **RMS 2009 996 Centrale PSI**

Donner une base de solutions du système différentiel : $x'=3x-4y$ et $y'=2x-3y$.

Solution. — Si $X\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ désigne le vecteur colonne dont les composantes sont les fonctions x et y, alors le système différentiel étudié s'écrit

$$X'=AX\quad\text{où}\quad A=\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}.$$

Le théorème de Cauchy et Lipschitz permet d'affirmer que l'espace des solutions est de dimension 2. On calcule $\chi_A(u)=\det(A-uI_2)=u^2-1=(u-1)(u+1)$. Il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. On détermine aisément ses sous-espaces propres : ils sont engendrés par $(1,2)$ pour la valeur propre 1, et par $(1,1)$ pour la valeur propre 1. Par conséquent, si

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad\text{et}\quad Y=P^{-1}X,$$

alors $X'=AX$ est équivalent à $Y'=DY$. La résolution de ce système diagonal donne

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad X(t)=PY(t)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ae^t\\be^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae^t+be^{-t}\\2ae^t+be^{-t}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}e^t\\2e^t\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}.$$

On lit ci-dessus qu'une base de l'espace des solution est la famille (X_1,X_{-1}), avec

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad X_1(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X_{-1}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

427. **RMS 2009 997 Centrale PSI**

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $M'(t)+M(t)AM(t)=0$ et $M(t)=I_n$. *Ind.* Commencer par le cas où A est diagonale.

Solution. — Voici une solution qui ne suppose rien sur A, mais qui repose sur la généralisation du cas de la dimension 1. Si $n=1$, on a affaire à un problème de Cauchy scalaire

$$(\mathcal{P})\qquad\qquad m'(t)+m(t)a\,m(t)=m'(t)+am^2(t)=0\quad\text{et}\quad m(0)=1\,,$$

où a est une matrice d'ordre 1, c'est-à-dire un réel. Le théorème de Cauchy et Lipschitz s'applique : comme la fonction nulle est solution, une solution non identiquement nulle ne s'annule jamais. On peut donc affirmer que

$$(\mathcal{P})\iff-\frac{m'(t)}{m^2(t)}=a\quad\text{et}\quad m(0)=1\,.$$

La solution maximale a pour expression $1/m(t)=1+at$, ou encore $m(t)=(1+at)^{-1}$, et on obtient immédiatement son intervalle de définition $J_{\max}=]-|a|^{-1},|a|^{-1}[$ dans le cas où $a\neq0$, et $J_{\max}=\mathbb{R}$ sinon.

Il s'agit de généraliser ces résultats. On commence par constater que l'équation différentielle $M'+MAM=0$ est de la forme $M'=f(M)$, où $f\colon(M\mapsto-MAM)\in\mathcal{C}^1(E,E)$ avec $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La classe $\mathcal{C}^1$ est justifiée, par exemple, par le fait que les fonctions composantes de f ont des expressions polynomiales en les coefficients $m_{i,j}$ de M. Le théorème de Cauchy et Lipschitz affirme alors que le problème de Cauchy de l'énoncé admet une unique solution maximale, et que toutes les autres sont des restrictions de cette solution maximale.

On pose alors $M(t)=(I_n+tA)^{-1}$, ce qui définit une fonction au voisinage de zéro dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E. En effet, si t est non nul, $\det(I_n+tA)=\det(t[A+I_n/t])=t^n\chi_A(-1/t)$ n'est pas nul dans un voisinage de zéro. Plus précisément, si les valeurs propres réelles de A sont rangées ainsi $\lambda_1<\cdots<0<\cdots<\lambda_r$ (zéro étant ou non dans le spectre de A), la fonction M est définie sur

$$J_{\max}=\left]-\frac{1}{\lambda_r},-\frac{1}{\lambda_1}\right[=\left]-\frac{1}{\sup(\mathbb{R}_+^*\cap\operatorname{Sp}A)},-\frac{1}{\inf(\mathbb{R}_-^*\cap\operatorname{Sp}A)}\right[\,,$$

avec la convention qu'il faut remplacer les bornes ci-dessus par $\pm\infty$ lorsque A n'a pas de valeurs propres strictement négatives ou strictement positives. On montre ensuite que la fonction M ainsi définie est solution du problème de Cauchy. Tout d'abord, $M(0)=I_n$. Ensuite, pour établir que M est de classe $\mathcal{C}^1$ et est solution de l'équation différentielle, on écrit que $M=\iota\circ h$, où $h\colon t\in J_{\max}\mapsto I_n+tA$ et où $\iota:\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'application « inverse » définie par $\iota(M)=M^{-1}$. La fonction h étant affine, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h'(t)=A$ pour tout $t\in\mathbb{R}$; la fonction ι est notoirement de classe $\mathcal{C}^1$, de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, de différentielle (voir le rappel)

$$\mathrm{d}\iota(M):H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto-M^{-1}HM^{-1}\,.$$

La composée $M=\iota\circ h$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\forall t\in J_{\max},\quad M'(t)=[\mathrm{d}\iota(h(t))](h'(t))=-h(t)^{-1}h'(t)h(t)^{-1}=-M(t)AM(t)\,,$$

ce qui achève la preuve.

Rappel. — La preuve du fait que la différentielle en M de l'inverse possède l'expression donnée ci-dessus se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\iota(M+H)-\iota(M)-[-M^{-1}HM^{-1}]&=(M+H)^{-1}-M^{-1}+M^{-1}HM^{-1}\,,\\&=(M[I_n+M^{-1}H])^{-1}-M^{-1}+M^{-1}HM^{-1}\,,\\&=[I_n+M^{-1}H]^{-1}M^{-1}-M^{-1}+M^{-1}HM^{-1}\,,\\&=\left([I_n+M^{-1}H]^{-1}-I_n+M^{-1}H\right)M^{-1}\,,\\&=\left([I_n-U]^{-1}-[I_n+U]\right)M^{-1}\,,\end{aligned}$$

avec $U=-M^{-1}H$. Or on sait que, pour toute norme d'algèbre $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la boule ouverte B centrée en I_n et de rayon 1 est contenue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $\forall U\in B,\ (I_n-U)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}U^k$. En particulier, $(I_n-U)^{-1}=I_n+U+\mathrm{o}(U)$, ce qui montre que $\iota(M+H)-\iota(M)-[-M^{-1}HM]=\mathrm{o}(-M^{-1}H)=\mathrm{o}(H)$, et achève la preuve.

428. **RMS 2009 998 Centrale PSI**

Trouver les extrema de $(x,y)\mapsto\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x+y\leqslant\pi\}$.

Solution. — On note f la fonction étudiée, et T le domaine sur lequel on cherche les extrema : c'est le triangle fermé OAB avec $A=(\pi,0)$ et $B=(0,\pi)$.

Comme f est continue et T est compact, f est bornée et atteint ses bornes sur T. Comme le sinus est une fonction positive sur $[0,\pi]$, on a $f\geqslant 0$ sur T. Il est clair que $f(x,y)=0$ (sur T) si et seulement si $x=0$ ou $y=0$ ou $x+y=0$, autrement dit sur les trois côtés de T. On vient donc de déterminer le minimum global de f sur T et les points en lesquels il est atteint.

Le maximum global de f, qui n'est pas constante, sur T sera nécessairement à l'intérieur. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, ce maximum global sera atteint en un point critique. Comme f est symétrique, le calcul d'une seule dérivée partielle suffit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin(y)[\cos(x)\sin(x+y)+\sin(x)\cos(x+y)]=\sin(y)\sin(2x+y)\,.$$

Elle est nulle dans l'intérieur de T si et seulement si $2x+y=\pi$. Par symétrie, l'autre dérivée partielle est nulle dans l'intérieur de T si et seulement si $x+2y=\pi$. On obtient un unique point critique en résolvant le système formé des deux équations :

$$M_0=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\,,$$

qui est bien à l'intérieur de T. En ce point critique, f atteint nécessairement son maximum global, qui vaut $3\sqrt{3}/8$, et il n'y a pas d'autres extrema locaux.

Remarque. — Indépendamment du raisonnement par unicité mené ci-dessus, on peut déterminer la nature du point critique par un développement limité. On note u le vecteur de composantes (h,k), on remarque que $|h|$, $|k|$ et $|h+k|$ sont plus petits que $\|u\|_1$, de sorte que $\mathrm{o}(h^2)$, $\mathrm{o}(k^2)$ et $\mathrm{o}((h+k)^2)$ représentent des fonctions elles-même négligeables devant $\|u\|_1^2$:

$$\begin{aligned}
f(M_0+u)&=f\left(\frac{\pi}{3}+h,\frac{\pi}{3}+k\right)\,,\\
&=\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+h+k\right)\,,\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos h+\frac{1}{2}\sin h\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k+\frac{1}{2}\sin k\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(h+k)-\frac{1}{2}\sin(h+k)\right)\,,\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}\,h^2}{4}+\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h^2)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}\,k^2}{4}+\frac{k}{2}+\mathrm{o}(k^2)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\frac{(h+k)^2}{2}\right]-\frac{h+k}{2}+\mathrm{o}((h+k)^2)\right)\\
&=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}(h^2+k^2+(h+k)^2)+\frac{\sqrt{3}}{8}\,(hk-h(h+k)-k(h+k))+\mathrm{o}(\|u\|^2)\,,\\
&=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(3-4[h^2+k^2+hk]\right)+\mathrm{o}(\|u\|_1^2)\,.
\end{aligned}$$

La quantité h^2+k^2+hk étant toujours positive, on retrouve que f présente un maximum local en $(\pi/3,\pi/3)$.

Géométrie

429. **RMS 2009 999 Centrale PSI**

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les équations de deux droites D_1 et D_2, et deux points A_1 et A_2 de D_1 et D_2 respectivement. Étudier l'existence d'une sphère tangente à D_1 en A_1 et à D_2 en A_2. Donner son équation si elle existe.

Solution. — On examine pour commencer le cas particulier $A_1=A_2$, que l'on note A (ce qui implique que les deux droites on au moins ce point en commun). Alors :

– Si $D_1=D_2$, que l'on note D, les sphères qui conviennent sont celles centrées en O appartenant au plan passant par A et orthogonal à D et de rayon OA.
– Sinon, D_1 et D_2 sont concourantes en A, donc elles définissent un plan affine P. Les sphères qui conviennent sont alors celles dont le centre O est situé sur la droite passant par A de rayon OA.

Désormais $A_1\neq A_2$. Si une sphère de centre O est tangente à une droite D en A, alors (OA) est orthogonale à D, donc O se trouve sur le plan passant par A orthogonal à D. Par suite, dans la situation de l'énoncé, le centre O d'une telle sphère doit être sur $P_1\cap P_2$, où P_i est le plan passant par A_i et orthogonal à D_i. De plus, il doit être équidistant de A_1 et A_2, c'est-à-dire situé sur l'hyperplan médiateur H de ces deux points, qui sont distincts.

Réciproquement, tout point $O \in P_1 \cap P_2 \cap H$ est le centre d'une sphère tangente à D_i en A_i pour $i \in \{1, 2\}$: celle de rayon $OA_1 = OA_2$.

Il s'agit donc de déterminer si $P_1 \cap P_2 \cap H$ est vide ou non et, dans le cas (générique) où cette intersection est un singleton, donner l'unique sphère qui convient (je suppose que c'est ce cas qui est visé dans l'énoncé à travers la phase : « Donner *son* equation »).

On suppose que les équations des droites D_I et les coordonnées des points A_i sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&D_1 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0\,, \\ e_1x + f_1y + g_1z + h_1 &= 0\,, \end{cases} \\
&D_2 : \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0\,, \\ e_2x + f_2y + g_2z + h_2 &= 0\,, \end{cases} \\
&A_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,, \\
&A_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,.
\end{aligned}$$

On note u_i et v_i les vecteurs de composantes respectives (a_i, b_i, c_i) et (e_i, f_i, g_i), et on pose $w_i = u_i \wedge v_i$: il s'agit d'un vecteur directeur de D_i, donc d'un vecteur normal à P_i. Un vecteur normal à H étant $w = \overrightarrow{A_1A_2}$, les plans P_1, P_2 et H sont en position générique si et seulement si $\det(w_1, w_2, w) \neq 0$. Dans ce cas, les expressions du centre et du rayon de l'unique sphère qui convient, et de l'équation de cette sphère, sont trop complexes pour être reproduites ici : voir le fichier Maple correspondant.

? ? A rectifier, à corriger

430. **RMS 2009 1000 Centrale PSI**

On considère les droites $D(x = y, z = 1)$ et $D'(x = z + 1, y = 2z + 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique couple de plans affines parallèles (P, P') tels que $D \subset P$ et $D' \subset P'$.

Solution. — On commence par une présentation théorique de la méthode. Pour cela, on aura besoin de A et A' deux points de D et D' respectivement.

Analyse. Si P et P' existent, $\overrightarrow{P}$ contient $\overrightarrow{D}$ (puisque P contient D), et aussi $\overrightarrow{D'}$ (puisque P est parallèle à P' et que P' contient D'). Il en est de même de $\overrightarrow{P'}$. Si u et u' sont des vecteurs directeurs (non colinéaires, comme on le verra plus tard) de D et D' respectivement, un vecteur normal commun de P et P' est donc $n = u \wedge u'$. Il existe alors un unique plan P (respectivement P') passant par A (respectivement A') et normal à n.

Synthèse. Ces plans conviennent : ils sont parallèles car orthogonaux à un même vecteur, et P, contenant $A \in D$ et normal à un vecteur normal à D, contient D, et de même P' contient D'.

On passe à l'application numérique : $u = (1, 1, 0)$ dirige D et $u' = (1, 2, 1)$ dirige D', d'où $n = (1, -1, 1)$, donc une équation de P (respectivement de P') est $x - y + z = c$ (respectivement $x - y + z = c'$). Il reste à choisir c et c', de sorte que P passe par $A = (0, 0, 1)$ et P' passe par $A' = (1, 3, 0)$. On trouve

$$\begin{aligned} P &: x - y + z = 1\,, \\ P' &: x - y + z = -2\,. \end{aligned}$$

431. **RMS 2009 1001 Centrale PSI** .

Soient $P\colon t \mapsto t^3 - 2t^2 + t + 1$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x) = P(y)\}$. Montrer que S est la réunion d'une droite et d'une courbe. Étudier cette courbe.

Solution. — Voir aussi l'exercice 840 page 531.

L'équation $P(x) = P(y)$ équivaut à $x^3 - y^3 - 2(x^2 - y^2) + (x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1) = 0$. Par suite, S est la réunion de la droite d'équation $x = y$ et de la courbe C (conique) d'équation $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. La matrice symétrique associée à cette conique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $3/4 > 0$ et sa trace $2 > 0$: les deux valeurs propres sont strictement positives, donc la conique est du genre ellipse. On constate que, si $e_1' = {}^t(1, 1)/\sqrt{2}$ et $e_2' = {}^t(-1, 1)/\sqrt{2}$, alors $Ae_1' = (3/2)e_1'$ et $Ae_2' = (1/2)e_2'$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad A' = P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = {}^tPX.$$

L'équation de C dans la base canonique (e_1, e_2) s'écrit ${}^tXAX + \begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix} X + 1 = 0$. Dans la base (e_1', e_2'), elle s'écrit ${}^tX'({}^tPAP)X' + \begin{pmatrix}-2 & -2\end{pmatrix} PX' + 1 = {}^tX'A'X' + \begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix} X' + 1 = 0$, ou encore

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 1 = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}\left[y' - 2\sqrt{2}\right]^2 - 3 = 0 \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y''}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1\,.$$

où l'on a posé $y'' = y' - 2\sqrt{2}$. La courbe C est donc une ellipse propre, de centre $(2,2)$ dans la base canonique, d'axes parallèles aux deux bissectrices (voir la matrice de passage P), et d'excentricité $\sqrt{2/3}$.

432. **RMS 2009 1002 Centrale PSI**

Soient ABC un triangle du plan affine euclidien Π et M un point de Π. On note A_1 le projeté orthogonal de M sur (BC), puis l'on définit par récurrence sur $n \geqslant 1$: B_n est le projeté orthogonal de A_n sur (AC), C_n est le projeté orthogonal de B_n sur (AB), A_{n+1} est le projeté orthogonal de C_n sur (BC).

(a) Montrer que les suites (A_n), (B_n) et (C_n) convergent.

(b) Examiner plus particulièrement le cas du triangle équilatéral.

Solution. — On suppose que le triangle ABC n'est pas plat.

(a) On note p_A, p_B et p_C les projections orthogonales sur (BC), (AC) et (AB) respectivement, et $n_A = \overrightarrow{BC}/\|\overrightarrow{BC}\|$, $n_B = \overrightarrow{CA}/\|\overrightarrow{CA}\|$ et $n_C = \overrightarrow{AB}/\|\overrightarrow{AB}\|$ des vecteurs unitaires directeurs de ces droites. La suite (A_n) est définie par la donnée de A_1 et la relation de récurrence

$$A_{n+1} = (p_A \circ p_C \circ p_B)(A_n)\,.$$

On appelle q la fonction $M \in \Pi \mapsto (p_A \circ p_C \circ p_B)(M)$, et on va démontrer qu'elle est contractante. Pour cela, on rappelle :

– que si f est une application affine, alors $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})$ pour tous M et N dans Π, où $\overrightarrow{f}$ est sa partie linéaire ;
– que si p est une projection affine sur une droite D dirigée par un vecteur unitaire n, alors $\overrightarrow{p}$ est le projecteur vectoriel sur la droite $\overrightarrow{D}$, d'expression $\overrightarrow{p}(x) = \langle n, x\rangle n$;
– la règle de composition des parties linéaires : $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ pour toutes applications affines composables f et g.

Pour tous points M et N de Π, on a

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{q(M)q(N)}\| &= \|\overrightarrow{q}(\overrightarrow{MN})\| = \|(\overrightarrow{p_A} \circ \overrightarrow{p_C} \circ \overrightarrow{p_B})(\overrightarrow{MN})\| = \|(\overrightarrow{p_A} \circ \overrightarrow{p_C})(\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle n_B)\|\,,\\
&= \|\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle(\overrightarrow{p_A} \circ \overrightarrow{p_C})(n_B)\| = \|\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle \overrightarrow{p_A}(\langle n_A, n_B\rangle n_A)\|\,,\\
&= \|\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle\langle n_A, n_B\rangle \overrightarrow{p_A}(n_A)\| = \|\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle\langle n_C, n_B\rangle\langle n_A, n_C\rangle n_A\|\,,\\
&= |\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle\langle n_C, n_B\rangle\langle n_A, n_C\rangle|\,,\\
&\leqslant |\langle n_C, n_B\rangle\langle n_A, n_C\rangle|\,\|\overrightarrow{MN}\|\,,
\end{aligned}$$

l'inégalité finale étant celle de Cauchy et Schwarz : $|\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle| \leqslant \|n_B\|\,\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$, puisque n_B est unitaire. On vient de démontrer que q est lipschitzienne de rapport $k = |\langle n_C, n_B\rangle\langle n_A, n_C\rangle|$. L'inégalité de Cauchy et Schwarz et son cas d'égalité montrent que $|\langle n_C, n_B\rangle| < \|n_C\|\,\|n_B\| = 1$, puisque le triangle n'est pas plat, donc que n_C et n_B ne sont pas colinéaires. De même, $|\langle n_A, n_C\rangle| < 1$, et finalement $k < 1$: la fonction q est bien contractante.

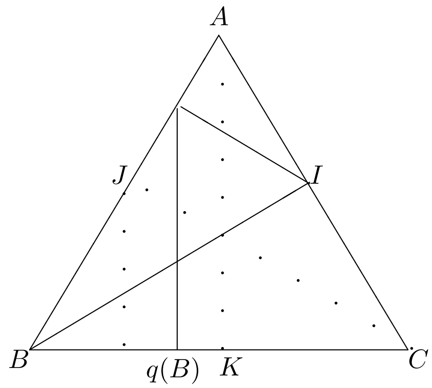
Comme la droite (BC) est stable par q, le théorème du point fixe de Cauchy montre que q possède un unique point fixe Q dans Π, qu'il se trouve sur (BC), et que la suite (A_n) converge vers Q quel que soit le point M initialement choisi.

On démontre de même les deux autres suites convergent.

(b) Quelle que soit l'orientation de Π choisie, $\langle n_C, n_B\rangle = \langle n_A, n_C\rangle = -1/2$ puisque les vecteurs en question sont unitaires et le triangle équilatéral. Ainsi, $\overrightarrow{q(M)q(N)} = (1/4)\langle n_B, \overrightarrow{MN}\rangle n_A$ pour tous points N et M de Π. Si $M = B$ et si N est quelconque on obtient

$$q(N) = q(B) + \frac{1}{4}\langle n_B, \overrightarrow{BN}\rangle n_A\,.$$

Le dessin suivant montre que $q(B) = B + (3/8)\overrightarrow{BC}$ (la remarque finale contient une preuve calculatoire de cette égalité) :



En reprenant l'expression de $q(N)$ donnée plus haut, on obtient donc $\overrightarrow{Bq(N)} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\langle n_B, \overrightarrow{BN}\rangle n_A$. Le point fixe Q de q est défini par

$$\overrightarrow{Bq(Q)} = \overrightarrow{BQ} = \lambda n_A = \frac{3}{8}\|\overrightarrow{BC}\| n_A + \frac{\lambda}{4}\langle n_B, n_A\rangle n_A = \left(\frac{3}{8}\|\overrightarrow{BC}\| - \frac{\lambda}{8}\right) n_A\,.$$

On en déduit que $\lambda = \|\overrightarrow{BC}\|/3$. Il en résulte finalement que les suites (A_n), (B_n) et (C_n) convergent vers les points Q, R et S donnés par

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,.$$

Remarque. — On calcule alors $q(B)$. Soient I le milieu de AC, J le milieu de AB et K le milieu de BC. Les propriétés du triangle équilatéral montrent que

$$p_B(B) = A + \langle n_B, \overrightarrow{AB}\rangle n_B = A - \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} n_B = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = I\,.$$

On retrouve le fait que la médiane et la hauteur issues d'un même sommet sont confondues dans un triangle équilatéral. Puis

$$\begin{aligned}
(p_C \circ p_B)(B) &= p_C(A) + \frac{1}{2}\vec{p_C}(\overrightarrow{CA}) = J + \frac{1}{2}\langle n_C, \overrightarrow{CA}\rangle n_C = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{4} n_C = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\\
q(B) &= (p_A \circ p_C \circ p_B)(B) = p_A(A) + \frac{1}{4}\vec{p_A}(\overrightarrow{AB}) = K + \frac{1}{4}\langle n_A, \overrightarrow{AB}\rangle n_A = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{8} n_A\,,\\
&= B + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

433. **RMS 2010 857 Centrale PSI (calcul formel)**

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique. Caractériser l'endomorphisme ayant pour matrice dans la base canonique

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solution. — On note A la matrice à étudier et u l'endomorphisme canoniquement associé. On commence par vérifier que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ en validant la ligne suivante, dont le résultat est bien la matrice I_3 :

```
with(linalg): A:=matrix(3,3,[3,6,2,6,-2,-3,2,-3,6])/7: I3:=evalm(A&*transpose(A));
```

Comme A est de plus symétrique, on sait que u est une symétrie orthogonale. On cherche ensuite le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par `nullspace(A-I3)`. Comme on obtient le plan

$$\mathrm{Vect}\{(1,0,2), (0,1,-3)\}\,,$$

on en déduit que u est la réflexion orthogonale par rapport à ce plan.

Centrale PC

Algèbre

434. **RMS 2009 867 Centrale PC**

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que G est commutatif si et seulement si $\varphi : g \in G \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupe.

Solution. — La commutativité de G s'écrit $\forall (g,h) \in G^2$, $gh = hg$. Le fait que φ soit un morphisme s'écrit $\forall (g,h) \in G^2$, $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1}$ (la dernière égalité résulte des propriétés bien connues de calcul dans les groupes). En prenant l'inverse des deux membres, ce qui donne une égalité équivalente, on trouve $\forall (g,h) \in G^2$, $gh = hg$: c'est bien la même chose.

435. **RMS 2009 1003 Centrale PC**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

(a) Montrer que $U_{12} = U_3U_4 = \{zz',\ z \in U_3,\ z' \in U_4\}$.

(b) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi\colon \zeta \in U_{12} \mapsto \zeta^p \in U_{12}$. À quelle condition φ réalise-t-il une bijection ?

Solution. —

(a) Si $z \in U_3$ et $z' \in U_4$, alors $(zz')^{12} = (z^3)^4(z'^4)^3 = 1^3 1^4 = 1$, donc $zz' \in U_{12}$, ce qui montre une inclusion. Réciproquement, si $\zeta^{12} = 1$, on pose $z = \zeta^4$ et $z' = \zeta^{-3}$, de sorte que $\zeta = zz'$, et on vérifie bien que $z^3 = \zeta^{12} = 1$ et $z'^4 = \zeta^{-12} = 1$, ce qui prouve l'autre inclusion, et finalement l'égalité des deux ensembles étudiés.

On vient de définir prouver que l'application $(z, z') \in U_3 \times U_4 \mapsto zz' \in U_{12}$ est surjective. Or les ensembles de départ et d'arrivée ont le même cardinal fini, qui est 12, puisque chaque U_n est de cardinal n. On sait alors que l'application en question est bijective, ce qui montre que la décomposition proposée ci-dessus ($z = \zeta^4$ et $z' = \zeta^{-3}$) était en fait la seule possible.

(b) On sait que $(U_{12}, \times)$ est un groupe, et on vérifie aisément que φ est un endomorphisme de ce groupe. Comme U_{12} est de cardinal fini, φ est bijective si et seulement si elle est injective. Comme c'est un morphisme, elle est injective si et seulement si son noyau est réduit au neutre, c'est-à-dire à $\{1\}$.

On cherche donc les éléments $\zeta \in U^{12}$ tels que $\zeta^p = 1$. On utilise la décomposition unique $\zeta = zz'$ de la question précédente. L'équation devient $z^p z'^p = 1$, et par unicité de la décomposition, cela équivaut encore au système

$$\begin{cases} z^p &= 1\,, \\ z'^p &= 1\,. \end{cases}$$

Plus précisément, on cherche les p tels que $(1,1)$ soit l'unique couple solution de ce système. Or $U_3 = \{1, j, j^2\}$ si on veut que 1 soit l'unique solution de $z^p = 1$ dans cet ensemble, il faut et il suffit que p ne soit pas multiple de 3. De même, $u_4 = \{1, i, -1, -i\}$, et 1 est l'unique solution de $z'^p = 1$ dans cet ensemble équivaut à p impair

Finalement, φ réalise une bijection si et seulement si p est un nombre impair non multiple de 3.

Remarque. — Si l'on sort du cadre de la filière PC, la résolution de la question (b) est une question classique de l'étude des groupes cycliques : φ est une bijection si et seulement si p est premier avec 12.

436. **RMS 2009 1004 Centrale PC**

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$.

Déterminer les n tels que $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n. Dans les autres cas, donner le reste de la division euclidienne.

Solution. — On remarque que $B := X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$. Par suite, B divise P_n si et seulement si 1, i et $-i$ sont racines de P_n. Comme P_n est à coefficients réels, i est une de ses racines si et seulement si $-i$ l'est aussi. Il est clair que $P_n(1) = 0$, donc la condition nécessaire et suffisante cherchée se résume à

$$P_n(i) = (-i)^n - (-1)^n + i^n - 1 = [1 + (-1)^n][i^n - 1] = 0\,.$$

L'équation est satisfaite si et seulement si
– ou bien n est impair ;
– ou bien n est pair et $i^n = 1$, ou encore n est multiple de 4.

Dans les autres cas, où n est de la forme $2(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$, on écrit la division euclidienne de P_n par B sous la forme

$$P_n = BQ_n + R_n \quad \text{avec} \quad R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n \in \mathbb{R}_2[X]\,,$$

puis on substitue X par les racines de B. On obtient le système

$$\begin{cases} 0 &= a_n + b_n + c_n\ , \\ -4 &= -a_n + ib_n + c_n\ , \\ -4 &= -a_n - ib_n + c_n\ . \end{cases}$$

On trouve finalement $R_n = R_{2(2k+1)} = 2(X^2 - 1)$.

437. **RMS 2010 868 Centrale PC**
Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

(a) Donner une condition sur n pour que B divise A_n.
(b) Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Solution. —
(a) On remarque que $B := X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X-1) + (X-1) = (X^2+1)(X-1)$. Si B divise A_n, alors 1 est racine de A_n. Comme $A_n(1) = 3^n - 3$, il faut que $n = 1$ pour que B divise A_n. Comme $A_1 = 0$, la réciproque est vraie. Finalement, B divise A_n si et seulement si $n = 1$.
(b) On écrit la division euclidienne de A_n par B sous la forme

$$A_n = BQ_n + R_n \quad \text{avec} \quad R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n \in \mathbb{R}_2[X]\ ,$$

puis on substitue X par les racines de B. On obtient le système suivant que l'on résout par la méthode du pivot :

$$\begin{cases} 3^n - 3 &= a_n + b_n + c_n\ , \\ (-1)^{n+1} - 1 &= -a_n + ib_n + c_n\ , \\ (-1)^{n+1} - 1 &= -a_n - ib_n + c_n\ , \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1}}{\iff} \begin{cases} 3^n - 3 &= a_n + b_n + c_n\ , \\ 3^n + (-1)^{n+1} - 4 &= (1+i)ib_n + 2c_n\ , \\ 0 &= -2ib_n\ , \end{cases}$$

On trouve finalement $R_n = \frac{1}{2}[(3^n + (-1)^n - 2)X^2 + 3^n + (-1)^{n+1} - 4]$.

438. **RMS 2010 869 Centrale PC**

(a) Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^3 + pX + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P possède trois racines réelles distinctes.
(b) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a \neq 0$ et $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P possède trois racines réelles distinctes.

Solution. —
(a) Si P possède trois racines réelles distinctes, alors $P' = 3X^2 + p$ possède deux racines réelles distinctes (théorème de Rolle) : cette dernière condition équivaut à $p < 0$. Réciproquement, si $p < 0$, les deux racines de P' sont $\pm\sqrt{-p/3}$ et le tableau de variation de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ se présente ainsi :

x	0		$-\sqrt{-p/3}$		$\sqrt{-p/3}$		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-\infty$		$P\left(-\sqrt{-p/3}\right)$		$P\left(\sqrt{-p/3}\right)$		$+\infty$

Pour que P possède trois racines réelles distinctes, il faut et il suffit que $P(-\sqrt{-p/3}) = -(2p/3)\sqrt{-p/3} + q > 0$ et $P(\sqrt{-p/3}) = (2p/3)\sqrt{-p/3} + q < 0$. Les deux inégalités sont équivalentes à $-\alpha < q < \alpha$, ou encore à $|q| < \alpha$, ou encore à $q^2 < \alpha^2$, où l'on a posé $\alpha = -(2p/3)\sqrt{-p/3}$, qui est bien un nombre positif. Comme $\alpha^2 = -4p^3/27$, on conclut finalement que P possède trois racines réelles distinctes si et seulement si

$$p < 0 \quad \text{et} \quad 4p^3 + 27q^2 < 0\ .$$

(b) On se ramène à la question précédente par translation de l'indéterminée (et division par a, pour rendre le polynôme unitaire) : $P = P(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples si et seulement si $(1/a)P(X + \lambda)$ l'est aussi, où λ est un réel quelconque. On choisit λ de sorte que

$$\frac{1}{a}P(X+\lambda) = X^3 + \left(3\lambda + \frac{b}{a}\right)X^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{2b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\right)X + \lambda^3 + \frac{b}{a}\lambda^2 + \frac{c}{a}\lambda + \frac{d}{a}$$

n'ait pas de terme de degré 2 : $\lambda = -b/3a$. Alors

$$\frac{1}{a}P(X+\lambda) = X^3 + \underbrace{\left(-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)}_{p} X + \underbrace{\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}}_{q} .$$

Il suffit ensuite d'appliquer les conditions $p < 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$ pour obtenir la condition suivante, qui est donnée tous calculs faits :

$$3ac - b^2 < 0 \quad \text{et} \quad 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd + 27a^2d^2 < 0 .$$

Remarque. — Les commandes Maple suivantes donnent la résolution complète de la question (b) :

```
P:=a*x^3+b*x^2+c*x+d; beta:=coeff(subs(x=x+lambda,P),x,2); lambda:=solve(beta=0,lambda);
Q:=expand(subs(x=x+lambda,P)/a);
p:=normal(coeff(Q,x,1)); q:=normal(coeff(Q,x,0)); normal(4*p^3+27*q^2);
```

439. **RMS 2011 899 Centrale PC**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $P = X^{2n} - 1$ et $Q = X^{2n} + 1$.

Solution. — On pose comme il est d'usage $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\} = \{\exp(2ik\pi/n),\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$, et on note ζ le nombre $\exp(i\pi/2n)$, qui est une racine $2n$–ième de -1. Comme $\mathcal{U}_n$ est l'ensemble des racines de $X^n - 1$ et que toutes sont simples, et comme les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul sont les produits de l'une d'elle (quelconque) par les éléments de $\mathcal{U}_n$, on dispose des décompositions en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ suivantes :

$$P = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_{2n}} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) ,$$

$$Q = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_{2n}} (X - \zeta\omega) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}\right) .$$

On obtient les décompositions sur $\mathbb{R}[X]$ en regroupant deux par deux les facteurs de degré 1 correspondant aux racines complexes conjuguées non réelles (et en conservant les facteurs réels de degré 1), et en appliquant la relation $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$:

$$P = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right) ,$$

$$Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X + 1\right) .$$

440. **RMS 2011 900 Centrale PC**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. On pose $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$. Calculer $\sum_{k=0}^n P(\omega^k)$ et en déduire que $\max\{|P(z)|,\ |z| = 1\} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

Solution. — On note a_j, pour $j \in [\![0, n]\!]$, les coefficients de P, de sorte que $\sum_{k=0}^n P(\omega^k) = \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^n (\omega^j)^k\right)$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, la raison ω^j est différente de 1, donc la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $\sum_{k=0}^n (\omega^j)^k$ vaut $(1-\omega^{(n+1)j})/(1-\omega^j) = 0$, puisque ω est une racine $(n+1)$–ième de l'unité. Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^n P(\omega^k) = (n+1)a_0 = (n+1)P(0) = n+1 .$$

D'autre part, le terme d'indice zéro de la somme $\sum_{k=0}^n P(\omega^k)$ vaut $P(1) = 0$: la somme en question comporte donc au plus n termes. L'inégalité triangulaire et le fait que tous les nombres ω^k soient de module 1 montrent alors que

$$n + 1 = |n+1| = \left|\sum_{k=0}^n P(\omega^k)\right| = \left|\sum_{k=1}^n P(\omega^k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left|P(\omega^k)\right| \leqslant n \times \max\{|P(z)|,\ |z| = 1\} .$$

Il suffit de diviser par n pour obtenir l'inégalité souhaitée.

441. **RMS 2010 870 Centrale PC**

(a) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

(b) Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Solution. —

(a) On va montrer que ce sont les polynômes de $\mathbb{R}_0[X]$. Il est clair que ces polynômes conviennent, et que, parmi les polynômes de $\mathbb{C}_0[X]$, ce sont les seuls.

On montre ensuite qu'un polynôme de degré 1 ne convient pas : si $P = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$ vérifie $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, on a en particulier $P(0) = \beta \in \mathbb{R}$, puis $P(1) = \alpha + \beta \in \mathbb{R}$, d'où l'on déduit que $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Mais alors $P(i) = \alpha i + \beta$ n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

On montre enfin qu'un polynôme de degré $n \geqslant 2$ ne convient pas non plus, en se ramenant au cas d'un polynôme de degré 1. Pour cela, on utilise l'opérateur de différence finie Δ donné par

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)\,.$$

Il s'agit d'une application linéaire, qui vérifie $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \cdots$ pour tout $k \geqslant 1$, donc $\deg \Delta(X^k) = k-1$, et on en déduit, par linéarité de Δ, que $\deg \Delta(P) = \deg(P) - 1$ pour tout P de degré au moins 1. Alors, si $\deg P = n \geqslant 2$, le polynôme $Q = \Delta^{n-1}(P)$ est de degré 1. Par ailleurs, on constate que si $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, il en est de même de $\Delta(P)$, donc de tous ses itérés. En particulier, si P vérifiait $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, alors Q serait un polynôme de degré 1 qui vérifierait $\Delta(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$, ce qui ne se peut pas.

(b) On va montrer que ce sont les polynômes à coefficients rationnels. Il est clair que ces polynômes conviennent. On montre ensuite par récurrence la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et } P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}) \Rightarrow P \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

Pour $n = 0$, si P est une constante réelle a_0, comme $P(Q) = \{a_0\}$, la condition $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ implique effectivement que a_0 soit rationnelle. Supposons la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ vraie. Soit $P = a_nX^n + Q$, avec $a_n \neq 0$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Il est alors clair que $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ vérifie aussi $[\Delta(P)](\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Or $\Delta(P) = na_nX^{n-1} + \cdots$ est de degré $n-1$. La propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ assure que $\Delta(P)$ est à coefficients rationnels, et en particulier que $na_n \in \mathbb{Q}$, donc que $a_n \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'hypothèse $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ se traduit par $Q(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, et la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ assure que Q est à coefficients rationnels. Finalement, $P \in \mathbb{Q}[X]$, ce qui établit $(\mathcal{P}_n)$.

442. **RMS 2010 871 Centrale PC**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P'' divise P.

Solution. — à reprendre.

On résout la question d'abord dans $\mathbb{C}[X]$, cadre dans lequel on va démontrer que les polynômes en question sont

- Les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ et n entier naturel.
- Les polynômes à racines simples alignées (au sens réel) dans le plan complexe et vérifiant ? ? une condition supplémentaire à découvrir.

Il est clair que les polynômes du premier type conviennent : alors $P'' = n(n-1)\lambda(X-a)^{n-2}$ et $P = QP''$, avec $Q = (X-a)^2/[n(n-1)]$. En particulier, le polynôme nul est solution, et on l'exclura des raisonnements qui vont suivre.

Recherche des polynômes P non nuls ayant une racine multiple et vérifiant P'' divise P.

On suppose que P admet une racine multiple a : on factorise P sous la forme $(X-a)^mQ$, où m est un nombre entier $\geqslant 2$, et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(a) \neq 0$. Dans ce cas, la formule de Leibniz donne $P'' = m(m-1)(X-a)^{m-2}Q + 2m(X-a)^{m-1}Q' + (X-a)^mQ''$, et l'hypothèse «$P''$ divise P »se traduit par l'existence de $H \in \mathbb{C}[X]$, nécessairement de degré 2, tel que

$$HP'' = H\left[m(m-1)(X-a)^{m-2}Q + 2m(X-a)^{m-1}Q' + (X-a)^mQ''\right] = (X-a)^mQ = P\,.$$

La simplification par $(X-a)^{m-2}$ conduit à

$$m(m-1)HQ + 2m(X-a)HQ' + (X-a)^2HQ'' = (X-a)^2Q\,.$$

Comme $(X-a)$ divise les trois polynômes $(X-a)^2Q$, $(X-a)^2HQ''$ et $2m(X-a)HQ'$, il divise aussi $m(m-1)HQ$. Or $Q(a) \neq 0$, donc il faut que H soit divisible par $X-a$, c'est-à-dire que $H = (X-a)K$, où K est de degré 1. En substituant dans la relation ci-dessus et en simplifiant par $X-a$, on obtient

$$m(m-1)KQ + 2m(X-a)KQ' + (X-a)^2KQ'' = (X-a)Q\,.$$

Le même argument de divisibilité montre que K est divisible par $X-a$. Comme $\deg(K) = 1$, il s'écrit $\lambda(X-a)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En substituant dans la relation ci-dessus et en simplifiant par $X-a$, on obtient $m(m-1)\lambda Q + 2m\lambda(X-a)Q' + \lambda(X-a)^2Q'' = Q$, ou encore

$$2m\lambda(X-a)Q' + \lambda(X-a)^2Q'' = \alpha Q\,,$$

où α désigne la constante complexe $1 - m(m-1)\lambda$. Il en résulte que $X - a$ divise αQ et, comme $Q(a) \neq 0$, il faut que α soit nulle, c'est-à-dire que $\lambda = 1/[m(m-1)]$. Comme $\lambda \neq 0$, le polynôme Q doit finalement vérifier

$$(X - a)Q'' + 2mQ' = 0\,.$$

On considère l'équation différentielle associée $(t-a)y''(t) + 2my'(t) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a (cette condition est sans objet lorsque a n'est pas réel), la fonction y étant un élément de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{C})$. Comme $t - a$ ne s'annule pas sur I, cette équation différentielle est équivalente à $(t-a)^{2m}y''(t) + 2m(t-a)^{2m-1}y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-a)^{2m}y'(t)] = 0$. Il existe donc une constante complexe c telle que

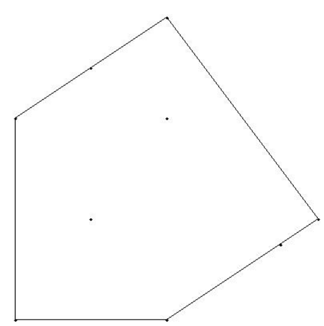
$$\forall t \in I, \quad y'(t) = \frac{c}{(t-a)^{2m}}\,.$$

La seule condition sur I étant de ne pas contenir a, on peut choisir un intervalle de la forme $I = [t_0, +\infty[$. Comme $m \geqslant 2$, on obtient $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$. Or le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction (d'une variable réelle) associée admet la limite zéro en $+\infty$ est le polynôme nul. Il faut donc que $Q' = 0$, donc que Q soit une constante complexe, donc que $m = n = \deg(P)$, donc que P soit de la forme $\lambda(X-a)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Recherche des polynômes P non nuls sans racine multiple et vérifiant P'' divise P.

Un polynôme P de degré 1 est tel que $P'' = 0$, donc ne vérifie jamais P'' divise P. Un polynôme de degré 2 est tel que P'' est une constante complexe non nulle, donc vérifie toujours P'' divise P.

On peut donc se contenter de rechercher les polynômes de degré $n \geqslant 3$, que l'on écrit sous la forme $P = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$, les a_k étant des nombres complexes deux à deux distincts, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Comme P'' est de degré $n - 2 \geqslant 1$ et doit diviser P, on peut supposer que les racines de P'' sont $a_2, \ldots, a_{n-1}$. Un théorème (de Gauss) affirme que les racines complexes de P' sont dans $C = \mathrm{conv}(a_1, \ldots, a_n)$, c'est-à-dire dans l'enveloppe convexe des a_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$. La partie C est un polygone convexe dont les sommets sont certaines racines a_k. En effet, il est possible que d'autres racines soient situées à l'intérieur de C, voire sur un côté :



L'image ci-dessus a été engendrée par Maple grâce aux commandes suivantes :

```
with(plots):
L:=[[-1,-1],[-1,1],[1,2],[3,0],[1,-1]]:
sommets:=polygonplot(L,color=white,axes=none):
racines:=pointplot([op(L),[0,1.5],[0,0],[1,1],[2.5,-0.25]],symbol=solidcircle):
display([sommets,racines]);
```

Comme les racines de P sont simples, aucun des sommets de C n'est, en particulier, une racine de P', donc l'enveloppe convexe C' des racines de P' ne contient pas les sommets de C. *A fortiori*, les racines de P'', qui appartiennent à C' en vertu du théorème de Gauss cité plus haut, ne peuvent être des sommets de C. On en déduit que seules les racines a_1 et a_n peuvent être des sommets de C. En d'autres termes, C est un segment d'extrémités a_1 et a_n, les racines $a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant nécessairement sur le segment $[a_1, a_n]$.

Si P divise P'', si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, et si $Q = P(\alpha X + \beta)$, alors $Q'' = \alpha^2 P''(\alpha X + \beta)$ divise Q : en d'autres termes, la propriété « P'' divise P » est invariante par précomposition par un polynôme de degré 1. Or $z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha z + \beta$ est l'expression d'une similitude directe, et on sait qu'il en existe une qui amène le segment $[a_1, a_n]$ (de longueur non nulle) sur le segment $[-1, 1]$. On peut alors se contenter de rechercher les polynômes P de la forme $(X+1)(X-a_2)\cdots(X-a_{n-1})(X-1)$ avec $-1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < 1$. Une expérimentation en Maple montrent qu'ils existent pour les degrés $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ et valent respectivement

$$\begin{gathered}(X^2-1)X,\\ (X^2-1)(X^2-1/5),\\ (X^2-1)X(X^2-3/7),\\ (X^2-1)(X^2-a^2)(X^2-b^2),\end{gathered}$$

où a et b sont des nombres algébriques d'expression compliquée. Par exemple, pour le polynôme de degré 5, on a tapé

```
P5:=(x**2-1)*(x-a)*(x-b)*(x-c);
Q5:=diff(P5,x$2);
solve({subs(x=a,Q5)=0,subs(x=b,Q5)=0,subs(x=c,Q5)=0},{a,b,c});
```

et on a écarté les solutions ne convenant pas. J'ignore comment poursuivre ? ?

443. **RMS 2011 901 Centrale PC (calcul formel)**
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k/k!$.

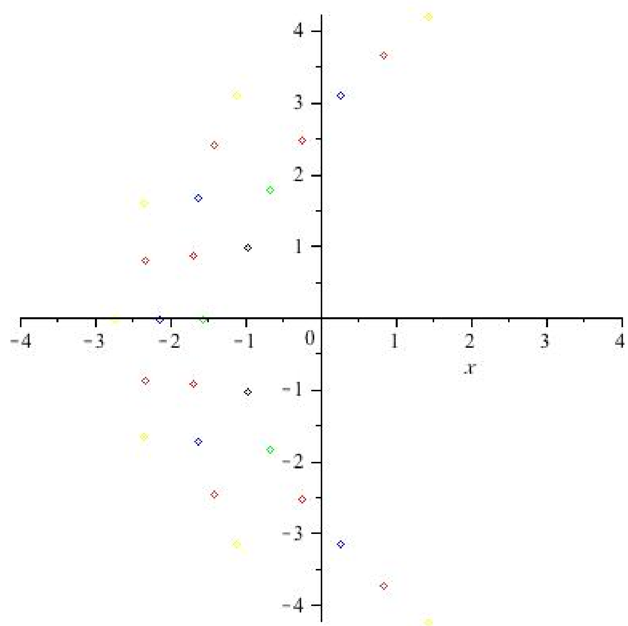
(a) Montrer que P_n n'a pas de racines dans $\mathbb{R}_+$.
(b) Représenter les racines de P_n dans le plan complexe pour $n \in \{2, \ldots, 7\}$.
(c) Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.
(d) Si n est pair montrer que P_n n'admet pas de racine réelle. Si n est impair, montrer que P_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}_-$ notée r_n. Étudier la suite $(r_{2k+1})_{k \geqslant 0}$.
(e) Étudier la convexité de P_n.

Solution. — On remarque que $P_n' = P_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: voir la question (c).

(a) Tous les coefficients de P_n étant positifs, $P_n(x) \geqslant P_n(0) = 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc P_n n'a pas de racines dans $\mathbb{R}_+$.
(b) On utilise les commandes suivantes :

```
with(plots):
P:=(n,x)->sum(x**k/k!,k=0..n);
for n from 2 to 7 do A[n]:={fsolve(P(n,x)=0,x,complex)} end do;
couleurs:=[white,black,green,red,blue,orange,yellow]:
for n from 2 to 7 do P[n]:=complexplot(A[n],style=solidbox,color=couleurs[n]) end do:
display([seq(P[n],n=2..7)]);
```

Les racines des six polynômes $P_2, \ldots, P_7$ sont tracées ci-dessous, sur le même graphique, dans l'ordre des couleurs suivantes : noir, vert, rouge, bleu, orange, jaune.



(c) Une racine complexe multiple z de P_n devrait vérifier $P_n(z) = P_n'(z) = 0$, c'est-à-dire $P_n(z) = P_{n-1}(z) = 0$. Comme $P_n = P_{n-1} + X^n/n!$, on devrait alors avoir $z = 0$, qui n'est pas racine de P_n. Toutes les racines complexes de P_n sont donc simples.
(d) On montre ensuite par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$(\mathcal{H}_m) \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, & P_{2m}(x) > 0\,, \\ \exists ! x \in \mathbb{R}_-^*, & P_{2m+1}(x) = 0\,. \end{cases}$$

Pour $m = 0$, il s'agit de montrer que $P_0 = 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $P_1 = 1 + X$ a une unique racine réelle strictement négative : c'est vrai. On suppose que $(\mathcal{H}_{n-1})$ est vraie. Comme P_{2n-1} est de degré impair, de coefficient dominant positif, n'admet qu'une seule racine réelle, notée r_{2n-1} (on sait déjà par la question (a) que les P_k n'ont pas de racine dans $\mathbb{R}_+$), et comme P_{2n} est de degré pair et de coefficient dominant positif, le tableau de signe de P_{2n-1} et de variation de P_{2n} est le suivant :

x	$-\infty$		r_{2n-1}		$+\infty$
$P_{2n-1}(x) = P'_{2n}(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$P_{2n}(x)$	$+\infty$		$P_{2n}(r_{2n-1})$		$+\infty$

Il s'agit maintenant de calculer le signe du minimum global de P_{2n}. Or $P_{2n} = P_{2n-1} + \frac{X^{2n}}{(2n)!}$, donc

$$P_{2n}(r_{2n-1}) = P_{2n-1}(r_{2n-1}) + \frac{r_{2n-1}^{2m}}{(2m)!} = \frac{r_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} > 0 \, .$$

Il en résulte que $P_{2n} > 0$ sur $\mathbb{R}$, puis que P_{2n+1} est strictement croissant sur $\mathbb{R}$, puisque $P'_{2n+1} = P_{2n}$. Enfin, comme P_{2n+1} est de degré impair, il admet au moins une racine réelle, et une seule par monotonie stricte. Cette racine est nécessairement dans $\mathbb{R}_-^*$, d'après la question (a), ce qui achève la preuve de $(\mathcal{H}_n)$.

On étudie la suite (r_{2n+1}), en plusieurs étapes.

– Une minoration de r_{2n+1}.
  L'égalité évidente $r_1 = -1$ et le graphique de la question (b) montrent que $-(2n+1) \leqslant r_{2n+1}$ pour $n \in \{0,1,2,3\}$. On généralise cette minoration en établissant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(-(2n+1)) < 0$. Pour cela, on regroupe deux par deux les termes de $P_{2n+1}(-(2n+1)) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec

$$u_k = \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} - \frac{(2n+1)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k+1)!}\left[2k+1-(2n+1)\right] \, .$$

  Cette quantité étant strictement négative pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et nulle pour $k = n$, on en déduit que $P_{2n+1}(-(2n+1)) < 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Le tableau de signes établi plus haut montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -(2n+1) < r_{2n+1} \, .$$

– Sens de variation de (r_{2n+1}).
  Comme $P_{2n+1} = P_{2n-1} + \frac{X^{2n}}{(2n)!} + \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on obtient

$$P_{2n+1}(r_{2n-1}) = P_{2n-1}(r_{2n-1}) + \frac{r_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} + \frac{r_{2n-1}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{r_{2n-1}^{2n}}{(2n+1)!}\left[2n+1+r_{2n-1}\right] \, .$$

  Comme $r_{2n-1} > -(2n-1)$, l'inégalité $r_{2n-1} > -(2n+1)$ est *a fortiori* vraie. Il en résulte que $P_{2n+1}(r_{2n-1}) > 0$, donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_{2n+1} < r_{2n-1} \, .$$

  La suite (r_{2n+1}) décroît strictement.

– La suite (r_{2n+1}) diverge vers $-\infty$.
  Comme (r_{2n+1}) décroît, le théorème "de la limite monotone" dit qu'il n'y a que deux possibilités : ou bien la suite converge, ou bien elle diverge vers $+\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que la suite converge, et on note ℓ sa limite.
  On sait que la suite de fonctions (P_k) converge simplement vers l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. En particulier, si l'on note R_p le reste $x \mapsto \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ à l'ordre p de cette série de fonctions, on peut écrire que

$$0 = P_{2n+1}(r_{2n+1}) = \exp\left(r_{2n+1}\right) - R_{2n+1}(r_{2n+1}) = \exp\left(r_{2n+1}\right) - \sum_{k=2n+2}^{+\infty} v_k \, ,$$

  avec $v_k = \frac{r_{2n+1}^k}{k!}$. Comme (r_{2n+1}) converge, elle est bornée ; soit M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|r_{2n+1}| \leqslant M$. La suite $(v_k)_{k \geqslant 2n+2}$ satisfait les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, pourvu que n soit assez grand :
  - Elle est alternée car $r_{2n+1} < 0$.
  - Elle converge vers zéro, car $|v_k| \leqslant \frac{M}{k!}$.
  - La suite $(|v_k|)$ décroît, car $|\frac{v_{k+1}}{v_k}| = |\frac{r_{2n+1}}{k+1}| \leqslant \frac{M}{k+1} < 1$ pour tout $k \geqslant 2n+2$, pourvu que n soit assez grand.

On peut alors majorer la somme $|R_{2n+1}(r_{2n+1})|$ par la valeur absolue de son premier terme, donc

$$|R_{2n+1}(r_{2n+1})| \leqslant |v_{2n+2}| = \frac{|r_{2n+1}^{2n+2}|}{(2n+2)!} \leqslant \frac{M^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Comme le majorant est de limite nulle quand n tend vers l'infini, un passage à la limite dans l'égalité ci-dessus montre que $0 = \exp(\ell)$, ce qui est impossible. Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} r_{2n+1} = -\infty\,.$$

(e) Si $n \geqslant 2$ est pair, $P_n'' = P_{n-2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question (d) car $n-2$ est pair, donc P_n est convexe. Enfin, $P_0 = 1$ est convexe et concave à la fois puisqu'affine.
Si $n \geqslant 3$ est impair, comme $n-2$ est impair, $P_n'' = P_{n-2}$ est négatif sur $]-\infty, r_{n-2}]$ et positif sur $[r_{n-2}, +\infty[$, donc P_n est concave sur $]-\infty, r_{n-2}]$ et convexe sur $[r_{n-2}, +\infty[$. Enfin, $P_1 : t \mapsto 1+t$ est convexe et concave à la fois puisqu'affine.

444. **RMS 2009 1005 Centrale PC**

Soit, pour $k \in \mathbb{N}$: $P_k = (X-1)^k(X+1)^k$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre. Trouver les racines de $P = \sum_{k=0}^n P_k$.

Solution. — La famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant échelonnée en degrés, elle est libre.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Alors l'équation

$$P(z) = \sum_{k=0}^n (z^2-1)^k = \frac{(z^2-1)^{n+1}-1}{(z^2-1)-1} = 0$$

est équivalente à $(z^2-1)^{n+1} = 1$. Ses solutions sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = 1 + \exp(\frac{2ik\pi}{n+1}) = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})\exp(\frac{ik\pi}{n+1})$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$ (on a exclu $k=0$ car il faut que $z^2 \neq 2$). En d'autres termes, les racines de P sont les $2n$ (si n est pair) ou $2n-1$ (si n est impair, auquel cas $z_{(n+1)/2} = 0$ est racine double) nombres

$$\pm\sqrt{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}\exp\left(\frac{ik\pi}{2[n+1]}\right) \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2} \quad\text{et}\quad \pm\sqrt{-2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}\exp\left(\frac{ik\pi}{2[n+1]}\right) \text{ pour } \frac{n+1}{2} < k \leqslant n.$$

445. **RMS 2009 1006 Centrale PC**

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \operatorname{Ker} f^n$ et $I_n = \operatorname{Im} f^n$. Soient $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $I = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

(a) Montrer que K et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

(b) On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $I_q = I_{q+1}$. Montrer que $\forall n \geqslant q$, $I_n = I_q$. Montrer un résultat analogue pour les K_n.

(c) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $E = K \oplus I$.

Solution. — On note que la suite (K_n) est croissante, et que (I_n) est décroissante.

(a) L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel. En particulier, c'est le cas de I.
La partie K de E est non vide car elle contient 0_E. Soient x et y deux éléments de K, et λ et μ deux scalaires. Il existe deux entiers p et q tels que $x \in K_p$ et que $y \in K_q$. Posons $r = \max(p, q)$. Comme les sous-espaces K_n forment une suite croissante pour l'inclusion K_p et K_q sont inclus dans K_r, donc x et y appartiennent à K_r, qui est un sous-espace vectoriel, donc $\lambda x + \mu y$ appartient à K_r, donc à K.

(b) Raisonnons par récurrence pour établir que $I_n = I_q$ pour tout $n \geqslant q$. C'est vrai pour $n = q$ (affirmation banale) et pour $n = q+1$ (par hypothèse). Supposons alors $n \geqslant q$ et $I_n = I_q$. Il est clair que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout n, donc $I_{n+1} \subset I_q$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in I_q = I_n$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = u^n(y) = u^{n-q}(u^q(x))$. Comme $I_q = I_{q+1}$, il existe $z \in E$ tel que $u^q(x) = u^{q+1}(z)$, donc $x = u^{n+1}(z)$, donc $x \in I_{n+1}$.
On montrerait le résultat analogue suivant pour les K_n : si $K_p = K_{p+1}$, alors $K_n = K_p$ pour tout $n \geqslant p$.
Remarque. — Si E est de dimension infinie, l'existence de q n'implique pas l'existence de p, et réciproquement : considérer $E = \mathbb{R}[X]$, et les deux endomorphismes u et v de E définis par $u(P) = P'$ ($q = 0$ et p n'existe pas), et $v(P) = XP$ (q n'existe pas et $p = 0$) pour tout $P \in E$.

(c) La suite d'entiers naturels $(\dim K_n)$ est croissante et majorée par $\dim E$, donc elle est convergente, et comme c'est une suite d'entiers, elle est stationnaire, d'où l'existence de p. La suite $\dim I_n$ est décroissante et minorée par zéro, et on conclut que q existe. La formule du rang implique alors que $p = q$.

On doit ensuite montrer que $E = K_p \oplus I_p$. La formule du rang assurant que $\dim K_p + \dim I_p = \dim E$, il suffit de montrer que K_p et I_p sont en somme directe. Soit $x \in K_p \cap I_p$: il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$, et $f^p(x) = f^{2p}(y) = 0$. Par suite $y \in K_{2p}$, mais comme $K_{2p} = K_p$, on a aussi $x = f^p(y) = 0$. C'est fait.

446. **RMS 2009 1007 Centrale PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et Φ l'application qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $(u_{|F}, u_{|G})$ dans $\mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(G, E)$. À quelle condition l'application Φ est-elle surjective ?

Solution. — Montrons que la condition cherchée est $F \cap G = \{0_E\}$, c'est-à-dire F et G en somme directe.

Si $F \cap G = \{0_E\}$, on note H un supplémentaire de $F \oplus G$ dans E. Soit $(v, w) \in \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(G, E)$. On sait qu'on peut définir un endomorphisme par ses restrictions aux facteurs d'une somme directe de somme E. On définit alors $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u_{|F} = v$, $u_{|G} = w$, et $u_{|H} = \tilde{0}$, et on a $\Phi(u) = (v, w)$, donc Φ est surjective.

Si $F \cap G \neq \{0_E\}$, on choisit un vecteur non nul $x_0 \in F \cap G$, et on note $v \colon x \mapsto x$ l'injection canonique de F dans E, et w l'application nulle de G dans E. Alors le couple $(v, w) \in \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(G, E)$ n'a pas d'antécédent par Φ. En effet, un tel antécédent u devrait vérifier à la fois $u(x_0) = v(x_0) = x_0$ et $u(x_0) = w(x_0) = 0$. On en déduit (par contraposition) la fin de la démonstration.

447. **RMS 2009 1008 Centrale PC**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $(*)$ si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

(a) Montrer que si v vérifie $(*)$, alors $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$ et $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$.

(b) Soient E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $(*)$ et tel que $E_1 = \operatorname{Im} v$ et $F_1 = \operatorname{Ker} v$.

Solution. —

(a) Soit $x \in E$.

Analyse. S'il existe $y \in \operatorname{Ker} u$ et $z = v(t) \in \operatorname{Im} v$ tels que $x = y + z = y + v(t)$, alors $u(x) = u(v(t))$, puis $(v \circ u)(x) = (v \circ u \circ v)(t) = v(t) = z$, puisque v vérifie $(*)$. On en déduit que $z = (v \circ u)(x)$ et $y = x - z = x - (v \circ u)(x)$.

Synthèse. Si y et z ont les valeurs indiquées ci-dessus, alors $u(y) = u(x) - (u \circ v \circ u)(x) = u(x) - u(x) = 0$, puisque v vérifie $(*)$, et on a prouvé que $y \in \operatorname{Ker} u$. Par ailleurs, il est clair que $z = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$, et on a prouvé que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.

On montrerait de même que $F = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v$ (symétrie des rôles de u et v).

(b) *Analyse.* On suppose qu'il existe v vérifiant les conditions prévues. Soit $x \in F = \operatorname{Im} \oplus \operatorname{Ker} v$. Il existe $y = u(z) \in \operatorname{Im} u$ et $t \in \operatorname{Ker} v$ tels que $x = y + t = u(z) + t$. De plus, $z \in E = \operatorname{Ker} u \oplus E_1$ s'écrit de manière unique sous la forme $r + s$ avec $r \in \operatorname{Ker} u$ et $s \in E_1$. On remarque que, si x est donné, s est unique, bien que z ne le soit pas (c'est le théorème du rang qui l'affirme, puisque u induit un isomorphisme de E_1 sur $\operatorname{Im} u$).

On en déduit que $x = u(z) + t = u(r+s) + t = u(s) + t$, puis que $v(x) = (v \circ u)(r)$, puis que $(u \circ v)(x) = (u \circ v \circ u)(s) = u(s)$, puisqu'on veut que v vérifie $(*)$. Cela implique que $u(v(x) - s)) = 0$, donc que $v(x) - s \in \operatorname{Ker} u$; or $v(x)$ et s sont des éléments de $E_1 = \operatorname{Im} v$, qui est en somme directe avec $\operatorname{Ker} u$. Finalement,

$$v(x) = s, \quad \text{l'unique élément de } E_1 \text{ tel que } x \text{ s'écrive } u(s) + t \text{ avec } t \in \operatorname{Ker} v.$$

Synthèse. Soit v l'application de F dans E définie comme ci-dessus. La linéarité de v se vérifie aisément. Il reste à voir

- Que $\operatorname{Im} v = E_1$: cela résulte de la définition de v ;
- Que $\operatorname{Ker} v = F_1$: cela résulte aussi de la définition de v ;
- Que v vérifie $(*)$:
  - d'après les calculs effectués dans la phase d'analyse, pour tout $x \in F$, on a $(v \circ u \circ v)(x) = (v \circ u)(s) = v(x - t) = v(x)$, puisque $t \in \operatorname{Ker} v$, donc $v \circ u \circ v = v$;
  - pour $a \in E$, qui s'écrit $b + c$ avec $b \in \operatorname{Ker} u$ et $c \in E_1$, on a $(u \circ v \circ u)(a) = u(v(u(c)) = u(c)$ d'après la définition de v. Mais $u(c) = u(a - b) = u(a)$, puisque b est dans le noyau de u ; on a bien prouvé que $u \circ v \circ u = u$.

448. **RMS 2009 1009 Centrale PC**

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{d}$ le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!}$. On pose $\Delta \colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\Delta(\binom{X}{d})$ pour $d \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ tel que $P = c_0\binom{X}{d} + c_1\binom{X}{d-1} + \cdots + c_{d-1}\binom{X}{1} + c_0$.

(c) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z}$.

Solution. — *Raisonnement préliminaire.* Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\binom{X}{j}(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$ est un entier relatif. En effet :

– si $k \geqslant j$, on obtient $\binom{k}{k-j}$, qui est bien entier ; donc ce produit est divisible par $j!$;

– si $k < 0$, alors $\binom{X}{j}(k) = (-1)^j\binom{X}{j}(j-k-1)$, et on est ramené au cas précédent ;

– si $0 \leqslant k < j$, alors zéro figure parmi les facteurs du numérateur, donc $\binom{X}{j}(k) = 0$.

On remarque aussi que $\binom{X}{k}(k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(a) Si $\Delta(P) = 0$, alors l'ensemble des racines complexes de P est invariant par l'application $x \mapsto x+1$: il est donc soit vide (P est une constante non nulle), soit infini (P est le polynôme nul). Finalement $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.
On vérifie aisément que $\Delta(\binom{X}{d}) = \binom{X}{d-1}$ pour $d \in \mathbb{N}^*$ et que $\Delta(\binom{X}{0}) = 0$.

(b) La famille $(\binom{X}{k})_{0 \leqslant k \leqslant d}$ étant échelonnée en degrés et comportant $d+1$ vecteurs, elle forme une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_d[X]$, il existe donc $(c_0, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$c_0\binom{X}{d} + c_1\binom{X}{d-1} + \cdots + c_{d-1}\binom{X}{1} + c_0 = P(X)\,.$$

Comme $P(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier relatif n, si l'on substitue X par zéro, on obtient $c_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$. Puis on substitue X par 1, ce qui donne $c_1 = P(1) - c_0 \in \mathbb{Z}$. On voit s'amorcer un raisonnement par récurrence, dont l'hérédité se formule ainsi : en substituant X par k, on obtient

$$c_k = P(k) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j\binom{X}{j}(k)\,,$$

qui est bien un entier relatif, grâce au raisonnement préliminaire et à l'hypothèse de récurrence.

(c) On a montré à la question précédente que l'ensemble A cherché est contenu dans l'ensemble B des combinaisons linéaires des $\binom{X}{k}$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$. L'inclusion réciproque résulte du raisonnement préliminaire. L'ensemble cherché est donc

$$\left\{\sum_{k=0}^{d} c_k\binom{X}{k},\quad d \in \mathbb{N},\quad (c_0, \ldots, c_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}\right\}.$$

449. **RMS 2007 802 Centrale PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Solution. — On note $J_{n,r}$ la matrice canonique d'ordre n et de rang r, dont les éléments valent zéro, sauf ceux d'indice (i,i) avec $1 \leqslant i \leqslant r$, qui valent 1. On sait que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,r}$, c'est-à-dire s'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AP = J_{n,r}$, et on sait aussi que le rang est invariant par équivalence.

Soient P et Q deux telles matrices. On pose $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Ce sont deux matrices de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, d'inverses respectifs $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que

$$S^{-1}BR = \begin{pmatrix} Q^{-1}AP & 0 \\ 0 & Q^{-1}AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n,r} & 0 \\ 0 & J_{n,r} \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice ci-dessus étant clairement de rang $2r$, on en déduit que $\operatorname{rg} B = 2\operatorname{rg} A$.

450. **RMS 2009 1010 Centrale PC**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \leqslant n$. Montrer que A est de rang r si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, de rang r, telles que $A = BC$.

Solution. — *Condition nécessaire.* Le cours affirme que, si A est de rang r, elle est équivalente à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,,$$

c'est-à-dire qu'il existe deux matrices P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $Q^{-1}AP = J$. On remarque que $J = KL$, où $L = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ et $K = {}^tL \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ sont deux matrices de rang r. On pose $B = Q^{-1}K$ et $C = LP$: le produit par des matrices inversibles conservant le rang, B et C sont de rang r. Elles ont les formats souhaités, et vérifient $A = BC$.

Condition suffisante. Dans la rédaction de cette partie, on confond les matrices avec les applications linéaires qu'elles représentent canoniquement. Comme $A = BC$, on a $\operatorname{Im} A = B(\operatorname{Im}(C))$. Mais C est de rang r, donc $\operatorname{Im} C = \mathbb{K}^r$, qui est l'ensemble de départ de B, donc $B(\operatorname{Im} C) = \operatorname{Im} B$, qui est de dimension r, donc A est de rang r.

451. **RMS 2009 1011 Centrale PC**

Calculer, pour $z \in \mathbb{C}^*$, le déterminant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} z+1/z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z+1/z & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z+1/z \end{vmatrix}.$$

Solution. — On note D_n le déterminant étudié. Un développement par rapport à la première ligne (ou colonne) montre la relation de récurrence $D_n = (z+1/z)D_{n-1} - D_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$. Le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 - (z+1/z)X + 1$ vaut $\Delta = (z-1/z)^2$. Ses racines (distinctes ou confondues) sont z et $1/z$.

– Si $z^2 \neq 1$, il existe deux constantes A et B telles que $D_n = Az^n + B/z^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Les valeurs $D_1 = z + 1/z$ et $D_2 = z^2 + 1/z^2$ montrent que (ce sont les formules de Cramer) :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} z+1/z & 1/z \\ z^2+(1/z^2)+1 & 1/z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & 1/z \\ z^2 & 1/z^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z & 1/z \\ z^2+1 & 1/z^2 \end{vmatrix}}{-z+1/z} = \frac{-z}{-z+1/z} = \frac{z^2}{z^2-1},$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} z & z+1/z \\ z^2 & z^2+(1/z^2)+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z & 1/z \\ z^2 & 1/z^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z & 1/z \\ z^2 & (1/z^2)+1 \end{vmatrix}}{-z+1/z} = \frac{1/z}{-z+1/z} = \frac{1}{1-z^2}.$$

On obtient alors, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ et tout $n \geqslant 1$:

$$D_n = \frac{1}{z^2-1}\left(z^{n+2} - \frac{1}{z^n}\right) = \frac{z^{2n+2}-1}{z^n(z^2-1)} = \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{n} z^{2k}.$$

– Si $z^2 = 1$, il existe deux constantes C et D telles que $D_n = (Cn + D)z^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Les valeurs $D_1 = 2z$ et $D_2 = 3$ $(C + D) = 2$, $2C + D = 3$ montrent que $C = 1$ et $D = 1$, donc que

$$\forall z \in \{-1, 1\}, \quad \forall n \geqslant 1, \quad D_n = (n+1)z^n.$$

Remarque. — On aurait pu déduire le second cas du premier grâce à la continuité de D_n par rapport à la variable z.

452. **RMS 2009 1012 Centrale PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha_1 \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, u(x_i), \dots, u(x_j), \dots, x_n) = \alpha_2 \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Solution. —

(a) On pose $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, ce qui définit une n–forme sur E. La linéarité de u et la n–linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ montrent que φ est n–linéaire. L'alternance de $\det_{\mathcal{B}}$ entraîne l'alternance de φ. Toute forme n–linéaire alternée sur E étant proportionnelle au déterminant sur une base donnée (théorème du cours), l'existence de α_1 est prouvée. De plus, il est unique, car la forme $\det_{\mathcal{B}}$ n'est pas identiquement nulle.

Remarque. — En utilisant la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, on prouve aisément que $\alpha_1 = \operatorname{tr} u$.

(b) On procède de la même manière.

453. **RMS 2010 875 Centrale PC**

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et de degré $\geqslant 1$, on note $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P et $r^+(P)$ le nombre de racines distinctes de P dans $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Que dire de $r^+(P)$ si $N(P) = 1$ ou si $N(P) = 2$?

(b) Montrer que $r^+(P) \leqslant 1 + r^+(P')$.

(c) On suppose que $P(0) = 0$. Montrer que $r^+(P) \leqslant r^+(P')$.

(d) Montrer que $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$.

(e) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $0 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Montrer que $\det((x_i^{p_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) > 0$.

Solution. — On confond un polynôme avec la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associée.

(a) Si $N(P) = 1$, alors $P = \alpha X^k$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, donc P n'a aucune racine dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $r^+(P) = 0$. Si $N(P) = 2$, alors $P = \alpha X^k + \beta X^\ell$ avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < \ell$, donc P admet au plus une racine dans $\mathbb{R}_+^*$, qui vaut $(\alpha/\beta)^{1/(\ell-k)}$, donc $r^+(P) \leqslant 1$. Dans les deux cas, on observe que $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$.

(b) Comme P est dérivable, le théorème de Rolle assure qu'il existe au moins une racine de P' entre deux racines de P. En particulier, il existe au moins $r^+(P) - 1$ racines strictement positives de P', ce qui prouve que $r^+(P) \leqslant 1 + r^+(P')$.

(c) L'hypothèse $P(0) = 0$ prouve l'existence d'une racine supplémentaire de P' (par rapport à celles évoquées à la question précédente), située entre zéro et la plus petite racine de P strictement positive, d'où $r^+(P) \leqslant r^+(P')$.

(d) On raisonne par récurrence sur le degré de P. Si $\deg(P) = 1$, alors $N(P) = 1$ ou 2, et la question (a) montre que $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$. On suppose la majoration valable pour $\deg(P) = n - 1 \geqslant 1$. Soit P de degré n. On distingue deux cas.

– Ou bien $P(0) \neq 0$, ce qui signifie que le terme constant de P est non nul et disparaît dans la dérivation, ou encore que $N(P') = N(P) - 1$. On utilise dans ce cas la question (b) et l'hypothèse de récurrence, qui entraînent que

$$r^+(P) \leqslant 1 + r^+(P') \leqslant 1 + N(P') - 1 = N(P') = N(P) - 1\,.$$

– Ou bien $P(0) = 0$, ce qui signifie que P' et P ont le même nombre de coefficients non nuls. La question (c) et l'hypothèse de récurrence conduisent alors à

$$r^+(P) \leqslant r^+(P') \leqslant N(P') - 1 = N(P) - 1\,.$$

La majoration $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$ est donc établie pour les polynômes de degré n.

(e) On raisonne par récurrence sur n ; pour $n = 1$, le déterminant en question vaut $x_1^{p_1}$, qui est bien strictement positif. on suppose la propriété vraie pour les familles de cardinal $n - 1$.

On note X et P les familles $(x_1, \dots, x_n)$ et $(p_1, \dots, p_n)$ respectivement, et $d(X, P)$ le déterminant étudié (par *familles*, on entend des structures ordonnées). Pour tout nombre entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $\hat{X}_k$ et $\hat{P}_k$ les familles déduites de X et P en ôtant les termes x_k et p_k respectivement. Enfin, on pose, pour tout nombre réel x :

$$P(x) = \begin{vmatrix} x_1^{p_1} & x_1^{p_2} & \cdots & x_1^{p_n} \\ x_2^{p_1} & x_2^{p_2} & \cdots & x_2^{p_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_{n-1}^{p_1} & x_{n-1}^{p_2} & \cdots & x_{n-1}^{p_n} \\ x^{p_1} & x^{p_2} & \cdots & x^{p_n} \end{vmatrix}.$$

Ceci définit une fonction polynomiale car les p_i sont des nombres entiers positifs ou nuls, et on note aussi P le polynôme associé. On s'intéresse dans cette question au signe de $d(X, P) = P(x_n)$. En développant le déterminant $P(x)$ par rapport à la dernière ligne, on constate que $N(P) \leqslant n$. La propriété d'alternance (par rapport aux lignes) du déterminant montre que $P(x_1) = \dots = P(x_{n-1}) = 0$. Par suite, $n - 1 \leqslant r^+(P)$, et la question précédente prouve alors que

$$n - 1 \leqslant r^+(P) \leqslant N(P) - 1 \leqslant n - 1\,.$$

On en déduit que $r^+(P) = n-1$: les seules racines de P dans $\mathbb{R}_+^*$ sont $x_1, \dots, x_{n-1}$, donc $P(x_n) = d(X,P) \neq 0$. Comme $x_n > x_{n-1}$ et comme le coefficient dominant de P vaut $d(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$ et qu'il est positif par hypothèse de récurrence (les familles $\hat{X}_n$ et $\hat{P}_n$ présentant les propriétés d'ordre requises), on en déduit que $P(x_n) > 0$.

454. **RMS 2009 1013 Centrale PC**

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)\colon x \mapsto f(2x)$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
(b) L'application Φ est-elle un automorphisme ?
(c) Déterminer les valeurs propres de Φ.

Solution. — La solution est due à Alain Walbron.

(a) C'est clair.
(b) Oui : il suffit de vérifier que l'application Ψ, qui à toute $g \in E$, associe $\Psi(g)\colon x \mapsto g(\frac{x}{2})$, vérifie $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_E$. Cela démontre à la fois que Φ est un automorphisme et que $\Phi^{-1} = \Psi$.
(c) Un réel λ est valeur propre de Φ s'il existe une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans lui-même, non nulle, telle que $\Phi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \lambda f(x)$. On prouve aisément par récurrence que :

$$\Phi(f) = \lambda f \iff (*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \lambda^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot$$

On discute alors suivant la position de λ par rapport à -1 et 1.

- $\forall \lambda \in]-1,1[\,,\ \lambda \notin \mathrm{Sp}(\Phi)$.
  En effet, si $\Phi(f) = \lambda f$ et $\lambda \in]-1,1[$, alors $(*)$ donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ puisque $\lambda^n \to 0$ et la continuité de f en 0 donne $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to f(0)$.
- $1 \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $E_1(\Phi) = \mathbb{R}$ (droite des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$).
  En effet, une fonction constante f vérifie bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$ et, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie cette propriété, alors pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, donc $f(x) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$ (par continuité de f en 0) et donc f est constante égale à $f(0)$.
- $-1 \notin \mathrm{Sp}(\Phi)$.
  En effet, si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = -f(x)$ alors, avec $x = 0$, il vient $f(0) = 0$ et, de $f(x) = (-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, il vient $|f(x)| = \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \longrightarrow f(0) = 0$ comme ci-dessus et donc $f = 0$.
- $]1, +\infty[\subset \mathrm{Sp}(\Phi)$.
  Soit $\lambda > 1$ et $\alpha = \ln\lambda / \ln 2$. Comme $\lambda > 1$, il vient $\alpha > 0$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = |x|^\alpha$ (de valeur zéro en zéro puisque $\alpha > 0$) est continue sur $\mathbb{R}$ et $f_\lambda(2x) = |2x|^\alpha = 2^\alpha |x|^\alpha = \lambda |x|^\alpha = \lambda f_\lambda(x)$. Comme f_λ n'est pas la fonction nulle, λ est bien valeur propre et $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset E_\lambda(\Phi)$.
- $]-\infty, -1[\subset \mathrm{Sp}(\Phi)$.
  Soient $\lambda < -1$, $\alpha = \ln|\lambda| / \ln 2$ et

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\pi \frac{\ln|x|}{\ln 2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

  On voit que g_λ est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle l'est visiblement sur $\mathbb{R}^*$ et que $|g_\lambda(x) - g_\lambda(0)| = |g_\lambda(x)| \leqslant |x|^\alpha \to 0$ quand $x \to 0$ puisque $\alpha > 0$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} g_\lambda(2x) &= |2x|^\alpha \sin\left(\pi \frac{\ln|2x|}{\ln 2}\right) = 2^\alpha |x|^\alpha \sin\left(\pi \frac{\ln|x| + \ln 2}{\ln 2}\right), \\ &= |\lambda| |x|^\alpha \sin\left(\pi \frac{\ln|x|}{\ln 2} + \pi\right) = \lambda |x|^\alpha \sin\left(\pi \frac{\ln|x|}{\ln 2}\right) \quad \text{car } \lambda < 0, \\ &= \lambda g_\lambda(x)\,, \end{aligned}$$

  relation encore vraie si $x = 0$. Comme g_λ n'est pas constante nulle, λ est bien valeur propre et $\mathrm{Vect}(g_\lambda) \subset E_\lambda(\Phi)$.

En conclusion,

$$\mathrm{Sp}(\Phi) =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\,.$$

Il resterait (en option car l'énoncé ne le demande pas) à préciser les sous-espaces propres si c'est possible !

455. **RMS 2009 1014 Centrale PC**

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $\det(A)$.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Solution. —

(a) On effectue les transformations élémentaires qui donnent finalement $\det(A) = (a^2 - b^2)^4$.

(b) On pose

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on constate que $AE_i = (a^2 - b^2)E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, que $AE_3 = (a + b)^2 E_3$ et $AE_4 = (a - b)^2 E_4$. Comme E_1 et E_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre dans le sous-espace propre de A pour la valeur propre $a^2 - b^2$. Lorsque $a^2 - b^2$, $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$ sont deux à deux distincts (il existe bien des valeurs de a et b le permettant ...), les sous-espaces propres correspondants sont en somme directe. La famille $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ est alors obtenue en réunissant trois familles libres provenant de sous-espaces en somme directe : elle est donc libre, donc est une base de $\mathbb{C}^4$.

Cela prouve que A possède une base de vecteurs propres (indépendants de a et b) pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, donc est toujours diagonalisable. De plus

$$\text{si} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a + b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a - b)^2 \end{pmatrix}.$$

456. **RMS 2009 1015 Centrale PC (calcul formel)**

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 2ab \\ a & 0 & 2ab \\ 2ab & a & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres en fonction de a et b.

(b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta & 0 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. Réduire A. Lorsque $\theta = \pi/3$, calculer A^n.

Solution. — Au début de la session, on charge la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`.

(a) On définit M par `M:=matrix(3,3,[0,a,2*a*b,a,0,2*a*b,2*a*b,a,0])`. La commande `eigenvectors(M)` donne tous les éléments propres de M. En l'occurrence, on obtient

$$[-a, 1, \{[1, -1 - 2b, 1]\}], \left[-2ab, 1, \left\{\left[1, 1, -\frac{1 + 2b}{2b}\right]\right\}\right], [a + 2ab, 1, \{[1, 1, 1]\}].$$

Chacune des trois listes qui figurent ci-dessus a la forme suivante : $[\lambda, m, \{\ldots\}]$. Il faut comprendre que λ est une valeur propre de M, que m est sa multiplicité, et que les vecteurs entre les accolades forment une base du sous-espace propre $E_\lambda(M)$. On conclut, avec certaines réserves, que le spectre de M est

$$\operatorname{Sp} M = \{-a, -2ab, a + 2ab\},$$

que les trois valeurs propres en question sont simples, et que $\mathcal{B} = ((1, -1 - 2b, 1), (1, -1, -[1 + 2b]/2b), (1, 1, 1))$ est une base propre de M. Attention : d'une session à l'autre, il est possible d'obtenir des bases propres différentes.

Voici ces réserves. D'une part, la réponse fournie par Maple est donnée dans un cas générique, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas compte de la possible égalité entre les valeurs propres $-a$, $-2ab$ et $a + 2ab$, pour certaines valeurs de a et b. D'autre part, l'algorithme de recherche des vecteurs propres donne, dans le cas des matrices à paramètres, des composantes dont le dénominateur est susceptible de s'annuler.

La dernière réserve est facilement levée dans le cas de l'exercice : il suffit de multiplier le deuxième vecteur de la base propre par $2b$. On obtient le vecteur $(2b, 2b, -1 - 2b)$, qui est un vecteur propre pour la valeur propre $-2ab$, puisqu'il est non nul. La nouvelle base propre est

$$\mathcal{B}' = ((1, -1 - 2b, 1), (2b, -2b, -1 - 2b), (1, 1, 1)).$$

La première est levée en résolvant les trois équations

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & -a & = & -2ab\,, \\ (E_2) & -a & = & a+2ab\,, \\ (E_3) & -2ab & = & a+2ab\,. \end{array}$$

On note S_i l'ensemble des couples (a,b) solutions de l'équation (E_i). On obtient (à la main, dans le cas de l'exercice, en utilisant Maple dans des cas plus complexes) :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(0,b),\ b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,1/2),\ a\in\mathbb{R}\}\,, \\ S_2 &= \{(0,b),\ b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,-1),\ a\in\mathbb{R}\}\,, \\ S_3 &= \{(0,b),\ b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,-1/4),\ a\in\mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

On écarte le cas $a=0$, pour lequel $A=0$. Il reste alors trois cas particuliers suivant la valeur de b :

i. Si $b=1/2$, alors les valeurs propres de A sont $-a$ (double) et $2a$ (simple).

ii. Si $b=-1$, alors les valeurs propres de A sont $-a$ (double) et $-2a$ (simple).

iii. Si $b=-1/4$, alors les valeurs propres de A sont $-a/2$ (double) et $-a$ (simple).

Dans tous les cas, la base $\mathcal{B}'$ calculée plus haut est une base propre de A. On peut, si on le souhaite, le vérifier en définissant la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}'$. Cela peut se faire automatiquement, grâce aux commandes suivantes :

```
v:=[eigenvectors(M)]:
P:=augment(seq(op(v[k][3]),k=1..nops(v)));
DD:=simplify(evalm(P^(-1)&*M&*P));
```

La dernière commande provoque l'affichage d'une matrice diagonale aux valeurs propres attendues, mais on ne peut pas garantir l'ordre dans lequel elles apparaîtront (la matrice a été nommée `DD` et non `D`, qui désigne la commande de dérivation des fonctions).

(b) Comme $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$, cette question est une application du (a) au cas où $a=\sin\theta$ et $b=\cos\theta$. Alors $-1-2b=-1-2\cos\theta$. Voici la réduction de A :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2\cos\theta & 1 \\ -1-2\cos\theta & -2\cos\theta & 1 \\ 1 & -1-2\cos\theta & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta+\sin(2\theta)\end{pmatrix}.$$

Si $\theta=\pi/3$, la matrice D vaut $(\sqrt{3}/2)\mathrm{diag}(-1,-1,2)$, donc $A^n=PD^nP^{-1}=(\sqrt{3}/2)^nP\mathrm{diag}((-1)^n,(-1)^n,2^n)P$. L'écriture explicite de D peut être obtenue directement par `map2(subs,{a=sin(Pi/3),b=cos(Pi/3)},DD)`.

457. **RMS 2010 878 Centrale PC, (calcul formel)**

Pour $n\geqslant 2$, soit A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont égaux à 1, les coefficients diagonaux étant alternativement -1 et 1.

(a) Déterminer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associées pour $A_2,A_3,\ldots,A_8$.

(b) Déterminer les multiplicités des valeurs propres.

(c) Calculer les coefficients diagonaux de A_n^2, ainsi que la trace de A_n^2.

(d) Déterminer toutes les valeurs propres de A_n.

Solution. — Au début de la session, on charge la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`. La création des matrices A_n utilise la commande `M:=matrix(n,n,a)`, qui créé une matrice M carrée d'ordre n dont tous les éléments valent a, matrice qu'il est ensuite possible de modifier localement grâce à des commandes du type `M[i,j]:=b` :

```
A:=proc(n)
M:=matrix(n,n,1);
for i from 1 to n do M[i,i]:=(-1)**i end do;
evalm(M)
end proc;
```

(a) On utilise la commande `eigenvects(A(n))` pour n variant de 2 à 8. Les résultats sont indiqués ci-après sous la forme d'une liste de couples (λ,d) formés d'une valeur propre λ et de la dimension d du sous-espace propre associé :

$$\begin{array}{lllll} n=2 & \big(\sqrt{2},1\big)\,, & \big(-\sqrt{2},1\big) & & \\ n=3 & (-2,1)\,, & (-1,1)\,, & (2,1) & \\ n=4 & (-2,1)\,, & (0,1)\,, & \big(1+\sqrt{5},1\big)\,, & \big(1-\sqrt{5},1\big) \\ n=5 & (-2,2)\,, & (0,1)\,, & (-1,1)\,, & (4,1) \\ n=6 & (-2,2)\,, & (0,2)\,, & \big(2+\sqrt{10},1\big)\,, & \big(2-\sqrt{10},1\big) \\ n=7 & (-2,3)\,, & (0,2)\,, & (-1,1)\,, & (6,1) \\ n=8 & (-2,3)\,, & (0,3)\,, & \big(3+\sqrt{17},1\big)\,, & \big(3-\sqrt{17},1\big) \end{array}$$

(b) Comme A_n est symétrique réelle, elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont toutes réelles et leurs multiplicités sont égales aux dimensions des sous-espaces propres associés.

La matrice A_2 (respectivement A_3) ayant deux (respectivement trois) valeurs propres simples, son cas est réglé. On suppose désormais que $n \geqslant 4$.

Étude de la valeur propre zéro.

On remarque que les colonnes d'indices pairs de A_n sont égales, donc le rang de A_n est au plus égal à $n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (il faut retirer à n le nombre de nombres pairs $2k$ tels que $4 \leqslant 2k \leqslant n$, qui correspond au nombre de colonnes d'indice pair $\geqslant 4$ égales à la deuxième). On va démontrer que cette majoration est en fait une égalité, c'est-à-dire que

$$\forall n \geqslant 4, \quad m_0 = \dim E_0(A_n) = \dim \operatorname{Ker}(A_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 .$$

Il suffit pour cela de démontrer que les $n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ colonnes $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{2k+1}, \ldots$ de A_n forment une famille libre. En notant $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_{2k+1} = C_2 - 2E_{2k+1}$ pour tout k tel que $1 \leqslant 2k+1 \leqslant n$. Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2k+1}, \ldots$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \cdots + \lambda_{2k+1} C_{2k+1} + \cdots = 0 .$$

Si l'on note λ la somme de tous les λ_p, cette égalité s'écrit encore

$$\lambda C_2 - 2\lambda_1 E_1 - 2\lambda_3 E_3 - \cdots - 2\lambda_{2k+1} E_{2k+1} - \cdots = 0 .$$

La famille $(C_2, E_1, E_3, \ldots, E_{2k+1}, \ldots)$ étant libre — c'est facile à prouver —, on en déduit que les λ_{2k+1} sont tous nuls, et que $\lambda = \lambda_2 + \sum_{1 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \lambda_{2k+1}$ est nul aussi, ce qui entraîne que $\lambda_2 = 0$.

Étude de la valeur propre -2.

On pose $B_n = A + 2I_n$: la matrice B_n est la matrice dont tous les coefficients non diagonaux valent 1, les coefficients diagonaux valant alternativement 1 et 3. On remarque que les colonnes d'indices impairs de B_n sont égales, donc le rang de B_n est au plus égal à $n - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (il faut retirer à n le nombre de nombres impairs $2k+1$ tels que $3 \leqslant 2k+1 \leqslant n$, qui correspond au nombre de colonnes d'indice impair $\geqslant 3$ égales à la première). On démontre alors comme dans l'étude de la valeur propre zéro que cette majoration est en fait une égalité, c'est-à-dire que

$$\forall n \geqslant 4, \quad m_{-2} = \dim E_{-2}(A_n) = \dim \operatorname{Ker}(B_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor .$$

Combien vaut $m_0 + m_{-2}$?

Si $n = 2p$ est pair, $m_0 + m_{-2} = \lfloor 2p/2 \rfloor - 1 + \lfloor (2p-1)/2 \rfloor = 2p - 2 = n - 2$.

Si $n = 2p+1$ est pair, $m_0 + m_{-2} = \lfloor (2p+1)/2 \rfloor - 1 + \lfloor 2p/2 \rfloor = 2p - 1 = n - 2$.

Dans tous les cas, on a déjà trouvé $n-2$ valeurs propres de A_n, comptées avec leur ordre de multiplicité. Il reste donc à trouver, soit deux valeurs propres simples, soit une valeur propre double. Les calculs numériques menés à la question (a) font plutôt pencher vers le premier terme de l'alternative, ce que l'on va vérifier dans les dernières questions.

(c) Tous les coefficients diagonaux de A_n^2 valent n, donc sa trace vaut n^2.

(d) On note a_n et b_n les deux valeurs propres de A_n restant à découvrir (éventuellement la valeur propre double si $a_n = b_n$). La relation $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i$ est valable pour toute matrice complexe, lorsque $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} M = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Si on l'applique pour $M = A_n$ et pour $M = A_n^2$, on obtient un système de deux équations

$$\begin{cases} -2m_{-2} + a_n + b_n &= \operatorname{tr} A_n , \\ 4m_{-2} + a_n^2 + b_n^2 &= \operatorname{tr} A_n^2 , \end{cases}$$

à deux inconnues (a_n et b_n). Pour résoudre ce système, on distingue suivant la parité de n.

Si $n = 2p$ est pair, on obtient

$$\begin{cases} -2(p-1) + a_{2p} + b_{2p} &= 0 , \\ 4(p-1) + a_{2p}^2 + b_{2p}^2 &= 4p^2 \end{cases}$$

Les commandes

```
eq1:=-2*(p-1)+a+b=0:eq2:=4*(p-1)+a**2+b**2=4*p**2:spair:=solve({eq1,eq2},{a,b});
```

donnent a et b racines de $X^2 - 2(1-p)X - 2p$, et il faut utiliser `allvalues(spair)` pour afficher les expressions avec radicaux. On choisit l'ordre arbitraire suivant :

$$a_{2p} = p - 1 + \sqrt{p^2+1} \quad \text{et} \quad b_{2p} = p - 1 - \sqrt{p^2+1} .$$

Si $n = 2p+1$ est impair, on obtient

$$\begin{cases} -2p + a_{2p+1} + b_{2p+1} & = & -1\,, \\ 4p + a_{2p+1}^2 + b_{2p+1}^2 & = & (2p+1)^2\,. \end{cases}$$

Les commandes `eq3:=-2*p+a+b=-1:eq4:=4*p+a**2+b**2=(2*p+1)**2:solve({eq3,eq4},{a,b})` donnent (pas besoin de `allvalues` ici, puisque les racines sont rationnelles), à l'ordre près :

$$a_{2p+1} = 2p \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = -1\,.$$

Il s'agit à chaque fois de deux valeurs propres simples, et on retrouve les résultats de la question (a).

458. **RMS 2009 1016 Centrale PC, (calcul formel)**

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les éléments propres de A.

(b) Écrire un programme permettant de résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = {}^t(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

(d) Trouver toutes les matrices commutant avec A.

Solution. — Au début de la session, on charge la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`.

(a) On définit A par `A:=matrix(3,3,[3,-4,8,5,-6,10,1,-1,1])`, on calcule son polynôme caractéristique et ses valeurs propres par `solve(charpoly(A,x))`, ce qui donne $\operatorname{Sp} A = \{0,-1\}$. On ne peut pas conclure *a priori* quant à la diagonalisabilité de A. Pour cela, on valide les mêmes commandes qu'à l'exercice précédent :

```
v:=[eigenvectors(A)];P:=augment(seq(op(v[k][3]),k=1..nops(v)));DD:=evalm(P^(-1)&*A&*P);
```

Les résultats de `eigenvectors(A)` montrent que $E_{-1}(A)$ est de dimension 2, prouvent que A est diagonalisable, et justifient les commandes suivantes. On obtient alors (sous réserve de l'ordre des éléments propres)

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) La commande `dsolve` s'applique aussi bien aux équations différentielles qu'aux systèmes d'équations différentielles, avec ou sans conditions initiales imposées. Voici une procédure possible (il est sous-entendu que A est une matrice carrée d'ordre n, et que `conditionsinitiales` est un vecteur ayant n composantes) :

```
pbCauchy:=proc(A::matrix,conditionsinitiales::vector)
local i, j, n, t, CI, X, systeme;
n := nops(conditionsinitiales);
X := vector(n);
CI:=seq(X[i](0)=conditionsinitiales[i],i=1..n);
systeme:= {seq(sum(A[i,j]*X[j](t),j=1..n)=diff(X[i](t),t),i=1..n),CI};
dsolve(systeme,[seq(X[i](t),i=1..n)])
end proc;
```

L'appel de `pbCauchy(A,vector([a,b,c]))` donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= 4a - 4b + 8c + (-3a + 4b - 8c)e^{-t}\,, \\ X_2(t) &= 5a - 5b + 10c + (-5a + 6b - 10c)e^{-t}\,, \\ X_3(t) &= a - b + 2c + (-a + b - c)e^{-t}\,. \end{aligned}$$

(c) Il est clair que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par A. On détermine ensuite les droites stables : ce sont les droites engendrées par les vecteurs propres de A, c'est-à-dire :

i. Si la valeur propre est zéro, la droite $E_0(A)$, engendrée par $(4,5,1)$.

ii. Si la valeur propre est -1, toutes les droites contenues dans le plan propre $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$.

On détermine enfin les plans stables P. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Comme u est diagonalisable, il en est de même de l'endomorphisme $v = u_{//P}$, et le spectre de v est inclus dans celui de u, avec $m_\lambda(v) \leqslant m_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} v$. On distingue deux alors cas :

i. Si $\operatorname{Sp} v = \{-1\}$, alors $P = E_{-1}(A)$ nécessairement. Réciproquement, il est stable.

ii. Si $\operatorname{Sp} v = \{0, -1\}$, alors P contient un vecteur propre associé la valeur propre zéro, donc contient la droite $E_0(A)$, et un vecteur propre x_{-1} associé à la valeur propre -1. Dans ce cas, P contient, puis est égal (puisque c'est un plan) à $\operatorname{Vect}((4,5,1), x_{-1})$. Réciproquement, un tel plan est stable par A.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on pose $M' = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de la question (a). En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on montre que $MA = AM$ si et seulement si $M'D = DM'$. Si l'on note $m'_{i,j}$ les éléments de M', l'équation $M'D = DM'$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} 0 & -m'_{1,2} & -m'_{1,3} \\ 0 & -m'_{2,2} & -m'_{2,3} \\ 0 & -m'_{2,3} & -m'_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m'_{2,1} & -m'_{2,2} & -m'_{2,3} \\ -m'_{3,1} & -m'_{3,2} & -m'_{3,3} \end{pmatrix},$$

ou encore à $m'_{1,2} = m'_{1,3} = m'_{2,1} = m'_{3,1} = 0$. En conclusion, M commute avec A si et seulement si

$$\exists (m'_{1,1}, m'_{2,2}, m'_{2,3}, m'_{3,2}, m'_{3,3}) \in \mathbb{R}^5, \quad M = P \begin{pmatrix} m'_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & m'_{2,2} & m'_{2,3} \\ 0 & m'_{3,2} & m'_{3,3} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

459. **RMS 2010 881 Centrale PC**

Les matrices $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

Solution. — Les réponses sont dans l'ordre oui et non.

Si A et B désignent les deux matrices en question, il est clair que $\chi_A = (X-1)^n X^n$ et $\chi_B = (X-1)^{2n}$.

Comme $\operatorname{rg} A = n$, on a $\dim E_0(A) = n$. Comme les n premiers vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$ sont fixes par A, on a $\dim E_1(A) \geqslant n$. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est au moins $2n$, donc égale à $2n$, donc A est diagonalisable.

Si B était diagonalisable, comme sa seule valeur propre est 1, elle serait semblable à I_{2n}, donc égale à I_{2n}, ce qui n'est pas le cas, donc B n'est pas diagonalisable.

460. **RMS 2009 1017 Centrale PC**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. On suppose A diagonalisable. Exprimer les éléments propres de B en fonction de ceux de A. À quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ?

Solution. — Voir aussi l'exercice 102 page 138.

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{C}^{2n}$, où X_1 et X_2 sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation $BX = \lambda X$ équivaut au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AX_2 & = & \lambda X_1\,, \\ X_1 & = & \lambda X_2\,, \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} AX_2 & = & \lambda^2 X_2\,, \\ X_1 & = & \lambda X_2\,. \end{array} \right.$$

Si $X_2 = 0$, alors $X_1 = 0$ et X aussi, donc ce n'est pas un vecteur propre. On écarte ce cas. Par suite, la première équation dit que λ^2 est une valeur propre de A. On en déduit que :

– les valeurs propres de B sont les racines carrées (complexes) des valeurs propres de A ;

– si $\lambda \in \operatorname{Sp}(B)$, alors $E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda X_2 \\ X_2 \end{pmatrix},\ X_2 \in E_{\lambda^2}(A) \right\}$.

La structure de $E_\lambda(B)$ montre que sa dimension est celle de $E_{\lambda^2}(A)$. Si μ est une valeur propre de A, elle admet deux racines carrées complexes distinctes λ et $-\lambda$, sauf si $\mu = 0$, auquel cas elle n'en possède qu'une seule, qui est zéro. On en déduit la disjonction suivante :

– ou bien A est inversible, et alors $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) = 2n$, donc B est diagonalisable ;

– ou bien A n'est pas inversible, et $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\mu(A)) - \dim(E_0(A)) = 2n - \dim(\operatorname{Ker} A) < 2n$, donc B n'est pas diagonalisable.

461. **RMS 2009 1018 Centrale PC**

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que si D est diagonalisable, alors A et B le sont aussi.

(b) Montrer que si D est diagonalisable, il existe $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la matrice $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$ soit inversible et vérifie : $P^{-1}DP$ diagonale. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = MB - AM$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B, C pour que D soit diagonalisable.

Solution. — *Calcul préliminaire.* On remarque que (par une récurrence immédiate), pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $C_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $D^k = \begin{pmatrix} A^k & C_k \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$; en particulier, $C_0 = 0$ et $C_1 = C$. On en déduit que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \exists C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad P(D) = \begin{pmatrix} P(A) & C_P \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}.$$

(a) Si D est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples et annulateur de D. Le calcul préliminaire montre alors que $P(A) = P(B) = 0$, ce qui prouve que A et B sont diagonalisables.

(b) On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^{2n}$ dont D est la matrice sur la base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$ et on pose $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. La forme de la matrice D montre que F est stable par u. Le cours affirme que l'endomorphisme v induit par u sur F est alors diagonalisable (cela revient à dire que A est diagonalisable, et cela fournit une démonstration alternative à la moitié de la question précédente). Mieux, si l'on note S_u et S_v les spectres respectifs de u et v, on a

$$\forall \lambda \in S_v, \quad E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F\,.$$

Cette égalité ne fait que traduire l'équivalence $\forall x \in E,\ x \in E_\lambda(v) \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$ et $x \in F$. Pour chaque $\lambda \in S_v$, on choisit un supplémentaire G_λ de $E_\lambda(v)$ dans $E_\lambda(u)$. En distinguant les valeurs propres de u qui sont aussi des valeurs propres de v de celles qui ne le sont pas, la diagonalisabilité de D se traduit alors géométriquement par les égalités

$$E = \mathbb{C}^{2n} = \oplus_{\lambda \in S_u} E_\lambda(u) = \underbrace{\left(\oplus_{\lambda \in S_v} E_\lambda(v)\right)}_{F} \oplus \left(\oplus_{\lambda \in S_v} G_\lambda\right) \oplus \left(\oplus_{\lambda \in S_u \setminus S_v} E_\lambda(u)\right).$$

Si $\mathcal{B}'$ est une base de E adaptée à cette somme directe (certains des sous-espaces ci-dessus sont nuls : on les élimine implicitement de la somme), la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de la forme souhaitée, et diagonalise D.
Si l'on pose $\Delta = P^{-1}DP$ et si l'on écrit $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, où Δ_1 et Δ_2 sont deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la condition $\Delta = P^{-1}DP$ s'écrit aussi $P\Delta = DP$, ou encore

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

ou encore sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} P_1\Delta_1 &= AP_1\,, \\ P_2\Delta_2 &= AP_2 + CP_3\,, \\ P_3\Delta_2 &= BP_3\,. \end{cases}$$

Comme P est inversible, P_1 et P_3 le sont aussi, et la deuxième équation s'écrit encore $C = P_2\Delta_2P_3^{-1} - AP_2P_3^{-1}$. Grâce à la troisième équation, cette égalité s'écrit encore

$$C = P_2P_3^{-1}B - AP_2P_3^{-1}\,,$$

qui est la relation cherchée, avec $M = P_2P_3^{-1}$.

(c) Une condition nécessaire et suffisante pour que D soit diagonalisable est A et B sont diagonalisables et il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = MB - AM$. La condition est nécessaire, d'après ce qui précède.
Elle est suffisante : comme A et B sont diagonalisables, il existe deux matrices inversibles P_1 et P_3 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $P_1^{-1}AP_1 = \Delta_1$ et $P_2^{-1}BP_2 = \Delta_2$ soient diagonales. On pose ensuite $P_2 = MP_3$, $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}.$$

Alors P est inversible puisque P_1 et P_3 le sont, et on a

$$DP = \begin{pmatrix} A & MB - AM \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & MP_3 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & MBP_3 \\ 0 & BP_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1\Delta_1 & MP_3\Delta_2 \\ 0 & P_3\Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$P\Delta = \begin{pmatrix} P_1 & MP_3 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\Delta_1 & MP_3\Delta_2 \\ 0 & P_3\Delta_2 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $DP = P\Delta$, ou encore que $P^{-1}DP = \Delta$, donc que D est diagonalisable.

462. **RMS 2010 882 Centrale PC**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

(a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

(b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

Solution. — Voir aussi les exercices 17 page 102 et 303 page 214.

(a) La matrice proposée est bien inversible (son déterminant vaut 1). On recherche son inverse sous la forme $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, les matrices E, F, G et H étant des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = I_{2n} \iff \begin{cases} E & = I_n\,, \\ G & = 0\,, \\ F + DH & = 0\,, \\ H & = I_n\,, \end{cases} \iff \begin{cases} E = I_n\,, \\ G = 0\,, \\ F = -D\,, \\ H = I_n\,, \end{cases} \text{donc } \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

(b) Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui diagonalisent respectivement A et B. On pose $L := P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $M := Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, avec l'hypothèse (de l'énoncé) qu'aucun λ_i n'est un μ_j. Alors $R := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$, et on a

$$H := R^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$
$$K := R^{-1}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} L & P^{-1}CR \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

On note C' la matrice $P^{-1}CR$. La question posée revient à démontrer que H et K sont semblables. On cherche s'il existe une matrice $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice étudiée dans la question (a) soit une matrice de passage convenable, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = H, \quad \text{ou encore} \quad C' = LD - DM\,.$$

Soit $\varphi : S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto LS - SM$, ce qui définit manifestement un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme la matrice C, donc la matrice C', est quelconque, prouver l'existence de D revient à prouver que φ est surjectif. Comme il s'agit d'un endomorphisme et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, cela revient encore à prouver que φ est injectif. Soit alors $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi(S) = 0 \iff LS - SM = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \lambda_i s_{i,j} = \mu_j s_{i,j}\,.$$

Comme les spectres de A et B sont disjoints, cela équivaut à $s_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, ce qui achève la preuve.

463. **RMS 2009 1019, Centrale PC (calcul formel)**

Soit $P(X) = X^5 - 5X^4 + X^3 + X^2 - X + 2$. On pose $P_k = P^{(k)}$ pour $k \in \{0, \dots, 5\}$.

(a) Déterminer P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_5)$ est une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et exprimer $1, X, \dots, X^5$ dans cette base.

(b) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormale. Exprimer $\langle X^i, X^j \rangle$ pour $(i,j) \in \{0, \dots, 5\}^2$.

(c) Soit $F = \mathrm{Vect}\{1, X^2, X^3\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $X^4 - X$ sur F.

Solution. — On charge pour commencer la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`.

(a) La validation des commandes

```
P:=X^5-5*X^4+X^3+X^2-X+2; Q[0]:=P;
for k to 5 do Q[k]:=diff(P,X$k) end do;
```

donne

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= X^5 - 5X^4 + X^3 + X^2 - X + 2\,,\\
Q_1 &= 5X^4 - 20X^3 + 3X^2 + 2X - 1\,,\\
Q_2 &= 20X^3 - 60X^2 + 6X + 2\,,\\
Q_3 &= 60X^2 - 120X + 6\,,\\
Q_4 &= 120X - 120\,,\\
Q_5 &= 120\,.
\end{aligned}
$$

Les polynômes doivent nommés Q_k et non P_k : en effet, en Maple, `P[1]` désigne le premier opérande de l'expression `P`, en l'occurrence `X^5`, puisque l'expression `P` est la somme `X^5-5*X^4+X^3+X^2-X+2`. La famille $\mathcal{B}$ contient 6 polynômes échelonnés en degré, donc est une base de $\mathbb{R}_5[X]$.

Les équations ci-dessus représentent un système triangulaire en les inconnues X^k, qu'il est aisé de résoudre à la main. Si l'on souhaite le faire faire à Maple, il faut que les X^k soient considérés comme des inconnues indépendantes, sinon le système tentera de résoudre les équations ci-dessus comme des équations de degré k en X, et il faut aussi faire apparaître explicitement X^0. Pour cela, remplace les termes constants a par aY_0, puis on substitue X^k par Y_k pour $k \geqslant 2$, et enfin on substitue X par Y_1. Le lecteur aura remarqué qu'il est nécessaire de changer de nom d'indéterminée et le nom de la nouvelle liste : `R:=[seq(expand(Q[k]+subs(X=0,Q[k])*(-1+Y[0])),k=0..5)]` puis `R:=subs([seq(X^i=Y[i],i=2..5)],R)` et enfin `R:=subs(X=Y[1],R)`.

On obtient les X^k (désormais notés Y_k) en fonction des P_k (désormais notés R_k) grâce à `Y:={seq(Y[k],k=0..5)}` et `solutions:=solve({seq(S[k-1]=R[k],k=1..6)},Y)`. La dernière facétie sur les indices est due au fait que le numéro de l'opérande de tête d'une expression Maple est 1 et non zéro. En traduisant les équations obtenues dans les notations de l'énoncé, on obtient :

$$
\begin{aligned}
X^0 &= \frac{1}{120}P_5\,,\\
X^1 &= \frac{1}{120}P_4 + \frac{1}{120}P_5\,,\\
X^2 &= \frac{1}{60}P_3 + \frac{1}{60}P_4 + \frac{19}{1200}P_5\,,\\
X^3 &= \frac{1}{20}P_2 + \frac{1}{20}P_3 + \frac{19}{400}P_4 + \frac{53}{1200}P_5\,,\\
X^4 &= \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{5}P_2 + \frac{19}{100}P_3 + \frac{53}{300}P_4 + \frac{331}{2000}P_5\,,\\
X^5 &= P_0 + P_1 + \frac{19}{20}P_2 + \frac{53}{60}P_3 + \frac{331}{400}P_4 + \frac{911}{1200}P_5\,.
\end{aligned}
$$

(b) Si $\mathcal{B}$ est orthonormale, alors l'expression du produit scalaire est

$$\forall (\alpha_i)_{0\leqslant i\leqslant 5} \in \mathbb{R}^6, \quad \forall (\beta_i)_{0\leqslant i\leqslant 5} \in \mathbb{R}^6, \quad \left\langle \sum_{k=0}^{5} \alpha_k P_k, \sum_{k=0}^{5} \beta_k P_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k \beta_k\,.$$

Réciproquement, ce qui précède est bien l'expression d'un produit scalaire, puisque c'est celle du produit scalaire canonique.

Pour exprimer $\langle X^i, X^j\rangle$, il suffit d'exploiter l'idée décrite dans la phrase précédente. On commence par assigner à Y_k la valeur obtenue dans la résolution de fin de la question (a), en validant `assign(solutions)`. Puis on utilise `seq(seq(scal(i,j)=add(coeff(Y[i],S[k])*coeff(Y[j],S[k]),k=0..5),j=i..5),i=0..5)`. Les mentions `scal(i,j)=` servent de balise pour pouvoir lire le résultat, mais ne sont pas indispensables. On obtient le tableau suivant où l'on trouve la valeur de $\langle X^i, X^j\rangle$ à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la symétrie du produit scalaire dispense de remplir la partie inférieure) :

$i\backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	$1/14400$	$1/14400$	$19/144000$	$53/144000$	$331/240000$	$911/144000$
1		$1/7200$	$13/48000$	$11/14400$	$2053/720000$	$119/9000$
2			$129/160000$	$3347/1440000$	$62867/7200000$	$58369/1440000$
3				$6629/720000$	$28161/800000$	$59221/360000$
4					$6289249/36000000$	$1991201/2400000$
5						$711917/144000$

(c) Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, X^2, X^3)$ pour obtenir une base orthonormale (T_1, T_2, T_3) de F, et enfin d'appliquer la formule qui donne le projeté orthogonal p_F :

$$p_F(X^4 - X) = \sum_{i=1}^{3} \langle X^4 - X, T_i \rangle T_i \, .$$

La commande `GramSchmidt` de Maple, accessible dans la bibliothèque `linalg`, permet de résoudre le problème directement, à condition de transformer les polynômes 1, X^2 et X^3 en les vecteurs de leurs composantes sur la base orthonormale $\mathcal{B}$, puisque l'algorithme de Gram et Schmidt est programmé pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et lui seul. On définit donc `v[i]:=vector([seq(coeff(Y[i],S[k]),k=0..5)])` pour $i \in \{0, 2, 3\}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} v_0 &= \left[0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{120}\right] \, , \\ v_2 &= \left[0, 0, 0, \frac{1}{60}, \frac{1}{60}, \frac{19}{1200}\right] \, , \\ v_3 &= \left[0, 0, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{19}{400}, \frac{53}{1200}\right] \, . \end{aligned}$$

On valide ensuite `T:=map(simplify,GramSchmidt([v[0],v[2],v[3]],normalized))`. L'option `normalized` permet de disposer d'une base orthonormale (sinon, on n'obtient qu'une base orthogonale). Le résultat est une liste contenant les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} T_1 &= [0, 0, 0, 0, 0, 1] \, , \\ T_2 &= \left[0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right] \, , \\ T_3 &= \left[0, 0, \frac{20}{267}\sqrt{89}\sqrt{2}, \frac{1}{534}\sqrt{89}\sqrt{2}, -\frac{1}{534}\sqrt{89}\sqrt{2}, 0\right] \, . \end{aligned}$$

On transforme $X^4 - X$ en ses composantes sur $\mathcal{B}$ par `v[4]:=vector([seq(coeff(Y[4]-Y[1],S[k]),k=0..5)])`, puis on calcule les composantes du projeté dans $\mathcal{B}$ par `w:=evalm(add(dotprod(S[k],v[4])*S[k],k=1..3))`. On obtient

$$\left[0, 0, \frac{4813}{24030}, \frac{44257}{240300}, \frac{83701}{480600}, \frac{943}{6000}\right] .$$

On repasse ensuite dans la base canonique grâce à `add(w[k+1]*Q[k],k=0..5)`. On obtient

$$-\frac{1282}{2403} - \frac{1291}{1335}X^2 + \frac{9626}{2403}X^3 \, .$$

464. **RMS 2009 1020 Centrale PC**

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$: $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

(a) Montrer que $\langle \ , \ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) Déterminer une base orthonormée de E.

(c) Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \{P \in E, \ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.

Solution. —

(a) La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Si $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} (P(a_k))^2 = 0$ alors chaque $P(a_k)$ est nul (somme de termes positifs), donc P admet au moins $n + 1$ racines alors qu'il est de degré au plus n, donc il est nul.

(b) La famille $\mathcal{L} = (L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \ldots, a_n$ est manifestement orthonormée pour ce produit scalaire.

(c) Dans la base orthonormée $\mathcal{L}$ décrite à la question précédente, tout polynôme $P \in E$ s'écrit $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$: en d'autres termes, les $P(a_k)$ sont les composantes de P dans la base $\mathcal{L}$. L'hyperplan H a donc pour équation $x_0 + \cdots + x_n = 0$ dans $\mathcal{L}$, où l'on revient aux notations x_k des composantes d'un vecteur quelconque dans une base donnée. On sait alors que

$$d(Q, H) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \right| \, .$$

465. **RMS 2009 1021 Centrale PC (calcul formel)**

Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P,Q\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)Q(n)}{2^n}$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

(b) Calculer la valeur de $\langle X^k,1\rangle$ pour tout $k\leqslant 10$.

(c) Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n^4+an^3+n^2+bn+c)^2}{2^n}$.

Solution. —

(a) Tout d'abord, la série de terme général $P(n)Q(n)/2^n$ est convergente pour tous polynômes P et Q en vertu des comparaisons usuelles.

La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Si $\langle P,P\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(P(n))^2}{2^n}=0$ alors chaque $P(n)$ est nul (somme de termes positifs), donc P admet une infinité de racines, donc P est nul.

(b) On suppose que l'indéterminée de tous les polynômes est la lettre X. On programme alors le calcul de $\langle P,Q\rangle$ par

```
scal:=proc(P,Q)
local n;
sum(subs(X=n,P)*subs(X=n,Q)/2^n,n=0..infinity)
end proc;
```

La commande `seq(produitscalaire(X^k,1)=scal(X**k,1),k=0..10)` donne alors

$$\langle X^0,1\rangle=2,\quad \langle X^1,1\rangle=2,\quad \langle X^2,1\rangle=6,\quad \langle X^3,1\rangle=26,\quad \langle X^4,1\rangle=150,\quad \langle X^5,1\rangle=1082,\quad \langle X^6,1\rangle=9366,$$
$$\langle X^7,1\rangle=94586,\quad \langle X^8,1\rangle=1091670,\quad \langle X^9,1\rangle=14174522,\quad \langle X^{10},1\rangle=204495126\,.$$

(c) Il s'agit de calculer $\inf\|(X^4+X^2)-P\|^2$ où P varie dans $F=\mathrm{Vect}(1,X,X^3)$, et où $\|\ \|$ est la norme associée au produit scalaire de l'exercice. Le cours affirme que cette borne inférieure est un minimum, atteint pour le seul polynôme P_0 qui est le projeté orthogonal de X^4+X^2 sur F :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n^4+an^3+n^2+bn+c)^2}{2^n}=\inf_{P\in F}\|X^4+X^2-P\|=\|X^4+X^2-P_0\|^2\,.$$

Le calcul est plus simple comme suit : soit D la droite supplémentaire orthogonale de F dans $G=F\oplus\mathrm{Vect}(X^4+X^2)$ et soit P_1 le projeté orthogonal de X^4+X^2 sur D. Alors $\|X^4+X^2-P_0\|^2=\|P_1\|^2$. Or il est simple de calculer P_1 : il suffit d'appliquer le procédé de Gram et Schmidt à la famille $(1,X,X^3,X^4+X^2)$ qui donne la base orthonormale (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3). Le polynôme P_1 vaut alors $\langle Q_3,X^4+X^2\rangle Q_3$, et $\|P_1\|^2=\langle Q_3,X^4+X^2\rangle^2$.

On donne ci-dessous une procédure `MonGramSchmidt` qui orthonormalise une famille libre quelconque d'un espace euclidien quelconque : le produit scalaire de x et y est noté `scal(x,y)`. La procédure prend comme argument une famille L de E supposée libre (des divisions par zéro se produiront si la famille est liée), et retourne une famille libre orthonormale B qui est une base de $\mathrm{Vect}(L)$. Les familles sont codées par des listes d'expressions, et non par des fonctions, pour éviter les difficultés d'évaluation inhérentes à Maple.

```
MonGramSchmidt:=proc(L)
local i, suivant, B, n;
n:=nops(L);
B:=[L[1]/sqrt(scal(L[1],L[1]))];
for i from 1 to n-1 do
suivant:=L[i+1]-sum(scal(L[i+1],B[j])*B[j],j=1..i);
B:=[op(B),suivant/sqrt(scal(suivant,suivant))];
end do;
B;
end proc;
```

L'appel de `B:=MonGramSchmidt([1,X,X**2,X**3,X**4])` fournit

$$B=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}X-\frac{1}{2},\ \frac{1}{72}X^3-\frac{31}{72}X+\frac{1}{4},\ \frac{3\sqrt{11042}}{88336}\left(X^4+X^2-\frac{188}{3}+\frac{3928}{27}X-\frac{334}{27}X^3\right)\right]$$

On valide ensuite `scal(B[4],X^4+X^2)^2` pour obtenir

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n^4+an^3+n^2+bn+c)^2}{2^n}=\frac{706688}{9}\,.$$

466. **RMS 2009 1022 Centrale PC (calcul formel)**
Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Écrire une procédure calculant $\langle P,Q\rangle$.

(b) Justifier l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n unitaire de degré n et $\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\neq m$, $\langle P_n,P_m\rangle=0$.

(c) Écrire une procédure calculant P_n par récurrence sur n. Donner $P_0,\dots,P_5$ et tracer leurs graphes.

(d) Montrer que P_n admet n racines dans $[-1,1]$.

Solution. —

(a) Tout d'abord, l'intégrale est convergente : les polynômes étant des fonctions continues, il existe un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in[-1,1]$, $|P(t)Q(t)|\leqslant M$. Alors $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\leqslant h(t)=\frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$. Comme $h(t)\sim_1\frac{M/\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}$ et comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge, il en est de même de $\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ (convergence absolue). On traite de la même façon l'intégrale $\int_{-1}^{0}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

La bilinéarité et la symétrie sont banales. Si $\langle P,P\rangle=0$, alors la fonction continue positive $t\mapsto\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est identiquement nulle, donc P a une infinité de racines, donc P est nul.

La procédure `scal:=proc(P,Q) int(P*Q/sqrt(1-t**2),t=-1..1); end proc.` calcule $\langle P,Q\rangle$ (on suppose que les polynômes sont des expressions en la variable t) :

(b) L'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n est de degré n et $\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\neq m$, $\langle P_n,P_m\rangle=0$ est obtenue en appliquant l'algorithme d'orthogonalisation de Gram et Schmidt à la base canonique. Il suffit ensuite de multiplier chaque polynôme par l'inverse de son coefficient dominant pour obtenir des P_n unitaires.

L'unicité se prouve ainsi : supposons que (Q_n) soit une suite vérifiant les mêmes propriétés que la suite (P_n) construite par le procédé de Schmidt ci-dessus, et montrons par récurrence complète que $Q_n=P_n$ pour tout n.

Le polynôme Q_0 devant être une constante non nulle (condition de degré) et égale à 1 (unitaire), $Q_0=1=P_0$.

Supposons que $Q_k=P_k$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Alors les conditions $\langle Q_n,Q_k\rangle=\langle Q_n,P_k\rangle=0$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$ disent que Q_n appartient à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque $\deg(Q_n)=n$). Or cet orthogonal est une droite, engendrée par P_n : les polynômes P_n et Q_n sont colinéaires, et comme ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux.

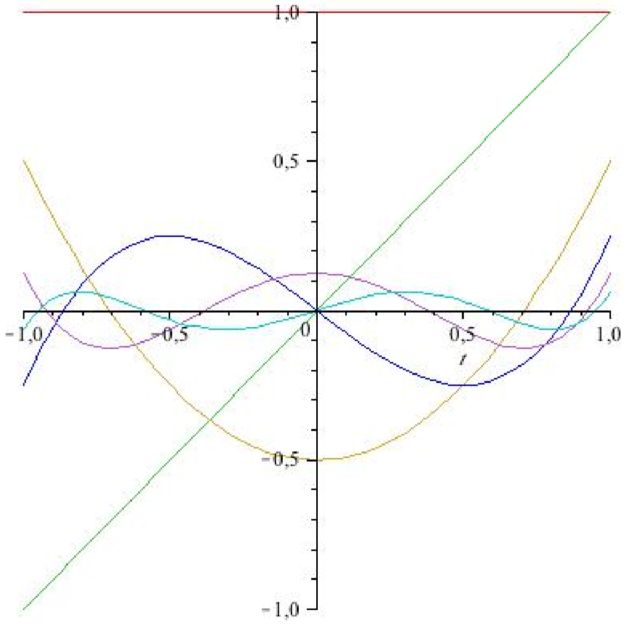
(c) Je m'écarte un peu de l'énoncé : il suffit d'utiliser une procédure qui effectue l'orthonormalisation de Gram et Schmidt (voir l'exercice 465 page 328), suivie d'une procédure qui rend unitaire un polynôme, comme par exemple `rendunitaire:=proc(P) expand(P/ lcoeff(P,t)); end proc`. On appelle ensuite

```
B:=map(simplify,MonGramSchmidt([1,t,t**2,t**3,t**4,t**5])):C:=map(rendunitaire,B)
```

On obtient

$$C=\left[1,t,\ t^2-\frac{1}{2},\ t^3-\frac{3}{4}t,\ t^4+\frac{1}{8}t^2,\ t^5+\frac{5}{16}t-\frac{5}{4}t^3\right].$$

On lit les P_k dans la liste ci-dessus. Leurs graphes, qu'on choisit de tracer sur $[-1,1]$ au vu de la question suivante, sont obtenus par `with(plots):plot(C,t=-1..1)`. Ci-dessous, P_0 est en rouge, P_1 en vert, P_2 en orange, P_3 en bleu foncé, P_4 en violet et P_5 en bleu ciel.



(d) On note $-1 < t_1 < \cdots < t_r < -1$ les racines d'ordre *impair* de P_n dans $]-1,1[$, et on va montrer par l'absurde que $r = n$. Alors P_n possédera n racines d'ordre impair dans $]-1,1[$ et, comme $\deg(P_n) = n$, on pourra même affirmer que ces racines sont simples et qu'elles constituent l'ensemble des racines complexes de P_n.

Si $r \neq n$, comme $\deg(P_n) = n$, c'est que $r < n$. On pose alors $H(t) = (t - t_1)\cdots(t - t_r)$, et on convient que $H = 1$ si $r = 0$, c'est-à-dire si P_n n'a aucune racine d'ordre impair dans $]-1,1[$. Par définition, P_n change de signe dans $]-1,1[$ en les points t_i et eux seulement, et il est clair qu'il en est de même de H. Alors le produit HP_n est de signe fixe dans $]-1,1[$.

Par ailleurs, comme $r < n$, le polynôme H appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc est une combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_{n-1}$ (ces polynômes étant échelonnés en degré, donc forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Comme la famille $(P_0, \dots, P_{n-1}, P_n)$ est orthogonale, on en déduit que

$$\langle H, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{H(t)P_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Mais comme HP_n est de signe fixe, les propriétés de l'intégrale des fonctions *continues* montrent que HP_n est identiquement nulle sur $]-1,1[$, ce qui est impossible, et achève la démonstration.

467. **RMS 2009 1023 Centrale PC (calcul formel)**

(a) Montrer que $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

(b) On suppose ici que $n = 3$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \mathrm{Vect}\{I_3, J, K\}\,.$$

Donner à l'aide de Maple une base orthonormée de $\mathcal{F}$. Calculer la distance de L à $\mathcal{F}$.

(c) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $G(v_1, \dots, v_p) = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice de Gram de $(v_1, \dots, v_p)$ définie par $g_{i,j} = \langle v_i, v_j\rangle$. Montrer que $G = {}^tVV$, où V est la matrice des v_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F. Si w est un vecteur de E, montrer que $d(w,F)^2 = \frac{\det G(v_1,\dots,v_p,w)}{\det G(v_1,\dots,v_p)}$. Retrouver le résultat du (b).

Solution. —

(a) La linéarité de la trace montre que l'application $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est bilinéaire.

Comme ${}^tBA = {}^t[{}^tAB]$, et comme la trace d'une matrice est la même que la trace de sa transposée, on en déduit que l'application étudiée est symétrique.

Enfin, $\mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}((\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$ vaut zéro si et seulement si tous les coefficients $a_{k,i}$ sont nuls, c'est-à-dire si $A = 0$. L'application étudiée est donc définie positive et, finalement, est un produit scalaire.

(b) La commande `GramSchmidt` de Maple, accessible dans la bibliothèque `linalg`, permet de résoudre le problème directement, à condition de transformer les matrices en vecteurs de $\mathbb{R}^9$. En effet, l'algorithme de Gram et Schmidt est programmé pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et lui seul. Comme $(A, B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$, on valide donc les lignes

```
with(linalg): II:=vector([1,0,0,0,1,0,0,0,1]): J:=vector([0,1,0,1,0,1,0,1,0]):
K:=vector([-1,0,-1,0,1,0,-1,0,-1]): resultat:=GramSchmidt([II,J,K]);
```

On obtient une base *orthogonale*. Si l'on veut une base *orthonormale*, il faut ajouter l'option `normalized`. En validant `resultat:=GramSchmidt([II,J,K],normalized)`, le résultat apparaît sous la forme d'une liste contenant les vecteurs suivants :

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \quad \left[0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right],$$
$$\left[-\frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{21}, 0, -\frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{21}, 0, 2\frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{21}, 0, -\frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{21}, 0, -\frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{21}\right].$$

Il faut le traduire ensuite matriciellement, ce qui s'obtient par `seq(evalm(matrix(3,3,op(i,resultat)),i=1..3)`. On obtient alors la base orthonormale suivante de $\mathcal{F}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} I_3, \quad \frac{1}{2} J, \quad \sqrt{\frac{2}{21}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le cours dit que la distance de L à $\mathcal{F}$ vaut $\|L - p_{\mathcal{F}}(L)\|$, où $p_{\mathcal{F}}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{F}$. C'est aussi $\|q(L)\|$, où q désigne le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{F}^\perp$, lorsque l'espace considéré est $\mathrm{Vect}(I_3, J, K, L)$ et non plus $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour calculer ce projeté $q(L)$, il suffit de poursuivre l'algorithme de Gram et Schmidt, à l'aide des commandes suivantes : `L :=vector([1,1,1,1,0,0,1,0,0])` puis `resultabis :=GramSchmidt([II,J,K,L],normalized)`. La quatrième matrice obtenue, notée E_4, est donnée sous forme de vecteur :

$$E_4 = \left[2\frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{105}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{30}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{35}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{30}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{35}, -\frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{30}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{35}, -\frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{30}, \frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{21}\right].$$

Alors $q(L) = \langle E_4, L\rangle E_4$ et $\|q(L)\| = |\langle E_4, L\rangle|$. On obtient $d(L, \mathcal{F})$ par `abs(dotprod(resultatbis[4],L))` :

$$\frac{\sqrt{15}\sqrt{7}}{7} = \sqrt{\frac{105}{7}}.$$

(c) Si l'on note $v_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) les composantes du vecteur v_i dans la base canonique, le terme en position (i, j) de la matrice ${}^tVV$ est $\sum_{k=1}^n v_{k,i} v_{k,j}$, qui est précisément l'expression du produit scalaire $\langle v_i, v_j\rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit q le projecteur orthogonal sur F. On écrit $w = y + z$ avec $y = q(w) \in F$ et $z = w - q(w) \in F^\perp$, de sorte de $d(w, F) = \|w - q(w)\| = \|z\|$. On montre ensuite (voir par exemple l'exercice [référence manquante]) qu'un déterminant de Gram n'est pas modifié lorsqu'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres. En particulier, comme $y = q(w) \in F$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$, on a $G(v_1, \ldots, v_p, w) = G(v_1, \ldots, v_p, w - q(w)) = G(v_1, \ldots, v_p, z)$. Comme z est orthogonal à tous les v_i, la matrice de Gram $G(v_1, \ldots, v_p, z)$ est diagonale par blocs :

$$G(v_1, \ldots, v_p, z) = \begin{pmatrix} G(v_1, \ldots, v_p) & 0 \\ 0 & \|z\|^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det G(v_1, \ldots, v_p, z) = \det G(v_1, \ldots, v_p)\|z\|^2$, donc que

$$\|z\|^2 = d(w, F)^2 = \frac{\det G(v_1, \ldots, v_p, z)}{\det G(v_1, \ldots, v_p)} = \frac{\det G(v_1, \ldots, v_p, w)}{\det G(v_1, \ldots, v_p)}.$$

à condition que le dénominateur ne soit pas nul. C'est précisément à cela que sert la question (c).
Montrons que la matrice ${}^tVV$, carrée d'ordre p, est inversible. En effet, soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tVVX = 0$. Alors, au sens de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\|VX\|^2 = {}^t(VX)(VX) = {}^tX\,{}^tVVX = 0$, donc

$$VX = 0.$$

Or la famille $(v_1,\dots,v_p)$ est une base de F donc une famille libre, donc la matrice V des composantes des v_i sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est de rang maximal p. Si on la considère comme la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, la formule du rang donne $\dim(\operatorname{Ker} f)+\operatorname{rg} f=\dim(\operatorname{Ker} f)+p=p$, donc f est injective, donc $VX=0$ implique $X=0$. Il en résulte bien que ${}^tVV$ est inversible donc que $\det({}^tVV)=\det G(v_1,\dots,v_p)\neq 0$.

On retrouve le résultat du (b) en validant

```
V:=augment(II,J,K):W:=augment(II,J,K,L):sqrt(det(transpose(W)&*W)/det(transpose(V)&*V));
```

Maple affiche $\sqrt{105}/7$: c'est bien la même chose.

468. RMS 2009 1024 Centrale PC

(a) Une symétrie est-elle un endomorphisme symétrique ?

(b) Une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?

(c) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales et symétriques ?

(d) Quelles sont les matrices de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables ?

Solution. — On comprend que le cadre de l'exercice est un espace euclidien non banal, c'est-à-dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n\geqslant 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

(a) Un théorème du cours affirme qu'une symétrie s (de base F, de direction G) est endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale ($F=G^\perp$). Or tous les couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ne sont pas orthogonaux, du moins si $n\geqslant 2$. la réponse est donc non (sauf si $n=1$).

(b) Un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif (on le nomme d'ailleurs souvent automorphisme orthogonal). La seule projection qui soit bijective est l'identité de E, qui est par ailleurs un automorphisme orthogonal. La réponse est donc non, sauf s'il s'agit de id_E.

(c) Ce sont les matrices de symétries orthogonales pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$. Si l'on veut une réponse plus précise (un paramétrage), on utilise les formules suivantes, où e est un vecteur unitaire,

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\quad r(x)=x-2\langle e,x\rangle\ ,$$
$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\quad d(x)=-r(x)\ ,$$

qui donnent respectivement l'expression de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $e^\perp$, et l'expression de la symétrie orthogonale de base $\mathrm{Vect}(e)$, ou demi-tour d'axe $\mathrm{Vect}(e)$.

(d) On comprend ici : diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Si λ est une valeur propre d'une matrice $A\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et V un vecteur propre associé, comme A conserve les normes, on aura $\|AV\|=\|V\|=|\lambda|\|V\|$. Comme $V\neq 0$, on en déduit que $|\lambda|=1$, donc que $\lambda=\pm 1$. Si A est diagonalisable, elle est donc semblable à une matrice de symétrie. La réciproque étant évidente, la réponse est : les matrices de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sont les matrices des symétries orthogonales.

469. RMS 2009 1025 Centrale PC

Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u\in E$ unitaire. Soit $f\colon x\mapsto\langle x,u\rangle u+u\wedge x$.

(a) Montrer que f est une isométrie de E.

(b) Caractériser f.

(c) Quelles sont les isométries g de E telles que $g^2=f$?

Solution. — On note D la droite engendrée par u et P le plan orthogonal à D, qui sera orienté par u dans tout l'exercice. On notera r_θ la rotation de P ainsi orienté d'angle θ.

(a) On écrit un vecteur x quelconque de E sous la forme $x=y+z$, avec $y\in D$ et $z\in P$. Alors $f(x)=\langle y,u\rangle u+u\wedge z$. Comme u et $u\wedge z$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne $\|f(x)\|^2=\|\langle y,u\rangle u\|^2+\|u\wedge z\|^2$. Comme u est unitaire et y colinéaire à u, on a $\|\langle y,u\rangle u\|^2=\|y\|^2$. Comme u est unitaire et orthogonal à z, on a $\|u\wedge z\|^2=\|z\|^2$. Finalement,

$$\forall x\in E,\quad \|f(x)\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2=\|x\|^2\ ,$$

ce qui montre que f est une isométrie (la dernière égalité vient de ce que y et z sont orthogonaux).

(b) Comme $f(y)=y$ pour tout $y\in D$, et comme $f(z)\neq z$ pour tout $z\in P\neq\{0\}$, le sous-espace des vecteurs fixes de f est la droite D, donc f est une rotation d'axe D. Par ailleurs, comme P est orienté par u, l'angle $(z,f(z))=(z,u\wedge z)$ vaut $\pi/2$ pour tout $z\in P\neq\{0\}$, donc f est la rotation d'axe D orienté par u et d'angle $\pi/2$.

(c) Analyse. Si $g^2 = f$, alors g commute avec f, donc stabilise la droite propre D de f. Mais comme g est une isométrie, si elle stabilise un sous-espace vectoriel, elle stabilise aussi son orthogonal, donc g stabilise P.
Comme l'endomorphisme g_D induit par g sur D est une isométrie, il n'y a que deux possibilités : $g_D = \mathrm{id}_D$ ou bien $g_D = -\mathrm{id}_D$. De même, comme l'endomorphisme g_P induit par g sur P est une isométrie, ce ne peut-être *a priori* qu'une rotation ou une réflexion de P. Dans le second cas, l'axe (inclus dans P) de g_P serait fixe par g_P, donc par g_P^2, donc par f, ce qui est impossible car seuls les vecteurs de D sont fixes par f. Il faut donc que g_P soit une rotation de P (orienté par u), et on appelle θ son angle : $g_P = r_\theta$.
On constate alors que $g^2(x) = g_D^2(y) + g_P^2(z) = y + r_{2\theta}(z)$, avec les notations de la question (a). Comme $f(x) = y + r_{\pi/2}(z)$ avec les mêmes notations, l'égalité $g^2 = f$ impose que $2\theta = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$, ce qui donne deux solutions modulo 2π, à savoir $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$
Synthèse. On obtient quatre isométries g éventuelles :
– si $g_D = \mathrm{id}_D$, les deux rotations d'axe D dirigé par u, d'angles $\pi/4$ et $3\pi/4$;
– si $g_D = -\mathrm{id}_D$, les deux composées commutatives de la réflexion orthogonale de plan P et des rotations ci-dessus.
On vérifie aisément que $g^2 = f$ dans les quatre cas.

470. **RMS 2009 1026 Centrale PC**
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}.$$

Caractériser f.

Solution. — Si l'on note u le vecteur (a, b, c), on reconnaît que f est l'endomorphisme $x \mapsto \langle x, u\rangle u + u \wedge x$. L'exercice 469 page 332 montre alors que f est la rotation d'axe D orienté par u et d'angle $\pi/2$.

471. **RMS 2009 1027 Centrale PC**
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
(b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur orthogonal.

Solution. —
(a) Étant symétrique, g est diagonalisable : soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base propre de g associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $\langle g(e_i), e_i\rangle = 0 = \lambda_i \|e_i\|^2$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc toutes les valeurs propres de g sont nulles, donc (g est diagonalisable) g est nul.
(b) Soit $z \in E$. Alors $\langle (g \circ g)(z), z = \langle g(z), g(z)\rangle = \|g(z)\|^2$ car g est symétrique. Mais on a aussi $\langle g(z), z\rangle = \|g(z)\|^2$ par hypothèse. On en déduit que $\langle f(z), z\rangle = 0$ pour tout $z \in E$, où l'on a posé $f = g \circ g - g$. Comme g est symétrique, f aussi, et la question (a) affirme alors que f est nul, donc que $g \circ g = g$, c'est-à-dire que g est un projecteur.
On sait par ailleurs que les conditions « être symétrique » et « être orthogonal » sont équivalentes pour un projecteur, ce qui achève de montrer que g est un projecteur orthogonal.

472. **RMS 2009 1028 Centrale PC**
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $f\colon x \in E \mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.

(a) L'endomorphisme f est-il symétrique ? Est-il défini positif ?
(b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = f^{-1}$.

Solution. —
(a) Soient x et y deux vecteurs de E. Alors $\langle f(x), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n \langle y, e_i\rangle e_i\rangle = \langle x, f(y)\rangle$, donc f est symétrique.
En particulier, $\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\langle x, e_i\rangle = 0$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si x appartient à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Comme cette famille est une base de E, on en déduit que $x = 0$, ce qui achève de prouver que f est défini positif.
(b) Comme f est symétrique réel, il est diagonalisable sur une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$. Comme il est défini positif, ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont strictement positives (elles sont données dans l'ordre tel que $f(u_i) = \lambda_i u_i$ pour tout i). Si l'on note $(p_1, \ldots, p_n)$ la famille de projecteurs associées à la base $\mathcal{G}$, on a $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ et $f^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} p_i$. Il suffit alors de poser

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1/2} p_i$$

pour que $v^2 = f^{-1}$.

473. **RMS 2009 1029 Centrale PC**

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\{\,{}^t\!AB + {}^t\!BA,\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

(b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f_A est un automorphisme.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de f_A.

Solution. — On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel $\{\,{}^t\!AB+{}^t\!BA, (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$ et $E_{i,j}$ la matrice élémentaire comportant un 1 en position (i,j), les autres éléments étant nuls. On rappelle la formule de multiplication $E_{i,j}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, valable pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

(a) Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, la matrice ${}^t\!AB + {}^t\!BA$ est symétrique, ce qui prouve l'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En posant $A = E_{i,j}$ et $B = E_{i,k}$, on obtient que ${}^t\!AB + {}^t\!BA = E_{j,i}E_{i,k} + E_{k,i}E_{i,j} = E_{j,k} + E_{k,j} \in \mathcal{F}$. Or la famille $(E_{j,k} + E_{k,j})_{1\leqslant j<k\leqslant n}$ constitue une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre, compte-tenu de ce que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel, l'inclusion inverse $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. Finalement,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\{\,{}^t\!AB + {}^t\!BA,\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}\,.$$

(b) L'application f_A est manifestement linéaire, et la question (a) montre qu'elle est à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie. Par conséquent, il suffit de démontrer que f_A est injective pour établir que c'est un automorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On suppose donc que $AM + MA = 0$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A pour une valeur propre $\lambda > 0$. Alors $A(MX) = -M(AX) = -M(\lambda X) = -\lambda(MX)$. Comme $-\lambda < 0$ et comme A n'a pas de valeur propre négative, il faut que $MX = 0$. Comme A est diagonalisable, on a ainsi prouvé que $MX = 0$ pour tout X appartenant à une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc que $M = 0$.

(c) Comme A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable. Une étude rapide montre que le spectre de A est $\{-1,1,2\}$ et que, si P désigne la matrice orthogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

alors $A = PA'\,{}^t\!P$, avec $A' = \mathrm{diag}(-1,1,2)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M' = {}^t\!PMP$. On constate que M est symétrique si et seulement si M' l'est, et que l'équation aux valeurs et vecteurs propres $f_A(M) = \lambda M$ est équivalente à $f_{A'}(M') = \lambda M'$ (multiplier à gauche par ${}^t\!P$ et à droite par P). On note (E_1,E_2,E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de sorte que l'équation $f_{A'}(M') = \lambda M'$ soit équivalente au système $[f_{A'}(M')]E_i = \lambda M'E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, ou encore à

$$\left\{\begin{array}{rcl} A'(M'E_1) & = & (\lambda+1)(M'E_1)\,, \\ A'(M'E_2) & = & (\lambda-1)(M'E_2)\,, \\ A'(M'E_3) & = & (\lambda-2)(M'E_3)\,. \end{array}\right. \qquad (S)$$

Les inconnues de ce système sont λ et M', et on cherche des valeurs de λ pour lesquelles il existe au moins une matrice *symétrique non nulle* solution. Si $\{\lambda+1,\lambda-1,\lambda-2\} \cap \mathrm{Sp}(A)$ est vide, alors il faut que $M'E_1 = M'E_2 = M'E_3 = 0$, donc que $M' = 0$. On écarte ce cas.

Sinon, compte-tenu des équivalences

$$\begin{aligned} \lambda+1 \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \lambda \in \{-2,0,1\}\,, \\ \lambda-1 \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \lambda \in \{0,2,3\}\,, \\ \lambda-2 \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \lambda \in \{1,3,4\}\,, \end{aligned}$$

on examine les six cas possibles : $\lambda \in \{-2,0,1,2,3,4\}$.

- Cas où $\lambda = -2$. Alors (S) équivaut à $M'E_1$ colinéaire à E_1 et $M'E_2 = M'E_3 = 0$. Une telle M' étant bien symétrique, on vient de montrer que -2 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par la matrice $PE_{1,1}\,{}^t\!P$.
- Cas où $\lambda = 0$. Alors (S) équivaut à $M'E_1$ colinéaire à E_2, $M'E_2$ colinéaire à E_1, et $M'E_3 = 0$. Une telle matrice M' est symétrique si et seulement si les deux coefficients de colinéarité sont égaux, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M' = \alpha(E_{1,2} + E_{2,1})$. On vient de montrer que 0 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant — le noyau — est la droite engendrée par la matrice $P(E_{1,2} + E_{2,1})\,{}^t\!P$.

– Cas où $\lambda = 1$. Alors (S) équivaut à $M'E_1$ colinéaire à E_3, $M'E_3$ colinéaire à E_1, et $M'E_2 = 0$. Une telle matrice M' est symétrique si et seulement si les deux coefficients de colinéarité sont égaux, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M' = \alpha(E_{1,3} + E_{3,1})$. On vient de montrer que 1 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par la matrice $P(E_{1,3} + E_{3,1})\,{}^tP$.
– Cas où $\lambda = 2$. Alors (S) équivaut à $M'E_1 = M'E_3 = 0$ et $M'E_2$ colinéaire à E_2. Une telle M' étant bien symétrique, on vient de montrer que 2 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par la matrice $PE_{2,2}\,{}^tP$.
– Cas où $\lambda = 3$. Alors (S) équivaut à $M'E_1 = 0$, $M'E_2$ colinéaire à E_3 et $M'E_3$ colinéaire à E_2. Une telle matrice M' est symétrique si et seulement si les deux coefficients de colinéarité sont égaux, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M' = \alpha(E_{2,3} + E_{3,2})$. On vient de montrer que 3 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par la matrice $P(E_{2,3} + E_{3,2})\,{}^tP$.
– Cas où $\lambda = 4$. Alors (S) équivaut à $M'E_1 = M'E_2 = 0$ et $M'E_3$ colinéaire à E_3. Une telle M' étant bien symétrique, on vient de montrer que -4 est une valeur propre de f_A et que le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par la matrice $PE_{3,3}\,{}^tP$.

En résumé, f_A possède 6 valeurs propres simples et, comme $\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = 6$, c'est un endomorphisme diagonalisable.

474. **RMS 2009 1030 Centrale PC**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a et b deux vecteurs de E linéairement indépendants, et $\varphi\colon x \in E \mapsto \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u(x), x\rangle$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de u.

(c) Calculer $\max_{\|x\|=1} \varphi(x)$ et $\min_{\|x\|=1} \varphi(x)$.

Solution. — Voici un calcul préliminaire : si u est un endomorphisme symétrique, alors

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle\,,\\ &= \langle u(x), x\rangle + \langle x, u(y)\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle\,, \text{car } u \in \mathcal{S}(E),\\ &= \langle u(x), x\rangle + 2\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), y\rangle \text{ car le produit scalaire est symétrique.}\end{aligned}$$

On en déduit l'identité de polarisation $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \frac{1}{2}(\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x), x\rangle - \langle u(y), y\rangle)$.

(a) Analyse. Si u existe, alors l'identité de polarisation énoncée ci-dessus montre que

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle a, x+y\rangle\langle b, x+y\rangle - \langle a, x\rangle\langle b, x\rangle - \langle a, y\rangle\langle b, y\rangle\right),\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle a, x\rangle\langle b, y\rangle + \langle a, y\rangle\langle b, x\rangle\right),\\ &= \left\langle \frac{1}{2}(\langle b, x\rangle a + \langle a, x\rangle b), y\right\rangle,\\ &= \langle v(x), y\rangle,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$v\colon x \in E \mapsto \frac{1}{2}(\langle b, x\rangle a + \langle a, x\rangle b)\,.$$

Par suite $\langle (u-v)(x), y\rangle = 0$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Si l'on applique cette égalité avec $y = (u-v)(x)$, on obtient $\|(u-v)(x)\|^2 = 0$ pour tout $x \in E$, donc $u = v$ nécessairement

Synthèse. On vérifie successivement :
– que v est un endomorphisme (c'est clair) ;
– que v est symétrique : il suffit pour cela de reprendre les calculs ci-dessus, montrant que $\langle v(x), y\rangle = \frac{1}{2}(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y))$, expression à l'évidence symétrique en x et y ;
– que $\langle v(x), x\rangle = \varphi(x)$: c'est immédiat.

(b) Avec l'expression du (a), le noyau de u est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $\langle b, x\rangle a + \langle a, x\rangle b = 0$. Comme a et b ne sont pas colinéaires, cela équivaut à $\langle b, x\rangle = \langle a, x\rangle = 0$. Si l'on note P le plan vectoriel de E dont (a,b) est une base, on vient de montrer que

$$\operatorname{Ker} u = P^{\perp}.$$

Pour un endomorphisme symétrique, l'égalité $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ est une conséquence du théorème spectral (diagonalisation *dans une base orthonormale*). On peut aussi dire que l'expression même de u montre que $\operatorname{Im} u \subset P$. La formule du rang impliquant que $\operatorname{rg} u = 2$, on conclut finalement que

$$\operatorname{Im} u = P\,.$$

(c) Établissons le lemme suivant : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors $\max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$ est la plus grande valeur propre de u, et $\min_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$ la plus petite.

Notons pour cela $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ les valeurs propres de u, et $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres correspondants. Le théorème spectral affirme que $E = \oplus_{i=1}^{k} E_i$, les E_i étant deux à deux orthogonaux. Si $x = x_1 + \cdots + x_k$ est la décomposition d'un vecteur quelconque de E suivant cette somme directe orthogonale, on a $\langle u(x), x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} x_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x_i\|^2$. Comme les x_i sont deux à deux orthogonaux, le théorème de Pythagore donne $\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 = \|x\|^2$, et on en déduit l'encadrement

$$\forall x \in E, \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_k \|x\|^2.$$

En particulier, si $\|x\| = 1$, on obtient $\lambda_1 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_k$. De plus les bornes sont atteintes : il suffit de choisir $x = x_1 \in E_1$ (ou $x = x_k \in E_k$) de norme 1, ce qui achève la preuve du lemme.

Dans le cas de l'exercice, on connaît déjà la valeur propre zéro de u, associée au sous-espace propre $P^{\perp}$ (à condition que $n \geqslant 3$, sinon $P^{\perp} = \{0\}$). Il reste à déterminer les deux autres valeurs propres de u, en étudiant l'endomorphisme v induit par u sur P. Dans la base (a, b) de P, la matrice de v vaut

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \langle a, b\rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b\rangle \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\chi_v = X^2 - \langle a, b\rangle X + \frac{1}{4}(\langle a, b\rangle^2 - \|a\|^2\,\|b\|^2)$, dont le discriminant est $\|a\|^2\,\|b\|^2$, et les racines $\frac{1}{2}(\langle a, b\rangle \pm \|a\|\|b\|)$. Les trois valeurs propres de u rangées par ordre strictement croissant sont donc $\frac{1}{2}(\langle a, b\rangle - \|a\|\|b\|) < 0 < \frac{1}{2}(\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|)$: les inégalités sont strictes car le noyau est réduit à $P^{\perp}$ (ou, ce qui confirme le calcul du noyau, car a et b ne sont pas colinéaires donc l'inégalité de Cauchy et Schwarz est stricte). On en déduit que

$$\max_{\|x\|=1} \varphi(x) = \frac{1}{2}(\langle a, b\rangle - \|a\|\|b\|)\,,$$
$$\min_{\|x\|=1} \varphi(x) = \frac{1}{2}(\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|)\,.$$

Analyse

475. RMS 2009 1031 Centrale PC

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(a) Montrer que $\|\ \|_2$ est une norme sur E. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\Phi\colon f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$. L'application Φ est-elle continue pour la norme $\|\ \|_2$?

(b) Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$?

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\|_\infty \leqslant C\|P\|_2$?

Solution. —

(a) Le cours affirme que $\|\ \|_2$ est une norme sur E. On montre ensuite que l'application Φ n'est pas continue pour la norme $\|\ \|_2$, en construisant une suite de fonctions (f_n) qui converge vers zéro pour la norme $\|\ \|_2$ mais telle que $\Phi(f_n) = 1$ pour tout n.

Pour cela, on considère la fonction affine par morceaux f_n sur $[0,1]$ (donc continue), adaptée à la subdivision $(0, \alpha - 1/n, \alpha, \alpha + 1/n, 1)$, définie par $f_n(0) = f_n(\alpha - 1/n) = f_n(\alpha + 1/n) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\alpha) = 1$: il faut supposer que n est suffisamment grand pour que $0 \leqslant \alpha - 1/n$ et $\alpha + 1/n \leqslant 1$, et il faut adapter cette définition aux cas où $\alpha \in \{0,1\}$. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ et par translation de la variable dans l'intégrale, on trouve $\int_0^1 f_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\alpha-1/n}^{\alpha} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/n} (nt)^2\,\mathrm{d}t = 2/(3n)$. Par suite, $\|f_n\|_2 = \sqrt{2/(3n)}$ tend bien vers zéro quand n tend vers $+\infty$, ce qui achève la preuve.

(b) La réponse est non, et la même suite (f_n) fournit une preuve, puisque $\|f_n\|_\infty = 1$ et $C\|f_n\|_2 = C\sqrt{2/(3n)}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(c) La réponse est oui, car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (contrairement à E), donc que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

476. **RMS 2011 948 Centrale PC**

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soit $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|$. Montrer que Φ est une application continue de $(E, \|\ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. — L'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que $\forall f \in E,\quad \Phi(f) \leqslant \left(\int_0^1 1\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$. On en déduit que Φ est 1–lipschitzienne :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ |\Phi(f) - \Phi(g)| = \left|\int_0^1 |f| - |g|\right| \leqslant \int_0^1 ||f| - |g|| \leqslant \int_0^1 |f - g| \leqslant \|f - g\|_2\,,$$

donc que Φ est continue.

477. **RMS 2011 949 Centrale PC**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Si $P \in E$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max_{[-1,1]} |P'|$.

(a) Montrer que N_a est une norme.

(b) Si $(a,b) \in [-1,1]^2$, montrer que N_a et N_b sont équivalentes.

(c) Que dire si $a \in [-1,1]$ et $b > 1$?

Solution. —

(a) On suppose que $N_a(P) = 0$. Alors $P(a) = 0$ et la fonction polynomiale P' est nulle sur le segment $[-1,1]$. Ayant une infinité de racines, le polynôme P' est nul. par suite P est un polynôme scalaire, et comme $P(a) = 0$, c'est que $P = 0$.
Le caractère positivement homogène est banal.
Si P et Q sont deux éléments de E, on a $\forall x \in [-1,1]$, $|(P+Q)(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant \max_{[-1,1]} |P'| + \max_{[-1,1]} |Q'|$, d'où l'on déduit que $\max_{[-1,1]} |(P+Q)'| \leqslant \max_{[-1,1]} |P'| + \max_{[-1,1]} |Q'|$. En ajoutant cette inégalité à l'inégalité triangulaire $|(P+Q)(a)| \leqslant |P(a)| + |Q(a)|$, on obtient $N_a(P+Q) \leqslant N_a(P) + N_a(Q)$.
Finalement, N_a est une norme.

(b) Dans la majoration ci-dessous, le calcul essentiel est le suivant : si $(a,b) \in [-1,1]^2$, alors (il est nécessaire de laisser les valeurs absolues autour de $\int_a^b \cdots$, car on ne sait pas si $a \leqslant b$ ou non) :

$$|P(a)| - |P(b)| \leqslant |P(a) - P(b)| = \left|\int_a^b P'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b |P'(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b \max_{[-1,1]} |P'|\,\mathrm{d}t\right| = |b-a| \max_{[-1,1]} |P'| \leqslant \max_{[-1,1]} |P'|\,.$$

Il en résulte que

$$N_a(P) = |P(a)| + \max_{[-1,1]} |P'| = |P(b)| + |P(a)| - |P(b)| + \max_{[-1,1]} |P'| \leqslant |P(b)| + 2\max_{[-1,1]} |P'| \leqslant 2|P(b)| + 2\max_{[-1,1]} |P'| = 2N_b(P).$$

On montrerait de la même manière que $N_b(P) \leqslant 2N_a(P)$, et on conclut que N_a et N_b sont équivalentes.

(c) Si $a \in [-1,1]$ et $b > 1$, alors quand n tend vers l'infini, $N_a(X^n) = |a^n| + n \sim n$ et $N_b(X^n) = b^n + n \sim b^n$, donc $N_a(X^n) = \mathrm{o}(N_b(X^n))$, ce qui montre que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

478. **RMS 2009 1032 Centrale PC**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour g et f dans E, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Solution. —

(a) Pour tout $(\lambda, f, h) \in \mathbb{R} \times E \times E$, on a $N_g(\lambda f) = \|\lambda g f\|_\infty = |\lambda|\,\|gf\|_\infty = |\lambda| N_g(f)$ et $N_g(f+h) = \|g(f+h)\|_\infty = \|gf + gh\|_\infty \leqslant \|gf\|_\infty + \|gh\|_\infty = N_g(f) + N_g(h)$. Les deux premiers axiomes d'une norme sont donc vérifiés.
On montre ensuite que N_g est définie positive si et seulement si l'ensemble des zéros de g ne contient aucun intervalle non banal (i. e. de longueur strictement positive), ce qui équivaut à : $\{x \in [0,1],\ g(x) \neq 0\}$ est dense dans $[0,1]$.
Condition suffisante. Supposons que $Z' = \{x \in [0,1],\ g(x) \neq 0\}$ soit dense dans $[0,1]$ et que $f \in E$ vérifie $N_g(f) = 0$. Alors $g(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in Z'$ dans un premier temps. dans un second temps, soit $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$. Comme Z' est dense dans $[0,1]$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Z'

qui converge vers x. Comme f est continue, $f(x)=\lim_{+\infty} f(x_n)$, et comme $f(x_n)=0$ puisque $x_n\in Z'$, on conclut que $f(x)=0$ aussi. Finalement f est identiquement nulle, ce qui montre que N_g est définie positive.

Condition nécessaire. Supposons que $Z'=\{x\in[0,1],\ g(x)\neq 0\}$ ne soit pas dense dans $[0,1]$, c'est-à-dire qu'il existe a et b tels que $0\leqslant a<b\leqslant b$ et $g(x)=0$ pour tout $x\in[a,b]$. Soit f_0 la fonction affine par morceaux sur $[0,1]$ (donc continue), adaptée à la subdivision $(0,a,(a+b)/2,b,1)$, définie par $f(0)=f(a)=f(b)=f(1)=0$ et $f((a+b)/2)=1$. Elle est non identiquement nulle, telle que gf_0 est identiquement nulle, donc telle que $N_g(f_0)=0$, ce qui montre que N_g n'est pas définie positive.

(b) On suppose ici que g satisfait la condition du (a) pour que N_g soit une norme. On remarque que $N_g(f)=\|gf\|_\infty\leqslant\beta\|f\|_\infty$ pour toute $f\in E$, avec $\beta=\|g\|_\infty>0$. On montre alors que N_g est équivalente à $\|\ \|_\infty$ si et seulement si g ne s'annule jamais sur $[0,1]$ (il suffit de tester l'existence d'un $\alpha>0$ tel que $\alpha\|\ \|_\infty\leqslant N_g$).

Condition suffisante. Si g ne s'annule jamais sur $[0,1]$, il en est de même de la fonction continue $|g|$. Cette dernière étant définie sur le segment $[0,1]$, elle admet un minimum $\alpha=|g(x_0)|>0$ pour un certain $x_0\in[0,1]$. Alors, pour tout $f\in E$, on a $\forall x\in[0,1]$, $|g(x)f(x)|\geqslant\alpha|f(x)|$, donc $N_g(f)\geqslant\alpha\|f\|_\infty$, ce qui montre que N_g est équivalente à $\|\ \|_\infty$.

Condition nécessaire. Si g s'annule en x_0 sur $[0,1]$, on considère la fonction affine par morceaux f_n sur $[0,1]$ (donc continue), adaptée à la subdivision $(0,x_0-1/n,x_0,x_0+1/n,1)$, définie par $f_n(0)=f_n(x_0-1/n)=f_n(x_0+1/n)=f_n(1)=0$ et $f_n(x_0)=1$: il faut supposer que n est suffisamment grand pour que $0\leqslant x_0-1/n$ et $x_0+1/n\leqslant 1$, et il faut adapter cette définition aux cas où $x_0\in\{0,1\}$. Par construction, $\|f_n\|_\infty=1$, et

$$N_g(f_n)=\sup_{x\in[x_0-1/n,x_0+1/n]}|g(x)f(x)|\leqslant\sup_{x\in[x_0-1/n,x_0+1/n]}|g(x)|\,.$$

Comme g est continue avec $g(x_0)=0$, on a $\sup_{x\in[x_0-1/n,x_0+1/n]}|g(x)|$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Il est alors impossible qu'il existe α tel que $0<\alpha\leqslant N_g(f_n)/\|f_n\|_\infty=N_g(f_n)$, puisque le majorant tend vers zéro. On conclut que N_g n'est pas équivalente à $\|\ \|_\infty$.

479. **RMS 2009 1033 Centrale PC**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n. Montrer que $\inf_{P\in E_n}\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t>0$.

Solution. — L'ensemble E_n est un hyperplan affine de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie que l'on munit de la norme définie par : $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_1=\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t$. Comme tout hyperplan en dimension finie, E_n est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$. On note B la boule fermée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour la norme $\|\ \|_1$, de centre 0 et de rayon $1/(n+1)$, et on pose $K=E_n\cap B$: c'est une partie fermée , en tant qu'intersection de deux fermés, et bornée, donc compacte.

On constate que $X^n\in E_n$, avec $\|X^n\|_1=1/(n+1)$. Par suite $\inf_{P\in E_n}\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t=\inf_{P\in K}\|P\|_1$. La fonction $P\mapsto\|P\|_1$ étant continue (toute norme considérée comme fonction à valeurs réelles est 1–lipschitzienne relativement à elle-même), et la partie K étant compacte, la borne inférieure est atteinte sur K, donc sur E_n, et vaut $\|P_0\|_1$ pour un certain polynôme non nul P_0 (puisqu'il est unitaire). On en déduit que $\inf_{P\in E_n}\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t>0$.

480. **RMS 2009 1034 Centrale PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=(n+u_n^{n-1})^{1/n}$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution. — On pose $v_n=u_n^{n-1}$. La suite $(v_n)_{n\geqslant1}$ est définie par $v_1=1$ et $v_{n+1}=n+v_n$. On en déduit aisément que $v_n=\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}$, d'où $u_n=[(n^2-n+2)/2]^{1/(n-1)}$.

481. **RMS 2009 1035 Centrale PC**

Pour tout nombre entier $n\geqslant3$, soit $P_n\colon x\mapsto x^n-nx+1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n\in]0,1[$ tel que $P_n(x_n)=0$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant3}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

(c) Trouver un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Solution. —

(a) Comme $P_n'(x)=n(x^{n-1}-1)<0$ sur $[0,1[$, on en déduit que P_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ de $P_n(0)=1>0$ à $P_n(1)=2-n<0$. Il existe donc un unique $x_n\in]0,1[$ tel que $P_n(x_n)=0$.

(b) On utilise pour cela la relation $-nx_n+1=-x_n^n$ dans le calcul de $P_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}-(n+1)x_n+1=x_n^{n+1}-x_n^n-x_n+1=(x_n^n-1)(x_n-1)<0$. Comme P_{n+1} est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$, ce signe négatif prouve que $x_{n+1}<x_n$, donc que la suite $(x_n)_{n\geqslant3}$ est décroissante.

Comme elle est minorée par zéro, elle converge. On note ℓ sa limite.

(c) On part de la relation $x_n=1/n-x_n^n/n$. Comme $x_n\leqslant x_3<1$ pour tout $n\geqslant3$, on a $x_n=1/n+\mathrm{o}(x_3^n/n)$: c'est un développement asymptotique à un terme, et cela prouve que $\ell=0$.

On le reporte ensuite pour obtenir $x_n^n = (1/n^n)(1+\mathrm{o}(x_3^n))^n = (1/n^n)\exp[n\ln(1+\mathrm{o}(x_3^n))] = (1/n^n)(1+\mathrm{o}(1))$. Alors le développement à deux termes souhaité est le suivant :

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

482. **RMS 2009 1036 Centrale PC**

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = f'(0)/2$.

(b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $f(0)=0$ et que $f''(0)$ existe. Montrer que $\lim_{+\infty} u_n = f'(0)/2$.

(c) Soit f comme à la question (b) et $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $v_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})g(\frac{k}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 242 page 182.

(a) Voir la question suivante, dont les hypothèses sont plus faibles.

(b) Comme f est deux fois dérivable en zéro, elle admet le développement limité

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) = f'(0)x + \varphi(x)\,,$$

avec $\varphi(x) = \mathrm{O}(x^2)$ au voisinage de zéro (on n'aura pas besoin de plus de précision). Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\varphi(x)| \leqslant Mx^2$ dans un voisinage V de zéro. Alors, pour n assez grand pour que $\frac{1}{n} \in V$ (donc aussi tous les $\frac{k}{n^2}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$), on aura $u_n = \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \varphi(\frac{k}{n^2}) = \frac{f'(0)}{2} \times \frac{n+1}{n} + \sum_{k=1}^n \varphi(\frac{k}{n^2})$, donc

$$\left|u_n - \frac{f'(0)}{2} \times \frac{n+1}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n^4}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{M(n+1)(2n+1)}{6n^3}\,.$$

Le majorant tend vers zéro et $\frac{f'(0)}{2} \times \frac{n+1}{n}$ tend vers $\frac{f'(0)}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\lim_{+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$. Si on ne connaît pas la relation $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on se contente de dominer la somme des carrés par n^3, à l'aide d'une comparaison série intégrale.

(c) On note h la fonction définie par $h(x) = xg(x)$, et K un majorant de la fonction continue $|g|$ sur le segment $[0,1]$. En reprenant les notations de la question précédente, $v_n = \frac{f'(0)}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}g(\frac{k}{n}) + \sum_{k=1}^n \varphi(\frac{k}{n^2})g(\frac{k}{n}) = f'(0)R_n(h) + \sum_{k=1}^n \varphi(\frac{k}{n^2})g(\frac{k}{n})$, où l'on a reconnu une somme de Riemann $R_n(h)$ à pas constant de la fonction h sur le segment $[0,1]$. Comme h est continue, on sait que $\lim_{+\infty} R_n(h) = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$. La majoration

$$|v_n - f'(0)R_n(h)| \leqslant \frac{MK(n+1)(2n+1)}{6n^3}\,,$$

établie comme à la question précédente, montre alors que

$$\lim_{+\infty} v_n = f'(0)\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On bien sûr retrouve le résultat de la question (b) dans le cas où g est la fonction constante égale à 1, puisqu'alors $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

483. **RMS 2009 1037 Centrale PC**

Construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(e^{ix_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(e^{i\sqrt{2}x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solution. — Posons $x_n = 2n\pi$. Alors $e^{i\pi x_n} = e^{2in\pi} = 1$, terme général d'une suite convergente.

On raisonne ensuite par l'absurde pour montrer que la suite $(e^{i\sqrt{2}x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si elle convergeait, alors il en serait de même de ses suites partie réelle $(\cos(2\sqrt{2}\,n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et partie imaginaire $(\sin(2\sqrt{2}\,n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$, vers c et s respectivement. Les suites extraites $(\cos(2\sqrt{2}\,(n+1)\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(2\sqrt{2}\,(n+1)\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeraient alors aussi vers c et s respectivement. Or

$$\cos\left(\sqrt{2}\,(n+1)\pi\right) = \cos\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right) - \sin\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right)\,,$$
$$\sin\left(\sqrt{2}\,(n+1)\pi\right) = \cos\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right) + \sin\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)\,.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que c et c vérifieraient le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} \left[1-\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right] c+\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right) s & = & 0\,, \\ -\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right) c+\left[1-\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right] s & = & 0\,. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $[1-\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)]^2+\sin^2\left(2\sqrt{2}\pi\right)=2[1-\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)]$: il est non nul car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Par suite, $c=s=0$ est l'unique solution du système, et on en déduirait que $1=\cos^2\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)+\sin^2\left(2\sqrt{2}\,n\pi\right)$ tendrait vers $c^2+s^2=0$ quand n tend vers $+\infty$: c'est absurde.

484. **RMS 2010 897 Centrale PC**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}}$ (n radicaux). Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $(a_p(n))_{p\geqslant 1}$ la suite définie par $a_1(n)=\sqrt{n}$ et $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{p+1}=\sqrt{n+a_p(n)}$.

(a) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a_p(n)\leqslant\sqrt{pn}$.

(b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant n$.

(c) Déterminer un équivalent de u_n, puis un équivalent de $u_n-\sqrt{n}$.

Solution. —

(a) On établit la propriété demandée par récurrence sur $p\geqslant 1$. Elle est vraie pour $p=1$, car $a_1(n)=\sqrt{n}\leqslant\sqrt{1\times n}$. Si elle est vraie pour $p\in\mathbb{N}^*$, alors la majoration $\forall k\in\mathbb{N},\ \sqrt{k}\leqslant k$ entraîne que

$$a_{p+1}(n)=\sqrt{n+a_p(n)}\leqslant\sqrt{n+\sqrt{pn}}\leqslant\sqrt{n+pn}=\sqrt{(p+1)n},$$

ce qui achève la récurrence.

(b) Comme $u_n=a_n(n)=\sqrt{n+a_{n-1}(n)}$, la minoration $\sqrt{n}\leqslant u_n$ résulte de ce que la suite $(a_p(n))_{p\geqslant 1}$ est positive. La majoration vient de la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sqrt{n}\leqslant u_n=a_n(n)\leqslant\sqrt{n\times n}=n.$$

(c) On donne un majorant de u_n plus fin que le n de la question précédente. Pour cela, on constate que $a_{n-1}(n)=\sqrt{n+a_{n-2}(n)}\leqslant\sqrt{n+\sqrt{(n-2)n}}\leqslant\sqrt{n+\sqrt{n^2}}=\sqrt{2n}$ pour tout $n\geqslant 3$. Alors $\forall n\geqslant 3,\ \sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant\sqrt{n+\sqrt{2n}}$. En divisant cette inégalité par $\sqrt{n}$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on trouve $\lim(u_n/\sqrt{n})=1$, donc

$$u_n\sim\sqrt{n}.$$

De la même manière, on établit que $a_{n-2}(n)=\sqrt{n+a_{n-3}(n)}\leqslant\sqrt{n+\sqrt{(n-3)n}}\leqslant\sqrt{2n}$, donc que $a_{n-1}(n)\leqslant\sqrt{n+\sqrt{2n}}$, puis que $a_{n-1}(n)\sim\sqrt{n}$ quand n tend vers l'infini. Comme $u_n+\sqrt{n}\sim 2\sqrt{n}$, on en déduit, à l'aide du produit par la quantité conjuguée, que

$$u_n-\sqrt{n}=\sqrt{n+a_{n-1}(n)}-\sqrt{n}=\frac{a_{n-1}(n)}{u_n+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2}\cdot$$

485. **RMS 2009 1038 Centrale PC**

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k^2+(n-k)^2}$.

Solution. — Une étude rapide de la fonction $f\colon x\in[0,n]\mapsto x^2+(n-x)^2$, dérivable avec $f'(x)=2(2x-n)$, montre que $0<f(x)\leqslant f(0)=f(n)=n^2$ pour tout $x\in[0,n]$. Par suite, $u_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{f(k)}\geqslant\frac{n+1}{n^2}\geqslant\frac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge.

486. **RMS 2009 1039 Centrale PC**

On pose $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n, ainsi que celle de son carré de Cauchy.

Solution. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème spécial des séries alternées montre alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge.

Son carré de Cauchy est la série de terme général

$$v_n=\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\times\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^n\frac{1}{\sqrt{g(k)}}\,,$$

où g est la fonction $x\in[0,n]\mapsto(x+1)(n+1-x)$. L'étude du signe de sa dérivée $g'\colon x\in[0,n]\mapsto n-2x$ montre que $0<g(x)\leqslant g(n/2)=(1+n/2)^2$, donc que $|v_n|\geqslant\frac{n+1}{1+n/2}\sim_{+\infty}2$. Le terme général ne tendant pas vers zéro, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ diverge grossièrement.

487. **RMS 2009 1040 Centrale PC**

Soient $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}/u_n=(n+a)/(n+b)$.

(a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la série de terme général u_n converge.
Indication : on pourra considérer la suite de terme général $w_n=\ln(n^{b-a}u_n)$.
On suppose désormais que (a,b) vérifie cette condition.

(b) Montrer que nu_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(c) Calculer la somme de la série de terme général u_n.

Solution. —

(a) On calcule un développement asymptotique de $w_{n+1}-w_n$:

$$\begin{aligned}
w_{n+1}-w_n &= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{1+a/n}{1+b/n}\right)=(b-a)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+\ln\left(\left[1+\frac{a}{n}\right]\left[1-\frac{b}{n}+\frac{b^2}{n^2}\right]\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),\\
&=(b-a)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{a-b}{n}+\frac{b^2-ab}{n^2}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),\\
&=(b-a)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+\frac{a-b}{n}+\frac{b^2-ab}{n^2}-\frac{(a-b)^2}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(b-a)(b+a-1)}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que la série (télescopique) de terme général $w_{n+1}-w_n$ converge, donc que la suite de terme général w_n converge ; on note ℓ sa limite. Alors la suite de terme général $e^{w_n}=n^{b-a}u_n$ converge vers $K=e^{\ell}>0$, ce qui signifie que

$$u_n\sim_{+\infty}\frac{K}{n^{b-a}}\cdot$$

La règle sur les équivalents de séries à termes positifs, et les résultats sur les séries de Riemann, donnent la condition attendue : la série de terme général u_n converge si et seulement si $b-a>1$.

(b) La question précédente montre que $nu_n\sim Kn^{a-b+1}$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $a-b+1<0$, la suite de terme général nu_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

(c) On note S_N la somme partielle $\sum_{n=0}^N u_n$, et $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ la somme recherchée. On écrit la relation $u_{n+1}/u_n=(n+a)/(n+b)$ sous la forme $(n+b)u_{n+1}=(n+a)u_n$, ou encore $n(u_{n+1}-u_n)=au_n-bu_{n+1}$, puis on somme pour n variant de zéro à N. Il vient, après un changement d'indice :

$$\sum_{n=0}^N nu_{n+1}-\sum_{n=0}^N nu_n=\sum_{n=1}^{N+1}(n-1)u_n-\sum_{n=1}^N nu_n=-S_N+u_0+Nu_{N+1}=aS_N-b(S_{N+1}-u_0).$$

La question précédente montre que $\lim Nu_{N+1}=0$ quand N tend vers $+\infty$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient alors $-S+u_0=aS-b(S-u_0)$, et finalement

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{1-b}{a-b+1}u_0.$$

488. **RMS 2009 1041 Centrale PC**

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n=(\pi/2)^\alpha-(\arctan n)^\alpha$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$?

Solution. — On utilise la relation $\arctan x+\arctan(1/x)=\pi/2$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned}
u_n&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left[1-\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha\right]=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left[1-\left(1-\frac{2}{n\pi}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha\right],\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left[\frac{2\alpha}{n\pi}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\underset{+\infty}{\sim}\frac{C}{n},
\end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive. On en déduit que la série de terme général u_n diverge.

489. **RMS 2009 1042 Centrale PC (calcul formel)**

On pose $u_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n. En déduire la convergence de la série de terme général u_n. Donner une valeur approchée de sa somme.

(b) On pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Déterminer un équivalent de v_n, et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(c) On pose maintenant $w_n = u_{2n} + u_{4n+1} + u_{4n+3}$. Déterminer un équivalent de w_n, et donner une valeur approchée de sa somme. Pourquoi est-elle différente de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

SOLUTION. —

(a) On factorise n^2 pour obtenir

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \cos\left(\pi n\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)+\frac{1}{16n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)\ , \\ &= \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}-\frac{3\pi}{16n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}-\frac{3\pi}{16n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ , \\ &= (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}+(-1)^n\frac{3\pi}{16n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ . \end{aligned}$$

On constate que u_n est la somme de trois termes généraux de séries convergentes (semi-convergente pour la première, et absolument convergentes pour les autres), donc $\sum u_n$ est semi-convergente.

Pour obtenir ce résultat avec Maple, il est indispensable de préciser que n est une variable entière, par la commande `assume(n,integer)`. On peut alors définir `u:=cos(Pi*sqrt(n^2+n+1))`, et tenter un développement asymptotique grâce à `series(u,n=infinity,3)`. Dans la version utilisée, on obtient le message d'erreur suivant : `Error, (in asympt) unable to compute series`. Pour obtenir le résultat souhaité, il faut aider le logiciel en tapant les commandes suivantes :

```
assume(n,integer);
racine:=cos(Pi*sqrt(n^2+n+1));
developpement:=series(racine,n=infinity,3);
dlu:=series(expand(cos(Pi*developpement),trig),n=infinity,3);
```

La commande de développement `expand (...,trig)` est nécessaire.

Pour obtenir une valeur approchée de la somme, on ne peut pas directement demander un calcul pour n variant de 0 à N, car la variable n porte une hypothèse (elle est entière). Il est préférable de valider les lignes suivantes :

```
u:=cos(Pi*racine);
add(evalf(subs(n=i,u)),i=0..1000);
```

La somme U vaut $-0,592$ à 10^{-3} près d'après Maple.

(b) D'après la question précédente, $u_{2n} + u_{2n+1} = -\frac{3\pi}{16n} + \frac{3\pi}{8(2n+1)} - \frac{3\pi}{64n^2} + \frac{3\pi}{16(2n+1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3\pi}{16n}\left(\frac{1}{1+1/2n}-1\right) + \frac{3\pi}{64n^2}\left(\frac{1}{(1+1/2n)^2}-1\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3\pi}{32n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3\pi}{32n^2}\ .$$

Ce développement est obtenu par la commande

```
dlv:=expand(simplify(series(subs(n=2*n,dlu)+subs(n=2*n+1,dlu),n=infinity,3)));
```

On en déduit que $\sum v_n$ converge. Si U_n (respectivement V_n) désigne la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ (respectivement $\sum v_n$), on a la relation $V_n = U_{2n+1}$. Par conséquent la suite (V_n) a la même limite V que la suite (U_n), c'est-à-dire que

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\ .$$

(c) Maple donne $w_n \sim_{+\infty} -\frac{9\pi}{128n^2}$ grâce à la commande

```
dlw:=expand(simplify(series(subs(n=2*n,dlu)+subs(n=4*n+1,dlu)+subs(n=4*n+3,dlu),n=infinity,3)));
```

puis donne la valeur approchée $W = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = -0,183$ à 10^{-3} près.

On constate donc que :

- La famille des ensembles $\{2n, 4n+1, 4n+3\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ constitue une partition de l'ensemble des entiers naturels : chaque u_i apparaît une et une seule fois dans la somme totale W. Pour le démontrer, prendre un entier p quelconque et distinguer suivant sa parité, puis, pour les entiers impairs, suivant leur congruence modulo 4.
- Néanmoins, les sommes U et W des séries sont distinctes, alors que U et V sont égales.

L'explication de ces phénomènes est la suivante. La série de somme V est déduite de la série de somme U par regroupement de termes, sans changement d'ordre :

$$V = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + \cdots$$

En revanche, la série de somme W est obtenue en changeant l'ordre des termes, puisque

$$W = (u_0 + u_1 + u_3) + (u_2 + u_5 + u_7) + (u_4 + u_9 + u_{11}) + \cdots$$

Une modification de l'ordre des termes peut donc changer la valeur d'une somme de série convergente, c'est-à-dire que la propriété de commutativité des sommes finies ne s'étend pas aux sommes de séries.

Remarque. — De manière plus précise, on peut démontrer les faits suivants :

– Un regroupement (sans permutation) quelconque de termes d'une série convergente ne modifie ni sa nature si sa somme.
– On dit qu'une série $\sum u_n$ est commutativement convergente au sens faible lorsque, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge. On dit qu'elle est commutativement convergente au sens fort lorsque, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que la somme S_σ ne dépend pas de σ.
  On démontre alors le théorème suivant. Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :
  (i) La série est commutativement convergente au sens faible.
  (ii) La série est commutativement convergente au sens fort.
  (iii) La série est absolument convergente.
– Une permutation de termes d'une série semi-convergente peut modifier, sa somme voire sa nature. Mieux, si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, et si $[a, b]$ est un intervalle quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est $[a, b]$. En particulier, pour tout réel x, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme x, une permutation θ telle que $\sum u_{\theta(n)}$ diverge vers $+\infty$, et une autre γ telle que $\sum u_{\gamma(n)}$ diverge vers $-\infty$.

490. **RMS 2009 1043 Centrale PC**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose que $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Solution. — On note g la fonction $x \mapsto f(x)/x$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons que f est continue à droite en x. Pour cela, soit $h > 0$. Comme f est croissante, $0 \leqslant f(x+h) - f(x) = (x+h)g(x+h) - xg(x) = x(g(x+h) - g(x)) + hg(x+h)$. Comme g est décroissante, on en déduit que

$$0 \leqslant f(x+h) - f(x) \leqslant hg(x+h) \leqslant hg(x)\ ,$$

puis que $f(x+h) - f(x)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro par valeurs positives.

Montrons ensuite que f est continue à gauche en x. On suppose que $0 < h < x/2$, de sorte que $f(x-h)$ et $g(x-h)$ existent. Comme f est croissante, $0 \leqslant f(x) - f(x-h) = xg(x) - (x-h)g(x-h) = x(g(x) - g(x-h)) + hg(x-h)$. Comme g est décroissante, on en déduit que

$$0 \leqslant f(x) - f(x-h) \leqslant hg(x-h) \leqslant hg\left(\frac{x}{2}\right)\ ,$$

puis que $f(x) - f(x-h)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro par valeurs positives.

La continuité de f s'en déduit.

491. **RMS 2009 1044 Centrale PC**

Soit $f : x \mapsto 1/(x^2+1)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant n!$.

Solution. — La clé de l'exercice est de passer aux nombres complexes en décomposant f en éléments simples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\cdot$$

On établit alors aisément par récurrence la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right)\cdot$$

Comme x est réel, les modules $|x-i|$ et $|x+i|$ sont supérieurs ou égaux à 1 (la valeur 1 est atteinte en $x = 0$). Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{|x-i|^{n+1}} + \frac{1}{|x+i|^{n+1}}\right) \leqslant n!\ .$$

492. **RMS 2009 1045 Centrale PC (calcul formel)**
On définit la suite (f_n) de fonctions polynomiales par $f_0\colon t \mapsto 1$, $f_1\colon t\mapsto 2t$ et, pour $n \geqslant 0$, $f_{n+2}\colon t \mapsto 2tf_{n+1}(t) - f_n(t)$.

(a) Calculer f_2, f_3, f_4, f_5. Proposer quelques conjectures et les prouver.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n+1)\theta = \sin\theta f_n(\cos\theta)$.

(c) Déterminer deux polynômes P_1 et P_2 tels que f_n soit solution de l'équation différentielle (H_n) : $P_2(t)y''(t) + P_1(t)y'(t) + n(n+2)y(t) = 0$.

Solution. — On confond dans cet exercice les polynômes et les fonctions polynomiales qui leur sont associées.

(a) Les polynômes f_n étant définis par une relation de récurrence et des conditions initiales, on utilise une procédure récursive avec une option `remember`. On calcule ensuite les polynômes f_n avec $0 \leqslant n \leqslant 5$ grâce à la boucle `seq`. La commande `expand` est utilisée pour développer les f_n, qui conserveraient sinon une écriture parenthèsée comme la relation de récurrence l'indique :

```
f:=proc(n,t)
option remember;
if n=0 then 1 elif n=1 then 2*t else 2*t*f(n-1,t)-f(n-2,t) end if;
end proc;
seq(expand(f(n,t)),n=0..5);
```

On obtient alors les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
f_2 &= 4t^2 - 1\,,\\
f_3 &= 8t^3 - 4t\,,\\
f_4 &= 16t^4 - 12t^2 + 1\,,\\
f_5 &= 32t^5 - 32t^3 + 6t\,.
\end{aligned}$$

On conjecture que f_n est un polynôme de degré n, ayant la parité de n, de coefficient dominant 2^n. Ces trois propriétés sont vérifiées aux rangs zéro et 1, car $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$. Si elles le sont aux rangs n et $n+1$, alors f_{n+2} est bien un polynôme de degré $n+2$ d'après la relation $f_{n+2}(t) = 2tf_{n+1}(t) - f_n(t)$. Cette relation montre aussi que le coefficient dominant de f_{n+2} vaut deux fois celui de f_{n+1}, c'est-à-dire 2^{n+2}. Par ailleurs, pour tout t réel,

$$f_{n+2}(-t) = -2tf_{n+1}(-t) - f_n(-t) = -2t(-1)^{n+1}f_{n+1}(t) - (-1)^n f_n(t) = (-1)^{n+2}[2tf_{n+1}(t) - f_n(t)]\,,$$

donc f_{n+2} a bien la parité de $n+2$.

(b) On raisonne par récurrence complète sur n. Pour $n = 0$, l'égalité est banale. Pour $n = 1$, il s'agit de prouver que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin 2\theta = \sin\theta \times (2\cos\theta)$, ce qui est vrai. Supposons l'égalité établie pour tout $k \leqslant n$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall \theta \in \mathbb{R},\quad \sin\theta\, f_{n+1}(\cos\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta f_n(\cos\theta) - \sin\theta f_{n-1}(\cos\theta)\,,\\
&= 2\cos\theta\sin(n+1)\theta - \sin n\theta\,,\\
&= 2\cos\theta[\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta] - \sin n\theta\,,\\
&= \sin n\theta(\cos 2\theta + 1) + \cos n\theta \sin 2\theta - \sin n\theta\,,\\
&= \sin n\theta\cos 2\theta + \cos n\theta\sin 2\theta\,,\\
&= \sin(n+2)\theta\,.
\end{aligned}$$

On peut vérifier ponctuellement cette relation en Maple grâce à `combine(sin(theta)*f(5,cos(theta)),trig)`. La réponse obtenue est bien $\sin(6\theta)$.

(c) L'examen des premières valeurs par l'exploration en Maple ou à la main montre que $P_1(t) = 1 - t^2$ et $P_2(t) = -3t$ semblent convenir. La vérification pour $0 \leqslant n \leqslant 5$ se fait en Maple grâce à

```
seq(expand((1-t^2)*diff(f(n,t),t$2)-3*t*diff(f(n,t),t)+n*(n+2)*f(n,t)),n=0..5);
```

On voit à l'écran six zéro consécutifs (à condition de bien utiliser `expand`).

493. **RMS 2009 1046 Centrale PC**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}$ le graphe de f. Si $x \in \mathbb{R}_+$, on note P_x le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(x, f(x))$ avec Oy.

(a) Pourquoi P_x est-il défini ? Montrer que si $\overrightarrow{OP_x}$ a une limite quand x tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{C}$ admet une asymptote.

(b) Montrer que la réciproque du (a) est fausse.

Solution. —

(a) Les tangentes étant des droites non parallèles à Oy puisque f est dérivable, elles intersectent toutes Oy en un point et un seul : P_x est bien défini.
Soit $s \in \mathbb{R}_+$. La tangente au graphe de f en l'abscisse s a pour équation

$$y = f'(s)(x - s) + f(s)\,.$$

Le point P_s est donc $(0, -sf'(s) + f(s))$. Posons alors $g(x) = -xf'(x) + f(x)$. L'hypothèse du (a) est que g admet une limite finie, disons ℓ, en $+\infty$.
On veut montrer l'existence d'une asymptote : commençons par l'existence d'une direction asymptotique. Pour cela, posons $q(x) = \frac{f(x)}{x}$, ce qui définit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On a

$$\forall x > 0, \quad q'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}\,.$$

Comme g est bornée au voisinage de $+\infty$, la dérivée q' est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $q(x) = q(1) + \int_1^x q'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie, disons m, en $+\infty$. On étudie ensuite, pour $x > 0$, la différence $d(x) = f(x) - mx$:

$$\begin{aligned} d(x) &= x\left[q(1) + \int_0^x q'(t)\,\mathrm{d}t - q(1) - \int_1^{+\infty} q'(t)\,\mathrm{d}t\right] = x\int_x^{+\infty} q'(t)\,\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty}\left(\frac{-g'(x) + \ell - \ell}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,,\\ &= \ell + x\int_x^{+\infty}\left(\frac{\ell - g'(x)}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $A > 0$, tel que, si $x \geqslant A$, on a $|\ell - g(x)| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $x \geqslant A$, on a $|x\int_x^{+\infty}\left(\frac{\ell - g'(x)}{t^2}\right)\mathrm{d}t| \leqslant x\int_x^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \varepsilon$, ce qui prouve que d tend vers ℓ en $+\infty$, ou encore que $\mathcal{C}$ admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = mx + \ell\,.$$

(b) Il suffit de prendre pour f une fonction affine, perturbée par une fonction petite, mais qui varie très vite. On peut vérifier que la fonction suivante, prolongée par $f(0) = b$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = ax + b + \frac{\sin(x^2)}{x}\,.$$

En $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet l'asymptote d'équation $y = ax + b$. Cependant

$$-xf'(x) + f(x) = -x\left(a + \frac{2x^2\sin(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}\right) + ax + b + \frac{\sin(x^2)}{x} = -2x\sin(x^2) + b + 2\frac{\sin(x^2)}{x}\,.$$

À cause du facteur $-2x\sin(x^2)$, cette quantité n'a pas de limite en $+\infty$, donc $\overrightarrow{OP_x}$ non plus.

494. **RMS 2009 1047 Centrale PC**
Existence et calcul de $I = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. — La seule borne litigieuse est zéro. Au voisinage de zéro par valeurs positives, on dispose de l'équivalent entre fonctions de signe fixe $\ln(\sin t) \sim \ln t$. Comme ln est intégrable sur $]0, 1]$, il en est de même de $t \mapsto \ln(\sin t)$, donc l'intégrale I est convergente.
Le changement de variable $t = \pi - u$ donne $I = \int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$, donc $2I = \int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$. Dans cette dernière intégrale, le changement de variable $t = 2v$ donne

$$\begin{aligned} 2I &= 2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2v)\,\mathrm{d}v = 2\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin v\cos v)\,\mathrm{d}v = 2\int_0^{\pi/2}(\ln 2 + \ln(\sin v) + \ln(\cos v))\,\mathrm{d}t\,,\\ &= \pi\ln 2 + 2I + 2\int_0^{\pi/2}\ln(\cos v)\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

Or $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos v)\,\mathrm{d}v = I$, en effectuant le changement de variable $w = \pi/2 - v$. On en déduit finalement que $\pi\ln 2 + 2I = 0$, donc que

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

495. **RMS 2009 1048 Centrale PC (calcul formel)**
On pose $u_n(x) = \frac{1}{n + xn^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de S. Étudier la continuité et la monotonie de S.

(b) Tracer le graphe de S, déterminer les valeurs de S en k et $1/k$ pour $k \in [\![1, 5]\!]$.

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

SOLUTION. —

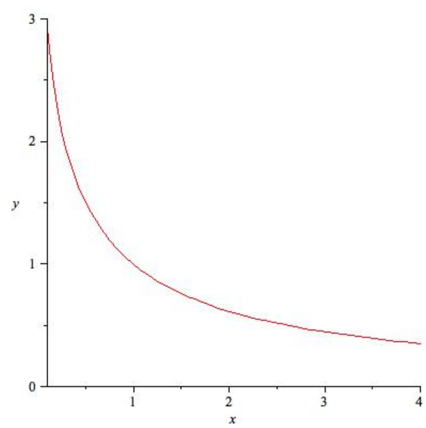
(a) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/n\}$, donc on étudie l'existence de S sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
Comme $u_n(0) = \frac{1}{n}$, la fonction S n'est pas définie en zéro. Si $x \in A$ est non nul, on dispose de l'équivalent entre termes de signe fixe (pour n grand) $u_n(x) \sim 1/(xn^2)$, donc la série de terme général $u_n(x)$ converge. Finalement

$$D_S = A \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} .$$

On note que $u_n'(x) = -n^2/(n + xn^2)^2 < 0$ donc que u_n décroît sur $\mathbb{R}_+$. Comme $u_n \geqslant 0$ par ailleurs, si l'on fixe $a > 0$, on en déduit que $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$ donc que la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Par suite, la somme S est continue sur cet intervalle, et comme $a > 0$ est quelconque, S est continue sur $]0, +\infty[$.
Par ailleurs, S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes.

(b) Le graphe suivant est obtenu par les commandes

```
u:=(n,x)->1/(n+x*n^2); S:=x->sum(u(n,x),n=1..infinity); plot(S(x),x=0.1..4,y=0..3);
```



En validant `seq(S(k),k=1..5) ; seq(S(1/k),k=1..5)`, on obtient les résultats suivants

k	1	2	3	4	5
$S(k)$	1	$2 - 2\ln 2$	$3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{2}\ln 3$	$4 - 3\ln 2 - \frac{\pi}{2}$	$5 + \gamma + \psi(1/5)$
$S(1/k)$	1	$3/2$	$11/6$	$25/12$	$137/60$

La lettre γ désigne la constante d'Euler, $\gamma = \lim_{+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$, et la fonction ψ est la dérivée logarithmique de la fonction Γ :

$$\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \quad \text{avec} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Les valeurs rationnelles des nombres $S(1/k)$ s'expliquent aisément :

$$u_n\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n + (n^2/k)} = \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\,,$$

la dernière égalité étant une décomposition en éléments simples. Ainsi, la somme $S(1/k)$ est télescopique, et l'on trouve $S(1/k) = H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$, comme le tableau l'indique.

(c) Montrons que $S(x) \sim_{+\infty} \pi^2/6x$, en utilisant la relation $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, et en calculant la différence suivante :

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6x} - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{xn^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + xn^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x(1+xn)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 x^2} = \frac{\zeta(3)}{x^2}\,.$$

Comme $1/x^2$ est négligeable devant $1/x$ quand x tend vers $+\infty$, on a prouvé l'équivalent annoncé.

496. **RMS 2008 908 Centrale PC (calcul formel)**
Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.

(a) Montrer l'existence de I.

(b) Déterminer une valeur approchée de I avec Maple. Est-ce une valeur exacte ?

(c) Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \ln t \, dt$. Montrer que $\lim_{+\infty} I_n = I$.

(d) Soit, pour $n \geqslant 1$: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que (a_n) converge. On note γ sa limite.

(e) Exprimer I_n en fonction de n et I en fonction de γ.

Solution. — Voir aussi l'exercice 825 page 520, où l'on présente un autre calcul pour établir un lien entre $\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \, dt$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) On pose $f(t) = e^{-t} \ln t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Au voisinage de zéro, $f(t) \sim \ln t$. Comme ln est une fonction intégrable sur $]0, 1]$, il en est de même de f. Comme $t^2 f(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini, la règle de Riemann dit que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Finalement f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc I existe.
Ces vérifications peuvent aussi se faire avec Maple :

```
f:=t->exp(-t)*ln(t);series(f(t),t=0,1);limit(t**2*f(t),t=infinity);
```

(b) La question est curieuse. Maple dit que $I = -\gamma$ quand on demande `int(ln(t)*exp(-t),t=0..infinity)`, et donne la valeur approchée $-0,5772156649$ à l'aide de la commande `evalf` (le nombre γ est la constante d'Euler).

(c) On définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln t, & \text{si } 0 < t < n, \\ 0 & \text{si } n \leqslant t. \end{cases}$$

On vient de définir une suite de fonctions continues par morceaux, qui converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue par morceaux f : en effet, si $t > 0$ est fixé et si $n > t$, on a $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \ln t$ et un développement limité pour n tendant vers l'infini donne

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln t = \exp\left(-t + \mathrm{o}(1)\right) \ln t = f(t) + \mathrm{o}(1) .$$

On peut aussi le retrouver en validant `limit((1-t/n)**n,n=infinity)`.
Par ailleurs, la concavité du logarithme montre que $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leqslant -\frac{t}{n}$ pour tout $t < n$, donc $n \ln(1 - \frac{t}{n}) \leqslant -t$, et, en composant par la fonction croissante exponentielle et en multipliant par le nombre positif $|\ln t|$, on obtient

$$\forall t \in [0, n], \quad |f_n(t)| \leqslant |f(t)| .$$

Pour $t \geqslant n$, cette inégalité est encore vraie puisque le membre de gauche est nul. Comme f est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée assure alors que la suite (I_n) converge vers I.

(d) On applique le théorème préparatoire au théorème de comparaison série-intégrale à la fonction $g\colon t \mapsto 1/t$. La série de terme général $w_k = \int_{k-1}^k g(t) \, dt - g(k)$ converge. Comme la somme partielle $\sum_{k=2}^n w_k$ vaut $\ln n - (\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = -a_n + 1$, le résultat souhaité s'en déduit.
Maple donne le résultat sous la forme exacte γ, en validant `limit(sum(1/k,k=1..n)-ln(n),n=infinity)`.

(e) On charge préalablement la bibliothèque *étudiants* par `with(student)`. Le changement de variable $u = 1 - t/n$ est alors effectué par Maple en validant `changevar(u=1-t/n,Int(ln(t)*(1-t/n)^n,t=0..n),u)`. On obtient

$$I_n = n \int_0^1 u^n \ln(n(1-u)) \, du = n \ln n \int_0^1 u^n \, du + n \int_0^1 u^n \ln(1-u) \, du = \frac{n}{n+1} \ln n + n \int_0^1 u^n \ln(1-u) \, du .$$

Une intégration par parties donne ensuite $\int_0^a u^n \ln(1-u) \, du = \frac{a^{n+1}}{n+1} \ln(1-a) - \frac{1}{n+1} \int_0^a \frac{u^{n+1}}{u-1} \, du$. Elle est obtenue en Maple par `intparts(Int(u^n*ln(1-u),u=0..a),ln(1-u))`, et il est obligatoire de remplacer la borne impropre 1 par une lettre a, qu'on fera ensuite tendre vers 1 par valeurs inférieures, sinon on obtient des variations et des intégrales divergentes. On pose $J(a, n+1) = \int_0^a \frac{u^{n+1}}{u-1} \, du$. En écrivant que $\frac{u^{n+1}}{u-1} = \frac{(u-1+1)u^n}{u-1} = u^n + \frac{u^n}{u-1}$, on obtient la relation

$$J(a, n+1) = \int_0^a u^n \, du + J(a, n) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + J(a, n) .$$

Alors $J(a,n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + J(a,0) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} + \ln(1-a)$, que l'on établit aisément par récurrence. Finalement

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left[\ln n + \lim_{a\to 1}\left(a^{n+1}\ln(1-a) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{a^k}{k} - \ln(1-a)\right)\right] = \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right] = \frac{n}{n+1}\left[-a_n - \frac{1}{n+1}\right].$$

Le calcul de la limite est justifié par le fait que $(a^{n+1}-1)\ln(1-a) = (1+a+\cdots+a^n)(a-1)\ln(1-a) \sim (n+1)(a-1)\ln(1-a)$ au voisinage de $a=1$, et par la limite usuelle $\lim_0 x\ln x = 0$. On en déduit que la suite (I_n) converge vers $-\gamma$, donc que $I = -\gamma$, ce qui confirme le calcul donné par Maple à la première question.

497. **RMS 2009 1049 Centrale PC**

On pose $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

(b) La somme S est-elle continue ?

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution. — Les f_n étant impaires, on ne fera l'étude que sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Comme $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge et on a $S(0) = 0$.
Soit $x > 0$. Comme $f_n(x) \sim 1/(n^3x)$ quand n tend vers $+\infty$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
Finalement, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $f_n'(x) = (1+n^2x^2-2n^2x^2)/n(1+n^2x^2)^2 = (1-n^2x^2)/n(1+n^2x^2)^2$ pour tout $x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0		$1/(2n^2)$		0

Il en résulte que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = 1/(2n^2) = \|f_n\|_\infty$ par parité, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Chaque f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrons que $S(x) \sim -x\ln x$ quand x tend vers 0^+, à l'aide d'une comparaison série intégrale. Soit $g\colon u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x/[u(1+u^2x^2)]$. Pour $x > 0$ fixé, il s'agit d'une fonction strictement décroissante. On en déduit que

$$\int_n^{n+1} g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^n g(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

l'inégalité de gauche valant pour tout $n \geqslant 1$, et celle de droite pour tout $n \geqslant 2$. La convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ montre que g est intégrable sur $[1,+\infty[$. En sommant les inégalités ci-dessus, on obtient donc

$$I \leqslant S(x) \leqslant I + f_1(x)\,,$$

où I désigne l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fonction rationnelle g de la variable u est $x/u - x^3u/(1+u^2x^2)$. On en déduit le calcul suivant :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to+\infty}\left(\left[x\ln u - \frac{x}{2}\ln(1+u^2x^2)\right]_{u=1}^a\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(x\ln a - \frac{x}{2}\ln(1+a^2x^2) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2)\right)\,, \\ &= \lim_{a\to+\infty}\left(x\ln a - \frac{x}{2}\ln(a^2x^2) - \frac{x}{2}\ln(1+[ax]^{-2}) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2)\right) = -x\ln x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2)\,. \end{aligned}$$

Comme $\frac{x}{2}\ln(1+x^2)$ et $f_1(x) = x/(1+x^2)$ sont négligeables devant $-x\ln x$ quand x tend vers 0^+, l'encadrement $I \leqslant S(x) \leqslant I + f_1(x)$ donne alors l'équivalent

$$S(x) \underset{0^+}{\sim} -x\ln x\,.$$

498. **RMS 2009 1050 Centrale PC**

On pose $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

(b) Sur quels intervalles y a-t-il convergence normale ?

Solution. —

(a) Si $0 \leqslant x < 1$, alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$, donc la série de terme général $f_n(x)$ converge. Si $x \geqslant 1$, la suite de terme général ne converge pas vers zéro (vers $1/2$ si $x = 1$ et vers 1 si $x > 1$), donc la série correspondante diverge.
Finalement, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$.

(b) Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f_n'(x) = nx^{n-1}/(1 + x^n)^2 \geqslant 0$. Par suite, f_n est croissante sur $[0, 1[$.
On fixe $a \in]0, 1[$. Comme f_n est positive et croissante, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = f_n(a) ,$$

ce qui montre que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$. En revanche, comme $\|f_n\|_{\infty,[0,1[} = f_n(1) = 1/2$, il n'y a pas convergence normale sur $[0, 1[$.
La réponse à la question posée est donc : sur tout intervalle I contenu dans $[0, 1[$ tel que $\sup I < 1$.

499. **RMS 2009 1051 Centrale PC**

On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n.
(b) Calculer la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
(c) La somme S est-elle continue sur D ?

Solution. —

(a) Comme $f_n(0) = 0$, on a $0 \in D$. Si $x > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, ce qui montre que la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, donc $x \in D$. Si $x < 0$, la suite de terme général $f_n(x)$ ne converge pas vers zéro, donc $x \notin D$.
Finalement, $D = \mathbb{R}_+$.

(b) Posons $g_n(x) = e^{-nx^2} = [\exp(-x^2)]^n$ pour tout $x > 0$. La série numérique de terme général $g_n(x)$ est une série géométrique de raison $\exp(-x^2) \in]-1, 1[$, puisque $x > 0$. Par suite elle converge, et sa somme vaut

$$g(x) = \frac{1}{1 - \exp(-x^2)}\cdot$$

Les fonctions g_n sont de classe C^2, et pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g_n'(x) = -2nx \exp(-nx^2) = -2f_n(x) ,$$
$$g_n''(x) = -2n \exp(-nx^2)[1 - 2nx^2] .$$

On en déduit que g_n' décroît sur $]0, 1/\sqrt{2n}\,]$, et croît sur $[1/\sqrt{2n}, +\infty[$. On fixe $a > 0$. Si n est assez grand, $1/\sqrt{2n} < a$, et g_n' est négative et croissante sur $[a, +\infty[$, ce qui montre que

$$\|g_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = |g_n'(a)| = 2f_n(a) .$$

Comme la série de terme général $f_n(a)$ converge, on en déduit que la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 0} g_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Par suite, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, avec $g' = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, on en déduit la valeur de S sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(x) = -\frac{1}{2} g'(x) = \frac{x \exp(-x^2)}{[1 - \exp(-x^2)]^2} .$$

Par ailleurs, $S(0) = 0$ puisque $f_n(0) = 0$ pour tout n.

(c) La question précédente a montré que S était continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit alors d'étudier $S(x)$ quand x tend vers 0^+ pour régler la question de la continuité en zéro. L'expression ci-dessus conduit au développement limité

$$S(x) = \frac{x(1 + \mathrm{o}(x))}{[x^2 + \mathrm{o}(x^2)]^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^3} .$$

On en déduit que S est discontinue en zéro (et on a obtenu au passage un équivalent de S au voisinage de 0^+).

500. **RMS 2009 1052 Centrale PC**

On pose $u_n = \ln(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.
(b) Étudier la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Solution. —

(a) Un développement limité donne

$$\begin{aligned}u_n &= \ln\left(\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right),\\ &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right),\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $|u_n x^n| \sim |x|^n/\sqrt{n}$, donc que la suite de terme général $u_n x^n$ converge vers zéro si $|x|<1$, et n'est pas bornée si $|x|>1$. Ceci caractérise le fait que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$ vaut 1.

(b) Si $x=1$, le développement limité précis établi ci-dessus montre que $\sum u_n x^n$ est la somme de quatre séries numérique : une semi-convergente (de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$), deux absolument convergentes (les deux dernières) et une divergente (de terme général $-1/n$). Par suite, la série diverge en $x=1$.
Si $x=-1$, le développement limité en question donne

$$u_n x^n = (-1)^n u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{3n^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Le même type de raisonnement montre que la série diverge en $x=-1$ aussi.

501. **RMS 2010 914 Centrale PC (calcul formel)**
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(a_0,a_1,a_2)=(2,2+i,1+i/2)$ et $\forall n\geqslant 3,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}$ et $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

(a) Calculer les vingt premiers termes de la suite. Montrer qu'il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n\in\{0,\dots,20\},\ |a_n|\leqslant A2^n$.
(b) Montrer qu'il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant A2^n$.
(c) Montrer que f a un rayon de convergence $R>0$.
(d) Montrer que $\forall x\in\,]-R,R[\colon\ f(x)=\frac{P(x)}{1-x-x^2+x^3}$, où P est une fonction polynomiale de degré 2 à préciser.
(e) Trouver $(u,v,w)\in\mathbb{C}^3$ tels que $\forall x\in\,]-R,R[\,,\ f(x)=\frac{u}{1-x}+\frac{v}{1+x}+\frac{w}{1+x^2}$. Retrouver le résultat du (a).

Solution. —

(a) On utilise la procédure suivante (on rappelle que le nombre complexe noté i dans le cours de mathématiques est noté `I` en Maple) :

```
a:=proc(n::integer)
if n=0 then 2 elif n=1 then 2+I elif n=2 then 1+I/2 else a(n-1)+a(n-2)-a(n-3) end if;
end proc;
```

On obtient les résultats suivants, en validant `seq(a(n),n=0..20)` (les 20 premiers termes de la suite sont en fait les termes $a_0,\dots,a_{19}$, mais il semble que l'auteur du sujet voulait parler de $a_0,\dots,a_{20}$) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	$2+i$	$1+i/2$	$1+3i/2$	i	$2i$	$-1+3i/2$	$-1+5i/2$	$-2+2i$	$-2+3i$	$-3+5i/2$	$-3+7i/2$

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	$-4+3i$	$-4+4i$	$-5+7i/2$	$-5+9i/2$	$-6+4i$	$-6+5i$	$-7+9i/2$	$-7+11i/2$	$-8+5i$

L'existence de A dans cette question est banale : il suffit de poser $A=\max_{0\leqslant n\leqslant 20}(|a_n|/2^n)$: sa valeur est donnée par la commande `max(seq(evalf(abs(a(n))/2**n),n=0..20))`, et on obtient $A=2$.

(b) On montre que $A=2$ convient en établissant par récurrence complète sur n que $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant 2^{n+1}$. C'est vrai pour $0\leqslant n\leqslant 20$ d'après la question précédente. Si cette inégalité est établie pour tous les entiers k tels que $0\leqslant k\leqslant n-1$, alors $|a_n|=|a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}|\leqslant 2^n+2^{n-1}+2^{n-2})=2^{n+1}(1/2+1/4+1/8)=\frac{7}{8}2^{n+1}\leqslant 2^{n+1}$.

(c) La majoration précédente montre que $|a_nx^n| \leqslant A|2x|^n$, donc que $\sum a_nx^n$ converge absolument pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{2}$. On en déduit que $R \geqslant 1/2$.

(d) Soit $x \in]-R, R[$.On multiplie par x^n la relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n) et on somme pour n allant de 3 à l'infini. On obtient $f(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) = x(f(x) - a_0 - a_1x) + x^2(f(x) - a_0) - f(x)$, ou encore

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_0x - a_1x^2 - a_0x^2}{1 - x - x^3 + x^3} = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2}{1 - x - x^2 + x^3} = \frac{2 + ix - (3 + i/2)x^2}{1 - x - x^2 + x^3}\,.$$

On peut vérifier ce résultat en validant la commande

```
f :=rsolve(a(n)=a(n-1)+a(n-2)-a(n-3),a(0)=2,a(1)=2+I,a(2)=1+I/2,a,'genfunc'(x))
```

(e) Comme la fonction rationnelle f est de degré $-1 < 0$ et comme son dénominateur se factorise sous la forme

$$1 - x - x^2 + x^3 = (x - 1)(x + 1)^2\,,$$

le théorème de décomposition en éléments simples affirme qu'il existe $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\forall x \in]-R, R[\,, f(x) = \frac{u}{1-x} + \frac{v}{1+x} + \frac{w}{(1+x)^2}$. Cette décomposition est directement donnée par Maple par la commande `g :=convert(f,parfrac,x)` :

$$\forall x \in]-R, R[\,, \quad f(x) = \frac{\frac{11}{4} + \frac{i}{8}}{1 - x} + \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3i}{8}}{1 + x} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}}{(1 + x)^2}\,.$$

On constate alors que $R = 1$ et qu'on peut retrouver à la main le développement en série entière de f grâce à la connaissance qu'on a de la série géométrique :

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,,$$

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\,,$$

$$\frac{1}{(1 + x)^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1 + x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n + 1)x^n\,.$$

Maple fait le calcul pour nous grâce à la commande `series(g,x=0,21)`. On retrouve alors les résultats de la question (a).

502. **RMS 2010 915 Centrale PC**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^p}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de f ainsi que la limite de $f(x)$ quand $x \to R^-$.

(b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$. *Indication.* Utiliser $\varphi_x\colon t \mapsto x^{t^p}$.

Solution. —

(a) Pour $x = 1$, la suite de terme général x^{n^p} converge vers une limite non nulle, donc $R = 1$. Comme f est manifestement croissante sur $[0, 1]$, elle admet une limite ℓ, finie ou infinie, en 1^-. Par ailleurs, pour $x \geqslant 0$, la somme $f(x)$ est plus grande que chacune de ses sommes partielles : $f(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} x^{n^p}$. En passant à la limite dans cette inégalité quand $x \to 1^-$, on obtient $\ell \geqslant N + 1$, et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}$. On conclut que

$$\ell = \lim_{1^-} f(x) = +\infty.$$

(b) Il s'agit de la méthode classique de calcul d'un équivalent d'une somme de série de fonctions (ici, série entière) utilisant une comparaison série-intégrale : on remplace, à x fixé, l'indice entier n par une variable réelle t, d'où l'indication.

On fixe $x \in]0, 1[$. Comme $t \mapsto \varphi_x(t) = \exp(t^p \ln x)$ est dérivable de dérivée $t \mapsto pt^{p-1} \ln x\varphi_x(t) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \varphi_x(n) = \sum_{n\geqslant 0} x^{n^p}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature, en l'occurrence, elles convergent.

Plus précisément, on a $\int_n^{n+1} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi_x(n) = x^{n^p} \leqslant \int_{n-1}^{n} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$, donc

$$\forall x \in]0, 1[\,, \quad \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

On calcule l'intégrale par le changement de variable $t = \theta(u) = (-u/\ln x)^{1/p} = (-\ln x)^{-1/p}u^{1/p}$, la fonction θ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-\ln x)^{-1/p}}{p} \int_0^{+\infty} u^{-1+1/p} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Si l'on note C_p la constante (pour la variable x) d'expression $\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} u^{-1+1/p}e^{-u}\,\mathrm{d}u$, l'encadrement de f donné plus haut montre que, quand $x \to 1^-$,
$$f(x) \sim C_p(-\ln x)^{1/p}.$$

503. **RMS 2009 1053 Centrale PC**

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ après avoir déterminé les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale converge.

Solution. — Comme $f_n\colon t \mapsto 1/(1+t^n)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et comme $f_n(t) \sim_{+\infty} 1/t^n$, l'intégrale converge si et seulement si $n \geqslant 2$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1,\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1,\\ 0 & \text{si } t > 1.\end{cases}$$

De plus, on dispose de la domination
$$|f_n(t)| \leqslant \varphi(t) := \min(1, 1/t^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1,\\ 1/t^2 & \text{si } t \geqslant 1,\end{cases}$$

où φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée donne alors $\lim_{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, qui constitue le premier des deux termes du développement asymptotique recherché.

On évalue ensuite
$$v_n := u_n - 1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}\cdot$$

Sous réserve des justifications des permutations séries/intégrales[1], on a
$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} t^{nk}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{t^{nk+1}}{nk+1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{nk+1}\,,$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-n}}{1+t^{-n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{t^{-nk+1}}{-nk+1}\right]_1^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{nk-1}\,,$$
$$v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}\right] = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^2k^2-1}\cdot$$

On pose $w_n = 2\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}/(n^2k^2) = \alpha/n^2$, avec $\alpha = 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}/k^2$, et on évalue la différence $v_n - w_n$: grâce à l'inégalité triangulaire et à la minoration $nk^2 - 1/n \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 2$, on obtient
$$|v_n - w_n| = 2\left|\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\left[\frac{1}{n^2k^2-1} - \frac{1}{n^2k^2}\right]\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2k^2(n^2k^2-1)} = \frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(nk^2-\frac{1}{n})} \leqslant \frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2\zeta(2)}{n^3}\cdot$$

On en déduit que $v_n = w_n + \mathrm{o}(1/n^2) = \alpha/n^2 + \mathrm{o}(1/n^2)$, et il ne reste plus qu'à calculer α en séparant les indices pairs des indices impairs :
$$\alpha = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 2\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)^2} = 2\left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2j)^2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2j)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

On en déduit finalement que
$$u_n = 1 + \frac{\pi^2}{6n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

504. **RMS 2009 1054 Centrale PC**

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Il faut passer par les sommes partielles et utiliser le fait qu'on a affaire à des séries alternées pour majorer directement le reste par la valeur absolue du premier terme.

(a) Montrer que u_n est bien défini et déterminer la limite de (u_n).

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

(c) Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \mathrm{d}x/[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]$ quand n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

SOLUTION. —

(a) On pose $f_n(x) = 1/[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]$. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$, et vérifie $f_n(x) \sim 1/x^n$ quand x tend vers $+\infty$. Comme $n \geqslant 2$, l'intégrale u_n converge.

Comme $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1/n!$ pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, on en déduit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle. La domination $|f_n| \leqslant f_2$ avec f_2 continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ justifie l'usage du théorème de convergence dominée. On en déduit que $\lim u_n = \int_0^{+\infty} 0 = 0$.

(b) La majoration résulte de la concavité du logarithme. La minoration s'obtient, par exemple, par l'étude de la différence $\varphi(x) := \ln(1+x) - x + x^2/2$ [on a $\varphi'(x) = 1/(1+x) - 1 + x = x^2/(1+x) \geqslant 0$, donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi \geqslant 0$].

(c) Après factorisation de k dans chaque terme $(x+k)$, on encadre le logarithme du dénominateur de $f_n(x)$ à l'aide de la question précédente :

$$\ln n! + xH_n - \frac{x^2}{2}S_n \leqslant \ln \prod_{k=1}^{n}(x+k) = \ln n! + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \leqslant \ln n! + xH_n\ ,$$

où l'on note H_n le nombre harmonique $1+1/2+\cdots+1/n$ et S_n la somme partielle $1+(1/2^2)+\cdots+(1/n^2)$. Il résulte de l'encadrement ci-dessus que $\exp(-xH_n)/n! \leqslant f_n(x) \leqslant \exp(-xH_n + x^2S_n/2)/n!$. Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la suite (S_n) est majorée. Il existe donc $\alpha > 0$ [la valeur optimale est $\alpha = \zeta(2)/2 = \pi^2/12$] tel que, pour tout réel x, on ait

$$\frac{\exp(-xH_n)}{n!} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\exp(-xH_n + \alpha x^2)}{n!}\ .$$

La fonction $\theta\colon x \mapsto \exp(\alpha x^2)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, car $\theta''(x) = 2\alpha x(1+2\alpha x)\exp(\alpha x^2) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que le graphe de θ est au-dessous de sa corde sur le segment $[0,1]$, à savoir que $\theta(x) \leqslant 1 + \beta x$ pour tout $x \in [0,1]$, où $\beta = \exp(\alpha) - 1$. Par suite

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{\exp(-xH_n)}{n!} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\exp(-xH_n)}{n!}[1+\beta x]\ .$$

La croissance de l'intégrale implique alors que (le dernier calcul est réalisé par intégration par parties) :

$$\frac{1-e^{-H_n}}{n!H_n} \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1-e^{-H_n}}{n!H_n} + \frac{\beta}{n!}\int_0^1 x\exp(-xH_n)\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-H_n}}{n!H_n} - \frac{\beta e^{-H_n}}{n!H_n} + \frac{\beta(1-e^{-H_n})}{n!H_n^2}\ .$$

Comme H_n tend vers $+\infty$ avec n, les deux termes $-\beta e^{-H_n}/n!H_n$ et $\beta(1-e^{-H_n})/n!H_n^2$ sont négligeables devant $(1-e^{-H_n})/n!H_n$. L'encadrement ci-dessus prouve alors que $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \sim (1-e^{-H_n})/n!H_n \sim 1/n!H_n$ quand n tend vers l'infini. Enfin, une comparaison série-intégrale fournit le résultat bien connu $H_n \sim \ln n$, d'où l'on tire l'équivalent

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!\ln n}\ .$$

(d) La minoration $(x+1)(x+2)[(x+3)\cdots(x+n)] \geqslant (x+1)(x+2)[4\cdots(n+1)]$, valable pour tout $n \geqslant 3$ et tout $x \geqslant 1$, montre que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{6}{(n+1)!}f_2(x)\ .$$

Comme f_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{(n+1)!}\ ,$$

où l'on a noté K la constante $6\int_1^{+\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x$. Attendu que $1/(n+1)! = \mathrm{o}(1/n!\ln n)$ quand n tend vers $+\infty$, on conclut finalement que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!\ln n}\ .$$

505. **RMS 2009 1055 Centrale PC**
On pose $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Solution. — On pose $f\colon (x,t)\in\mathbb{R}^2 \mapsto e^{-t^2}\cos(2xt)$.

(a) La majoration $|f(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$ et l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ montrent que $D_F=\mathbb{R}$.
(b) On note f_n la fonction $t\in\mathbb{R}\mapsto (-1)^n e^{-t^2}(2xt)^{2n}/(2n)!$ et $S_n=\sum_{k=0}^n f_k$ la somme partielle d'ordre n de la série correspondante. Le développement en série entière du cosinus montre que $F(x)=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t$.
On applique alors directement le théorème de convergence dominée à la suite (S_n). Cette suite converge simplement vers la fonction continue par morceaux $t\mapsto f(x,t)$ sur $[0,+\infty[$, et elle satisfait l'hypothèse de domination suivante :

$$|S_n(t)| \leqslant e^{-t^2}\sum_{k=0}^n \frac{(2xt)^{2k}}{(2k)!} \leqslant \varphi(t) := e^{-t^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2xt)^{2k}}{(2k)!} = e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,.$$

Comme φ est continue par morceaux et intégrable [car $t^2\varphi(t)\sim_{+\infty}(t^2/2)\exp(2xt-t^2)\to 0$ quand t tend vers $+\infty$], on conclut que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}I_n}{(2n)!}x^{2n}\,,$$

où l'on a posé $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n}\,\mathrm{d}t$. On a montré que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Remarque. — Une intégration par parties consistant à dériver $t\mapsto e^{-t^2}$ fournit, pour tout $a>0$:

$$\int_0^a t^{2n}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}e^{-t^2}\right]_0^a - \int_0^a -2t\frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)}e^{-a^2}+\frac{2}{2n+1}\int_0^a t^{2n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

En passant à la limite lorsque a tend vers $+\infty$ on trouve $I_n=\frac{2}{2n+1}I_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ou encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\frac{2n-1}{2}I_{n-1}$. La technique habituelle consistant à multiplier numérateur et dénominateur par les nombres pairs manquants montre que $I_n=\frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2^n}I_0=\frac{(2n)!}{2^{2n}}I_0$. En admettant que $I_0=\sqrt{\pi}/2$, on obtient alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=I_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}\,.$$

506. **RMS 2009 1056 Centrale PC**
Soit $f\colon t\mapsto 1/(2+\cos t)$.

(a) Exprimer $f(t)$ comme une fraction rationnelle en $z=e^{it}$.
(b) En déduire la décomposition en série de Fourier de f.

Solution. —

(a) Les formules d'Euler donnent $f(t)=(2+(z+1/z)/2)^{-1}=2z/(z^2+4z+1)=h(z)$. Les racines du dénominateur sont $(-4\pm\sqrt{12})/2=-2\pm\sqrt{3}$. On pose $a=-2-\sqrt{3}$ et $b=-2+\sqrt{3}$, et on remarque que $ab=1$ et que $b-a=2\sqrt{3}$. La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle h est de la forme $\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{z-b}$. On obtient $\alpha=2a/(a-b)$ et $\beta=2b/(b-a)$, donc

$$f(t)=h(z)=\frac{2a}{(a-b)(z-a)}+\frac{2b}{(b-a)(z-b)}\,.$$

(b) Il suffit ensuite de développer en série entière la fonction h ci-dessus en utilisant l'identité $(1-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$ pour tout nombre complexe u tel que $|u|<1$. La factorisation $1/(z-a)=-b/(1-bz)$ se prête bien au développement cité, car $|b|=|2-\sqrt{3}|<1$ et $|z|=|e^{it}|=1$.
En revanche, si l'on factorise de la même manière $1/(z-b)=-a/(1-az)$, on ne peut pas poursuivre puisque $|az|=|a|=2+\sqrt{3}>1$. Il faut donc factoriser ainsi le second terme : $1/(z-b)=z^{-1}(1-bz^{-1})$. On obtient, pour tout z de module égal à 1 (en fait, l'identité suivante est vraie dans la couronne circulaire ouverte définie par $|a|<|z|<|b|$) :

$$h(z)=\frac{2}{b-a}\frac{1}{1-bz}+\frac{2bz^{-1}}{b-a}\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}b^nz^n+\frac{bz^{-1}}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}b^nz^{-n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}b^nz^n+\sum_{n=1}^{+\infty}b^nz^{-n}\right]\,.$$

On peut donner une formulation encore plus élégante du résultat, à condition de convenir qu'une somme pour $n \in \mathbb{Z}$ correspond aux deux sommes de séries ci-dessus : $\forall z \in \mathcal{U},\ h(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{|n|} z^n$. En substituant z par e^{it}, et en posant $a_0' = 2/\sqrt{3}$ et $a_k' = 2b^k/\sqrt{3}$ pour tout $k \geqslant 1$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{|n|} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2b^k}{\sqrt{3}} \cos(kt) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k' \cos(kt)\,.$$

Par ailleurs, comme f est 2π-périodique, paire, et de classe $\mathcal{C}^1$, elle est la somme des termes pairs de sa série de Fourier (au sens de la convergence simple et de la convergence normale) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)\,.$$

La question est de savoir si l'on peut identifier les coefficients a_k et a_k' de ces deux égalités. On apporte une réponse positive, en notant que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_k$ avec $f_0 = 1/\sqrt{3} = a_0'/2$ et $f_k(t) = 2b^k\cos(kt)/\sqrt{3} = a_k'\cos(kt)$ pour $k \geqslant 1$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, puisque $\|f_k\|_\infty = 2|b|^k/\sqrt{3}$ pour $k \geqslant 1$, avec $|b| < 1$. Pour tout entier n fixé, il en est de même de la série de fonctions $t \mapsto f_k(t)\cos(nt)$. Par suite, on peut calculer les coefficients de Fourier a_n de f en appliquant le théorème d'intégration sur un segment des séries normalement convergentes :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,,\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a_0'}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k' \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)\,. \end{aligned}$$

On sait que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \delta_{k,n}$ (orthogonalité de la famille $t \mapsto \cos(nt)$ pour le produit scalaire usuel), donc on vérifie bien que $a_n' = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^n\,.$$

507. **RMS 2009 1057 Centrale PC**

Résoudre $x^2y' - (2x-1)y = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. — On commence par résoudre séparément sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. Sur I_2, l'équation équivaut à $y' + fy = 1$, avec $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$. On choisit $F(x) = -\frac{1}{x} - 2\ln x$ comme primitive de f. On remarque que $e^{F(x)} = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ est la dérivée de $G\colon x \in I_2 \mapsto e^{-1/x}$. Alors sur I_2, l'équation équivaut à $e^Fy' + F'e^Fy = (e^Fy)' = G'$. Ses solutions sont donc les fonctions de la forme

$$y\colon x \mapsto e^{-F(x)}(a + G(x)) = x^2e^{\frac{1}{x}}\left(a + e^{-\frac{1}{x}}\right) = ax^2e^{\frac{1}{x}} + x^2\,,$$

où a est une constante réelle. On remarque que c'est aussi la forme générale des solutions sur I_1.

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$, on note que $y(0) = 0$ nécessairement. Par suite, rechercher les solutions sur $\mathbb{R}$, c'est déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction définie par

$$y(x) = \begin{cases} ax^2e^{\frac{1}{x}} + x^2 & \text{si } x \in I_1,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ bx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Or la continuité en zéro impose que $b = 0$, et alors $y(0) = 0$. Dans ce cas la fonction possède une dérivée à droite nulle en zéro (dérivation de $x \mapsto x^2$), et le taux d'accroissement de y en zéro à gauche vaut $\tau(x) = \frac{ax^2e^{\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = axe^{\frac{1}{x}}$. Il tend vers zéro quand x tend vers zéro à gauche, donc y possède une dérivée nulle à gauche en zéro.

Finalement, y est dérivable en zéro avec $y'(0) = 0$. On peut vérifier en outre que y' est continue sur en zéro : c'est clair à droite, et cela résulte, à gauche, du calcul de $y'(x) = ae^{\frac{1}{x}}[2x-1] + 2x$ pour tout $x < 0$.

On conclut que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \begin{cases} ax^2e^{\frac{1}{x}} + x^2 & \text{si } x < 0,\\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

508. **RMS 2009 1058 Centrale PC (calcul formel)**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et (E) l'équation différentielle $y'' + (x^2 + \lambda^2)y = 0$. On cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière $f\colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

(a) Donner une relation entre les coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) Écrire un programme en Maple pour calculer ces coefficients.

Solution. —

(a) Dans un premier temps, on n'utilise pas les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. On suppose que $f\colon x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution. Alors

$$\begin{aligned} f''(x) + (x^2+\lambda^2)f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+2} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2}\,, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \lambda^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^n\,, \\ &= (2a_2+\lambda^2 a_0) + (6a_3+\lambda^2 a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \lambda^2 a_n + a_{n-2}]x^n\,, \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

L'unicité des coefficients d'une somme de série entière entraîne que $2a_2 + \lambda^2 a_0 = 6a_3 + \lambda^2 a_1 = 0$ et que

$$\forall n \geqslant 2, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + \lambda^2 a_n + a_{n-2} = 0\,.$$

Comme $a_0 = 1$, on en déduit que $a_2 = -\lambda^2/2$. Comme $a_1 = 0$, on en déduit que $a_3 = 0$, puis que tous les a_{2k+1} sont nuls grâce à la relation de récurrence ci-dessus. Par ailleurs, $a_2 = -\lambda^2/2$ et, pour les rangs pairs, la relation de récurrence devient

$$\forall k \geqslant 1, \quad (2k+2)(2k+1)a_{2k+2} + \lambda^2 a_{2k} + a_{2k-2} = 0\,.$$

On peut l'écrire sous la forme $\forall k \geqslant 2, \quad a_{2k} = -[\lambda^2 a_{2k-2} + a_{2k-4}]/[(2k)(2k-1)]$.

(b) Les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_2 = -\lambda^2/2$, ainsi que la relation de récurrence démontrée à la question précédente suggèrent d'écrire une procédure récursive, qui calcule a_{2k} individuellement :

```
coefficients:=proc(k,lambda)
option remember;
if k=0 then 1
   elif k=1 then -lambda^2/2
   else -(lambda^2*coefficients(k-1,lambda)+coefficients(k-2,lambda))/(2*k*(2*k-1))
end if;
end proc;
```

Si l'on souhaite obtenir la somme partielle d'ordre $2n$, on écrira plutôt une procédure itérative, qui calcule $S_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2k}x^{2k}$:

```
sommepartielle:=proc(n,x,lambda)
local k, derniercoefficient, avantderniercoefficient, somme, intermediaire;
avantderniercoefficient:=0;derniercoefficient:=1;somme:=1;
for k from 1 to n do
      intermediaire:=-(lambda^2*derniercoefficient+avantderniercoefficient)/(2*k*(2*k-1));
      somme:=somme+intermediaire*x^(2*k);
      avantderniercoefficient:=derniercoefficient;
      derniercoefficient:=intermediaire;
end do;
somme;
end proc;
```

Le lecteur (la lectrice) aura remarqué que la commande `avantderniercoefficient:=0` qui figure en tête de la procédure consiste à attribuer la valeur 0 au coefficient a_{-2}, de sorte que la relation $a_{2k} = -[\lambda^2 a_{2k-2} + a_{2k-4}]/[(2k)(2k-1)]$ soit vraie y compris pour $k = 1$.

509. **RMS 2009 1059 Centrale PC (calcul formel)**

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

(a) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de zéro.

(b) Résoudre (E).

(c) Que donne Maple ? Comparer.

Solution. —

(a) On suppose que $f_0\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution sur $]-R,R[$ avec $R>0$. Alors, pour tout réel x tel que $|x|<\min(R,1)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n+2\right)a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cdot$$

L'unicité du développement en série entière donne $a_0=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}\right]\cdot$$

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est 1 car a_n est une fraction rationnelle en n. On vient donc de trouver une solution de (E) développable en série entière au voisinage de zéro. La décomposition du coefficient a_n en éléments simples permet en outre de calculer la somme : elle vaut zéro en zéro et,

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\},\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n &= \frac12\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}+\frac12\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2},\\ &= \frac12\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\frac12\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n},\\ &= \frac12\ln(1+x)+\frac1x\left[\ln(1+x)-x\right]+\frac{1}{2x^2}\left[\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right],\\ &= \left[\frac{1}{2x^2}+\frac1x+\frac12\right]\ln(1+x)-\frac34-\frac{1}{2x},\\ &= \frac12\left(1+\frac1x\right)^2\ln(1+x)-\frac34-\frac{1}{2x}\cdot\end{aligned}$$

(b) La question précédente fournit une solution particulière de l'équation complète. Il reste à résoudre l'équation homogène $x^2y''+4xy'+2y=0$, notée (H). On engage les calculs *a priori* sur $I_1=]-\infty,0[$ ou $I_2=]0,\infty[$. Il s'agit d'une équation d'Euler, pour laquelle le changement de variable préconisé est $x=\pm e^t$, suivant que l'intervalle de résolution est I_1 ou I_2.

On se place sur I_2, on pose $x=e^t$ avec $t\in\mathbb{R}$, et on pose $z(t)=y(x)=y(e^t)$ ou encore $y(x)=z(\ln x)$. Alors $y'(x)=z'(\ln x)/x$ et $y''(x)=z''(\ln x)/x^2-z'(\ln x)/x^2$. L'équation homogène se traduit alors par $z''(\ln x)-z'(\ln x)+4z'(\ln x)+2z(\ln x)=z''(t)+3z'(t)+2z(t)=0$. Les solutions de cette dernière équation sont les fonctions de la forme $t\in\mathbb{R}\mapsto ae^{-t}+be^{-2t}$, donc les solutions de (H) sur I_2 sont les fonctions de la forme

$$t\mapsto \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2},$$

où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. C'est aussi la forme générale des solutions de (H) sur I_1.

Pour trouver les solutions sur $]-1,1[$, on doit chercher s'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que la fonction définie par

$$y(x)=\begin{cases}\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+f(x) & \text{si } x\in I_1,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ \frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+f(x) & \text{si } x\in I_2,\end{cases}$$

soit deux fois dérivable sur $]-1,1[$. Comme f l'est (c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1), il suffit de trouver (a,b,c,d) tel que $y-f$ soit deux fois dérivable sur $]-1,1[$. Dans ce cas, la continuité en zéro impose que $a=b=c=d=0$, et alors $y=f$.

La réciproque ayant été vue à la question précédente, on conclut que f est la seule solution de (E) sur $]-1,1[$.

(c) La même chose que la question (b), grâce à la commande

```
dsolve(x^2*(diff(y(x),x$2)))+4*x*(diff(y(x),x))+2*y(x)=ln(1+x),y(x));
```

510. **RMS 2009 1060 Centrale PC**

Déterminer les extrema de $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Solution. — La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x = 4(y^3 - x)$. Les coordonnées des points critiques de f sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3 & = & y\,, \\ y^3 & = & x\,, \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^3 & = & y\,, \\ x^9 & = & x\,, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Étude en $(0,0)$, où f vaut zéro. Au voisinage de $(0,0)$, on a $f(x,y) = -4xy + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2)$, donc le signe de f est celui de $-xy$, donc il n'est pas constant, donc f n'a pas d'extremum en $(0,0)$.

Étude en $(1,1)$, où f vaut -2. On effectue un développement limité en posant $x = 1 + h$ et $y = 1 + k$. Alors

$$f(x,y) = (1+h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) = -2 + 6\left(h^2 + k^2 - \frac{2}{3}hk\right) + \mathrm{o}(\|(h,k)\|^2)\,.$$

Comme $h^2 + k^2 - \frac{2}{3}hk = (h - \frac{1}{3}k)^2 + \frac{8}{9}k^2 \geqslant 0$, on en déduit que $f(x,y) \geqslant f(1,1)$ au voisinage de $(1,1)$, donc que f y admet un minimum local. La parité de f montre qu'elle admet aussi un minimum local en $(-1,-1)$.

Remarque. — Comme $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$ et est continue, on conclut que les deux minima locaux ci-dessus sont en fait des minima globaux.

511. **RMS 2009 1061 Centrale PC (calcul formel)**

Soit $f\colon (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^4} + xy - 2y$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(a) Tracer la surface définie par f. Que peut-on dire en $(0,0)$?

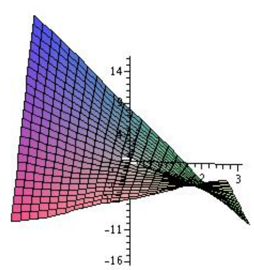
(b) Calculer les dérivées partielles en $(0,0)$. Tracer les surfaces définies par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Que voit-on ? Que peut-on en déduire ?

Solution. —

(a) On valide

```
with(plots):f:=(x,y)->x*y^3(x^2+y^4)+x*y-2*y;plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2)
```

Après avoir éventuellement fait pivoter le dessin obtenu, on peut voir cela :



L'inégalité arithmético-géométrique montre que $|xy^2| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^4)$, donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}|y| + |xy| + 2|y|\,.$$

le membre de droite tend manifestement vers zéro quand (x,y) tend vers $(0,0)$, donc f est continue en l'origine.

(b) Pour x et y non nuls, on calcule $[f(x,0) - f(0,0)]/x = 0$, et $[f(0,y) - f(0,0)]/y = -2$. Les dérivées partielles en zéro étant les limites de ces deux taux d'accroissement, on conclut que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2\,.$$

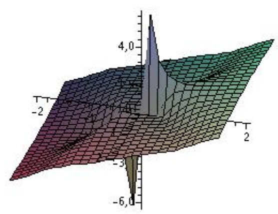
Les formules des dérivées partielles et le tracé des surfaces demandées sont obtenues par

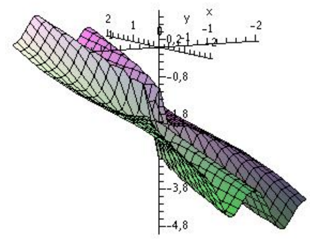
```
p:=diff(f(x,y),x);q:=diff(f(x,y),y);plot3d(p,x=-2..2,y=-2..2);plot3d(q,x=-2..2,y=-2..2).
```

On obtient, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^4}-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^4)^2}+y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3xy^2}{x^2+y^4}-\frac{4xy^6}{(x^2+y^4)^2}+x-2=xy^2\frac{3x^2-y^4}{(x^2+y^4)^2}+x-2\,.$$

et on voit ça :





Il semble que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en zéro, voire non bornée dans tout voisinage de l'origine, alors que $\frac{\partial f}{\partial y}$ serait bornée, voire continue en l'origine.
Le premier point est confirmé par le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{1}{y}+y$. Pour décider du second point, il suffit de s'intéresser à $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-x+2=xy^2\frac{3x^2-y^4}{(x^2+y^4)^2}$. Lorsque $x=0$, cette quantité est nulle. Lorsque $x\neq 0$, cette quantité s'exprime agréablement à l'aide de $t=y^2/x$, en factorisant par x^2 le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-x+2=g(t):=\frac{t(3-t^2)}{(1+t^2)^4}\,.$$

L'examen des degrés montre que g admet la limite zéro en $\pm\infty$, donc il existe $a>0$ tel que $|g|\leqslant 1$ en dehors de $[-a,a]$. Comme g est continue, elle est bornée sur le segment $[-a,a]$, et finalement, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est bornée au voisinage de l'origine (pas sur $\mathbb{R}^2$, puisqu'on a retranché x pour faire ce calcul).
En revanche, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en l'origine, puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,y)-y^2+2=g(1)=1/4$ ne tend pas vers zéro quand y tend vers zéro. Le graphe fourni par Maple ne me paraît pas être assez précis pour détecter ce comportement de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

512. **RMS 2009 1062 Centrale PC**
Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^2)^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant\|x-y\|^2$. Montrer que f est constante.

Solution. — On fixe $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet un développement limité d'ordre 1 en a de la forme $f(a+h)=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+\mathrm{o}(h)$, où $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$. En particulier, si $h=(h_1,0)$, $x=a+h$ et $y=0$, on obtient

$$\forall h_1\in\mathbb{R},\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\mathrm{o}(h_1)\right|\leqslant h_1^2\,.$$

En divisant par $h_1\neq 0$, puis en faisant tendre h_1 vers zéro par valeurs différentes de zéro, on obtient $|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)|\leqslant 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0$.
Il s'ensuit que f est constante sur toute droite du plan parallèle à Ox. On montre que même qu'elle est constante sur toute droite parallèle à Oy et, finalement, qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^2$.

Géométrie

513. **RMS 2011 1026 Centrale PC**
Montrer que $x\mapsto\frac{x-i}{x+i}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité privé de 1.

Solution. — Pour tout z appartenant au cercle unité prive de 1, il existe un unique $\theta\in\,]-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ tel que $z=e^{i\theta}$. On résout alors l'équation $\frac{x-i}{x+i}=z$:

$$\frac{x-i}{x+i}=z\iff x=\frac{-i(z+1)}{z-1}\iff x=\frac{-i(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\iff x=-\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2}\,.$$

On obtient une et une seule solution (θ existe et est unique pour z donné).

514. **RMS 2011 1027 Centrale PC**

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y+z=0$.

Solution. — On appelle M la matrice cherchée, H le plan de l'énoncé, p la projection orthogonale sur H, et q la projection orthogonale sur la droite $H^\perp$. On a alors $p+q=\mathrm{id}$. Un vecteur unitaire et normal à H est $e=(1,1,1)/\sqrt{3}$, et le cours affirme que $q(x)=(e|x)e$ pour tout $x\in\mathbb{R}^3$. Alors $p(x)=x-(e|x)e$ pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, et il suffit d'appliquer cette relation aux vecteurs de la base canonique. On obtient

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

515. **RMS 2011 1028 Centrale PC**

Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $u=e_1+e_2+e_3$ et d'angle $2\pi/3$.

Solution. — On appelle M la matrice de R, θ son angle, D son axe, p la projection orthogonale sur l'axe, et v le vecteur $u/\|u\|$. On a alors $R(x)=R(p(x))+R(x-p(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}^3$.
Comme $p(x)$ appartient à l'axe de la rotation, $R(p(x))=p(x)$. Comme $x-p(x)$ est orthogonal à l'axe, $R(x-p(x))=(\cos\theta)(x-p(x))+(\sin\theta)v\wedge(x-p(x))$. Enfin, comme $p(x)=(v|x)v$, on obtient l'expression littérale de R, qui se simplifie en utilisant la relation $v\wedge v=0$, puis son expression numérique, grâce aux valeurs $\cos\theta=-1/2$, $\sin\theta=\sqrt{3}/2$ et à la relation $v=u/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}R(x)&=(v|x)v+(\cos\theta)(x-(v|x)v)+(\sin\theta)v\wedge(x-(v|x)v)\,,\\&=(v|x)v+(\cos\theta)(x-(v|x)v)+(\sin\theta)v\wedge x\,,\\&=(v|x)(1-\cos\theta)v+(\cos\theta)x+(\sin\theta)v\wedge x\,,\\&=\frac{3(v|x)}{2}v-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}v\wedge x\,,\\&=\frac{1}{2}\left[(u|x)u-x+u\wedge x\right]\,.\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer cette relation aux vecteurs de la base canonique pour obtenir

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Remarque. — On peut comprendre le résultat de la manière suivante. L'axe de R étant la hauteur issue de O de la pyramide s'appuyant sur les vecteurs de la base canonique, l'angle étant $2\pi/3$, cette rotation permute les vecteurs de $\mathcal{B}$. Comment le rédiger en termes de géométrie pure ? ?

516. **RMS 2011 1029 Centrale PC**

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient $a>0$, $A(a,0)$ et $B(-a,0)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_a$ des $M\in\mathbb{R}^2$ tels que $MA\times MB=a^2$. Donner une représentation polaire de $\mathcal{C}_a$; tracer la courbe.

Solution. — Soit M un point du plan de coordonnées polaires (r,θ). Alors $MA^2=(r\cos\theta+a)^2+r^2\sin^2\theta=r^2+2ar\cos\theta+a^2$ et $MB^2=(r\cos\theta-a)^2+r^2\sin^2\theta=r^2-2ar\cos\theta+a^2$. Ce point M appartient à Γ si et seulement si $MA^2\times MB^2=a^4$, c'est-à-dire $(r^2+2ar\cos\theta+a^2)(r^2-2ar\cos\theta+a^2)=r^4-4a^2r^2\cos^2\theta+2a^2r^2+a^4=a^4$, ou encore $r^2(r^2-4a^2\cos^2\theta+2a^2)=0$. La solution $r=0$ mise à part, une équation en coordonnées polaires de Γ est

$$r^2=2a^2(2\cos^2\theta-1)=2a^2\cos(2\theta)\,.$$

On constate que l'on retrouve l'origine ($r=0$) pour $\theta=\pi/4$ par exemple. On note $M_1(\theta)$ le point de coordonnées polaires $(a\sqrt{2\cos(2\theta)},\theta)$ pour $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$, c'est-à-dire le point courant de la courbe Γ_1 d'équation polaire

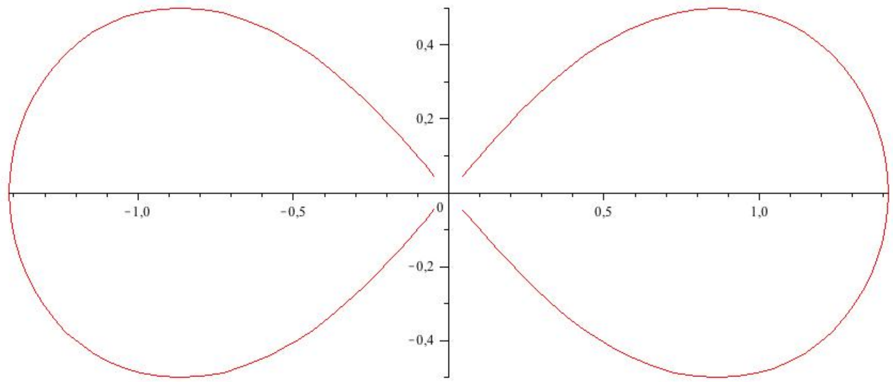
$$r=a\sqrt{2\cos(2\theta)}\quad\text{pour }\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right].$$

Le point de coordonnées polaires $(-a\sqrt{2\cos(2\theta)},\theta)$ est le symétrique de $M_1(\theta)$ par la symétrie centrale s. On en déduit que

$$\Gamma=\Gamma_1\cup s(\Gamma_1)\,.$$

Il suffit donc de tracer Γ_1 pour obtenir Γ. Comme la fonction $\theta\mapsto\sqrt{2\cos(2\theta)}$ est paire, on peut encore réduire l'intervalle d'étude à $[0,\pi/4]$, puis effectuer la symétrie orthogonale par rapport à Ox. Les variations sont simples à étudier et on obtient une lemniscate de Bernoulli. Le dessin a été obtenu en Maple (pour $a=1$) par les commandes suivantes :

```
with(plots):
L:=polarplot(sqrt(2*cos(2*theta)),theta=-Pi/4..Pi/4):
LL:=polarplot(-sqrt(2*cos(2*theta)),theta=-Pi/4..Pi/4):
display([L,LL]);
```



517. **RMS 2011 1030 Centrale PC**

Déterminer le rayon de courbure en tout point de la courbe d'équation $y = x \ln x$.

Solution. — On considère que le graphe en question est celui de l'arc paramétré $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto h(x) = (x, x \ln x)$. Les deux premiers vecteurs dérivés sont donnés par $h'(x) = (1, 1 + \ln x)$ et $h''(x) = (0, 1/x)$: ils forment une famille libre pour tout x, donc l'arc h est birégulier. Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier, il existe un relèvement continu $\alpha\colon x \in \mathbb{R}_+^* \to \alpha(x)$ de l'angle polaire de h'. Il est donné par $\cos\alpha(x) = 1/\|h'(x)\| > 0$ et $\sin\alpha(x) = (1+\ln x)/\|h'(x)\|$, donc $\tan\alpha(x) = 1+\ln x$. La positivité de $\cos\alpha(x)$ permet de choisir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \alpha(x) = \arctan(1 + \ln x)\,.$$

Le caractère birégulier de h montre que les abscisses curvilignes s associées à h sont des difféomorphismes sur leurs images (ce sont les fonctions s de $\mathbb{R}_+^*$ telles que $s' = \|h'\|$), et la courbure peut être calculée par $C = (\alpha \circ s^{-1})'$. Au point de paramètre x, la courbure est donnée par la formule condensée habituelle

$$C = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{\frac{1/x}{1+(1+\ln x)^2}}{(1+(1+\ln x)^2)^{1/2}} = \frac{1}{x(1+(1+\ln x)^2)^{3/2}}\,.$$

On en déduit que le rayon de courbure au point de paramètre x vaut

$$R = \frac{1}{C} = x(1 + (1 + \ln x)^2)^{3/2}\,.$$

Remarque. — On peut aussi utiliser la formule $C = \mathrm{Det}(h', h'')/\|h'\|^3$, déduite des formules de Frenet.

518. **RMS 2011 1031 Centrale PC**

Soit $t \in \mathbb{R}$. Caractériser l'ensemble $\{(x, y),\ x^2 + y^2 = (x \cos t + y \sin t + 1)^2\}$.

Solution. — On note C l'ensemble en question, $\mathcal{B}$ la base canonique du plan euclidien orienté, et $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ le repère canonique. Une équation de C dans $\mathcal{R}$ est

$$x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t - 2xy \sin t \cos t - 2(x \cos t + y \sin t) - 1 = (x \sin t - y \cos t)^2 - 2(x \cos t + y \sin t) - 1 = 0\,.$$

Soit P la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle t :

$$P = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

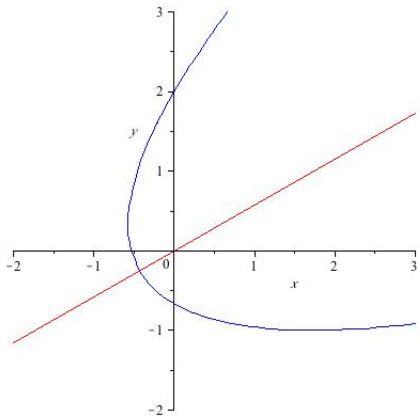
On considère P comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une base notée $B' = (e_1', e_2')$, et on note X (respectivement X') le vecteur colonne des composantes d'un vecteur du plan dans $\mathcal{B}$ (respectivement dans $\mathcal{B}'$). On connaît la relation $X = PX'$, ou encore $X' = {}^tPX$, c'est-à-dire

$$x' = x \cos t + y \sin t\,,$$
$$y' = -x \sin t + y \cos t\,.$$

L'équation de C dans $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ est donc $y'^2 - 2x' - 1 = 0$, ou encore

$$y'^2 = 2x'' ,$$

où l'on a posé $x'' = x' + 1/2$. On reconnaît ci-dessus l'équation réduite d'une parabole de paramètre 1 dans le repère $\mathcal{R}'' = (O'', \mathcal{B}')$, où $O'' = O - (1/2)e'_1$. Voici le tracé pour $t = \pi/6$:



Ce dessin a été obtenu en Maple grâce aux commandes suivantes :

```
with(plots):
t:=Pi/6:
C:=implicitplot(x**2+y**2=(x*cos(t)+y*sin(t)+1)**2,x=-2..3,y=-2..3,color=blue):
axe:=plot(x*tan(t),x=-2..3,y=-2..3):
display(C,axe);
```

519. **RMS 2011 1032 Centrale PC (calcul formel)**
Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et Γ la courbe d'équation $x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$.

(a) Représenter la courbe pour $a = 2$ et $b = 1$.

(b) Déterminer l'équation de la normale à Γ au point $M(t)$. Cette droite recoupe Γ en $P(t)$.

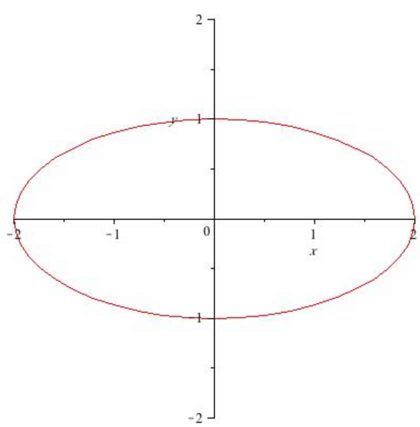
(c) Déterminer le minimum de $f : t \mapsto M(t)P(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.

Solution. —

(a) On utilise la commande `plot` de Maple de la manière suivante :

```
plot([2*cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],x=-2..2,y=-2..2);
```

Il faut préciser le même intervalle pour x et y si l'on veut un tracé dans un repère orthonormé. Par défaut, Maple adapte une fenêtre graphique à la taille de la courbe, et l'ellipse aux demi-axes distincts semble circulaire.



(b) La tangente à Γ au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur dérivé $\overrightarrow{OM}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-a\sin t, b\cos t)$ puisque ce dernier est non nul. La normale (N) à Γ au point $M(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} M = (x, y) \in (N) \iff \overrightarrow{M(t)M} \cdot \overrightarrow{OM}'(t) = 0 &\iff (x - a\cos t)(-a\sin t) + (y - b\sin t)(b\cos t) = 0 , \\ &\iff (-a\sin t)x + (b\cos t)y + (a^2 - b^2)\sin t\cos t = 0 . \end{aligned}$$

(c) Une équation cartésienne de Γ est $(x/a)^2+(y/b)^2=1$. Le point $P(t)$ est obtenu en demandant la résolution du système d'inconnues x et y formé de l'équation de la normale et de l'équation de l'ellipse. On trouvera deux solutions : $M(t)$, que l'on écartera, et $P(t)$. On demande ensuite le carré de la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{M(t)P(t)}$. Voici les commandes utilisées :

```
e1:=-a*sin(t)*x+b*cos(t)*y+(a**2-b**2)*sin(t)*cos(t)=0;
e2:=(x/a)**2+(y/b)**2=1:
sols:=[solve({e1,e2},{x,y})];
M:=vector([rhs(op(1,sols[1])),rhs(op(2,sols[1]))]);
P:=vector([rhs(op(1,sols[2])),rhs(op(2,sols[2]))]);
MP:=evalm(P-M);
f:=simplify(expand((MP[1])**2+(MP[2])**2));
```

Le résultat ne se simplifie pas. Je ne sais pas comment poursuivre ? ?

520. **RMS 2011 1033 Centrale PC (calcul formel)**

On se place dans $\mathbb{R}^2$ euclidien muni du repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soient $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$.

(a) Si $k\in\mathbb{R}_+$, on pose $\Gamma_k=\{M\in\mathbb{R}^2,\ AM\times A'M=k^2\}$. Donner une équation cartésienne de Γ_k. Soient $f\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \sqrt[4]{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)}$ et $S=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=f(x,y)\}$.

(b) Représenter S avec Maple. Quelle relation y a-t-il entre S et les Γ_k ?

(c) Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

(d) Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

(e) Écrire une procédure donnant l'équation d'un plan tangent. Représenter de tels plans.

(f) Déterminer le contour apparent de S dans la direction $\overrightarrow{j}$.

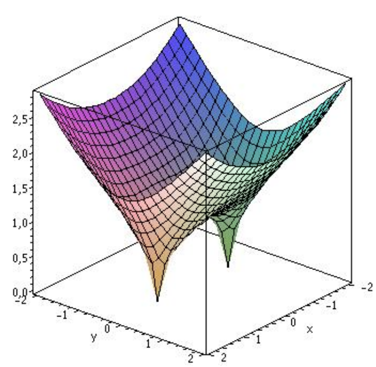
Solution. —

(a) Une équation cartésienne de Γ_k est $((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)=k^4$.

(b) On utilise les commandes suivantes :

```
f:=(x,y)->(((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2))**(1/4);plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2);
```

et on obtient :



La courbe Γ_k est l'intersection de S avec le plan d'équation $z=k$, ce plan étant identifié à $\mathbb{R}^2$.

Remarque. — Les courbes Γ_k pour $k<1$ ont deux composantes connexes, le cas extrême étant celui de Γ_0 qui est la réunion de deux points. Les courbes Γ_k pour $k\geqslant 1$ ont une seule composante connexe, le cas extrême étant celui de Γ_1, obtenue en intersectant S avec le plan "horizontal" passant par le col dont il est question au (d). La courbe Γ_1 est une lemniscate de Bernoulli, tracée à l'exercice 516 page 360.

(c) La fonction racine quatrième étant continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0),(-1,0)\}$, qui sont les points où l'argument de la racine s'annule. On montre ensuite que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(1,0)$. À cet effet, on calcule, pour h voisin de zéro, le quotient

$$\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h}=\frac{\sqrt[4]{h^2(2+h)^2}}{h}=\varepsilon\sqrt[2]{\frac{2+h}{|h|}},$$

où ε désigne le signe de h. Ce quotient n'a pas de limite finie quand h tend vers zéro, et on conclut que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(1,0)$. On ferait de même en $(-1,0)$. La représentation de S, avec ses deux puits aux extrémités acérées, fait comprendre ce phénomène.

(d) La fonction f est positive, et $f(x,y) = 0$ est clairement équivalente à $(x,y) = (1,0)$ ou $(-1,0)$. On vient donc de prouver, sans recours au calcul différentiel, que f admet zéro comme minimum global, et qu'il est atteint en exactement deux points. En ces deux points, f présente bien sûr des minima locaux. Par ailleurs, la représentation de S semble indiquer l'existence d'un col entre ces deux minima (mais pas d'extremum) et, comme $f(x,y) \geqslant \sqrt[4]{y^4} = |y|$, il est certain que f n'a pas de maximum global.

On montre ensuite, à l'aide du calcul différentiel, que f n'a aucun extremum local sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$ sur lequel elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Les commandes

```
Dx:=simplify(diff(f(x,y),x));Dy:=simplify(diff(f(x,y),y));solve({Dx=0,Dy=0},{x,y});
```

indiquent que le point $(0,0)$ est l'unique point critique de f sur U. Or $f(0,0) = 1$ et, au voisinage épointé de l'origine, $f(x,0) = \sqrt{1-x^2} < 1$ alors que $f(0,y) = \sqrt{1+y^2} > 1$. Ceci montre que f n'a pas d'extremum local en l'origine, mais y présente effectivement un col.

(e) La surface S a pour équation $g(x,y,z) = 0$, où $g\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x,y) - z$. Tous les points de g étant réguliers, le plan tangent à g en un point $M_0 = (a,b,c)$, avec $c = f(a,b)$ nécessairement, a pour équation $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$ (le vecteur gradient est orthogonal au plan tangent).

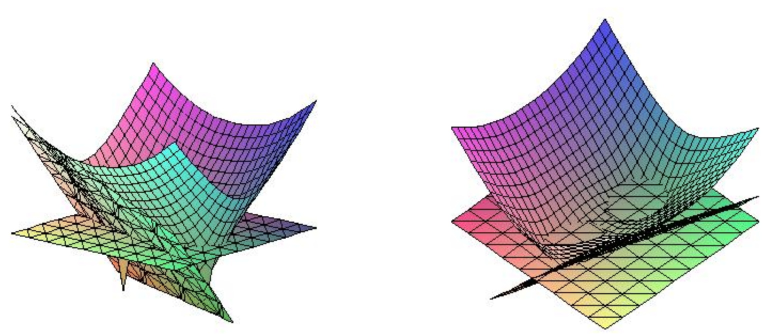
Dans la bibliothèque `linalg`, on utilise les commandes `grad` et `dotprod`, cette dernière avec l'option `orthogonal`. Voici une procédure possible :

```
plan_tangent:=proc(a,b,x,y,z)
global f;
local c;
subs(c=f(a,b),dotprod(grad(f(a,b)-c, vector([a,b,c])),vector([x-a,y-b,z-c]),'orthogonal'))=0
end proc;
```

Pour représenter de tels plans et S sur le même dessin, on peut utiliser `display` de la manière suivante :

```
with(plots):S:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2):
Q1:=subs({a=0,b=0},plan_tangent(a,b,x,y,z));
Q2:=subs({a=1,b=1},plan_tangent(a,b,x,y,z));
P1:=implicitplot3d(Q1,x=-2..2,y=-2..2,z=0..3):
P2:=implicitplot3d(Q2,x=-2..2,y=-2..2,z=0..3):
display([S,P1,P2]);
```

On notera que le raccourci `plan_tangent(0,0,x,y,z))` provoque une erreur, car Maple tente de dériver une fonction par rapport à un nombre — en l'occurrence zéro — au lieu de dériver par rapport à une variable. Il est donc nécessaire d'utiliser une ligne auxiliaire de la forme `Q1:=subs({a=0,b=0},plan_tangent(a,b,x,y,z))`. Par ailleurs, le raccourci `implicitplot3d(subs({a=0,b=0},plan_tangent(a,b,x,y,z));,x=-2..2,y=-2..2,z=0..3)` ne fonctionne pas non plus (à cause des règles d'évaluation des arguments des commandes graphiques ? ?). Il est donc nécessaire d'utiliser deux étapes (Q pour les équations des plans tangents, et P pour les commandes graphiques). Voici deux vues de la même représentation :



(f) Par définition, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul de l'espace, le contour apparent d'une surface S dans la direction $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points de S où la direction du plan tangent contient u. Comme S est donnée par une équation $z = f(x,y)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en deux points — voir la question (c) —, le plan tangent à S en $M \notin \{(1,0,0),(-1,0,0)\}$ est le plan passant par M et orthogonal au gradient de $F\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y) - z$ en M, qui n'est jamais nul. En effet, il vaut

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), -1\right) .$$

Le contour apparent de S dans la direction $\overrightarrow{j}$ est donc l'ensemble des points M de S vérifiant $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(M) \cdot \overrightarrow{j} = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$. Cette équation équivaut à

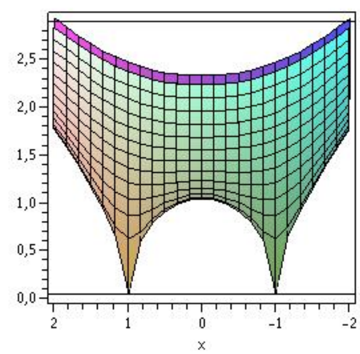
$$2y[((x+1)^2 + y^2) + ((x-1)^2 + y^2)] = 0 \quad \text{ou encore à} \quad y = 0\,.$$

Le contour apparent recherché est donc l'intersection de S et du plan d'équation $y = 0$, c'est-à-dire la courbe du plan Oxz d'équation $z = \sqrt[4]{(x^2-1)^2}$, ou encore

$$z^2 = |x^2 - 1| \quad \text{et} \quad z \geqslant 0\,.$$

Il s'agit de la réunion la partie de l'hyperbole d'équation $x^2 - z^2 = 1$ correspondant à $z \geqslant 0$, et de la partie du cercle d'équation $x^2 + z^2 = 1$ correspondant à $z \geqslant 0$. En fait, il faudrait retirer de ce contour les points pour lesquels $z = 0$, c'est-à-dire les deux points de non différentiabilité de F.

On peut vérifier les calculs à l'aide du tracé de la question (b), puisqu'il est possible de faire pivoter les surfaces à la souris. On présente donc S de sorte que l'axe Oy pointe vers nous (on regarde S depuis l'infini dans la direction $\overrightarrow{j}$). On voit bien le demi-cercle et les deux demi-branches d'hyperbole. Un contour apparent parasite apparaît en haut de la figure et sur les côtés, car on a tracé seulement la portion de S correspondant à une partie bornée de l'ensemble de départ de f.



521. **RMS 2011 1034 Centrale PC**

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien. Soient $A(1,0,0), B(-1,0,0), C(1,1,0)$. Déterminer la surface engendrée par la réunion des droites passant par C et équidistantes de A et B.

Solution. — Elle est due à Romuald Esman.

On note S la surface recherchée, qui est la réunion des droites dont parle l'énoncé (le terme *engendrée* ne doit pas être lu au sens de l'algèbre linéaire). La distance du point A à une droite $\mathcal{D}$ passant par C et dirigée par $u = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ est donnée par :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge u\|}{\|u\|}\,.$$

Si on écrit $d(A,\mathcal{D})^2 = d(B,\mathcal{D})^2$, on obtient : $\gamma^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0$. Puisque u est un vecteur non nul défini à un facteur près, sachant que $\alpha = 0$ est impossible (car sinon $u = 0$), on peut considérer que $\alpha = 1$, sans restriction. On peut alors paramétrer β et γ, sous la forme :

$$\beta \colon t \mapsto \frac{1}{2}(\cos t + 1)\,,$$
$$\gamma \colon t \mapsto \frac{1}{2}\sin t\,.$$

Un point M d'une droite D_t convenable (passant par C et dirigée par $u(t) = (2, 2\beta(t), 2\gamma(t))$ amène donc la nappe paramétrée suivante : $(\lambda, t) \mapsto (1+2\lambda, 1+\lambda(\cos t+1), \lambda \sin t)$. On élimine les paramètres (en faisant apparaître $\cos^2 t + \sin^2 t$), pour obtenir :

$$4\left(\left(y - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2\right) = (x-1)^2\,,$$

et on reconnaît une équation de cône du second degré (le fait que la surface soit conique est clair d'après l'énoncé).

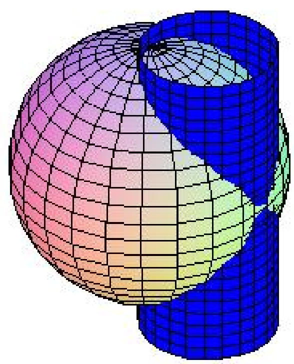
522. **RMS 2011 1035 Centrale PC**

Soient Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ intersection de $x^2+y^2+z^2=4$ et $x^2+y^2-2x=0$.

(a) Déterminer un vecteur tangent en chaque point de Γ.

(b) Déterminer une équation cartésienne du projeté orthogonal de Γ sur (yOz).

Solution. — La surface S_1 d'équation $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0$ est la sphère de centre O de rayon 2, et la surface S_2 d'équation $F_2(x,y,z)=x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1=0$ est le cylindre circulaire de rayon 1 et d'axe la droite passant par $(1,0,0)$ de direction Oz. Ce cylindre est tangent intérieurement à la sphère et de rayon moitié : la courbe obtenue découpe sur la sphère un domaine en forme de deux pétales accolés en leur extrémité, appelé fenêtre de Viviani (il n'est bien sûr pas nécessaire de connaître ce terme pour résoudre l'exercice, mais on peut consulter pour sa culture la page `http ://www.mathcurve.com/courbes3d/viviani/viviani.shtml`). On donne ci-dessous une illustration :



(a) L'énoncé suppose implicitement que Γ admet un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier, qu'on notera $t\in I\mapsto\varphi(t)$. Par définition, $\Gamma=S_1\cap S_2$, donc $F_1\circ\varphi=F_2\circ\varphi=0$. Ces deux fonctions composées (qui vont de I dans $\mathbb{R}$) ont donc une dérivée nulle, c'est-à-dire que

$$\forall t\in I,\quad (\operatorname{grad}F_1(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)=(\operatorname{grad}F_2(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)=0\,.$$

Voici l'interprétation géométrique de ces égalités : un vecteur tangent à Γ en un point M est nécessairement orthogonal aux vecteurs gradients des surfaces S_1 et S_2 en ce point. Si ces deux vecteurs forment une famille libre, alors la tangente est entièrement déterminée : elle passe par M et est dirigée par le produit vectoriel des gradients. Or $\operatorname{grad}F_1(x,y,z)=2(x,y,z)$ et $\operatorname{grad}F_2(x,y,z)=2(x-1,y,0)$. Leur produit vectoriel est colinéaire à

$$(-yz,z(x-2),xy-y(x-2))=(-yz,zx-z,2y)\,.$$

Un tel vecteur est nul si et seulement si (x,y,z) est de la forme $(x,0,0)$ ou $(1,0,z)$, et on cherche si de tels points peuvent appartenir à Γ. Un point de la forme $(x,0,0)$ est sur la sphère S_1 si et seulement si $x=\pm2$, et alors $F_2(\pm2,0,0)=0$ si et seulement s'il s'agit du point $(2,0,0)$. Un point de la forme $(1,0,z)$ appartient à l'axe de S_2, donc n'est pas sur S_2 donc pas sur Γ *a fortiori*. En conclusion, un vecteur tangent à Γ en $(x,y,z)\neq(2,0,0)$ est

$$\overrightarrow{V}(x,y,z)=(-yz,xz-z,2y)\,.$$

On remarque que $(2,0,0)$ est le point de tangence entre le cylindre et la sphère, point où il est clair que les deux plans tangents à S_1 et S_2 sont égaux.

Je ne suis pas satisfait de la rédaction qui va suivre : à améliorer ? ? On va déterminer la (les) tangente(s) à Γ en calculant la (les) limite(s) éventuelle(s) de $\overrightarrow{V}/\|\overrightarrow{V}\|$.

Attention : il s'agit de la limite lorsque (x,y,z) tend vers $(2,0,0)$ par valeurs différentes de $(2,0,0)$ *tout en restant sur* Γ. On commence par montrer que, dans ce cas, $z\neq0$. En effet, si $z=0$, alors $F_1(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$, donc $F_2(x,y,z)=x^2+y^2-2x=4-2x=0$, donc $x=2$, puis $y=0$, donc $(x,y,z)=(2,0,0)$ ce qui est exclu. On peut alors s'intéresser au vecteur $\frac{1}{z}\overrightarrow{V} = (-y, x-1, 2y/z)$, de sorte qu'il suffit de déterminer la limite de y/z quand (x,y,z) tend vers $(2,0,0)$ en restant sur Γ. Or, si $M=(x,y,z)\in\Gamma$ avec $z\neq 0$, on a $x^2+y^2+z^2=2x+z^2=4$, donc $x=2-z^2/2$. En reportant dans l'équation $F_2=0$, on en déduit que $y^2=x(2-x)=(2-z^2/2)z^2/2=(1-z^2/4)z^2$. Il en résulte que

$$\frac{y^2}{z^2}=1-\frac{z^2}{4}$$

tend vers 1 quand (x,y,z) tend vers $(2,0,0)$ en restant sur Γ. Suivant les signes de y ou z, on obtient deux limites distinctes pour $\overrightarrow{V}/\|\overrightarrow{V}\|$: $(0,1,1)$ et $(0,1,-1)$ qui définissent deux droites. On conclut que le point $(2,0,0)$ est un point double de Γ et que les deux branches de Γ en ce point ont deux tangentes orthogonales. La réunion de ces deux droites est bien invariante par les symétries de Γ (par rapport aux plans Oxy et Oxz).

Remarque. — On vérifie facilement que $t\in[-\pi,\pi[\mapsto\varphi(t)=(1-\cos(2t),\sin(2t),2\cos t)$ est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ régulier de Γ. On retrouve alors les résultats précédents. En particulier le point $(2,0,0)$ est double, de paramètres $t=\pm\pi/2$, et $\varphi'(\pm\pi/2)=(2\sin(2t),2\cos(2t),-2\sin t)_{|t=\pm\pi/2}=(0,-2,\pm 2)$, vecteurs qui engendrent bien les deux droites déterminées ci-dessus.

(b) On note C le projeté orthogonal de Γ sur (yOz). Un point $M=(0,y,z)$ appartient à C si et seulement s'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $F_1(x,y,x)=F_2(x,y,z)=0$.

Analyse. S'il existe un tel x, alors $x^2-2x+y^2=0$, donc $\Delta'=1-y^2\geqslant 0$ et $x=1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}$, où $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Alors $(1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}\,)^2+y^2+z^2=2+2\varepsilon\sqrt{1-y^2}+z^2=4$, et on en déduit, après isolement de la racine et élévation au carré, que $4(1-y^2)=(2-z^2)^2$, ou encore

$$z^4-4z^2+4y^2=0\,.$$

Synthèse. Si $4(1-y^2)=(2-z^2)^2$, alors $y^2\leqslant 1$, donc il existe $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que $2\varepsilon\sqrt{1-y^2}=2-z^2$, ou encore tel que $(1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}\,)^2+y^2+z^2=4$. On pose alors $x=1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}$, de sorte que le point M de coordonnées (x,y,z) appartienne à S_1, et on vérifie qu'il appartient aussi à S_2, car $x^2+y^2-2x=(1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}\,)^2+y^2-2(1+\varepsilon\sqrt{1-y^2}\,)=0$. En conclusion, une équation cartésienne de C est $z^4-4z^2+4y^2=0$.

523. **RMS 2011 1036 Centrale PC**

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ et S l'intersection de $x^2+y^2=1$ et de $z=0$. Déterminer une équation cartésienne du cylindre s'appuyant sur S et dirigé par $\overrightarrow{u}$.

Solution. — On appelle C le cylindre défini dans l'énoncé. Un paramétrage de la courbe directrice S (qui est un cercle) est $\theta\in\mathbb{R}\mapsto P(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$. Un paramétrage du cylindre est alors

$$M:(\theta,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto M(\theta,t)=P(\theta)+t\overrightarrow{u}=(\cos\theta+t,\sin\theta+t,t)\,.$$

Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Si $M\in C$, alors $(x-z)^2+(y-z)^2=1$. Réciproquement, si $(x-z)^2+(y-z)^2=1$, on pose $t=z$ et on déduit de l'égalité $(x-z)^2+(y-z)^2=1$ l'existence d'un réel θ tel que $x-t=\cos\theta$ et $y-t=\sin\theta$, ce qui prouve que $M=M(\theta,t)$ donc que M appartient à C. On a donc démontré que

$$(x-z)^2+(y-z)^2=1$$

est une équation de C.

524. **RMS 2011 1037 Centrale PC (calcul formel)**

Soient $f\colon(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto 2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz+2xz$ et $g\colon(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\mapsto\frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$.

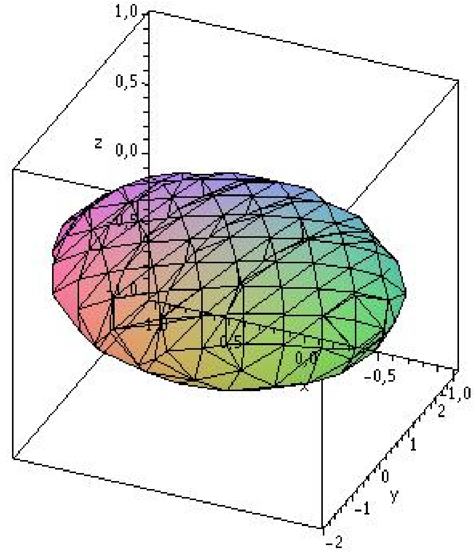
(a) Représenter la surface d'équation $f(x,y,z)=1$. Déterminer son type.

(b) Montrer que g admet un minimum et un maximum. Déterminer les points en lesquels ils sont atteints et les valeurs de ces extrema.

(c) Soit $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ de valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $\lambda_1\|x\|^2\leqslant\langle u(x),x\rangle\leqslant\lambda_3\|x\|^2$. Interpréter le résultat de la question (b).

Solution. — La lettre x désigne la première composante d'un élément de $\mathbb{R}^3$ dans les questions (a) et (b), et un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la question (c). On valide pour commencer `f:=2*x^2+y^2+2*z^2+2*x*y+2*y*z+2*x*z;` et on charge la bibliothèque graphique à l'aide de `with(plots)`:

(a) On note S la surface étudiée. On utilise la commande `implicitplot3d(f=1,x=-1..1,y=-2..2,z=-1..1);` et on obtient



Les intervalles des coordonnées x, y et z ont été déterminés expérimentalement, pour que la figure contienne la totalité de la surface. On constate que S semble être un ellipsoïde. On le prouve en déterminant les valeurs propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on valide `A:=matrix(3,3,[2,1,1,1,1,1,1,1,2]):eigenvals(A);` après avoir chargé la bibliothèque d'algèbre linéaire par `with(linalg)`. On obtient

$$1, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\,.$$

Comme ces trois valeurs propres sont strictement positives, la surface est du genre ellipsoïde (elle pourrait éventuellement être vide ou réduite à un point). Comme l'équation de f ne comporte pas de terme de degré 1, on est certain que la réduction conduira à $x'^2 + (2+\sqrt{3})y'^2 + (2-\sqrt{3})z'^2 = 1$, dans laquelle on reconnaît l'équation réduite d'un ellipsoïde.

(b) On constate que g est homogène : $g(\lambda(x,y,z)) = g(x,y,z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Par suite, il suffit d'étudier g sur la sphère unité K de $\mathbb{R}^3$. Or $g_{/K} = f_{/K}$ avec f manifestement continue, et K compacte (fermée et bornée dans $\mathbb{R}^3$ de dimension finie). Le théorème de l'image compacte affirme que g est bornée sur K et atteint ses bornes, donc que g admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est un ouvert, les extrema sont nécessairement atteints en des points critiques. Compte-tenu de l'homogénéité de g, et du fait qu'elle n'est pas constante, les points critiques sur la sphère K pourront être regroupés par paires d'opposés, et $\min g$ et $\max g$ seront atteints en tous les points d'une droite vectorielle privée de l'origine correspondant à l'une de ces paires d'opposés. On valide

```
g:=f/(x**2+y**2+z**2):solve({diff(g,x),diff(g,y),diff(g,z)},{x,y,z});
```

et on obtient

```
{z=z,x=-z,y=0},{x=RootOf(2*_Z^2-1-2*_Z,label=_L1)*y,z=RootOf(2*_Z^2-1-2*_Z,label=_L1)*y,y=y}
```

Les racines du polynôme $2z^2 - 2z - 1$ sont $(1+\sqrt{3})/2$ et $(1-\sqrt{3})/2$. On trouve les points critiques de g sur K en validant

```
C1:=[solve(subs({x=-z,y=0},x**2+y**2+z**2)=1,z)];
C2:=[solve(subs({x=(1+sqrt(3))/2*y,z=(1+sqrt(3))/2*y},x**2+y**2+z**2)=1,y)];
C2:=[solve(subs({x=(1- sqrt(3))/2*y,z=(1- sqrt(3))/2*y},x**2+y**2+z**2)=1,y)];
```

Le résultat est $C_1 := \left[\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right]$, $C_2 := \left[1/\sqrt{3+\sqrt{3}}, -1/\sqrt{3+\sqrt{3}}\right]$, et $C3 := \left[1/\sqrt{3-\sqrt{3}}, -1/\sqrt{3-\sqrt{3}}\right]$. Les points critiques de g sur K sont donc

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Les valeurs de f en ces points sont données par

```
subs({x=C1[1],y=0,z=-C1[1]},f);
B:=simplify(subs([y=C2[1],x=(1+sqrt(3))/2*C2[1],z=(1+sqrt(3))/2*C2[1]],f));
C:=simplify(subs([y=C3[1],x=(1- sqrt(3))/2*C3[1],z=(1- sqrt(3))/2*C3[1]],f));
```

On lit alors 1, $\frac{9+5\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ et $\frac{9-5\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$. Les deux dernières valeurs appartiennent à $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, et leur écriture sous la forme $r+s\sqrt{3}$ avec $(r,s)\in\mathbb{Q}^2$ est obtenue par `expand(numer(B)*(3- sqrt(3)))/6` et `expand(numer(C)*(3+sqrt(3)))/(-6)` (existe-t-il une commande Maple pour effectuer ces réductions de manière automatique ? ?). Finalement, les valeurs de g en les trois familles de points critiques sont

$$1,\quad 2+\sqrt{3},\quad 2-\sqrt{3}\,.$$

La première et la deuxième sont respectivement le maximum et le minimum de g, et on constate qu'il s'agit de la plus petite et de la plus grande valeur propre de A. La dernière correspond à la valeur propre intermédiaire de A.

(c) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale propre pour u (théorème spectral), le vecteur numéro i étant propre pour λ_i. Si x_1,x_2,x_3 sont les composantes de x dans cette base, alors $\langle u(x),x\rangle=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2$. On en déduit que

$$\lambda_1\|x\|^2=\lambda_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant\langle u(x),x\rangle\leqslant\lambda_3\|x\|^2\,.$$

De plus les vecteurs de la forme $(x_1,0,0)$ réalisent l'inégalité de gauche, et ceux de la forme $(0,0,x_3)$ celle de droite. Si u est l'endomorphisme symétrique canoniquement associé à la matrice A, la division par $\|x\|^2$ de l'inégalité qu'on vient d'établir montre que

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\quad \lambda_1\leqslant g(x)\leqslant\lambda_3\,,$$

ces deux bornes étant atteintes. On retrouve alors les résultats de la question (b).

525. **RMS 2011 1038 Centrale PC**

Soient $a>0$, s et p les fonctions d'expression $s(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$ et $p(x,y,z)=(x+y+z)^2-a^2$, (S) la surface d'équation $s=0$, (P) la surface d'équation $p=0$ et (Σ_a) la surface d'équation $as+p=0$.

(a) Déterminer $(S)\cap(P)$.

(b) Déterminer les $a\in\mathbb{R}$ tels que $0\in\Sigma_a$. Quelle est la nature de ces surfaces ?

Solution. — La surface (S) est la sphère de centre O de rayon a, et (P) est la réunion des plans parallèles P_+ et P_- d'équations $x+y+z=\pm a$. On note $n=(1,1,1)$ un vecteur normal à $P_\pm$.

(a) La distance du centre O de (S) à $P_\pm$ vaut $a/3$: on l'obtient en déterminant l'intersection H de la droite $P_+^\perp=\mathrm{Vect}(n)$ avec P_+. Le point H_+ est le projeté orthogonal de O sur P_+ et $d(O,P_+)=\|OH\|$. Elle strictement plus petite que le rayon de (S). Le cours affirme alors que $(S)\cap(P)$ est la réunion de deux cercles (de rayon commun $2\sqrt{2}a/9$: écrire un théorème de Pythagore).

(b) Comme $as(0)+p(0)=-a^3-a^2=-a^2(a+1)$, l'ensemble des a cherchés est $\{-1,0\}$.
La surface Σ_{-1} a pour équation $-(x^2+y^2+z^2)+1+(x+y+z)^2-1=0$, ou encore $2(xy+yz+zx)=0$. La matrice symétrique associée,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres -1 [double, $E_{-1}(A)$ étant le plan d'équation $x+y+z=0$] et 2 [simple, la somme des lignes est constante et vaut 2, ou bien on utilise la trace, et $E_2(A)=E_{-1}(A)^\perp=\mathrm{Vect}(n)$]. Dans une base orthonormale propre pour A, l'équation de Σ_{-1} s'écrit $2x'^2-y'^2-z'^2=0$: Il s'agit d'un cône de révolution d'axe Ox', c'est à dire d'axe $\mathbb{R}n$.

La surface Σ_0 a pour équation $(x+y+z)^2=0$. Il s'agit d'un plan vectoriel.

526. **RMS 2011 1039 Centrale PC**

Soient S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2=2z+4$ et P la surface d'équation $x+y+z=1$. Déterminer la projection de $S\cap P$ sur le plan $z=0$. En déduire les propriétés de $S\cap P$.

Solution. — La surface S est un paraboloïde de révolution d'axe Oz. On note Σ la projection de $S\cap P$ sur le plan $z=0$. Un point $(x,y,0)$ appartient à Σ si et seulement s'il existe $z\in\mathbb{R}$ tel que $x^2+y^2=2z+4$ et $x+y+z=1$, ou encore $z=(x^2+y^2-4)/2$ et $z=1-x-y$. Un tel z existe si et seulement si $(x^2+y^2-4)/2=1-x-y$, c'est-à-dire si et seulement si

$$x^2+y^2+2x+2y-2=(x+1)^2+(y+1)^2-4=0\,.$$

On reconnaît ci-dessus l'équation d'un cercle du plan $z=0$: le cercle de centre $(-1,-1,0)$ de rayon 2.
Alors la courbe $S\cap P$ est l'intersection de P avec le cylindre d'axe Oz et de base le cercle Σ : c'est une ellipse (que faut-il démontrer au juste ? ?)

527. **RMS 2011 1040 Centrale PC (calcul formel)**

Soit (S) la surface d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.

(a) Nature de (S) ? Donner un paramétrage de (S). Tracer (S) à l'aide de Maple.

(b) Déterminer l'intersection de (S) avec le plan d'équation $z = \alpha$.

(c) Calculer le volume du solide défini par $\{\frac{x^2}{9} + y^2 - \frac{z^2}{4} \leqslant 1,\ a \leqslant z \leqslant b\}$.

(d) La surface (S) admet-elle des points singuliers ?

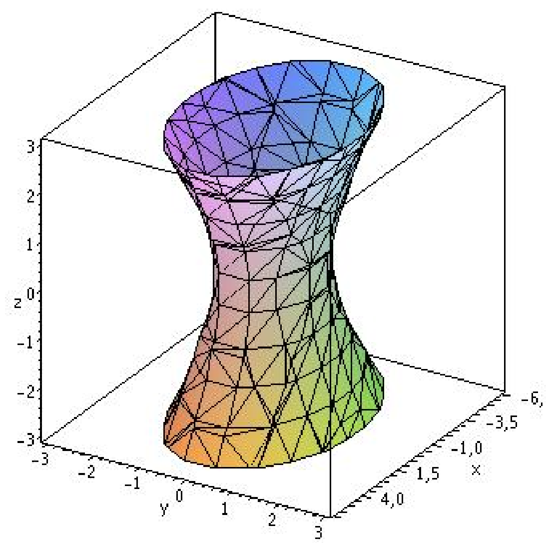
(e) Donner l'équation du plan tangent à (S) au point $M(t) = (3\cos t, \sin t, 0)$.

Solution. — On valide `with(plots):f:=x**2/9+y**2-z**2/4-1;`

(a) La surface (S) est un hyperboloïde à une nappe d'axe Oz. On peut la paramétrer par

$$F\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3\cos u \operatorname{ch} v, \sin u \operatorname{ch} v, 2\operatorname{sh} v)\ .$$

On l'obtient en Maple par `implicitplot3d(f=0,x=-6..6,y=-3..3,z=-3..3)`.



(b) L'intersection de (S) avec le plan d'équation $z = \alpha$ est l'ellipse E_α de ce plan d'équation $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{4}$.

(c) Le théorème de Fubini affirme que le volume V de ce solide se calcule par (intégration par tranches) :

$$V = \int_{z=a}^{b} \underbrace{\left(\iint_{\frac{x^2}{9} + y^2 \leqslant 1 + \frac{z^2}{4}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)}_{\text{aire de l'ellipse } E_z} \mathrm{d}z$$

Or l'aire de l'ellipse d'équation réduite $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ est $\pi\alpha\beta$. Il en résulte que

$$V = \int_a^b \pi \times 9 \left(1 + \frac{z^2}{4}\right) \mathrm{d}z = 9\pi \left[z + \frac{z^3}{12}\right]_a^b = 9\pi(b-a)\left(1 + \frac{a^2 + ab + b^2}{12}\right)\ .$$

(d) La surface (S), qu'elle soit définie par l'équation $f(x,y,z) = 0$ ou par le paramétrage F, n'a pas de point singulier, puisque $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x,y,z) = (2x/9, 2y, -z/2)$ n'est jamais nul sur (S) et que la famille des deux vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} -3\sin u \operatorname{ch} v \\ \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 3\cos u \operatorname{sh} v \\ \sin u \operatorname{sh} v \\ 2\operatorname{ch} v \end{pmatrix}$$

est libre.

(e) Le gradient en ce point vaut $(2\cos t/9, 2\sin t, 0)$, donc le plan tangent à (S) en $M(t)$ a pour équation $(\cos t)x + (9\sin t)y = 0$.

528. **RMS 2011 1041 Centrale PC (calcul formel)**

Soit (E) la surface d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$.

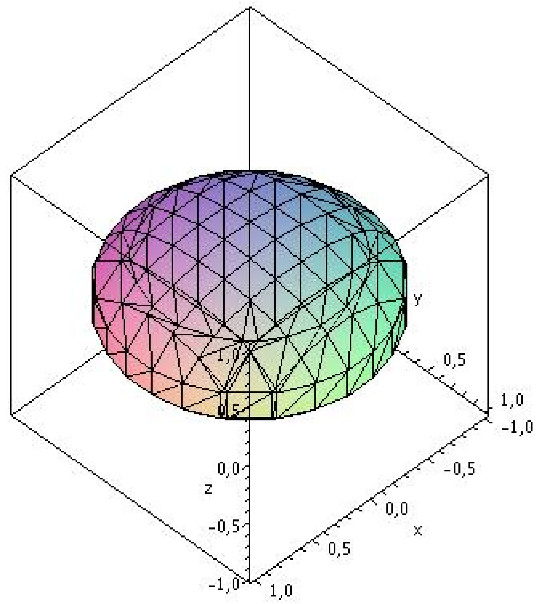
(a) Représenter (E).

(b) Soit R la rotation d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}(4,3,0)$ et d'angle t. Soit (x',y',z') l'image de (x,y,z) par R. Exprimer (x',y',z') en fonction de (x,y,z).

(c) Déterminer une équation de (E_t), image par (E) par R.

Solution. — On valide `with(plots):f:=(x,y,z)->x**2+y**2+4*z**2-1;`

(a) La surface (E) est un ellipsoïde de révolution d'axe Oz. On l'obtient par la commande `implicitplot3d(f(x,y,z)=0,x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1);`



(b) On appelle D l'axe de R, p la projection orthogonale sur l'axe, et v le vecteur $u/\|u\|=u/5$. On a alors $R(\overrightarrow{x})=R(p(\overrightarrow{x}))+R(\overrightarrow{x}-p(\overrightarrow{x}))$ pour tout $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$.
Comme $p(\overrightarrow{x})$ appartient à D, on a $R(p(\overrightarrow{x}))=p(\overrightarrow{x})$. Comme $\overrightarrow{x}-p(\overrightarrow{x})$ est orthogonal D, on a $R(\overrightarrow{x}-p(\overrightarrow{x}))=(\cos t)(\overrightarrow{x}-p(\overrightarrow{x}))+(\sin t)v\wedge(\overrightarrow{x}-p(\overrightarrow{x}))$. Enfin, comme $p(\overrightarrow{x})=(v|\overrightarrow{x})v$, on obtient l'expression littérale de R, qui se simplifie en utilisant la relation $v\wedge v=0$, puis son expression en fonction des composantes x, y et z de $\overrightarrow{x}$:

$$\begin{aligned}R(\overrightarrow{x})&=(v|\overrightarrow{x})v+(\cos t)(\overrightarrow{x}-(v|\overrightarrow{x})v)+(\sin t)v\wedge(\overrightarrow{x}-(v|\overrightarrow{x})v)\,,\\&=(v|\overrightarrow{x})v+(\cos t)(\overrightarrow{x}-(v|\overrightarrow{x})v)+(\sin t)v\wedge\overrightarrow{x}\,,\\&=\frac{1}{25}(u|\overrightarrow{x})(1-\cos t)u+(\cos t)\overrightarrow{x}+\frac{1}{5}(\sin t)u\wedge\overrightarrow{x}\,,\\&=\frac{4x+3y}{25}(1-\cos t)\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}+\cos t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{\sin t}{5}\begin{pmatrix}3z\\-4z\\4y-3x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases}x'&=&\dfrac{16+9\cos t}{25}x+\dfrac{12(1-\cos t)}{25}y+\dfrac{3\sin t}{5}z\,,\\y'&=&\dfrac{12(1-\cos t)}{25}x+\dfrac{9+16\cos t}{25}y-\dfrac{4\sin t}{5}z\,,\\z'&=&-\dfrac{3\sin t}{5}x+\dfrac{4\sin t}{5}y+(\cos t)z\,.\end{cases}$$

On obtient ce résultat en Maple en validant les lignes suivantes :

```
with(linalg):u:=vector([4,3,0]);v:=u/ norm(u,2);X:=vector([x,y,z]);
Y:=evalm(dotprod(v,X,orthogonal)*(1- cos(t))*v+cos(t)*X+sin(t)*crossprod(v,X));
Z:=map(collect,Y,[x,y,z]);
```

La dernière ligne permet de présenter le résultat de façon à bien faire apparaître les coefficients de la matrice M de R dans la base canonique.

(c) La matrice M^{-1} est égale à ${}^tM$ (une rotation est un automorphisme orthogonal), mais elle peut aussi être obtenue en substituant t par $-t$: la réciproque de la rotation d'axe dirigé par u et d'angle t est la rotation de même axe et d'angle $-t$. On obtient alors l'équation de (E_t) en validant

```
T:=simplify(subs(t=-t,evalm(Z)));expand(f(T[1],T[2],T[3]));
```

Le résultat offre peu d'intérêt en soi, et peut être consulté dans le fichier Maple correspondant.

CCP MP

Algèbre

529. **RMS 2010 955 CCP MP**

Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ affines sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$. Montrer que E est un espace vectoriel ; en donner une base.

Solution. — Soit $f \in E$. La définition de E se traduit par trois conditions :
– l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [-1,0],\ f(x) = ax+b$;
– l'existence de $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = cx+d$;
– l'égalité $b = d$, pour assurer que f est définie de manière cohérente en zéro.

Les coefficients a et c étant les pentes de deux segments de droite de longueurs non nulles, ils sont uniques, et $b = d = f(0)$ est unique aussi. Si l'on note $f_{a,b,c}$ la fonction définie ci-dessus, on vient donc de définir une injection (à cause de l'unicité qu'on vient d'invoquer)

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R}) , \\ & & (a,b,c) & \mapsto & f_{a,b,c} , \end{array}$$

dont l'image est E (toute $f \in E$ est une $f_{a,b,c}$). Par ailleurs, les règles d'addition des fonctions et de multiplication par un réel montrent en outre que cette application est linéaire. Par suite, $E = \operatorname{Im}\varphi$ est un espace vectoriel.

L'injectivité de φ montre en outre que $\dim E = 3$, et qu'une base de E est obtenue en prenant l'image par φ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, à savoir (f_1,f_2,f_3) où

$$\begin{aligned} f_1 = \varphi((1,0,0)) &\quad \text{est la fonction définie par } \forall x \in [-1,0],\ f_1(x) = x \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f_1(x) = 0, \\ f_2 = \varphi((0,1,0)) &\quad \text{est la fonction définie par } \forall x \in [-1,1],\ f_2(x) = 1, \\ f_3 = \varphi((0,0,1)) &\quad \text{est la fonction définie par } \forall x \in [-1,0],\ f_3(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f_3(x) = x. \end{aligned}$$

530. **RMS 2010 957 CCP MP**

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit p dans $\mathbb{N}^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_{2p}$ des réels et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2p}$ la matrice telle que $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ si $1 \leqslant i \leqslant 2p$ et $a_{i,j} = 0$ si $i+j \neq 2p+1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 860 page 538.

(a) On trouve $\chi_A = X^2 - ab$. Si le produit ab est nul, alors $\chi_A = X^2$, donc l'unique valeur propre de A est zéro. Si A est diagonalisable, elle est alors semblable à la matrice nulle, donc elle est nulle. Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable.

Si le produit ab est non nul, alors il faut que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$ pour que A soit diagonalisable, donc il faut que $ab > 0$. Réciproquement, si $ab > 0$, alors χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. On conclut que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff a = b = 0 \quad \text{ou} \quad ab > 0.$$

(b) La matrice A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{2p-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{2p} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant 2p}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2p})$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $F_i = \operatorname{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$: il s'agit de plans vectoriels stables par u, et tels que la matrice, sur la base (e_i, e_{2p+1-i}), de l'endomorphisme u_i induit par u sur F_i soit donnée par

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_{2p+1-i} & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a $\mathbb{R}^{2p} = \oplus_{i=1}^{p} F_i$ par construction.

Si A (donc u) est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, un théorème du cours affirme que les endomorphismes induits u_i (donc les matrices A_i) sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si les A_i (donc les u_i) sont diagonalisables, on peut fabriquer une base de $\mathbb{R}^{2p}$ propre pour u en réunissant des bases propres des u_i, puisque $\mathbb{R}^{2p} = \oplus_{i=1}^{p} F_i$, ce qui montre que u (donc A) est diagonalisable. La question précédente montre alors que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad (\alpha_i = \alpha_{2p+1-i} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_i \alpha_{2p+1-i} > 0).$$

531. **RMS 2010 959 CCP MP**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \dots, n$, et dont les autres coefficients sont égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.

(a) Montrer que $P_{n+1}(X) = (n - X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\cdots(X-(n-1))$.

(b) Montrer que, pour tout n et pour tout $k \leqslant n-1$, on a $(-1)^k P_n(k) > 0$. En déduire que chaque intervalle $]0;1[$, $]1;2[$, …, $]n-1;+\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

Solution. — La définition implicitement adoptée par l'énoncé du polynôme caractéristique d'une matrice A d'ordre n est $\det(A - XI_n)$. Son coefficient dominant est donc $(-1)^n$.

(a) Sur le déterminant $P_{n+1}(X) = \det(M_{n+1} - XI_{n+1})$, on effectue la transformation élémentaire $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - C_n$

$$\begin{vmatrix} 1-X & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-X & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n+1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n-X & 1-n+X \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-X \end{vmatrix},$$

puis on développe par rapport à la dernière colonne :

$$P_{n+1}(X) = (n-X)P_n(X) - (X-(n-1)) \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1-X & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On note Δ_n le déterminant d'ordre n en facteur de $X - (n-1)$. La transformation élémentaire $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$, puis un développement par rapport à la dernière colonne montrent que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1-X & X-(n-2) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(X-(n-2)) \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-2-X & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$
$$= -(X-(n-2))\Delta_{n-1}.$$

La valeur initiale $\Delta_1 = 1$ et une récurrence immédiate donnent alors $\Delta_n = (-1)^{n-1}(X-(n-2))(X-(n-3))\cdots X$, et on en déduit que

$$P_{n+1}(X) = (n-X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\cdots(X-(n-1)).$$

(b) On établit la propriété demandée par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $P_1(X) = 1 - X$ et il s'agit de vérifier (k ne peut prendre que la valeur zéro) que $(-1)^0 P_1(0) = 1 > 0$, ce qui est vrai. On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \leqslant n-1$, on a $(-1)^k P_n(k) > 0$. La question précédente montre alors que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad (-1)^k P_{n+1}(k) = (-1)^k (n-k) P_n(k),$$
$$(-1)^n P_{n+1}(n) = (-1)^n \times (-1)^n n! = n! > 0\,.$$

L'hypothèse de récurrence montre alors que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(-1)^k P_{n+1}(k) > 0$.

Comme P_n change strictement de signe en passant de k à $k+1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, la continuité de P_n et le théorème des valeurs intermédiaires prouvent que P_n admet au moins une racine dans $]k, k+1[$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Ceci donne déjà l'existence d'au moins $n-1$ racines réelles distinctes de P_n. Vu que $\deg(P_n) = n$, il est donc scindé sur $\mathbb{R}$, et la seule chose à vérifier est que la « dernière » racine de P_n se trouve dans l'intervalle $]n-1,+\infty[$.

Or $P_n(n-1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}$, et comme le coefficient dominant de P_n vaut $(-1)^n$, le signe de P_n au voisinage de $+\infty$ est $(-1)^n$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'une racine de P_n dans $]n-1;+\infty[$.

On a donc démontré que chaque intervalle $]0;1[$, $]1;2[$, …, $]n-1;+\infty[$ contient une valeur propre de M_n. Comme elle en a au plus n, on peut affirmer que les intervalles en question contiennent exactement une valeur propre de M_n, et qu'elles sont donc toutes simples.

532. **RMS 2011 1043 CCP MP**

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u$ est pair.

Solution. — Comme $X^3 + X = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de u, le théorème des noyaux affirme que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id})$, et la formule du rang montre alors que $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2+1)$. Soit A la matrice de u sur une base quelconque de E. On considère dans ce qui suit A comme une matrice complexe, agissant sur les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Le polynôme $X^3 - X = X(X-i)(X+i)$ étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et, si l'on note m_1, m_i, m_{-i} les multiplicités respectives, éventuellement nulles, des éventuelles valeurs propres $1, i, -i$, il faut que $\operatorname{tr} A = m_1 + i(m_i - m_{-i})$ soit réelle, donc que $m_i = m_{-i}$.

Comme $\operatorname{Ker}(A^2 + I_n) = \operatorname{Ker}(A - iI_n) \oplus \operatorname{Ker}(A + iI_n) = E_i(A) \oplus E_{-i}(A)$ en vertu du théorème des noyaux, on a

$$\dim \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id}) = \dim \operatorname{Ker}(A^2 + I_n) = m_i + m_{-i} = 2m_i\ ,$$

ce qui montre que $\operatorname{rg} u$ est pair.

533. **RMS 2011 1046 CCP MP**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

(a) Montrer que u est diagonalisable.

(b) Décrire les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Solution. —

(a) Comme u annule le polynôme scindé à racines simples $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, il est diagonalisable.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Comme u est diagonalisable, alors l'endomorphisme v de F induit par u l'est aussi, et le spectre de v est contenu dans celui de u, donc dans $\{-1,0,1\}$. De plus, il est clair que $E_\lambda(v) = F \cap E_\lambda(u)$. Alors F est la somme directe de sous-espaces vectoriels contenus dans les sous-espaces propres de u.

Réciproquement, toute somme directe de sous-espaces vectoriels des sous-espaces propres de u est stable par u.

534. **RMS 2010 960 CCP MP**

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 570 page 390.

Soit J la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments valent 1. On remarque que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = \operatorname{tr}(MJ)\ .$$

La matrice J est symétrique réelle donc orthodiagonalisable : comme J est de rang 1, et que sa trace vaut n, les valeurs propres de J sont zéro, d'ordre $n-1$, et n d'ordre 1. Il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = nE_{1,1}$. On pose

$$M' = P^{-1}MP.$$

C'est encore une matrice orthogonale puisque $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe. Alors MJ est semblable à $nM'E_{1,1}$ et, comme la trace est un invariant de similitude,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\right| = |\operatorname{tr}(MJ)| = |\operatorname{tr}(nM'E_{1,1})| = n|m'_{1,1}| \leqslant n,$$

ce qui établit la première inégalité. En effet, M' est orthogonale, donc la norme euclidienne usuelle de chaque colonne de M' vaut 1, donc chaque élément $m'_{i,j}$ appartient à $[-1,1]$.

Le même argument appliqué à $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ montre que $|m_{i,j}| \in [0,1]$ pour tout (i,j). Par suite, $m_{i,j}^2 \leqslant |m_{i,j}|$ pour tout (i,j). Comme la norme euclidienne usuelle de chaque colonne de M vaut 1, on obtient

$$n = \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|,$$

ce qui établit la deuxième inégalité.

Enfin, on note $K = (k_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par $k_{i,j} = \mathrm{signe}(m_{i,j}) \in \{-1,1\}$, avec un choix arbitraire si $m_{i,j} = 0$. Alors $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| = \mathrm{tr}({}^tMK)$. Comme on sait que $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire, l'inégalité de Cauchy et Schwarz donne

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| = \mathrm{tr}({}^tMK) \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tKK)} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n)}\sqrt{\mathrm{tr}(nJ)} = \sqrt{n}\sqrt{n^2} = n^{3/2},$$

ce qui établit la troisième inégalité.

535. **RMS 20 ? ? ? ? ? ? CCP MP**

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien, et soit λ une valeur propre réelle de f, dont on note m la multiplicité et E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que $\dim E_\lambda = m$.

Solution. — On sait que E_λ est stable par f, et un théorème du cours relatif aux automorphismes orthogonaux dit alors que l'orthogonal de E_λ est lui aussi stable par f. On note g l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^\perp$. En considérant une base adaptée à l'écriture $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$, on montre que $\chi_f = (\lambda - X)^d \chi_g$, où d est la dimension de E_λ. Comme λ ne peut être racine de χ_g (sinon un vecteur propre se trouverait dans l'intersection de E_λ et de son orthogonal), on en déduit que $d = m$.

Analyse

536. **RMS 2010 963 CCP MP**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution. — Pour $n \geqslant 2$, on effectue un développement limité du quotient suivant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \sim \frac{\ln n}{n}\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^n \sim \frac{\ln n}{n}\exp\left(n\ln\left[1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right]\right),$$
$$\sim \frac{\ln n}{n}\exp\left(\frac{1}{\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \sim \frac{\ln n}{n}\cdot$$

On en déduit que u_{n+1}/u_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. La règle de d'Alembert affirme alors que la série $\sum u_n$ converge.

537. **RMS 2010 964 CCP MP**

On pose $f_n \colon x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) (respectivement, de la série $\sum f_n$) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Solution. — Les comparaisons usuelles montrent que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. Comme $f_n(0) = n$, ni la suite (ni la série *a fortiori*) ne converge simplement en zéro.

Comme $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ et que $n^2 f_n(a) = n^3 e^{-n^2a^2}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, la suite converge uniformément vers zéro sur $[a,+\infty[$, et la série y converge normalement, donc uniformément.

L'égalité $\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = n$ montre que la suite ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$. *A fortiori*, la série n'y converge pas uniformément.

538. **RMS 2010 965 CCP MP**

Soit $f \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x/x^n$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Étudier sa continuité.

(c) Calculer $f(2)$.

Solution. —

(a) On pose $f_n(x) = n^x/x^n = \exp(x\ln n)x^{-n}$, ce qui définit une fonction sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $n \geqslant 1$.

– Si $|x| < 1$ est fixé, les comparaisons usuelles montrent que $|f_n(x)|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, donc que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.
– Si $x = 1$, alors $f_n(1) = n$, et on conclut comme ci-dessus.
– Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = (-1)^n/n$, et il est bien connu que $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/n$ est une série semi-convergente, donc convergente.
– Si $|x| > 1$, les comparaisons usuelles montrent que $n^2|f_n(x)| = n^{2+x}(1/|x|)^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, donc que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

On conclut que

$$D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\,.$$

(b) Chaque f_n est continue. On fixe $a > 1$, et on pose $K_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. La majoration

$$\forall x \in K_a,\ |f_n(x)| \leqslant f_n(a) = n^a/a^n\ ,$$

la valeur étant atteinte pour $x = a$, montre que $\|(f_n)_{/K_a}\|_\infty = f_n(a)$, et établit la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur K_a. Il en résulte que f est continue sur K_a pour tout a, donc qu'elle est continue au moins sur $D_f \setminus \{-1\}$. On prouve maintenant la continuité en -1 (en fait sur $]-\infty, -1]$), en établissant la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]-\infty, -1]$. Pour cela, on prouve que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ vérifie, à $x \leqslant -1$ fixé, les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. Le caractère alterné est clair, le fait que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers zéro a déjà été prouvé, et il ne reste que le sens de variation de la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$:

$$|f_n(x)| - |f_{n+1}(x)| = \frac{n^x}{|x|^n} - \frac{(n+1)^x}{|x|^{n+1}} = \frac{n^x}{|x|^{n+1}}\left(|x| - \left[1 + \frac{1}{n}\right]^x\right).$$

Comme $x \leqslant -1$ donc est négatif, $(1 + \frac{1}{n})^x \leqslant 1$, et *a fortiori* $(1 + \frac{1}{n})^x \leqslant |x|$. On retrouve ainsi la convergence simple la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, et on dispose de la majoration du reste par la valeur absolue de son premier terme :

$$\forall x \leqslant -1, \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}\,.$$

La dernière majoration vient de ce que $x \leqslant -1$. On conclut que le reste converge uniformément vers zéro sur $]-\infty, -1]$, donc que $\sum_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur cet intervalle, ce qui achève la preuve.

(c) La valeur $f(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2/2^n$ sera calculée à partir des valeurs de la série géométrique $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$ et de ses dérivées en $z = 1/2$. On sait que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, avec

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{1-z} - 1\,, \\ g'(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}\,, \\ g''(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}\,. \end{aligned}$$

En écrivant que $n^2 = n(n-1) + n$, on obtient

$$f(2) = \frac{1}{4}g''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}g'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6\,.$$

539. **RMS 2010 967 CCP MP**

On suppose que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$.

Solution. — Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $|a_n z^n| \sim |b_n z^n|$, ce qui prouve que les suites $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ convergent vers zéro pour les mêmes nombres complexes z, donc que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Comme $\frac{i^n n^2}{n^2+1} \sim i^n$ et comme la série géométrique $\sum (iz)^n$ converge si et seulement si $|iz| < 1$, donc le rayon de convergence cherché vaut 1.

Géométrie

540. **RMS 2010 973 CCP MP**

Tracer la courbe $\left(x = \frac{t-1}{t}, y = \frac{t^2}{t+1}\right)$.

Solution. — Il n'y a pas de réduction visible de l'ensemble d'étude, qui sera égal $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Les dérivées sont données par

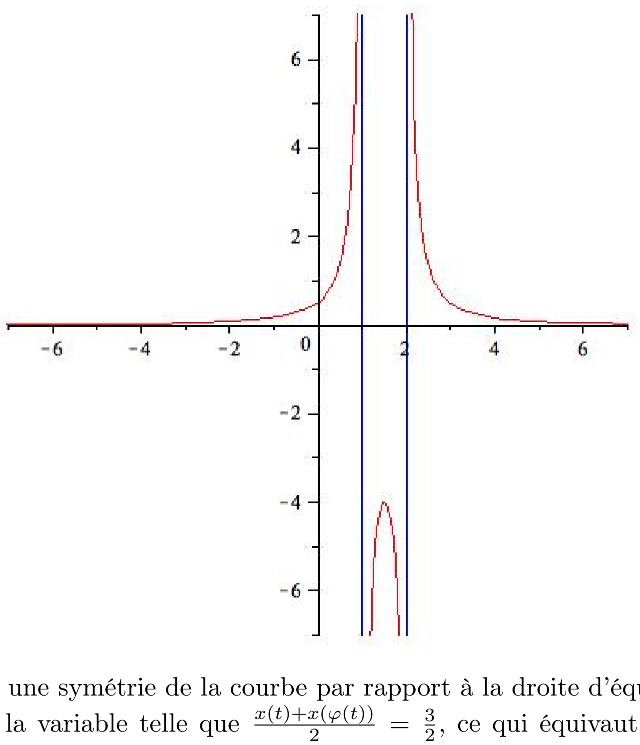
$$x'(t) = \frac{1}{t^2},$$
$$y'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}.$$

Le tableau de variation est le suivant :

t	$-\infty$		-2			-1				0			$+\infty$
$x'(t)$			$+$							$+$			
$y'(t)$		$+$	0	$-$				$-$				$+$	
$x(t)$	1		$3/2$			2			$+\infty$		$-\infty$		1
$y(t)$	$-\infty$		-4		$-\infty$		$+\infty$			0			$+\infty$

Les branches infinies sont simples : la courbe admet à chaque fois une asymptote parallèle à Ox ou Oy, et il n'y a pas de point singulier. Le tracé est le suivant, obtenu par les commandes

```
with(plots):x:t->=(t-1)/t:y:=t->t**2/(t+1):
C:=plot([x(t),y(t),t=-100..100],view=[-7..7,-7..7],discont=true):
A1:=plot([1,t,t=-7..7],view=[-7..7,-7..7],color=blue):
A2:=plot([2,t,t=-7..7],view=[-7..7,-7..7],color=blue):
display([C,A1,A2]);
```



En voyant le tracé, on soupçonne une symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $x = 3/2$. On cherche alors une transformation $t \mapsto \varphi(t)$ de la variable telle que $\frac{x(t)+x(\varphi(t))}{2} = \frac{3}{2}$, ce qui équivaut à $\frac{t-1}{t} + \frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)} = 3$. On trouve $\varphi(t) = -\frac{t}{t+1}$. On vérifie ensuite que

$$y(\varphi(t)) = \frac{(-\frac{t}{t+1})^2}{-\frac{t}{t+1} + 1} = \frac{t^2}{t+1} = y(t).$$

La symétrie est confirmée. Le caractère inhabituel de la transformation φ explique qu'on ne l'ait pas vu en commençant la résolution…

541. **RMS 2010 974 CCP MP**

Soit Γ la courbe $(x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin^3 t)$. Étude, tracé, équation des tangentes.

Solution. — La périodicité fait qu'on étudie Γ sur $[-\pi, \pi]$. Comme x est paire et y impaire, on étudie Γ sur $[0, \pi]$, puis on complète par la symétrie orthogonale par rapport à Ox. Comme $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, on étudie Γ sur $[0, \pi/2]$, puis on complète par la symétrie orthogonale par rapport à Oy. Enfin, comme $x(\pi/2 - t) = y(t)$ et $y(\pi/2 - t) = x(t)$, on étudie Γ sur $[0, \pi/4]$, puis on complète par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.
Les dérivées sont données par $x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t$ et $y'(t) = 3 \cos t \sin^2 t$, et le tableau de variation est

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	
$y'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	1		$2^{-3/2}$
$y(t)$	0		$2^{-3/2}$

Le point de paramètre $t = 0$ est singulier. Le développement limité

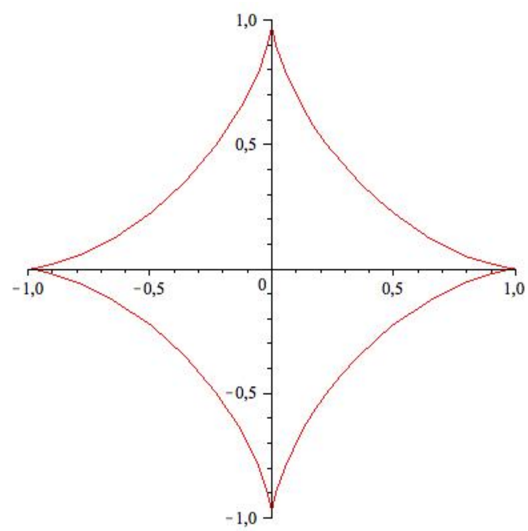
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - t^2/2 + \mathrm{o}(t^2))^3 \\ (t + \mathrm{o}(t))^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^3 + \mathrm{o}(t^3),$$

montre que $p = 2$ est pair et $q = 3$ est impair, donc que le point est de rebroussement de première espèce, ce dont on pouvait se douter au vu des symétries de Γ. La tangente en ce point est l'axe Ox et, d'après les réductions de l'ensemble d'étude vues plus haut,
– la tangente est Ox en tous les points singuliers de paramètre $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
– la tangente est Oy en tous les points singuliers de paramètre $t = \pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Une équation de la tangente à Γ en un point non singulier de paramètre t est

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \begin{vmatrix} x - \cos^3 t & -\cos t \\ y - \sin^3 t & \sin t \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou encore} \quad x \sin t + y \cos t = \sin t \cos t.$$

La simplification par $3 \sin t \cos t$ dans le déterminant se justifie par le fait que le point considéré n'est pas singulier, c'est-à-dire que $t \neq 0 \mod \pi/2$. Le tracé est obtenu par

```
with(plots):x:=t->(cos(t))**3;y:=t->(sin(t))**3;plot([x(t),y(t),t=-Pi..Pi]);
```



La courbe (Γ) est appelée une astroïde à quatre rebroussements.

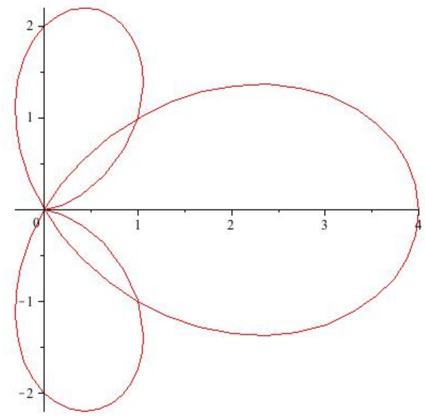
542. **RMS 2010 975 CCP MP**

Tracer la courbe $r = 2(\cos \theta - \cos 2\theta)$. Préciser les tangentes en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Solution. — Comme r est paire et 2π–périodique, on trace l'arc correspondant à $\theta \in [0, \pi]$, puis on complète par symétrie orthogonale par rapport à Ox. Les formules de trigonométrie montrent que $r = 4 \sin(3\theta/2) \sin(\theta/2)$ et que $r'(\theta) = 2(2 \sin 2\theta - \sin \theta) = 2 \sin \theta (4 \cos \theta - 1)$, d'où le tableau suivant, où $\theta_0 = \arccos(1/4)$:

θ	0		θ_0		$2\pi/3$		π
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0		$-$		0
$\rho(\theta)$	0	$+$	$\frac{9}{4}$	$+$	0	$-$	-4

En $\theta = 0$, la courbe passe par l'origine donc la tangente est Ox. En $\theta = \pi$, la valeur $r'(\pi) = 0$ montre que la tangente est parallèle à Oy. La symétrie de la courbe par rapport à Ox rendait ces deux résultats prévisibles. Voici le tracé obtenu en Maple grâce à `r:=theta->2*(cos(theta)-cos(2*theta)); plot([r(theta),theta,theta=0..2*Pi],coords=polar)` :



CCP PSI

Algèbre

543. **RMS 2006 1042 CCP PSI**

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)=\prod_{k=1}^n(X\sin\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n})$ par X^2+1.

Solution. — On note Q le quotient et R le reste, qui est de degré au plus 1, donc on l'écrit $R=aX+b$. Dans l'égalité $P(X)=(X^2+1)Q(X)+aX+b$, on substitue X par une des racines de X^2+1, par exemple i. Comme $P(i)=\prod_{k=1}^n(i\sin\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n})=\prod_{k=1}^n\exp(ik\pi/n)=\exp(i(\sum_{k=1}^n k)\pi/n)=\exp(i(n+1)\pi/2)$, on obtient

$$ai+b=\omega\,.$$

où ω désigne $\exp(i(n+1)\pi/2)$. Comme P et X^2+1 sont à coefficients réels, il en est de même de R, donc on sait que a et b sont réels. L'égalité ci-dessus donne alors immédiatement $b=\mathrm{Re}(\omega)$ et $a=\mathrm{Im}(\omega)$, d'où

$$R=\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)X+\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\,.$$

544. **RMS 2007 902 CCP PSI**

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)=\prod_{k=1}^n(X\sin k+\cos k)$ par X^2+1.

Solution. — On note Q le quotient et R le reste, qui est de degré au plus 1, donc on l'écrit $R=aX+b$. Dans l'égalité $P(X)=(X^2+1)Q(X)+aX+b$, on substitue X par une des deux racines de X^2+1, par exemple i. Comme $P(i)=\prod_{k=1}^n(i\sin k+\cos k)=\prod_{k=1}^n e^{ik}=\exp(i\sum_{k=1}^n k)=\exp(in(n+1)/2)$ on obtient

$$ai+b=\omega\,,$$

où ω désigne $\exp(in(n+1)/2)$. Comme P et X^2+1 sont à coefficients réels, il en est de même de R, donc on sait que a et b sont réels. L'égalité ci-dessus donne alors immédiatement $b=\mathrm{Re}(\omega)$ et $a=\mathrm{Im}(\omega)$, d'où

$$R=\sin\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)X+\cos\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\,.$$

545. **RMS 2006 1043 CCP PSI**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} g=E\iff\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g$.

Solution. — On suppose que $\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} g=E$. L'inclusion $\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g$ étant toujours vraie, il suffit de démontrer que $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Im}(g\circ f)$. Soit $y\in\operatorname{Im} g$. Il existe $x\in E$ tel que $y=g(x)$. Par hypothèse, il existe $(x_1,x_2)\in\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} g$ tel que $x=x_1+x_2$ et, comme $x_1\in\operatorname{Im} f$, il existe $x_3\in E$ tel que $x_1=f(x_3)$. Alors $y=g(x)=g(f(x_3)+x_2)=g(f(x_3))$, puisque $x_2\in\operatorname{Ker} g$), ce qui prouve que $y\in\operatorname{Im}(g\circ f)$.

Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g$. Soit $x\in E$. Alors $g(x)\in\operatorname{Im}(g\circ f)$ par hypothèse, donc il existe $y\in E$ tel que $g(x)=g(f(y))$, ou encore $g(x-f(y))=0$. On vient de montrer que $z:=x-f(y)\in\operatorname{Ker} g$, et l'égalité $x=f(y)+z$ prouve que $\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} g=E$.

546. **RMS 2011 1070 CCP PSI**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie E.

(a) Montrer : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2\iff\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.
(b) Montrer : $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2\Longrightarrow E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} f$.
(c) Montrer : $E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} f\Longrightarrow\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$.

Solution. —

(a) Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel E, on dispose des inclusions $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$. Si $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$, la formule du rang pour f et f^2 implique que $\dim(\operatorname{Ker} f)=\dim(\operatorname{Ker} f^2)$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$ prouve alors que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.
La réciproque se traite de même.

(b) On suppose que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$. D'après la formule du rang, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe, ce qui prouvera que $E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$. Soient donc $x\in\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$, et $y\in E$ tel que $x=f(y)$. Comme $f(x)=f^2(y)=0$, et comme $\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$, on en déduit que $y\in\operatorname{Ker} f$, donc que $x=f(y)=0$, ce qui achève la question.

(c) On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. Compte-tenu de l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$, il suffit de démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. Soient donc $x \in \operatorname{Im} f$ et $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Par hypothèse, y s'écrit $z + f(t)$ avec $z \in \operatorname{Ker} f$ et $t \in E$. On en déduit que $x = f(z + f(t)) = f^2(t) \in \operatorname{Im} f^2$.

547. **RMS 2007 904 CCP PSI**

Soient $n \geqslant 2$ et $f\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$. Montrer que f est linéaire et trouver $\dim(\operatorname{Ker} f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Solution. — Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'évaluation $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire : la linéarité de f en résulte. L'expression même de f montre que son image est contenue dans le plan $\operatorname{Vect}(X, X^2 - 4)$. Comme $f(X) = X$ et $f(1 - X) = X^2 - 4$, il y a en fait égalité, donc $\operatorname{rg} f = 2$, puis $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1$ d'après la formule du rang.

548. **RMS 2010 978 CCP PSI**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

Solution. — La formule du rang donne déjà $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(E)$. Il suffit ensuite de montrer que les sous-espaces en question sont en somme directe, c'est-à-dire que leur intersection est réduite à $\{0\}$, puisqu'ils ne sont que deux. Or si $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = f^2(y) = 0$. On en déduit que $f^4(y) = 0$, c'est-à-dire que $-f(y) = -x = 0$. C'est fait.

549. **RMS 2011 1069 CCP PSI**

Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $\tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f induit un endomorphisme f_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer le déterminant de f_n.

Solution. —

(a) La linéarité de f résulte de celle de l'intégrale. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1}\left[(X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right] = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}X^j$$

est de degré k. Par suite, $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc f induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) D'après le calcul ci-dessus, la matrice de f_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'élément k de sa diagonale vaut $\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k} = 1$, donc

$$\det(f_n) = 1\,.$$

550. **RMS 2011 1072 CCP PSI**

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A\colon (x, y, z) \in E^3 \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x), y, z) + \det_{\mathcal{B}}(x, u(y), z) + \det_{\mathcal{B}}(x, y, u(z))$. Montrer que A est tri-linéaire alternée, puis que $A = (\operatorname{tr} u)\det_{\mathcal{B}}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 452 page 316.

On appelle e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de $\mathcal{B}$, et on note $M = (m_{i,j})$ la matrice de u sur $\mathcal{B}$.

La trilinéarité de A résulte de la linéarité de u et de la trilinéarité de la forme $\det_{\mathcal{B}}$. Le caractère alterné de A résulte du caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}}$. Le théorème de caractérisation du déterminant affirme alors que A est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On trouve la valeur de λ en évaluant cette dernière relation sur la base $\mathcal{B}$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ par définition, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda &= \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), e_2, e_3) + \det_{\mathcal{B}}(e_1, u(e_2), e_3) + \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, u(e_3))\,, \\
&= \begin{vmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & m_{1,3} \\ 0 & 1 & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{vmatrix}\,, \\
&= m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}\,, \\
&= \operatorname{tr} u\,.
\end{aligned}$$

551. **RMS 2010 982 CCP PSI**

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et déterminer sa dimension.

(b) Si $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ possède n termes diagonaux distincts, montrer que $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

(c) L'ensemble des matrices diagonalisables est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Solution. —

(a) On note $E_{i,j}$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On remarque que

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(E_{i,i},\ 1 \leqslant i \leqslant n)\ ,$$

donc que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n.

(b) On note $\mathcal{B}$ la base $(E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $a_1, \ldots, a_n$ les éléments de la diagonale de D. Si $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D^k = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ admet n racines distinctes (les termes diagonaux de D) et il est de degré $\leqslant n-1$. Il est donc nul, et cela donne $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Alors la famille $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

(c) On suppose que $n \geqslant 2$. Alors la réponse est non. Les deux matrices suivantes sont diagonalisables (elles ont deux valeurs propres distinctes), mais leur somme ne l'est pas (elle est nilpotente et non nulle) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce contre-exemple à la stabilité par la somme, donné en dimension 2, s'étend aisément en toute dimension $n \geqslant 3$: il suffit de considérer les matrices $\mathrm{diag}(A, I_{n-2})$ et $\mathrm{diag}(B, I_{n-2})$.

Étude d'endomorphismes et de matrices d'ordre générique satisfaisant des conditions algébriques

552. **RMS 2011 1077 CCP PSI**

Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie, f, u et v dans E. On suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $f = au + bv$, $f^2 = a^2u + b^2v$ et $f^3 = a^3u + b^3v$. Montrer que f est diagonalisable.

Solution. — Si $a \neq b$, on considère le système

$$\begin{cases} au + bv & = & f\ , \\ a^2u + b^2v & = & f^2\ , \end{cases}$$

dont les inconnues sont u et v. Ce système est de Cramer, et on obtient

$$\begin{cases} u & = & \frac{1}{a(a-b)}(f^2 - af)\ , \\ v & = & \frac{1}{b(b-a)}(f^2 - af)\ , \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans la troisième égalité et en multipliant par $a-b$, on obtient $(a-b)f^3 = a^2(f^2 - bf) - b^2(f^2 - af) = (a^2 - b^2)f^2 - ab(a-b)f$, où encore $f^3 - (a+b)f^2 + abf = 0$. Le polynôme

$$X^3 - (a+b)X^2 + abX = X(X-a)(X-b)$$

est donc annulateur de f. Or ce polynôme est scindé à racines simples, puisque a et b sont non nuls, et qu'on a supposé $a \neq b$. Par suite, f est diagonalisable.

Si $a = b$, on pose $g = f/a$. Les deux premières équations s'écrivent $g = u + v$ et $g^2 = u + v$, donc $g^2 = g$, donc g est diagonalisable. Par suite, $f = ag$ est diagonalisable.

553. **RMS 2008 973 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$. On suppose que $\mathrm{rg}\, A = 2$, $\mathrm{tr}\, A = 0$, et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Solution. — Comme $\mathrm{rg}\, A = 2$, zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n-2$, le sous-espace propre correspondant (le noyau) étant de dimension $n-2$ d'après la formule du rang.

Il reste (au plus) deux (autres) valeurs propres à découvrir, notées λ et μ. Pour cela, on utilise la trace : $\mathrm{tr}\, A = (n-2)0 + \lambda + \mu = 0$ par hypothèse. On en déduit que les deux dernières valeurs propres sont opposées.

Si elles étaient nulles, alors zéro serait la seule valeur propre de A : comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, elle serait semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc serait nilpotente d'ordre au plus n selon un calcul bien connu, donc A^n serait nulle, ce qui n'est pas le cas.

Par suite, A possède, outre zéro, deux valeurs propres non nulles et opposées, donc distinctes. Elles sont donc simples, puisque zéro est déjà d'ordre au moins $n-2$. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut $n - 2 + 1 + 1 = n$, donc A est diagonalisable.

554. **RMS 2010 983 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A + 8I_n$.

(a) La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
(b) Trouver les $M \in \text{Vect}(I_n, A)$ telles que $M^2 = 2M + 8I_n$.

SOLUTION. —

(a) La matrice A vérifie $(A^2 - 2A)/8 = A(A - 2I_n)/8 = I_n$, donc elle est inversible d'inverse $A^{-1} = (A - 2I_n)/8$. Elle annule le polynôme $P := X^2 - 2X - 8 = (X+2)(X-4)$ qui est scindé à racines simples, donc elle est diagonalisable.

(b) Une matrice M carrée d'ordre n à coefficients réels appartient à $\text{Vect}(I_n, A)$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M = \alpha I_n + \beta A$. Alors $M^2 = \alpha^2 I_n + 2\alpha\beta A + \beta^2 A^2 = (\alpha^2 + 8\beta^2)I_n + 2\beta(\alpha + \beta)A$.

– Si (I_n, A) est une famille libre, $M^2 = 2M + 8I_n = (2\alpha + 8)I_n + 2\beta A$ si et seulement si (α, β) est solution du système suivant, qu'on résout dans la foulée :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 + 8\beta^2 & = & 2\alpha + 8\,, \\ 2\beta(\alpha+\beta) & = & 2\beta\,, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 - 2\alpha - 8 & = & 0\,, \\ \beta & = & 0\,, \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} 9\alpha^2 - 18\alpha & = & 0\,, \\ \alpha + \beta & = & 1\,, \end{array}\right.$$
$$\iff (\alpha, \beta) \in \{(4,0), (-2,0), (0,1), (2,-1)\}\ .$$

On trouve donc quatre matrices solutions : $4I_n$, $-2I_n$, A et $2I_n - A$.

– Si (I_n, A) est liée, $\text{Vect}(I_n, A) = \text{Vect}(I_n)$, et la question revient à chercher les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M = \lambda I_n$ vérifie $M^2 = 2M + 8I_n$. On obtient l'équation $P(\lambda) = 0$, et on retrouve les solutions $M = -2I_n$ et $M = 4I_n$.

REMARQUE. — On peut aussi résoudre la question (b) en diagonalisant A.

555. **RMS 2011 1073 CCP PSI** .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0$.

(a) Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
(b) Montrer que n est nécessairement pair.
(c) Calculer le déterminant et la trace de A.

SOLUTION. — On note P le polynôme $X^3 + X + 4$. Son discriminant Δ vaut -15, ses racines valent $(-1 \pm i\sqrt{15})/2$. On les note λ et $\overline{\lambda}$. On remarque que $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda} = 4$.

(a) Les valeurs propres de A sont parmi les racines de P qui est un polynôme annulateur de A. Ces racines ne sont pas réelles.

(b) Le polynôme caractéristique de A, qui est à coefficients réels et de degré n, n'a donc pas de racine réelle. Comme tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle, on conclut que n est pair.

(c) On écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, et on note m et m' les multiplicités de λ et $\overline{\lambda}$ dans χ_A. On doit avoir $m + m' = n = 2p$. Comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, sa trace vaut $m\lambda + m'\overline{\lambda}$. Comme A est à coefficients réels, sa trace est réelle, donc $\text{Im}(m\lambda + m'\overline{\lambda}) = (m - m')\,\text{Im}\,\lambda = 0$. On en déduit que $m = m' = p$, puisque $\text{Im}\,\lambda \neq 0$. Alors

$$\text{tr}\,A = p(\lambda + \overline{\lambda}) = 2p\,\text{Re}\,\lambda = n\,\text{Re}\,\lambda = -\frac{n}{2}\,,$$
$$\det A = \left(\lambda\overline{\lambda}\right)^p = |\lambda|^n = 2^n\,.$$

556. **RMS 2010 986 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis que $\det(A) > 0$.

SOLUTION. — La matrice A annule le polynôme $P = X^3 - X - 1$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$, et à racines simples, car les racines de $P' = 3X^2 - 1$ ne sont pas racines de P. Par suite, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Comme $P(-3^{-1/2}) = 2.3^{-1/2} - 1 \approx -0,6$ et $P(3^{-1/2}) = -2.3^{-3/2} - 1$ sont négatifs, le tableau de variation de P montre que ce dernier admet une unique racine réelle, notée a, qui est plus grande que $3^{-1/2}$, donc strictement positive. Comme P est à coefficients réels, ses deux autres racines sont complexes conjuguées non réelles. On les note b et $\overline{b}$.
Soient alors m (respectivement p et q) les multiplicités de a (respectivement de b et de $\overline{b}$) dans le polynôme caractéristique de A. Comme A est diagonalisable, elle est semblable sur $\mathbb{C}$ à

$$A' = \text{diag}\Big(\underbrace{a, \ldots, a}_{m \text{ fois}}, \underbrace{b, \ldots, b}_{p \text{ fois}}, \underbrace{\overline{b}, \ldots, \overline{b}}_{q \text{ fois}}\Big).$$

On en déduit que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A') = ma + pb + q\overline{b} = [ma + q(b + \overline{b})] + (p - q)b = [ma + 2q\,\text{Re}(b)] + (p - q)b$. Ce nombre est réel car A est à coefficients réels. Comme $ma + 2q\,\text{Re}(b) \in \mathbb{R}$, il faut que $(p - q)b \in \mathbb{R}$. Comme b est un nombre complexe non réel, il faut que $p = q$. Comme $a > 0$, on en déduit alors que

$$\det(A) = \det(A') = a^m b^p \overline{b}^q = a^m (b\overline{b})^p = a^m |b|^{2p} > 0\,.$$

Réduction de matrices particulières de petits ordres et applications

557. **RMS 2010 988 CCP PSI**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que A est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

(b) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^5 + M^3 + M = A$.

Solution. —

(a) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A = -X^3 + 9X - 8 = (-X+1)(X^2+X-8)\,.$$

Comme 1 n'est pas racine de $X^2 + X - 8$ et comme le discriminant de ce dernier polynôme vaut 33, strictement positif, on en déduit que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, donc que A est diagonalisable (on le retrouve) et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1. On note $\lambda_1 = 1$, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A, et on note P une matrice de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

(b) Pour tout réel λ, le polynôme $P_\lambda = X^5 + X^3 + X - \lambda$ admet au moins une racine réelle, puisqu'il est de degré impair. En particulier, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note α_i une racine réelle de P_{λ_i}. Alors $M = P\ \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1}$ vérifie $M^5 + M^3 + M = A$.

558. **RMS 2010 989 CCP PSI**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique P de A.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P. En déduire A^n.

Solution. —

(a) Par la règle de Sarrus, on obtient $P = (1-X)(-2-X)(1-X) - 9(1-X) - (1-X) = (1-X)[(2+X)(X-1) - 10] = (1-X)(X^2+X-12) = (1-X)(X-3)(X+4)$.

(b) Le reste recherché est de degré 2, et on le note $R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n$. On substitue ensuite X par les valeurs propres de A dans la division euclidienne $X^n = PQ_n + R_n$ pour obtenir le système, qu'on résout par la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1\,, \\ 9a_n & + & 3b_n & + & c_n & = & 3^n\,, \\ 16a_n & - & 4b_n & + & c_n & = & (-4)^n\,, \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1\,, \\ 8a_n & + & 2b_n & & & = & 3^n - 1\,, \\ 15a_n & - & 3b_n & & & = & (-4)^n - 1\,, \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1\,, \\ 8a_n & + & 2b_n & & & = & 3^n - 1\,, \\ 18a_n & & & & & = & (-4)^n + 2\,, \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} c_n & = & 1 - \frac{5}{18}[(-4)^n + 2] - \frac{1}{2}(3^n - 1)\,, \\ b_n & = & \frac{2}{9}[(-4)^n + 2] + \frac{1}{2}(3^n - 1)\,, \\ a_n & = & \frac{1}{18}[(-4)^n + 2]\,. \end{array}\right.$$

On substitue enfin X par A dans la relation $X^n = PQ_n + R_n$. Comme P est annulateur de A (c'est le théorème de Hamilton et Cayley), on obtient $A^n = R_n(A)$. Le calcul explicite des coefficients de A^n ne présente pas d'intérêt.

559. **RMS 2010 991 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

(a) Les matrices A et A^2 sont elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$? Dans $\mathbb{R}$?

(b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. —

(a) Le polynôme $X^3+X = X(X+i)(X-i) \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples et annulateur de A, qui est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Par suite, A^2 l'est aussi.

En revanche, A n'est plus nécessairement diagonalisable sur $\mathbb{R}$, comme le prouve le contre-exemple de la matrice donnée à la question suivante, dont le polynôme caractéristique est $-X^3-X$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Néanmoins, A^2 est toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$, car elle annule le polynôme $X^2+X \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples (il suffit de multiplier la relation $A^3+A=0$ par A).

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. La matrice A admet nécessairement une valeur propre réelle car son ordre est impair. Cette valeur propre est parmi les racines de X^3+X, polynôme annulateur de A. Par suite, zéro est valeur propre de A ; soit e_1 un vecteur propre associé. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe e_2 et e_3 tels que (e_1,e_2,e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que $u(e_2)=-e_3$ et $u(e_3)=e_2$.

Analyse. Si ces vecteurs existent, alors $e_3=-u(e_2)$, et $u^2(e_2)=-e_2$, donc $e_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$.

Synthèse. On commence par montrer que $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que $u^2+\mathrm{id}$ n'est pas un isomorphisme. Si c'était le cas, comme $A^3+A=0$ donc $u\circ(u^2+\mathrm{id})=0$, on en déduirait que $u=0$, ce que l'énoncé exclut. On choisit ensuite un vecteur non nul $e_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ et on pose $e_3=-u(e_2)$. On montre enfin que (e_1,e_2,e_3) est une base. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i = 0$. En appliquant u, puis u^2, et en utilisant la relation $u^2(e_2)=-u(e_3)=-e_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(L_1) \qquad -\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0\,,\\
&(L_2) \qquad -\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0\,.
\end{aligned}$$

La combinaison $\lambda_3(L_1)+\lambda_2(L_2)$ conduit à $-(\lambda_2^2+\lambda_3^2)e_2=0$, donc à $\lambda_2=\lambda_3=0$ puisque $e_2\neq 0$. Il reste $\lambda_1 e_1=0$, d'où $\lambda_1=0$, puisque e_1 est un vecteur propre.

560. **RMS 2011 1076 CCP PSI**

Soit $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-4&-2\\4&12&5\end{pmatrix}$.

(a) Diagonaliser A.

(b) Si $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifie $B^2=A$, montrer que B et A commutent. Déterminer l'ensemble $\{B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ B^2=A\}$.

Solution. —

(a) On calcule

$$\begin{aligned}
\chi_A = \begin{vmatrix}2-X&3&1\\0&-4-X&-2\\4&12&5-X\end{vmatrix} &= (2-X)[(4+X)(X-5)+24]+4[-6+4+X]\,,\\
&= (2-X)(X^2-X+4)+4X-8 = -X^3+3X^2-2X = -X(X-1)(X-2)\,.
\end{aligned}$$

Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable et trois résolutions de système linéaires donnent la matrice de passage P suivante :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&3\\-2&-2&-4\\4&5&4\end{pmatrix} \quad\text{avec}\quad P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,1,2)\,.$$

(b) Si $B^2=A$, alors $AB=B^2B=BB^2=BA$. On sait que si $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec A, alors les sous-espaces propres de A sont stables par M. Ces sous-espaces propres étant des droites, leur stabilité par M signifie que ce sont aussi des sous-espaces propres de M. En d'autres termes, le commutant de A est formé des matrices de la forme $P^{-1}DP$, où D est diagonale.

Soit $B=P^{-1}DP$ une telle matrice, où $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)$. L'équation $B^2=A$ équivaut alors à $D^2=A'$. les solutions sont données par $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\pm1$ et $\lambda_3=\pm\sqrt{2}$, et on conclut que

$$\{B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ B^2=A\}=\left\{P^{-1}DP,\ D=\mathrm{diag}\left(0,\pm1,\pm\sqrt{2}\right)\right\}\,.$$

561. **RMS 2008 907 CCP PSI**

Trouver les matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables.

Solution. — On commence par déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ne soit pas diagonalisable. Il faut que M ait une valeur propre double (sinon, M possède deux valeurs propres simples et est diagonalisable). Dans ce cas, elle est diagonalisable si et seulement si elle est une matrice d'homothétie.

En conclusion, si Δ est le discriminant de χ_M, la matrice M n'est pas diagonalisable si et seulement si $\Delta = 0$ et M n'est pas colinéaire à I_2. On applique cela à une matrice symétrique complexe

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Comme $\chi_M = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ et $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$, la condition nécessaire et suffisante pour que M ne soit pas diagonalisable est

$$(a-d)^2 + 4b^2 = 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0\,.$$

La seconde condition ($b \neq 0$) est bien sûr nécessaire pour que M ne soit pas colinéaire à I_2, et elle est aussi suffisante : compte-tenu de la première condition, si b est nul, alors $a = d$.

Réduction de matrices particulières d'ordre générique

562. **RMS 2011 1075 CCP PSI**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j),\ a_{i,j} = i$. Déterminer les éléments propres de A.

Solution. — On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les colonnes de A étant identiques et non nulles, son rang vaut 1, donc zéro est valeur propre d'ordre au moins $n-1$, et l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(E_1 - E_i,\ 2 \leqslant i \leqslant n)$ est contenu dans $E_0(A)$. Pour trouver la dernière valeur propre λ, on utilise la trace de A : elle est la somme de ses valeurs propres (complexes *a priori*, mais réelles en l'occurrence). On obtient $\lambda = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2 \neq 0$, ce qui prouve que $E_0(A) = H$ et que A est diagonalisable. On remarque enfin que le vecteur $V = \sum_{i=1}^n iE_i$ est propre pour λ. En résumé,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A) &= \{0, n(n+1)/2\}\ , \\ E_0(A) &= H = \mathrm{Vect}(E_1 - E_i,\ 2 \leqslant i \leqslant n)\ , \\ E_{n(n+1)/2}(A) &= \mathrm{Vect}(V)\ . \end{aligned}$$

563. **RMS 2007 908 CCP PSI**

Soient $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 4$ si $i = j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

(a) Prouver que A est diagonalisable.

(b) Montrer que $A - 3I_n$ n'est pas inversible.

(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution. —

(a) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

(b) La matrice $A - 3I_n$ est la matrice dont tous les éléments valent 1 : elle est de rang $1 < n$, donc elle n'est pas inversible. Cela signifie que 3 est valeur propre de A, le sous-espace propre associé étant l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

(c) Il reste une seule valeur propre et un sous-espace propre associé à trouver : deux démarches sont possibles, la première étant plus adaptée et plus rapide.

  i. On peut utiliser le théorème spectral, qui entraîne que le dernier sous-espace propre est la droite $H^\perp$, engendrée par le vecteur $U = {}^t(1, \dots, 1)$. Le calcul $AU = (n+3)U$ montre que la dernière valeur propre (simple) est $n+3$.

  ii. On peut utiliser la trace : $\mathrm{tr}\, A = 4n = 3(n-1) + \lambda$, où λ est la dernière valeur propre. On obtient $\lambda = n + 3$, et la résolution de $AX = (n+3)X$ conduit au vecteur U.

564. **RMS 2008 972 CCP PSI**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = i/j$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. — Voir aussi l'exercice 795 page 508.

On note U le vecteur colonne dont les composantes sont 1, 2, …, n. Alors la colonne C_j de A vaut U/j pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. En particulier A est de rang 1 (toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première, qui n'est pas nulle), donc son noyau est de dimension $n - 1$.

On vient de prouver que zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$, le sous-espace propre étant l'hyperplan d'équation $x_1 + (x_2/2) + \cdots + (x_n/n) = 0$.

Il reste une éventuelle valeur propre λ d'ordre 1 à découvrir : on utilise la trace. On a $\operatorname{tr} A = (n-1)0 + \lambda = \sum_{i=1}^n i/i = n$, donc n est valeur propre simple de A. Le sous-espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur U lui-même (comme A est de rang 1, une droite propre pour une valeur propre non nulle est nécessairement l'image de A).

La somme des dimensions des sous-espaces propres valant $(n-1)+1 = n$, la matrice A est diagonalisable.

565. **RMS 2007 909 CCP PSI**

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne, de la première colonne et de la diagonale valent 1, les autres étant nuls. Montrer que 1 est valeur propre de A. Trouver l'espace propre associé. En déduire les autres valeurs propres et les autres espaces propres.

Solution. — La matrice $A - I_n$ est manifestement de rang 2. Comme $n \geqslant 3$, cette matrice n'est pas inversible, ce qui montre que 1 est une valeur propre de A. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de composantes x_i. L'équation $(A - I_n)X = 0$ équivaut à

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 + \cdots + x_n = 0\,.$$

Il s'agit d'un système d'équations du sous-espace propre $E_1(A)$, qui est de dimension $n-2$. Pour le montrer, on peut invoquer :

- La théorie de la dualité : la famille de cardinal deux (ϕ_1, ϕ_2), composée des formes linéaires données par les expressions $\phi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ et $\phi_2(x_1, \ldots, x_n) = x_2 + \cdots + x_n$, est libre, donc la dimension de l'intersection de leurs noyaux est $n-2$.
- Ou encore la formule de Grassmann, qui donne $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = (n-1)+(n-1)-n = n-2$, où $H_1 = \operatorname{Ker} \phi_1$ et $H_2 = \operatorname{Ker} \phi_2$ sont deux hyperplans distincts.

Les deux autres valeurs propres (distinctes ou confondues) de A seront notées α et β. Pour les déterminer, on peut utiliser deux raisonnements.

- Le premier raisonnement est purement algébrique. Comme une matrice à coefficients complexes est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$, la trace de A (respectivement de A^2) est la somme de ses valeurs propres (respectivement des carrés de ses valeurs propres). On calcule seulement les éléments diagonaux de A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Les nombres α et β vérifient donc le système

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(A) &= (n-2) \times 1 + \alpha + \beta &= n\,, \\ \operatorname{tr}(A^2) &= (n-2) \times 1^2 + \alpha^2 + \beta^2 &= 3n-2\,, \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \alpha + \beta &= 2\,, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 2n\,. \end{cases}$$

Une résolution par substitution montre que α et β sont les deux racines du polynôme $X^2 - 2X + 2 - n$. On trouve deux racines réelles distinctes (l'ordre est arbitraire) :

$$\alpha = 1 - \sqrt{n-1} \quad \text{et} \quad \beta = 1 + \sqrt{n-1}\,.$$

On sait alors que les deux sous-espaces propres associées sont des droites, et que A est diagonalisable. Si λ désigne l'une quelconque de ces deux valeurs propres, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = \lambda X$ s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= \lambda x_1\,, \\ x_1 + x_2 &= \lambda x_2\,, \\ & \vdots \\ x_1 + x_n &= \lambda x_n \end{cases}$$

Les $n-1$ dernières lignes donnent $x_k = \frac{x_1}{\lambda - 1}$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, et la première ligne est nécessairement vérifiée puisqu'on doit obtenir une droite propre (c'est un moyen de vérifier l'absence d'erreur dans le calcul de α et β : le calcul donne $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1(1 + \frac{n-1}{\lambda-1}) = x_1 \frac{\lambda+n-2}{\lambda-1}$, et comme λ est racine de $X^2 - 2X + 2 - n$, on a $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 2 - n = 0$, donc $\lambda = \frac{\lambda+n-2}{\lambda-1}$, ce qui achève la vérification). On obtient donc

$$\forall \lambda \in \{\alpha, \beta\}, \quad E_\lambda(A) = \operatorname{Vect}\left[{}^t(\lambda - 1, 1, \ldots, 1)\right]\,.$$

- Le second raisonnement est géométrique. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Les sous-espaces propres associés sont à rechercher dans l'orthogonal de $E_1(A)$. Comme $E_1(A) = H_1 \cap H_2$, où H_1 et H_2 sont les deux hyperplans d'équations respectives $x_1 = 0$ et $x_2 + \cdots + x_n = 0$, on a

$$E_1(A)^\perp = H_1^\perp \oplus H_2^\perp\,.$$

On sait calculer un vecteur générateur de la droite orthogonale à un hyperplan quand on connaît une équation de l'hyperplan. Ici, $E_1(A)^\perp = \mathrm{Vect}(U,V)$ avec $U = E_1$ et $V = E_2 + \cdots + E_n$, les vecteurs E_i formant la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On calcule $AU = U+V$ et $AV = \sum_{k=2}^n AE_k = \sum_{k=2}^n (E_1+E_k) = (n-1)E_1 + \sum_{k=2}^n E_k = (n-1)U+V$, de sorte que, si u désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A, la matrice sur la base $\mathcal{B} = (U,V)$ de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Vect}(U,V)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\chi_M = X^2 - 2X + 2 - n$, on retrouve les valeurs de α et β obtenues dans le premier raisonnement. Si $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$, la droite propre de M associés a pour équation rapportée à la base (U,V) : $x + (1-\lambda)y = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est $(\lambda - 1)U + V$, et on retrouve l'égalité

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}\left[(\lambda-1)U + V\right] = \mathrm{Vect}\left[\,{}^t(\lambda - 1, 1, \ldots, 1)\right] .$$

On vérifie enfin que les deux vecteurs propres obtenus sont bien orthogonaux pour le produit scalaire canonique, avec $U = {}^t(1,0,0,\ldots,0)$ et $V = {}^t(0,1,1,\ldots,1)$:

$${}^t\left(-\sqrt{n-1}\,U + V\right)\left(\sqrt{n-1}\,U + V\right) = -(n-1)\,{}^tUU + {}^tVV = -(n-1) + (n-1) = 0\,.$$

566. **RMS 2008 974 CCP PSI**

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs et $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par $n_{i,j} = a_i$. On pose $s = a_1 + \cdots + a_n$ et $M = 2N - sI_n$.

(a) Calculer N^2. La matrice N est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Solution. —

(a) On trouve aisément $N^2 = sN$. Par suite, N possède le polynôme annulateur $X(X-s)$, qui est scindé à racines simples puisque $s > 0$ donc $s \neq 0$ (en effet, les a_i sont strictement positifs). La matrice N est donc diagonalisable.

(b) On calcule le déterminant : $\det(M) = \det(2N - sI_n) = 2^n \chi_N(s/2) \neq 0$, car les deux seules valeurs propres possibles de S sont zéro et s, donc pas $s/2$ (les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur). La matrice M est donc inversible.

On calcule ensuite $MN = 2N^2 - sN = 2sN - sN = sN = s(M + sI_n)/2$, et on en déduit que $M(N - sI_n) = (s^2/2)I_n$, donc que

$$M^{-1} = \frac{2}{s^2}(N - sI_n)\,.$$

Opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

567. **RMS 2010 992 CCP PSI**

Soit $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres et calculer le déterminant de Φ.

Solution. — Voir aussi l'exercice 74 page 128.

On sait que Φ est linéaire et que $\Phi^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc que Φ est une symétrie vectorielle. Comme l'endomorphisme Φ n'est ni l'identité (à condition de supposer que $n \geqslant 2$) ni l'opposé de l'identité, ses valeurs propres sont 1 et -1. Par ailleurs, il est diagonalisable, donc $\det(\Phi) = (-1)^d$, où d est la dimension de $E_{-1}(\Phi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On sait que $d = n(n-1)/2$, donc

$$\det(\Phi) = (-1)^{n(n-1)/2}\,.$$

568. **RMS 2011 1074 CCP PSI**

Soit $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{tr}\,M)I_n + M$. Trouver un polynôme annulateur de Φ de degré 2. En déduire les éléments propres de Φ.

Solution. — On calcule $\Phi^2(M) = \mathrm{tr}(\Phi(M))I_n + \Phi(M) = (n\,\mathrm{tr}\,M + \mathrm{tr}\,M)I_n + (\mathrm{tr}\,M)I_n + M = (n+2)(\mathrm{tr}\,M)I_n + M$, et on constate que $\Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, le polynôme

$$P = X^2 - (n+2)X + n + 1$$

est annulateur de Φ. Le nombre 1 est racine évidente de P, et comme le produit des racines de P vaut $n+1$, c'est que l'autre racine est $n+1$. L'équation $\Phi(M) = M$ étant équivalente à $\mathrm{tr}\,M = 0$, le sous-espace propre $E_1(\Phi)$ est l'hyperplan des matrices de trace nulle. On sait alors que la multiplicité de la valeur propre $n+1$ est nécessairement égale à 1 — et que Φ est diagonalisable —, et il suffit de constater que $\Phi(I_n) = (n+1)I_n$ pour obtenir le second sous-espace propre. En résumé :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(\Phi) &= \{1, n+1\}\ ,\\ E_1(\Phi) &= \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\ ,\\ E_{n+1}(\Phi) &= \mathrm{Vect}(I_n)\ .\end{aligned}$$

569. **RMS 2011 1078 CCP PSI**

Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $\Phi\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto -X + (\mathrm{tr}\, X)I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution. — On constate que $\Phi(X) = -X$ pour toute matrice de trace nulle, ce qui prouve que -1 est valeur propre et que l'hyperplan Ker(tr) est contenu dans $E_{-1}(\Phi)$, donc que la multiplicité de -1 dans χ_Φ vaut $n^2 - 1$ ou n^2 (s'il n'y a pas d'autre valeur propre). Or $\Phi(I_n) = (n-1)I_n$, ce qui prouve que $n-1$ est valeur propre, de multiplicité 1 nécessairement, et on en déduit que la multiplicité de -1 est $n^2 - 1$. Par suite,

$$\chi_\Phi = (-1)^{n^2}(X+1)^{n^2-1}(X-n+1)\ .$$

On a aussi montré que $E_{-1}(\Phi)$ est l'hyperplan Ker(tr) des matrices de trace nulle et que $E_{n-1}(\Phi)$ est la droite engendrée par I_n. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n^2, donc Φ est diagonalisable, donc son polynôme minimal est scindé à racines simples : il vaut donc nécessairement

$$\mu_\Phi = (X+1)(X-n+1)\ .$$

570. **RMS 2008 975 CCP PSI**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}| \leqslant n$.

Solution. — Voir l'exercice 534 page 375.

571. **RMS 2008 976 CCP PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $I_n + A$ est inversible, puis que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution. — On note $\|\ \|$ la norme euclidienne canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + A)X = 0$. Alors $AX = -X$, donc $A^2X = -AX = X$, donc

$${}^tXA^2X = {}^tXX = \|X\|^2\ .$$

Or A est antisymétrique, donc $A^2 = -{}^tAA$. L'équation ci-dessus se réécrit donc sous la forme $-{}^tX\,{}^tAAX = \|X\|^2$, ou encore $-\|AX\|^2 = \|X\|^2$. Un carré de nombre réel étant positif ou nul, ceci implique que $\|X\|^2 = 0$, donc que $X = 0$, et on a bien prouvé que le noyau de $I_n + A$ est réduit à zéro, donc que $I_n + A$ est inversible. De même, $-A$ est antisymétrique, donc $I_n - A$ est inversible (on l'utilisera ci-dessous).

Il s'agit de prouver que ${}^tBB = I_n$. En utilisant les identités ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$ et $(MP)^{-1} = P^{-1}M^{-1}$ pour toutes matrices M et P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ainsi que le caractère antisymétrique de M, on obtient

$$\begin{aligned}{}^tBB &= {}^t(I_n - A)[\,{}^t(I_n + A)]^{-1}(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}(I_n + A)^{-1}(I_n - A)\ ,\\ &= (I_n + A)[(I_n + A)(I_n - A)]^{-1}(I_n - A) = (I_n + A)(I_n - A^2)^{-1}(I_n - A).\end{aligned}$$

On en déduit que $(I_n - A)\,{}^tBB = (I_n - A^2)(I_n - A^2)^{-1}(I_n - A) = I_n - A$. La matrice $I_n - A$ étant inversible, on en déduit que ${}^tBB = I_n$, donc que

$$B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\ .$$

572. **RMS 2010 995 CCP PSI**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle u(e_i), \varepsilon_j\rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

Solution. — On fixe j. Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale, on a $\sum_{j=1}^n \langle u(e_i), \varepsilon_j\rangle^2 = \|u(e_j)\|^2$. Alors

$$A = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), u(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u^*u(e_i), e_i\rangle = \mathrm{tr}(u^*u)\ .$$

573. **RMS 2010 996 CCP PSI**

Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Les matrices $A+B$, AB et la comatrice de A sont-elles nécessairement dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?
(b) Montrer que si $(A+B)/2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution. —
(a) Les réponses sont respectivement
- non : $I_n + (-I_n) = 0$ n'est pas dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
- oui : car $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe ;
- oui : car A est inversible, donc $\operatorname{com} A = \det(A)\, {}^tA^{-1}$. Comme A est orthogonale, ${}^tA^{-1} = A$ et $\det(A) = \pm 1$, donc $\operatorname{com} A = \pm A$ est orthogonale.

(b) Une matrice M du segment $[A, B]$ s'écrit $M = sA + (1-s)B$, avec $s \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} {}^tMM &= {}^t[sA + (1-s)B][sA + (1-s)B]\,, \\ &= [s\,{}^tA + (1-s)\,{}^tB][sA + (1-s)B]\,, \\ &= s^2\,{}^tAA + (1-s)^2\,{}^tBB + s(1-s)[{}^tAB + {}^tBA]\,, \\ &= (s^2 + (1-s)^2)I_n + s(1-s)[{}^tAB + {}^tBA]\,. \end{aligned}$$

Quand $s = 1/2$, le résultat vaut I_n par hypothèse : $I_n = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{4}[{}^tAB + {}^tBA]$. On en tire la relation ${}^tAB + {}^tBA = 2I_n$, qu'on reporte dans la formule ci-dessus :

$${}^tMM = [s^2 + (1-s)^2 + 2s(1-s)]I_n = [s + (1-s)]^2 I_n = I_n\,.$$

574. **RMS 2010 997 CCP PSI**
Soient $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace euclidien , F un sous-espace vectoriel de E, p le projecteur orthogonal sur F, et f un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que $p \circ f$ induit un endomorphisme auto-adjoint de F.

Solution. — Tout d'abord $(p \circ f)(x)$ appartient bien à F pour tout $x \in E$, donc pour tout $x \in F$, donc $p \circ f$ induit bien un endomorphisme de F. Il s'agit ensuite de démontrer l'égalité :

$$\forall (x, y) \in F^2,\ \langle (p \circ f)(x), y\rangle = \langle x, (p \circ f)(y)\rangle.$$

On fixe donc x et y dans F. Comme p est un projecteur orthogonal, il est auto-adjoint, donc $\langle p(f(x)), y\rangle = \langle f(x), p(y)\rangle$. Comme $p(y) = y$ et $p(x) = x$, et comme f est auto-adjoint, $\langle f(x), p(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle p(x), f(y)\rangle$. Enfin, comme p est auto-adjoint, $\langle p(x), f(y)\rangle = \langle x, (p \circ f)(y)\rangle$, ce qui achève le calcul.

575. **RMS 2011 1079 CCP PSI**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\,{}^tMM = I_n$. Montrer que M est inversible et symétrique. Déterminer M.

Solution. — La relation $M\,{}^tMM = I_n$ montre que M possède un inverse à droite, donc est inversible. En transposant cette relation, on trouve ${}^tMM\,{}^tM = I_n$, d'où l'on tire $M = ({}^tM)^{-2}$. De la même manière, on obtient ${}^tM = M^{-2}$ à partir de la relation de l'énoncé, donc

$$M = ({}^tM)^{-2} = (M^{-2})^{-2} = M^4\,.$$

Comme M est inversible, on peut simplifier par M et on obtient $M^3 = I_n$, donc $M = M^{-2}$. Comme on a déjà établi que ${}^tM = M^{-2}$, on en déduit que

$${}^tM = M\,.$$

La matrice M est donc symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme $M^3 = I_n$, le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de M, donc sa seule valeur propre réelle vaut 1. La matrice M est donc semblable à I_n, donc égale à I_n :

$$M = I_n\,.$$

Analyse

576. **RMS 2008 981 CCP PSI**
Calculer $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1)/\ln x)^{x \ln x}$.

Solution. — On effectue des développements asymptotiques quand x tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} &= \frac{\ln x + \ln(1 + 1/x)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x \ln x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\,, \\ \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right] &= \frac{1}{x\ln x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\,, \\ \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \exp\left(x \ln x \ln\left[\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right]\right) = \exp(1 + \mathrm{o}(1))\,. \end{aligned}$$

On conclut que la limite cherchée vaut e.

577. **RMS 2010 999 CCP PSI**

Soient $f\colon [a,b] \to [a,b]$ 1–lipschitzienne et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = [x_n + f(x_n)]/2$. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point fixe de f.

Solution. — Tout d'abord, la suite est bien définie. Pour cela, on montre par récurrence sur n que $x_n \in [a,b]$. C'est vrai pour $n=0$ par hypothèse. Si x_n appartient à $[a,b]$, alors $f(x_n)$ aussi par hypothèse sur f ; le nombre x_{n+1} étant le milieu du segment d'extrémités x_n et $f(x_n)$, il appartient encore à $[a,b]$.

On montre maintenant que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, son sens de variation étant donnée par la position de x_0 par rapport à x_1. Pour fixer les idées, on suppose que $x_0 \leqslant x_1$, et on montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: $x_n \leqslant x_{n+1}$.

On a supposé que $\mathcal{P}_0$ est vraie. Si $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, alors

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + f(x_n)}{2} - \frac{x_{n-1} + f(x_{n-1})}{2} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2} + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{2} \geqslant \frac{x_n - x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-1} - x_n}{2} = 0\,,$$

ce qui établit $\mathcal{P}_n$. L'inégalité provient du caractère 1–lipschitzien de f : en effet, $|f(x_n)-f(x_{n-1})| \leqslant |x_n - x_{n-1}| = x_n - x_{n-1}$, puisqu'on a supposé que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On en déduit alors l'encadrement $-[x_n - x_{n-1}] \leqslant f(x_n) - f(x_{n-1}) \leqslant x_n - x_{n-1}$, dont on ne conserve que la première inégalité.

La suite étant monotone et bornée (elle est à valeurs dans $[a,b]$), elle converge. On note ℓ sa limite. Comme $x_n \in [a,b]$ pour tout n, il en est de même de ℓ, et il est légitime de passer à la limite dans la relation $x_{n+1} = [x_n + f(x_n)]/2$. on obtient $\ell = [\ell + f(\ell)]/2$, d'où $\ell = f(\ell)$: c'est un point fixe de f.

578. **RMS 2011 1080 CCP PSI**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ degré n et simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ assez petit, le polynôme $P + \varepsilon X^{n+1}$ est encore simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution. — On va démontrer le même résultat en remplaçant $P + \varepsilon X^{n+1}$ par $P \pm \varepsilon X^{n+1}$, de sorte qu'on pourra remplacer P par $-P$ au besoin. Soient $a_1 < \cdots < a_n$ les n racines réelles de P. Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que $\lim_{-\infty} P = +\infty$, de sorte que P est du signe de $(-1)^k$ sur $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$, la fonction continue $x \mapsto |P(x)|$ admet un maximum strictement positif noté m_k, atteint en $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$. On fixe arbitrairement $b_0 < a_1$ et $b_{n+1} > a_n$, et on pose $m_0 = |P(b_0)|$ et $m_{n+1} = |P(b_{n+1})|$. Le choix de signe de P montre que $P(b_0) > 0$ et $P(b_{n+1})$ est du signe de $(-1)^{n+1}$. Ainsi,

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!], \quad P(b_k) = (-1)^k m_k$$

est du signe de $(-1)^k$. Soit enfin M le maximum de la fonction $x \mapsto |x|^{n+1}$ sur le segment $[b_0, b_{n+1}]$. On pose

$$\alpha = \frac{1}{2M} \min\{m_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n+1\}\,,$$

et on choisit $Q = P \pm \varepsilon X^{n+1}$ avec $\varepsilon \in [0, \alpha]$. Alors $Q(b_k) = P(b_k) \pm \varepsilon b_k^{n+1} = (-1)^k[m_k \pm \varepsilon b_k^{n+1}]$, avec

$$m_k \pm \varepsilon b_k^{n+1} \geqslant m_k - \varepsilon |b_k|^{n+1} \geqslant m_k - \alpha |b_k|^{n+1} \geqslant m_k - \frac{1}{2}\min\{m_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n+1\} \geqslant \frac{1}{2} m_k > 0.$$

Par conséquent, $Q(b_k)$ est du signe de $(-1)^k$, et le théorème des valeurs intermédiaires montre que la fonction polynomiale, donc continue, associée à Q s'annule au moins une fois entre b_k et b_{k+1} pour $0 \leqslant k \leqslant n$, ce qui donne au moins $n+1$ racines distinctes réelles distinctes pour Q, qui est de degré $n+1$. Il en résulte que Q est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

579. **RMS 2010 1002 CCP PSI**

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

Solution. — Voir l'exercice 173 page 160.

580. **RMS 2011 1081 CCP PSI**

Nature, suivant $a \in \mathbb{R}^*$, de la série de terme général $u_n = (n+2)^a - 2(n+1)^a + n^a$?

Solution. — Si $a = 1$, alors $u_n = 0$ pour tout n, donc la série converge. On écarte désormais ce cas et on effectue un développement limité du terme général, quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
u_n &= n^a\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^a - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^a + 1\right] = n^a\left[\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{2a(a-1)}{n^2}\right) - 2\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{a(a-1)}{2n^2}\right) + 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],\\
&= n^a\left[\frac{2a(a-1)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],\\
&\sim \frac{2a(a-1)}{n^{2-a}}.
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'un équivalent entre termes de signe fixe, $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2-a}}$, donc elle converge si et seulement si $a < 1$. En regroupant cette étude avec le cas banal écarté au début, la série étudiée converge si et seulement si

$$a \leqslant 1.$$

On peut aussi raisonner à partir des sommes partielles, et calculer la somme dans la foulée. Par télescopage, on obtient

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ((k+2)^a - 2(k+1)^a + k^a) = \sum_{k=3}^{n+2} k^a - 2\sum_{k=2}^{n+1} k^a + \sum_{k=1}^{n} k^a = 1 - 2^a + (n+2)^a - (n+1)^a = c + T_n\,.$$

Un développement limité fournit $S_n = 1 - 2^a + n^a(1+2/n)^a - n^a(1+1/n)^a = 1 - 2^a + n^a(a/n + \mathrm{o}(1/n)) = 1 - 2^a + a/n^{1-a} + \mathrm{o}(1/n^{1-a}) = c + T_n$, où c est la constante $1 - 2^a$ et $T_n \sim a/n^{1-a}$. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (T_n) converge, c'est-à-dire si et seulement si $1 - a \geqslant 0$. On retrouve la condition déjà obtenue, et on obtient la somme dans le cas de convergence :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \begin{cases} 1 - 2^a & \text{si } a \neq 1, \\ 0 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

581. **RMS 2010 1000 CCP PSI**

Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1})$.

Solution. — On effectue un développement limité : $\frac{n^3+1}{n^2+1} = n(1 + \frac{1}{n^3})(1 + \frac{1}{n^2})^{-1} = n(1 + \frac{1}{n^3})(1 - \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^3})) = n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$, puis

$$u_n := \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

On constate que u_n est la somme d'un terme relevant du théorème spécial des séries alternées et d'un terme de série absolument convergente, donc que $\sum u_n$ est (semi-)convergente.

582. **RMS 2008 978 CCP PSI**

Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n^2-1)$.

Solution. — On dispose de l'équivalent entre termes généraux positifs $1/(n^2-1) \sim 1/n^2$ quand n tend vers l'infini. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge, il en est de même de la série étudiée dans l'exercice.

La somme est obtenue au moyen d'une décomposition en éléments simples et du calcul de la somme partielle S_n par télescopage :

$$u_k = \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}\,,$$

donc $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ tend vers $3/4$ quand n tend vers l'infini :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}\,.$$

583. **RMS 2006 1074 CCP PSI**

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$.

Solution. — On pose $u_n = (\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)/n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \lfloor\sqrt{n}\rfloor = k \iff k^2 \leqslant n < (k+1)^2\,.$$

On a donc $u_n = 0$ sauf si n est de la forme $k^2 - 1$ avec $k \geqslant 2$, auquel cas $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = k$ et $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k - 1$, donc $u_n = v_k := \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$. Un raisonnement simple sur les sommes partielles montre que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_k$ converge. Enfin, l'équivalent entre termes positifs $v_k \sim 1/k^{2\alpha}$ montre que $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\alpha > \frac{1}{2}\,.$$

584. **RMS 2008 979 CCP PSI**

Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1}(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)/n$.

Solution. — On pose $u_n = (\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Comme à l'exercice 583 page 393, on montre que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_k$ converge, où l'on a posé $v_k := \frac{1}{k^2-1}$ pour tout $k\geqslant 2$. L'exercice 582 page 393 dit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que sa somme vaut $3/4$.

585. **RMS 2007 912 CCP PSI**

Nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(t\sin t)/(t^2+t+1)\,\mathrm{d}t$.

Solution. — On pose $f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$, de sorte que $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$. On montre ensuite que $\sum u_n$ converge en vertu du théorème spécial des séries alternées.

Comme $f\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et comme la fonction sinus est du signe de $(-1)^n$ sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, la série $\sum u_n$ est alternée. De plus, $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $[1,+\infty[$ car

$$\forall t\in[1,+\infty[\,,\quad f'(t) = \frac{t^2+t+1-t(2t+1)}{(t^2+t+1)^2} = \frac{-t^2+1}{(t^2+t+1)^2}\leqslant 0\,.$$

Alors, pour tout $n\geqslant 1$, le changement de variable $t=u+\pi$ dans la deuxième intégrale montre que

$$|u_n|-|u_{n+1}| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t - \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(f(t)-f(t+\pi))\,|\sin t|\,\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

puisque f est décroissante sur $[1,+\infty[$ et que $n\pi\geqslant 1$. On en déduit que $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ décroît.

Enfin, la majoration de $|\sin|$ par 1 et de $f(t)$ par $f(n\pi)$ sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ montrent que $|u_n|\leqslant \pi f(n\pi)\sim\frac{1}{n}$, donc que $\lim u_n = 0$.

On conclut que $\sum u_n$ converge (on peut montrer qu'elle est en fait semi-convergente).

586. **RMS 2011 1084 CCP PSI**

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $f'(x)/f(x)\to\ell\in\mathbb{R}$ quand $x\to+\infty$. Montrer que

(a) Si $\ell>0$, la série de terme général $f(n)$ diverge.

(b) Si $\ell<0$, la série de terme général $f(n)$ converge.

(c) Si $\ell=0$, tout est possible.

Solution. — L'intuition qui permet de comprendre les deux premiers cas s'expose ainsi : si l'on remplace la limite de l'énoncé par l'égalité $f'(x)/f(x)=\ell$, on obtient une équation différentielle $f'(x)-\ell f(x)=0$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{\ell x}$, et on connaît la nature d'une série géométrique de raison e^ℓ… On adapte ce raisonnement, en résolvant, non pas une équation différentielle, mais en estimant la taille des solutions d'une inégalité différentielle, grâce à une formule de Taylor.

(a) Si $\ell>0$, la définition de la limite entraîne l'existence de $x_0>0$ tel que $\forall x\geqslant x_0$, $f'(x)/f(x)\geqslant\ell/2$. On pose $g\colon x\in[x_0,+\infty[\mapsto\ln(f(x))$, de sorte que $\forall x\in[x_0,+\infty[\,,\ g'(x)=f'(x)/f(x)\geqslant\ell/2$. Alors $\forall x\in[x_0,+\infty[\,,\ g(x) = g(x_0)+\int_{x_0}^x g'(t)\,\mathrm{d}t\geqslant g(x_0)+(x-x_0)\ell/2$, donc

$$\forall n\geqslant x_0,\quad f(n)=e^{g(n)}\geqslant\exp\left(g(x_0)+(n-x_0)\frac{\ell}{2}\right)=\lambda r^n,$$

avec $r=e^{\ell/2}>1$ et λ une constante qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. Par comparaison avec une série géométrique divergente, on a montré que la série de terme général $f(n)$ diverge.

(b) Si $\ell<0$, le même raisonnement montre qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n\geqslant x_0,\quad 0\leqslant f(n)=e^{g(n)}\leqslant\exp\left(g(x_0)+(n-x_0)\frac{\ell}{2}\right)=\lambda r^n,$$

avec $r=e^{\ell/2}\in[0,1[$ et λ une constante. Par comparaison avec une série géométrique convergente, on a montré que la série de terme général $f(n)$ converge.

(c) On suppose que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=1/(x+1)^\alpha$. Alors $f'(x)/f(x)=-\alpha/(x+1)$ tend vers $\ell=0$ quand x tend vers l'infini. Or la nature de la série (de Riemann) de terme général $f(n)$ dépend de la position de α par rapport à 1 : ce cas contient des séries convergentes et des séries divergentes.

587. **RMS 2011 1086 CCP PSI**

Soit $a > 0$.

(a) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2}$ en posant $t = \tan x$. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2}$.

(b) Étudier la suite de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3(\sin x)^2}$.

Solution. — La deuxième question me paraît sans rapport avec la première, même si l'on remplace *suite* par *série*. A reprendre ? ?

(a) La fonction $\varphi\colon t \in [0, +\infty[\mapsto \arctan(t) \in [0, \pi/2[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Dans l'intégrale de l'énoncé, considérée comme une intégrale impropre sur $[0, \pi/2[$, on peut donc effectuer le changement de variable $x = \varphi(t)$. Compte-tenu de ce que $(\sin x)^2 = \frac{t^2}{1+t^2}$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+(1+a^2)\frac{t^2}{1+t^2})} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(2+a^2)t^2};$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \left[\arctan\left(\sqrt{2+a^2}\, t\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2+a^2}}.$$

La fonction $f\colon x \in [0, \pi] \mapsto \frac{1}{1+(1+a^2)(\sin x)^2}$ vérifie $\forall x \in [0, \pi],\ f(\pi - x) = f(x)$. Le changement de variable $x = \pi - y$ dans l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ montre qu'elle vaut $\int_0^{\pi/2} f(y)\,\mathrm{d}y$. On en déduit que

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a^2)(\sin x)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2+a^2}}.$$

(b) La translation de la variable $x = n\pi + y$ montre que $u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{1+(n\pi+y)^3(\sin y)^2}$.

Étude de la suite de terme général u_n. On pose $f_n\colon y \in]0, \pi[\mapsto \frac{1}{1+(n\pi+y)^3(\sin y)^2}$, ce qui définit une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, \pi[$. De plus, on dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in]0, \pi[,\ |f_n(y)| \leqslant \varphi(y) := \frac{1}{1+(\sin y)^2}$, avec φ intégrable sur $]0, \pi[$. Le théorème de convergence dominée montre alors que

$$\lim u_n = 0.$$

Étude de la série de terme général u_n. On pose $\psi\colon x \in [1, +\infty[\mapsto x^3 - (1 + x^{5/2})$. Cette fonction est dérivable avec $\forall x \in [1, +\infty[,\ \psi'(x) = 3x^2 - (5/2)x^{3/2} = 3x^{3/2}(\sqrt{x} - 5/6) > 0$. La fonction ψ est donc croissante sur $[1, +\infty[$, et en particulier $\forall x \geqslant 3,\ \psi(x) \geqslant \psi(3) = 26 - 3\sqrt{3} > 20 > 0$, puisque $\sqrt{3} < 2$.

Or, pour tout $y \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$, on a $(n\pi + y)^3 \geqslant (n\pi)^3 \geqslant 1 + (n\pi)^{5/2}$, en vertu de l'inégalité $\pi > 3$ et de la minoration de ψ que l'on vient d'établir. La première question et la positivité de l'intégrale montrent alors que

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(1+(n\pi)^{5/2})(\sin x)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2+(n\pi)^{5/2}}}.$$

Le majorant étant équivalent à $\frac{\lambda}{n^{5/4}}$ pour une certaine constante $\lambda > 0$, on conclut, par comparaison avec une série de Riemann convergente, que $\sum u_n$ converge.

Remarque. — On peut majorer u_n plus simplement, sans utiliser la première question : comme $\sin x \geqslant 1/2$ sur le segment $[\pi/6, 5\pi/6]$, on a $u_n \leqslant \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{\mathrm{d}y}{1+(n\pi)^3/4} = \frac{8\pi/3}{4+n^3\pi^3} \sim \frac{\mu}{n^3}$ pour une certaine constante $\mu > 0$, et on conclut plus rapidement. Je ne vois donc pas le lien entre les deux questions. Ai-je manqué quelque chose ? ?

588. **RMS 2011 1087 CCP PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon x \mapsto nxe^{-x^2\ln(n)}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. — On étudie la convergence simple. La fonction f_n étant impaire, il suffit de mener l'étude sur $[0, +\infty[$, et même sur $]0, +\infty[$ puisque $f_n(0) = 0$. Si $x > 0$, on écrit que $f_n(x) = nxn^{-x^2} = xn^{1-x^2}$, donc $(f_n(x))$ converge vers zéro si $x > 1$, et vers 1 si $x = 1$. En revanche, si $0 < x < 1$, la suite de terme général $f_n(x)$ diverge vers $+\infty$. On conclut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction $\chi_{\{1\}}$ indicatrice du singleton $\{1\}$ sur $[1, +\infty[$.

On étudie la convergence uniforme. Elle ne l'est pas sur $]1, +\infty[$: sinon, le théorème d'interversion des limites donnerait

$$1 = \lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to1^+} f_n(x) = \lim_{x\to1^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to1^+} 0 = 0.$$

Elle ne l'est pas *a fortiori* sur $[1,+\infty[$ (on peut aussi argumenter en invoquant la continuité des f_n et le non continuité de la limite simple). En revanche, si $a>0$, on va montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$, en étudiant les variations de f_n. Pour tout entier $n\geqslant 2$ et tout réel $x\geqslant 1$, on a

$$f_n'(x)=ne^{-x^2\ln(n)}(1-2x\ln(n))\leqslant ne^{-x^2\ln(n)}(1-2\ln 2)<0,$$

puisque $\ln 2\approx 0,6$. Par suite, f_n est décroissante et positive sur $[a,+\infty[$, donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=f_n(a),$$

qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, ce qui achève l'exercice.

589. **RMS 2011 1089 CCP PSI**

Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n\colon t\mapsto 1/(1+(nt)^2)$. Montrer que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Solution. — Toutes les fonctions f_n sont paires : on mènera l'étude sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f_n(0)=1$, la série $\sum f_n(0)$ diverge. Si $t>0$ est fixé, on a $f_n(t)\sim/(t^2n^2)$ quand n tend vers $+\infty$, donc (équivalents positifs) $\sum f_n(t)$ converge. On en déduit que $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
On fixe $a>0$. Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_n'(t)&=-2n^2\frac{t}{(1+(nt)^2)^2},\\
f_n''(t)&=-2n^2\left[\frac{1}{(1+(nt)^2)^2}-\frac{4n^2t^2}{(1+(nt)^2)^3}\right]=2n^2\frac{3n^2t^2-1}{(1+(nt)^2)^3}.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation de f_n' sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$1/n\sqrt{3}$		$+\infty$
$f_n''(x)$	$-2n^2$	$-$	0	$+$	0
$f_n'(x)$	0		$-9n\sqrt{3}/24$		0

Pour n assez grand, on a $1/n\sqrt{3}<a$, donc f_n' est négative et croissante sur $[a,+\infty[$. Par suite, pour n assez grand,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}=-f_n(a)=\frac{2n^2a}{(1+(na)^2)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{an^2}$$

Alors la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[an+\infty[$. Comme $\sum f_n$ y converge simplement, le théorème de dérivation terme à terme affirme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et que $S'=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'$. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on en déduit par parité que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, et que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad S'(x)=-2t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(1+(nt)^2)^2}.$$

590. **RMS 2011 1090 CCP PSI**

Soit $S\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$.

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) L'application S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Solution. — On pose $f_n\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$. Comme chaque f_n est paire, on mènera l'étude sur $\mathbb{R}_+$ seulement.

(a) Comme $f_n(0)=0$, la série $\sum f_n(0)$ converge. Si $x>0$, on dispose de l'équivalent $f_n(x)\sim\frac{\ln n}{n^2}$ quand n tend vers l'infini (équivalents positifs). Comme $n^{3/2}\times\frac{\ln n}{n^2}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, la série de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$ converge, donc il en est de même de la série de terme général $f_n(x)$. On a donc montré que S est définie sur $\mathbb{R}$.
On fixe $a>0$. Comme f_n est positive et croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]}=f_n(a).$$

Il résulte de l'étude de la convergence simple que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,a]$. Comme chaque f_n est continue, on en déduit que S est continue sur $[0,a]$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité et choix arbitraire de a.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \frac{2x}{n(1+nx^2)},$$
$$f_n''(x) = \frac{2}{n}\left[\frac{1}{1+nx^2} - \frac{2nx^2}{(1+nx^2)^2}\right] = \frac{2(1-nx^2)}{n(1+nx^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variation de f_n' sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$1/\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n''(x)$	$2/n$	$+$	0	$-$	0
$f_n'(x)$	0		$1/n^{3/2}$		0

Il en résulte que $\|f_n'\|_\infty = 1/n^{3/2}$, donc que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement. Comme $\sum f_n$ converge simplement, le théorème de dérivation terme à terme affirme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)^2}.$$

591. **RMS 2011 1091 CCP PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, soit $u_n \colon x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général u_n. Pour $x \in D$, on pose $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

(b) Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D.

(c) Si $n \geqslant 2$, soit $R_n \colon x \in D \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. Montrer que $\forall x \in D$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}$.

(d) La fonction S est-elle continue sur D ? Est-elle intégrable sur D ?

Solution. — Voir aussi l'exercice 593 page 398.

(a) Si $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ diverge vers $-\infty$, donc $x \notin D$. Comme $u_n(0) = 0$, zéro appartient à D. Si $x > 0$, les comparaisons usuelles montrent que $\lim(n^2 u_n(x)) = 0$, donc $x \in D$. Finalement

$$D = \mathbb{R}_+.$$

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln n}(1-nx).$$

On en déduit le tableau de variations de u_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$1/n$		$+\infty$
$u_n'(x)$	$1/\ln n$	$+$	0	$-$	0
$u_n(x)$	0		$e^{-1}/(n\ln n)$		0

On en déduit que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = e^{-1}/(n\ln n)$. Or la série (de Bertrand) de terme général $1/(n\ln n)$ diverge. En effet, la fonction $f \colon t \in [2,+\infty[\mapsto 1/(t\ln t)$ est continue, positive et décroissante ; le théorème de comparaison série–intégrale affirme que la série $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n\ln n)$est de même nature que l'intégrale $\int_{[2,+\infty[} f$ et

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. On conclut qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur D.

(c) Comme $R_n(0) = 0$ vérifie l'inégalité demandée, on raisonnera dans cette question sur $D \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \geqslant n+1$, on a $\frac{1}{\ln k} \leqslant \frac{1}{\ln n}$. On en déduit (somme d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in]-1,1[$) que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{x}{\ln n} \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{\ln n} \frac{x}{e^x - 1} \leqslant \frac{\varphi(x)}{\ln n},$$

où l'on a posé $\varphi(x) := x/(e^x - 1)$. Il suffit alors de montrer que $\varphi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisqu'à l'évidence φ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2},$$

et si l'on appelle $N(x) = e^x - 1 - xe^x$ le numérateur de $\varphi'(x)$, on a $N'(x) = -xe^x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, N décroît, et comme $N(0) = 0$, on conclut que φ' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_0 \varphi = 1$, on a bien établi que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que

$$\forall x \in D, \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}.$$

(d) La question précédente montre que le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément vers zéro, donc que cette série de fonctions converge uniformément sur D. Comme chaque u_n est continue, on en déduit que la somme S est continue sur D.
On calcule ensuite $\int_{[0,+\infty[} |u_n| = \int_{[0,+\infty[} u_n$ par intégration par parties (qu'il faudrait effectuer sur un segment $[0,a]$ pour faire tendre ensuite la borne a vers l'infini) :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-x\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}[e^{-nx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de terme général $\sum \int_{[0,+\infty[} |u_n| = \sum \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge, comme la série de fonctions continues par morceaux $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux (on vient de le voir), le théorème de permutation série-intégrale impropre montre que S est intégrable sur D et que

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

592. **RMS 2011 1092 CCP PSI**

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

Solution. — On note R rayon de convergence cherché, et on pose $u_n(x) = \arctan(n^a)x^n$.
Comme $|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}|x|^n$ pour tous a, n et x, on conclut que la série converge si $|x| < 1$, donc que $R \geqslant 1$.
Soit maintenant x tel que $|x| > 1$. On détermine un équivalent pour n tendant vers l'infini.
– Si $a > 0$, on a $|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{2}|x|^n$.
– Si $a = 0$, on a $|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{4}|x|^n$.
– Si $a < 0$, on a $|u_n(x)| \sim n^a|x|^n$
Dans les trois cas, $|u_n(x)|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc la série diverge. Finalement,

$$R = 1.$$

593. **RMS 2010 1007 CCP PSI**

Soient $f\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ et $g\colon t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{\ln n}$. Déterminer les domaines de définition de f et de g. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 591 page 397.
La suite (respectivement la série) de terme général $1/\ln n$ est convergente (respectivement divergente), ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} z^n/\ln n$ vaut 1. Comme $\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n/\ln n$ est convergente (par application du théorème spécial des séries alternées), l'ensemble de définition de f est $[-1,1[$.
Il est clair que g est définie en zéro. On suppose $t \neq 0$. Si $x = e^{-t}$, on constate que la série définissant $g(t)$ converge si et seulement si la série définissant $f(x)$ converge, c'est-à-dire si $-1 \leqslant e^{-t} < 1$, ou encore si $t > 0$. Finalement, g est définie sur $\mathbb{R}_+$.
On sait que la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence : c'est le cas de f sur $]-1,1[$. Comme $\exp(-t) \in]-1,1[$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et comme $g(t) = tf(\exp(-t))$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et produit.

594. **RMS 2008 983 CCP PSI**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.

(a) Montrer que la série entière de terme général $a_n x^n/n!$ a un rayon de convergence infini. On note f sa somme.

(b) Si $t > 1$, montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n/t^{n+1}$.

Solution. —

(a) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$. Alors $|a_n x^n/n!| \leqslant M|x|^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{C}$. Comme la série de terme général $|x|^n/n!$ converge pour tout x complexe, on en déduit qu'il en est de même pour la série étudiée ici, donc que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n/n!$ est infini.

(b) On pose $f_n(x) = a_n x^n e^{-tx}/n!$ pour tout $(n,t,x) \in \mathbb{N}\times]1,+\infty[\times\mathbb{R}_+$. Chaque f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On établit ensuite une relation de récurrence par intégration par parties : pour $n \geqslant 1$,

$$I_n(t) := \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \left[-x^n \frac{e^{-tx}}{t}\right]_{x=0}^{+\infty} + \frac{n}{t}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)\,.$$

La valeur initiale $I_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}$ permet alors de montrer que $I_n(t) = n!/t^{n+1}$, donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall t \in]1,+\infty[\,,\qquad \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{t^{n+1}} \leqslant \frac{M}{t^{n+1}}\,.$$

On constate alors que les f_n sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$, que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction continue $x \mapsto f(x)e^{-tx}$, et enfin (hypothèse forte démontrée ci-dessus car la raison $1/t$ appartient à $]0,1[$), que la série $\sum \int_{[0,+\infty[} |f_n|$ converge. On peut appliquer le théorème de permutation série–intégrale impropre :

$$\forall t > 1,\qquad \int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}\,.$$

595. **RMS 2007 917 CCP PSI**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

(a) Déterminer le domaine de définition de $S(x)$.

(b) Calculer $S(x)$.

Solution. — On pose $T(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(1-x)^n}{n}$ et $U(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

(a) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{y^n}{n}$ vaut 1, et la série converge quand $y = -1$ (série alternée), et diverge quand $y = 1$. Par suite $T(x)$ converge si et seulement si $-1 \leqslant 1-x < 1$, c'est-à-dire $x \in]0,2]$.
Pour la même raison, $U(x)$ converge si et seulement si $x \neq 0$ et $-1 \leqslant \frac{x-1}{x} < 1$, c'est-à-dire $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$ (attention : il faut résoudre l'encadrement $-1 \leqslant \frac{x-1}{x} < 1$ en distinguant le cas $x > 0$ du cas $x < 0$).
Finalement, $S(x)$ est définie si et seulement si $x \in [\frac{1}{2},2]$.

(b) On sait que $-\ln(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}$ pour tout $y \in]-1,1[$ (dériver $-\ln(1-y)$ pour trouver $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ sur $]-1,1[$. Et on sait que les sommes séries entières ont des primitives calculables terme à terme sur leur intervalle ouvert de convergence, d'où le résultat. De plus, comme la série primitive $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge (pour $y=-1$), le théorème de convergence radiale d'Abel dit que la somme de la série est continue y compris en -1, donc que la formule $-\ln(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}$ est encore valable en $y = -1$. Alors

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},2\right],\quad S(x) = -\ln(1-(1-x)) - \ln\left(1-\frac{x-1}{x}\right) = -\ln x - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

596. **RMS 2011 1093 CCP PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/(\operatorname{ch} x)^n$.

(a) Justifier l'existence de u_n.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.

(c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

Solution. — On pose $f_n\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1/(\operatorname{ch} x)^n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_1(x) \leqslant 2e^{-x}$, avec $x \mapsto e^{-x}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale u_n.

(b) Comme $\operatorname{ch} x > 1$ pour tout $x > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, on a déjà établi à la question précédente la domination $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) := 2e^{-x}$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim u_n = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = 0\,.$$

(c) Comme $\lim u_n = 0$, le rayon de convergence R recherché vérifie $R \geqslant 1$. Comme $\operatorname{ch} x \leqslant e^x$, on a la minoration $u_n \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = 1/n$, ce qui montre que la série de terme général u_n diverge, donc que $R \leqslant$. Finalement

$$R = 1\,.$$

597. **RMS 2008 986 CCP PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

Solution. — Comme $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{t^n}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\,\cdot$$

On en déduit, z étant un nombre complexe, que la suite de terme général $a_n z^n$ converge vers zéro si $|z| < 1$ et n'est pas bornée si $|z| > 1$. Par conséquent, $R = 1$.

On pose $f_n(t) = (xt)^n/(1+t^2)$ pour tout $(n,t,x) \in \mathbb{N} \times [0,1] \times]-1,1[$, et on vérifie les hypothèses du théorème de permutation séries–intégrales sur un segment, en l'occurrence $[0,1]$:

– Chaque f_n est continue sur $[0,1]$.
– La série de fonctions $t \mapsto \sum f_n(t)$ converge normalement sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto 1/(1-tx)(1+t^2)$, puisque $\|f_n\|_\infty \leqslant |x|^n$ et que $|x| < 1$.

Par conséquent,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-xt)(1+t^2)}\,\cdot$$

Le calcul s'effectue ensuite par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{x^2}{1-xt} + \frac{xt+1}{1+t^2}\right]\,\cdot$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \frac{1}{1+x^2}\left[-x\ln(1-x) + \frac{x}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right]\,\cdot$$

598. **RMS 2010 1008 CCP PSI**

La fonction $f\colon x \mapsto \ln(6-5x+x^2)$ est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Si tel est le cas, donner son développement.

Solution. — La factorisation $6-5x+x^2 = (3-x)(2-x) = 6(1-\frac{x}{3})(1-\frac{x}{2})$ montre que $f(x) = \ln 6 + \ln(1-\frac{x}{3}) + \ln(1-\frac{x}{2})$ au voisinage de zéro, de sorte que $1-\frac{x}{3}$ et $1-\frac{x}{2}$ soient strictement positifs. Le développement du cours $\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$ pour $|u| < 1$ montre alors que

$$\forall x \in]-2,2[, \quad f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^{-n} + 2^{-n}\right) x^n\,.$$

599. **RMS 2010 1010 CCP PSI**

(a) Montrer que la série de terme général $1/(n^2+1)$ est convergente.

(b) Soit $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(1+k^2)$. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Solution. —

(a) Comme $0 \leqslant 1/(n^2+1) \leqslant 1/n^2$ et que la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, c'est fait.

(b) Le nombre $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/(1+k^2)$ est bien défini, puisque c'est le reste d'une série convergente. Comme $f\colon t \mapsto 1/(1+t^2)$ est continue et décroissante, une comparaison série intégrale fournit

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leqslant a_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan n\,.$$

La relation $\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ valable pour tout $x > 0$ et l'équivalent en zéro $\arctan u \sim u$ montrent ensuite que $\arctan[1/(n+1)] \leqslant a_n \leqslant \arctan(1/n)$, donc que $a_n \sim 1/n$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (respectivement la série) de terme général a_n converge (respectivement diverge). Ceci prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1, et répond aux questions (b) et (c).

600. **RMS 2010 1012 CCP PSI**

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'existence de u_n. Déterminer la limite de (u_n).

Solution. — Dans ce premier paragraphe, les équivalents portent sur la variable t. On note f_n la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}$. L'équivalent en zéro $f_n(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ montre que f_n est intégrable sur $]0,1]$. L'équivalent en l'infini $f_n(t) \sim \frac{1}{t^n}$ montre que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $n \geqslant 2$. Finalement, u_n existe si et seulement si $n \geqslant 2$.

Dans ce deuxième paragraphe, les limites portent sur la variable n. Si $t \in]0,1[$, la suite de terme général $f_n(t)$ converge vers $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Si $t = 1$, la suite de terme général $f_n(t)$ est constante et vaut 1. Si $t > 1$, la suite de terme général $f_n(t)$ converge vers zéro. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f\colon t \in]0,+\infty[\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1,\\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

En majorant $f_n(t)$ par $(1+t^n)/t^{2n} \leqslant \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}$ pour $t > 1$, et par $\frac{2}{\sqrt{t}}$ pour $t \leqslant 1$ on prouve l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall t \in]0,+\infty[, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1,\\ \frac{2}{t^2} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\,.$$

601. **RMS 2011 1095 CCP PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x/\sqrt{x^n + x^{-n}}$.

(a) L'existence de I_n est-elle justifiée pour tout n ?

(b) Étudier la convergence de la suite (I_n).

(c) Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

Solution. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/\sqrt{x^n + x^{-n}}$.

(a) La fonction constante $f_0 = 1/\sqrt{2}$ n'est pas intégrable. Si $n \geqslant 1$, la fonction f_n a une limite nulle en zéro, donc est intégrable sur $]0,1]$. L'équivalent $f_n(x) \sim 1/x^{n/2}$ en $+\infty$ montre que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $n > 2$. Finalement, I_n converge si et seulement si

$$n \geqslant 3\,.$$

(b) La suite $(f_n)_{n\geqslant 3}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[,\\ 1/\sqrt{2} & \text{si } x = 1,\\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

Comme $y + y^{-1} \geqslant 2$ pour tout $y > 0$, on a $f_n(x) = (y+y^{-1})^{-1/2} \leqslant 2^{-1/2}$ pour tout $x > 0$ (on a posé $y = x^n$). Par ailleurs, $f_n(x) \leqslant 1/\sqrt{x^n} \leqslant 1/x^{3/2}$ pour tout $x > 0$ et tout $n \geqslant 3$. On en déduit l'hypothèse de domination $\forall x > 0$, $\forall n \geqslant 3$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, où φ est la fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^{-1/2} & \text{si } x \in]0,1],\\ 1/x^{3/2} & \text{si } x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée montre alors que

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(c) La fonction $h\colon y \mapsto y^{1/n}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. On peut donc effectuer le changement de variable $x = h(y)$ dans I_n :

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{y^{-1+1/n}}{\sqrt{y+y^{-1}}}\,\mathrm{d}y\,.$$

On pose $g_n\colon y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto y^{-1+1/n}/\sqrt{y+y^{-1}}$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 3}$ converge simplement vers la fonction continue $g\colon y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto y^{-1}/\sqrt{y+y^{-1}} = 1/\sqrt{y^3+y}$. Si $0 < y \leqslant 1$, on majore $y^{1/n}$ par 1, et si $y > 1$, on majore $y^{1/n}$ par $y^{1/3}$. On majore enfin $1/\sqrt{y+y^{-1}}$ par $1/\sqrt{y}$ de sorte que la domination suivante soit satisfaite :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\quad \forall n \geqslant 3,\quad |g_n(y)| \leqslant \psi(y) = \begin{cases} 1/\sqrt{y} & \text{si } y \in\,]0,1],\\ y^{-1+1/3}/\sqrt{y} = 1/y^{7/6} & \text{si } y \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

La fonction ψ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne $\lim\left(\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$. On en déduit que

$$I_n \sim \frac{c}{n},\quad \text{avec}\quad c = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^3+y}}\,.$$

L'intégrale c n'a pas d'expression simple à l'aide des fonctions usuelles vues en classe préparatoire.

602. **RMS 2010 1014 CCP PSI**

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $g\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.

(b) Exprimer g'' en fonction de g et de f.

Solution. — On résout simultanément les deux questions. Soit M tel que $\forall u \in \mathbb{R}$, $|f(u)| \leqslant M$. Alors $|e^{-|t|} f(x-t)| \leqslant Me^{-|t|}$ pour tout $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$. Comme $t \mapsto e^{-|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, cela prouve que g est définie sur $\mathbb{R}$.

On effectue ensuite le changement de variable $u = x - t$, qui permet de renvoyer la variable x sur l'exponentielle (la fonction f n'est pas supposée dérivable) :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) &= \int_{+\infty}^{-\infty} e^{|x-u|} f(u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-u|} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{u-x} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_x^{+\infty} e^{x-u} f(u)\,\mathrm{d}u\,,\\ &= \underbrace{e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{u} f(u)\,\mathrm{d}u}_{g_1(x)} + \underbrace{e^{x}\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}u}_{g_2(x)}\,.\end{aligned}$$

La valeur absolue n'étant pas dérivable, on ne peut appliquer directement le théorème de Leibniz à l'intégrale à paramètre $g(x)$, d'où la nécessité de considérer g_1 et g_2. Comme $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^u f(u)\,\mathrm{d}u$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^u f(u)$, la fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_1'(x) = -g_1(x) + e^{-x} \times e^x f(x) = -g_1(x) + f(x)$. De même, on montre que g_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_2'(x) = g_2(x) - e^x \times e^{-x} f(x) = g_2(x) - f(x)$.

Par suite, g est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -g_1(x) + g_2(x)$. Les calculs déjà faits montrent alors que g est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g''(x) = -g_1'(x) + g_2'(x) = g_1(x) - f(x) + g_2(x) - f(x) = g(x) - 2f(x)\,.$$

Remarque. — La relative simplicité des calculs repose sur le morphisme exponentiel, qui fait disparaître intégrales à paramètre. Voici l'étude d'un cas plus compliqué : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(|t|) f(t-x)\,\mathrm{d}x$, où $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est telle que φ, φ' et φ'' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et où f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On effectue là aussi le changement de variable $u = x - t$ et on obtient $g(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u-x) f(u)\,\mathrm{d}u + \int_x^{+\infty} \varphi(x-u) f(u)\,\mathrm{d}u = g_1(x) + g_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec les mêmes notations que plus haut. Pour tout $(x,y,u) \in \mathbb{R}^3$, on pose alors

$$k_1(x,u) = \varphi(u-x)f(u)\,,\qquad h_1(x,y) = \int_{-\infty}^{y} k_1(x,u)\,\mathrm{d}u\,,\qquad k_2(x,u) = \varphi(x-u)f(u)\,,\qquad h_2(x,y) = \int_y^{+\infty} k_2(x,u)\,\mathrm{d}u\,.$$

On désigne par $\iota\colon x \mapsto (x,x)$ l'injection habituelle de $\mathbb{R}$ sur la première bissectrice de $\mathbb{R}^2$. Si l'on prouve que h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g_1 = h_1 \circ \iota$ et $g_2 = h_2 \circ \iota$ seront de classe $\mathcal{C}^1$, puisque ι l'est de manière évidente et on obtiendra, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_1'(x) = \langle \operatorname{grad} h_1(x,x), \iota'(x)\rangle = \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,x)\,,\quad g_2'(x) = \langle \operatorname{grad} h_2(x,x), \iota'(x)\rangle = \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,x)\,.$$

- On fixe y et on choisit un réel a. Comme k_1 est continue par rapport à u et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x, et comme $\frac{\partial k_1}{\partial x} = -k_1$, on dispose de la domination $\left|\frac{\partial k_1}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \varphi_1(u) = Me^{u-a}$ pour tout $(x,u) \in [a,+\infty[\times]-\infty,y]$. La fonction φ_1 étant intégrable sur $]-\infty,y]$, la fonction $x \mapsto h_1(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout a, donc sur $\mathbb{R}$, avec $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{\partial k_1}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u = -h_1(x,y)$.
- De même, on montre que la fonction $x \mapsto h_2(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \int_{y}^{+\infty} \frac{\partial k_2}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u = h_2(x,y)$.
- On fixe x. La fonction $y \mapsto h_1(x,y) = \int_{-\infty}^{y} k_1(x,u)\,\mathrm{d}u$, intégrale fonction de la borne supérieure d'une fonction continue, est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = k_1(x,y) = e^{y-x}f(y)$.
- De même, la fonction $y \mapsto h_2(x,y) = \int_{y}^{+\infty} k_2(x,u)\,\mathrm{d}u$, intégrale fonction de la borne inférieure d'une fonction continue, est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) = -k_2(x,y) = -e^{x-y}f(y)$.

On en déduit que g est classe $\mathcal{C}^1$, et les formules données ci-dessus montrent que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) = \left(-\int_{-\infty}^{x} \varphi(u-x)f(u)\,\mathrm{d}u + \varphi(0)f(x)\right) + \left(\int_{x}^{+\infty} \varphi(x-u)f(u)\,\mathrm{d}u - \varphi(0)f(x)\right) = -g_1(x) + g_2(x)\,.$$

La simplification par $f(x)$ est essentielle : la fonction g est deux fois dérivable, bien que ni g_1 ni g_2 ne le soient. Pour éviter les calculs délicats qu'on a dû mener ci-dessus, il aurait fallu généraliser le théorème Leibniz au cas des intégrales $\int_I k(x,u)\,\mathrm{d}u$, où k est continue par rapport à u mais seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux par rapport à x. Les calculs déjà menés montrent enfin que g est de classe $\mathcal{C}^2$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = -g_1'(x) + g_2'(x) = g_1(x) - \varphi(0)f(x) + g_2(x) - \varphi(0)f(x) = g(x) - 2\varphi(0)f(x)\,.$$

603. **RMS 2010 1018 CCP PSI**

Soit $f\colon y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(y)$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(c) En déduire une expression de f.

Solution. —

(a) On pose $h(x,t) = e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$ pour tout x réel et tout t réel non nul, prolongée par continuité par $h(x,0) = 1$ pour tout x réel, de sorte que l'intégrale proposée soit faussement impropre en zéro. Si $x > 0$, la majoration $|h(x,t)| \leqslant e^{-xt}$ valable pour tout $t \geqslant 1$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$, donc $\mathbb{R}_+^*$ est contenu dans l'ensemble de définition de f (on peut montrer que ce dernier vaut $\mathbb{R}_+$).

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$. Soit $a > 0$. La domination $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant e^{-at}$, valable pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, et l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-at}$ sur $\mathbb{R}_+$ permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0,+\infty[$, avec

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\Im\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_{t=0}^{+\infty}\right) = -\Im\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Il en résulte l'existence d'une constante c telle que $f(x) = -\arctan x + c$ sur $]0,+\infty[$.

(b) Soit (x_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et telle que $x_n \geqslant 1$ pour tout n. Comme $|h(x_n,t)| \leqslant e^{-x_nt}$, la suite de fonctions $t \mapsto h(x_n,t)$ converge simplement vers la fonction nulle. Comme $x_n \geqslant 1$, on dispose de la domination $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^*\,, |h(x_n,t)| \leqslant e^{-t}$. L'intégrabilité de $t \mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée : la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers zéro. Ceci étant vrai pour tout suite (x_n) de limite $+\infty$, le théorème séquentiel montre que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

(c) La question (a) donne par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\pi/2 + c$. On en déduit que $c = \pi/2$, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x\,.$$

604. **RMS 2010 1020 CCP PSI**

Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(x)$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 830 page 525.

On pose $h(x,t)=e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}$ pour tout x réel et tout t réel non nul, prolongée par continuité par $h(x,0)=x$ pour tout réel x, de sorte que l'intégrale proposée soit faussement impropre en zéro. Pour tout réel x et tout réel positif t, la majoration $|h(x,t)|\leqslant e^{-t}/t$ donne l'intégrabilité de $t\mapsto h(x,t)$ sur $[1,+\infty[$, donc l'ensemble de définition de f vaut $\mathbb{R}$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=e^{-t}\cos(xt)$. La domination $|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)|\leqslant e^{-t}$, valable pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrabilité de $t\mapsto e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right)=\operatorname{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_{t=0}^{+\infty}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right)=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Il en résulte l'existence d'une constante c telle que $f(x)=\arctan x+c$ sur $\mathbb{R}$. La valeur évidente $f(0)=0$ fournit $c=0$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\arctan x\,.$$

605. **RMS 2011 1098 CCP PSI**
Soit $F\colon y\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xy}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.

(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$. En déduire une expression de F.

Solution. — On pose $f\colon(y,x)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\mapsto e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$.

(a) Comme $\lim_{x\to0}f(y,x)=1$ pour tout $y>0$, l'intégrale proposée est faussement impropre en zéro. La majoration $|f(y,x)|\leqslant e^{-xy}$ pour tout $(y,x)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ donne l'intégrabilité de $x\mapsto f(y,x)$ sur $[1,+\infty[$, donc de est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)=-e^{-xy}\sin x$. On fixe $a>0$. La domination $|\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)|\leqslant e^{-ax}$, valable pour tout $(y,x)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrabilité de $x\mapsto e^{-ax}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, permettent d'appliquer le théorème de Leibniz : la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $y\in\mathbb{R}_+^*$,

$$F'(y)=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x=-\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(-y+i)x}\,\mathrm{d}x\right)=-\operatorname{Im}\left[\frac{e^{(-y+i)x}}{-y+i}\right]_{x=0}^{+\infty}=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{-y+i}\right)=-\frac{1}{1+y^2}\,.$$

(b) Soit $(y_n)_{n\geqslant0}$ une suite de réels plus grands que 1 et de limite $+\infty$. La suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant0}$ définie par $h_n\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto f(y_n,x)$ converge simplement vers la fonction nulle. L'hypothèse de domination $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^*,\ |h_n(x)|\leqslant e^{-x}$ (car on a supposé y_n pour tout n), permet d'appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{y\to+\infty}F(y)=0\,.$$

D'après la question (a), il existe une constante c telle que $F(y)=-\arctan y+c$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La limite qu'on vient de calculer montre que $c=\pi/2$, donc

$$\forall y\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(y)=-\arctan y+\frac{\pi}{2}=\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\,.$$

606. **RMS 2010 1022 CCP PSI**
Domaine de définition et calcul de $F\colon s\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-st}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — On pose $f_n(t)=e^{-st}t^n/(n!)^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$. Comme $|t^n/(n!)^2|\leqslant|t|^n/n!$, la série entière $\sum_{n\geqslant1}t^n/(n!)^2$ a un rayon de convergence infini, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant0}f_n$ converge simplement vers la fonction $f\colon t\mapsto e^{-st}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$, et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier est continue par morceaux.
Si $s\leqslant0$, alors $f(t)\geqslant1$, donc l'intégrale diverge, et $D_F\subset\mathbb{R}_+^*$. On va montrer que $D_F=\mathbb{R}_+^*$. Soit $s>0$. La fonction f_n est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et une intégration par parties fournit, pour tout $n\geqslant1$:

$$I_n:=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{e^{-st}t^n}{s(n!)^2}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}\frac{t^{n-1}}{n(n-1)!^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{sn}I_{n-1}\,.$$

Comme $I_0=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,\mathrm{d}t=1/s$, on déduit de la relation ci-dessus que $I_n=1/(s^{n+1}n!)$. Alors la série de terme général $I_n=\int_{\mathbb{R}_+}|f_n|$ converge, et le théorème de permutation séries-intégrales sur un intervalle quelconque affirme que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc que $F(s)$ existe et vaut

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{n+1}n!}=\frac{1}{s}\exp\left(\frac{1}{s}\right)\,.$$

607. **RMS 2010 1023 CCP PSI**

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

(a) Justifier la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I à l'aide de valeurs de la fonction ζ.

(b) Exprimer $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t+\cdots+t^n)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la fonction ζ.

Solution. —

(a) La fonction $f\colon t \in]0,1[\mapsto \ln(1-t)/t$ est prolongeable par continuité en zéro en posant $f(0) = -1$, donc l'intégrale I est faussement impropre en zéro. En 1, on dispose de l'équivalent entre fonctions de signe fixe $f(t) \sim \ln(1-t)$. Comme ln est intégrable sur $]0,1]$, un simple changement de variable affine montre que f est finalement intégrable sur $]0,1[$. Pour tout $t \in]0,1[$, le développement en série entière du logarithme montre que $f(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(-t)^n/n = -\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}/n$. On pose $f_n\colon t \in]0,1[\mapsto t^{n-1}/n$ pour tout $n \geqslant 1$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers la fonction continue f sur $]0,1[$. Chaque f_n est un monôme donc est intégrable sur $]0,1[$ avec $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$. Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, le théorème de permutation séries-intégrales sur un intervalle quelconque affirme que f est intégrable sur $]0,1[$, donc que I existe (ce que l'on savait déjà) et vaut

$$I = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\zeta(2)\,.$$

(b) On pose $g_n(t) = \ln(1+t+\cdots+t^n)/t$ pour tout $t \in]0,1[$. Comme g_n a pour limite 1 en zéro, l'intégrale I_n est faussement impropre donc converge. Par ailleurs, $g_n(t) = \ln[(1-t^{n+1})/(1-t)]/t = h_n(t) - f(t)$, où l'on a posé $h_n\colon t \in]0,1[\mapsto \ln(1-t^{n+1})/t$. La fonction h_n est intégrable sur $]0,1[$, et le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]0,1[$ sur lui-même $t = u^{1/(n+1)}$, pour lequel $\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}u^{-1+1/(n+1)}\,\mathrm{d}u$, conduit à

$$\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{I}{n+1}\,\cdot$$

On en déduit que

$$I_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t+\cdots+t^n)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{I}{n+1} - I = \frac{n}{n+1}\zeta(2)\,.$$

608. **RMS 2010 1024 CCP PSI**

Soit f la fonction paire et 2π–périodique définie par : $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = x^2$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Solution. — Les $b_n(f)$ sont tous nuls, $a_0(f) = (2/\pi)\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi^2/3$, et

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1,\quad a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,,\\ &= -\frac{4}{n\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,\cdot\end{aligned}$$

Comme la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de convergence normale s'applique et, en particulier $x^2 = \pi^2/3 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos(nx)/n^2$ pour tout $x \in [0,\pi]$. En substituant successivement x par zéro puis par π, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,\cdot$$

Comme la fonction g est continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{5} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\quad\text{d'où}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,\cdot$$

609. **RMS 2011 1099 CCP PSI**

Soit $f\colon x \mapsto \max\{\sin x, 0\}$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(kx)}{4k^2-1}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 421 page 295.

(a) La fonction f n'a pas de propriété de parité. On calcule

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\sin((n+1)t)-\sin((n-1)t)]\,\mathrm{d}t\,,\\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\cos((n+1)t)}{n+1}-\dfrac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^\pi = -\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}-\dfrac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = -\dfrac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)}\,, & \text{si } n\neq 1,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi = 0, & \text{si } n=1,\end{cases}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi(4k^2-1)}\,, & \text{si } n=2k \text{ est pair,}\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\sin(nt)\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\cos((n-1)t)-\cos((n+1)t)]\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\sin((n-1)t)}{n-1}-\dfrac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^\pi = 0\,, & \text{si } n\neq 1,\\ \dfrac{1}{2\pi}\left[t-\dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi = \dfrac{1}{2}\,, & \text{si } n=1.\end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite, la série de Fourier de f converge normalement, donc simplement, vers f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kx)\,.$$

En appliquant à $\sin x$ la relation $|u|=\max\{0,u\}+\max\{0,-u\}$, valable pour tout réel u, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x| = f(x)+f(-x)$, puisque le sinus est une fonction impaire. Après simplification, il en résulte que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-2\sin^2(kx)}{4k^2-1}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}+\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(kx)}{4k^2-1}\,.$$

En substituant x par zéro, on obtient $0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}$, puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\sin x|=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(kx)}{4k^2-1}\,.$$

610. RMS 2010 1026 CCP PSI

Soit (E) : $(1+x)y'-2y=0$.

(a) Déterminer l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de (E). En donner une base ainsi que la dimension.

(b) Déterminer l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de (E). En donner une base ainsi que la dimension.

Solution. — On commence par résoudre (E) sur les intervalles $I_1=]-\infty,-1[$ et $I_2=]-1,+\infty[$. On trouve que les solutions sont les fonctions d'expression

$$y(x)=\begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x\in I_1,\\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x\in I_2,\end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles. Une telle fonction est toujours prolongeable par continuité en -1 en posant $y(-1)=0$, quelles que soient les valeurs de k_1 et k_2.

(a) On cherche les couples (k_1,k_2) tels que la fonction y ci-dessus soit dérivable en -1. Comme

$$y'(x)=\begin{cases} 2k_1(x+1) & \text{si } x\in I_1,\\ 2k_2(x+1) & \text{si } x\in I_2,\end{cases}$$

on conclut que $\lim_{-1} y' = 0$. La continuité de y en -1 et le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montrent que y est de classe $\mathcal{C}^1$ quelles que soient les valeurs de k_1 et k_2, avec $y'(-1) = 0$ (ceci détermine $\mathcal{F}$: voir la question suivante). Comme

$$y''(x) = \begin{cases} 2k_1 & \text{si } x \in I_1, \\ 2k_2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

On conclut que $\lim_{-1} y'$ existe et est finie si et seulement si $k_1 = k_2$. De la même manière que précédemment, on conclut que, sous cette condition, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Finalement, si h est la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)^2$,

$$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(h) \quad \text{est une droite.}$$

(b) L'espace $\mathcal{F}$ a déjà été déterminé à la question précédente. Si χ_I désigne la fonction indicatrice de l'intervalle I et h la même fonction que ci-dessus,

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(h\chi_{I_1}, h\chi_{I_2}) \quad \text{est un plan.}$$

611. **RMS 2008 988 CCP PSI**

Soit (E) : $2x(x+1)y' - (x-1)y = (x+1)$. Donner les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-1, +\infty[$.

Solution. — Sur chacun des intervalles $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle (E) équivaut à $y' + f(x)y = 1/2x$, où $f(x) = (1-x)/2x(1+x)$. Une décomposition en éléments simples fournit une primitive F de f, valable sur I_1 et I_2 :

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1}, \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln(1+x), \quad \exp(F(x)) = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x}.$$

En multipliant par la fonction jamais nulle $\exp(F)$, on trouve que (E) équivaut sur I_1 et I_2 à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\exp(F(x))y(x)] = \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)} = \frac{\varepsilon}{2(x+1)\sqrt{\varepsilon x}},$$

où ε est le signe de x. Le calcul d'une primitive de $t \mapsto \varepsilon/2(1+t)\sqrt{\varepsilon t}$ s'effectue par le changement de variable $t = \varepsilon u^2$ avec $u > 0$:

$$\int_{\text{cte}}^{x} \frac{\varepsilon}{2(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\text{cte'}}^{\sqrt{\varepsilon x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\varepsilon u^2} = \begin{cases} \mathrm{Argth}\sqrt{-x} + \mathrm{cte}_1 & \text{si } x \in I_1, \\ \arctan\sqrt{x} + \mathrm{cte}_2 & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Par suite, (E) équivaut à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\exp(F(x))y(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{Argth}\sqrt{-x}\,]$ sur I_1 et à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\exp(F(x))y(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\arctan\sqrt{x}\,]$ sur I_2 et on en déduit que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}\left(k_1 + \mathrm{Argth}\sqrt{-x}\right) & \text{si } x \in I_1, \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\left(k_2 + \arctan\sqrt{x}\right) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

Il existe une solution de (E) sur $]-1, +\infty[$ si et seulement s'il existe un couple (k_1, k_2) telle que la fonction ci-dessus soit prolongeable par continuité en zéro et que ce prolongement soit dérivable en zéro. Comme $\mathrm{Argth}\sqrt{-x}/\sqrt{-x}$ et $\arctan\sqrt{x}/\sqrt{x}$ tendent vers 1 quand x tend vers zéro, le prolongement par continuité équivaut à $k_1 = k_2 = 0$. L'unique et fonction solution serait donnée par

$$z(x) = \begin{cases} (x+1)\dfrac{\mathrm{Argth}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in I_1, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ (x+1)\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Des développements limités donnent $\mathrm{Argth}\sqrt{-x}/\sqrt{-x} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ à gauche de zéro et $\arctan\sqrt{x}/\sqrt{x} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ à droite de zéro, donc $z(x) = 1 + x + \mathrm{o}(x)$ à gauche comme à droite de zéro, donc z est bien dérivable en zéro, avec $z'(0) = 1$.

Finalement, z est l'unique solution de (E) sur $]-1, +\infty[$.

On peut remarquer que z donne en fait l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

612. **RMS 2011 1101 CCP PSI**

Soit (E): $xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

(a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x^2$.

(b) Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) sur $]0, 1[$ si et seulement si $x \mapsto -y(-x)$ est solution de (E) sur $]-1, 0[$.

(c) Déterminer les solutions de (E) sur $]-1,1[$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 749 page 483.

(a) Parallèlement au changement de variable $t = 1 - x^2$, avec $t \in]0,1[$ puisque $x \in]0,1[$, on effectue un changement de fonction inconnue en introduisant Y de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $y(x) = Y(t) = Y(1-x^2)$. On calcule alors les dérivées successives de y en fonction de celles de Y et de x :

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(1-x^2), \\ y'(x) &= -2x\,Y'(1-x^2), \\ y''(x) &= 4x^2Y''(1-x^2) - 2Y'(1-x^2). \end{aligned}$$

La fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction Y est solution de $4x^3Y''(1-x^2) - 2xY'(1-x^2) + 2xY'(1-x^2) - 4x^3Y(1-x^2) = 4x^3(Y'' - Y)(1-x^2) = 0$. Comme x n'est jamais nul dans cette question et $t = 1-x^2$, l'équation différentielle satisfaite par Y et équivalente à (E) sur $]0,1[$ est finalement $Y''(t) - Y(t) = 0$. Ses solutions sont les fonctions telles que

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \in]0,1[\,, \quad Y(t) = A\operatorname{ch} t + B\operatorname{sh} t.$$

Comme $y(x) = Y(1-x^2)$, on en déduit que les solutions de (E) sur $]0,1[$ sont les fonctions du de la forme

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in]0,1[\,, \quad y(x) = A\operatorname{ch}(1-x^2) + B\operatorname{sh}(1-x^2)\,.$$

(b) On suppose que $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) sur $]0,1[$. Alors la fonction $z\colon x \mapsto -y(-x)$ est définie sur $]-1,0[$, et on a $z'(x) = y'(-x)$ et $z''(x) = -y''(-x)$ pour tout $x \in]-1,0]$. Si l'on pose $u = -x \in]0,1[$, il en résulte que

$$x\,z''(x) - z'(x) - 4x^3z(x) = -x\,y''(-x) - y'(-x) + 4x^3y(-x) = u\,y''(u) - y'(u) - 4u^3y(u) = 0\,,$$

donc que z est solution de (E) sur $]-1,0[$. L'opérateur qui, à une fonction y, fait correspondre la fonction $x \mapsto -y(-x)$, étant involutif, la réciproque de l'implication qu'on vient d'établir est vraie aussi, donc l'équivalence demandée est vraie.

(c) Dans les raisonnements qui vont suivre, on utilisera implicitement le théorème de prolongement des fonctions dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$).

Soit y une solution de (E) sur $]-1,1[$. D'après les questions précédentes, il existe $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$ tel que $y(x) = A\operatorname{ch}(1-x^2) + B\operatorname{sh}(1-x^2)$ sur $]0,1[$ et $y(x) = C\operatorname{ch}(1-x^2) + D\operatorname{sh}(1-x^2)$ sur $]-1,0[$ (en vertu de la question (b), on aurait dû écrire $y(x) = -[C\operatorname{ch}(1-(-x)^2) + D\operatorname{sh}(1-(-x)^2)]$ sur $]-1,0[$, mais on a changé le nom des constantes pour ne pas surcharger les notations : $-C$ est devenu C, et $-D$ est devenu D). Enfin, l'équation différentielle, évaluée en zéro, impose que $y'(0) = 0$.

- Pour qu'une telle fonction soit deux fois dérivable, il faut d'abord qu'elle soit continue en zéro, ce qui impose que

$$A\operatorname{ch}(1) + B\operatorname{sh}(1) = C\operatorname{ch}(1) + D\operatorname{sh}(1)\,.$$

- Ensuite, il faut qu'elle soit dérivable en zéro : comme elle est déjà continue et que sa fonction dérivée admet une limite à gauche et une limite à droite en zéro, il suffit que ces deux limites soient égales entre elles et égales à zéro, puisque $y'(0) = 0$ est nécessaire. Or cette condition est satisfaite quelles que soient les valeurs des constantes A, B, C et D, car $y'(x)$ vaut $-2x[A\operatorname{sh}(1-x^2) + B\operatorname{ch}(1-x^2)]$ sur $]0,1[$ et $-2x[C\operatorname{sh}(1-x^2) + D\operatorname{ch}(1-x^2)]$ sur $]-1,0[$. La fonction y est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
- Enfin, il faut qu'elle soit deux fois dérivable en zéro. Comme il est certain que sa fonction dérivée seconde, définie sur $]-1,1[\setminus\{0\}$, admet des limites à droite et à gauche finies en zéro, il faut et il suffit que ces deux limites soient égales. On obtient $-2[A\operatorname{sh}(1) + B\operatorname{ch}(1)] = -2[C\operatorname{sh}(1) + D\operatorname{ch}(1)]$, ou encore

$$A\operatorname{sh}(1) + B\operatorname{ch}(1) = C\operatorname{sh}(1) + D\operatorname{ch}(1)\,.$$

  Si l'on considère le système formé par les deux équations ci-dessus comme un système d'inconnues C et D, son déterminant vaut $\operatorname{ch}^2(1) - \operatorname{sh}^2(1) = 1$, et les formules de Cramer donnent

$$C = \begin{vmatrix} A\operatorname{ch}(1) + B\operatorname{sh}(1) & \operatorname{sh}(1) \\ A\operatorname{sh}(1) + B\operatorname{ch}(1) & \operatorname{ch}(1) \end{vmatrix} = A\operatorname{ch}^2(1) + B\operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1) - A\operatorname{sh}^2(1) - B\operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1) = A\,,$$

  et de même $D = B$.

La réciproque étant claire, les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in]-1,1[\,, \quad y(x) = A\operatorname{ch}(1-x^2) + B\operatorname{sh}(1-x^2)\,.$$

613. **RMS 2008 989 CCP PSI**

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= 2y+z\ , \\ y' &= 3x+4z\ , \\ z' &= 3y+5x\ . \end{cases}$

SOLUTION. — Avec les notations usuelles, le système s'écrit $X' = AX$, où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\chi_A = -X^3 + 40 + 9 + 5X + 6X + 12X = -X^3 + 23X + 49$, qui n'a pas de racine rationnelle.
? ? à vérifier

Géométrie

614. **RMS 2010 1027 CCP PSI**

Dans le plan euclidien, soient A et O deux points distincts et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A. Déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle OMA lorsque M parcourt $\mathcal{C}$.

SOLUTION. — On note $R = \|\overrightarrow{OA}\|$ le rayon de $\mathcal{C}$, et on choisit le repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, i, j)$ tel que $\overrightarrow{OA} = Ri$, et on paramètre le point M par ses coordonnées $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ dans $\mathcal{R}$. On supposera que $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ pour que le triangle OMA ne soit pas plat.
La hauteur issue de M est la droite d'équation $x = R\cos\theta$. La hauteur issue de A est la droite passant par A et orthogonale au vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$: elle a donc pour équation $(x-R)\cos\theta + y\sin\theta = 0$. L'orthocentre H est l'intersection de ces deux hauteurs, donc il a pour coordonnées

$$x_H = R\cos\theta = R\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,$$
$$y_H = R\frac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta} = -tR\frac{1-t^2}{1+t^2} = -tx(t)\ ,$$

où $t = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}^*$. La parité de $t \mapsto x(t)$ et le caractère impair de $t \mapsto y(t)$ permettent d'étudier et tracer la courbe sur $\mathbb{R}_+$, puis de l'obtenir en entier par la symétrie orthogonale par rapport à Ox. On calcule

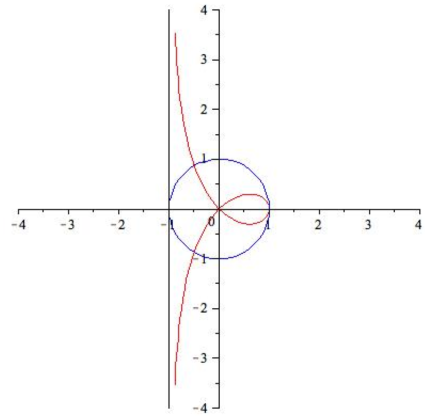
$$x'(t) = -\frac{4tR}{(1+t^2)^2}\ ,$$
$$y'(t) = -x(t) - tx'(t) = -R\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4Rt^2}{(1+t^2)^2} = R\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2}\ .$$

L'unique racine positive de y' est $\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, et on obtient le tableau de variations suivant (où $y_0 = -R\sqrt{-2+\sqrt{5}}\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{R}{2}\sqrt{-22+10\sqrt{5}}$) :

t	0		$\sqrt{-2+\sqrt{5}}$		1		$+\infty$
$x'(t)$			$-$		$-R$	$-$	
$x(t)$	R		$R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		0		$-R$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	R	$+$	
$y(t)$	$+\infty$		y_0		0		$+\infty$

Le dessin, où l'on a choisi $R = 1$, a été obtenu en Maple par les commandes suivantes :

```
with(plots):
H:=plot([(1-t^2)/(1+t^2),(1-t^2)/((1+t^2)*t),t=-4..4],-4..4,-4..4, color=red):
C:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],color=blue):
asymptote:=plot([-1,t,t=-4..4],color=black):
display({H,C,asymptote});
```

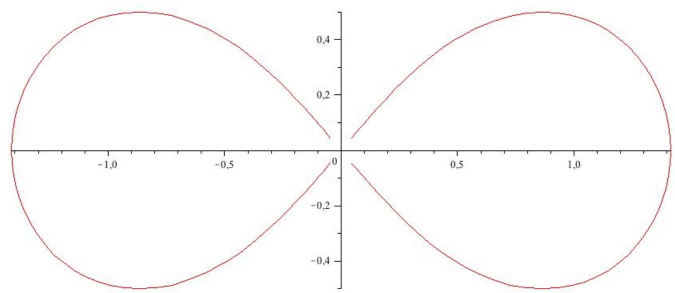


Compte-tenu de la condition $t \neq 0$, la courbe décrite par H est la strophoïde tracée en rouge, privée de l'origine.

615. **RMS 2010 1029 CCP PSI**

Dans le plan euclidien usuel, soit $A(-1,0)$ et $B(1,0)$. En utilisant les coordonnées polaires, trouver l'ensemble Γ des points M tels que $MA \times MB = 1$. Calculer l'aire intérieure à Γ.

Solution. — Pour l'étude et le tracé de Γ, voir l'exercice 516 page 360. On obtient une lemniscate de Bernoulli :



Les symétries de Γ montrent que son aire intérieure vaut

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{2\cos(2\theta)}} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 4\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\,.$$

616. **RMS 2008 990 CCP PSI**

Nature de la quadrique d'équation $-y^2+3z^2-6\sqrt{2}z+2x-4=0$?

Solution. — L'équation proposée équivaut à $-y^2+3(z-\sqrt{2})^2+2(x-5)=0$, ou encore à

$$x' = \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\sqrt{2/3}}\right)^2,$$

où l'on a posé $x'=x-5$, $y'=y$ et $z'=z-\sqrt{2}$. On reconnaît ci-dessus l'équation réduite d'un paraboloïde hyperbolique.

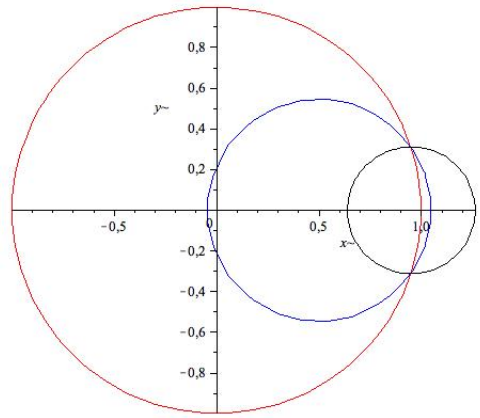
617. **RMS 2011 1103 CCP PSI**

(a) Montrer que si deux cercles s'intersectent en deux points A et B, l'intersection des deux disques correspondants est incluse dans le disque de diamètre $[A,B]$ (erreur d'énoncé : il faut une hypothèse supplémentaire sur les deux cercles).

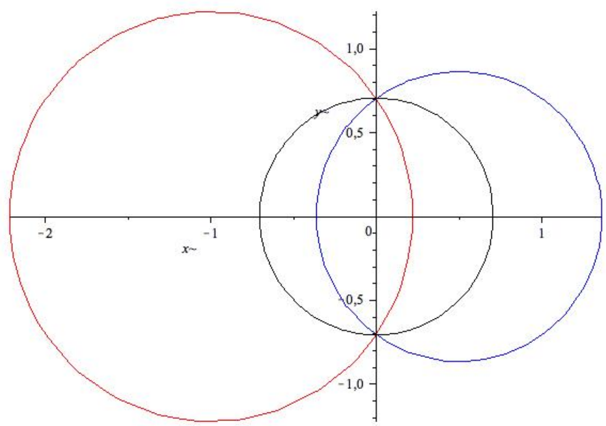
(b) Montrer que l'ensemble des rayons des disques contenant n points donnés dans le plan usuel admet une borne inférieure (c'est banal : on va plutôt étudier l'existence d'un minimum).

Solution. — On suppose dans l'exercice qu'il s'agit de disques fermés. A revoir ? ?

(a) C'est faux, comme le prouve l'exemple du cercle de centre O de rayon 1 (en rouge) et du cercle de centre $(1/2,0)$ de rayon légèrement supérieur à $1/2$ (en bleu). Le cercle noir est celui de diamètre $[A,B]$. Dans la figure ci-dessous, l'intersection des deux disques contient l'origine, qui n'est certainement pas dans le disque de diamètre $[A,B]$, centré en un point voisin de $(1,0)$ et de rayon petit devant 1.



En revanche, si l'on suppose que le milieu I de $[A, B]$ appartient au segment d'extrémités les centres des deux cercles ou, ce qui revient au même, si l'on suppose que chaque disque ne contient pas le centre de l'autre, c'est vrai. Voici la figure correspondante :



On effectue un calcul analytique, en supposant, comme la figure l'indique, que le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine I et d'axe des abscisses la droite (C_1C_2) des deux centres des disques étudiés. Pour fixer les idées on suppose que C_1 (respectivement A) possède une abscisse (respectivement une ordonnée) négative. On note R_1 et R_2 les rayons des deux disques, et on se donne M appartenant à leur intersection.

On note (x, y) les coordonnées de M, puis $(0, -t)$ et $(0, t)$ les coordonnées de A et B respectivement. Alors les coordonnées de C_1 et C_2 sont respectivement $(-\sqrt{R_1^2 - t^2}, 0)$ et $(\sqrt{R_2^2 - t^2}, 0)$. Le disque de diamètre $[A, B]$ est donc centré à l'origine I et de rayon t. Le fait que M soit dans l'intersection des deux disques initiaux se traduit par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(x + \sqrt{R_1^2 - t^2}\right)^2 + y^2 & \leqslant & R_1^2\,, \\ \left(x - \sqrt{R_2^2 - t^2}\right)^2 + y^2 & \leqslant & R_2^2\,, \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & \leqslant & t^2 - 2x\sqrt{R_1^2 - t^2}\,, \\ x^2 + y^2 & \leqslant & t^2 + 2x\sqrt{R_2^2 - t^2}\,. \end{array}\right.$$

Suivant le signe de x, l'une des deux dernières inégalités entraîne que $x^2 + y^2 \leqslant t^2$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On note $A_1, \ldots, A_n$ les n points donnés du plan, et on pose $r = \max_{2 \leqslant k \leqslant n} A_1A_k$. Le disque de centre A_1 de rayon r contient, par définition les points $A_1, \ldots, A_n$. L'ensemble $\mathcal{R}$ des rayons des disques contenant ces n points est donc non vide. Comme il est minoré (par zéro), il admet une borne inférieure.

On prouve ensuite que cette borne inférieure est un minimum. Soit $(R_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ qui converge vers $\inf \mathcal{R}$. Quitte à extraire, on suppose de plus que cette suite décroît, et on note $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de centres associés : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le point A_k vérifie $C_pA_k \leqslant R_p$. Dans ce cas, l'inégalité triangulaire implique que

$$C_0C_p \leqslant C_0A_1 + A_1C_p \leqslant R_0 + R_p \leqslant 2R_0\,.$$

Alors $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de points du plan. Le théorème de Bolzano et Weierstrass donne l'existence d'une suite extraite $(C_{p_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente, dont on note C le point limite. La suite $(R_{p_j})_{j \in \mathbb{N}}$, extraite de $(R_p)_{p \in \mathbb{N}}$, converge vers $\inf \mathcal{R}$. En passant à la limite, quand j tend vers l'infini, dans l'inégalité large $C_{p_j}A_k \leqslant R_{p_j}$, on obtient

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad CA_k \leqslant \inf \mathcal{R}\,.$$

Ces inégalités montrent que $\inf \mathcal{R} \in \mathcal{R}$ donc que cette borne inférieure est un minimum.

Remarque. — Je n'ai pas compris à quoi pouvait servir la première question pour résoudre la seconde ? ?

618. **RMS 2011 1106 CCP PSI**
Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $xyz = 1$.

(a) Déterminer l'équation du plan tangent à (S) au point M_0.
(b) On note (P) ce plan tangent. Déterminer la distance de O à (P)

Solution. — On définit la fonction $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz - 1$, de sorte que (S) soit la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$.

(a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = (yz, xz, xy)\,.$$

Le vecteur gradient étant non nul sur (S), il dirige la normale au plan tangent à (S) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, qui a donc pour équation

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + y_0z_0(z - z_0) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 3\,.$$

(b) La droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ intersecte (P) en le projeté orthogonal H de O sur (P). Les points de cette droite vectorielle sont ceux de la forme $\lambda(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Un tel point appartient à (P) si et seulement si $\lambda(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2}) = 3$, ou encore $\lambda = \lambda_0 := 3(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{-1}$. La distance de O à (P) vaut

$$\|\lambda_0(x_0^{-1}, y_0^{-1}, z_0^{-1})\| = |\lambda_0|(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{1/2} = 3(x_0^{-2} + y_0^{-2} + z_0^{-2})^{-1/2} = \frac{3}{\sqrt{(y_0z_0)^2 + (x_0z_0)^2 + (x_0y_0)^2}}\,.$$

CCP PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

619. **RMS 2011 1107 CCP PC**

Soient E un ensemble et $f\colon E \to E$.

(a) On suppose f surjective. Montrer que $f \circ f$ est surjective.

(b) On suppose que f vérifie $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f surjective si seulement si f est injective.

Solution. —

(a) Soit $y \in E$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, car f est surjective. Pour la même raison, il existe $z \in E$ tel que $f(z) = x$. Alors $(f \circ f)(z) = y$, ce qui montre que $f \circ f$ est surjective.

(b) Implication directe. On suppose f surjective, et on donne x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Comme f est surjective, il existe x' et y' dans E tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. En appliquant f à l'hypothèse $f(x) = f(y)$, on obtient $(f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$, c'est-à-dire $(f \circ f \circ f)(x') = (f \circ f \circ f)(y')$. Comme $f \circ f \circ f = f$, on en déduit alors que que $f(x') = f(y')$, ou encore $x = y$. On a montré que f est injective.

Implication réciproque. On suppose f injective, on donne y dans E, et on pose $z = (f \circ f)(y)$. Par hypothèse, $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$, ce que l'on écrit $f(z) = f(y)$. Comme f est injective, $z = y$, donc $f(f(y)) = y$, donc y possède au moins un antécédent, qui est $f(y)$. On a montré que f est surjective.

Remarque. — On déduit de ce raisonnement que, si les hypothèses sont satisfaites, f est involutive : $f^{-1} = f$.

Groupes, anneaux, corps

620. **RMS 2009 1154 CCP PC**

Soient $(G, \cdot\,)$ un groupe et a un élément de G. On définit la loi $\star$ par : $x \star y = xay$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Solution. — Il s'agit bien d'une loi interne à G.

- La loi $\star$ est associative : l'associativité de la loi $\cdot$ montrer que, pour tout $(x, y, z) \in G^3$, on a $(x \star y) \star z = (xay)az = xa(yaz) = x \star (y \star z)$.
- Elle possède un élément neutre, qui est a^{-1} : pour tout $x \in G$, on a $x \star a^{-1} = xaa^{-1} = x = a^{-1}ax = a^{-1} \star x$.
- Tout élément x de G possède un symétrique, qui est $(axa)^{-1}$: en effet, $x \star (axa)^{-1} = xaa^{-1}x^{-1}a^{-1} = a^{-1} = a^{-1}x^{-1}a^{-1}ax = (axa)^{-1} \star x$.

Nombres complexes, polynômes

621. **RMS 2011 1108 CCP PC**

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z + 1| = 1$.

Solution. — Voici une solution géométrique. Il s'agit de déterminer l'intersection des cercles de centres zéro et -1 et de rayon 1 dans le plan complexe. La réunion de ces deux cercles étant invariante par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = -1/2$, attendu qu'elle est la médiatrice de leurs deux centres, les points d'intersections sont nécessairement sur cette médiatrice. Il s'agit donc de déterminer les points du cercle trigonométrique ($|z| = 1$) d'abscisse $-1/2$. On obtient les deux points d'affixe $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$.

On peut aussi donner une solution analytique : si a et b désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z, les conditions sont équivalentes au système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = & 1\,, \\ (a+1)^2 + b^2 & = & 1\,. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient $a = -1/2$, et le reste suit.

622. **RMS 2011 1109 CCP PC**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que le triangle abc est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Solution. — On pose $j = \exp(2i\pi/3)$, et on identifie le plan euclidien orienté à $\mathbb{C}$. On note A, B et C les points d'affixes a, b et c.

On suppose abc équilatéral. Si abc est équilatéral direct, alors le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est l'image par la rotation vectorielle d'angle $2\pi/3$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit sur les affixes par $c-b=j(b-a)$. Si abc est équilatéral indirect, on échange les rôles de b et c et on obtient $b-c=j(c-a)$. L'un ou l'autre cas étant satisfait, il est certain que le produit $[c-b-j(b-a)][b-c-j(c-a)]$ est nul. Or, en utilisant la relation $1+j+j^2=0$, on obtient

$$\begin{aligned}[c-b-j(b-a)][b-c-j(c-a)]=0 &\iff [c+ja+j^2b][b+ja+j^2c]=0\,,\\ &\iff j^2(a^2+b^2+c^2)+(1+j)(bc+ca+ab)=0\,,\\ &\iff a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\,.\end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Les équivalences ci-dessus montrent que le produit

$$[c-b-j(b-a)][b-c-j(c-a)]$$

est nul, donc au moins un des facteurs est nul. S'il s'agit du premier, c'est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est l'image par la rotation vectorielle d'angle $2\pi/3$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, les longueurs des côtés BA et BC sont les mêmes, et l'angle $\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}$ vaut $\pi/3$. Le triangle est donc isocèle en B avec $\hat{B}=\pi/3$: cela suffit pour affirmer qu'il est équilatéral (on ferait de même si le seconde facteur était nul).

623. **RMS 2010 1032 CCP PC**

Soit $f\colon z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}\mapsto(z+1)/(z-2i)$.

(a) Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que $f(z)\in\mathbb{R}$.
(b) Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que $f(z)\in i\mathbb{R}$.

Solution. — On commence par modifier l'expression de $f(z)$ en multipliant le dénominateur par son conjugué :

$$f(z)=\frac{(z+1)(\overline{z}+2i)}{|z-2i|^2}=\frac{|z|^2+2iz+\overline{z}+2i}{|z-2i|^2}\,.$$

On rappelle qu'un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, et qu'il est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. Ces équivalences sont utilisées implicitement ci-dessous.

(a) Alors $f(z)\in\mathbb{R}$ si et seulement si $2iz+\overline{z}+2i\in\mathbb{R}$, ou encore $i(2z+1-\mathrm{Im}(z))\in\mathbb{R}$, ce qui équivaut finalement à

$$2\,\mathrm{Re}(z)+1-\mathrm{Im}(z)=0\,.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, les points obtenus forment la droite d'équation $y=2x+1$.

(b) Alors $f(z)\in i\mathbb{R}$ si et seulement si $|z|^2+2iz+\overline{z}\in i\mathbb{R}$, ou encore $|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)=0$. Si l'on écrit z sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on obtient la condition nécessaire et suffisante $a^2+b^2-2b+a=0$, qui équivaut finalement à

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+(b-1)^2=\frac{5}{4}\,.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, les points obtenus forment le cercle de centre $(-1/2,1)$ et de rayon $\sqrt{5}/2$.

624. **RMS 2012 1032 CCP PC**

Soit $f\colon z\mapsto\frac{z+1}{z-i}$. Trouver l'ensemble des z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$, puis tels que $|f(z)|=2$.

Solution. — On commence par modifier l'expression de $f(z)$ en multipliant le dénominateur par son conjugué :

$$f(z)=\frac{(z+1)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}=\frac{|z|^2+iz+\overline{z}+i}{|z-i|^2}\,.$$

Soit $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Comme un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, on a

$$f(z)\in\mathbb{R}\iff\mathrm{Im}(iz+\overline{z})=a-b=0.$$

Les points correspondant sont ceux de la première bissectrice. Avec les mêmes notations

$$\begin{aligned}|f(z)|=2 &\iff |z+1|^2=4|z-i|^2 \iff (a+1)^2+b^2=4\left(a^2+(b-1)^2\right) \iff 3a^2+3b^2-2a-8b+3=0,\\ &\iff \left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\left(b-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Les points correspondants sont ceux du cercle de centre $(1/3,4/3)$ de rayon $2\sqrt{2}/3$.

625. **RMS 2007 932 CCP PC**

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.

(a) Trouver les racines de P dans $\mathbb{C}$.

(b) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(4 + \operatorname{cotan}^2(k\pi/n))$.

Solution. —

(a) On constate que $P(i) = (2i)^n \neq 0$, donc que, pour résoudre l'équation $P(z) = 0$, on peut poser $y = (z+i)/(z-i)$, de sorte que y soit un nombre complexe différent de 1. Alors $P(z) = 0 \Leftrightarrow y^n = 1$, dont les solutions en y sont les $\exp(2ik\pi/n)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$: il est impossible que $k = 0$ puisque $y \neq 1$. Comme $z = i(y+1)/(y-1)$, les solutions de $P(z) = 0$ sont les

$$z_k = i\frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} = i\frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}-e^{-ik\pi/n}} = i\frac{2\cos(k\pi/n)}{2i\sin(k\pi/n)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

On trouve bien $n-1$ racines complexes, ce qui est cohérent puisque P est de degré $n-1$, et non pas n.

(b) On pose $v_k = z_k + 2i = \operatorname{cotan}(k\pi/n) + 2i$. Alors $|v_k|^2 = v_k\overline{v_k} = 4 + \operatorname{cotan}^2(k\pi/n)$, de sorte que le produit dont l'énoncé demande la valeur est $\prod_{k=1}^{n-1} v_k\overline{v_k}$. Il suffit alors de trouver un polynôme dont les racines (simples) sont les v_k et leurs conjugués, et d'appliquer ensuite les relations entre coefficients et racines, qui donnent entre autres la valeur du produit des racines.

On pose $Q(X) = P(X-2i)$: les racines (simples) de Q sont les v_k pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Par ailleurs, les racines (simples) de $\overline{Q}$ sont évidemment les $\overline{v_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Un polynôme possible est alors $Q\overline{Q}$ avec

$$Q = (X-2i+i)^n - (X-2i-i)^n = (X-i)^n - (X-3i)^n = 2inX^{n-1} + \cdots + (-i)^n(1-3^n)\,.$$

Le coefficient dominant et le coefficient constant de $Q\overline{Q}$ sont donc respectivement égaux à

$$a_{2n-2} = |2in|^2 = 4n^2\,,$$
$$a_0 = |(1-3^n)(-i)^n|^2 = (3^n-1)^2\,.$$

Le produit des racines de $Q\overline{Q}$ vaut $(-1)^{2n-2}a_0/a_{2n-2}$, donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left[4 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \frac{(3^n-1)^2}{4n^2}\,.$$

On vérifie par un calcul mental que l'égalité est bien réalisée pour $n = 2$, 3 et 4, les valeurs des deux membres étant respectivement 4, $(13/3)^2$ et 100.

626. **RMS 2010 1033 CCP PC**

Soient n un entier naturel non nul, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $P_n = (X-a)^n(X-b)^n$ et $Q_n = P^{(n)}/n!$.

(a) Déterminer le degré de Q_n ainsi que son coefficient dominant.

(b) Montrer que $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$. Montrer que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.

(c) Montrer qu'il existe $(\lambda_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ tel que $Q_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k}(X-a)^{n-k}(X-b)^k$.

(d) Calculer $I_n = \int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. —

(a) Comme P_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1, alors Q_n est de degré n et de coefficient dominant $[(2n)(2n-1)\cdots(n+1)]/n! = (2n)/(n!)^2 = \binom{2n}{n}$.

(b) Comme a et b sont distincts, ce sont sont deux racines de P_n d'ordre exactement n, ce qui équivaut aux relations $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $P_n^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(b) = 0$ et $P_n^{(n)}(a) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(b) \neq 0$. Comme Q_n est proportionnel à $P_n^{(n)}$ avec un coefficient $1/n!$ non nul, on en déduit que $Q_n(a) \neq 0$ et que $Q_n(b) \neq 0$.

(c) La formule de Leibniz de dérivation d'un produit montre que

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}[(X-a)^n]^{(k)}[(X-b)^n]^{(n-k)}\,, \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1)(X-a)^{n-k}n(n-1)\cdots(k+1)(X-b)^k\,, \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!^2}{k!(n-k)!}(X-a)^{n-k}(X-b)^k\,, \end{aligned}$$

qui est de la forme demandée avec $\lambda_{n,k}=\binom{n}{k}^2$. En comparant les coefficients dominants, on en déduit incidemment la relation $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2$.

(d) Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q}=\int_a^b(t-a)^p(t-b)^q\,\mathrm{d}t$, de sorte que $I_n=I_{n,n}$. On établit ensuite une relation de récurrence entre les $I_{p,q}$ par intégration par parties :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad I_{p,q}=\left[\frac{(t-a)^{p+1}(t-b)^q}{p+1}\right]_a^b-\frac{q}{p+1}\int_a^b(t-a)^{p+1}(t-b)^{q-1}\,\mathrm{d}t=-\frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}\,.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{p,q}=(-1)^q\frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q)}I_{p+q,0}=(-1)^q\frac{q!(b-a)^{p+q+1}}{(p+1)\cdots(p+q)(p+q+1)}=(-1)^q\frac{p!q!(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)!},$$

et on en déduit que

$$I_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}(b-a)^{2n+1}\,.$$

D'après la question précédente et le calcul des $I_{p,q}$,

$$J_n=\sum_{k=0}^n\lambda_{n,k}I_{n-k,k}=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}^2\frac{(n-k)!k!}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}=\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}=0\,,$$

l'égalité finale étant obtenue en développant la relation $(1-1)^n=0$ par la formule du binôme (on rappelle que $n\geqslant 1$).
Remarque. — On peut aussi calculer J_n comme suit : $J_n=\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int_a^b P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}[P_n^{(n-1)}(b)-P_n^{(n-1)}(a)]=0$, puisque $P_n^{(k)}(b)=P_n^{(k)}(a)=0$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$.

627. **RMS 2012 1309 CCP PC**

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 7. On suppose que $P+i$ est multiple de $(X-i)^4$. Déterminer P' et en déduire P.

Solution. — Il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P+i=(X-i)^4Q$. Alors $P'=(X-i)^3[4Q+(X-i)Q']$, donc i est racine d'ordre 3 de P'. Comme P' est à coefficients réels, le conjugué de i est aussi racine d'ordre 3 de P'. Comme P' est de degré 6, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$P'=\lambda(X-i)^3(X+i)^3=\lambda(X^2+1)^3=\lambda(X^6+3X^4+3X^2+1).$$

Il en résulte que P est de la forme $\lambda(X^7/7+3X^5/5+X^3+X)+\mu$, où μ est un réel. Par construction, i est déjà racine de $P'=(P+i)'$ d'ordre 3, donc i sera racine d'ordre 4 de $P+i$ si et seulement $P(i)+i=0$, ou encore $\lambda i(-1/7+3/5-1+1)+\mu+i=16\lambda i/35+\mu+i=0$. Comme λ et μ sont des nombres réels, la dernière égalité équivaut à $\lambda=-35/16$ et $\mu=0$. Finalement, un seul polynôme convient :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad P=-\frac{16}{35}\left(\frac{X^7}{7}+\frac{3}{5}X^5+X^3+X\right).$$

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

628. **RMS 2010 1039 CCP PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leqslant\operatorname{rg}(u+v)\leqslant\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.

Solution. — On commence par montrer que $\operatorname{Im}(u+v)\subset\operatorname{Im}(u)+\operatorname{Im}(v)$: en effet, un élément de $\operatorname{Im}(u+v)$ s'écrit $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$, donc appartient à $\operatorname{Im}(u)+\operatorname{Im}(v)$. Passant aux dimensions, on obtient $\operatorname{rg}(u+v)\leqslant\dim(F+G)$, avec $F=\operatorname{Im}(u)$ et $G=\operatorname{Im}(v)$. Or connaît l'égalité $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, valable pour les sous-espaces vectoriels en dimension finie et parfois appelée formule de Grassmann, qui entraîne que $\dim(F+G)\leqslant\dim(F)+\dim(G)$. Ici, on obtient finalement

$$\operatorname{rg}(u+v)\leqslant\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)\,.$$

En substituant u par $u+v$ et v par $-v$, on trouve $\operatorname{rg}(u)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(-v)$. Or $\operatorname{Im}(v)=\operatorname{Im}(-v)$, car un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire, donc en particulier par la prise d'opposé. Par suite, $\operatorname{rg}(v)=\operatorname{rg}(-v)$. On déduit de l'inégalité précédente que $\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$. L'échange de u et v prouve aussi que $\operatorname{rg}(v)-\operatorname{rg}(u)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$. La définition de la valeur absolue, qui est $|x|=\max(x,-x)$, prouve enfin que

$$|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leqslant\operatorname{rg}(u+v)\,.$$

Algèbre linéaire : applications linéaires

629. **RMS 2010 1040 CCP PC**

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a) On suppose que $f \circ f = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}$ est bijective.

(b) On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ telle que $f^p = 0$. Montrer que $f + \mathrm{id}$ est bijective.

Solution. —

(a) On constate que $(\mathrm{id} - f) \circ (f + \mathrm{id}) = (f + \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} - f) = \mathrm{id}$, donc que $f + \mathrm{id}$ est bijective de réciproque $\mathrm{id} - f$.

(b) On constate que $(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k) \circ (f + \mathrm{id}) = (f + \mathrm{id}) \circ (\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k) = \mathrm{id}$, donc que $f + \mathrm{id}$ est bijective de réciproque $\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k$.

Remarques. — Les démonstrations ci-dessus nécessitent des explications : que faire si l'on ne constate pas les identités évoquées ? Pour la question (a), on se donne un vecteur y de E, et on résout l'équation $(f + \mathrm{id})(x) = f(x) + x = y$ d'inconnue x. En appliquant f et en tenant compte de $f \circ f = 0$, cette équation est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) + x & = & y\,, \\ f(x) & = & f(y)\,, \end{array}\right. \qquad \text{ou encore à} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y - f(x) = y - f(y)\,, \\ f(x) & = & f(y)\,. \end{array}\right.$$

La deuxième équation du système de droite ci-dessus est une conséquence de la première. Par conséquent, l'équation d'origine $(f + \mathrm{id})(x) = y$ est finalement équivalente à $x = (\mathrm{id} - f)(y)$, ce qui démontre le caractère bijectif de $f + \mathrm{id}$ et calcule sa réciproque.

Pour la question (b), on peut généraliser la démarche par résolution d'équation, ou s'inspirer de la formule déjà obtenue à la question (a), qui doit faire penser à l'identité $a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$ dans un anneau où les éléments a et b commutent. On peut aussi transporter, de manière formelle, le développement en série entière $1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^p x^p + \cdots$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$: on substitue 1 par id et x par f, en tenant compte du caractère nilpotent de f d'ordre au plus p. Cette démarche formelle fournit un candidat pour la réciproque de $f + \mathrm{id}$, à savoir $g = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k$. On démontre ensuite que g est bien la réciproque de f en vérifiant que $g \circ f = \mathrm{id}$, qui est aussi égal à $f \circ g$, puisque g est un polynôme en f. Cette dernière démarche est par exemple fructueuse pour l'obtention de racines carrées d'endomorphismes ou de matrices.

Attention : on ne peut pas se contenter de démontrer que f est injective, ce qui est aisé mais ne suffit pas, puisque E n'est pas supposé de dimension finie.

630. **RMS 2010 1041 CCP PC**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont des projecteurs de E et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Solution. — On suppose d'abord que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$. En composant la première égalité par v à gauche, on obtient $(v \circ u) \circ v = v \circ u$, ou encore $v \circ v = v$, en utilisant cette fois la seconde égalité. Les rôles de u et v étant symétriques, on obtient aussi $u \circ u = u$, donc u et v sont des projecteurs. Soit ensuite $x \in \operatorname{Ker} u$. La deuxième égalité donne $v(u(x)) = v(x)$, donc $0 = v(x)$, donc $x \in \operatorname{Ker} v$. On vient de montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$, et la symétrie des rôles de u et v prouve l'inclusion inverse, donc l'égalité.

Réciproquement, soit $x \in E$. On l'écrit $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im} v$ et $z \in \operatorname{Ker} v$. Comme v est un projecteur, $v(x) = y$ donc $(u \circ v)(x) = u(y)$. D'autre part $u(x) = u(y) + u(z) = u(y)$, puisque z est dans le noyau de v qui est aussi celui de u. On a démontré que $u \circ v = u$, et l'argument de symétrie déjà invoqué montre que $v \circ u = v$.

631. **RMS 2011 1113 CCP PC**

Soient $n \geqslant 2$ et p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Déterminer la dimension du commutant de p.

Solution. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à p, c'est-à-dire que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$. La matrice P de p sur $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs et vaut $\operatorname{diag}(I_r, 0_{n-r})$.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice M dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, les tailles de A, B, C, D correspondant à l'écriture de P sous forme de blocs. Alors

$$\begin{aligned} u \text{ commute avec } p &\iff MP = PM\,, \\ &\iff \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\,, \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & A\,, \\ B & = & 0\,, \\ 0 & = & C\,, \\ 0 & = & 0\,, \end{array}\right. \\ &\iff B = C = 0\,. \end{aligned}$$

L'application $(A, D) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) \mapsto u_{A,D}$, où $u_{A,D}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ vaut $\operatorname{diag}(A, D)$, induit donc une bijection sur le commutant de p. Cette bijection étant manifestement linéaire, c'est un isomorphisme, donc la dimension du commutant de p vaut

$$\dim\left[\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})\right] = r^2 + (n-r)^2 .$$

632. **RMS 2007 933 CCP PC**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E.
(b) Montrer que la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.
(c) Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Solution. —

(a) Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrons qu'il convient, en prouvant que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre : comme E est de dimension 3, cette famille en sera une base. Soient donc trois réels λ_0, λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = 0 . \qquad (\mathcal{H})$$

En composant par f^2, on obtient $\lambda_0 f^2(x) = 0$. Comme $f^2(x) \neq 0$, c'est que $\lambda_0 = 0$. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ devient alors $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = 0$. En la composant par f, on obtient $\lambda_1 f^2(x) = 0$, donc $\lambda_1 = 0$ comme précédemment, et enfin $\lambda_2 = 0$.
On notera $\mathcal{B}$ cette base.

(b) Le sous-espace $\mathbb{R}f^2(x)$ est bien une droite car $f^2(x) \neq 0$. Comme $f(f^2(x)) = f^3(x) = 0$, l'image de cette droite par f est $\{0\}$, ce qui montre qu'elle est stable.
Soit $D = \operatorname{Vect}(y)$, avec $y \neq 0$, une droite de E stable par f. Écrivons y sur la base $\mathcal{B}$ de la question (a) sous la forme $y = \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x)$, l'un au moins des trois λ_i étant non nul. Comme D est stable par f, le vecteur $f(y) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x)$ doit être colinéaire à y : disons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = ky$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, cela se traduit par

$$\begin{aligned} 0 &= k\lambda_0 , \\ \lambda_0 &= k\lambda_1 , \\ \lambda_1 &= k\lambda_2 . \end{aligned}$$

Si $k \neq 0$, alors $\lambda_0 = 0$ d'après la première équation, puis $\lambda_1 = 0$ d'après la deuxième équation, et enfin $\lambda_2 = 0$ d'après la dernière équation, mais alors $y = 0$, ce qui n'est pas possible. Il faut donc que $k = 0$, donc que $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, et alors $y = \lambda_2 f^2(x)$ avec $\lambda_2 \neq 0$, donc D est confondue avec la droite $\mathbb{R}f^2(x)$.
On a bien montré que $\mathbb{R}f^2(x)$ est la seule droite de E stable par f.

(c) On montre aisément que $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$ est un plan stable par f.
Réciproquement, soit $P = \operatorname{Vect}(y, z)$ un plan de E stable par f. Écrivons y et z sur la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) , \\ z &= \mu_0 x + \mu_1 f(x) + \mu_2 f^2(x) . \end{aligned}$$

Le but est de montrer que $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, de sorte que P soit contenu dans $\operatorname{Vect}(f(x), f^2(x))$, donc lui soit égal, puisqu'il s'agit de deux plans. On entame alors un raisonnement par l'absurde, en supposant que l'un des deux nombres λ_0 ou μ_0 est non nul. Pour fixer les idées, on suppose que λ_0 est non nul.
La transformation élémentaire $y \leftarrow y/\lambda_0$ montre qu'on peut supposer de plus que $\lambda_0 = 1$. La transformation élémentaire $z \leftarrow z - \mu_0 y$ montre ensuite qu'on peut supposer $\mu_0 = 0$. En d'autres termes (attendu que des transformations élémentaires d'une famille de vecteurs conservent le sous-espace vectoriel engendré par la famille en question), $P = \operatorname{Vect}(y', z')$ avec y' et z' de la forme

$$\begin{aligned} y' &= x + \alpha f(x) + \beta f^2(x) , \\ z' &= \phantom{x + {}} \gamma f(x) + \delta f^2(x) . \end{aligned}$$

Comme P est stable, $f(y') = f(x) + \alpha f^2(x)$ et $f(z') = \gamma f^2(x)$ doivent être contenus dans P, ce qui se traduit par

$$\det_{\mathcal{B}}(y', z', f(y')) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \delta = 0 ,$$

$$\det_{\mathcal{B}}(y', z', f(z')) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma^2 = 0 .$$

On en déduit que $\gamma = \delta = 0$, donc que $z' = 0$, mais alors P n'est pas un plan, ce qui achève le raisonnement par l'absurde.

On a bien montré que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

633. **RMS 2011 1117 CCP PC**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. Déterminer les valeurs possibles pour la trace de f.

Solution. — On pose $j = \exp(2i\pi/3)$ et on note A la matrice de f sur la base canonique. Le polynôme $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - \overline{j})$ est annulateur de f, donc le spectre complexe de A est contenu dans $\{0, j, \overline{j}\}$. On note p, q et r les multiplicités respectives (éventuellement nulles) pour A de ces (éventuelles) valeurs propres. Comme toute matrice complexe est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A = p \times 0 + q \times j + r \times \overline{j} = qj + r\overline{j}\,.$$

Comme A est à coefficients réels, il faut que sa trace soit un nombre réel, donc que $\operatorname{Im}(qj + r\overline{j}) = (q - r)\sqrt{3}/2 = 0$, ce qui entraîne $q = r$. Alors $\operatorname{tr} f = q(j + \overline{j}) = -q$. Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension 5, les multiplicités sont liées par la relation $p + q + r = p + 2q = 5$, donc $2q$ est un nombre pair plus petit que 5, donc $q \in \{0, 1, 2\}$. Par suite,

$$\operatorname{tr} f \in \{-2, -1, 0\}\,.$$

Pour terminer, il faut donner un exemple de matrice de chaque type. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = X^2 + X + 1$. Voici des exemples, dans l'ordre croissant des traces : $\operatorname{diag}(A, A, 0)$, $\operatorname{diag}(A, 0, 0, 0)$ et la matrice nulle.

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

634. **RMS 2011 1124 CCP PC**

Soient E un espace vectoriel, f dans $\mathcal{L}(E)$ non nul et $\Phi\colon g \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ f - f \circ g \in \mathcal{L}(E)$. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $L(a) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f - f \circ g = ag\}$.

(a) Montrer que $L(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $L(0)$ n'est pas réduit à zéro.

(b) On suppose que E est de dimension finie, $a \neq 0$ et $g \in L(a)$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Phi(g^p)$. En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = 0$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 82 page 130. On désigne par id l'identité de $\mathcal{L}(E)$.

(a) On constate immédiatement que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$, donc que $L(a) = \operatorname{Ker}(\Phi - a\,\mathrm{id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. En particulier, $L(0) = \operatorname{Ker}(\Phi)$ est le commutant de f, qui contient au moins tous les polynômes en f, donc n'est pas réduit à zéro.

(b) On démontre par récurrence que

$$(\mathcal{H}_p) \qquad \Phi(g^p) = g^p \circ f - f \circ g^p = pag^p\,.$$

La propriété $(\mathcal{H}_1)$ est vraie car $g \in L(a)$. Si $\mathcal{H}_p$ est vraie, on compose à gauche par g pour obtenir $g^{p+1} \circ f - g \circ f \circ g^p = pag^{p+1}$. Comme $g \circ f = ag + f \circ g$, l'égalité obtenue se réécrit $g^{p+1} \circ f - (ag + f \circ g) \circ g^p = g^{p+1} \circ f - ag^{p+1} - f \circ g^{p+1} = pag^{p+1}$, ou encore

$$\Phi(g^{p+1}) = g^{p+1} \circ f - f \circ g^{p+1} = (p+1)ag^{p+1}\,,$$

qui est la propriété $(\mathcal{H}_{p+1})$.

Comme $a \neq 0$, les nombres pa sont deux à deux distincts. Si g n'était pas nilpotente, l'égalité $(\mathcal{H}_p)$ montrerait que g^p est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre ap pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et Φ aurait ainsi une infinité de valeurs propres. Comme E est de dimension finie, c'est impossible, et on conclut qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = 0$.

635. **RMS 2010 1050 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A \neq 0$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer son noyau.

(b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?

Solution. —

(a) La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la trace, et il est clair que $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit D la droite engendrée par A (c'est bien une droite car A n'est pas nulle, puisque sa trace ne l'est pas). Montrons que $\operatorname{Ker}\Phi = D$. Dans un premier temps, $\Phi(A) = (\operatorname{tr} A)A - (\operatorname{tr} A)A = 0$, donc $D \subset \operatorname{Ker}\Phi$. Dans un deuxième temps, si $M \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors on peut écrire que $M = (\operatorname{tr} M/\operatorname{tr} A)A$, puisque $\operatorname{tr} A \neq 0$, et cela montre que M est colinéaire à A, donc $\operatorname{Ker}\Phi \subset D$.

(b) On désigne par H l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle.

Analyse. Soit λ une valeur propre non nulle (le cas du noyau ayant été traité à la question précédente) de Φ, et soit M une matrice propre associée. On doit avoir $(\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A = \lambda M$, d'où l'on déduit, en prenant la trace des deux membres, que $(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} M) - (\operatorname{tr} M)(\operatorname{tr} A) = 0 = \lambda(\operatorname{tr} M)$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit que $\operatorname{tr} M = 0$, c'est-à-dire que $M \in H$, puis que $\Phi(M) = (\operatorname{tr} A)M = \lambda M$. Comme $M \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre de Φ, on en déduit que $\lambda = \operatorname{tr} A$. En conclusion, $E_{\operatorname{tr} A}(\Phi) \subset H$.

Synthèse. On a bien $\forall M \in H$, $\Phi(M) = (\operatorname{tr} A)M$, donc $E_{\operatorname{tr} A}(\Phi) = H$.

Enfin, comme $A \notin H$, le noyau $E_0(\Phi) = D = \operatorname{Vect}(A)$ est un supplémentaire de H, et on dispose des égalités et inclusions suivantes :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \operatorname{Vect}(A) \subset \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi)} E_\lambda(\Phi) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

ce qui prouve à la fois que Φ est diagonalisable et qu'il n'a pas d'autre valeurs propres que zéro et $\operatorname{tr} A$.

Algèbre linéaire : matrices

636. **RMS 2006 1112 CCP PC**

Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. — On appelle A la matrice du second membre et u (respectivement v) l'endomorphisme canoniquement associé à A (respectivement X). On calcule

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda, \quad \operatorname{Sp}(A) = \{0, 2\}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $E_0(A) = \operatorname{Vect}(U_0)$ et $E_2(A) = \operatorname{Vect}(U_2)$, la matrice A est diagonalisable, avec $B = P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, 2)$. Si l'on définit la nouvelle inconnue Y par $Y = P^{-1}XP$, l'équation de départ est équivalente à $Y^2 + Y = B$: la matrice Y est celle de v sur la base propre (U_0, U_2).

Voici maintenant l'argument principal : comme X est un polynôme en A, elle commute avec A (et v commute avec u). dans ce cas, le cours affirme que les sous-espaces propres de u sont stables par v. Comme les sous-espaces propres de u sont de dimension 1, ils sont stables par v si et seulement s'il sont propres pour v, donc si et seulement si Y est diagonale. On cherche donc Y sous la forme $\operatorname{diag}(a, b)$, et l'équation $Y^2 + Y = B$ équivaut au système

$$\begin{cases} a^2 + a & = & 0, \\ b^2 + b & = & 2. \end{cases}$$

Les couples (a, b) solutions sont $(0, 1)$, $(0, -2)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -2)$. Il faut revenir ensuite à la matrice $X = PYP^{-1}$. On trouve quatre solutions :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

637. **RMS 2007 934 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

(a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.

(b) Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Solution. — Voir aussi l'exercice 788 page 505.

(a) La matrice A^2+I_n se factorise dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $(A-iI_n)(A+iI_n)$. Comme elle n'est pas inversible, c'est que $\det(A^2+I_n)=\det(A-iI_n)\det(A+iI_n)=0$. L'un des deux facteurs de ce produit est donc nul.

Si $\det(A-iI_n)=0$, c'est que i est une valeur propre complexe de A, donc il existe un vecteur propre complexe $X\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, donc non nul, tel que $AX=iX$.

Si $\det(A+iI_n)=0$, alors $\overline{\det(A+iI_n)}=\det(\overline{A+iI_n})=0$. Comme A est à coefficients réels, cette égalité s'écrit encore $\det(A-iI_n)=0$, et on est ramené au cas précédent.

(b) On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U+iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. La relation $AX=iX$ se traduit alors par $A(U+iV)=i(U+iV)$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} AU &= -V\ ,\\ AV &= U\ . \end{aligned}$$

Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U *et* V le seraient, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U,V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $U=kV$ avec $k\in\mathbb{R}$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV=-V/k$, et de la seconde, $AV=kV$, d'où l'on déduit $(1+k^2)V=0$, donc $V=0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible.

La famille (U,V) est donc libre, et on peut compléter cette famille pour former une base de $\mathbb{R}^n$, identifié ici à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les deux relations $AU=-V$ et $AV=U$ montrent que A est semblable à une matrice de la forme décrite dans l'énoncé.

638. **RMS 2012 1313 CCP PC**

Soit

$$E=\left\{\begin{pmatrix} a+c & -b & c\\ b & a-2c & -b\\ c & b & a+b\end{pmatrix},\quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble E est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Solution. — On pose

$$J=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad K=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

On constate que $E=\mathrm{Vect}(I_3,J,K)$, donc que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme la famille (I_3,J,K) est libre (il est clair que $aI_3+bJ+cK=0$ implique $a=b=c=0$), on en déduit que

$$\dim E=3.$$

On vérifie aisément que

$$J^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=K+L\quad\text{avec}\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Or L n'appartient pas à E, car l'équation $L=aI_3+bJ+cK$ impliquerait $b=1$ et $b=0$. On conclut que $J^2\notin E$, donc que E n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puisqu'il n'est pas stable par le produit matriciel.

Algèbre linéaire : déterminants

639. **RMS 2011 1110 CCP PC**

Calculer, pour $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, le déterminant $V(x_1,\dots,x_n)=\det((x_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.

Indication. Considérer $P(X)=V(x_1,\dots,x_{n-1},X)$.

Solution. — Il s'agit du calcul du déterminant de Vandermonde.

Dans un premier temps, on suppose que les x_i pour $1\leqslant i\leqslant n-1$ sont deux à deux distincts. Le développement, par rapport à sa dernière ligne, de

$$P(X)=\begin{vmatrix}1&x_1&\dots&x_1^{n-1}\\1&x_2&\dots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\\1&X&\dots&X^{n-1}\end{vmatrix}$$

montre que $P(X)$ est un polynôme en X de degré au plus égal à $n-1$, le coefficient de X^{n-1} étant égal à $V(x_1,\dots,x_{n-1})$. La propriété d'alternance du déterminant montre que $P(x_i)=0$ pour tout $i\in\{1,\dots,n-1\}$, puisqu'on obtient alors un déterminant ayant deux lignes identiques. On vient dans ce cas de trouver $n-1$ racines distinctes du polynôme P, donc P s'écrit sous la forme $\lambda(X-x_1)\cdots(X-x_{n-1})$, le nombre λ étant égal au coefficient de X^{n-1}, c'est-à-dire $V(x_1,\dots,x_{n-1})$:

$$P(X)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(X-x_i)\,.$$

Cette relation reste vraie certains des x_i pour $1\leqslant i\leqslant n-1$ sont confondus : le membre de gauche $P(X)$ est alors nul car il s'agit d'un déterminant avec deux lignes égales, et le membre de droite aussi [même raisonnement portant sur $V(x_1,\dots,x_{n-1})$].

On démontre alors par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

$$V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\,.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$, qui s'écrit $V(x_1)=1$, est vraie. Si $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie, on substitue X par x_n dans la relation donnant $P(X)$ ci-dessus, et on obtient, en vertu de l'hypothèse de récurrence :

$$P(x_n)=V(x_1,\dots,x_n)=V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\,.$$

640. **RMS 2011 1112 CCP PC**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, soit $M_n=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{1,1}=\cos\alpha$, $m_{i,i}=2\cos\alpha$ si $i\geqslant 2$, $m_{i,i+1}=m_{i+1,i}=1$ si $i\in\{1,\dots,n-1\}$, les autres coefficients étant nuls. Calculer $D_n=\det(M_n)$.

Solution. — On calcule d'abord $D_1=\cos\alpha$ et $D_2=2\cos^2\alpha-1=\cos(2\alpha)$. On établit ensuite une relation de récurrence (pour $n\geqslant 3$) en développant D_n par rapport à sa dernière colonne, puis en développant le déterminant intermédiaire par rapport à sa dernière ligne :

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 2\cos\alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=(2\cos\alpha)D_{n-1}-\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix},$$
$$=(2\cos\alpha)D_{n-1}-D_{n-2}\,.$$

On constate qu'il suffit de poser $D_0=1$ pour que cette relation soit satisfaite y compris pour $n=2$. Alors $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Le polynôme caractéristique de cette récurrence est

$$X^2-(2\cos\alpha)X+1=(X-e^{i\alpha})(X-e^{-i\alpha})\,.$$

Il existe donc deux constantes complexes a et b telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $D_n=ae^{in\alpha}+be^{-in\alpha}$. Les valeurs $D_0=1$ et $D_1=\cos\alpha$ montrent que $a+b=1$ et $ae^{i\alpha}+be^{-i\alpha}=\cos\alpha$, d'où l'on déduit immédiatement que $a=b=1/2$, puis que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad D_n=\frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2}=\cos(n\alpha)\,.$$

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

641. **RMS 2007 937 CCP PC**

Soient $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et

$$S=\begin{pmatrix}0 & a_1 & \cdots & a_n\\ a_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

En considérant S^2, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de S.

Solution. — Voir aussi l'exercice 675 page 441.

On écarte le cas où tous les a_i sont nuls (alors $S=0$, et l'exercice est banal). On remarque aussi que S est symétrique réelle, donc elle est orthodiagonalisable. Les colonnes de S seront notées $C_0,\dots,C_n$, et les composantes des vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ seront notées $x_0,\dots,x_n$. Enfin,

Comme $C_1,\dots,C_n$ sont colinéaires et qu'au moins une d'elle est non nulle, et comme C_0 n'est pas colinéaire aux suivantes, le rang de S vaut 2, donc zéro est valeur propre de S d'ordre exactement $n-1$ (on sait que S est diagonalisable). De plus, $E_0(S)=\operatorname{Ker} S$ est l'intersection des deux hyperplans d'équations $x_0=0$ et $\sum_{k=1}^n a_kx_k$

Il reste deux valeurs propres à déterminer distinctes ou confondues, notées α et β, grâce aux traces de S et de S^2 : comme S est diagonalisable, on a

$$\operatorname{tr} S = 0 = \alpha+\beta\,,$$
$$\operatorname{tr} S^2 = 2\sum_{k=1}^n a_k^2 = \alpha^2+\beta^2\,.$$

En supposant que $\alpha<\beta$, on obtient $\alpha=-\|a\|$ et $\beta=\|a\|$, où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Compte-tenu des résultats précédentes et de ce que $\alpha\neq\beta$, les sous-espaces propres correspondant sont des droites. Voici la résolution du système $SX=\varepsilon\|a\|X$, où $\varepsilon\in\{-1,1\}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x_1+\dots+a_nx_n &=& \varepsilon\|a\|x_0\,,\\ \forall k\in\{1,\dots,n\},\quad a_kx_0 &=& \varepsilon\|a\|x_k\,,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{\|a\|}x_0=\varepsilon\|a\|x_0 &=& \varepsilon\|a\|x_0\,,\\ \forall k\in\{1,\dots,n\},\quad \varepsilon\frac{a_k}{\|a\|}x_0 &=& x_k\,,\end{array}\right.$$
$$\iff \forall k\in\{1,\dots,n\},\quad x_k=\varepsilon\frac{a_k}{\|a\|}x_0.$$

On choisit $(\varepsilon\|a\|,a_1,\dots,a_n)$ comme vecteur générateur de la droite en question. En résumé :

$$\operatorname{Sp}(S)=\{0,\|a\|,-\|a\|\}\,,$$
$$E_0(S)=\left\{(0,x_1\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^n a_kx_k=0\right\}\,,$$
$$E_{\pm\|a\|}(S)=\operatorname{Vect}\left(\pm\|a\|,a_1,\dots,a_n\right)\,.$$

642. **RMS 2010 1049 CCP PC**

Soient $P=a_0+a_1X+\dots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n\in\mathbb{C}[X]$ et C_P la matrice compagne :

$$C_P=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que C_P est de rang n si $a_0\neq 0$ et de rang $n-1$ si $a_0=0$.

(b) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Montrer que $\operatorname{rg}(C_P-\lambda I_n)\geqslant n-1$. En déduire la dimension des sous-espaces propres de C_P.

(c) Montrer que $\chi_{C_P}=(-1)^nP$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.

(d) On suppose que $P\in\mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X)=\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k)^{m_k}$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{C}^p$. Si $q\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^p(X-\lambda_k^q)^{m_k}$ est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Solution. — On note $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

(a) Si $a_0\neq 0$, les colonnes $C_n,C_1,\dots,C_{n-1}$ de C_P sont échelonnées sur la base canonique, donc forment une famille libre, donc $\operatorname{rg}(C_P)=n$.
Si $a_0=0$, les colonnes $C_1,\dots,C_{n-1}$ de C_P sont échelonnées sur la base $(E_2,\dots,E_n,E_1)$, donc forment une famille libre, donc $\operatorname{rg}(C_P)\geqslant n-1$. Comme la dernière colonne C_n vaut $-\sum_{k=1}^{n-1}a_kC_k$, le rang de C_P est exactement $n-1$ dans ce cas.

(b) L'argument est le même : les $n-1$ premières colonnes de la matrice $C_P-\lambda I_n$ sont échelonnées sur la base $(E_2,\dots,E_n,E_1)$, donc son rang est au moins $n-1$. La formule du rang affirme que son noyau est de dimension zéro (si λ n'est pas valeur propre) ou 1 (si λ est valeur propre). Tous les sous-espaces propres de C_P sont donc de dimension 1.

(c) Dans le déterminant $\det(C_P - XI_n)$ on effectue les transformations élémentaires suivantes sur les lignes, dans cet ordre : $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} + XL_n, \dots, L_2 \leftarrow L_2 + XL_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2$. Les termes $-X$ de la diagonale disparaissent, et on obtient

$$\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} -X & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -P \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le développement de ce dernier déterminant par rapport à la première ligne donne $\chi_{C_P} = (-1)^n P$.

Le corps de base étant $\mathbb{C}$ et les sous-espaces propres de C_P étant des droites, C_P est diagonalisable si et seulement si toutes les racines de P sont simples.

(d) La matrice C_P est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale contenant les λ_i répétées avec leur ordre de multiplicité m_i. Alors C_P^q est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale contient les λ_i^q répétées avec le même ordre de multiplicité m_i. On en déduit que

$$\chi_{C_P^q} = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k^q)^{m_k}.$$

Or la matrice C_P est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, puisqu'il en est ainsi de P. La matrice C_P^q est donc elle aussi à coefficients dans $\mathbb{Z}$, donc son polynôme caractéristique aussi.

643. **RMS 2006 1113 CCP PC**

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\operatorname{tr} M = 0$.

SOLUTION. — Voir aussi l'exercice 673 page 440.

Soit P le polynôme $X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$. Par hypothèse, est P est un polynôme annulateur de M. Les valeurs propres de cette dernière sont donc zéro et 1. Comme M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, la condition sur la trace dit que la seule valeur propre de M est zéro. Mais alors $M - I_n$ est inversible, et la condition $M(M - I_n)^2 = 0$ est équivalente à $M = 0$.

644. **RMS 2011 1122 CCP PC**

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $m_{i,j} = a$ si $i + j$ est pair et $m_{i,j} = b$ sinon.

(a) Déterminer le rang de M.

(b) Déterminer les éléments propres de M dans le cas où le rang est maximal.

SOLUTION. — On suppose $n \geqslant 2$, on note C_j les colonnes de M et E_j les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

(a) Les colonnes paires (respectivement impaires) de M sont toutes égales à C_2 (respectivement à C_1). Par suite, $\operatorname{rg} M \leqslant 2$. Les colonnes C_1 et C_2 sont proportionnelles si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$, ou encore tel que

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b &= 0, \\ \lambda b + \mu a &= 0. \end{aligned}$$

Ce système linéaire homogène carré d'ordre 2 aux inconnues λ et μ admet une solution non nulle si et seulement si son déterminant $a^2 - b^2$ est nul. On en déduit la discussion suivante :

– Si $a^2 \neq b^2$, alors $\operatorname{rg} M = 2$.
– Si $a^2 = b^2 \neq 0$, alors $\operatorname{rg} M = 1$.
– Si $a = b = 0$, alors $M = 0$ et $\operatorname{rg} M = 0$.

(b) On se place donc dans l'hypothèse où $a + b \neq 0$ et $a - b \neq 0$, et le rang de A vaut 2. Si $n = 2$, la matrice A est inversible et l'analyse qui suit ne s'applique pas (zéro n'est pas une valeur propre). Si $n \geqslant 3$, alors zéro est valeur propre de A, et $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$ est de dimension $n - 2$. L'égalité des colonnes paires entre elles et des colonnes impaires entre elles fournit une base du noyau :

$$E_1 - E_{2j+1} \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad E_2 - E_{2j} \text{ pour } 2 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}.$$

On cherche ensuite les deux dernières valeurs propres simples ou bien la dernière valeur propre double de A.

– Si $n = 2p$ est pair, on constate que la somme des éléments des lignes de A est constante et vaut $p(a+b)$. Par suite, $p(a+b)$ est une valeur propre non nulle de A et le vecteur $U := \sum_{j=1}^{n} E_j$ est un vecteur propre associé. La dernière valeur propre λ est donnée par la trace, qui vaut la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. On obtient $0 + p(a+b) + \lambda = na = 2pa$, donc $\lambda = p(a-b) \neq 0$: cette valeur propre est distincte de $p(a+b)$ si et seulement si $b = 0$. Le vecteur $V := \sum_{j=1}^{n}(-1)^j E_j$ est manifestement propre pour $p(a-b)$, et n'est pas colinéaire à U. On a donc trouvé une base de vecteurs propres et prouvé incidemment que A est diagonalisable.
– Si $n = 2p+1$ est impair, on ne pourra pas découvrir les valeurs propres non nulles par une simple observation des colonnes comme précédemment. On nomme λ et μ ces deux dernières valeurs propres, et on utilise la trace de A et celle de A^2 :

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \operatorname{tr} A = na = (2p+1)a \,, \\ \lambda^2 + \mu^2 &= \operatorname{tr} A^2 = (p+1)[(p+1)a^2 + pb^2] + p[(p+1)b^2 + pa^2] = (2p^2+2p+1)a^2 + (2p^2+2p)b^2 \,. \end{aligned}$$

La deuxième équation se justifie ainsi : un terme d'ordre impair de la diagonale de A^2 vaut

$$\begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ \vdots \\ b \\ a \end{pmatrix} = (p+1)a^2 + pb^2 \,,$$

alors qu'un terme d'ordre pair vaut $pa^2 + (p+1)b^2$. Comme il y a $p+1$ termes d'ordre impair et p termes d'ordre pair, le résultat suit. En substituant la première équation dans la seconde, on montre que λ vérifie $\lambda^2 + [(2p+1)a - \lambda]^2 = (2p^2+2p+1)a^2 + (2p^2+2p)b^2$, ou encore $2\lambda^2 - 2a(2p+1)\lambda + [4p^2+4p+1-(2p^2+2p+1)]a^2 - (2p^2+2p)b^2 = 0$. On fait de même pour μ, et on montre finalement que λ et μ sont les deux racines du polynôme

$$P(X) := X^2 - a(2p+1)X + p(p+1)(a^2 - b^2) \,.$$

Son discriminant vaut $\Delta = a^2(4p^2+4p+1) - 4p(p+1)(a^2-b^2) = a^2 + 4p(p+1)b^2$. La matrice A possède donc, outre zéro, deux autres valeurs propres simples, sauf dans le cas où $a = \pm 2ib\sqrt{p(p+1)}$ (voir plus bas), et non nulles :

$$\lambda = \frac{a(2p+1)+\delta}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{a(2p+1)-\delta}{2} \,,$$

où δ est une racine carrée de Δ, choisie pour le reste de l'exercice. L'examen des dimensions des sous-espaces propres montre incidemment que que A est diagonalisable dans ce cas.
Soit α une de ces deux valeurs propres non nulles. Pour des raisons de symétrie, on recherche un vecteur propre X associé dont toutes les composantes d'indice impair sont égales (à x_1 donc) et toutes les composantes d'indice pair sont égales (à x_2 donc). Alors $AX = \alpha X$ équivaut au système

$$\begin{aligned} (p+1)ax_1 + pbx_2 &= \alpha x_1 \,, \\ (p+1)bx_1 + pax_2 &= \alpha x_2 \,. \end{aligned}$$

Son déterminant vaut

$$[(p+1)a - \alpha]\,[pa - \alpha] - p(p+1)b^2 = \alpha^2 - a(2p+1)\alpha + p(p+1)(a^2-b^2) = P(\alpha) = 0 \,.$$

Par suite, il existe bien un couple $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ non identiquement nulle solution de ce système, donc un vecteur colonne X non nul correspondant, qui est un vecteur propre pour la valeur propre α. Voici comment on effectue le choix de X.

- Si $b \neq 0$, le vecteur X tel que $x_{2i+1} = pb$ et $x_{2i} = (p+1)a - \alpha = \frac{a \pm \delta}{2}$ pour tout i :

$$X = \left(pb, \frac{a \pm \delta}{2}, pb, \frac{a \pm \delta}{2}, \ldots, \frac{a \pm \delta}{2}, pb \right) \,.$$

- Si $b = 0$, alors $\Delta = a^2$, on peut choisir $\delta = a$, et $\lambda = (p+1)a$ et $\mu = pa$. Le système ci-dessus s'écrivant

$$\begin{aligned} [(p+1)a - \alpha]x_1 &= 0 \,, \\ (pa - \alpha)x_2 &= 0 \,, \end{aligned}$$

on choisit

$$X = (1,0,1,0\ldots,0,1) \quad \text{ou} \quad X = (0,1,0,1\ldots,1,0) \,,$$

suivant que α vaut λ ou μ.

On traite maintenant le cas où $a = 2\varepsilon i b\sqrt{p(p+1)}$, avec a et b non nuls, et $\varepsilon = \pm 1$. Alors $\Delta = \delta = 0$, et $\lambda = \mu = a(p+1/2)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $s_1 = x_1 + x_3 + \cdots + x_{2p+1}$ la somme des composantes de X d'indice impair, et $s_2 = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2p}$ la somme des composantes de X d'indice pair. Le système $AX = \lambda X$ équivaut à

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, 1, \ldots, p\}, \quad & as_1 + bs_2 = \lambda x_{2i+1}\ , \\ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad & bs_1 + as_2 = \lambda x_{2i}\ . \end{aligned}$$

En ajoutant les $p+1$ équations d'indice impair d'une part, et les p équations d'indice pair d'autre part, et en tenant compte des relations entre a, b et λ, on obtient

$$\begin{aligned} (p+1)(as_1 + bs_2) = b(p+1)\left(2\varepsilon i\sqrt{p(p+1)}\, s_1 + s_2\right) = \lambda s_1 = 2\varepsilon i b\sqrt{p(p+1)}(p+1/2)s_1\ , \\ p(bs_1 + as_2) = bp\left(s_1 + 2\varepsilon i\sqrt{p(p+1)}\, s_2\right) = \lambda s_2 = 2\varepsilon i b\sqrt{p(p+1)}(p+1/2)s_2\ . \end{aligned}$$

Comme $b \neq 0$ et $p \geqslant 1$, on peut simplifier par b, $\sqrt{p+1}$ et $\sqrt{p}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \varepsilon i\sqrt{p}\, s_1 + \sqrt{p+1}\, s_2 = 0\ , \\ \sqrt{p}\, s_1 - \varepsilon i\sqrt{p+1}\, s_2 = 0\ . \end{aligned}$$

Ces deux équations étant équivalentes, on en déduit que $s_1 = \theta s_2$ avec $\theta = \varepsilon i\sqrt{1+1/p}$, puis que

$$X = \frac{s_2}{\lambda}\left(a\theta + b, b\theta + a, \ldots, b\theta + a, a\theta + b\right)\ ,$$

où s_2 est un nombre complexe quelconque. Dans ce cas, le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1, alors que la multiplicité de λ est 2 : la matrice A n'est pas diagonalisable.

645. **RMS 2012 1315 CCP PC**

Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Solution. — Le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de A, donc ses valeurs propres sont parmi $0, 1, 2$. De plus, A est inversible, donc ses valeurs propres sont finalement 1 ou 2. On note m_1 et m_2 leurs multiplicités. L'hypothèse portant sur la trace montre que $1 \times m_1 + 2 \times m_2 = 8$ (trigonaliser A). Par ailleurs, comme le degré de χ_A vaut 6, il faut que $m_1 + m_2 = 6$. Il existe une unique solution : $m_1 = 4$ et $m_2 = 2$, donc

$$\chi_A = (X-1)^4(X-2)^2.$$

646. **RMS 2012 1316 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr} A \in 2\mathbb{N}$.

Solution. — Le polynôme $X^4 - 2X^3 + 2X^2 = X^2(X^2 - 2X + 2) = X^2(X - (1+i))(X - (1-i))$ est annulateur de A, donc les valeurs propres complexes de A sont parmi zéro, $\lambda := 1 + i$ et $\bar{\lambda} = 1 - i$. On note m_0, m et m' leur multiplicités respectives, éventuellement nulles au cas où le nombre en question n'est pas valeur propre de A. Comme A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, on a $\operatorname{tr} A = 0 \times m_0 + \lambda m + \bar{\lambda} m' = m + m' + i(m - m')$. Enfin, comme A est à coefficients réels, sa trace est réelle, donc $m = m'$, donc

$$\operatorname{tr} A = 2m \in 2\mathbb{N}.$$

647. **RMS 2012 1318 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$. Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Solution. — Comme $\det(A) = \chi_A(0) \neq 0$, la matrice A est inversible. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det\left(A^{-1} - \lambda I_n\right) = \det\left(A^{-1}\lambda\left[\lambda^{-1}I_n - A\right]\right) = \lambda^n \det\left(A^{-1}\right)\det\left(-\left[A - \lambda^{-1}I_n\right]\right) = (-1)^n\frac{\lambda^n}{\det A}\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

On en déduit l'égalité de polynômes suivante [la notation χ_A^* désigne le polynôme réciproque de χ_A, défini par $\chi_A^* = X^n\chi_A(1/X)$] :

$$\chi_{A^{-1}} = \frac{(-1)^n}{\det A}\chi_A^*.$$

Algèbre linéaire : réduction d'endomorphismes ou de matrices explicites

648. **RMS 2011 1115 CCP PC**

Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Solution. — On note A la matrice en question et on calcule son polynôme caractéristique, au moyen de la règle de Sarrus par exemple :

$$\chi_A = -X^3 - zX = -X(X^2 + z)\,.$$

Si $z \neq 0$, il admet deux racines carrées complexes distinctes et non nulles, donc χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Si $z = 0$, le spectre de A est réduit au singleton $\{0\}$, et A n'est pas diagonalisable sinon elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est pas le cas.

En conclusion A est diagonalisable si et seulement si $z \neq 0$.

649. **RMS 2007 936 CCP PC**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} A$.

(b) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(c) Préciser les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

(a) Si $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ a pour composantes x, y et z, alors l'équation $AX = 0$ équivaut au système

$$\begin{cases} az &= 0\,, \\ bz &= 0\,, \\ ax + by + cz &= 0\,. \end{cases}$$

On discute suivant les valeurs des paramètres.

i. Si $a = b = c = 0$, alors $A = 0$ et $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}^3$.

ii. Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors le système équivaut à $z = 0$ et $\operatorname{Ker} A$ est le plan d'équation $z = 0$.

iii. Si a ou b est non nul, alors le système équivaut à $z = 0$ et $ax + by = 0$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} A$ est la droite engendrée par le vecteur $(b, -a, 0)$.

(b) On obtient (par la règle de Sarrus, ou tout autre moyen) :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 0 & a \\ 0 & -X & b \\ a & b & c - X \end{vmatrix} = -X^3 + cX^2 + (a^2 + b^2)X = -X\left[X^2 - cX - (a^2 + b^2)\right]\,.$$

(c) On reprend la discussion de la question (a) :

i. Si $a = b = c = 0$, alors $A = 0$, sa seule valeur propre est zéro, tous les vecteurs non nuls sont propres et A est évidemment diagonalisable.

ii. Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors $\chi_A = -X^2(X - c)$, donc A possède deux valeurs propres distinctes : zéro, qui est double, et c, qui est simple. Comme on a vu à la question (a) que $\dim E_0(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) = 2 = m_0$, la matrice A est diagonalisable.

iii. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le discriminant du polynôme $X^2 - cX - (a^2 + b^2)$ vaut $c^2 + 4(a^2 + b^2)$. On note δ un complexe (éventuellement nul) tel que $\delta^2 = \Delta$.

– Si $\Delta \neq 0$, alors les valeurs propres de A sont 0, $\lambda = \frac{c+\delta}{2}$ et $\mu = \frac{c-\delta}{2}$.

A. Si $a^2 + b^2 \neq 0$, alors A est diagonalisable car elle a 3 valeurs propres distinctes.

B. Si $a^2 + b^2 = 0$. Dans ce cas on peut choisir $\delta = c$ et $\lambda = c$, $\mu = 0$ donc A n'est pas diagonalisable car on a vu que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, alors que zéro est valeur propre de multiplicité 2.

– Si $\Delta = 0$, alors les valeurs propres de A sont 0, λ et λ, avec $\lambda = \frac{c}{2}$.

A. Si $c = 0$, alors A n'est pas diagonalisable car zéro est valeur propre triple alors que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

B. Si $c \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable non plus, car $\lambda = \frac{c}{2}$ est valeur propre double mais la matrice non inversible

$$B = A - \frac{c}{2} I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 & a \\ 0 & -\frac{c}{2} & b \\ a & b & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 puisque $c \neq 0$, donc $\dim \operatorname{Ker}(A - \frac{c}{2} I_3) = 1 < m_{c/2}$.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$ (auquel cas elle *est diagonale*), ou si on a $a^2 + b^2 \neq 0$ et $4(a^2 + b^2) + c^2 \neq 0$.

650. **RMS 2010 1047 CCP PC**

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer J^2. La matrice J est-elle inversible ? Montrer que J est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M(a, b) = aI_3 + bJ$. Montrer que $M(a, b)$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. À quelle condition est-elle inversible ?

(c) Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + e^x)J$. Calculer $F(x)F(y)$ et la seconde $G(x)G(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $F(x)$ et $G(x)$ sont inversibles et déterminer leurs inverses.

Solution. —

(a) On obtient $J^2 = J$, donc J est la matrice d'un projecteur qui n'est manifestement pas l'identité, donc qui n'est pas inversible (on peut aussi calculer $\det J$). En tant que matrice d'un projecteur, son rang est égal à sa trace, qui vaut 2, donc il s'agit d'un projecteur sur un plan. Alors J est semblable à $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$: elle est diagonalisable, ses valeurs propres zéro (simple) et 1 (double).

(b) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}JP = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$. Alors

$$P^{-1}M(a, b)P = aI_3 + P^{-1}JP = \operatorname{diag}(a + b, a + b, a)\,,$$

ce qui montre que $M(a, b)$ est diagonalisable de valeurs propres $a + b$ (double) et a (simple), sauf si $b = 0$, auquel cas $M(a, b) = aI_3$.

(c) En profitant de la relation $J^2 = J$, on calcule

$$F(x)F(y) = I_3 + [(-1 + e^x) + (-1 + e^y) + (-1 + e^x)(-1 + e^y)]J = I_3 + (-1 + e^{x+y})J = F(x + y)\,,$$
$$G(x)G(y) = I_3 + [-(1 + e^x) - (1 + e^y) + (1 + e^x)(1 + e^y)]J = I_3 + (-1 + e^{x+y})J = F(x + y)\,.$$

Comme $F(0) = I_3$, on en déduit que $F(x)F(-x) = G(x)G(-x) = I_3$, donc que $F(x)$ et $G(x)$ sont inversibles, d'inverses respectifs $F(-x)$ et $G(-x)$.

651. **RMS 2010 1048 CCP PC**

Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -8 & -11 & -4 \\ 12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer $\det(M - XI_3) = (1 - X)^3$. La matrice M est -elle diagonalisable ?

(b) Montrer que $M = I_3 + N$ où $N^2 = 0$.

(c) Déterminer la limite de M^n/n quand n tend vers $+\infty$.

Solution. —

(a) Pour montrer que $\det(M - XI_3) = (1 - X)^3$, il suffit de développer. Si M était diagonalisable, comme 1 est son unique valeur propre, elle serait semblable à I_3, donc serait égale à I_3. Ce n'est pas le cas, donc M n'est pas diagonalisable.

(b) Il suffit de vérifier que $(M - I_3)^2 = 0$.

(c) Comme $M = I_3 + N$, comme I_3 et N commutent, et comme $N^2 = 0$, la formule du binôme donne $M^n = I_3 + nN$. Par conséquent, M^n/n tend vers N quand n tend vers $+\infty$.

652. **RMS 2010 1044 CCP PC**

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) On pose $s = \operatorname{tr} A$ et $B = 2A - sI_n$. À quelle condition la matrice B est-elle diagonalisable ? À quelle condition est-elle inversible ?

Solution. —

(a) Ayant n colonnes identiques et non nulles, la matrice A est de rang 1. On en déduit que zéro est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, on peut nommer λ la dernière valeur propre (*a priori* complexe) de A, et on sait que $(n-1)\times 0 + \lambda = \lambda = \operatorname{tr} A = s = \sum_{i=1}^n a_i$. On distingue alors deux cas :
- Si $s = 0$, alors zéro est l'unique valeur propre de A, d'ordre n, et A est pas diagonalisable car $E_0(A)$ est un hyperplan comme on l'a précisé plus haut.
- Si $s \neq 0$, alors s est une valeur propre de A d'ordre 1, donc $\dim E_1(s) = 1$. L'autre valeur propre étant alors zéro d'ordre exactement $n-1$ avec $\dim E_0(A) = n-1$, la matrice A est diagonalisable.

(b) Comme $P^{-1}BP = 2P^{-1}AP - sI_n$ pour tout matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices A et B sont ou ne sont pas diagonalisables en même temps. La question (a) dit alors que B est diagonalisable si et seulement si $s \neq 0$.

De plus, $\lambda \mapsto 2\lambda - s$ réalise une bijection du spectre de A sur celui de B. Les valeurs propres de B sont donc $-s$ (d'ordre au moins $n-1$) et s d'ordre au moins 1. Par suite, B est inversible si et seulement si $s \neq 0$.

653. **RMS 2011 1116 CCP PC**

Soit A la matrice carrée d'ordre n avec des zéros sur la diagonale et des 1 en dehors.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $B = A + I_n$. Calculer B^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.

(c) Déterminer le spectre de A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, comment calculer son inverse ?

Solution. —

(a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable (théorème spectral).

(b) On obtient $B^2 = nB$, c'est-à-dire $B(B - nI_n) = 0$, ou encore $(A + I_n)(A - (n-1)I_n) = 0$. On en déduit que le polynôme
$$P = (X+1)(X-(n-1)) = X^2 + (2-n)X + 1 - n$$
est annulateur de A.

(c) Les valeurs propres de A sont parmi les nombres -1 et $n-1$, qui sont les racines de P. Comme elle est diagonalisable, si elle n'avait qu'une seule valeur propre λ parmi ces deux nombres, elle serait semblable à λI_n donc égale à λI_n, ce qui n'est pas le cas. On conclut que
$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, n-1\}\,.$$
La matrice A est inversible, puisque son spectre ne contient pas zéro. On calcule A^{-1} en utilisant le polynôme annulateur P : comme $A^2 + (2-n)A + (1-n)I_n = A(A + (2-n)I_n) + (1-n)I_n = 0$, on en déduit que $AC = I_n$ avec $C = [A + (2-n)I_n]/(n-1)$, donc que
$$A^{-1} = C = \frac{1}{n-1}\left[A + (2-n)I_n\right]\,.$$

654. **RMS 2011 1119 CCP PC**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution. — Un polynôme P est dans le noyau de u si et seulement si $P(-4) = P(6) = 0$, c'est-à-dire que
$$\operatorname{Ker} u = \{(X+4)(X-6)Q(X),\ Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}\,.$$
L'application $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \mapsto (X+4)(X-6)Q(X)$ étant une bijection sur $\operatorname{Ker} u$, et étant manifestement linéaire, c'est un isomorphisme (on convient que $\mathbb{R}_{n-2}[X] = \{0\}$ si $n = 1$). Par suite, $\dim(\operatorname{Ker} u) = n-1$ et la formule du rang assure que $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - (n-1) = 2$. Comme l'image est manifestement contenue dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, on conclut que
$$\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]\,.$$
On peut aussi, après avoir constaté que $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_1[X]$, calculer $u((X-6)/2) = X$ et que $u((X+4)/10) = 1$, donc que l'image de u contient la base canonique $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, ce qui permet de conclure.

Si $u(P) = \lambda P$ avec $\lambda \neq 0$, il faut que $\deg(P) = \deg(\lambda P) = \deg(u(P)) \leqslant 1$. On recherche donc les polynômes propres associés à une éventuelle valeur propre λ non nulle sous la forme $aX + b$. En d'autres termes, les valeurs propres non nulles de u sont celles de l'endomorphisme induit $v = u_{/\!/\mathbb{R}_1[X]}$. Or $v(1) = u(1) = X+1$ et $v(X) = u(X) = -4X+6$, donc la matrice de v dans la base canonique $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Comme $\chi_M = X^2 + 3X - 10 = (X-2)(X+5)$, on sait que u possède deux autres valeurs propres (mis à part zéro), qui sont 2 et -5, et que les sous-espaces propres correspondants sont des droites. En résolvant $MX = 2X$ et $MX = -5X$, on trouve aisément (on a résumé les tous les résultats ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(u) &= \{0, 2, -5\} \text{ si } n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \{2, -5\} \text{ si } n = 1, \\ E_0(u) &= \{(X+4)(X-6)Q(X),\ Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\} \text{ si } n \geqslant 2\,, \\ E_2(u) &= \mathrm{Vect}(X+6)\,, \\ E_{-5}(u) &= \mathrm{Vect}(X-1)\,. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, la somme des dimension des espaces propres vaut $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc u est diagonalisable.

655. **RMS 2010 1046 CCP PC, RMS 2011 1120 CCP PC**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$.

(a) Montrer que Φ est un automorphisme si et seulement si $a+b+c \neq 0$.

(b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = (a+b+c)P(X) + \sum_{k=1}^n \frac{2^k a+b}{k!} P^{(k)}(X)$.

(c) On suppose que $a+b+c = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si et seulement si $2a+b \neq 0$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$ dans ce cas.

(d) On suppose que $a+b+c \neq 0$. Déterminer les valeurs propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?

Solution. —

(a) On calcule $\Phi(X^k) = a(X+2)^k + b(X+1)k + cX^k = (a+b+c)X^k + \text{termes de degré} < k$. Par suite, la matrice de Φ sur la base canonique est triangulaire supérieure et tous les termes diagonaux valent $a+b+c$, donc $\det(\Phi) = (a+b+c)^{n+1}$. L'équivalence demandée en résulte immédiatement.

(b) La formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ implique que $P(X+x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{x_0^k}{k!} P^{(k)}(X)$. En l'appliquant successivement à $x_0 = 1$ et $x_0 = 2$, et en isolant le terme d'indice $k = 0$, on obtient la relation souhaitée.

(c) Si $a+b+c = 0$, la question (a) montre que $\deg \Phi(X^k) < k$, donc que $\deg \Phi(P) < \deg P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par suite, $\mathrm{Im}\,\Phi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $\deg \Phi(P) < n-1$ si $\deg P < n$, comme un polynôme Q de degré n s'écrit sous la forme $\alpha X^n + P$ avec $\deg P < n$ et $\alpha \neq 0$, les questions (a) et (b) donnent

$$\Phi(Q) = \frac{2^1 a+b}{1!}(\alpha X^n)' + \sum_{k=2}^n \frac{2^k a+b}{k!}(\alpha X^n)^{(k)} + \Phi(P) = n\alpha(2a+b)X^{n-1} + \text{termes de de degré} < n-1.$$

On constate alors que $\Phi(Q)$ est de degré $n-1$ si et seulement si $2a+b \neq 0$, ce qui prouve l'équivalence demandée.

(d) La matrice de Φ calculée à la question (a) montre que $a+b+c$ est l'unique valeur propre de Φ, d'ordre $n+1$ par conséquent. La question (b) montre alors que Φ est diagonalisable si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^k a+b}{k!} P^{(k)}(X) = 0\,.$$

On discute ensuite suivant la valeur de n.

i. Si $n \geqslant 2$, il existe P de degré 2 et la famille (P', P'') est libre. La condition ci-dessus entraîne alors que

$$\begin{cases} a+b &= 0\,, \\ 2a+b &= 0\,. \end{cases}$$

On en déduit que $a = b = 0$. Réciproquement, si $a = b = 0$, alors $\Phi = c\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ est évidemment diagonalisable.

ii. Si $n = 1$, on calcule $\Phi(1) = a+b+c$ et $\Phi(X) = (a+b+c)X + (2a+b)$, donc Φ est diagonalisable si et seulement si $2a+b = 0$.

iii. Si $n = 0$, l'endomorphisme Φ est diagonalisable puisque $\dim \mathbb{R}_0[X] = 1$.

656. **RMS 2012 1314 CCP PC**

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. — Voir aussi l'exercice 100 page 138.

Comme les colonnes de A sont proportionnelles et non nulles ($C_2 = C_1/a$ et $C_3 = C_1/a^2$), le rang de A vaut 1. Alors zéro est valeur propre de A, et le noyau $E_0(A)$ est de dimension 2, donc $m_0 \geqslant 2$. Il reste une dernière valeur propre à découvrir, notée λ.

- Ou bien $\lambda = 0$, et alors $\dim E_0(A) < m_0 = 3$, donc A n'est pas diagonalisable.
- Ou bien $\lambda \neq 0$, et alors $\dim E_\lambda(A) = 1$ nécessairement, et A est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3.

On obtient λ grâce à la trace : $\operatorname{tr} A = 3 = 2 \times 0 + \lambda$, donc $\lambda = 3 \neq 0$. Par suite, A est diagonalisable.

657. **RMS 2012 1320 CCP PC**

Soient $n \geqslant 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = P(-4)X + P(6)$.

(a) Déterminer l'image et le noyau de u.

(b) Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution. —

(a) Il est clair que $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_1[X]$. Comme il existe (polynômes d'interpolation de Lagrange) un polynôme P_1 tel que $P_1(-4) = 0$ et $P_1(6) = 1$ et un polynôme P_2 tel que $P_2(-4) = 1$ et $P_2(6) = 0$ tels que $u(P_1) = 1$ et $u(P_2) = X$, donc

$$\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X].$$

Par ailleurs, le noyau de u est formé des polynômes P tels que $P(-4) = P(6) = 0$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Ker} u = \{(X+4)(X-6)Q, \quad Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}.$$

Il est de dimension $n - 2 + 1 = n - 1$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'équation $u(P) = \lambda P$ est alors équivalente à $P = u(P)/\lambda$, donc $\deg(P) \leqslant 1$. On peut donc rechercher les valeurs propres non nulles de u en examinant l'endomorphisme v induit par u sur $\mathbb{R}_1[X]$. Sur la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, la matrice de v et son polynôme caractéristique sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^2 - 3X - 10 = (X-5)(X+2).$$

On en déduit que

$$\operatorname{Sp} u = \{0, 5, -2\},$$

avec 5 et -2 valeurs propres simples. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n - 1 + 1 + 1 = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que u est diagonalisable.

Algèbre linéaire : réduction, problèmes théoriques

658. **RMS 2011 1121 CCP PC**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(a) Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.

(b) En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.

(c) Montrer qu'il existe un unique n–uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

(d) Déterminer la dimension du commutant de f.

Solution. —

(a) Soit x un vecteur propre de f, pour la valeur propre λ_i. Alors $f(x) = \lambda_i x$, donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$, ce qui montre que $g(x) \in E_{\lambda_i}(f)$. Mais comme f possède n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n, tous les sous-espaces propres de f sont des droites. Comme x est un vecteur non nul de la droite $E_{\lambda_i}(f)$, il engendre cette droite, donc le vecteur $g(x)$, qui appartient à cette droite, est colinéaire à x : il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x) = \alpha_i x\,,$$

ce qui prouve que x est aussi un vecteur propre de g.

(b) Comme l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ possède n valeurs propres distinctes, la somme des dimension des sous-espaces propres de f vaut au moins n, donc vaut n, puisqu'elle ne peut dépasser n. Par suite f est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ une base propre pour f. D'après la question précédente, c'est aussi une base propre pour g.

(c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base propre commune à f et g, pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivement. On note P le polynôme inconnu $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. L'égalité $g = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$ équivaut au système formé par les n égalités $g(e_k) = (a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1})(e_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, ou encore au système

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(\lambda_k) = \alpha_k \,.$$

Or on sait que, des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts et des scalaires quelconques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant donnés, il existe un unique polynôme de degré au plus $n-1$ vérifiant le système ci-dessus : c'est le polynôme d'interpolation de Lagrange, donné par

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k \quad \text{où} \quad L_k = \prod_{0 \leqslant i \leqslant n-1,\ i \neq k} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \,.$$

L'existence et l'unicité du n–uplet $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$ est établie.

(d) On va démontrer que le commutant de f vaut

$$\mathcal{F} := \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1}) \,.$$

La question précédente montre que le commutant de$f$ est inclus dans $\mathcal{F}$. Comme tout polynôme en f commute avec f, l'inclusion réciproque est claire. Il suffit alors de calculer la dimension de $\mathcal{F}$. Pour cela, on montre que la famille $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$ est libre. On suppose que $0 = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$. Comme l'endomorphisme nul commute avec f, et comme on a bien sûr $0 = 0 \cdot \mathrm{id} + 0 \cdot f + \cdots + 0 \cdot f^{n-1}$, la propriété d'unicité établie à la question précédente montre que $a_k = 0$ pour tout k.
La famille $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$ étant libre,

$$\dim \mathcal{F} = n.$$

659. **RMS 2010 1051 CCP PC**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

(a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\, f \neq 0$.

(b) On suppose que $\mathrm{tr}\, f \neq 0$. Déterminer f^k pour $k \geqslant 1$. Caractériser l'endomorphisme $g = f/(\mathrm{tr}\, f)$.

Solution. —

(a) Comme $\mathrm{rg}\ f = 1$, le noyau de f est de dimension $n-1$, donc f admet zéro comme valeur propre d'ordre au moins $n-1$. Soit λ la dernière valeur propre de f. Si $\lambda = 0$, alors f n'est pas diagonalisable car $\dim E_0(f) = n - 1 < m_0 = n$. Si $\lambda \neq 0$, elle est nécessairement simple, et f est diagonalisable puisque $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} \dim E_\lambda(f) = \dim E_0(f) + \dim E_\lambda(f) = n - 1 + 1 = n$.

Il suffit donc de déterminer si la dernière valeur propre de f est nulle ou pas. Or λ est donnée par la trace : $\mathrm{tr}\, f = (n-1)0 + \lambda$, donc $\lambda = \mathrm{tr}\, f$, ce qui répond à la première question de l'exercice.

(b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre de f, où e_1 est associé à la valeur propre $\mathrm{tr}\, f$, les autres vecteurs appartenant au noyau de f. On en déduit que $f^k(e_1) = (\mathrm{tr}\, f)^k e_1$ et $f^k(e_p) = 0$ pour tout $p \geqslant 2$, ce qui prouve l'identité

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^k = (\mathrm{tr}\, f)^{k-1} f \,.$$

Enfin, comme g vérifie $g(e_1) = e_1$ et $g(e_p) = 0$ pour tout $p \geqslant 2$, on reconnaît que g est le projecteur sur l'image de f parallèlement au noyau de f.

660. **RMS 2012 1319 CCP PC**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

(a) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

(b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Solution. —

(a) Comme $(f \circ f)^2 = f \circ f$, le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est annulateur de f, donc le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

(b) Si l'endomorphisme f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f sur $\mathcal{B}$ soit
$$\operatorname{diag}(-1,\dots,-1,0,\dots,0,1,\dots,1).$$
Comme $\lambda^3=\lambda$ pour tout $\lambda\in\{-1,0,1\}$, on en déduit que $A^3=A$, donc que $f^3=f$.
Réciproquement, si $f^3=f$, le polynôme $X^3-X=X(X-1)(X+1)$ est annulateur de f, et comme il est scindé à racine simple, f est diagonalisable.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

661. **RMS 2010 1053 CCP PC**

Soient $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $H=\{P\in E,\ P(1)=0\}$. On munit E du produit scalaire défini par $\langle a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3, b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3\rangle=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

(a) Donner la dimension et une base de H.

(b) Déterminer le projeté orthogonal de P sur H.

Solution. —

(a) Comme H est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi\colon P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto P(1)$, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, donc il est de dimension 3. Les polynômes $X-1$, $(X-1)^2$ et $(X-1)^3$ appartiennent manifestement à H, et forment une famille échelonnée en degré, donc constituent une base de H.

(b) On comprend que P désigne ici un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme $\dim H=3$, l'orthogonal de H est une droite D. Si Q est l'un des deux vecteurs unitaires sur cette droite, le projeté orthogonal de P sur D est donné par $\langle Q,P\rangle Q_0$, donc celui sur H vaut
$$P-\langle Q,P\rangle Q_0\,.$$
On cherche Q sous la forme $a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$. Il est défini, à un facteur ±1 près, par les trois conditions $\langle Q,(X-1)^k\rangle=0$ pour $k\in\{1,2,3\}$, c'est-à-dire par le système
$$\begin{cases} a_0+a_1 & = & 0\,,\\ a_0-2a_1+a_2 & = & 0\,,\\ a_0-3a_1+3a_2-a_3 & = & 0\,,\end{cases}$$
et par la condition de normalisation $\sum_{k=0}^3 a_k^2=1$. Le système se résout facilement en $a_0=a_1=a_2=a_3$, et la condition de normalisation donne $a_k^2=1/4$ pour tout k. On choisit $Q=(X^2+X^2+X+1)/2$. Alors, si $P=b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3$, son projeté orthogonal sur H vaut
$$b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3-\frac{b_0+b_1+b_2+b_3}{4}(X^3+X^2+X+1)\,.$$

662. **RMS 2010 1054 CCP PC**

On munit $\mathbb{R}[X]$ de son produit scalaire canonique. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution. — Le produit scalaire canonique étant celui qui rend orthonormale la base canonique, le projeté en question est nul.

663. **RMS 2007 939 CCP PC**

Déterminer la matrice canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,0),(1,1,0,1)\}$.

Solution. — On note (x,y) le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^4$, e_1 et e_2 les vecteurs de l'énoncé, et P le plan qu'ils engendrent. On commence par construire une base orthonormale de P par le procédé de Gram et Schmidt. Pour cela, $e_2'=e_2-(e_2,e_1)e_1/\|e_1\|^2=(1,1,0,1)-(2/3)(1,1,1,0)=(1/3,1/3,-2/3,1)$ est orthogonal à e_1 et appartient à P, et la famille (f_1,f_2) avec $f_1=e_1/\|e_1\|$ et $f_2=e_2'/\|e_2'\|$ est une base orthonormale de P :
$$f_1=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1,0)\,,$$
$$f_2=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,-2,3)\,.$$

Le cours affirme alors que l'expression de la projection orthogonale p sur P est $\forall x\in\mathbb{R}^4,\ p(x)=(x,f_1)f_1+(x,f_2)f_2$. Si $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, on obtient

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1,0)+\frac{x_1+x_2-2x_3+3x_4}{15}(1,1,-2,3)\,,\\&=\frac{1}{15}(6x_1+6x_2+3x_3+3x_4,6x_1+6x_2+3x_3+3x_4,3x_1+3x_2+9x_3-6x_4,3x_1+3x_2-6x_3+9x_4)\,.\end{aligned}$$

On en déduit la matrice de p souhaitée :

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&6&3&3\\6&6&3&3\\3&3&9&-6\\3&3&-6&9\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&2&1&1\\2&2&1&1\\1&1&3&-2\\1&1&-2&3\end{pmatrix}.$$

664. **RMS 2011 1125 CCP PC**

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x\in E,\ \|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Solution. — C'est une question de cours. On appelle F (respectivement G) l'image (respectivement le noyau) de p, de sorte que $E=F\oplus G$ et que, si $x\in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $y+z$ avec $y\in F$ et $y\in G$, on ait $p(x)=p(y+z)=y$.

Sens direct. On suppose que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que F et G sont orthogonaux. Soit $x=y+z\in E$, avec $(y,z)\in F\times G$. Alors $\|p(x)\|^2=\|y\|^2$ et $\|x\|^2=\|y+z\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$ en vertu du théorème de Pythagore, donc il est vrai que $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Sens réciproque. On suppose que $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$ pour tout $x\in E$, et on se donne $y\in F$ et $z\in G$. On souhaite démontrer que $\langle y,z\rangle=0$, ce qui établira que F et G sont orthogonaux, donc que p est un projecteur orthogonal. Pour cela, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on considère le vecteur $x_t:=ty+z$. Comme

$$\|p(x_t)\|^2=t^2\|y\|^2\leqslant\|x_t\|^2=t^2\|y\|^2+2t\langle y,z\rangle+\|z\|^2$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, on en déduit que $2t\langle y,z\rangle+\|z\|^2\geqslant 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Or, si une fonction affine est positive sur $\mathbb{R}$, il faut que sa pente soit nulle, donc $\langle y,z\rangle=0$: c'est fait.

665. **RMS 2006 1119 CCP PC**

Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.

(a) Montrer : $\forall x\in E,\ \|p(x)\|^2=\langle p(x),x\rangle$.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^n\|p(e_i)\|^2=r$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 866 page 542.

(a) On sait qu'un projecteur d'un espace euclidien E est orthogonal si et seulement s'il est un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire s'il vérifie $\langle x,p(y)\rangle=\langle p(x),y\rangle$ pour tous vecteurs x et y de E. Ici, p est supposé orthogonal, donc

$$\forall x\in E,\quad \|p(x)\|^2=\langle p(x),p(x)\rangle=\langle p\circ p(x),x\rangle=\langle p(x),x\rangle\,.$$

(b) On note $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de p sur la base e. En appliquant la question (a), on obtient $\|p(e_i)\|^2=\langle p(e_i),e_i\rangle=\langle\sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j,e_i\rangle=a_{i,i}$ car la base e est orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^n\|p(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^n a_{i,i}=\operatorname{tr}(A)=r\,,$$

car on sait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

666. **RMS 2011 1126 CCP PC**

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2.

(a) Si $k\in\{1,2\}$, montrer que la symétrie orthogonale par rapport à H_k est l'application $s_k\colon x\mapsto x-2\langle x,e_k\rangle e_k$.

(b) Montrer que $x\in E$ est fixe par $s_2\circ s_1$ si et seulement si $x\in H_1\cap H_2$.

(c) Vérifier que la somme $F = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ est bien directe et que F est stable par $s_2 \circ s_1$.

(d) Soit e_1' tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_1')$ soit une base orthonormée directe de F. Montrer qu'il existe une unique rotation r de F tel que $r(e_1) = e_2$. Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de F induit par $s_2 \circ s_1$ à l'aide de r.

Solution. —

(a) Il s'agit d'une question de cours. Soit $x \in E$. Il s'écrit de manière unique $y + z$ avec $y \in H_k$ et $z \in H_k^\perp$, c'est-à-dire z colinéaire à e_k : il existe un nombre réel λ tel que $z = \lambda e_k$. On le calcule en évaluant

$$\langle x, e_k \rangle = \langle y, e_k \rangle + \lambda \langle e_k, e_k \rangle = \lambda\,,$$

car e_k est orthogonal à H_k et unitaire. On en déduit que $z = \langle x, e_k\rangle e_k$ et $y = x - \langle x, e_k\rangle e_k$. Comme $s(x) = y - z$ par définition, on obtient bien

$$\forall x \in E, \quad s_k(x) = x - 2\langle x, e_k\rangle e_k\,.$$

(b) Sens direct. Si x est fixe par $s_2 \circ s_1$, alors $s_2(s_1(x)) = x$, donc $s_1(x) = s_2(x)$, en composant à gauche par s_2 et en utilisant l'égalité $s_2^2 = \mathrm{id}_E$. D'après la question (a), on a $x - 2\langle x, e_1\rangle e_1 = x - 2\langle x, e_2\rangle e_2$, donc

$$\langle x, e_1\rangle e_1 = \langle x, e_2\rangle e_2\,.$$

Comme H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, et on en déduit que $\langle x, e_1\rangle = \langle x, e_2\rangle = 0$, donc que $x \in H_1 \cap H_2$.

Sens réciproque. Si $x \in H_1 \cap H_2$, alors $s_1(x) = x$ car $x \in H_1$, puis $s_2(s_1(x)) = s_2(x) = x$, car $x \in H_2$. Finalement, x est fixe par $s_2 \circ s_1$.

(c) Les sous-espaces $H_1^\perp$ et $H_2^\perp$ sont les droites vectorielles engendrées par e_1 et e_2 respectivement. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, la somme $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ est bien directe.

D'après la question (a),

$$\begin{aligned}(s_2 \circ s_1)(e_1) &= s_2(-e_1) = -e_1 + 2\langle e_1, e_2\rangle e_2\,,\\ (s_2 \circ s_1)(e_2) &= s_2(e_2 - 2\langle e_1, e_2\rangle e_1) = -e_2 - 2\langle e_1, e_2\rangle (e_1 - 2\langle e_1, e_2\rangle e_2)\,.\end{aligned}$$

On lit ci-dessus que les images par $s_2 \circ s_1$ de e_1 et e_2 appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = F$, c'est-à-dire que F est stable par $s_2 \circ s_1$.

(d) Le sous-espace F est un plan euclidien orienté par le choix de la base $\mathcal{B}$. On sait alors qu'une rotation de ce plan est entièrement définie par son angle, et que cet angle est $\widehat{x, r(x)}$ quel que soit le vecteur x non nul de F. En particulier, comme $r(e_1) = e_2$, la rotation r est l'unique rotation d'angle $\theta := \widehat{e_1, e_2}$ du plan euclidien orienté F.

On note u l'endomorphisme de F induit par $s_2 \circ s_1$. C'est un automorphisme orthogonal de F puisque s_1 et s_2 sont des automorphismes orthogonaux de E. Par suite, u est soit une rotation, soit une réflexion orthogonale de F, suivant que son déterminant est positif ou négatif. On tranche d'abord ce premier point, en notant $\mathcal{C}$ la base (e_1, e_2) de F. Comme $s_1(e_1) = -e_1$ et $s_1(e_2)$ est de la forme $e_2 + \lambda e_1$ pour un certain scalaire λ, les propriétés de multilinéarité et d'alternance du déterminant montrent que

$$\det\left(s_{1/\!/F}\right) = \det_{\mathcal{C}}(s_1(e_1), s_1(e_2)) = \det_{\mathcal{C}}(-e_1, e_2 + \lambda e_1) = -\det_{\mathcal{C}}(e_1, e_2) = -1\,.$$

On montrerait de même que $\det\left(s_{2/\!/F}\right) = -1$, et par conséquent que

$$\det(u) = \det\left((s_2 \circ s_1)_{/\!/F}\right) = \det\left(s_{2/\!/F}\right)\det\left(s_{1/\!/F}\right) = 1\,.$$

Par suite, u est une rotation de F. Il suffit de calculer son angle pour la déterminer entièrement. Dans la base $\mathcal{B}$ les composantes de e_1 sont $(1, 0)$ et celles de e_2 sont $(\cos\theta, \sin\theta)$. Les calculs menés à la question précédente montre que les composantes de $(s_2 \circ s_1)(e_1)$ dans $\mathcal{B}$ sont $-(1,0) + 2\cos\theta(\cos\theta, \sin\theta) = (2\cos^2\theta - 1, 2\cos\theta\sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, donc u est la rotation de F d'angle $2\theta = 2\langle e_1, e_2\rangle$, ou encore

$$u = (s_2 \circ s_1)_{/\!/F} = r^2\,.$$

667. **RMS 2012 1321 CCP PC**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 x f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur $\mathrm{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

Solution. — La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Si $f \in E$, comme $x \mapsto x f^2(x)$ est positive sur $[0,1]$ et continue, l'égalité $(f, f) = \int_0^1 x f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$ implique que $x f(x)^2 = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Cela implique que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$, puis que $f(0) = 0$ par continuité de f. Par suite, on dispose bien d'un produit scalaire sur E.

On note e_0 la fonction $x \mapsto 1$, puis e_1 la fonction $x \mapsto x$, et enfin e_2 la fonction $x \mapsto x^2$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram et Schmidt à la famille (e_1, e_2). Comme $\|e_1\|^2 = \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = 1/4$, on pose

$$e_1' = 2e_1 : x \mapsto 2x.$$

On calcule ensuite $(e_1', e_2) = \int_0^1 2x^4 \, \mathrm{d}x = 2/5$, puis $e_2 - (e_1', e_2)e_1' : x \mapsto x^2 - 4x/5$. et enfin $\int_0^1 x(x^2 - 4x/5)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^5 - 8x^4/5 + 16x^3/25) \, \mathrm{d}x = 1/6 - 8/25 + 4/25 = 1/(6 \times 25)$. On pose donc

$$e_2' = 5\sqrt{6} \left(e_2 - (e_1', e_2)e_1'\right) : x \mapsto \sqrt{6} \left(5x^2 - 4x\right).$$

Alors (e_1', e_2') est une base orthonormale du plan $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et le cours affirme que le projeté orthogonal de e_0 sur P vaut $(e_1', e_0)e_1' + (e_2', e_0)e_2'$. On calcule $(e_1', e_0) = \int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x = 2/3$ et $(e_2', e_0) = \int_0^1 \sqrt{6}x(5x^2 - 4x) \, \mathrm{d}x = \sqrt{6}(5/4 - 4/3) = -\sqrt{6}/12$. Le projeté orthogonal cherché est

$$x \mapsto \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}(5x^2 - 4x) = \frac{10}{3}x - \frac{5}{2}x^2.$$

668. **RMS 2012 1322 CCP PC**

Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) \, \mathrm{d}t$; on note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. On pose $\mathcal{V} = \{f \in E, f'' = f\}$, $\mathcal{W} = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $H = \{f \in E, \ f(0) = \mathrm{ch}\, 1 \text{ et } f(1) = 1\}$.

(a) Montrer que $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.
(b) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer que $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculer $\langle \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \rangle$, $\| \mathrm{sh} \|^2$ et $\| \mathrm{ch} \|^2$.
(c) Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g \rangle = 0$.
(d) Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \mathrm{ch} \rangle$ et $\langle f, \mathrm{sh} \rangle$. En déduire les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ de la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ de f sur $\mathcal{V}$.
(e) Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) \, \mathrm{d}t, \ f \in H \right\}$.
(f) Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Solution. —

(a) La partie $\mathcal{V}$ est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. D'après le cours, c'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E. Comme ch et sh sont manifestement solutions de $f'' - f = 0$, et comme elles forment une famille libre, $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.

(b) On intègre par parties l'intégrale $\int_0^1 f'(t)g'(t) \, \mathrm{d}t$ en dérivant f, et en tenant compte de $f'' = f$, puisque $f \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t + [f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f''(t)g(t) \, \mathrm{d}t, \\ &= \int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t + [f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t = f'(1)g(1) - f'(0)g(0).\end{aligned}$$

On applique cette formule pour calculer les trois produits scalaires suivants (les fonctions ch et sh sont dans $\mathcal{V}$) :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \rangle &= \mathrm{sh}^2\, 1, \\ \| \mathrm{sh} \|^2 &= \mathrm{ch}\, 1 \, \mathrm{sh}\, 1, \\ \| \mathrm{ch} \|^2 &= \mathrm{ch}\, 1 \, \mathrm{sh}\, 1.\end{aligned}$$

(c) Il suffit d'appliquer la formule de la question (b) en tenant compte du fait que $g(0) = g(1) = 0$: si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g \rangle = 0$.

(d) On applique la question (b) :

$$\begin{aligned}\langle f, \mathrm{ch} \rangle &= (\mathrm{sh}\, 1)f(1) - (\mathrm{sh}\, 0)f(0) = \mathrm{sh}\, 1, \\ \langle f, \mathrm{sh} \rangle &= (\mathrm{ch}\, 1)f(1) - (\mathrm{ch}\, 0)f(0) = 0.\end{aligned}$$

On écrit $\pi_{\mathcal{V}}(f) = a \, \mathrm{ch} + b \, \mathrm{sh}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et on écrit que $f - \pi_{\mathcal{V}}(f)$ est orthogonal à $\mathcal{V}$, ce qui revient au fait que $f - \pi_{\mathcal{V}}(f)$ est orthogonal à une base de $\mathcal{V}$. En choisissant la base $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle f, \mathrm{ch} \rangle - a\| \mathrm{ch} \|^2 - b\langle \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \rangle &= \mathrm{sh}\, 1 \, (1 - a \, \mathrm{ch}\, 1 - b \, \mathrm{sh}\, 1) = 0, \\ \langle f, \mathrm{sh} \rangle - a\langle \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \rangle - b\| \mathrm{sh} \|^2 &= \mathrm{sh}\, 1 \, (-a \, \mathrm{sh}\, 1 - b \, \mathrm{ch}\, 1) = 0.\end{aligned}$$

Le déterminant du système d'inconnues a et b vaut $\mathrm{ch}^2\, 1 - \mathrm{sh}^2\, 1 = 1$, et on trouve aisément $a = \mathrm{ch}\, 1$ et $b = -\mathrm{sh}\, 1$.

(e) La question précédente montre que le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ ne dépend pas de $f \in H$: on le note

$$f_H = (\operatorname{ch} 1)\operatorname{ch} - (\operatorname{sh} 1)\operatorname{sh}.$$

Cela signifie que les deux plans H (affine) et $\mathcal{V}$ (vectoriel) sont orthogonaux, et que f_H est l'unique point commun de H et $\mathcal{V}$: on constate en effet que $f_H(0) = \operatorname{ch} 1$ et $f_H(1) = 1$.

La borne inférieure demandée est le carré de la norme du projeté orthogonal f_0 de l'origine sur le plan affine H. Ce projeté vaut f_H : en effet, il est caractérisé par

$$\forall f \in H, \quad \langle f - f_0, f_0 \rangle = 0.$$

Or $f_H \in H$ et $\langle f - f_H, f_H \rangle = \langle f - \pi_{\mathcal{V}}(f), \pi_{\mathcal{V}}(f) \rangle = 0$, donc $f_0 = f_H$. Il en résulte, toujours d'après la question (b), que

$$\inf \left\{ \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\,\mathrm{d}t,\ f \in H \right\} = \|f_H\|^2 = f_H'(1) f_H(1) - f_H'(0) f_H(0) = \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1.$$

(f) La question (c) montre que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^\perp$. On montre maintenant l'inclusion inverse. Soit $f \in \mathcal{V}^\perp$: cela se traduit par le fait que f est orthogonal à une base de $\mathcal{V}$, par exemple $\langle \operatorname{sh}, f \rangle = \langle \operatorname{ch}, f \rangle = 0$. La formule de la question (b) conduit au système

$$\begin{cases} (\operatorname{ch} 1) f(1) - (\operatorname{ch} 0) f(0) & = & (\operatorname{ch} 1) f(1) - f(0) & = & 0, \\ (\operatorname{sh} 1) f(1) - (\operatorname{sh} 0) f(0) & = & (\operatorname{sh} 1) f(1) & = & 0. \end{cases}$$

Il en résulte que $f(1) = f(0) = 0$, donc que $f \in \mathcal{W}$, ce qui achève la preuve.

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

669. **RMS 2011 1127 CCP PC**

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t \right) X^k$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi$.

(b) Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.

(c) Soit $U = {}^t(u_0, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tUMU = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$. En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

(d) Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Indication. Utiliser la trace.

Solution. — On confond polynôme et fonction polynomiale associée.

(a) La linéarité de Φ résulte de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs, l'expression même de Φ montre que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par suite, Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\Phi(P) = 0$, alors $\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Comme P est une combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^n$, on en déduit que $\int_0^1 (P(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$. La continuité de P et la positivité stricte de l'intégrale des fonctions continues montrent que $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines, donc il est nul. Par suite,

$$\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}.$$

(b) On calcule $\Phi(X^j) = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 t^{k+j}\,\mathrm{d}t \right) X^k = \sum_{k=0}^n X^k/(k+j+1)$. Par suite

$$M = \left(\frac{1}{k+j+1} \right)_{0 \leqslant k,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable.

(c) On note P le polynôme $\sum_{k=0}^n u_k X^k$. Le vecteur colonne MU est alors le vecteur des composantes de $\Phi(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à- dire le vecteur ${}^t\left(\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t, \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t, \cdots, \int_0^1 t^n P(t)\,\mathrm{d}t\right)$. Alors

$$ {}^tUMU = \sum_{k=0}^n u_k \int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k\right) P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (P(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n u_k t^k\right)^2 \mathrm{d}t\,. $$

Si U est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ, on a alors ${}^tUMU = {}^tU(\lambda U) = \lambda\|U\|_2^2$, où $\|\ \|_2$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Comme U est un vecteur propre, il est non nul, et on en déduit que

$$ \lambda = \frac{{}^tUMU}{\|U\|_2^2} = \frac{\int_0^1 (P(t))^2\,\mathrm{d}t}{\|U\|_2^2}\,, $$

le polynôme non nul P ayant été défini ci-dessus à partir de U. Cette expression montre que λ est strictement positive.

(d) On note M_n au lieu de M la matrice de Φ, et $\lambda_{0,n} > 0$ la plus petite des $n+1$ valeurs propres, distinctes ou confondues, de M_n. On a $\operatorname{tr} M_n \geqslant (n+1)\lambda_{n,0} > 0$, donc

$$ 0 < \lambda_{n,0} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}. $$

Une comparaison série intégrale fournit $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \leqslant 1 + \int_0^n \mathrm{d}t/(2t+1) = 1 + \frac{1}{2}\ln(2n+1)$. En passant à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on trouve, en vertu des comparaisons usuelles : $\lim_{+\infty} \lambda_{0,n} = 0$.

670. **RMS 2006 1120 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

(a) Montrer que A définit un projecteur orthogonal.

(b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\operatorname{tr}({}^tMM)$ en fonction des coefficients de M.

(c) Montrer que : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{\operatorname{rg}(A)}$.

Solution. —

(a) C'est du cours, mais il faut apporter une précision : $A^2 = A$ définit un projecteur, et on sait qu'il est orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique, et enfin, on sait qu'un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice *sur une base orthonormale* est symétrique. Il faut donc préciser que A doit être considérée comme la matrice d'un endomorphisme sur une base orthonormale d'un espace euclidien E.

(b) Un calcul sans difficulté fournit $\operatorname{tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{j,i}^2$.

(c) La présence d'une racine carrée suggère que l'inégalité demandée soit un cas particulier de l'inégalité de Cauchy et Schwarz. On définit une forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant, pour B et C quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$ (B|C) = \operatorname{tr}({}^tBC) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{i,j}c_{j,i}\,. $$

Comme $(C|B) = \operatorname{tr}({}^tCB) = \operatorname{tr}({}^t({}^tBC)) = \operatorname{tr}({}^tBC) = (B|C)$, la forme définie ci-dessus est symétrique. La linéarité à droite est claire, donc la forme en question est bilinéaire. Enfin, d'après le calcul de la question (b), on a $(M|M) = 0$ si et seulement si $M = 0$. On vient donc de définir un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on note la norme $|||\cdot|||$ (avec trois barres), pour la distinguer de la norme $\|\cdot\|$ sur E.

On revient à la matrice A de départ, et on définit la matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ en posant $b_{i,j} = \operatorname{signe}(a_{i,j})$ [si $a_{i,j} = 0$, on choisit arbitrairement $b_{i,j} = 1$]. Alors $(A|B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$, et l'inégalité de Cauchy et Schwarz fournit

$$ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant |||A|||\,|||B|||\,. $$

Il reste à évaluer les normes des deux matrices. D'après l'exercice 665 page 434, on a $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \operatorname{rg}(A)$. Par ailleurs, $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = (A|A) = |||A|||^2$. Il en résulte que $|||A||| = \sqrt{\operatorname{rg}(A)}$. Enfin, $|||B|||^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n 1 = n^2$, donc $|||B||| = n$. On obtient bien :

$$ \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\operatorname{rg}(A)}\,. $$

REMARQUE. — Le cas d'égalité est très intéressant à étudier. Si A est nulle, l'égalité est réalisée. Désormais, on écarte ce cas. Il s'agit alors d'étudier le cas d'égalité dans $(A|B) \leqslant |||A||| \times |||B|||$, avec A et B non nulles. Le cours dit que la condition nécessaire et suffisante est la suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad A = \lambda B\,.$$

Le coefficient λ doit être strictement positif car le produit scalaire l'est. Pour éviter de vérifier à chaque instant qu'on écrit bien des équivalences, on raisonne par conditions nécessaires (analyse), puis on vérifiera qu'elles sont suffisantes (synthèse).

Analyse. Si $A = \lambda B$ avec λ non nul, alors B doit être symétrique pour que A le soit. Comme $A^2 = A$, il faut que $\lambda^2 B^2 = \lambda B$, donc que $\lambda B^2 = B$, puisque λ est non nul. Comme B est symétrique, cette égalité s'écrit encore $\lambda {}^tBB = B$. En prenant seulement les éléments diagonaux des deux membres, il vient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}^2 = n\lambda = b_{i,i}\,,$$

car chaque $b_{k,i}$ vaut 1 ou -1. Comme n et λ sont positifs, $b_{i,i}$ vaut nécessairement 1, et on en déduit la seule valeur possible de λ : c'est $1/n$. Alors il faut que

$${}^tBB = nB\,.$$

On note B_j la colonne numéro j de B, et $B_i \cdot B_j$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ de deux colonnes quelconques de B. L'égalité ci-dessus s'écrit $B_i \cdot B_j = nb_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, et par conséquent

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad |B_i \cdot B_j| = n\,.$$

Or la norme canonique de la colonne B_j dans $\mathbb{R}^n$ est donnée par $\sqrt{\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2} = \sqrt{n}$, puisque tous les $b_{k,j}$ valent 1 ou -1. La formule ci-dessus est donc un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy et Schwarz, donc les colonnes de B sont deux à deux proportionnelles, donc le rang de B, et par conséquent celui de A, vaut 1. On utilise la colonne B_1 pour exprimer les autres : B_j s'écrit $\alpha_j B_1$. En ne retenant que le terme numéro j, on trouve $b_{j,1} = \alpha_j b_{j,j} = \alpha_j$, puisque les éléments diagonaux de B valent 1. L'égalité $B_i \cdot B_j = nb_{i,j}$ s'écrit donc $(\alpha_i B_1) \cdot (\alpha_j B_1) = b_{i1} b_{j,1} \times B_1 \cdot B_1 = nb_{i,1} b_{j,1} = nb_{i,j}$, donc

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad b_{i,j} = b_{i,1} b_{j,1}\,.$$

Synthèse. On fixe arbitrairement une colonne B_1 avec $b_{1,1} = 1$ et les autres éléments choisis parmi -1 et 1. Il y a 2^{n-1} possibilités pour cela. On fixe les autres éléments de B par la formule ci-dessus. On vérifie ensuite que B convient. Il existe donc $2^{n-1} + 1$ matrices A qui réalisent l'égalité, la matrice nulle et 2^{n-1} autres.

Dans le cas $n = 2$, les autres sont

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas $n = 3$, les autres sont

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette question n'était pas posée dans l'énoncé d'origine.

671. RMS 2007 938 CCP PC

(a) Montrer qu'en posant $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Si $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $[\operatorname{tr}(AB + BA)]^2 \leqslant 4(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} B^2)$.

(c) Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer $\operatorname{tr} S^{p+q} \leqslant \sqrt{(\operatorname{tr} S^{2p})(\operatorname{tr} S^{2q})}$.

SOLUTION. —

(a) Comme la trace d'une matrice est la même que celle de sa transposée, $\langle B, A\rangle = \operatorname{tr}({}^tBA) = \operatorname{tr}({}^t[{}^tAB]) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \langle A, B\rangle$: la forme $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.

La linéarité de la trace entraîne la linéarité à droite de $\langle\ ,\ \rangle$, donc sa bilinéarité par symétrie.

Enfin, $\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geqslant 0$, l'égalité étant réalisée si et seulement si tous les $a_{k,i}$ sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $A = 0$.

(b) L'inégalité de Cauchy et Schwarz pour ce produit scalaire s'écrit

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad [\operatorname{tr}({}^tAB)]^2 \leqslant \operatorname{tr}({}^tAA)\operatorname{tr}({}^tBB)\,.$$

Si $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, alors $[\operatorname{tr}(AB + BA)]^2 = [\operatorname{tr}({}^tAB + B\,{}^tA)]^2 = [\operatorname{tr}({}^tAB) + \operatorname{tr}(B\,{}^tA)]^2 = [2\operatorname{tr}({}^tAB)]^2$, la dernière égalité résultant de la propriété bien connue de la trace : $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \operatorname{tr}(M_1M_2) = \operatorname{tr}(M_2M_1)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy et Schwarz, et en tenant compte du caractère symétrique des matrices A et B, on obtient finalement :

$$[\operatorname{tr}(AB + BA)]^2 \leqslant 4\operatorname{tr}({}^tAA)\operatorname{tr}({}^tBB) = 4(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} B^2)\,.$$

(c) On applique l'inégalité de Cauchy et Schwarz à $A = S^p$ et $B = S^q$. Comme A et B sont symétriques, on obtient $[\mathrm{tr}(S^pS^q)]^2 \leqslant \mathrm{tr}(S^pS^p)\,\mathrm{tr}(S^qS^q)$, donc $|\,\mathrm{tr}(S^{p+q})| \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}(S^{2p})\,\mathrm{tr}(S^{2q})}$, et on en déduit

$$\mathrm{tr}\, S^{p+q} \leqslant \sqrt{(\mathrm{tr}\, S^{2p})(\mathrm{tr}\, S^{2q})}\,.$$

Le caractère positif de S n'intervient pas.

672. **RMS 2010 1057 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$. Que dire de ${}^tAA$? Déterminer A.

Solution. — On va démontrer que ${}^tAA$ et A sont nulles.

Pour cela, on note k un entier tel que $A^k = 0$. Comme A et ${}^tA$ commutent, $({}^tAA)^k = ({}^tA)^kA^k = 0$. La matrice ${}^tAA$ est elle aussi nilpotente, donc sa seule valeur propre est zéro (le polynôme X^k est annulateur, et les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur). Comme elle est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Or une matrice diagonalisable dont la seule valeur propre est zéro est nulle : ${}^tAA = 0$.

Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme ${}^tAAX = 0$, on en déduit que ${}^tX\,{}^tAAX = 0$, ou encore que ${}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 = 0$, la notation $\|\ \ \|$ désignant la norme euclidienne canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que $AX = 0$. Cette égalité ayant lieu pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice A est nulle.

673. **RMS 2006 1118 CCP PC**

Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

Solution. — Voir aussi l'exercice 643 page 424.

Le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 3X = X(X^2 - 2X + 3)$ est annulateur de A, donc les valeurs propres de cette dernière sont parmi les racines de P. Or les racines de P sont zéro et deux nombres complexes conjugués *non réels*. Comme A est symétrique réelle, on sait que ses valeurs propres complexes sont toutes réelles. La seule valeur propre de A est donc zéro. De plus, A est diagonalisable. Elle est donc nulle.

674. **RMS 2010 1058 CCP PC**

Soit J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(a) Montrer que J_n est diagonalisable. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P_n^{-1}J_nP_n$ soit la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne n, colonne n, qui est égal à n.

(b) Expliciter P_2 et P_3.

(c) Montrer que $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ BJ_3 = J_3B\}$ est un espace vectoriel de dimension 5.

Solution. —

(a) La matrice J_n est diagonalisable est symétrique réelle, donc elle est orthodiagonalisable : il existe $P_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}J_nP = {}^tPJ_nP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les λ_i étant les valeurs propres de J_n. Or il est clair que J_n est de rang 1, donc que zéro est valeur propre de J_n d'ordre $n - 1 = \dim(\mathrm{Ker}\, J_n)$, puisque J_n est diagonalisable.

La dernière valeur propre λ_n est obtenue en calculant est la trace : $\mathrm{tr}\, J_n = (n-1)0 + \lambda = n$, donc $\lambda = n$. On peut aussi utiliser l'orthogonalité des sous-espaces propres : attendu que le noyau de J_n est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$, le vecteur U dont tout les éléments valent 1 est nécessairement propre, et le calcul $J_nU = nU$ donne la valeur propre associée.

Il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}J_nP = {}^tPJ_nP = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n) = nE_{n,n}\,.$$

(b) La notation P_n utilisée par l'énoncé ne doit pas faire croire qu'il y a unicité de la matrice de passage. Si $n = 2$, il s'agit de trouver un vecteur unitaire sur l'hyperplan (droite) d'équation $x_1 + x_2 = 0$ et de le compléter par le vecteur $\pm(1,1)/\sqrt{2}$. On obtient, par exemple,

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $n = 3$, il s'agit de trouver une base orthonormale de l'hyperplan (plan) d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, et de la compléter par le vecteur $\pm(1,1,1)/\sqrt{3}$. On obtient, par exemple,

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Il est aisé de vérifier que l'ensemble étudié, appelé le commutant de J_3 et noté $C(J_3)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $B' = P^{-1}BP$. On constate alors que

$$BJ_3 = J_3B \iff (P^{-1}BP)(P^{-1}J_3P) = (P^{-1}J_3P)(P^{-1}BP) \iff B'E_{n,n} = E_{3,3}B' .$$

En d'autres termes, l'application (manifestement linéaire) $\varphi\colon B \mapsto B' = P^{-1}BP$ est un isomorphisme du commutant de J_3 sur celui de $E_{n,n}$. Ces deux espaces ont donc même dimension. On étudie alors $C(E_{3,3})$, plus simple à décrire que $C(J_3)$: en effet, si $m_{i,j}$ sont les éléments d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$M \in C(E_{3,3}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{1,3} \\ 0 & 0 & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \iff m_{3,1} = m_{3,2} = m_{1,3} = m_{2,3} = 0.$$

Finalement, $C(E_{3,3}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$, qui est bien de dimension 5.

675. **RMS 2010 1059 CCP PC**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n+1$, $(e_0, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, a un vecteur unitaire tel que $\langle a, e_0\rangle = 0$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $a_k = \langle a, e_k\rangle$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note s l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ est S.

(a) Montrer que S est diagonalisable. Montrer que l'un des a_k au moins est non nul ; déterminer le rang de S.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} s$ et $(\operatorname{Ker} s)^\perp$.

(c) Calculer $\operatorname{tr} s$ et $\operatorname{tr} s^2$. En déduire les valeurs propres non nulles de s. Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres non nulles.

Solution. — Voir aussi l'exercice 675 page 441.

(a) La matrice S est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (dans une base orthonormale). Comme la base $(e_0, \dots, e_n)$ est orthonormale, $a = \sum_{k=0}^n \langle a, e_k\rangle e_k = \sum_{k=0}^n a_k e_k$, et l'un des a_i doit être non nul sinon a est nul, ce qui est impossible car il est supposé unitaire.

Par conséquent, la première colonne de S n'est pas colinéaire aux autres (qui sont non toutes nulles et toutes colinéaires entre elles), donc le rang de S vaut 2, et son noyau est de dimension $n-1$ (la dimension de E est $n+1$).

(b) Un vecteur $x \in E$ de composantes $x_0, \dots, x_n$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ appartient à $\operatorname{Ker} s$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & 0\,, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a_kx_0 & = & 0\,. \end{cases}$$

Comme l'un des a_k est non nul ce système équivaut à

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & 0\,, \\ x_0 & = & 0\,. \end{cases}$$

Le noyau de s est donc l'intersection des deux hyperplans H_1 d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ et H_2 d'équation $x_0 = 0$. Par suite,

$$(\operatorname{Ker} s)^\perp = (H_1 \cap H_2)^\perp = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$$

est le plan vectoriel somme directe des deux droites $H_1^\perp$ et $H_2^\perp$, respectivement dirigées par les vecteurs a et e_0 (en effet, on sait que, si un hyperplan H a pour équation $\sum_{k=0}^n \alpha_k x_k = 0$ *dans une base orthonormale*, alors la droite $H^\perp$ est dirigée par le vecteur de composantes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ dans cette même base).

(c) On calcule S^2 :

$$S^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_k^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\operatorname{tr} s^2 = 2\sum_{k=1}^n a_k^2 = 2\|a\|^2 = 2$, car a est unitaire. Par ailleurs, $\operatorname{tr} s = 0$.
On sait déjà que zéro est valeur d'ordre de s d'ordre $\dim(\operatorname{Ker} s) = n-1$, puisque s est diagonalisable. Il reste donc deux valeurs propres à découvrir, éventuellement confondues, mais non nulles : on les note λ_1 et λ_2. Un calcul dans une base propre pour s, donc aussi pour s^2, montre alors que

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{tr} s & = & 0 & = & \lambda_1 + \lambda_2\,, \\ \operatorname{tr} s^2 & = & 2 & = & \lambda_1^2 + \lambda_2^2\,. \end{array}$$

On en déduit (moyennant un choix arbitraire des signes) que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Soit x un vecteur de composantes $x_0, \dots, x_n$ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$; l'équation $s(x) = \varepsilon x$, avec $\varepsilon = \pm 1$, équivaut successivement à (car a est unitaire) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & \varepsilon x_0\,, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a_kx_0 & = & \varepsilon x_k\,, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon(a_1^2 + \cdots + a_n^2)x_0 & = & \varepsilon x_0\,, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \varepsilon a_kx_0 & = & x_k\,, \end{array}\right.$$
$$\iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \varepsilon a_kx_0 = x_k.$$

On lit ci-dessus que le sous-espace propre $E_\varepsilon(s)$ est la droite engendrée par le vecteur $e_0 + \varepsilon\sum_{k=1}^n a_ke_k = e_0 + \varepsilon a$.

676. **RMS 2010 1060 CCP PC**

On munit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à f. On suppose que A est antisymétrique.

(a) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
(b) Montrer que l'unique valeur propre de f est zéro.
(c) Montrer que $A - I_{2n+1}$ et $A + I_{2n+1}$ sont inversibles.
(d) On pose $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}$. Montrer que $B \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\det B = 1$.

Solution. —

(a) Si X et Y désignent les vecteurs colonnes des composantes de x et y dans la base canonique, on sait que $\langle x, y\rangle = {}^tXY$. Cette interprétation et l'antisymétrie de A permettent d'écrire que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = -\,{}^tXAY = -\,{}^tX(AY) = -\langle x, f(y)\rangle\,.$$

(b) Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, alors $\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$, qui est aussi égal à $-\langle x, f(x)\rangle = -\lambda\|x\|^2$. Par suite, $\lambda\|x\|^2 = 0$ et, comme x est un vecteur propre donc non nul, $\lambda = 0$. On vient de démontrer que zéro est la seule valeur propre *éventuelle* de f.
Il reste à voir que c'est effectivement une valeur propre de f. Or la dimension de E est impaire, donc le polynôme caractéristique de f, à coefficients réels et de degré impair, admet au moins une racine réelle, ce qui termine la preuve.

(c) D'après la question précédente, $\det(A - I_{2n+1}) = \chi_A(1)$ et $\det(A + I_{2n+1}) = \chi_A(-1)$ ne sont pas nuls, donc les matrices correspondantes sont inversibles.

(d) On calcule ${}^tBB$ (le passage de la deuxième à la troisième ligne est justifié par le fait que deux polynômes en A commutent) :

$$\begin{aligned} {}^tBB &= {}^t[(I_{2n+1} + A)^{-1}]\,{}^t(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}\,, \\ &= (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1}\,, \\ &= (I_{2n+1} - A)^{-1}(I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)(I_{2n+1} + A)^{-1}\,, \\ &= I_{2n+1}\,. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $B \in \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$, et on sait alors que $\det(B) = \pm 1$. Mais $\det(B)$ vaut aussi $\frac{\det(I_{2n+1} - A)}{\det(I_{2n+1} + A)}$ avec $\det(I_{2n+1} + A) = \det({}^t(I_{2n+1} + A)) = \det(I_{2n+1} - A)$, donc

$$\det B = 1\,.$$

677. **RMS 2011 1128 CCP PC**

On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = 2M + {}^tM$.

(a) Montrer que $\varphi^2 = 4\varphi - 3\mathrm{id}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
(b) Déterminer les valeurs propres de φ, les sous-espaces propres, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de φ.
(c) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b\,{}^tM$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que $\varphi_{a,b}$ soit inversible.

(d) Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\langle M,N\rangle=\operatorname{tr}({}^tMN)$. L'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ défini en (c) est-il symétrique pour ce produit scalaire ?

Solution. —

(a) Pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi^2(M)=2(2M+{}^tM)+{}^t(2M+{}^tM)=5M+4\,{}^tM=4(2M+{}^tM)-3M=4\varphi(M)-3M$, donc $\varphi^2=4\varphi-3\mathrm{id}$. Le polynôme $X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de φ, donc ce dernier est diagonalisable.

(b) Les valeurs propres de φ sont parmi les racines de tout polynôme annulateur : $\mathrm{Sp}(\varphi)\subset\{1,3\}$ (en fait, comme φ n'est manifestement ni l'identité, ni 3 fois l'identité, on est certain que $\mathrm{Sp}(\varphi)=\{1,3\}$, ce que l'on vérifie ci-après). L'égalité $\varphi(M)=M$ est équivalente à $M+{}^tM=0$, et l'égalité $\varphi(M)=M$ est équivalente à $M={}^tM$, donc

$$E_1(\varphi)=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\,,\qquad E_3(\varphi)=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\,.$$

Les dimensions de ces deux sous-espaces valant respectivement $n(n-1)/2$ et $n(n+1)/2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\varphi&=\frac{n(n-1)}{2}+3\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1)\,,\\ \det\varphi&=3^{n(n+1)/2}\,,\\ \chi_\varphi&=(1-X)^{n(n-1)/2}(3-X)^{n(n+1)/2}\,.\end{aligned}$$

(c) On va démontrer que la condition cherchée est $a^2\neq b^2$. Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, son inversibilité équivaut à son injectivité. On examine donc le noyau de φ. Le système obtenu ci-dessous vient de l'unicité de la décomposition d'une matrice carrée A en somme d'une matrice symétrique $(A+{}^tA)/2$ et d'une matrice antisymétrique $(A-{}^tA)/2$, propriété qu'on applique à $\varphi(M)$:

$$\varphi(M)=0\iff aM+b\,{}^tM=0\iff\begin{cases}(a+b)(M+{}^tM)&=0\,,\\(a-b)(M-{}^tM)&=0\,.\end{cases}$$

La condition est nécessaire : on raisonne par contraposition. Si $a^2=b^2$, on a, par exemple, $a=b$, et le système ci-dessus équivaut à $(a+b)(M+{}^tM)=0$, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\subset\operatorname{Ker}\varphi$, donc φ n'est pas injectif donc pas inversible (on raisonne de même si $a=-b$).
La condition est suffisante. Si $a^2\neq b^2$, alors $a+b$ et $a-b$ sont non nuls, et, si $M\in\operatorname{Ker}\varphi$, alors $M={}^tM=-{}^tM$, donc $M=0$: le noyau de φ est réduit à $\{0\}$, donc φ est inversible.

(d) En utilisant les propriétés $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{tr}({}^tA)=\operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$, on calcule

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{a,b}(M),N\rangle&=\operatorname{tr}({}^t(aM+b\,{}^tM)N)=a\operatorname{tr}({}^tMN)+b\operatorname{tr}(MN)\,,\\ \langle M,\varphi_{a,b}(N)\rangle&=\operatorname{tr}({}^tM(aN+b\,{}^tN))=a\operatorname{tr}({}^tMN)+b\operatorname{tr}({}^tM\,{}^tN)=a\operatorname{tr}({}^tMN)+b\operatorname{tr}({}^t(NM))\,,\\ &=a\operatorname{tr}({}^tMN)+b\operatorname{tr}(NM)=a\operatorname{tr}({}^tMN)+b\operatorname{tr}(MN)\,.\end{aligned}$$

Les deux calculs donnant le même résultat pour tout $(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on conclut que $\varphi_{a,b}$ est symétrique.

678. **RMS 2011 1129 CCP PC**

Soit $M\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=I_n$. Montrer que $M^2=I_n$.

Solution. — Comme M est symétrique réelle, elle est en particulier diagonalisable : il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M=PDP^{-1}$, où $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est une matrice diagonale. Alors $M^p=PD^pP^{-1}=I_n$, donc $D^p=I_n$ donc $\lambda_k^p=1$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Il en résulte que $\lambda_k\in\{-1,1\}$, donc que $\lambda_k^2=1$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Par suite,

$$M^2=PD^2P^{-1}=PI_nP^{-1}=I_n\,.$$

679. **RMS 2011 1130 CCP PC**

Soient $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C=AB+BA$.

(a) Montrer que $C\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) On suppose que $C\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution. —

(a) La linéarité de la transposition, son caractère d'antimorphisme pour le produit matriciel, et le caractère symétrique de A et B montrent que

$${}^tC = {}^t(AB + BA) = {}^t(AB) + {}^t(BA) = {}^tB\,{}^tA + {}^tA\,{}^tB = BA + AB = C\,,$$

donc $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) Dans cette question, on utilisera les deux propriétés équivalentes suivantes, qui caractérisent les matrices M de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ parmi les éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

i. Pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXMX > 0$.

ii. Toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Soient λ une valeur propre de B, et X un vecteur propre associé, donc non nul. Alors $CX = ABX + BAX = \lambda AX + BAX = (B + \lambda I_n)AX$. En multipliant à gauche par ${}^tX$, on obtient ${}^tXCX = {}^tX(B + \lambda I_n)AX$. Or B est symétrique, donc $B + \lambda I_n$ l'est aussi, et l'égalité précédente se réécrit sous la forme

$${}^tXCX = {}^tX\,{}^t(B + \lambda I_n)AX = {}^t[(B + \lambda I_n)X]AX = {}^t[2\lambda X]AX = 2\lambda\,{}^tXAX\,.$$

Comme X est non nul, on peut diviser par ${}^tXAX$ pour obtenir

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{{}^tXCX}{{}^tXAX} > 0\,,$$

puisque A et C appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

680. **RMS 2011 1162 CCP PC**

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z + t = 0\}\,.$$

Déterminer une base de F et une base de $F^\perp$.

Solution. — Un vecteur (x, y, z, t) appartient à F si et seulement si $z = -(x + 2y)$ et $t = y$. Par suite

$$F = \{(x, y, -x - 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, -2, 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, -2, 1))\,.$$

On voit ci-dessus une base de F, qui est de dimension 2. Les vecteurs de $F^\perp$ sont ceux qui sont orthogonaux aux deux vecteurs déterminés ci-dessus :

$$F^\perp = \{(x, y, z, t),\ x - z = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + t = 0\}\,.$$

La même méthode montre que $F^\perp = \{(x, y, x, 2x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, donc que $((1, 0, 1, 2), (0, 1, 0, -1))$ est une base de $F^\perp$.

Espaces euclidiens de dimension 3, produit vectoriel

681. **RMS 2010 1056 CCP PC**

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire et $\Phi\colon x \mapsto a \wedge x$. Si $t \in \mathbb{R}$, soit $f_t\colon x \mapsto x + t\Phi(x)$.

(a) Déterminer le noyau et l'image de Φ. Montrer que Φ possède une unique valeur propre et donner un vecteur propre associé.

(b) Montrer : $\forall x \in E,\ a \wedge (a \wedge x) = \langle a, x\rangle a - x$. En déduire que $\Phi^3 = -\Phi$.

(c) Trouver un polynôme de degré au plus trois tel que $P_t(f_t) = 0$. Calculer f_t^{-1}.

Solution. — Il est clair que Φ est un endomorphisme de E.

(a) Les propriétés du produit vectoriel montrent que le noyau de Φ est la droite engendrée par a. L'image de Φ est alors, d'après la formule du rang, un plan. Or on sait que $a \wedge x$ est orthogonal à a quel que soit x. Par suite, l'image de Φ est le plan orthogonal à a.

Analyse. Soit λ une valeur propre de Φ et x un vecteur propre associé. Comme $\Phi(x) = a \wedge x$ est orthogonal à x, ce vecteur doit vérifier que λx est orthogonal à x, donc que $\lambda\|x\|^2 = 0$, donc que $\lambda = 0$.

Synthèse. On sait que $\lambda = 0$ est une valeur propre de Φ, puisqu'on vient de montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est la droite $\mathrm{Vect}(a)$. C'est donc la seule valeur propre, et a est un vecteur propre associé.

(b) On peut invoquer la formule du double produit vectoriel : $a\wedge(b\wedge c) = b\langle a,c\rangle - c\langle a,b\rangle$, que l'on mémorise en prononçant « abc = bac - cab ».

On peut aussi en donner une preuve directe de l'égalité : ses deux membres étant linéaires par rapport à x, il suffit de l'établir pour les trois vecteurs d'une base de E. Comme a est unitaire, on choisit $e_1 = a$ comme premier vecteur, et on le complète par e_2 et e_3 de sorte que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormale directe. Il s'agit alors prouver que

$$\forall k \in \{1,2,3\}, \quad e_1 \wedge (e_1 \wedge e_k) = \langle e_1, e_k\rangle e_1 - e_k\ .$$

Pour $k = 1$, les deux membres de l'égalité sont nuls. Pour $k \in \{2,3\}$, le membre de droite vaut $-e_k$, et celui de gauche vaut $e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_2 = -e_2$ si $k = 2$, et $e_1 \wedge (e_1 \wedge e_3) = e_1 \wedge (-e_2) = -e_3$ si $k = 3$, ce qui achève la preuve. On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \Phi^3(x) = a \wedge (a \wedge (a \wedge x)) = a \wedge (\langle a, x\rangle a - x) = -a \wedge x = -\Phi(x)\ ,$$

donc que $\Phi^3 = -\Phi$.

(c) Par définition, $t\Phi = f_t - \mathrm{id}$, donc $t^3\Phi^3 = (f_t - \mathrm{id})^3 = -t^3\Phi = -t^2(f_t - \mathrm{id})$. Comme f_t et l'identité commutent, on en déduit que $f_t^3 - 3f_t^2 + 3f_t - \mathrm{id} = -t^2(f_t - \mathrm{id})$, donc

$$P_t = X^3 - 3X^2 + (3 + t^2)X - (1 + t^2)$$

est un polynôme de degré au plus trois tel que $P_t(f_t) = 0$. En réécrivant cette relation sous la forme $f_t \circ [f_t^2 - 3f_t + (3 + t^2)\mathrm{id}] = (1 + t^2)\mathrm{id}$, on prouve que f_t est inversible d'inverse

$$f_t^{-1} = \frac{1}{1+t^2}[f_t^2 - 3f_t + (3 + t^2)\mathrm{id}]\ .$$

Analyse

Espaces vectoriels normés

682. **RMS 2011 1131 CCP PC**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t$. Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\ \|_\infty$?

Solution. — Si $f \in E$ est telle que $N(f) = 0$, alors $|f(t)|e^t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc f est la fonction nulle, en vertu de la propriété de positivité stricte de l'intégrale des fonctions continues (en l'occurrence, de la fonction $|f|\exp$). Le caractère positivement homogène de N résulte de la linéarité de l'intégrale, et l'inégalité triangulaire sur N vient de l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues et de la croissance de l'intégrale par rapport à la fonction. Finalement, N est une norme sur E.

Elle n'est pas équivalente à la norme $\|\ \|_\infty$. Pour le prouver, on donne une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions de E qui converge vers zéro pour N et qui n'est pas bornée pour $\|\ \|_\infty$: la fonction f_n est affine par morceaux et $(0, 1/2n, 1/n, 1)$ est une subdivision adaptée à f_n, avec $f_n(0) = f_n(1/n) = f_n(1) = 0$ et $f_n(1/2n) = \sqrt{n}$ (le graphe de f_n forme un triangle isocèle de base $1/n$ et de hauteur $\sqrt{n}$).

Comme $e^t \geqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$N(f_n) = \int_0^1 |f_n(t)|e^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{1/n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$$

La suite (f_n) converge donc vers zéro pour N. En revanche, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$, donc la suite (f_n) n'est pas bornée pour la norme $\|\ \|_\infty$.

683. **RMS 2011 1132 CCP PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

(a) Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue.

(b) Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.

(c) Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.

(d) Montrer que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

Solution. —

(a) Les éléments de $\varphi(M)$ s'exprimant de façon polynomiale (de degré 1) en fonction de ceux de M (la matrice P est constante), l'application φ est continue.

(b) On connaît un polynôme annulateur de A : c'est $S = 4X^3 + 2X^2 + X = X(4X^2 + 2X + 1)$. Les valeurs propres complexes de A sont donc parmi les racines de S, qui sont zéro et $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{4}$. Le module des deux racines complexes conjuguées étant égal à $\frac{1}{2}$, toutes les valeurs propres λ de A vérifient bien

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Comme le polynôme annulateur S de A est scindé à racines simples, A est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \varphi(D) = P^{-1}DP$, où D est une matrice diagonale de la forme $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \lambda, \dots, \lambda, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda})$, avec $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$. Comme $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$, la limite de D^k existe et vaut zéro quand k tend vers $+\infty$. Par suite, $A^k = P^{-1}D^kP = \varphi(D^k)$ tend vers $\varphi(0) = 0$ quand k tend vers $+\infty$, puisque φ est continue.

(c) Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite ℓ à termes dans $\mathbb{Z}$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$, et en particulier $|u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2}$. Grâce à l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|u_n - u_{n_0}| < 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, où le nombre $u_n - u_{n_0}$ est un entier relatif. Or le seul entier relatif dont la valeur absolue est strictement plus petite que 1 est zéro, donc $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$: la suite (u_n) est stationnaire.

(d) Comme A^k est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et comme A^k tend vers zéro quand k tend vers $+\infty$, chaque suite de coefficients $(a_{ij}^{[k]})_k$ converge vers zéro, donc est stationnaire à la valeur zéro, pour $k \geqslant k_{0,i,j}$. Si p désigne le maximum des n^2 nombres $k_{0,i,j}$, on obtient $A^p = 0$, donc A est nilpotente.

Alors D aussi est nilpotente (car $D^p = PA^pP^{-1} = 0$). Cela n'est possible que s'il n'y a pas de valeur propre $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ ou $\bar{\lambda}$, donc $D = 0$, donc

$$A = 0\,.$$

684. **RMS 2010 1062 CCP PC**

On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|\ \|$ définie par : $\forall M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, $\|M\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$.

(a) Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.

(b) Montrer que l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue.

(c) Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n\geqslant}$ est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant 1$.

(d) Soit $B \in E$. On suppose que $(B^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $C \in E$. Montrer que $C^2 = C$ et que le spectre de C est inclus dans $\{0, 1\}$. Montrer que les valeurs propres de B sont de module $\leqslant 1$; si λ est une valeur propre de B de module 1, montrer que $\lambda = 1$.

Solution. —

(a) Les deux applications en question sont linéaires. Leur espace de départ est un espace vectoriel normé de dimension finie (leur espace d'arrivée est un espace vectoriel normé : il est aussi de dimension finie puisque c'est le même, mais cela importe peu). Un résultat du cours affirme alors que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.

(b) L'application $(M, N) \mapsto MN$ est bilinéaire et son espace de départ est un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies, donc l'application en question est continue (résultat du cours).

(c) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On établit aisément par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^nX = \lambda^nX\,.$$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ un indice tel que la composante x_{i_0} de X soit non nulle. En notant $a_{i,j,n}$ les éléments de la matrice A^n, l'égalité ci-dessus entraîne, en examinant la composante i_0, la relation suivante : $\sum_{j=1}^{p} a_{i_0,j,n}x_j = \lambda^n x_{i_0}$. En divisant par le nombre non nul x_{i_0} et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda^n| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{i_0,j,n}| \left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant K\|A^n\|\,,$$

où K désigne le nombre réel positif $\sum_{j=1}^{p} |x_j/x_{i_0}|$. On en déduit que la suite $(|\lambda^n|)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc que $|\lambda| \leqslant 1$.

(d) La suite de terme général B^{2n} est extraite de $(B^n)_{n\geqslant 0}$, donc elle converge aussi vers $C \in E$. Par ailleurs, comme $B^{2n} = B^n \times B^n$, la question (b) et la caractérisation séquentielle de la continuité montrent que la suite de terme général B^{2n} converge vers C^2. L'unicité de la limite permet d'affirmer que

$$C^2 = C\,.$$

On reconnaît ici la caractérisation d'une matrice de projecteur, dont on sait que les valeurs propres sont zéro ou 1 (il est possible que ce soit zéro seulement, dans le cas du projecteur nul, ou 1 seulement, dans le cas de l'identité). Comme la suite $(B^n)_{n\geqslant 0}$ converge, elle est bornée, et la question (c) montre que ses valeurs propres sont de module $\leqslant 1$.

Soit ensuite λ une valeur propre de B de module 1. Soit X un vecteur propre associé, et soit i_0 un indice comme à la question (c). Avec les mêmes notations et la même démarche, on obtient

$$\lambda^n = \sum_{j=1}^{p} b_{i_0,j,n}\frac{x_j}{x_{i_0}}\cdot$$

La suite de terme général $b_{i_0,j,n}$ converge vers l'élément $c_{i_0,j}$ correspondant de la matrice C, et il en résulte que la suite de terme général λ^n converge. On note ℓ sa limite, qui est un nombre complexe de module 1, puisque λ est de module 1. La relation $\lambda^{n+1}=\lambda\times\lambda^n$ donne alors, par passage à la limite, $\ell=\lambda\ell$. Comme ℓ n'est pas nulle, on en déduit que

$$\lambda = 1\,.$$

Suites : étude asymptotique

685. **RMS 2006 1122 CCP PC**

Déterminer la limite de $P_n=\frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^n(n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solution. — On constate que $P_n=\left(\prod_{k=1}^n(1+k/n)\right)^{\frac{1}{n}}>0$, donc on peut poser $u_n=\ln P_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln(1+k/n)$ pour tout $n\geqslant 1$. On reconnaît dans u_n une somme de Riemann régulière d'ordre n de la fonction ln sur le segment $[1,2]$. Comme ln est continue par morceaux, le cours affirme que (u_n) converge vers $\int_1^2\ln t\,\mathrm{d}t=[t\ln t-t]_1^2=2\ln 2-1$. Comme l'exponentielle est une fonction continue, on en déduit que

$$\lim P_n=\lim\exp(u_n)=\exp(\lim u_n)=\exp(2\ln 2-1)=\frac{4}{e}\cdot$$

686. **RMS 2010 1064 CCP PC**

Déterminer la limite de $u_n=(1/n)\sum_{k=1}^n\ln(1+k/n)$. En déduire la limite de $v_n=[(2n)!/n!n^n]^{1/n}$.

Solution. — D'après l'exercice 685 page 447,

$$\lim u_n=\int_1^2\ln t\,\mathrm{d}t=2\ln 2-1\,.$$

On constate que $[(2n)!/n!n^n]^{1/n}=\frac{1}{n}[\prod_{k=1}^n((n+k)]^{1/n}=P_n$ dans les notations de l'exercice 685, donc

$$\lim_{+\infty}v_n=\frac{4}{e}\cdot$$

687. **RMS 2012 1323 CCP PC**

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n+u_{n+1}\sim 1/n$. Montrer que u_n tend vers zéro. Trouver un équivalent de u_n.

Solution. — Comme (u_n) décroît, elle possède une limite finie ou infinie. Le deuxième cas est impossible car alors u_n+u_{n+1} tendrait vers $-\infty$, alors que $1/n$ tend vers zéro. On note alors ℓ la limite finie de (u_n). Dans ce cas, u_n+u_{n+1} tend à la fois vers 2ℓ et zéro, donc

$$\ell=\lim u_n=0.$$

La décroissance de (u_n) donne l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1})\leqslant u_n=\frac{1}{2}(u_n+u_n)\leqslant\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}).$$

Par hypothèse, le minorant est équivalent à $1/2n$ et la majorant à $1/2(n-1)$, lui-même équivalent à $1/2n$. On conclut que

$$u_n\sim\frac{1}{2n}\cdot$$

688. **RMS 2011 1133 CCP PC**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\colon x \mapsto x + \frac{n}{2}\ln x - n$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $a_n \in [1, e^2]$. Étudier la limite de (a_n).

Solution. — La fonction f_n est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = 1 + \frac{n}{2x} > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Par suite f_n est strictement croissante et, comme $f_n(1) = 1 - n \leqslant 0$ et $f_n(e^2) = e^2 > 0$, elle admet (théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue) une unique (monotonie stricte) racine a_n dans $[1, e^2]$. De plus, si $n \geqslant 2$, alors $f_n(1) < 0$, donc $a_n \in]1, e^2[$. On calcule ensuite

$$f_{n+1}(a_n) = a_n + \frac{n+1}{2}\ln a_n - (n+1) = \left(a_n + \frac{n}{2}\ln a_n - n\right) + \frac{1}{2}\ln a_n - 1 = f_n(a_n) + \frac{1}{2}\ln a_n - 1 = \frac{1}{2}\ln a_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}\ln e^2 - 1 \leqslant 0.$$

Comme f_{n+1} est croissante et que son unique racine est a_{n+1}, l'inégalité ci-dessus prouve que $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc croissante, et majorée par e^2, donc elle converge, vers une limite $\ell \in]1, e^2]$. Si $\ell < e^2$, alors

$$0 = f_n(a_n) = a_n + \frac{n}{2}(\ln a_n - 2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n$$

avec $\lambda = (\ln \ell - 2)/2 < 0$, ce qui est impossible. Par suite,

$$\lim a_n = e^2\ .$$

Suites récurrentes

689. **RMS 2010 1066 CCP PC**

On pose $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que $f(x) \in [1/2, 3/2]$ et que $(f \circ f)(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(b) Montrer que f est $(1/2)$–lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.

(d) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \geqslant 1$ si $n \geqslant 2$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Solution. —

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $-1 \leqslant \sin(1/x) \leqslant 1$, on a $1 - (1/2) \leqslant f(x) \leqslant 1 + (1/2)$, c'est-à-dire $f(x) \in [1/2, 3/2]$. Alors $1/f(x) \in [2/3, 2]$ et, comme $[2/3, 2] \subset [0, \pi]$ et comme le sinus est positif sur $[0, \pi]$, on en déduit que $(f \circ f)(x) \geqslant 1$.

(b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on calcule $f'(x) = -\frac{\sin(1/x)}{2x^2}$. On en déduit que $|f'(x)| \leqslant 1/2$ pour tout $x \geqslant 1$. Le théorème des accroissements finis permet d'en déduire que f est $(1/2)$–lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

(c) Existence. Posons $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, ce qui définit une fonction continue. Comme $g(1) = \frac{\sin 1}{2} > 0$ et $g(\pi) = 1 - \pi < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'un nombre $\ell \in [1, \pi] \subset [1, +\infty[$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(\ell) = \ell$.

Unicité. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux points fixes de f appartenant à $[1, +\infty[$, la propriété de Lipschitz de f montre que

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leqslant \frac{1}{2}|\ell_1 - \ell_2|\,,$$

donc que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, donc que $\ell_1 = \ell_2$.

(d) Tout d'abord, la suite est bien définie : comme $a \neq 0$, le nombre $u_1 = f(a)$ existe et n'est pas nul, puisque $f(a) \in [1/2, 3/2]$. Par suite, le nombre $u_2 = (f \circ f)(a)$ existe et appartient à $[1, +\infty[$. On montre alors aisément pas récurrence sur $n \geqslant 2$ que u_n existe et appartient à $[1, +\infty[$, en s'appuyant sur la première question.

On pose $K = |u_2 - \ell|$, et on montre par récurrence sur $n \geqslant 2$ que

$$\forall n \geqslant 2, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{K}{2^{n-2}}\,.$$

Ceci prouve que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Pour $n = 2$, il s'agit de prouver que $|u_2 - \ell| \leqslant K$: c'est la définition même de K. On suppose que l'inégalité est établie pour un entier $n \geqslant 2$. Alors, comme u_n et ℓ sont dans $[1, +\infty[$ et que f est $(1/2)$–lipschitzienne sur cet intervalle,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{K}{2^{n-1}}\,.$$

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

690. **RMS 2012 1328 CCP PC**

Soit $f\colon x \mapsto x(\ln(1+2x) - \ln x)$. Déterminer le comportement de f en $+\infty$. Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe en $+\infty$ ainsi que les positions de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Solution. — Un développement limité fournit

$$f(x) = x\left(\ln\left[2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right] - \ln x\right) = x\left(\ln 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, que la droite d'équation $y = x\ln 2 + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$, et enfin que la courbe est située au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

691. **RMS 2010 1075 CCP PC**

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, soit $g_t\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^3 + tx - 1$.

(a) Si $t \in \mathbb{R}_+$, montrer qu'il existe un unique $u(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_t(u(t)) = 0$.

(b) Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leqslant t \leqslant t'$. Si $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $g_t(x)$ à $g_{t'}(x)$. En déduire que u est décroissante.

(c) Déterminer la limite de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Donner un équivalent $q(t)$ de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $u(t) - q(t)$.

(d) Montrer que u réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

(a) On étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction polynomiale g_t : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g_t'(x) = 3x^2 + t > 0$, donc g_t croît strictement de $g_t(0) = -1$ à $+\infty$. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1,+\infty[$, ce qui assure l'existence et l'unicité de $u(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_t(u(t)) = 0$.

(b) On considère ici que $t < t'$. On multiplie cette inégalité par le nombre strictement positif x, ce qui entraîne $tx < t'x$, puis on ajoute $x^3 - 1$ pour obtenir $g_t(x) < g_{t'}(x)$. Comme $u(t)$ ne peut pas être nul — car $g_t(0) = -1$ —, on en déduit que $0 = g_t(u(t)) < g_{t'}(u(t))$; comme $g_{t'}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, son unique racine $u(t')$ vérifie nécessairement $u(t') < u(t)$. On a prouvé un résultat plus fort que celui demandé dans l'énoncé : u est strictement décroissante. Cela sera utile pour la dernière question.

(c) Comme la fonction u est décroissante et minorée (par zéro), elle admet une limite positive finie en $+\infty$, que l'on note ℓ. La définition de $u(t)$ peut s'écrire

$$tu(t) = 1 - [u(t)]^3\,.$$

Le membre de droite de cette égalité admet la limite finie $1 - \ell^3$ quand t tend vers $+\infty$, donc le membre de gauche doit admettre une limite finie aussi, ce qui entraîne que

$$\ell = 0\,.$$

Alors $tu(t)$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$, donc

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}\,\cdot$$

Il en résulte immédiatement que

$$u(t) - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t}u(t)^3 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{t^4}\,\cdot$$

(d) On a $u(t)^2 + u(t)u(t_0) + u(t_0)^2 + t \geqslant u(t_0)^2 > 0$, ce qui permet de diviser et de majorer :

$$|u(t) - u(t_0)| = |d(t)| = \frac{|t_0 - t|\, u(t_0)}{[u(t)^2 + u(t)u(t_0) + u(t_0)^2 + t]} \leqslant \frac{|t_0 - t|\, u(t_0)}{u(t_0)^2} \leqslant \frac{|t_0 - t|}{u(t_0)} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Remarque. — Si $t_0 = 0$, il ne faut considérer que la limite à droite, puisque u n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle est strictement décroissante, d'après le raisonnement mené à la question (b). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]\lim_{+\infty} u, u(0)]$. La question (c) a montré que $\lim_{+\infty} u = 0$. Comme $g_0(x) = x^3 - 1$, il est clair que $u(0) = 1$. Finalement, u réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

692. **RMS 2010 1073 CCP PC**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution. — L'interprétation cinématique est claire : la distance parcourue tend vers l'infini si la vitesse tend vers l'infini. On ne peut pas dire que f est l'intégrale de sa dérivée car f est supposée seulement dérivable et non pas de classe $\mathcal{C}^1$. La notation $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ est donc problématique dans le cadre du programme des classes de deuxième année.

On va utiliser le théorème des accroissements finis, qui ne suppose que la dérivabilité de f. Soit x_0 un nombre réel tel que $f'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant x_0$. Alors, pour tout $x \geqslant x_0$, il existe $t \in [x_0, x]$ tel que $[f(x) - f(x_0)]/[x - x_0] = f'(t)$, qui est donc supérieur ou égal à 1. On en déduit que

$$\forall x \geqslant x_0, \quad f(x) \geqslant x - x_0 + f(x_0)\,,$$

donc que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

693. **RMS 2010 1074 CCP PC**

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}\,.$$

(a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{2x^2}{(x+y)^2} f'(\frac{2xy}{x+y}) = \frac{f'(y)}{2}$.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall t \in]0, A[,\ \exists ! x \in]0, A[,\ \frac{2xA}{x+A} = t$.

(c) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $t \mapsto t^2 f'(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\mathcal{E}$.

(d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$. Retrouver $\mathcal{E}$.

Solution. —

(a) Pour x fixé, on dérive par rapport à y la relation qui définit les fonctions $f \in \mathcal{E}$. Comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\frac{2xy}{x+y}) = 2x\frac{x+y-y}{(x+y)^2}$, on obtient bien

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{2x^2}{(x+y)^2} f'\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f'(y)}{2}\,.$$

(b) La fonction homographique $x \mapsto \frac{2xA}{x+A}$ est continue et strictement croissante sur $[0, A]$, vaut zéro quand $x = 0$ et vaut A quand $x = A$. Elle réalise donc une bijection de $]0, A[$ sur $]0, A[$, ce qui justifie, pour tout $t \in]0, A[$, l'existence et l'unicité de $x \in]0, A[$ tel que $\frac{2xA}{x+A} = t$.

(c) Il suffit de montrer que la fonction $u\colon t \mapsto t^2 f'(t)$ est constante sur tout intervalle du type $]0, A[$ avec $A \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, si A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$, et si C_A et C_B sont les valeurs constantes de u sur $]0, A[$ et $]0, B[$ respectivement, alors u vaudra à la fois C_A et C_B sur $]0, \min(A, B)[$, donc $C_A = C_B$, ce qui prouve qu'il existe une constante universelle C telle que $u = C$ sur tout intervalle de la forme $]0, A[$, donc que u est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient donc $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in]0, A[$. Si x est l'unique réel défini à la question précédente, alors

$$u(t) = t^2 f'(t) = \frac{4Ax^2}{(x+A)^2} f'\left(\frac{2xA}{x+A}\right) = A^2 f'(A)$$

d'après la question (a). On a bien prouvé que u est constante sur $]0, A[$.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{E}$. D'après ce qui précède, il existe une constante C telle que $f'(t) = C/t^2$ pour tout $t > 0$. On en déduit qu'il existe une constante D telle que $f(t) = D - C/t$ pour tout $t > 0$. Quitte à changer le nom de la constante C, cela revient à dire qu'il existe deux constantes C et D telles que $f(t) = D + C/t$ pour tout $t > 0$.

Synthèse. Soit $f\colon t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto D + C/t$. Pour que f soit à valeurs strictement positives, il faut que $D \geqslant 0$ (faire tendre t vers $+\infty$) et que $C \geqslant 0$ (faire tendre t vers zéro). Si $D = 0$, il faut de plus que $C > 0$ et si $C = 0$, il faut de plus que $D > 0$. On vérifie aisément que ces conditions suffisent :

$$(C, D) \in Q := \left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+\right) \cup \left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*\right) = (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

En d'autres termes, Q est le quart de plan positif de $\mathbb{R}^2$, privé de l'origine. Par ailleurs, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=D+\frac{C(x+y)}{2xy}\,,$$
$$\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}=\frac{D}{2}+\frac{C}{2x}+\frac{D}{2}+\frac{C}{2y}=D+\frac{C(x+y)}{2xy}\,,$$

ce qui achève de prouver que f appartient à $\mathcal{E}$. En conclusion,

$$\mathcal{E}=\left\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*),\quad \exists (C,D)\in Q,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(t)=D+\frac{C}{t}\right\}.$$

(d) On raisonne par analyse et synthèse, en suivant les mêmes idées que ci-dessus (les démonstrations seront abrégées).
Analyse. Soit $g\in\mathcal{F}$. En dérivant la relation qui définit g par rapport à y pour x fixé, on obtient $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{1}{2}g'(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}g'(y)$, donc $g'(\frac{x+y}{2})=g'(y)$. On en déduit que g' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que g est affine : il existe deux constantes C et D telles que $g(t)=Ct+D$ pour tout $t>0$. Comme g doit être à valeurs strictement positives, il faut que $(C,D)\in Q$.
Synthèse. On vérifie sans peine que les conditions ci-dessus suffisent :

$$\mathcal{F}=\left\{g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*),\quad \exists (C,D)\in Q,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad g(t)=Ct+D\right\}.$$

On associe ensuite à toute fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*)$ la fonction $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*)$ définie par $\forall t>0$, $g(t)=f(1/t)$. La condition $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}$ se traduit par $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $g(\frac{1/x+1/y}{2})=\frac{1}{2}(g(1/x)+g(1/y))$, ou encore par $\forall(u,v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $g(\frac{u+v}{2})=\frac{1}{2}(g(u)+g(v))$, puisque $x\mapsto 1/x$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même.
En d'autres termes, $f\in\mathcal{E}$ si et seulement si $g\in\mathcal{F}$, ce qui permet de retrouver $\mathcal{E}$ à partir de $\mathcal{F}$.

Remarque. — Exiger que les fonctions $f\in\mathcal{E}$ et $g\in\mathcal{F}$ soient à valeurs strictement positives ajoute une complication inutile à l'exercice. Sans cette exigence, les résultats se formulent de la même manière, à condition d'abandonner les contraintes sur les constantes C et D, c'est-à-dire de remplacer Q par $\mathbb{R}^2$.

694. **RMS 2012 1329 CCP PC**
Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.

(a) Soit $E_a=\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ paire et } \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(x+a)\}$. Soit $f\in E_a$.
   i. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que f' est impaire et f'' paire.
   ii. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x-a)+f(x+a)=0$.
   iii. Montrer que $f+f''=0$. En déduire E_a.

(b) Déterminer $F_a=\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ impaire et } \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(x+a)\}$.

Solution. — à rédiger ? ?

Fonctions d'une variable réelle : intégration sur un segment

695. **RMS 2010 1067 CCP PC**
Soient $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^\mathbb{N}$ qui converge vers $a>0$. On suppose que f est croissante et que $f'(x)/f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_kf(k)\sim a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.
On pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n=\sum_{k=0}^n a_kf(k)$. Il s'agit de montrer que $S_n\sim aF(n)$. L'idée de la démonstration est que $f(n)\sim_{+\infty}\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t$ si on a de bonnes hypothèses sur f, et que $a_n\sim_{+\infty}a$, car $a\neq 0$. On multiplie alors ces équivalents pour obtenir $a_kf(k)\sim_{+\infty}\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t$, et les somme pour k variant de zéro à $n-1$: on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_kf(k)\underset{+\infty}{\sim}\sum_{k=0}^{n-1}a\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t=a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Enfin, il manque un terme, qu'on ajoute. Tout cela mérite de nombreuses justifications. On développe la démonstration en plusieurs points.

- D'abord, $\lim_{+\infty}F(n)=+\infty$. En effet comme f est croissante à valeurs strictement positives on a $\forall t\geqslant 0$, $f(t)\geqslant f(0)>0$, donc $F(n)=\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant nf(0)$, de limite infinie quand n tend vers l'infini.

- Ensuite, $f(n) = \mathrm{o}(F(n))$. Le théorème d'intégration des relations de comparaison (qui n'est pas au programme de la filière PC), appliqué avec les hypothèses $f' = \mathrm{o}_{+\infty}(f)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ($\lim_{+\infty} F = +\infty$), donnent
$$\int_0^n f'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right),$$
soit $f(n) - f(0) = \mathrm{o}(F(n))$, ou encore $f(n) = \mathrm{o}(F(n))$, puisque $f(0)$ est constant et que $F(n) \to +\infty$.
- Puis $f(n) \sim_{+\infty} [F(n+1) - F(n)]$. En effet, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 appliquée à F, qui est de classe C^2, donne $F(n+1) = F(n) + F'(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)F''(t)\,\mathrm{d}t$, soit encore
$$F(n+1) - F(n) = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
On écrit maintenant que $\lim_{+\infty} f'/f = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, $\forall t \geqslant N$, $|f'(t)| \leqslant \varepsilon f(t)$. Par suite, si $n \geqslant N$, alors $|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \int_n^{n+1} 1 \times |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon[F(n+1) - F(n)]$. On vient de montrer que
$$\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_{+\infty}(F(n+1) - F(n))\,,$$
ce qui prouve le résultat annoncé, grâce à l'égalité ci-dessus portant sur $F(n+1) - F(n)$.
- Enfin, $a_n f(n) \sim_{+\infty} a[F(n+1) - F(n)]$, et le théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries divergentes (puisque $F(n) \to +\infty$) donne $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(k) \sim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a[F(k+1) - F(k)]$, ou encore $S_{n-1} \sim aF(n)$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car convergente), le résultat $f(n) = o(F(n))$ donne aussi $a_n f(n) = \mathrm{o}(F(n))$. Par suite, on a
$$S_n = S_{n-1} + a_n f(n) = [aF(n) + \mathrm{o}(aF(n))] + \mathrm{o}(F(n)) = aF(n) + \mathrm{o}(F(n)) \underset{+\infty}{\sim} aF(n)\,.$$
Le théorème de sommation utilisé ici n'est pas au programme de la filière PC. On peut l'éviter, mais cela revient à le démontrer implicitement.

696. **RMS 2010 1076 CCP PC**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$, $g\colon x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f$ et $I = \int_a^b f$.

(a) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant m$.

(b) Montrer que g admet une fonction réciproque h de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une subdivision $a = x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} = b$ de $[a,b]$ telle que
$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad \int_{x_{i,n}}^{x_{i+1,n}} f = \frac{I}{n}\cdot$$

(d) On pose $u_n = (1/n)\sum_{i=1}^n f(x_{i,n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution. —

(a) La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$, donc elle admet un minimum $m = f(x_0)$, pour un certain $x_0 \in [a,b]$. Comme f est à valeurs strictement positives, il existe bien $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant m$.

(b) Comme f est continue, g est de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie $g' = f > 0$. Alors g réalise une bijection strictement croissante de $[a,b]$ sur $[g(a), g(b)] = [0, I]$. De plus, comme $g'(x)$ ne s'annule jamais sur $[a,b]$, un théorème du cours affirme que la réciproque h de g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et vérifie la relation $h' = 1/f' \circ h$).

(c) On note L_i l'égalité $\int_{x_{i,n}}^{x_{i+1,n}} f = I/n$. Le système formé des lignes L_i pour $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ est équivalent au système formé des lignes $L_0 + \cdots + L_i$ pour $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, puisqu'on peut passer du premier au second par des transformations élémentaires (ajouts d'une ligne à une autre). Or $L_0 + \cdots + L_i$ s'écrit aussi, grâce à la relation de Chasles :
$$\int_{x_0}^{x_{i+1}} f = \int_a^{x_{i+1}} f = g(x_{i+1}) = (i+1)\frac{I}{n}\cdot$$
Comme $(i+1)I/n$ appartient à l'image $[0,I]$ de g, la question (b) montre que l'équation ci-dessus admet une et une seule solution pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, qui vaut
$$x_{i+1,n} = g^{-1}\left((i+1)\frac{I}{n}\right) = h\left((i+1)\frac{I}{n}\right).$$
En particulier $x_{n,n} = h(I) = g^{-1}(I)$ est bien égal à b, et la valeur $x_{0,n} = a$ est donnée dans l'énoncé.

Remarque. — Le résultat est graphiquement évident : si f est continue et positive, il est possible de découper en n tranches verticales la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f, de sorte que les tranches aient la même aire, nécessairement égale à I/n.

(d) D'après le calcul précédent,
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f\circ h)\left(i\frac{I}{n}\right)\cdot$$
Au facteur I près, on reconnaît ci-dessus une somme de Riemann régulière pour la fonction continue $f\circ h$ sur le segment $[0,I]$. Un théorème du cours affirme que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $(1/I)\int_0^I(f\circ h)(t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $x=h(t)$, ou encore $t=g(x)$ puisque g et h sont réciproques l'une de l'autre, conduit à
$$\lim_{n\to+\infty}u_n = \frac{1}{I}\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\cdot$$

Séries numériques

697. **RMS 2007 940 CCP PC**

Soit $\alpha\in]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha})-\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Montrer que (u_n) converge ; on note ℓ sa limite. Trouver un équivalent de $\ell-u_n$.

Solution. — On note f la fonction de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(t)=1/t^\alpha$. Il s'agit d'une fonction décroissante et continue, et le résultat préparatoire au théorème de comparaison série intégrale dit que $\sum_{k\geqslant 2}w_k$ converge, où $w_k=\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)$. La somme partielle d'ordre n de cette série est
$$S_n=\int_2^n\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}-\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha}+1-\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}=-u_n+M,$$
où M est la constante $1-2^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Au signe et à la constante près, il s'agit de u_n et on a bien prouvé que (u_n) converge.

Il s'agit ensuite de trouver un équivalent de $u_n-\ell=(M-S_n)-\lim(M-S_n)=\lim(S_n)-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}w_k$. Pour cela, on calcule un équivalent de w_k en effectuant un développement limité :
$$\begin{aligned}w_k&=\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t-f(k)=\int_{k-1}^k\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}-\frac{1}{k^\alpha}=\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{k-1}^k-\frac{1}{k^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left[k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}\right]-\frac{1}{k^\alpha},\\&=\frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha}\right]-\frac{1}{k^\alpha}=\frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{k}+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2k^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]-\frac{1}{k^\alpha}\sim\frac{\alpha/2}{k^{1+\alpha}}\cdot\end{aligned}$$
La sommation des relations de comparaison (hors programme en filière PC : comment l'éviter ? ?) montre que le reste de la série convergente $\sum w_k$ est équivalent au reste de la série des équivalents : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}w_k\sim(\alpha/2)\sum_{k=n+1}^{+\infty}1/k^{1+\alpha}$. Une comparaison série intégrale montre que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}1/k^{1+\alpha}\sim\int_n^{+\infty}\mathrm{d}t/t^{1+\alpha}=1/(\alpha n^\alpha)$. On en déduit que
$$u_n-\ell\sim\frac{1}{2n^\alpha}\cdot$$

698. **RMS 2006 1124 CCP PC**

Soit $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{u_n}/n$ et $\sum_{n\geqslant 0}e^{-1/u_n}$ convergent.

Solution. — On applique l'inégalité arithmético-géométrique $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)$ avec $a=u_n$ et $b=1/n^2$. On obtient
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\frac{\sqrt{u_n}}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right).$$
Comme les deux séries de termes généraux u_n et $1/n^2$ convergent, $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{u_n}/n$ converge aussi.

On sait que xe^x tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers zéro. Comme de plus $u_n>0$ pour tout n, la suite de terme général $-1/u_n$ diverge vers $-\infty$. Par composition de limites, la suite de terme général $-(1/u_n)e^{-1/u_n}$ converge vers zéro. En particulier, pour n assez grand, on aura $|-(1/u_n)e^{-1/u_n}|\leqslant 1$, donc
$$0\leqslant e^{-1/u_n}\leqslant u_n\,.$$
Comme la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge, $\sum_{n\geqslant 0}e^{-1/u_n}$ converge aussi.

699. **RMS 2011 1134 CCP PC**

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=a^n/(1+b^n)$.

Solution. — La valeur $b=-1$ est exclue car u_{2k+1} n'est pas défini pour tout $k\in\mathbb{N}$. Pour tout autre choix $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la suite (u_n) est définie. On discute ensuite suivant b, puis a.

(a) Si $|b|<1$, alors $u_n\sim a^n$, et $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a|<1$.

(b) Si $b=1$, alors $u_n=a^n/2$, et $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a|<1$.

(c) Si $|b|>1$ et $a\neq 0$, alors $u_n\sim(a/b)^n$, et $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a|<|b|$. Si $a=0$, alors $u_n=0$ dès que $n\geqslant 1$ donc la série converge. On note que ces deux sous-cas se résument ainsi : si $|b|>1$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a|<|b|$.

700. **RMS 2010 1070 CCP PC**

Soit, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$: $u_n=\frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

(a) Si $p=0$ ou $p=1$, montrer que la série de terme général u_n diverge.
On suppose dans la suite que $p\geqslant 2$ et on pose $S_n=\sum_{k=1}^n u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $(n+p+1)u_{n+1}=(n+1)u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire que $S_n=\frac{1}{p-1}(1-[n+1]u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(c) Soit $v_n=(n+1)u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En déduire que la série de terme général u_n converge.

(d) Déterminer la somme de la série de terme général u_n.

Solution. —

(a) Pour $p=0$, on a $u_n=1$, dont la série diverge grossièrement. Pour $p=1$, on a $u_n=\frac{1}{n+1}$, qui est le terme général d'une série de Riemann d'exposant 1, donc divergente.

(b) On calcule
$$(n+1+p)u_{n+1}=\frac{n+1+p}{\binom{n+1+p}{n+1}}=\frac{n+1+p}{\frac{(n+1+p)!}{(n+1)!p!}}=\frac{1}{\frac{(n+p)!}{(n+1)!p!}}=\frac{n+1}{\frac{(n+p)!}{n!p!}}=\frac{n+1}{\binom{n+p}{n}}=(n+1)u_n\ .$$
On raisonne ensuite par récurrence. Si $n=1$, il s'agit de prouver que $S_1=\frac{1}{p-1}(1-2u_1)=\frac{1}{p-1}(1-\frac{2}{p+1})=\frac{1}{p+1}$. Or $S_1=u_1=\frac{1}{p+1}$: la propriété est vraie au rang 1. Si elle est vraie au rang n, alors
$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\frac{1}{p-1}(1-[n+1]u_n)+u_{n+1}=\frac{1}{p-1}(1-[n+1+p]u_{n+1})+u_{n+1}=\frac{1}{p-1}(1-[n+2]u_{n+1})\ ,$$
ce qu'il fallait démontrer.

(c) Les nombres u_n étant strictement positifs, il suffit de prouver que le quotient v_{n+1}/v_n est plus petit que 1. D'après la question précédente, et puisque $p\geqslant 2$:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+2)u_{n+1}}{(n+1)u_n}=\frac{(n+2)u_{n+1}}{(n+1+p)u_{n+1}}=\frac{n+2}{n+1+p}\leqslant 1\ .$$
La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ étant décroissante et minorée puisque positive, elle converge. On note ℓ sa limite. La question précédente montre que la suite de terme général S_n converge [vers $(1-\ell)/(p-1)$], c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge.

(d) Il s'agit de calculer ℓ. Or
$$v_n=(n+1)u_n=\frac{n+1}{\binom{n+p}{n}}=\frac{n+1}{\binom{n+p}{p}}=\frac{(n+1)p!}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{p!}{n^{p-1}}\ .$$
Comme $p\geqslant 2$, on en déduit que $\ell=0$, puis que
$$\forall p\geqslant 2,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\binom{n+p}{n}}=\frac{1}{p-1}\ .$$

701. **RMS 2007 943 CCP PC**

Nature de la série de terme général $(-1)^n/(n!)^{1/n}$?

Solution. — On montre que la série étudiée satisfait les hypothèses du théorème spécial des séries alternées.

Cette série est manifestement alternée, et son terme général tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, car la formule de Stirling affirme que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, donc
$$n!^{1/n} \sim \frac{n}{e}\cdot$$
Cette déduction a été obtenue en écrivant que le quotient $q_n = n!/[n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}]$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, donc qu'il en est de même de $q_n^{1/n} = \exp([\ln q_n]/n)$. Or $q_n^{1/n} = n!^{1/n}/[(n/e)(2\pi n)^{1/2n}]$. Il est ensuite facile de voir que $(2\pi n)^{1/2n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, ce qui justifie l'équivalent $n!^{1/n} \sim n/e$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la suite de terme général $u_n = 1/(n!)^{1/n}$ est décroissante. On pose $v_n = u_{n+1}/u_n = [n!^{1/n}]/[(n+1)!^{1/n+1}]$. Comme la fonction $x \mapsto x^{n(n+1)}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il est équivalent de dire $v_n < 1$ et $v_n^{n(n+1)} < 1$. Or
$$v_n^{n(n+1)} = \frac{n!^{n+1}}{(n+1)!^n} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{n+1} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}$$
est, à l'évidence, strictement plus petit que 1. Le théorème spécial des séries alternées affirme alors que $\sum(-1)^n/(n!)^{1/n}$ converge.

702. **RMS 2011 1136 CCP PC**

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et croissante.

(b) On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1$.

  i. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

  ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2n$. En déduire $\sqrt{2n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{5n}{2}}$.

(c) Montrer que (u_n) converge si et seulement si la série de terme général a_n converge.

(d) On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1/3^n$.

  i. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

  ii. Montrer que $\ell^2 - u_n^2 \sim 1/3^{n-1}$ quand n tend vers l'infini.

Solution. —

(a) On établit par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $(\mathcal{P}_n)$: u_n existe et $u_n > u_{n-1} > 0$. Comme $u_1 = u_0 + a_0/u_0$ avec $u_0 \neq 0$, le nombre u_1 est bien défini. Comme $a_0 > 0$, on a de plus $u_1 > u_0$ et $u_0 > 0$ par hypothèse : la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, alors $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$ où u_n est défini et non nul, donc u_{n+1} est bien défini. De plus comme $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence et $a_n > 0$, on a bien $u_{n+1} > u_n > 0$: c'est $(\mathcal{P}_{n+1})$.

Au passage, on a démontré la croissance stricte de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

(b) i. Comme (u_n) est croissante, ou bien elle converge (vers un réel strictement positif noté ℓ), où bien elle diverge vers $+\infty$. Dans le premier cas, on aurait $\ell = \ell + 1/\ell$ en passant à la limite dans la relation de définition de (u_n). Comme c'est impossible, c'est donc que (u_n) diverge vers $+\infty$.

  ii. On élève au carré la relation $u_{k+1} = u_k + 1/u_k$ — ce qui donne $u_{k+1}^2 = u_k^2 + 2 + 1/u_k^2$ —, puis on somme pour k variant de zéro à $n-1$. On obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2n\,.$$
On en déduit immédiatement que $u_n^2 \geqslant 2n$ donc que $u_n \geqslant \sqrt{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n^2 \leqslant u_0^2 + 1/u_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1/(2k) + 2n \leqslant u_0^2 + 1/u_0^2 + \sum_{k=1}^{n} 1/2 + 2n = u_0^2 + 1/u_0^2 + n/2 + 2n = u_0^2 + 1/u_0^2 + 5n/2$ pour tout $n \geqslant 1$. On constate que cette majoration reste vraie pour $n = 0$. Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{5n}{2}}\,.$$
Remarque. — On peut établir un encadrement plus fin : voir l'exercice 152 page 155.

(c) On utilise l'équivalence entre la convergence de la suite de terme général u_n et celle de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ (relation suite–série)

Sens direct. Si la suite (u_n) converge, on note ℓ sa limite, qui est strictement positive (puisque la suite est croissante à termes strictement positifs). Alors la série de terme général $u_{n+1}-u_n=a_n/u_n$ converge. Comme $a_n/u_n\sim a_n/\ell$ et qu'il s'agit de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum a_n$ converge.

Sens réciproque. Si la série $\sum a_n$ converge, alors l'encadrement $0\leqslant a_n/u_n\leqslant a_n/u_0$ provenant de la croissance de la suite (u_n), montre que la série de terme général $a_n/u_n=u_{n+1}-u_n$ converge. On en déduit que (u_n) converge.

(d) On suppose : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=1/3^n$.

i. Comme la série géométrique $\sum a_n$ converge, il suffit d'appliquer la question précédente.

ii. Comme $\ell^2-u_n^2=(\ell+u_n)(\ell-u_n)\sim 2\ell(\ell-u_n)$, il suffit de trouver un équivalent de $\ell-u_n$. Pour cela, on utilise de nouveau la relation suite–série, en écrivant que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \ell=u_n+\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=u_n+\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^ku_k}\,.$$

On montre ensuite que $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^ku_k}\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^k\ell}$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. La convergence de (u_k) vers ℓ entraîne l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout $k\geqslant n_0$, on ait $|u_k-\ell|\leqslant\varepsilon$. Si $n\geqslant n_0$, on obtient alors

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^ku_k}-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^k\ell}\right|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ell-u_k}{3^k\ell u_k}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\ell}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^ku_k}\,,$$

ce qui prouve l'équivalent annoncé. Il en résulte que $\ell-u_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^ku_k}\sim\frac{1}{\ell}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2\ell 3^{n-1}}$. Alors

$$\ell^2-u_n^2\sim 2\ell(\ell-u_n)\sim\frac{1}{3^{n-1}}\,.$$

703. **RMS 2011 1147 CCP PC**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.

(b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}a_n$. En déduire que $a_n\sim a_{n+1}$.

(c) Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_na_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Solution. — On pose $f_n\colon t\in[0,1]\mapsto t^n\sqrt{1-t^2}$.

(a) Comme $\forall t\in[0,1],\ f_{n+1}(t)\leqslant f_n(t)$, la propriété de croissance de l'intégrale montre que $a_{n+1}\leqslant a_n$. On calcule aisément (la première intégrale est l'aire d'un quart du disque de centre l'origine et de rayon 1, et pour la deuxième, on remarque que $f_1(t)=-\frac12u'(t)u(t)^{1/2}$, avec $u(t)=1-t^2$) :

$$a_0=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\,,$$
$$a_1=\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1=\frac13\,.$$

(b) On intègre par parties, en dérivant t^{n+1} et en intégrant $t\sqrt{1-t^2}$, puis en écrivant que $(1-t^2)^{3/2}=(1-t^2)\sqrt{1-t^2}$ et en distribuant le produit sur le facteur $1-t^2$:

$$a_{n+2}=\int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3}t^{n+1}\right]_0^1+\frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t\,,$$
$$=\frac{n+1}{3}\left(\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{n+1}{3}(a_n-a_{n+2})\,.$$

On en déduit immédiatement que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}a_n$.

La décroissance de (a_n) montre que $a_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$. En divisant cet encadrement par le nombre strictement positif a_n, on obtient $\frac{n+1}{n+4}\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1$, et par passage à la limite quand n tend vers l'infini,

$$a_n\sim a_{n+1}\,.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$. D'après la question précédente,

$$u_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)\frac{n+1}{n+4}a_n a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1} = u_n\ ,$$

ce qui prouve que (u_n) est constante. La valeur de la constante est obtenue en calculant $u_0 = 6a_0a_1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $a_n \sim a_{n+1}$, on a $u_n \sim n^3 a_n^2$, et on en déduit que

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}\ .$$

Il en résulte que la série de terme général a_n est convergente.

704. **RMS 2012 1327 CCP PC**
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1}(f(t)/t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(1/n^2)$.
(b) Nature de la série de terme général u_n ?

Solution. —
(a) Le changement de variable $t = n + x$ dans l'intégrale qui définit u_n et la périodicité de f montrent que

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Comme f est continue, elle est bornée sur le segment $[0,1]$: on note M un nombre réel tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$. Alors comme $0 \leqslant 1/(n+x) \leqslant 1/n$ pour tout $x \in [0,1]$, on a $|\int_0^1 \frac{f(x)}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x| \leqslant M/n^2$, ce qui achève de prouver que

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

(b) Soit $\langle f\rangle = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur moyenne de la fonction 1–périodique f. Si cette valeur moyenne est non nulle, alors $u_n \sim \langle f\rangle/n$, donc la série de terme général u_n diverge. Si elle est nulle, $u_n = \mathrm{O}(1/n^2)$, donc la série en question converge.

705. **RMS 2010 1079 CCP PC**
On pose $w_n = \sum_{k=1}^n 1/(k^2 2^{n-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence et calcul de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.

Solution. — On pose $u_0 = 0$ et $u_k = 1/k^2$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $v_k = 1/2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, et on convient que $w_0 = 0$. Alors la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est le produit de Cauchy de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$. Comme les deux séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, il en est de même de la série de terme général w_n. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{\pi^2}{6}\times 2 = \frac{\pi^2}{3}\ .$$

Intégration sur un intervalle quelconque

706. **RMS 2006 1130 CCP PC**
Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x/(1+x^4)^n$.

(a) Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.
(b) En posant $u = 1/x$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$. Puis, en posant $v = u - 1/u$, calculer I_1.
(c) Calculer I_n.

Solution. —

(a) Comme $f_n(x) \sim_{+\infty} 1/x^{4n}$ et que $4n \geqslant 4$ pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc I_n existe. Par ailleurs, la suite numérique de terme général $f_n(x) = 1/(1+x^4)^n$ est une suite géométrique de raison $1/(1+x^4) \in [0, 1[$ pour tout $x > 0$; elle converge donc vers zéro. On en déduit que la suite (f_n) converge vers la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$, notée f, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On dispose aussi de l'hypothèse de domination :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leqslant f_1(x),$$

où f_1 est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim_{+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(b) La fonction $\psi\colon u \in]0, +\infty[\mapsto 1/u \in]0, +\infty[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de changement de variable dans les intégrales impropres affirme alors que les deux intégrales $\int_{]0,+\infty[} f_1$ et $\int_{]0,+\infty[} f_1 \circ \psi \times |\psi'|$ sont de même nature et, dans le cas de convergence, qu'elles sont égales. Ici, on obtient

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1/u^2}{1 + (1/u^4)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4 + 1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Ce n'est pas le résultat attendu, mais on dispose maintenant de deux expressions de I_1 : celle qu'on vient d'obtenir ci-dessus, ainsi que la définition d'origine. En remarquant que $I_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_1)$, et en utilisant ces deux expressions, on obtient

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2 + 1}{u^4 + 1}\,\mathrm{d}u\,.$$

La fonction $\theta\colon u \in]0, +\infty[\mapsto u - 1/u \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, car $\theta'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\lim_0 \theta(u) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \theta(u) = +\infty$. On peut donc effectuer la changement de variable $u = \theta^{-1}(v)$ dans l'intégrale I_1. Voici quelques calculs préliminaires, où l'on a posé $v = \theta(u) = u - 1/u$:

– On a $v^2 = u^2 - 2 + \frac{1}{u^2}$ donc $u^2v^2 = u^4 + 1 - 2u^2$, donc $u^4 + 1 = u^2(2 + v^2)$.
– Comme $\mathrm{d}v = (1 + \frac{1}{u^2})\,\mathrm{d}u$, on a $(u^2 + 1)\,\mathrm{d}u = u^2\,\mathrm{d}v$.

Le théorème de changement de variable mène à

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}v}{u^2(2 + v^2)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{2 + v^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

(c) On va établir une relation de récurrence portant sur les intégrales I_n, en écrivant que $1 = 1 + x^4 - x^4$, puis en effectuant une intégration par parties, en dérivant x et en intégrant $\frac{x^3}{(1+x^4)^n}$. On effectue le calcul sur $[0, a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$. Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n} &= \int_0^a \frac{1 + x^4 - x^4}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x\,,\\
&= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} - \int_0^a x \times \frac{x^3}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x\,,\\
&= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} - \left[\frac{x}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\,,\\
&= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} + \frac{a}{4(n-1)(1+a^4)^{n-1}} - \frac{1}{4(n-1)}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 2$, le terme central tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et on obtient

$$I_n = \left[1 - \frac{1}{4(n-1)}\right] I_{n-1} = \frac{4n-5}{4(n-1)} I_{n-1}\,.$$

On en déduit que

$$I_n = \frac{(4n-5) \times (4n-9) \times \cdots \times 7 \times 3}{4(n-1) \times 4(n-2) \times \cdots \times 8 \times 4} I_1 = \frac{(4n-5) \times (4n-9) \times \cdots \times 7 \times 3}{4^{n-1}(n-1)!}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

707. RMS 2007 944 CCP PC

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto x^\beta e^{-\alpha x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. — On note f la fonction à étudier, et on sépare l'examen de $\int_0^1 f$ et de $\int_1^{+\infty} f$. Comme f est positive, convergence des intégrales de f et intégrabilité de f sont équivalentes.

(a) Comme $f(x) \sim x^\beta$ quand x tend vers zéro, $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\beta > -1$.

(b) i. Si $\alpha > 0$, comme $x^2 f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge.

ii. Si $\alpha = 0$, l'intégrale en question (qui est une intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\beta < -1$.

iii. Si $\alpha < 0$, comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ diverge.

En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > -1$.

708. **RMS 2010 1078 CCP PC**

Soient E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré $\leqslant n$ et, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mu_k : t \mapsto t^k$.

(a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Montrer que $\int_{-\infty}^x P(t)e^t \, \mathrm{d}t$ converge.
Si $P \in E$, on pose $L(P) : P \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t)e^t \, \mathrm{d}t$.

(b) Si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, montrer que $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$. En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \mu_j / j!$.

(c) Déterminer les valeurs propres de L. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Solution. —

(a) Les comparaisons usuelles montrent que $t^2 P(t)e^t$ tend vers zéro quand t tend vers $-\infty$. La règle de Riemann montre alors que la fonction $t \mapsto P(t)e^t$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $]-\infty, x]$. En particulier, l'intégrale proposée converge.

(b) Soient a et x deux réels tels que $a < x$, et soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On effectue une intégration par parties sur le segment $[a, x]$, consistant à dériver t^{k+1} :

$$e^{-x} \int_a^x t^{k+1} e^t \, \mathrm{d}t = e^{-x} \left(\left[t^{k+1} e^t \right]_a^x - (k+1) \int_a^x t^k e^t \, \mathrm{d}t \right) = x^{k+1} - a^{k+1} e^{-x+a} - (k+1) e^{-x} \int_a^x t^k e^t \, \mathrm{d}t \, .$$

En faisant tendre a vers $-\infty$, on obtient $e^{-x} \int_{-\infty}^x t^{k+1} e^t \, \mathrm{d}t = x^{k+1} - (k+1)e^{-x} \int_{-\infty}^x t^k e^t \, \mathrm{d}t$, et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k) \, .$$

On démontre ensuite la relation proposée par récurrence sur k. Pour $k = 0$, il s'agit d'établir que $L(\mu_0) = \mu_0$. Or $L(\mu_0)(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t \, \mathrm{d}t = e^{-x} [e^t]_{-\infty}^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: c'est fait.

On suppose que la relation est vraie au rang $k \leqslant n-1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} L(\mu_{k+1}) &= \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k) = \mu_{k+1} - (k+1)(-1)^k k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\mu_j}{j!} \, , \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)! \left[(-1)^{k+1} \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\mu_j}{j!} \right] = (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{\mu_j}{j!} \, . \end{aligned}$$

(c) La relation $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{\mu_j}{j!}$ montre que la matrice de L dans $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$, la base canonique de E, est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de L sont donc les éléments diagonaux de cette matrice, qui sont tous égaux à 1 :

$$\mathrm{Sp}(L) = \{1\} \, .$$

L'endomorphisme L n'est donc pas diagonalisable (il a une unique valeur propre égale à 1 et n'est pas l'identité).

Suites et séries de fonctions

709. **RMS 2011 1141 CCP PC**

Ensemble de définition et continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n + n^3 x^2)$.

Solution. — La série diverge pour $x = 0$ (série harmonique). Si $x \neq 0$ est fixé, le terme général $u_n(x) = 1/(n + n^3 x^2)$ est équivalent à $1/(n^3 x^2)$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\sum u_n(x)$ converge (équivalent à une série à terme positive convergente). On note f la somme de la série, et on vient de prouver que

$$D_f = \mathbb{R}^* \, .$$

Comme chaque u_n est paire, il en est de même de f. On fixe $a > 0$. Alors $\|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = u_n(a) \sim 1/(n^3 a^2)$. Par suite, $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme chaque u_n est continue, on en déduit la continuité de f sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}^*$ par parité.

710. **RMS 2011 1142 CCP PC**

Montrer que $S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/(n+x)$ est définie sur $]0,+\infty[$. L'application S est-elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$?

Solution. — On pose $u_n\colon x \mapsto (-1)^n/(n+x)$. Pour $x>0$ fixé, la suite de terme général $u_n(x)$ est alternée, tend vers zéro et son module décroît. le théorème spécial des séries alternées permet de conclure que S est définie sur $]0,+\infty[$ (elle l'est aussi sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$: la suite de terme général $u_n(x)$ pour $n\geqslant x$ vérifiant les hypothèses du théorème spécial des séries alternées).

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u_n(x)=(-1)^n/(x+n)^2$, donc $\|u_n'\|_{\infty,]0,+\infty[}=1/n^2$ pour tout $n\geqslant 1$. La convergence normale de $\sum_{n\geqslant} u_n'$ sur $]0,+\infty[$ et la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ prouvent alors que $S-u_0$, puis S, sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc continues.

711. **RMS 2006 1127 CCP PC, RMS 2011 1143 CCP PC**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=e^{nz}/n^2$.

(a) Si $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$, calculer $|u_n(z)|$. Montrer que la série de terme général $|u_n(z)|$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$. Si $x\in\mathbb{R}_-$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

(b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_-$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

(d) Calculer f''. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}_-,\ f(x)=f(0)+\int_x^0 \ln(1-e^t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Solution. —

(a) On écrit $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors $e^{nz}=e^{na}e^{inb}$ et on en déduit que $|u_n(z)|=e^{na}/n^2$. Si $a>0$, alors $|u_n(z)|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, et la série étudiée diverge grossièrement. Si $a\leqslant 0$, alors $|u_n(z)|\leqslant 1/n^2$, et la série converge. Finalement,

$$\sum_{n\geqslant 1}|u_n(z)| \text{ converge} \iff \mathrm{Re}(z)\leqslant 0\,.$$

(b) La question précédente montre que f est définie sur $\mathbb{R}_-$. La majoration $|u_n(z)|\leqslant 1/n^2$ montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_-$, et la continuité des fonctions u_n achève de prouver que f est continue sur $\mathbb{R}_-$. Comme $\lim_{-\infty}u_n(x)=0$, et comme la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_-$, le théorème d'interversion des limites affirme que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to-\infty}u_n(x)=0\,.$$

On peut aussi utiliser la majoration $nx\leqslant x$ pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\leqslant 0$, ce qui entraîne que $0\leqslant f(x)\leqslant e^x f(0)$, donc que $\lim_{-\infty}f=0$.

(c) Soit $(a,n)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{N}^*$. La fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $u_n^{(k)}(x)=n^{k-2}e^{nx}$ pour tout x réel, donc

$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,]-\infty,a]}=n^{k-2}e^{na}\,.$$

Par suite, $n^2\|u_n^{(k)}\|_{\infty,]-\infty,a]}=n^ke^{na}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]-\infty,a]$. Ceci étant vrai pour tout k, le théorème de dérivation terme à terme montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,a]$. Comme a est quelconque dans $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$, avec $f^{(k)}=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^{(k)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

(d) En particulier, pour $k=2$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\quad f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{nx}=\frac{e^x}{1-e^x}\,.$$

Par suite, il existe une constante C telle que $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $f'(x)=-\ln(1-e^x)+C$. On en déduit que $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=C$. Par ailleurs, $u_n'(x)=e^{nx}/n$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$, et la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n'$ sur $]-\infty,-1]$ montre qu'on peut appliquer le théorème d'interversion des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to-\infty}u_n'(x)=0$. On en déduit que $C=0$, puis que

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\quad f'(x)=-\ln(1-e^x)\,.$$

On fixe momentanément $x<0$. On dispose de la comparaison suivante au voisinage de zéro à gauche :

$$\ln(1-e^t)=\ln(1-(1+t+\mathrm{o}(t)))=\ln(-t)+\ln(1+\mathrm{o}(1))=\ln(-t)+\mathrm{o}(1)\underset{t\to0^-}{\sim}\ln(-t)\,.$$

Comme il s'agit d'un équivalent entre fonctions de signe constant au voisinage de zéro, et comme on sait que $\int_x^0 \ln(-t)\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\int_x^0 \ln(1-e^t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par suite, $x \mapsto \int_x^0 \ln(1-e^t)\,\mathrm{d}t$ existe et est la primitive nulle en zéro de $x \mapsto -\ln(1-e^x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Il s'ensuit que $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ f(x) = \int_x^0 \ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t$. La valeur bien connue de la somme de la série de terme général $1/n^2$ montre enfin que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \int_x^0 \ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t\,.$$

La fonction f est continue en zéro et $f'(x) = -\ln(1-e^x)$ tend vers $+\infty$ en zéro : on en déduit que le graphe de f présente une demi-tangente verticale en zéro, donc que f n'est pas dérivable en zéro.

712. **RMS 2012 1332 CCP PC**

Soit E l'ensemble des $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = 1/x,\ f(1) = 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) On pose $u_n\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Monter que $u\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $u \in E$.

(b) Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1–périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?

(c) En déduire que $f = g$. Que vaut E ?

Solution. — à rédiger ? ?

Séries entières

713. **RMS 2010 1080 CCP PC**

Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n$.

Solution. — Comme $\cos(2n\pi/3)$ vaut 1 si n est multiple 3 et $-1/2$ sinon, on en déduit que $|x^n|/2n \leqslant |\frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n| \leqslant |x^n|/n$. La série entière de terme général x^n/n ayant un rayon de convergence égal à 1 (c'est une série du cours, dont la somme sur $]-1,1[$ vaut $-\ln(1-x)$), il en est de même de la série étudiée ici.

On note j le nombre complexe $\exp(2i\pi/3)$ et f la somme de la série entière de terme général $(jx)^n/n$, de rayon de convergence 1. On remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n = \Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n}\right) = \Re\left(f(x)\right)\,.$$

Le théorème de dérivation terme à terme affirme que f est dérivable et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} j^n x^{n-1} = j\sum_{n=0}^{+\infty} (jx)^n = \frac{j}{1-jx} = j\frac{1-\bar{j}x}{(1-jx)(1-\bar{j}x)} = \frac{j-x}{1+x+x^2}\,.$$

Comme $f(0) = 0$ d'après la définition de f, on en déduit que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{n}x^n &= \Re\left(\int_0^x \frac{j-t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = -\int_0^x \frac{t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+t+t^2} - \frac{1}{1+t+t^2}\right)\mathrm{d}t\,,\\
&= -\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right]^2+1}\,,\\
&= -\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left[x+\frac{1}{2}\right]\right) - \frac{\pi}{6}\right].
\end{aligned}$$

714. **RMS 2010 1081 CCP PC**

Donner le développement en série entière de $f\colon x \mapsto (2x-1)/(2+x-x^2)^2$.

Solution. — On remarque que $f(x) = -u'(x)/u^2(x)$ avec $u(x) = 2+x-x^2$, donc que $f = F'$ avec $F(x) = 1/u(x) = 1/(2+x-x^2) = 1/[(1+x)(2-x)]$ pour tout $x \in]-1,1[$. Il suffit donc de développer F en série entière sur $]-1,1[$, puis d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Or

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right).$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n-1}\,.$$

715. **RMS 2007 946 CCP PC**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$.

(a) Étudier la parité de f. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) + 2xf(x) = 1$.
(b) Donner un équivalent simple de f en zéro.
(c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.
(d) Déterminer la limite de $2x\exp(-x^2)\int_0^{x-1}\exp(t^2)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution. —

(a) Comme $t \mapsto \exp(t^2)$ est paire, $x \mapsto \int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$ est impaire, et f est impaire. La dérivée de f se calcule ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -2xf(x) + \exp(-x^2)\exp(x^2) = -2xf(x) + 1$, ce qu'il fallait démontrer.
(b) Comme $\exp(-x^2)$ tend vers 1 quand x tend vers zéro, $f(x) \sim \int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers zéro. Comme $\exp(t^2) = 1 + \mathrm{o}(1)$ au voisinage de zéro et comme on peut intégrer les développements limitées, on en déduit que $\int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \cdots + x + \mathrm{o}(x)$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\,.$$

(c) La fonction $t \mapsto \exp(t^2)$ est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence infini. Le théorème de primitivation terme à terme dit qu'il en est de même de $x \mapsto \int_0^x \exp(t^2)\,\mathrm{d}t$.
Comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence infini, le théorème relatif au produit de Cauchy affirme que f est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence infini
(d) On encadre la quantité étudiée, grâce au fait que $\exp(t^2) \leqslant \exp((x-1)^2)$ pour tout $t \in [0, x-1]$:

$$0 \leqslant 2x\exp(-x^2)\int_0^{x-1}\exp(t^2)\,\mathrm{d}t \leqslant 2x\exp(-x^2)(x-1)\exp((x-1)^2) = 2x(x-1)\exp(-2x+1)\,.$$

Le majorant tend vers zéro, en vertu des comparaisons usuelles, donc

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\exp(-x^2)\int_0^{x-1}\exp(t^2)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

716. **RMS 2012 1330 CCP PC**
Soit $f\colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto (e^{x^2} - 1)/x$ prolongée par $f(0) = 1$.

(a) Montrer que f est dérivable en zéro. préciser $f'(0)$.
(b) Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de f, f^3 et f^5.
(c) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro, et que f est strictement croissante.
(d) Vérifier que f est un $\mathcal{C}^\infty$–difféormorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et que f^{-1} est impaire.
(e) Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de $x \mapsto (f^{-1}(x))^5$.

Solution. — à rédiger ? ?

717. **RMS 2006 1128 CCP PC**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f.

(a) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on a $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$.
(b) On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\quad |a_p| \leqslant M/r^p$. En déduire que f est une fonction constante.
(c) On suppose qu'il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$, et un entier naturel non nul q tels que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant a|z|^q + b$. Montrer que f est une fonction polynomiale.
(d) On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant \exp(\operatorname{Re} z)$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = K\exp(z)$.

Solution. —

(a) Le membre de gauche de l'égalité à établir vaut $\int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t})\,\mathrm{d}t$. Si l'on peut permuter la somme et l'intégrale, on obtiendra $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t$. Or

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \int_0^{2\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{0,k}\,.$$

Dans la somme, il ne restera alors plus qu'un seul terme : celui qui correspond à $n = p$, et on aura prouvé la relation attendue.

On justifie maintenant l'interversion de $\int$ et de $\sum$. On pose $g_n\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t} \in \mathbb{C}$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $|a_n r^n e^{i(n-p)t}| \leqslant |a_n| r^n$. Or la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge, puisque le rayon de convergence de la série entière de départ est infini. Il y a donc convergence normale de la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ sur le segment $[0, 2\pi]$: l'interversion est justifiée.

(b) Comme f est bornée sur $\mathbb{C}$, il existe $M > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant M$. Alors la question (a) et l'inégalité triangulaire pour les intégrales conduisent à

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \quad |a_p| = \frac{1}{2\pi r^p}\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})e^{-ipt}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}t = \frac{M}{r^p}$$

Si $p \geqslant 1$, et si r tend vers $+\infty$, alors $\frac{M}{r^p}$ tend vers zéro. Par passage à la limite, on obtient $|a_p| \leqslant 0$, donc $a_p = 0$ pour tout $p \geqslant 1$. Il reste plus que $f(z) = a_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc f est constante.

(c) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$g(z) = \sum_{n=q}^{+\infty} a_n z^{n-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+q} z^k = a_q + a_{q+1}z + a_{q+2}z^2 + \cdots$$

On montre que ceci a bien un sens. On fixe $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Comme le rayon de convergence de f est infini, la suite de terme général $a_n z_0^n$ converge vers zéro, donc il en est de même de la suite décalée de terme général $a_{n+q} z_0^{n+q}$, donc, en divisant par le nombre complexe non nul fixé z_0^q, la suite de terme général $a_{n+q} z_0^n$ converge vers zéro. Ceci montre que le rayon de convergence R de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_{k+q} z^k$ est plus grand que $|z_0|$. Comme z_0 est quelconque, R est infini, et la définition de g est justifiée.

On pose aussi $P(z) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k z^k$: la fonction P ainsi définie est la fonction polynomiale qu'on a retirée à f pour former g. De manière évidente, on a $g(z) = [f(z) - P(z)]/z^q$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Sur la partie compacte qu'est le disque unité fermé du plan complexe, la fonction g est continue donc bornée : il existe une constante $H > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad |z| \leqslant 1, \quad |g(z)| \leqslant H\,.$$

Si $|z|$ est maintenant strictement plus grand que 1, l'inégalité triangulaire implique que $|P(z)/z^q| \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |a_k/z^{q-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |a_k|$. La dernière égalité vient de ce que $|z| > 1$, et on pose $S = \sum_{k=0}^{q-1} |a_k|$: c'est une constante. En utilisant l'hypothèse sur f et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad |z| > 1, \quad |g(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{z^z}\right| + \left|\frac{P(z)}{z^q}\right| \leqslant \frac{a|z|^q + b}{|z|^q} + S \leqslant a + b + S\,.$$

Enfin, on pose $M = \max(H, a + b + S)$, de sorte que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| \leqslant M$. La fonction g est bornée : la question (b) affirme alors que c'est une constante, notée c. D'après la relation $f(z) = P(z) + z^q g(z)$ valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = P(z) + cz^q\,.$$

On lit ci-dessus que f est une fonction polynomiale (de degré au plus q).

(d) On pose $g(z) = \exp(-z)f(z)$ et on raisonne comme à la question précédente.

718. **RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n\,\mathrm{d}t$.

(a) Calculer a_0 et a_1. Déterminer la limite de (a_n).

(b) i. Étudier la monotonie de la suite (a_n). En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

ii. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = 2\int_0^1 \mathrm{d}t/(3 + t^2)$. En déduire la valeur de cette somme.

(c) Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1/(2n + 1)$. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

ii. Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

SOLUTION. — On pose $u_n : t \in [0,1] \mapsto (\frac{1+t^2}{2})^n$.

(a) On obtient $a_0 = 1$ et $a_1 = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\,\mathrm{d}t = [\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}]_0^1 = \frac{2}{3}$.
Pour tout $t \in [0,1[$, la suite numérique $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $(1+t^2)/2 \in [1/2, 1[$. De plus, la suite de terme général $f_n(1)$ est constante et vaut 1. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction caractéristique du singleton $\{1\}$, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, l'hypothèse de domination suivante est vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $|u_n(t)| \leqslant \varphi(1) := 1$, la fonction φ étant intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et

$$\lim_{+\infty} a_n = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

(b) i. Comme la raison $r = \frac{1+t^2}{2}$ appartient à $[0,1]$, la suite de terme général $u_n(t) = r^n$ est décroissante. Par conséquent, la suite des intégrales a_n est décroissante. Elle converge vers zéro d'après la question (a), et elle est positive. La série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ vérifie donc les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc sa conclusion : elle converge.

ii. Il s'agit de déterminer si l'on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\|(-1)^n u_n\|_{[0,1]} = 1$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ n'est pas normalement convergente. On va alors appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles de cette série, considérée sur l'intervalle $[0,1[$. Pour tout $t \in [0,1[$, on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(t)\,,$$
$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}} = \frac{2}{3+t^2}\,.$$

Le dernier calcul est justifié par le fait que la raison $-\frac{1+t^2}{2}$ appartient à $]-1,1[$ lorsque $t \in [0,1[$, et signifie que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction S, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, d'après la question précédente, la série $\sum(-1)^n u_n(t)$ vérifie, à $t \in [0,1[$ fixé, les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc sa somme partielle d'ordre n vérifie l'hypothèse de domination $|S_n(t)| \leqslant |u_0(t)|$, où la fonction $|u_0|$ est intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que S est intégrable sur $[0,1[$ (ce qui est clair) et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\,.$$

(c) i. On constate que $\forall t \in [0,1]$, $u_n(t) \geqslant t^2$, puisque cette inégalité équivaut à $1 \geqslant t^2$ pour tout $t \in [0,1]$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\,.$$

D'après la question (a), on dispose aussi de l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant 1$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{|x|^n}{2n+1} \leqslant |a_n x^n| \leqslant |x|^n$. Les deux séries de termes généraux $\frac{|x|^n}{2n+1}$ et $|x|^n$ étant convergentes si et seulement $|x| < 1$, on en déduit que

$$R = 1\,.$$

ii. On commence par établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} pour $n \geqslant 1$, grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right]_0^1 + n\int_0^1 t^2\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\,,\\
&= 1 + n\int_0^1 (t^2+1-1)\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = 1 + 2n\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t - n\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t\,,\\
&= 1 + 2na_n - na_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore $1+2na_n-a_n-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}=0$. On multiplie cette relation par x^n puis on somme pour n variant de 1 à l'infini, en profitant de la dérivabilité terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. On obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} x^n + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n - x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1}\\
&\quad = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n + a_0 + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\ ,\\
&\quad = \frac{x}{1-x} + 2xf'(x) - f(x) + 1 + x^2f'(x) - xf(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

On peut réécrire cette relation sous la forme

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\quad x(x+2)f'(x)-(x+1)f(x)=\frac{1}{x-1}\,\cdot$$

719. **RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC**

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0=1$, $d_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_{n+2}=(n+1)(d_{n+1}+d_n)$.

(a) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n\geqslant 2$, $n!/3\leqslant d_n\leqslant n!$.

(b) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général $(d_n/n!)x^n$. Si $x\in\,]-R,R[$, on pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(d_n/n!)x^n$.

(c) Montrer que $\forall x\in\,]-R,R[\,$, $(1-x)S'(x)=xS(x)$.

(d) En déduire une expression de S. Exprimer d_n en fonction de n.

Solution. —

(a) On obtient $d_2=1$ et $d_3=2$. On démontre par récurrence complète que $(\mathcal{P}_n)\ :\ n!/3\leqslant d_n\leqslant n!$ est vraie.
La propriété $(\mathcal{P}_2)$ est vraie car $2!/3=2/3\leqslant d_2=1\leqslant 2!$, et $(\mathcal{P}_3)$ est vraie car $3!/3=2\leqslant d_3=2\leqslant 3!$. Supposons que $(\mathcal{P}_k)$ soit vraie pour tout entier k tel que $2\leqslant k\leqslant n+1$. Alors

$$\frac{(n+2)!}{3}=\frac{n+1}{3}[(n+1)!+n!]\leqslant d_{n+2}=(n+1)(d_{n+1}+d_n)\leqslant(n+1)[(n+1)!+n!]=(n+2)!\ ,$$

donc $(\mathcal{P}_{n+2})$ est vraie.

(b) La question précédente montre que $|x|^n/3\leqslant(d_n/n!)|x|^n\leqslant|x|^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Les séries de terme généraux $|x|^n/3$ et $|x|^n$ étant convergentes si et seulement si $|x|<1$, on en déduit que

$$R=1\,.$$

(c) On multiplie la relation $d_{n+2}=(n+1)(d_{n+1}+d_n)$ par $x^{n+1}/(n+1)!$, et on somme pour n variant de zéro à l'infini. Comme les sommes de séries entières sont dérivables terme à terme sur leur intervalle ouvert de convergence, on obtient, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S(x)-\frac{d_0}{0!}-\frac{d_1}{1!}x\right)=S'(x)\ ,\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_{n+1}}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^{n+1}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\right)+x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n\ ,\\
&=xS'(x)+xS(x)\,.
\end{aligned}$$

Cette relation se réécrit sous la forme $\forall x\in\,]-R,R[\,$, $(1-x)S'(x)=xS(x)$.

(d) La résolution, sur l'intervalle $]-1,1[$, de l'équation différentielle homogène $y'(x)+\frac{x}{x-1}y(x)=y'(x)+(1+\frac{1}{x-1})y(x)=0$ donne les solutions suivantes : $x\mapsto\lambda e^{-x}/(1-x)$, où λ est une constante réelle. La valeur $S(0)=d_0=1$ montre que $\lambda=1$, donc que

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\quad S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}\,\cdot$$

L'égalité ci-dessus montre que $S(x)$ est le produit de Cauchy des deux séries $\sum(-x)^n/n!$ (série exponentielle, de rayon de convergence $+\infty$) et $\sum x^n$ (série géométrique, de rayon de convergence 1). Le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries entières affirme que $\sum(d_n/n!)x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$, ce que l'on savait déjà, et que $d_n/n! = \sum_{k=0}^n e_k f_{n-k}$, avec $e_k = (-1)^k/k!$ et $f_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) .$$

Remarque. — Comme la série de terme général $(-1)^k/k!$ converge vers $1/e$, on déduit de l'égalité ci-dessus que $d_n \sim n!/e$ lorsque n tend vers l'infini. La formule de la question (d) prouve aussi, grâce à un raisonnement par inclusion-exclusion, que d_n est le nombre de dérangements sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire le nombre de permutations sans point fixe dans $\mathfrak{S}_n$. On peut aussi établir ce résultat à partir de la relation de récurrence $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$ en distinguant, parmi les dérangements d'ordre $n+2$, ceux tels que $n+2$ fait partie d'un cycle à deux éléments de ceux tels que le cycle de $n+2$ est de longueur $\geqslant 3$.

Par ailleurs, on peut démontrer que d_n est l'entier le plus proche de $n!/e$ pour tout $n \geqslant 1$: en effet, les propriétés des séries alternées (le reste d'ordre n est plus petit que la valeur absolue de son premier terme) montrent que $|d_n - n!/e| = |n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k/k!| \leqslant n!/(n+1)! = 1/(n+1)$. Si $n \geqslant 2$, alors $1/(n+1) \leqslant 1/3 < 1/2$, ce qui prouve l'affirmation. Si $n = 1$, on a $d_1 = 0$ qui est bien l'entier le plus proche de $1!/e \approx 0,3$.

720. **RMS 2010 1082 CCP PC**

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} 1/k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(2n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(2n)$.

(c) Montrer que la série de terme général $(-1)^{n+1} S_n/(2n+1)$ est convergente. On note S sa somme

(d) Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} S_n x^{2n}$. Montrer que f est définie sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x^2)f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + x \arctan x .$$

(e) Calculer S.

Solution. —

(a) La limite demandée est $+\infty$ (série harmonique).

(b) La fonction $f\colon x \mapsto 1/x$ étant décroissante, on a $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$. En sommant pour k variant de 2 à $2n$, on obtient $\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - 1 \leqslant \int_1^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t$, ou encore $\ln(2n+1) - \ln 2 \leqslant S_n - 1 \leqslant \ln(2n)$. Par suite, $\ln(2n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln(2n) + 1$ puis, comme $-\ln 2 + 1$ est positif,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(2n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(2n) .$$

(c) On pose $u_n = (-1)^{n+1} S_n/(2n+1)$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (u_n) est alternée, et $|u_n| \leqslant \frac{1+\ln(2n)}{2n+1}$, donc la suite (u_n) converge vers zéro. Pour montrer que la suite $(|u_n|)$ décroît, il suffit de montrer que la quantité suivante est positive :

$$\begin{aligned}
&(2n+1)(2n+3)\left(|u_n| - |u_{n+1}|\right) \\
&= (2n+3)S_n - (2n+1)S_{n+1} = (2n+3)S_n - (2n+1)\left(S_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\right), \\
&= 2S_n - \frac{2n+2-1}{2n+2} - \frac{2n+3-2}{2n+3} \ = \ 2\ (S_n - 1) + \frac{1}{2n+2} + \frac{2}{2n+3} .
\end{aligned}$$

Comme $S_n \geqslant 1$, la quantité ci-dessus est bien positive.

Le théorème spécial des séries alternées s'applique, et la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{S_n}{2n+1}$ converge.

(d) Si $|x| < 1$, alors $|(-1)^n S_n x^{2n}| < (1 + \ln(2n))|x|^{2n}$, qui est le terme général d'une suite qui converge vers zéro (comparaisons usuelles). Par suite, la série entière étudiée a un rayon de convergence $R \geqslant 1$ (en fait, $R = 1$, car si $|x| > 1$, le terme général de la série n'est pas borné).

On distribue le membre de gauche, on effectue le changement d'indice $k = n+1$, et on reconnaît des développements usuels en série entière, pour $|x|<1$:

$$\begin{aligned}(1+x^2)f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}S_nx^{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}S_nx^{2(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}S_nx^{2n}+\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^kS_{k-1}x^{2k}\,,\\ &= S_1x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(S_n-S_{n-1}\right)x^{2n}=\frac{3}{2}x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)x^{2n}\,,\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(x^2\right)^n}{n}+x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,,\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x\arctan x\,.\end{aligned}$$

(e) On déduit de la question précédente que, pour tout $x\in]-1,1[$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}\arctan x\right]=\frac{1}{2}(uv'+u'v)(x)\,,$$

avec $u(x)=\ln(1+x^2)$ et $v(x)=\arctan x$. La fonction $F=uv$ est donc une primitive de f, et le théorème de primitivation terme à terme des séries entières donne l'égalité $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{S_n}{2n+1}x^{2n+1}+k$ pour tout $x\in]-1,1[$, où k est une constante. En évaluant l'égalité pour $x=0$, on trouve $k=0$. Par suite,

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\arctan x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{S_n}{2n+1}x^{2n+1}\,.$$

Comme la série figurant dans le membre de droite converge pour $x=1$ (c'est la question c), le théorème de convergence radial d'Abel et Dirichlet dit que l'égalité reste valable pour $x=1$, ce qui donne

$$S=\frac{\pi\ln 2}{8}\,.$$

721. **RMS 2011 1146 CCP PC**

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^2=\pi^2/6$. Soit $T\colon t\mapsto]-\infty,1[\setminus\{0\}\mapsto-\frac{\ln(1-t)}{t}$.

(a) Montrer que T se prolonge par continuité en zéro et que $\forall t\in]-1,1[\,,\ T(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}$.
Soit $L\colon x\mapsto\int_0^x T(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que T est intégrable sur $[0,1[$ et que L est dérivable sur $]-1,1[$. Calculer L'.

(c) Montrer que $\forall x\in[-1,1],\ L(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

(d) En déduire que $\forall x\in[-1,1],\ L(x)+L(-x)=L(x^2)/2$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(e) Montrer que $\forall x\in]0,1[\,,\ L(x)+L(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(x)\ln(1-x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^nn^2}$.

Solution. —

(a) Comme $\ln(1-t)\sim-t$ quand t tend vers zéro, la fonction T se prolonge par continuité en zéro en posant $T(0)=1$. Le développement en série entière du logarithme $\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$, de rayon de convergence 1, montre que $\forall t\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $T(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}$. On remarque que l'égalité reste valable pour $t=0$: les deux membres valent 1. On conclut que

$$\forall t\in]-1,1[\,,\quad T(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}\,.$$

(b) On dispose de l'équivalent entre fonctions positives $T(y)\sim-\ln(1-t)$ quand t tend vers 1. Or $t\mapsto-\ln(1-t)$ est intégrable sur $[0,1[$ (au changement de variable affine $u=1-t$ près, il s'agit de l'intégrale du cours $-\int_0^1\ln(u)\,\mathrm{d}u$). On en déduit que T est intégrable sur $[0,1[$. Comme T est continue sur $]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, un théorème assure que L est la primitive de T nulle en zéro, donc que L dérivable sur $]-1,1[$ et que $L'=T$.

(c) Le théorème de primitivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence montre que $\forall x\in]-1,1[\,,L(x)=L(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$. Comme T est intégrable sur $[0,1[$, la fonction $L\colon x\mapsto\int_0^x T(t)\,\mathrm{d}t$ est continue en 1. Par ailleurs, comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ évaluée en $x=1$ est convergente, le théorème de convergence radiale d'Abel et Dirichlet montre que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est continue en 1. On en déduit que l'égalité entre L et la somme de la série entière est encore valable au point 1. On fait de même au point -1 (la fonction T est continue sur $[-1,0]$ donc intégrable, donc L est définie et continue sur $[-1,0]$, et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ évaluée en -1 est convergente). On conclut que

$$\forall x \in [-1,1], \quad L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

(d) On en déduit que

$$\forall x \in [-1,1], \quad L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [1+(-1)^n] \frac{x^n}{n^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k^2} = \frac{1}{2}L(x^2)\,.$$

En substituant x par 1 dans cette égalité, on obtient $L(1)+L(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{L(1)}{2} = \frac{\pi^2}{12}$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

(e) On pose $f(x) = L(x) + L(1-x)$ et $g(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$, ce qui définit deux fonctions dérivables sur $]0,1[$. De plus, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = L'(x) - L'(1-x) = T(x) - T'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}\,,$$
$$g'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}\,.$$

On en déduit que f et g diffèrent d'une constante sur l'intervalle $]0,1[$. Sa valeur est obtenue en calculant les limites de f et g en zéro. La continuité de L sur $[0,1]$ montre que $\lim_0 f(x) = L(0)+L(1) = \frac{\pi^2}{6}$, et l'équivalent $\ln(1-x) \sim -x$ en zéro, ainsi que la limite usuelle $\lim_0 x\ln x = 0$, montrent que $\lim_0 g(x) = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit que $f = g$ sur $]0,1[$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in]0,1[\,, \quad L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)\,.$$

En substituant x par $\frac{1}{2}$ dans cette égalité, on obtient $2L(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{6} - [\ln\frac{1}{2})]^2$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\,.$$

722. **RMS 2012 1331 CCP PC**

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.

(c) Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$.

(d) On suppose $a \in]0,1[$.

i. Soit $g\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$. Montrer que g est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$.

ii. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$. montrer que f est nulle.

iii. Déterminer l'ensemble des $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Solution. — à rédiger ? ?

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

723. **RMS 2006 1131 CCP PC**

Soient $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Existence de I_n et limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution. — On pose $f_n(x) = x^a e^{-nx}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Alors $f_n(x) \sim_0 x^a$. Comme $a > -1$, on déduit de cet équivalent entre fonctions positives que f_n est intégrable au voisinage de zéro. Par ailleurs, $x^2 f_n(x) = x^{a+2}e^{-nx}$ tend vers

zéro quand x tend vers $+\infty$, donc f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$. Il en résulte que I_n est une intégrale (absolument) convergente (ou que f_n est intégrable sur $]0+\infty[$).
La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$, et vérifie l'hypothèse de domination $|f_n|\leqslant f_1$, avec f_1 intégrable. Le théorème de convergence dominée dit alors que

$$\lim_{+\infty} I_n = 0\,.$$

724. **RMS 2010 1083 CCP PC**
Soit $I_n = 4^n\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Solution. — La fonction polynomiale du second degré $x\mapsto 4x(1-x)$ est positive et atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x=\frac{1}{2}$ seulement. Ce maximum vaut 1, donc :

$$\forall x\in[0,1]\setminus\{1/2\}\,,\quad 0\leqslant 4x(1-x)<1\,.$$

On en déduit que la suite de fonctions de terme général $f_n\colon x\mapsto 4^nx^n(1-x)^n$ converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0,1]$, sauf pour $f(\frac{1}{2})=1$. Cette fonction est continue par morceaux. Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, il faut une hypothèse de domination, qui est très simple : d'après ce qu'on vient de voir, $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$. Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

725. **RMS 2010 1086 CCP PC**
Soient $I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$, $J_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t/(1+t^2)^n$ et $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x\geqslant 1+x$. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}$, $1-t^2\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1/(1+t^2)$.
(b) Justifier l'existence de I et de J_n pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\leqslant I/\sqrt{n}\leqslant J_n$.
(c) Montrer que $I_n=W_{2n+1}$ et $J_n=W_{2n-2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
(d) Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et que $(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$.
(e) En déduire I.

Solution. —

(a) L'inégalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x\geqslant 1+x$ est une conséquence de la convexité de la fonction exponentielle : son graphe est situé au-dessus de sa tangente en zéro. Il en résulte immédiatement que $\forall t\in\mathbb{R}$, $1-t^2\leqslant e^{-t^2}$ et $0<1+t^2\leqslant e^{t^2}$. En composant la dernière inégalité par la fonction $x\mapsto 1/x$ qui décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{-t^2}\leqslant 1/(1+t^2)$.

(b) La limite $t^2e^{-t^2}\to 0$ quand $t\to+\infty$ et la majoration $0\leqslant 1/(1+t^2)^n\leqslant 1/t^2$ montrent respectivement que I et J_n, pour $n\in\mathbb{N}^*$, convergent.
La première majoration de la question précédente, suivie du changement de variable $t=u/\sqrt{n}$, puis le changement de variable inverse, et enfin la deuxième majoration de la question précédente, montrent que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n\leqslant\int_0^1(e^{-t^2})^n\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{I}{\sqrt{n}}=\int_0^{+\infty}(e^{-t^2})^n\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}=J_n\,.$$

(c) Le changement de variable $t=\cos u$ dans l'intégrale I_n, avec $u\in[0,\pi/2]$, montre immédiatement que $I_n=W_{2n+1}$ (il s'agit d'un changement de variable entre intégrales sur des segments).
Le changement de variable $t=\tan u$ dans J_n, avec $u\in[0,\pi/2[$, ainsi que la relation $\cos^2=1/(1+\tan^2)$, montrent que

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2 u)^n}(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+\tan^2 u)^{n-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^{2n-2}\,\mathrm{d}u\,.$$

On remarque qu'il s'agit d'un changement de variable entre intégrales dont au moins une est impropre, et qu'il est légitime puisque $u\in[0,\pi/2[\mapsto\tan u$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Le changement de variable $u=\pi/2-t$ montre finalement que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^{2n-2}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n-2}\,\mathrm{d}u=W_{2n-2}$.

(d) L'inégalité $\forall t\in[0,\pi/2]$, $(\sin t)^{n+1}\leqslant(\sin t)^n$ et la croissance de l'intégrale montrent que $W_{n+1}\leqslant W_n$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
Une intégration par parties consistant à dériver $\cos t$ et à intégrer $(\sin^n t)\cos t$ donne

$$W_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=W_n-\left[\frac{\sin^{n+1}t\cos t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\sin t\,\mathrm{d}t=W_n+\frac{W_{n+2}}{n+1}\,.$$

La relation $(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$ s'en déduit immédiatement.

(e) En multipliant la relation précédente par W_{n+1}, on obtient $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$, c'est-à-dire que la suite de terme général $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante. La valeur de cette constante est donnée par le calcul pour $n=0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}\cdot$$

La relation de la question précédente montre aussi que $W_{n+2} = [(n+1)/(n+2)]W_n \sim W_n$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, la décroissance de la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ et le fait que $W_n > 0$ entraînent que $W_{n+2}/W_n \leqslant W_{n+1}/W_n \leqslant 1$. Le théorème d'encadrement montre que la suite de terme général W_{n+1}/W_n converge vers 1, c'est-à-dire que $W_{n+1} \sim W_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, $(n+1)W_{n+1}W_n \sim (n+1)W_n^2 \sim nW_n^2$ quand n tend vers $+\infty$, et la valeur de la constante calculée plus haut dans cette question montre que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\cdot$$

On reprend la relation de la question (b) en la multipliant par $\sqrt{n}$, et on remplace I_n et J_n comme indiqué à la question (c) : $\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant I \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}$. L'équivalent ci-dessus montre que $\sqrt{n}\,W_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\pi/2(2n+1)} \sim \sqrt{\pi}/2$ et que $\sqrt{n}\,W_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\pi/2(2n-2)} \sim \sqrt{\pi}/2$ quand n tend vers $+\infty$. Le théorème d'encadrement montre que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

726. **RMS 2010 1087 CCP PC et RMS 2011 1149 CCP PC**

Montrer l'intégrabilité de $t \mapsto (\ln t)/(t+1)$ sur $]0,1]$, et l'égalité $\int_0^1 (\ln t)/(1+t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n^2$.

Solution. — Comme $(\ln t)/(t+1) \sim \ln t$ quand t tend vers zéro, comme les fonctions en question sont de signe fixe (négatif), et comme ln est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours, on en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto (\ln t)/(t+1)$ sur $]0,1]$.

Pour tout $t \in]0,1[$, l'identité suivante est satisfaite : $(\ln t)/(t+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \ln t$. On pose $f_n\colon t \in]0,1[\mapsto (-1)^n t^n \ln t$: il s'agit d'une fonction continue et intégrable sur $]0,1[$. Son intégrale, notée I_n, se calcule par parties :

$$I_n = \int_0^1 (-1)^n t^n \ln t\,\mathrm{d}t = (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on montre que $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = 1/(n+1)^2$, donc la série de terme général $\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Le théorème de permutation séries-intégrales impropres montre alors que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot$$

Remarque. — On peut démontrer que la somme de cette série vaut $-\ln 2$, en appliquant par exemple le théorème de convergence radiale d'Abel et Dirichlet.

727. **RMS 2011 1150 CCP PC**

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3$.

Solution. — Pour tout $t \in]0,1[$, on pose $f(t) = \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}$. Comme $f(t) \sim -\ln t$ quand t tend vers zéro, la règle sur les équivalents de fonctions à signe fixe montre que f est intégrable sur $]0,1/2]$. Comme et $f(t) \sim (t-1)\ln(1-t)$ quand t tend vers 1, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[1/2,1[$. Par suite, l'intégrale I converge.

Le développement en série entière du logarithme montre que, pour tout $t \in]0,1[$, on a $f(t) = -\ln t \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$. On pose $f_n\colon t \in]0,1[\mapsto -\ln t\frac{t^{n-1}}{n}$ de sorte que la série de fonctions continues par morceaux $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0,1[$. De plus chaque f_n est continue et intégrable sur $]0,1]$: c'est clair pour $f_1 = -\ln$ qui est intégrable d'après le cours, et cela résulte de l'égalité $\lim_0 f_n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Par ailleurs, $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\ln t\frac{t^n}{n^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n^2}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{t^n}{n^3}\right]_0^1 = \frac{1}{n^3}\cdot$$

L'intégration par parties est justifiée (vérifier en intégrant par parties sur $[\varepsilon,1]$, puis faire tendre ε vers zéro). Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^3$ converge, le théorème de permutation série–intégrale impropre montre que f est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on savait déjà) et que

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\cdot$$

728. **RMS 2011 1152 CCP PC**

(a) Déterminer $\sup\{|xe^{-x}|,\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général nx^n et calculer la somme de cette série.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nx^n e^{-nx}$. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n e^{-nx}$.

(d) Montrer que la série de terme général $n!/n^n$ est convergente. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Solution. —

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(x) = |xe^{-x}| = xe^{-x}$, ce qui définit une fonction dérivable, avec $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(x) = (1-x)e^{-x}$. Par suite, φ croît sur $[0,1]$ et décroît sur $[1,+\infty[$. Comme $\varphi(0) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, il en résulte que

$$\sup\{|xe^{-x}|,\ x \in \mathbb{R}_+\} = \varphi(1) = \frac{1}{e}\cdot$$

(b) Comme la suite de terme général nx^n converge vers zéro si $|x| < 1$ et n'est pas bornée si $|x| > 1$, le rayon de convergence cherché vaut 1. Comme les sommes de séries entières sont dérivables sur leur intervalle ouvert de convergence, si l'on pose $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\cdot$$

(c) On remarque que $u_n(x) = n(\varphi(x))^n$, où φ a été définie à la question (a). On en déduit que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = n/e^n$. Comme $n^2 \times \frac{n}{e^n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, la série de terme général $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. En substituant x par $\varphi(x)$ dans la question (b), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n e^{-nx} = \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\cdot$$

(d) La formule de Stirling prouve que $n^2 \frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi}\, n^{5/2} e^{-n}$, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. La règle de Riemann montre alors que la série de terme général $n!/n^n$ est convergente.

La fonction u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$, car $x^2 u_n(x)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (c'est encore une règle de Riemann). De plus le changement de variable $y = nx$ montre que $\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^n}\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,\mathrm{d}y$. Une intégration par parties, puis un raisonnement par récurrence, montre que $\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,\mathrm{d}y = n!$. Par suite, la positivité de u_n permet d'écrire que

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{n^n}\cdot$$

Comme on vient de montrer que la série de terme général $n!/n^n$ converge, le théorème de permutation séries-intégrales impropres montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot$$

729. **RMS 2012 1336 CCP PC** .

(a) Convergence et calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

(b) Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — à rédiger ? ?

Intégrales à paramètre

730. **RMS 2011 1148 CCP PC**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

(a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(-x) = 1$. Calculer $F(k)$ pour $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

(b) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$. Donner un équivalent de $F(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. — Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,1]$, on pose $g(x,t) = \frac{1}{1+t^x}$.

(a) Si $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue sur le segment $[0,1]$, donc $F(x)$ existe. Si $x < 0$, alors $\lim_{t\to 0} t^x = +\infty$, et $g(x,t)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est donc prolongeable par continuité en zéro, et $F(x)$ est définie.

On calcule ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) + F(-x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} + \frac{1}{1+t^{-x}}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} + \frac{t^x}{t^x+1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1\,,$$

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2\,,$$

$$F(2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Les valeurs $F(-1) = 1 - \ln 2$ et $F(-2) = 1 - \frac{\pi}{4}$ se déduisent de la relation $F(x) + F(-x) = 1$.

(b) Soit (x_n) une suite de réels qui diverge vers $+\infty$. On pose $h_n\colon t \in [0,1[\mapsto g(x_n,t)$. La suite de fonctions continues par morceaux (h_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1, continue par morceaux. L'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $|h_n| \leqslant 1$, où la fonction 1 est intégrable sur $[0,1[$, montre qu'on peut appliquer le théorème de domination :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1\,.$$

La relation de la question précédente montre que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Un équivalent de $F(x) - 1$ sera obtenu, comme souvent, par intégration par parties, en intégrant $t^{x-1}/(1+t^x)$ et en dérivant t :

$$\begin{aligned}F(x) - 1 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} - \int_0^1 \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t = -\left[t\frac{\ln(1+t^x)}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t\,,\\ &= -\frac{\ln 2}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

L'inégalité de concavité $\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$ et la positivité du logarithme sur $[1,+\infty[$ montrent que $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{x}$. Par suite, $|\frac{1}{x}\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t| \leqslant \frac{1}{x^2} = \mathrm{o}(\frac{1}{x})$, et on en déduit que

$$F(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}\,.$$

(c) Pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $(t,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}$, les égalités et les dominations suivantes :

$$\begin{array}{rclcrcl}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) & = & -\dfrac{t^x \ln t}{(1+t^x)^2} & \text{et} & \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| & \leqslant & \varphi_1(t) := |\ln t|\,,\\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) & = & -\dfrac{t^x(\ln t)^2}{(1+t^x)^2} + 2\dfrac{t^{2x}(\ln t)^2}{(1+t^x)^3} & \text{et} & \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| & \leqslant & \varphi_2(t) := 3(\ln t)^2\,.\end{array}$$

Comme les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,1]$ (d'après le cours pour la première, et d'après la limite $\lim_0[\sqrt{t}\,\varphi_2(t)] = 0$ pour la seconde), on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ de Leibniz. La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, en particulier

$$F''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x(\ln t)^2 \frac{t^x - 1}{(1+t^x)^3}\,\mathrm{d}t$$

Comme $t^x - 1 = \exp(x\ln t) - 1$ est du signe de $-x$ pour tout $t \in]0,1]$, on déduit de l'égalité ci-dessus que $F''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ et $F''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc que F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

731. **RMS 2006 1135 CCP PC**

Définition, continuité, caractère $\mathcal{C}^1$ de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Trouver F.

Solution. — Voir l'exercice 831 page 526.

732. **RMS 2006 1137 CCP PC**
Définition, continuité, caractère $\mathcal{C}^1$ de $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — On pose $f(x,t)=\arctan(xt)/(1+t^2)$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, ce qui définit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$. Le caractère impair de f par rapport à la variable x montre qu'il suffit d'étudier les trois propriétés demandées lorsque $x\geqslant 0$. De plus, F sera impaire.
Comme $|\arctan u|\leqslant\frac{\pi}{2}$ pour tout nombre réel u, l'inégalité

$$(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\quad |f(x,t)|\leqslant\varphi(t):=\frac{\pi/2}{1+t^2}$$

en résulte, et ceci démontre que l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$. En d'autres termes, F est définie sur $\mathbb{R}$. La même inégalité est une hypothèse de domination avec φ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f étant continue, le théorème de continuité des intégrales à paramètres montre que F est continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. On fixe $a>0$. L'hypothèse de domination

$$\forall(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\psi_a(t)=\frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}\ ,$$

avec ψ_a continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, attendu que $\psi_a(t)\sim 1/(a^2t^3)$ lorsque t tend vers $+\infty$, montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$: c'est le théorème de Leibniz. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

On montre enfin que F n'est pas dérivable en zéro, en établissant, par exemple, que $F'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro (comme F est continue en zéro, l'égalité des accroissements finis prouve alors que le rapport $[F(x)-F(0)]/x=F'(c)$ — pour un certain c entre zéro et x — tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro). Si $t^2x^2\leqslant 1$ avec $t\in\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire si $t\in[0,1/|x|]$, alors $1/(1+x^2t^2)\geqslant 1/2$. On en déduit que

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{\frac{1}{|x|}}\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t\geqslant\frac12\int_0^{\frac{1}{|x|}}\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac14\left[\ln(1+t^2)\right]_0^{\frac{1}{|x|}}=\frac14\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

Quand x tend vers zéro, le minorant tend vers $+\infty$, donc est de même de F'.

733. **RMS 2012 1334 CCP PC**
Soit $f\colon x\mapsto\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

(b) Calculer $f(1)$. Montrer que $\forall x>-1,\ (x+2)f(x+1)=(x+1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^+.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

(d) Justifier que $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t=\frac12\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{\sin(2t)}{2})\,\mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

Solution. — à rédiger ? ?

734. **RMS 2012 1335 CCP PC**
Soit $f\colon x\mapsto\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$.

(b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f est solution de $xy''+y'+xy=0$.

Solution. — à rédiger ? ?

735. **RMS 2011 1154 CCP PC**
Pour $x\in]-1,1[$, soit $f_x:\theta\in\mathbb{R}\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n$.

(a) Soit $x\in]-1,1[$. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.

(b) Montrer que f_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ f_x'(\theta)=\frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$. En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $x\in\,]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

(c) Soit $x\in\,]-1,1[$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

(d) En déduire, pour $x\in\,]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

Solution. — Pour tout $x\in\,]-1,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,x}:\theta\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\cos(n\theta)}{n}x^n$.

(a) Pour tout $x\in\,]-1,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\|u_{n,x}\|_\infty=|x|^n/n\leqslant|x|^n$, qui est le terme général d'une série (géométrique) convergente. La série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant1}u_{n,x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sa somme f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Le cours donne le développement en série entière suivant : $\forall x\in\,]-1,1[\,,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Par suite,

$$f_x(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\,,$$
$$f_x(\pi)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=-\ln(1+x)\,.$$

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]-1,1[$, la fonction $u_{n,x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall\theta\in\mathbb{R},\ u_{n,x}'(\theta)=-\sin(n\theta)x^n$. On en déduit que $\|u_{n,x}'\|_\infty=|x|^n$. La série des dérivées $\sum_{n\geqslant1}u_{n,x}'$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, et on a vu que la série des fonctions $\sum_{n\geqslant1}u_{n,x}$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions affirme alors que f_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f_x'(\theta)&=\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,x}'(\theta)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n=-\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{i\theta})^n\right)=-\operatorname{Im}\left(\frac{xe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)\,,\\&=-\operatorname{Im}\left(\frac{xe^{i\theta}(1-xe^{-i\theta})}{1-2x\cos\theta+x^2}\right)=\frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,.\end{aligned}$$

Le dénominateur étant strictement positif (c'est le carré du module du nombre complexe non nul $1-xe^{i\theta}$), on en déduit qu'il existe une constante C telle que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ f_x(\theta)=-\frac12\ln(1-2x\cos\theta+x^2)+C$. On obtient C en évaluant cette égalité en zéro : $f_x(0)=-\ln(1-x)=-\frac12\ln(1-2x+x^2)+C=-\frac12\ln((1-x)^2)+C=-\ln(1-x)+C$, donc $C=0$. On conclut que

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\quad\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f_x(\theta)=-\frac12\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,.$$

(c) Avec les notations ci-dessus, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta=-2\int_{-\pi}^{\pi}f_x(\theta)\,\mathrm{d}\theta=-2\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,x}(\theta))\,\mathrm{d}\theta$. Comme la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant1}u_{n,x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[-\pi,\pi]$, le théorème de permutation série–intégrale sur un segment affirme que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}u_{n,x}(\theta)\,\mathrm{d}\theta=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta=0\,.$$

(d) Si $x\in\,]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, alors $y=1/x\in\,]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{y}\cos\theta+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln(y^2-2y\cos\theta+1)-\ln(y^2)\right]\mathrm{d}\theta\,,\\&=-4\pi\ln y=4\pi\ln x\,.\end{aligned}$$

Séries de Fourier

736. **RMS 2007 947 CCP PC**

Soient f et g dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π–périodiques telles que $\forall n\in\mathbb{Z},\ \int_0^{2\pi}f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}g(t)e^{int}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f=g$.

Solution. — On adopte les notations habituelles des séries de Fourier : pour $n\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{R}$ et $f\in E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on pose $\varepsilon_n(t)=e^{int}$, $\hat f(n)=c_n(f)=\langle\varepsilon_n,f\rangle=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\|f\|_2=[(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t]^{1/2}$. Il s'agit de démontrer l'injectivité de l'application $\varphi:f\in E\mapsto(\hat f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Cette application étant linéaire, il suffit de déterminer son noyau. Or on sait que $\|\ \|_2$ définit une norme sur E et que, au sens de cette norme, la suite de fonctions $S_p(f):=\sum_{n=-p}^{p}c_n(f)\varepsilon_n$ converge vers f lorsque p tend vers l'infini pour toute $f\in E$.

Si $c_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, alors $S_p(f)$ est la fonction nulle pour tout p, et l'unicité de la limite montre que $f=0$. Le noyau de φ étant réduit à zéro, l'exercice est résolu.

737. **RMS 2006 1140 CCP PC**

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π–périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi[,\ \ u(x) = x$.

(a) Déterminer la série de Fourier de u. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

(b) Montrer : $\forall x \in]0,1[, \quad 0 < \frac{x \ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Prolonger par continuité à $[0,1]$ la fonction F_p définie sur $]0,1[$ par $F_p(x) = \frac{x^{2p+1}\ln(x)}{x^2-1}$.

(d) Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_{]0,1[} F_p$. Calculer $I_{p+1} - I_p$. En déduire I_0.

(e) Convergence et somme des séries de termes généraux $(-1)^p I_p$ et I_p.

Solution. — La fonction u coïncidant sur $]-\pi,\pi[$ avec une fonction impaire, $a_n(u) = 0$ et $b_n(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Par intégration par parties,

$$b_n(u) = \frac{2}{\pi}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\,\cdot$$

La formule de Parseval $\|u\|_2^2 = a_0^2/4 + (1/2)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ s'écrit ici

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\,, \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,\cdot$$

(b) Comme $x \in]0,1[$, la quantité x^2-1 est négative et l'encadrement proposé est équivalent à $0 > x\ln x > \frac{1}{2}(x^2-1)$. L'inégalité $0 > x\ln x$ est claire puisque $x < 1$. On pose ensuite $\varphi(x) = x\ln x - \frac{1}{2}(x^2-1)$, ce qui définit une fonction de classe C^2 sur $]0,1]$, avec

$$\forall x \in]0,1[, \quad \varphi'(x) = 1 + \ln x - x \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} > 0\,.$$

Alors φ' croît strictement sur $]0,1]$ et, comme $\varphi'(1) = 0$, la dérivée φ' est strictement négative sur $]0,1[$, donc φ décroît strictement sur $]0,1]$. Comme $\varphi(1) = 0$, on en déduit que φ est strictement positive sur $]0,1[$, ce qui achève la preuve de l'encadrement demandé.

(c) L'exposant $2p+1$ étant au moins égal à 1, la fonction F tend vers zéro en zéro. Par ailleurs $\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1, donc $F(x) \sim_1 x^{2p+1}/(1+x)$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Admettant des limites finies en zéro et en 1, la fonction F_p est prolongeable par continuité en ces deux points, en posant

$$F_p(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_p(1) = \frac{1}{2}\,\cdot$$

(d) On calcule $F_{p+1}(x) - F_p(x) = x^{2p+3}\ln(x)/(x^2-1) - x^{2p+1}\ln(x)/(x^2-1) = x^{2p+1}\ln(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, et aussi aux extrémités. Compte-tenu du prolongement par continuité, les intégrales I_p sont faussement impropres, et une intégration par parties fournit

$$I_{p+1} - I_p = \int_0^1 x^{2p+1}\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2p+2}}{2p+2}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2p+2}\int_0^1 x^{2p+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(2p+2)^2}\,\cdot$$

La somme $\sum_{p=0}^{n}(I_{p+1} - I_p)$ est télescopique et vaut $I_{n+1} - I_0$. On en déduit que

$$I_0 = I_{n+1} - \sum_{p=0}^{n}(I_{p+1} - I_p) = I_{n+1} + \sum_{p}^{n}\frac{1}{(2p+2)^2} = I_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\,\cdot$$

Par ailleurs, la positivité de F_p et question (b) impliquent que $0 \leqslant F_p(x) \leqslant x^{2p}/2$, donc que

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(2n+3)}\,\cdot$$

Il en résulte que la suite de terme général I_{n+1} converge vers zéro et, en passant à la limite dans l'expression de I_0 ci-dessus, on obtient

$$I_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{24}\,\cdot$$

(e) Comme la suite de terme général x^p décroît pour $x \in]0,1]$, on a $0 \leqslant F_{p+1} \leqslant F_p$, donc $0 \leqslant I_{p+1} \leqslant I_p$. On vient de montrer que la suite de terme général I_p converge vers zéro. Le théorème spécial des séries alternées montre que $\sum(-1)^p I_p$ est alternée, donc converge.

En revanche, la série de terme général I_p diverge. On utilise pour cela la somme télescopique de la question (d). Elle donne I_n sous forme du reste d'une série convergente :

$$I_n = I_0 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

La minoration classique $f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour les fonctions f continues et décroissantes conduit ici à

$$I_n \geqslant \frac{1}{4}\int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{\infty} = \frac{1}{4(n+1)}\,.$$

Comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} 1/n$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} I_n$.

738. **RMS 2006 1141 CCP PC**

Soit $f(x) = |\sin x|$.

(a) Donner l'allure du graphe de f. Montrer que f est la somme de sa série de Fourier.

(b) Montrer qu'il existe une suite réelle (c_n) telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos^2(nx)$.

(c) En déduire les sommes des séries de termes généraux c_{2n} et $(-1)^n c_{2n+1}/(2n+1)$.

Solution. —

(a) La fonction f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est somme de sa série de Fourier (il y a convergence normale de la série).

(b) Comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = \pi - u$ dans l'intégrale précédente mène à

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} \sin(\pi - u)\cos(n\pi - nu)(-\,\mathrm{d}u) = (-1)^n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = (-1)^n a_n\,.$$

Si n est impair, on obtient $a_n = -a_n$, donc $a_n = 0$. Finalement, il ne reste plus que les termes suivants dans la série de Fourier de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos(2nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(2\cos^2(nx) - 1) = \left(\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{2n})\cos^2(nx)\,.$$

Cela est légitime car la convergence de la série de Fourier de f est normale, donc la série de terme général $|a_{2n}|$ converge, donc la série de terme général $|c_n|$ converge. On a bien obtenu une expression de la forme souhaitée, avec $c_0 = a_0/2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ et $c_n = 2a_{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Remarque. — Il est inutile de calculer explicitement les coefficients. Néanmoins, les voici sans démonstration : $a_{2n} = \frac{4n}{\pi(1-4n^2)}$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Comme $\cos^2(n\pi/2)$ vaut zéro si n est impair et 1 si n est pair, on obtient

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\,.$$

On pose $h_n \colon x \in \mathbb{R} \mapsto c_n\cos^2(nx)$. Comme $|c_n| = N_\infty(h_n)$, la série des fonctions continues h_n est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$ avec $0 \leqslant x \leqslant \pi$, sur lequel $f(t) = \sin(t)$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(x) + 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\int_0^x \cos^2(nt)\,\mathrm{d}t = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\int_0^x \frac{\cos(2nt)+1}{2}\,\mathrm{d}t\,,\\ &= c_0 x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\frac{\sin(2nt)}{2n} + t\right]_0^x = \left(c_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2n}\sin(2nx)\,.\end{aligned}$$

La définition de c_0 et des c_n pour $n \geqslant 1$ montre que le premier terme ci-dessus vaut $a_0/2 = 2/\pi$. Finalement

$$\forall x \in [0,\pi], \quad 4(1-\cos x) = \frac{8}{\pi}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}\sin(2nx)\,.$$

Comme $\sin(2n\pi/4) = \sin(n\pi/2)$ est nul pour tout n pair et vaut $(-1)^p$ pour tout $n = 2p+1$ impair, on obtient, en substituant x par $\pi/4$:

$$4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{c_{2p+1}}{2p+1} \quad \text{donc} \quad \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{c_{2p+1}}{2p+1} = 2-2\sqrt{2}.$$

739. **RMS 2011 1155 CCP PC**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π–périodique telle que $f(\pi) = 0$ et $\forall x \in\,]-\pi,\pi[\,,\ f(x) = x$. La série de Fourier de f converge-t-elle normalement ? Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Solution. — La série de Fourier de f, qui est une série de fonctions continues de la forme $x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ en toute généralité, ne peut être normalement convergente dans le cas de l'exercice, car sa limite serait la fonction f, qui est discontinue (en tous les $n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$).

La fonction f étant impaire, $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule ensuite $b_n(f)$ par intégration par parties : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Comme f est une fonction régulière, le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,.$$

En substituant x par $\pi/2$ dans cette égalité, on obtient $\pi/2 = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1}\sin([2k+1]\pi/2) = \pi\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ (tous les termes d'indice pair son nul). On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

740. **RMS 2011 1156 CCP PC**

Soient $r \in]0,1[$ et $S_r\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n}\sin(nx)$.

(a) Montrer que S_r est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π–périodique.

(b) Exprimer S_r'. Cette fonction est-elle somme de sa série de Fourier ?

(c) Déterminer les coefficients de Fourier de S_r.

(d) Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ S_r(x) = \arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$.

(e) Montrer $\int_0^{\pi}(S_r(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^{2n}}{n^2}$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution. — On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{r^n}{n}\sin(nx)$.

(a) Comme $\|u_n\|_\infty = \frac{r^n}{n} \leqslant r^n$ et comme $|r| < 1$, la série $\sum u_n$ est normalement convergente, donc simplement convergente, donc S_r est définie sur $\mathbb{R}$. Les fonction u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n'(x) = r^n\cos(nx)$. Comme $\|u_n'\|_\infty = r^n$, la série $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Comme par ailleurs elle est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, sa somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_r'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx)\,.$$

Chaque u_n étant 2π périodique, S_r l'est aussi.

(b) L'expression de S_r' a été donnée à la question précédente. Comme S_r est de classe $\mathcal{C}^1$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, elle est la somme (au sens de la convergence normale) de sa série de Fourier.

(c) Comme S_r est impaire, $a_n(S_r) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de permutation série-intégrale en cas de convergence normale sur un segment, et le caractère orthogonal de la famille $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrent que $b_n(S_r) = \frac{r^n}{n}$.

(d) On commence par calculer la dérivée

$$S_r'(x) = \Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(re^{ix}\right)^n\right) = \Re\left(\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) = \Re\left(\frac{re^{ix}(1+re^{-ix})}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})}\right) = \Re\left(\frac{re^{ix}-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right)\,,$$
$$= \frac{r\cos x - r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

Par ailleurs, la dérivée de $x \mapsto \arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$ est

$$x \mapsto \frac{\dfrac{r\cos x(1-r\cos x)-r^2\sin^2 x}{(1-r\cos x)^2}}{1+\left(\dfrac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)^2} = \frac{r\cos x - r^2}{1-2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2\sin^2 x} = S_r'(x)\,.$$

On en déduit l'existence d'une constante k telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_r(x) = \arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right) + k$. L'évaluation en zéro donne $k=0$, et la question est terminée.

(e) Comme S_r est continue par morceaux et impaire, elle vérifie le théorème de Parseval sous la forme $\|S_r\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (S_r(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n(S_r))^2$, ou encore

$$\int_0^\pi (S_r(x))^2\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^\pi \left[\arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)\right]^2\mathrm{d}x}_{f(r)} = \underbrace{\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^{2n}}{n^2}}_{g(r)}\,.$$

On démontre ensuite que les fonctions f et g ont des limites finies quand r tend vers 1.

- On considère $f(r)$ comme une intégrale impropre sur $]0,\pi[$, et on va appliquer le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle des limites. On fixe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,1[$ de limite 1. La suite de fonctions continues par morceaux $x \mapsto [S_{r_k}(x)]^2$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$\varphi\colon x \in]0,\pi[\mapsto \left[\arctan\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)\right]^2\,.$$

  Par ailleurs, on dispose de l'hypothèse de domination $(S_{r_k}(x))^2 \leqslant (\pi/2)^2$, où la fonction constante $(\pi/2)^2$ est intégrable sur $]0,\pi[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que φ est intégrable sur $]0,\pi[$ et que $\lim_{+\infty} f(r_k) = \int_0^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Ceci étant vrai pour tout suite (r_k) de limite 1, on en déduit que

$$\lim_{r\to 1} f(r) = \int_0^\pi \left[\arctan\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)\right]^2\mathrm{d}x\,.$$

  Les formules de duplication donnent $\sin x/(1-\cos x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)/2\sin^2(x/2) = 1/\tan(x/2)$. Or, si $x \in]0,\pi[$, alors $x/2 \in]0,\pi/2[$ donc $\tan(x/2) > 0$, et on connaît la relation $\arctan(1/u) = \pi/2 - \arctan u$ pour tout $u > 0$. On en déduit que

$$\int_0^\pi \left[\arctan\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\,,$$
$$= \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{12}\,.$$

- On pose $v_n(r) = \frac{r^{2n}}{n^2}$ pour tout $r \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\|v_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement sur $[0,1[$. Par ailleurs, v_n admet la limite finie $\frac{1}{n^2}$ en $r=1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de permutation des limites affirme alors que, d'une part, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, ce qu'on savait déjà, et d'autre part que $g(r)$ tend vers $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

L'unicité de la limite donne alors $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Équations différentielles linéaires

741. **RMS 2006 1145 CCP PC**

Trouver les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1+x$.

Solution. — On note F la primitive seconde de f nulle en zéro ainsi que sa dérivée : en d'autres termes, $F''=f$ et $F(0)=F'(0)=0$, et ceci détermine entièrement F. La formule de Taylor avec reste intégral pour F, en zéro, à l'ordre 1, s'écrit $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=F(0)+F'(0)x+\int_0^x(x-t)F''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$, de sorte que l'équation proposée équivaut à $F''(x)+F(x)=1+x$. Comme $x\mapsto 1+x$ est une solution particulière, les solutions G de cette équation sont les fonctions telles que $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+1+x$. Parmi elles, la fonction F est donnée par les conditions initiales $F(0)=F'(0)=0$, ce qui impose $\lambda+1=\mu+1=0$. On en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=-\cos x-\sin x+1+x\,.$$

Il suffit ensuite de dériver F deux fois pour obtenir l'unique solution f du problème initial :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\cos x+\sin x\,.$$

Remarque. — Voici une autre solution, où l'on raisonne par conditions nécessaires et suffisantes.
Analyse. La condition s'écrit $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+1+x$. Sous cette forme, il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x)=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)+1=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+1$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\forall x\in\mathbb{R},\ \ f''(x)=-f(x)$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions telles que

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x\,.$$

Synthèse. Comme on a effectué deux dérivations, il suffit de vérifier que $g(0)=f(0)$ et que $g'(0)=f'(0)$ pour pouvoir remonter de l'égalité $f''=g''$ à $f=g$. D'après l'hypothèse initiale sur f, on a $f(0)=1$. D'après le premier calcul effectué dans la partie analyse, $f'(0)=1$ aussi. On obtient alors les conditions $\lambda=\mu=1$, et on retrouve les résultats précédents.

742. **RMS 2006 1148 CCP PC**

Soient (E) l'équation différentielle $y'=2xy+1$, et f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$.

(a) Justifier l'existence de f.

(b) Donner f sous forme d'une intégrale.

(c) Développer f en série entière sur $\mathbb{R}$ de deux manières différentes.

Solution. —

(a) L'équation (E) est linéaire du premier ordre à coefficients variables, celui de y' valant 1, donc ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, le second membre (la constante 1) étant défini sur $\mathbb{R}$. Il existe alors une et une seule solution définie sur $\mathbb{R}$ prenant une valeur donnée en un point donné (théorème de Cauchy et Lipschitz du cas linéaire).

(b) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{x^2}$, où λ est une constante réelle.
La méthode de variation de la constante conduit à $\lambda'(x)=e^{-x^2}$. On ne connaît pas de primitive de $x\mapsto e^{-x^2}$ s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles ; on choisit $\lambda(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Finalement les solutions de (E) sont toutes les fonctions d'expression $x\mapsto\lambda e^{x^2}+e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. La condition $f(0)=0$ équivaut à $\lambda=0$. On en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x e^{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) Première méthode. Il s'agit d'utiliser l'équation différentielle et de raisonner par analyse et synthèse.
Analyse. Si $y\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ est une solution de (E) développable en série entière sur $]-R,R[$, alors

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=1+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\,.$$

Deux changements d'indice ($p=n-1$ dans le membre de gauche et $q=n+1$ dans celui de droite) donnent alors $\sum_{p=-1}^{\infty}(p+1)a_{p+1}x^p=1+2\sum_{q=1}^{\infty}a_{q-1}x^q$. La première somme commence en fait à zéro, car le terme correspondant à l'indice -1 est nul. Finalement, y est solution si et seulement si

$$\forall x\in]-R,R[,\quad (a_1-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)a_{n+1}-2a_{n-1}\Big)x^n=0\,.$$

La somme d'une série entière est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls. On trouve donc les conditions équivalentes suivantes : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. En distinguant les termes d'indice pairs et ceux d'indice impairs, on obtient finalement

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{2^p}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} a_1 = \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!}\ , \\ a_{2p} &= \frac{a_0}{p!}\ . \end{aligned}$$

Synthèse. Si l'une des fonctions y trouvée ci-dessus est f, alors $a_0 = f(0) = 0$, et la seule possibilité est la (somme de la) série $S(x) = \sum_{=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. On doit alors vérifier deux propriétés distinctes :

– Le rayon de convergence de la série entière en question est non nul. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_p = \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} z^{2p+1}$, et appliquons la règle de d'Alembert relative aux séries numériques :

$$\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \left| \frac{2^{2p+2}(p+1)! z^{2p+3} (2p+1)!}{(2p+3)! 2^{2p} p! z^{2p+1}} \right| = \left| \frac{4(p+1) z^2}{(2p+2)(2p+3)} \right| = \left| \frac{2z^2}{2p+3} \right|.$$

Cette quantité tend vers zéro pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On en déduit que $R = \infty$, donc que S est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $S(0) = 0$.

– L'égalité $f = S$. Ces deux fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E), et vérifiant la même condition initiale en zéro, elles sont égales en vertu du théorème de Cauchy et Lipschitz.

En conclusion, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}\ .$$

Deuxième méthode. Il s'agit d'utiliser l'expression de f trouvée à la question (b) ainsi que la formule du produit de Cauchy de deux séries. On sait que $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et qu'une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. Ici,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) n!} \right).$$

Il s'agit de deux séries à termes complexes $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} b_n$ absolument convergentes, avec $a_n = x^{2n}/n!$ et $b_n = (-1)^n x^{2n+1}/[(2n+1)n!]$. Le théorème sur le produit de Cauchy dit alors que, si l'on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$, la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ est absolument convergente, et que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(n-k)! k!} \right) x^{2n+1}\ .$$

L'unicité des coefficients d'une série entière fournit la formule sommatoire suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(n-k)! k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

743. **RMS 2010 1088 CCP PC**

Résoudre $(1+x^2)^2 y' + 2xy = x \exp(1/(1+x^2))$.

Solution. — Cette équation sera résolue sur $\mathbb{R}$, puisque $(1+x^2)^2$ ne s'annule jamais. Une primitive de $x \mapsto 2x/(1+x^2)^2$ est $x \mapsto -1/(1+x^2)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = k \exp\left(\frac{1}{1+x^2} \right).$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante, sous la forme $x \mapsto k(x) \exp(1/(1+x^2))$. On trouve $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)^2 k'(x) = x$, et on choisit $k(x) = -[2(1+x^2)]^{-1}$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(k - \frac{1}{2(1+x^2)} \right) \exp\left(\frac{1}{1+x^2} \right).$$

744. **RMS 2010 1089 CCP PC**
Soit $(E) : y' - y = e^{-x^2}$ et $u \colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.

(b) Montrer que $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.

(c) Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro quand x tend vers $-\infty$.

(d) Montrer qu'il existe une solution de (E) qui a pour limite zéro quand x tend vers $+\infty$.

(e) Que dire des solutions de $(F) : y' + y = e^{-x^2}$?

Solution. —

(a) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions proportionnelles à l'exponentielle. La méthode de variation de la constante conduit à $k'(x)e^x = e^{-x^2}$, et on choisit $k(x) = u(x) = \int_0^x e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telles que
$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x(k + u(x))\,.$$

(b) Les comparaisons usuelles montrent que $t^2e^{-t^2-t}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$, donc $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par définition, u possède alors des limites finies en $\pm\infty$.

(c) Comme $k + u(x)$ admet une limite finie en $-\infty$, alors $y(x) = e^x(k + u(x))$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$.

(d) Pour que $y(x)$ puisse tendre vers zéro quand x tend vers $+\infty$, il faut que $k = -\lim_{+\infty} u(x)$. Dans ce cas
$$|y(x)| = \left|-e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t\right| = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-x}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Il existe donc bien une (et une seule) solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

(e) On pose $v \colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2+t}\,\mathrm{d}t$. Les solutions de (F) sont les fonctions telles que
$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-x}(k + v(x))\,.$$
On démontre comme ci-dessus que $t \mapsto e^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, que v admet des limites finies en $\pm\infty$, que toutes les solutions de (F) tendent vers zéro en $+\infty$, et qu'il existe une et une seule solution de (F) de limite nulle en $-\infty$.

745. **RMS 2006 1147 CCP PC**
Résoudre $y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = e^{-\lambda x}\cos(\lambda x)$.

Solution. — On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$, et on résout l'équation sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2\lambda X + \lambda^2 = (X - \lambda)^2$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions telles que
$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (ax + b)e^{\lambda x}\,.$$
Le second membre est de la forme $\mathrm{Re}(\exp(mx))$, où $m = \lambda(-1 + i)$ n'est pas racine du polynôme caractéristique. II existe donc une solution particulière $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation complexe $y'' - 2\lambda y' - \lambda^2 y = \exp(mx)$ de la forme $x \mapsto \alpha\exp(mx)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. On obtient l'équation
$$\alpha(m^2 - 2\lambda m + \lambda^2) = \alpha\lambda^2[(-1 + i)^2 - 2(-1 + i) + 1] = \alpha\lambda^2(3 - 4i) = 1\,,$$
d'où l'on déduit $\alpha = (3 + 4i)/25\lambda^2$. Une solution particulière $y_{\mathbb{R}}$ de l'équation de départ est alors $x \mapsto \mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}}(x)) = e^{-\lambda x}(3\cos(\lambda x) - 4\sin(\lambda x))/25\lambda^2$. Par suite, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions telles que
$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (ax + b)e^{\lambda x} + \frac{e^{-\lambda x}}{25\lambda^2}[3\cos(\lambda x) - 4\sin(\lambda x)]\,.$$

746. **RMS 2006 1149 CCP PC**
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et (E) l'équation différentielle : $ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0$, dont on considérera les solutions sur $]0, +\infty[$.

(a) Justifier le changement de variable $t = \ln x$ et résoudre (E).

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ suivant les valeurs de a : $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sin(a\ln x)$.

Solution. —

(a) La fonction exponentielle est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, on peut donc poser $z = y \circ \exp$, ce qui définit une fonction appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puis calculer les dérivées de y en fonction de celles de z, et transformer l'équation en y en une équation en z équivalente. Comme ici, $y = z \circ \ln$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{z'(\ln x)}{x}\,,\\
y''(x) &= -\frac{z'(\ln x)}{x^2} + \frac{z''(\ln x)}{x^2}\,,\\
ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) &= ax^2\left(-\frac{z'(\ln x)}{x^2} + \frac{z''(\ln x)}{x^2}\right) + bx\frac{z'(\ln x)}{x} + cz(\ln x)\,,\\
&= az''(\ln x) + (b-a)z'(\ln x) + cz(\ln x)\,.
\end{aligned}$$

L'équation proposée est donc équivalente à l'équation différentielle linéaire *à coefficients constants* (F) suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = 0\,.$$

La résolution de (F) est une question de cours. La discussion se fait suivant le signe du discriminant $\Delta = (b-a)^2 - 4ac$:

– Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique de (F) admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, et les solutions de (2) sont les fonctions $z\colon t \mapsto \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \alpha x^{\lambda_1} + \beta x^{\lambda_2}.$$

– Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (F) admet une racine réelle double λ, et les solutions de (F) sont les fonctions $z\colon t \mapsto \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}$. Les solutions de l'équation (1) sont les fonctions de la forme

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \alpha x^{\lambda} + \beta \ln(x) x^{\lambda}.$$

– Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique de (F) admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\lambda = p + iq$ et $\overline{\lambda} = p - iq$ avec $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et les solutions de (F) sont les fonctions $z\colon t \mapsto e^{pt}\left(\alpha\cos(qt) + \beta\sin(qt)\right)$. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = t^p\left(\alpha\cos(q\ln x) + \beta\sin(q\ln x)\right).$$

(b) Dans cette question, $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, et l'équation (E) équivaut à $\forall t \in \mathbb{R}$, $z''(t) + z(t) = \sin(at) = \operatorname{Im}(e^{iat})$. Une solution particulière complexe de l'équation complexe associée est $t \mapsto e^{iat}/(1-a^2)$ si $a \neq \pm 1$, et c'est $t \mapsto te^{iat}/(2ia)$ si $a = \pm 1$, et il faut encore prendre la partie imaginaire de cette solution particulière. En revenant à l'équation (E), on obtient les solutions suivantes : si $a \notin \{-1, 1\}$,

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \alpha\cos(\ln x) + \beta\sin(\ln x) + \frac{1}{1-a^2}\sin(a\ln x)$$

et si $a \in \{-1, 1\}$,

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \alpha\cos(\ln x) + \beta\sin(\ln x) - \frac{1}{2a}\ln x\cos(a\ln x)\,.$$

Remarque. — Comme $a = 1/a$ et comme cosinus est une fonction paire, la dernière expression est aussi $\alpha\cos(\ln x) + \beta\sin(\ln x) - \frac{a}{2}\ln x\cos(\ln x)$.

747. **RMS 2010 1090 CCP PC**

Résoudre $y'' - 2y' + y = 2\operatorname{ch} x$.

Solution. — Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions telles que

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Ae^x + Bxe^x\,.$$

Le second membre de (E) étant égal à $e^x + e^{-x}$, on utilise le principe de superposition des solutions : pour trouver une solution particulière de (E), on ajoute une solution particulière de $(E_1)\colon y'' - 2y' + y = P_1(x)e^{m_1 x}$ et une solution particulière de $(E_2)\colon y'' - 2y' + y = P_2(x)e^{m_2 x}$, où P_1 et P_2 sont les polynômes constants égaux à 1, alors que $m_1 = 1$ et $m_2 = -1$.

Comme $m_1 = 1$ est racine double du polynôme caractéristique, on sait qu'il existe une unique solution particulière de (E_1) de la forme $x \mapsto Q_1(x)e^x$, où Q_1 est un polynôme de degré $2 + \deg(P_1) = 2$ et de valuation $\geqslant 2$, donc Q_1 est de la forme aX^2, avec $a \in \mathbb{R}$. On obtient après calcul $a = 1/2$.

Comme $m_2 = -1$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on sait qu'il existe une unique solution particulière de (E_2) de la forme $x \mapsto Q_2(x)e^x$, où Q_2 est un polynôme de degré égal à $\deg(P_2) = 0$, donc Q_2 est une constante réelle b. On obtient après calcul $b = 1/4$.
Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telles que

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = Ae^x + Bxe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} .$$

748. **RMS 2010 1091 CCP PC**
Résoudre $(E)\ : f'' + xf' - 2f = 0$ sachant qu'elle possède une solution polynomiale.

Solution. — Soient n le degré d'une solution polynomiale f de (E) et a_n son coefficient dominant. Le coefficient dans x^n de $f'' + xf' - 2f$ est alors $a_n(n-2)$. Il faut que ce coefficient soit nul pour que f soit solution de E, donc $n = 2$. On cherche alors directement f sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - xf'(x) + 2f(x) = 2a + x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = -bx + 2(a - c) .$$

Une telle fonction f est solution si et seulement si $b = 0$ et $c = a$, c'est-à-dire que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions proportionnelles à

$$f_0 \colon x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$$

Cette fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la méthode de l'abaissement de l'ordre, qui consiste à rechercher les solutions sous la forme $f = g \times f_0$, où g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$g''f_0 + 2g'f_0' + gf_0'' + x(g'f_0 + gf_0') - 2gf_0 = g''f_0 + (2f_0' + xf_0)g' + (f_0'' + xf_0' - 2f_0)g = g''f_0 + (2f_0' + xf_0)g' = 0 .$$

On obtient, comme le prévoit la théorie, une équation différentielle d'ordre 1 en $h = g'$, qui est

$$(x^2 + 1)h' + (x^3 + 5x)h = 0 .$$

La division euclidienne de $x^3 + 5x$ par $x^2 + 1$ s'écrit $x^3 + 5x = (x^2 + 1)x + 4x$, donc $(x^3 + 5x)/(x^2 + 1) = x + (4x)/(x^2 + 1)$. Une primitive de cette fonction est $F(x) = x^2/2 + 2\ln(1 + x^2)$, et les solutions en h de l'équation intermédiaire sont les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = k\exp(-F(x)) = k\frac{e^{-x^2/2}}{(x^2 + 1)^2} .$$

Les primitives de ces fonctions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles. On se contentera donc d'écrire les solutions de (E) sous la forme

$$\exists (k, \ell) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 1)\left(k\int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{(t^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}t + \ell\right) .$$

749. **RMS 2010 1093 CCP PC**
Soit $(E)\colon xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

(a) On se place sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $Y \colon t \mapsto y(\sqrt{t}\,)$ est solution d'une équation différentielle (F) à déterminer. En déduire les solutions de (E) sur cet intervalle.

(b) On se place sur $\mathbb{R}_-^*$. Montrer que $h \colon x \mapsto \operatorname{ch} x^2$ est solution. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

(c) Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Solution. — Voir aussi l'exercice 612 page 407.
Il faut respecter l'esprit de l'exercice, qui propose deux méthodes de résolution différentes : par changement de variable et de fonction dans la question (a), et par abaissement de l'ordre dans la question (b). On pourrait bien sûr s'arrêter à la question (a), qui fournit aussi les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.

(a) On exprime $y(x)$ en fonction de Y et de x, puis on dérive :

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x^2) , \\ y'(x) &= 2xY'(x^2) , \\ y''(x) &= 4x^2Y''(x^2) + 2Y'(x^2) . \end{aligned}$$

Alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si Y est solution de $4x^3Y''(x^2)+2xY'(x^2)-2xY'(x^2)-4x^3Y(x^2)=0$, ou encore, en posant $t=x^2$ et en simplifiant par $4x^3$ qui est non nul :

$$(F) \qquad Y''(t)-Y(t)=0\,.$$

Les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions telles que $\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $Y(t)=A\operatorname{sh}t+B\operatorname{ch}t$. Alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions telles que

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad y(x)=A\operatorname{sh}(x^2)+B\operatorname{ch}(x^2)\,.$$

(b) La question précédente montre que h est solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc aussi solution sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque les manipulations algébriques le démontrant sont indépendantes du signe de x.

Comme h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_-^*$, on peut mettre en œuvre la méthode d'abaissement de l'ordre, consistant à rechercher les solutions sous la forme $y=hz$, où z est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$. Alors $y'(x)=h'(x)z(x)+h(x)z'(x)$ et $y''(x)=h''(x)z(x)+2h'(x)z'(x)+h(x)z''(x)$ et l'équation (E) devient

$$\begin{aligned}
&x[h''(x)z(x)+2h'(x)z'(x)+h(x)z''(x)]-[h'(x)z(x)+h(x)z'(x)]-4x^3h(x)z(x)\\
&=x\,h(x)z''(x)+[2x\,h'(x)-h(x)]z'(x)+[x\,h''(x)-h'(x)-4x^3h(x)]z(x)\,,\\
&=x\,h(x)z''(x)+[2x\,h'(x)-h(x)]z'(x)\,,\quad \text{car } h \text{ est solution de } (E),\\
&=x\operatorname{ch}(x^2)z''(x)+[4x^2\operatorname{sh}(x^2)-\operatorname{ch}(x^2)]z'(x)\,,\\
&=0\,.
\end{aligned}$$

Comme indiqué par le nom même de cette méthode, on obtient une équation d'ordre 1 en $u=z'$, qui s'écrit $u'(x)+(4x\,\tanh(x^2)-1/x)u(x)=0$. Une primitive de $x\mapsto 4x\,\tanh(x^2)-1/x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $F\colon x\mapsto 2\ln(\operatorname{ch}(x^2))-\ln(-x)$, donc les fonctions u cherchées sont de la forme

$$\exists k\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\quad u(x)=k\exp(-F(x))=k\frac{-x}{(\operatorname{ch}(x^2))^2}\,.$$

Quitte à changer le nom de la constante k, on peut supprimer le signe moins de l'expression ci-dessus. On sait que la dérivée de th peut se mettre sous les deux formes $1-\tanh^2$ ou $1/\operatorname{ch}^2$. Alors les fonctions z cherchées, qui sont les primitives de u, sont de la forme

$$\exists(k,\ell)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\quad z(x)=k\,\tanh(x^2)+\ell\,.$$

Enfin, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si

$$\exists(k,\ell)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\quad y(x)=h(x)z(x)=k\,\operatorname{sh}(x^2)+\ell\,\operatorname{ch}(x^2)\,.$$

On retrouve comme prévu les solutions déjà obtenues à la question (a).

(c) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont obtenues par recollement des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On cherche donc les quadruplets (A,B,k,ℓ) de constantes réelles qui permettent :

i. Un recollement par continuité. Les limites finies à droite et à gauche de y en zéro doivent exister et être égales, ce qui se traduit par $B=\ell$.

ii. Un recollement de classe $\mathcal{C}^1$. Les limites finies à droite et à gauche de y' en zéro doivent exister et être égales. Cela n'apporte aucune condition supplémentaire, car les expressions des dérivées sont $2x(A\operatorname{ch}(x^2)+B\operatorname{sh}(x^2))$ et $2x(k\operatorname{ch}(x^2)+\ell\operatorname{sh}(x^2))$.

iii. Un recollement de classe $\mathcal{C}^2$. Les limites finies à droite et à gauche de y' en zéro doivent exister et être égales. Comme $y''(x)=(y'(x)/x)+4x^2y(x)$, cette condition se traduit par $A=\ell$.

Les conditions nécessaires énoncées ci-dessus sont clairement suffisantes : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=A\operatorname{sh}(x^2)+B\operatorname{ch}(x^2)\,.$$

750. **RMS 2012 1338 CCP PC**

(a) Résoudre l'équation $y''+4y=0$.

(b) Soit $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $h\colon x\mapsto\frac{1}{2}\int_0^x g(t)\sin(2x-2t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que h est solution de $y''+4y=g$. Résoudre $y''+4y=g$.

(c) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f''+4f\geqslant 0$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)+f(x+\pi/2)\geqslant 0$.

Solution. — à rédiger ? ?

751. **RMS 2012 1339 CCP PC**
Soient $(*)$: $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, E^+ (resp. E^-) l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$) et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que E, E^+ et E^- sont des espaces vectoriels. Qu peut-on dire des dimensions de E^+ et E^- ?
(b) Déterminer les $f \in E$ développables en série entière au voisinage de zéro.

Solution. — à rédiger ? ?

752. **RMS 2012 1340 CCP PC**
Si $\lambda \in]-1/2, +\infty[$, soit (E_λ) l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (2x+1)y' - \lambda(\lambda+1)y = 0$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution P_1 de (E_1) polynomiale de degré 1 et telle que $P_1(0) = 1$.
(b) Soient $\varphi\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$ et $\psi\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Montrer qu'il existe $(a, b, c, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^7$ que l'on déterminera tels que $\forall \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$ et $\psi(x) = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}$. En déduire une primitive de φ et une primitive de ψ.
(c) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
(d) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif et de somme y. Trouver une relation sur les a_n pour que y soit solution de (E_λ).
(e) Donner une condition sur λ pour qu'il existe une solution de (E_λ) polynomiale non nulle.

Solution. — à rédiger ? ?

Équations différentielles non linéaires

Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

753. **RMS 2010 1094 CCP PC**
Soient $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 1 - x - y \geqslant 0\}$ et $f\colon (x, y) \in D \mapsto xy(1 - xy)$.

(a) Représenter D.
(b) Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

Solution. —

(a) Il s'agit du triangle de sommet O, I et J, où $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI})$ est le repère canonique du plan.
(b) La partie D est compacte car elle est fermée (définie par des inégalité larges portant sur des fonctions continues) et bornée. Par conséquent, f admet bien un maximum sur D.
On constate que $f(x, y) = \varphi(xy)$, où φ est la fonction polynomiale $u \mapsto u(1 - u)$, qui est maximale en $u = 1/2$ seulement, avec $\varphi(1/2) = 1/4$. L'ensemble des valeurs prises par xy sur le triangle D est $[0, 1/4]$: en effet, à $x \geqslant 0$ fixé, y varie entre zéro et $1 - x$, donc $0 \leqslant xy \leqslant x(1 - x) = \varphi(x) \leqslant 1/4$, valeur atteinte lorsque $(x, y) = (1/2, 1/2) \in D$, et uniquement en ce point.
Comme le polynôme φ croît sur le segment $[0, 1/4]$, on a
$$\forall (x, y) \in D, \quad \min_D f = 0 = \varphi(0) \leqslant f(x, y) = \varphi(xy) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} = \max_D f\,,$$
le maximum étant atteint sur bord de D, en le point $(x, y) = (1/2, 1/2) \in D$, et uniquement en ce point, alors que le minimum est atteint sur les axes.
Remarque. — On constate que f est de classe $\mathcal{C}^1$. La méthode habituelle dans ce cas consiste à rechercher les points critiques de f dans l'intérieur de D, puis à examiner f sur le bord de D. On calcule la première dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2yx)$, et on en déduit la seconde grâce à la symétrie de f : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x(1 - 2xy)$. Les points critiques sont ceux tels que $x = 0$ ou $y = 0$, ou $2xy = 1$, et aucun des ces points n'est dans l'intérieur de D.
On cherche alors le maximum sur le bord de D : sur les axes, f est nulle, donc le maximum est atteint sur l'hypoténuse. Il s'agit alors d'étudier $f(x, 1 - x) = x(1 - x)(1 - x(1 - x)) = (\varphi \circ \varphi)(x)$, ce qui n'est pas étonnant. On calcule ensuite $(\varphi \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)\varphi'(\varphi(x))$. Comme $1/2$ est la seule racine de φ', et comme $\varphi \leqslant 1/4$, la seule racine de $(\varphi \circ \varphi)'$ est $1/2$. Les seuls extrema possibles de f restreinte à l'hypoténuse IJ sont donc
– les extrémités de IJ, mais f vaut zéro en I et en J, ce n'est donc pas là que le maximum est atteint ;

– le point $(1/2, 1/2)$, qui est donc nécessairement l'unique point où f est maximale sur D.

754. **RMS 2010 1095 CCP PC**
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \neq (0,0),\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

(a) Étudier la continuité de f.
(b) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Solution. —
(a) En vertu des théorèmes usuels (somme, produit composition), f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Par ailleurs, l'inégalité $2|xy| \leqslant (x^2+y^2)$, obtenue en développant $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$, montre que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\|(x,y)\|_2}{2}\,,$$

ce qui montre que $\lim_{(0,0)} f = f(0,0)$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Les fonctions partielles en zéro $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ étant nulles, les dérivées partielles en zéro existent et sont nulles. Si f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admettrait en particulier un développement limité d'ordre 1 en l'origine donné par

$$f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \mathrm{o}(\|(x,y)\|_2) = \mathrm{o}(\|(x,y)\|_2)\,.$$

Or, si l'on pose $h(x,y) = f(x,y)/\|(x,y)\|_2 = xy/(x^2+y^2)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, on constate que h n'admet pas la limite zéro en $(0,0)$, puisque $h(x,x) = 1/2$.
En conclusion, la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

755. **RMS 2006 1142 CCP PC**
Soit ϕ définie sur $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par : $\phi(x,y) = (x, y/x)$.

(a) Montrer que ϕ définit un $\mathcal{C}^1$–difféormorphisme de U sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
(b) Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g\colon (u,v) \mapsto g(u,v)$ de classe C^2 sur Ω telle que $f = g \circ \phi$.
(c) Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
(d) Résoudre sur U : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Solution. —
(a) Si $(x,y) \in U$, alors $(x, y/x) \in U$, donc $\Omega = \mathrm{Im}(\phi) \subset U$. On va montrer que $\Omega = U$ et que ϕ est bijective de U sur Ω. Soit $(u,v) \in U$. L'équation $\phi(x,y) = (u,v)$ équivaut successivement aux systèmes

$$\begin{cases} x &= u\,,\\ y/x &= v\,, \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x &= u\,,\\ y &= uv\,. \end{cases}$$

On obtient un unique couple solution (x,y), qui appartient bien à U. De plus, les expressions $\phi(x,y) = (x,y/x)$ et $\phi^{-1}(u,v) = (u,uv)$ montrent que ϕ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $U = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puisqu'il est défini par une inégalité stricte faisant intervenir une fonction continue : $x > 0$ (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $(x,y) \mapsto x$).
(b) Il suffit de dire que $f = g \circ \phi$ équivaut à $g = f \circ \phi^{-1}$, et que g est alors de classe $\mathcal{C}^2$ en tant que composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
(c) On rappelle les formules générales de calcul des dérivées partielles de $g = f \circ \psi$, où $\psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))$ et f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, issues de la relation $\mathrm{d}(f\circ\psi)(u,v) = \mathrm{d}f(\psi(u,v)) \circ \mathrm{d}\psi(u,v)$ et de la multiplication des matrices jacobiennes correspondantes : pour tout $(u,v) \in \Omega$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(u,v))\frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(u,v))\frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u,v)\,,$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(u,v))\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(u,v))\frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u,v)\,.$$

On peut aussi mémoriser ces formules sous le modèle simplifié $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

Dans le cas de l'exercice, $\psi = \phi^{-1}$, $\psi_1(u,v) = u$ et $\psi_2(u,v) = uv$, ce qui donne, pour tout $(u,v) \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv)\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u,uv) + v\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,uv)\right]\,,\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u,uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,uv).
\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne, on a appliqué le théorème de Schwarz à la fonction f, qui est de classe $\mathcal{C}^2$ ».

(d) En substituant, dans le membre de droite,les variables x et y aux variables u et v avec $\phi(x,y) = (u,v)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + (2y/x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) + (y/x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x,y)\,,\\
&= \frac{1}{x^2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x,y)\right].
\end{aligned}$$

Comme ϕ est un difféormorphisme, l'équation aux dérivées partielles proposée est équivalente à

$$\forall (u,v) \in \Omega,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0\,.$$

Ceci entraîne l'existence d'une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (u,v) \in \Omega$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v)$, puis l'existence d'une fonction k telle que $\forall (u,v) \in \Omega$, $g(u,v) = uh(v) + k(v)$.

Réciproquement, une telle fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si h et k le sont, et la condition $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$ sur Ω est alors satisfaite. En revenant aux variables x et y et à la fonction f, on obtient l'équivalence suivante : une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est solution de $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur U si et seulement s'il existe deux fonctions h et k de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in U,\quad f(x,y) = xh\left(\frac{y}{x}\right) + k\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

756. **RMS 2011 1158 CCP PC**

Soient $Q = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $Q' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ |v| < u\}$. On note ϕ l'application qui à $(x,y) \in Q$ associe $(y^2 + x^2, y^2 - x^2)$.

(a) Représenter Q et Q'. Montrer que ϕ définit une bijection de Q sur Q'. Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme.

(b) On cherche les solutions $f\colon Q \to \mathbb{R}$ de

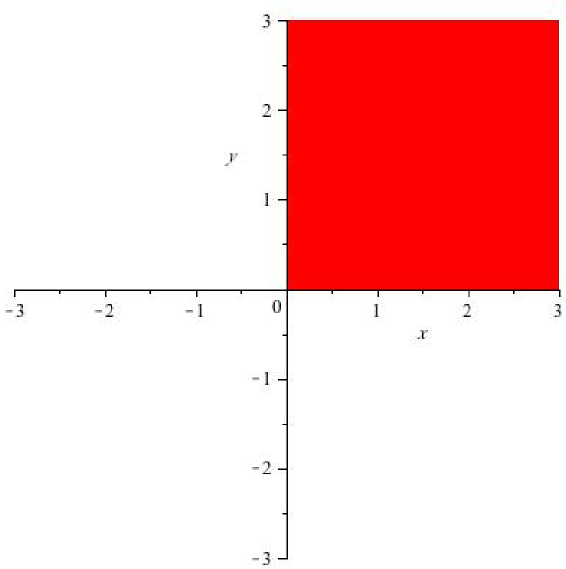
$$(E)\qquad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy\,.$$

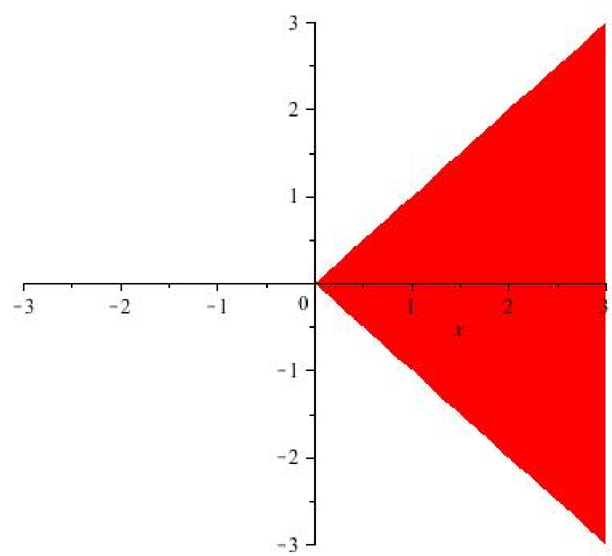
Si f est une solution de (E), on pose $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$, avec $\tilde{f} : Q' \to \mathbb{R}$. Montrer que $\tilde{f}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (E').

(c) Résoudre (E'), et en déduire les solutions de (E).

Solution. —

(a) On a représenté Q à gauche et Q' à droite :





Les commandes Maple ayant servi à réaliser ces dessins sont les suivantes :

```
with(plots):A:=plot(x,x=-3..3,filled=true):B:=plot(-x,x=-3..3,filled=true):
display([A,B]);plot(piecewise(x<0,0,x>0,3),x=-3..3,filled=true);
```

Si x et y sont non nuls, alors x^2-y^2 et y^2-x^2 sont strictement plus petits que x^2+y^2, donc $|y^2-x^2|<y^2+x^2$ donc ϕ est bien à valeurs dans Q'.
Soit $(u,v)\in Q'$. On cherche à résoudre $\phi(x,y)=(u,v)$ avec $(x,y)\in Q$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2+x^2 &=& u\,,\\ y^2-x^2 &=& v\,,\\ x &>& 0\,,\\ y &>& 0\,,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{\frac{u+v}{2}}\,,\\ x &=& \sqrt{\frac{u-v}{2}}\,.\end{array}\right.$$

L'existence et l'unicité de cette solution sont assurées par le fait que $u>|v|$. On en déduit que ϕ réalise une bijection de Q sur Q'.
On calcule la matrice jacobienne et le déterminant jacobien de ϕ :

$$\forall (x,y)\in Q,\quad J_\phi(x,y)=\begin{pmatrix} 2x & 2y\\ -2x & 2y\end{pmatrix},\quad \det(J_\phi(x,y))=8xy\,.$$

On utilise ensuite le théorème de difféomorphisme : si une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ (Q est ouvert, en effet) dans $\mathbb{R}^2$ est injective (on a démontré un peu plus que cela) et si son jacobien ne s'annule pas sur U (c'est le cas), alors $\phi(U)$ est ouvert (ici $\phi(Q)=Q'$ est en effet ouvert, on le savait déjà) et ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$–difféormorphisme de U sur $\phi(U)$.

(b) La fonction $\tilde f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule alors les dérivées partielles de f en fonction de celles de $\tilde f$ à partir de la relation $f=\tilde f\circ\phi$. Pour cela, on notera ϕ_1 et ϕ_2 les deux fonctions composantes de ϕ, données par les expressions $\phi_1(x,y)=y^2-x^2$ et $\phi_2(x,y)=y^2+x^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y)=-2x\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))+2x\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y)=2y\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))+2y\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\,.\end{aligned}$$

L'équation (E) est alors équivalente à

$$\forall (x,y)\in Q,\quad x\left[2y\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))+2y\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\right]-y\left[-2x\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))+2x\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(\phi(x,y))\right]=4xy\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))=4xy\,.$$

Comme x et y sont non nuls lorsque $(x,y)\in Q$, l'équation équivaut à $\forall (x,y)\in Q$, $\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(\phi(x,y))=1$. Comme ϕ est un difféomorphisme de Q sur Q' (en particulier, c'est une bijection), elle équivaut encore à

$$(E')\qquad\qquad \forall (u,v)\in Q',\quad \frac{\partial \tilde f}{\partial u}(u,v)=1\,.$$

(c) Les solutions de (E') sont les fonctions d'expression $\tilde f(u,v)=u+h(v)$, où $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La relation $f=\tilde f\circ\phi$ permet alors d'écrire les solutions de (E) : ce sont les fonctions d'expression

$$\forall (x,y)\in Q,\quad f(x,y)=y^2+x^2+h(y^2-x^2)\,,$$

où h est un élément quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

757. **RMS 2011 1159 CCP PC**
Déterminer les extrema de $f\colon (x,y)\mapsto (x^2-1)^2+(x^2-e^y)^2$.

Solution. — On constate pour commencer que $f(x,y)\geqslant 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et que l'égalité est réalisée si et seulement si $x^2=1=e^y$, c'est-à-dire pour les deux points $(\pm 1,0)$.
Ensuite, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, ses extrema locaux sont nécessairement atteints en des points critiques. On résout donc

$$\left\{\begin{array}{rclcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 2x[(x^2-1)+(x^2-e^y)] &=& 0\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& -2e^y(x^2-e^y) &=& 0\,,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\,,\\ 2e^{2y} &=& 0\,,\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} 2x^2-1-e^y &=& 0\,,\\ x^2-e^y &=& 0\,,\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\,,\\ y &=& 0\,,\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\,,\\ y &=& 0\,.\end{array}\right.$$

On trouve uniquement les deux points $(\pm 1,0)$ prévus plus haut, où f atteint son minimum global. Elle ne possède pas d'autre extremum local.

758. **RMS 2006 1143 CCP PC, RMS 2010 1096 CCP PC**

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1$ et $|x| \leqslant x^2+y^2\}$ et $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1+x^2+y^2)^{-2}$. On pose $I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(a) Dessiner D.

(b) Calculer $K = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta/(1+\cos^2\theta)$. *Ind.* Poser $t = \tan\theta$.

(c) En déduire I.

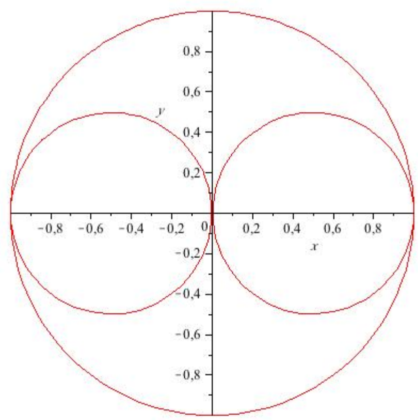
Solution. —

(a) Soit $\varepsilon = \pm 1$. L'inégalité $\varepsilon x \leqslant x^2+y^2$ équivaut à $(x-\varepsilon/2)^2+y^2 \geqslant (1/2)^2$. Par suite,

$$D = D_0 \setminus (D_1 \cup D_{-1}) ,$$

où D_0 est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et D_ε le disque ouvert de centre $(\varepsilon/2, 0)$ de rayon $1/2$. Le dessin qui suit a été obtenu avec Maple par

```
with(plots):
D0:=implicitplot(x^2+y^2=1, x=-1..1, y=-1..1):
D1:=implicitplot((x-1/2)^2+y^2=1/4, x=-1..1, y=-1..1):
DD1:=implicitplot((x+1/2)^2+y^2=1/4, x=-1..1, y=-1..1):
display({D0,D1,DD1});
```



(b) Le changement de variable proposé transforme l'intégrale ordinaire K en intégrale impropre. On applique donc le théorème correspondant au changement de variable dans les intégrales impropres. La bijection $\varphi = \tan\colon [0,\pi/2[\to [0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g\colon u \in [0,+\infty[\mapsto 1/(2+u^2)$. Comme la fonction $f \circ \phi \times |\phi'|$, d'expression $1/(2+\tan^2 t) \times (1+\tan^2 t) = 1/(1+\cos^2 t)$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que g est intégrable sur $[0,+\infty[$ (ce qu'on savait déjà par ailleurs), et que

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ &= \int_0^{\infty} f(\phi(u))|\phi'(u)|\,\mathrm{d}u\,, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}\,, \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty}\,, \\ &= \pi\frac{\sqrt{2}}{4}\,. \end{aligned}$$

(c) La description de D et l'invariance de f et de D sous l'action des transformations $(x,y) \mapsto (-x,y)$ et $(x,y) \mapsto (x,-y)$ montrent que $I = 4\iint_{D\cap Q} f$, où Q est le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. L'équation polaire du cercle D_1 est $r = \cos\theta$. Le théorème du Fubini et le changement de variable en coordonnées polaires permettent d'écrire que :

$$I = 4\iint_{D\cap Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=\cos\theta}^{1} \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\frac{-1}{2(1+r^2)}\right]_{\cos\theta}^{1}\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2} + 2K = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\,.$$

Géométrie

759. **RMS 2011 1160 CCP PC**

Tracer la courbe paramétrée : $f(t) = (x(t) = t^2/2, y(t) = (\arcsin t + t\sqrt{1-t^2})/2$.

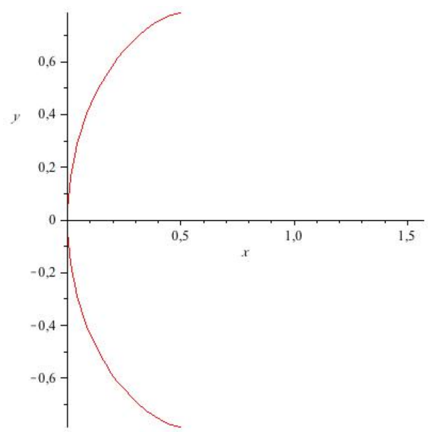
Solution. — L'ensemble de définition de f est $[-1,1]$, la fonction x est dérivable sur $[-1,1]$ et y l'est au moins sur $]-1,1[$. Comme x est paire et y impaire, on trace la courbe pour $t \in [0,1]$, puis on effectue une symétrie orthogonale par rapport à Ox.

Pour tout $t \in [0,1[$,

$$x'(t) = t\,,$$
$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \sqrt{1-t^2}\,.$$

La continuité de y en 1 et le fait que y' admette une limite finie en 1 montrent (c'est le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$) que y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $y'(1) = 0$.

Les fonctions x et y croissent strictement sur $[0,1]$ et $f(0) = (0,1)$ avec $f'(0) = (0,1)$, et $f(1) = (1/2, \pi/4)$ avec $f'(1) = (1,0)$, ce qui permet de tracer la courbe :



760. **RMS 2006 1151 CCP PC**

Soit l'arc paramétré $t \mapsto (t + \frac{a}{t^2}, t^2 + \frac{b}{t})$ avec a et b réels. Trouver a et b tels que l'arc admette un point de rebroussement pour $t = 1$.

Solution. — On appelle f l'arc en question. Un point de rebroussement en $t = 1$ correspond soit à p pair et q impair pour un rebroussement de première espèce, soit à p et q pairs, pour un rebroussement de deuxième espèce (les nombres p et q désignent le premier et le second entier fondamental en $t = 1$). Dans les deux cas, p est pair, donc au moins égal à deux, donc $f'(1)$ devra être nul. On effectue un développement limité au voisinage de $t = 1$, en posant $t = 1 + h$:

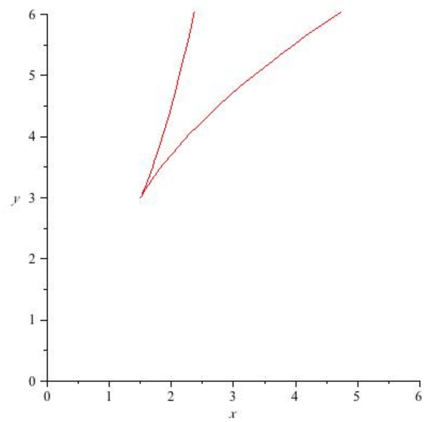
$$\begin{aligned}
f(1+h) &= \begin{pmatrix} 1 + h + a(1+h)^{-2} \\ (1+h)^2 + \frac{b}{1+h} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 + h + a(1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + \mathrm{o}(h^3)) \\ 1 + 2h + h^2 + b(1 - h + h^2 - h^3 + \mathrm{o}(h^3)) \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ 2 - b \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 3a \\ 1 + b \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} -4a \\ -b \end{pmatrix} + \mathrm{o}(h^3)
\end{aligned}$$

La nullité de $f'(1)$ impose $a = 1/2$ et $b = 2$. Dans ce cas

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{o}(h^3)\,.$$

Les vecteurs $(3/2, 3)$ et $(-2,-2)$ forment une base du plan, donc $p = 2$ et $q = 3$ en $t = 1$: c'est la définition d'un point de rebroussement de première espèce. Voici l'allure du support, obtenue en validant la commande suivante :

```
plot([t+1/(2*t**2),t**2+2/t,t=0.3..2.3],x=0..6,y=0..6);
```



761. **RMS 2011 1161 CCP PC**

On se place dans le plan affine $\mathbb{R}^2$. Soient A, B, C trois points non alignés, A' un point de (BC), B' un point de (AC) et C' un point de (AB). Soient A_1 le milieu de $[AA']$, B_1 le milieu de $[BB']$ et C_1 le milieu de $[CC']$. Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

Solution. — La solution présentée ici est analytique. J'aimerais une solution purement géométrique, plus élégante ? ?
Si M, N et P sont trois points du plan dont les coordonnées dans un repère $\mathcal{R}$ sont (x_M, y_M), (x_N, y_N) et (x_P, y_P) , on dispose de l'équivalence suivante :

$$M,\, N,\, P \text{ alignés} \iff \begin{vmatrix} x_M - x_P & x_N - x_P \\ y_M - y_P & y_N - y_P \end{vmatrix} = 0\,.$$

En effet, la nullité du déterminant traduit le fait que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que les trois points sont alignés.
On passe maintenant à la résolution. Par hypothèse, $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan. Toutes les coordonnées seront désormais relatives à ce repère.
En particulier, celles de A, B C sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. La droite (AB) est l'axe des abscisses, donc C' a pour coordonnées $(x, 0)$ pour un certain réel x. La droite (AC) est l'axe des ordonnées, donc B' a pour coordonnées $(0, y)$ pour un certain réel y. Enfin, la droite (BC) a pour équation $x + y = 1$, donc A' a pour coordonnées $(z, 1 - z)$ pour un certain réel z.
Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} z - x & -x \\ 1 - z & y \end{vmatrix} = yz - xy - x + xz = 0\,.$$

Les points A_1', B_1' et C_1' ont pour coordonnées $(\frac{z}{2}, \frac{1-z}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{y}{2})$ et $(\frac{x}{2}, \frac{1}{2})$. Ils sont alignés si et seulement si

$$\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} z - x & 1 - x \\ 1 - z - 1 & y - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}(yz - z - xy + x + z - xz) = \frac{1}{2^2}(yz - xy + x - xz) = 0\,.$$

Comme on obtient la même condition, on bien montré l'équivalence entre l'alignement de A', B', C' et l'alignement de A_1, B_1, C_1.

762. **RMS 2006 1150 CCP PC**

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, A, B, C, D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$, et α, β, γ, δ quatre réels différents de -1. On définit quatre points K, L, M, N de $\mathcal{E}$ par $\overrightarrow{KA} + \alpha\overrightarrow{KB} = 0$, $\overrightarrow{LB} + \beta\overrightarrow{LC} = 0$, $\overrightarrow{MC} + \gamma\overrightarrow{MD} = 0$, $\overrightarrow{ND} + \delta\overrightarrow{NA} = 0$.

(a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, donner une équation des plans (KCD), (LAD), (MAB), et (NBC).

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α, β, γ et δ pour que ces quatre plans aient un point commun.

Solution. — Si $\alpha = -1$, la condition $\overrightarrow{KA} + \alpha\overrightarrow{KB} = 0$ s'écrit $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KB}$, et comme $A \neq B$ (sinon les points A, B, C et D seraient coplanaires), aucun point K ne vérifie cette condition. Ceci explique que l'on suppose que α, β, γ et δ soient différents de -1.
On note $\mathcal{R}$ le repère donné dans l'énoncé, et $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de ce repère. Désignons par P le point courant de $\mathcal{E}$, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$, ce qu'on écrira $P = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$.

De la définition de K, on déduit que $\overrightarrow{AK} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{AB}$, donc $K = (\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 0)_{\mathcal{R}}$. De même, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{1+\beta}(\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC})$, donc $L = (\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta}, 0)_{\mathcal{R}}$, et les deux autres se traitent de la même façon. En résumé :

$$K = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 0\right)_{\mathcal{R}} \quad , \quad L = \left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{1+\beta}, 0\right)_{\mathcal{R}} \quad , \quad M = \left(0, \frac{1}{1+\gamma}, \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)_{\mathcal{R}} \quad , \quad N = \left(0, 0, \frac{1}{1+\delta}\right)_{\mathcal{R}} .$$

(a) Si F est un point fixé de $\mathcal{E}$, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, le point P appartient au plan affine passant par F et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{FP}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce qui équivaut encore à

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 .$$

On applique cette condition à $F = K$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{KD}$. En introduisant systématiquement le point A par la relation de Chasles, on obtient

$$P \in (KCD) \iff \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{1+\alpha} + x & -\frac{\alpha}{1+\alpha} & -\frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -\frac{\alpha}{1+\alpha} + x + y\frac{\alpha}{1+\alpha} + z\frac{\alpha}{1+\alpha} = 0 ,$$
$$\iff (1+\alpha)x + \alpha y + \alpha z - \alpha = 0 .$$

On applique ensuite la condition à $F = L$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{LD}$. En introduisant systématiquement le point A par la relation de Chasles, on obtient $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{LP}, \overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LD}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{LA}, \overrightarrow{AD})$. Finalement

$$P \in (LAD) \iff \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{1+\beta} & 0 \\ y & -\frac{\beta}{1+\beta} & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \beta x - y = 0 .$$

On applique ensuite la condition à $F = M$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MB}$. En introduisant systématiquement le point A par la relation de Chasles, on obtient $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB})$. Finalement

$$P \in (MAB) \iff \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & -\frac{1}{1+\gamma} & 0 \\ z & -\frac{\gamma}{1+\gamma} & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \gamma y - z = 0 .$$

On applique enfin la condition à $F = N$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{NC}$. En introduisant systématiquement le point A par la relation de Chasles, on obtient

$$P \in (NBC) \iff \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ -\frac{1}{1+\delta} + z & -\frac{1}{1+\delta} & -\frac{1}{1+\delta} \end{vmatrix} = 0 \iff x\frac{1}{1+\delta} + y\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{1+\delta} + z = 0 ,$$
$$\iff x + y + (1+\delta)z - 1 = 0 .$$

(b) Les quatre plans ont un point commun si, et seulement s'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (1+\alpha)x & + & \alpha y & + & \alpha z & - & \alpha & = & 0 , \\ \beta x & - & y & & & & & = & 0 , \\ & & \gamma y & - & z & & & = & 0 , \\ x & + & y & + & (1+\delta)z & - & 1 & = & 0 . \end{array} \right.$$

En substituant, dans les équations 1 et 4, les valeurs $y = \beta x$ et $z = \gamma y = \beta\gamma x$ déduites des équations 2 et 3, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma)x & = & \alpha, \\ y & = & \beta x, \\ z & = & \beta\gamma x, \\ (1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta)x & = & 1, \end{array} \right.$$

La discussion s'engage ainsi :

i. Si $1 + \beta + \beta\gamma + \beta\gamma\delta = 0$, le système n'a pas de solution.

ii. Si $1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta \neq 0$, le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}{1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta} & = & \alpha, \\ y & = & \beta x, \\ z & = & \beta\gamma x, \\ x & = & \frac{1}{1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta}, \end{array}\right. \quad \text{ou encore à} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha\beta\gamma\delta & = & 1, \\ y & = & \beta x, \\ z & = & \beta\gamma x, \\ x & = & \frac{1}{1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta}. \end{array}\right.$$

Voici alors la dernière disjonction de cas :
– Si $\alpha\beta\gamma\delta \neq 1$, le système n'a pas de solution.
– Si $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, le système a une solution (unique en fait).

En conclusion : les quatre plans (KCD), (LAD), (MAB), et (NBC) ont un point commun si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\beta\gamma\delta - 1 & = & 0\,, \\ 1+\alpha+\beta\gamma+\beta\gamma\delta & \neq & 0\,. \end{array}\right.$$

763. **RMS 2011 1163 CCP PC**
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

(a) Donner un vecteur tangent à la courbe en un point M. Donner une équation de la normale à la parabole en un point M.
(b) Déterminer les coordonnées de la projection $H(y)$ du foyer sur la normale au point d'ordonnée y.
(c) Caractériser l'ensemble $\{H(y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

SOLUTION. —

(a) La fonction $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - 2px$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et son gradient en (x_0, y_0) vaut $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x_0,y_0) = (-2p, 2y_0)$. Comme il n'est pas nul, il dirige la normale en tout point $M_0 = (y_0^2/2p, y_0)$ de $\mathcal{P}$. Cette normale a donc pour équation

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M_0)\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - \frac{y_0^2}{2p} & -2p \\ y - y_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 0 \iff y_0 x + py = \frac{y_0^3}{2p} + py_0\,,$$

et un vecteur tangent à la courbe en M_0 est (y_0, p).

(b) On va déterminer les coordonnées de la projection $H = H(y) = (\alpha, \beta)$ du foyer $F = (p/2, 0)$ sur la normale au point d'ordonnée y. Ce point est défini par le système des deux équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} y\alpha + p\beta & = & \frac{y^3}{2p} + py, \qquad (H \text{ appartient à la normale}), \\ \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M_0) & = & -p(\alpha - p/2) + y\beta = 0, \qquad (\text{la droite } (HF) \text{ est orthogonale à la normale}). \end{array}\right.$$

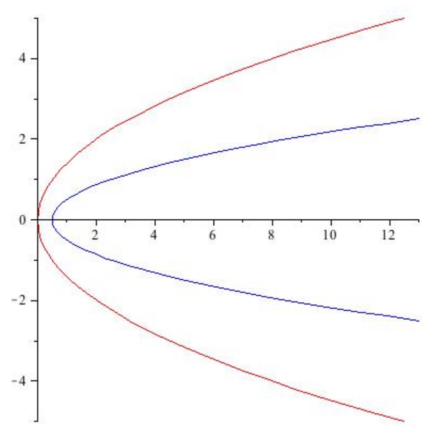
On trouve, par les formules de Cramer

$$H(y) = \left(\frac{p^2 + y^2}{2p}, \frac{y}{2}\right).$$

(c) Lorsque y parcourt $\mathbb{R}$, le quotient $t := y/2$ parcourt lui aussi $\mathbb{R}$. Le support de l'arc paramétré $y \in \mathbb{R} \mapsto H(y)$ est donc le même que celui de l'arc $t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{p}{2} + \frac{2t^2}{p}, t\right)$. Cette courbe a pour équation

$$y^2 = \frac{p}{2}(x - \frac{p}{2})\,.$$

Il s'agit d'une autre parabole d'axe Ox et de paramètre $\frac{p}{4}$. Voici les deux courbes pour $p = 1$ ($\mathcal{P}$ est en rouge, le lieu du point H en bleu) :



764. **RMS 2010 1097 CCP PC**

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique. Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 1$.

Solution. — On donne une réponse analytique, en supposant bien sûr que $A \neq B$. On choisit pour cela un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$, où O est le milieu de AB, et où i dirige la droite AB, de sorte que les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ soient $(a, 0, 0)$ avec $a > 0$, celles de B valant alors nécessairement $(-a, 0, 0)$. On note (x, y, z) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Alors les coordonnées de $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ dans $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{pmatrix} a-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -a-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z(a+x) + z(a-x) \\ y(x-a) - y(x+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2az \\ -2ay \end{pmatrix}.$$

Les points cherchés sont ceux qui vérifient l'équation $4a^2(y^2 + z^2) = 1$. L'ensemble de ces points est le cylindre circulaire d'axe Ox de rayon $1/2a$.

765. **RMS 2006 1154 CCP PC**

Déterminer, suivant les valeurs des réels a et b, la nature de la quadrique dont l'équation, en repère orthonormé, est $x^2 + xy - xz - yz + ax + bz = 0$.

Solution. — On commence par multiplier l'équation par 2, de sorte qu'elle s'écrit ${}^tXAX + LX = 0$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = (2, 0, 2)\,.$$

Tous calculs faits, le spectre de A est $\{0, -1, 3\}$, et $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, -1, 3)$ avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O_3^+(\mathbb{R}).$$

Pour faciliter les calculs, on réduit A dans une base orthogonale, mais pas non orthonormale. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad L' = LQ = 2\begin{pmatrix} b-a & b+a & b-a \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique s'écrit, avec les nouvelles coordonnées x', y' et z' : ${}^tX'DX' + L'X' = 0$, soit $-y'^2 + 3z'^2 + 2(b-a)x' + 2(b+a)y' + 2(b-a)z' = 0$, ou encore

$$-y''^2 + 3z''^2 + 2(b-a)x' + (a+b)^2 - \frac{(b-a)^2}{3} = 0\,.$$

avec $y'' = y' + (a+b)$ et $z'' = z' + \frac{b-a}{3}$. Commence alors la discussion.

(a) Si $a = b = 0$, l'équation devient $-y''^2 + 3z''^2 = 0$: c'est la réunion de deux plans affines non parallèles.

(b) Si $a = b \neq 0$, l'équation devient $-y''^2 + 3z''^2 + 4a^2 = 0$, ou encore $-\frac{y''^2}{\lambda^2} + \frac{z''^2}{\mu^2} = 1$ pour des coefficients qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. C'est un cylindre hyperbolique.

(c) Si $a \neq b$, l'équation devient $-y''^2 + 3z''^2 + 2(b-a)x'' = 0$, avec $x'' = x' + \frac{(a+b)^2}{b-a} - \frac{1}{3}$, ou encore $x'' = \frac{z''^2}{\lambda^2} - \frac{y''^2}{\mu^2}$ pour des coefficients qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. C'est un paraboloïde hyperbolique.

766. **RMS 2006 1152 CCP PC**

On considère la surface (S) d'équation $z^3 = xy$.

(a) Écrire un système d'équations paramétriques de (S).

(b) Montrer que les axes Ox et Oy sont les seules droites tracées sur (S).

(c) Trouver l'équation du plan tangent en un point régulier de la surface.

(d) Donner l'équation des plans tangents à (S) qui contiennent la droite $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3z - 3. \end{cases}$

Solution. —

(a) On rappelle les deux principaux modes de définition d'une surface (S) :
- par une équation $f(x,y,z)=0$ (c'est le cas ici) ;
- par une représentation paramétrique $F\colon (u,v)\mapsto (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, la fonction F étant définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$, avec $S=\operatorname{Im}(F)$.

On suppose toujours que f ou F ont une classe suffisamment grande.

Si l'on connaît f, il n'y a pas unicité de F. Dans le cas présent, les choix les plus simples sont sans doute $F_1(u,v)=(u^3,v^3,uv)$ ou, encore plus simplement, $F_2(u,v)=(u,v,\sqrt[3]{uv})$, avec à chaque fois $\mathbb{R}^2$ comme ensemble de départ. On préférera néanmoins la première, car F_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors que F_2 n'admet même pas de dérivées par rapport à tout vecteur en $(0,0)$.

La lectrice (le lecteur) vérifiera sans peine que F_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur S, dont la réciproque $F_1^{-1}\colon S\to\mathbb{R}^2$ a pour expression $F_1^{-1}(x,y,z)=(\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$. Si l'on souhaite coller à l'énoncé, et donner un système comme réponse, le voici :

$$\begin{cases} x &= u^3\,,\\ y &= v^3\,,\\ z &= uv\,. \end{cases}$$

(b) D'une part, tout point $(x,0,0)$ de Ox appartient à (S), donc $Ox\subset(S)$, et il en est de même de Oy.

Réciproquement, soit D une droite passant par un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de (S), et dirigée par un vecteur $u=(a,b,c)$. Si cette droite est tracée sur (S), alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, le point $M_0+\lambda u$ appartient à (S), c'est-à-dire que $(z_0+\lambda c)^3=(x_0+\lambda a)(y_0+\lambda b)$. En tenant compte de la relation $z_0^3=x_0y_0$, cela se réécrit

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad c^3\lambda^3+(3c^2z_0-ab)\lambda^2+(3cz_0^2-ay_0-bx_0)\lambda=0\,.$$

Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc, si la droite D est tracée sur (S), il faut que

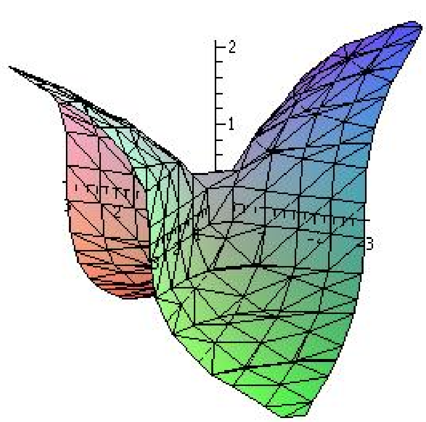
$$\begin{cases} c^3 &= 0\,,\\ 3c^2z_0-ab &= 0\,,\\ 3cz_0^2-ay_0-bx_0 &= 0\,, \end{cases}\qquad\text{ou encore}\qquad \begin{cases} c &= 0\,,\\ ab &= 0\,,\\ ay_0+bx_0 &= 0\,. \end{cases}$$

Comme $u=(a,b,c)$ est un vecteur directeur de D, il est non nul. La deuxième équation ci-dessus est donc équivalente à a *ou bien* b vaut zéro, mais pas les deux à la fois.

Si $a=0$, alors D est parallèle à Oy, et la dernière équation entraîne que $bx_0=0$. Comme b est non nul, il faut que $x_0=0$, et alors $z_0^3=0$, donc $z_0=0$. La droite D passe donc par un point M_0 de coordonnées $(0,y_0,0)$ et est parallèle à Oy : seul l'axe Oy remplit ces conditions. On montrerait de même que, si $b=0$, alors $D=Ox$, ce qui achève la détermination des droites tracées sur (S).

Voici une vue de (S), obtenue en validant les commandes suivantes dans Maple :

```
with(plots):f:=z**3-x*y;implicitplot3d(f=0,x=-3..3,y=-3..3,z=-2..2);
```



(c) Avec les notations du rappel formulé à la question (a), un point M de (S), donc tel que $f(M)=0$ ou tel qu'il existe $(u,v)\in\Omega$ avec $M=F(u,v)$, est un point régulier lorsque :

– Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$ est non nul, et alors il est orthogonal au plan tangent à (S) est le plan passant par M et orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.
– Les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$ forment une famille libre, et alors le plan tangent à (S) est le plan passant par M et dirigé par $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$.

Ici, $f(M) = xy - z^3$, donc

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -3z^2 \end{pmatrix},$$

donc tous les points de (S) sauf l'origine sont réguliers. De plus, si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ non nul appartient à S, l'équation du plan tangent (P) à (S) en M_0 s'obtient à l'aide du produit scalaire : $(\overrightarrow{M_0M} \text{grad} f(M_0)) = 0$, ou encore

$$(P) \qquad y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - 3z_0^2(z - z_0) = 0\,.$$

(d) La droite en question passe par le point A de coordonnées $(2, 0, 1)$, et est dirigée par le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est contenue dans le plan tangent P déterminé plus haut si et seulement si $(v|\text{grad} f(M_0)) = 0$ et $A \in P$, ou encore (on a ajouté au système l'équation de la surface, écrite pour M_0) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_0^3 & = & x_0 y_0\,, \\ 3x_0 - 3z_0^2 & = & 0\,, \\ y_0(2 - x_0) + x_0(-y_0) - 3z_0^2(1 - z_0) & = & 0\,, \end{array} \right. \qquad \text{ou encore} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} z_0^3 & = & x_0 y_0\,, \\ x_0 & = & z_0^2\,, \\ 2y_0 - 3z_0^2 + z_0^3 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

La toute dernière équation a pu être simplifiée comme indiqué car $z_0^3 = x_0 y_0$. Il est impossible que $z_0 = 0$, sinon x_0 et y_0 seraient nuls eux aussi. Or l'origine est un point singulier de la surface, et on ne sait pas si elle y admet un plan tangent.

Avec l'hypothèse supplémentaire que $z_0 \neq 0$, le système ci-dessus équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_0 & = & z_0\,, \\ x_0 & = & z_0^2\,, \\ 2 - 3z_0 + z_0^2 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Les solutions de la dernière équation étant 1 et 2, on peut conclure : les plans tangents à (S) qui contiennent la droite indiquée sont les plans tangents en les points $(1, 1, 1)$ et $(4, 2, 2)$, et eux seulement. Ils ont respectivement pour équation $x + y - 3z + 1 = 0$ et $x + 2y - 6z + 4 = 0$.

767. **RMS 2012 1342 CCP PC**

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $z = xe^x + ye^y$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal i.e. possède une équation de la forme $z = c$.

Solution. — La surface $\mathcal{S}$ a pour équation $f(x, y, z) := z - xe^x - ye^y = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$. Le gradient de f est la fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-(x+1)e^x, -(y+1)e^y, 1)$, qui ne s'annule jamais. Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M est donc toujours le plan passant par M orthogonal à grad $f(M)$. Il est horizontal si et seulement si ce vecteur gradient est vertical, c'est-à-dire colinéaire à $(0, 0, 1)$. Ceci se produit si et seulement si $x = y = -1$, et le point de $\mathcal{S}$ correspondant est

$$-\left(1, 1, 2e^{-1}\right).$$

Autres concours MP

Algèbre

768. **RMS 2010 954 TPE MP**

Montrer que l'ensemble des entiers premiers congrus à -1 modulo 4 est infini. Ind. Raisonner par l'absurde et considérer $N = 4p_1 \times \cdots \times p_r - 1$.

Solution. — Si cet ensemble était fini — de cardinal r —, on pourrait l'écrire $\{p_1, \ldots, p_r\}$, avec $p_1 = 3 < p_2 = 7 < p_3 = 11$ *etc.* Soit $N \geqslant 2$ le nombre de l'énoncé. Il est impair et congru à -1 modulo 4. Ses facteurs premiers, tous impairs, sont donc congrus à 1 ou à -1 modulo 4, et il possède au moins un facteur premier $p \equiv -1 \mod 4$. Un tel p n'est pas dans $\{p_1, \ldots, p_r\}$, sinon, comme il divise N, il diviserait -1. Or $\{p_1, \ldots, p_r\}$ est censé contenir *tous* les nombres premiers congrus à -1 modulo 4 : contradiction.

769. **RMS 2011 1042 TPE MP**

Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans les anneaux $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Que dire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Solution. — La factorisation canonique $x^2 + x + \dot{1} = (x + \dot{4})^2 - \dot{1}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ montre que les solutions sont $\pm\dot{1} - \dot{4}$, soit

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = \{\dot{2}, \dot{4}\}\ .$$

Cette factorisation (canonique) n'est possible que si 2 est inversible dans l'anneau considéré. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, mais cela ne prouve pas l'absence de solutions.

On va démontrer directement que l'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $n = 2k$ est pair. Si $(x, y) \in \mathbb{Z}$, et si $z \in \mathbb{Z}/(2k)\mathbb{Z}$ sont tels que $z = \dot{x} = \dot{y}$, alors la classe de x et celle de y modulo 2 sont égales, ce qui permet de définir une fonction $\dot{x} \mod 2k \mapsto \dot{x} \mod 2$ de $\mathbb{Z}/(2k)\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Par conséquent, si $\dot{x} \mod 2k$ est solution de l'équation proposée dans $\mathbb{Z}/(2k)\mathbb{Z}$, alors $\dot{x} \mod 2$ l'est dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est constante et vaut 1 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De telles solutions n'existent donc pas.

Si $n = 2k + 1$ est impair, alors $\dot{2}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'inverse $k \dot{+} 1$, donc $x^2 + x + 1 = (x + k + 1)^2 - (k + 1)^2 + 1 = (x + k + 1)^2 - k^2(k + 2) = (x + k + 1)^2 - (k^2 - 1)$. L'équation a des solutions si et seulement si $k(k + 2) = k^2 - 1$ est un carré dans $\mathbb{Z}/(2k + 1)\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on l'écrit $k^2 - 1 = a^2$, et alors

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}/(2k+1)\mathbb{Z}} = \{a - k - 1, -a - k - 1\}\ .$$

Remarque. — La question de savoir si un élément est un carré dans un anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne peut être résolue dans le cadre d'un exercice d'oral ? ? à terminer

770. **RMS 2007 1074 Petites Mines MP**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix},$$

puis étudier le système linéaire

$$\begin{cases} x + (1+\alpha)y + z + t &= a\,, \\ x + y + (1+\alpha)z + t &= b\,, \\ x + y + z + t &= c\,, \\ x + y + z + (1+\alpha)t &= d\,. \end{cases}$$

Solution. — Si $\alpha = 0$, il est clair que $\operatorname{rg} A = 1$ (et que son image est la droite des vecteurs dont les 4 composantes sont égales, son noyau H étant l'hyperplan vectoriel d'équation $x + y + z + t = 0$).

Sinon, les transformations élémentaires $C_k \leftarrow C_2 - C_1$ pour $k \in \{2, 3, 4\}$ montrent que le rang de A est aussi celui de

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut $-\alpha^2 \neq 0$ (développer par rapport à la dernière colonne, puis par rapport à la dernière ligne), donc $\operatorname{rg} A = 4$ dans ce cas.

On en déduit la discussion du système linéaire.

– Si $\alpha = 0$, le système est compatible si et seulement si $a = b = c = d$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est l'hyperplan affine $X_0 + H$, où X_0 est le vecteur colonne $\frac{a}{4}\,{}^t(1,1,1,1)$.
– Sinon, le système est de Cramer. Le calcul de son unique solution ne présente pas d'intérêt.

771. **RMS 2009 1074 TPE MP**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(a) Trouver les endomorphismes de E stabilisant toutes les droites de E.
(b) Si $2 \leqslant d \leqslant n-1$, trouver les endomorphismes de E stabilisant tous les sous-espaces de dimension d de E.

Solution. — Voir aussi l'exercice 67 page 125. On suppose que $n \geqslant 2$ (si $n = 1$, l'exercice est banal puisque tout endomorphisme de E satisfait les conditions proposées).

(a) On va montrer qu'il s'agit des homothéties de E.
Analyse. Soient u un tel endomorphisme et x un vecteur non nul de E. La droite engendrée par x étant stable par u, il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$. Soient alors $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = \lambda_i e_i$. On note λ un scalaire tel que $u(e_1 + e_2) = \lambda(e_1 + e_2)$. La linéarité de u permet d'écrire que
$$\lambda(e_1 + e_2) = u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\,.$$
La liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ montre alors que $\lambda_1 = \lambda_2$. On fait de même pour les autres λ_i, ce qui prouve que u est une homothétie.
Synthèse. Si l'endomorphisme u est une homothétie, il stabilise toutes les droites de E.

(b) Là encore, il s'agit des homothéties. Pour cela, on note que si un endomorphisme stabilise une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors il stabilise leur intersection. Il suffit alors de montrer, une droite D de E étant donnée, qu'il existe une famille de sous-espaces de dimension d dont l'intersection vaut D.
On note e_1 un vecteur générateur de D, et on applique le théorème de la base incomplète : il existe des vecteurs $e_2, \dots, e_n$ tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E. On note $\mathcal{F}$ la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{d+1})$ et on pose
$$\forall i \in [\![2, d+1]\!], \quad F_i = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \setminus (e_i))\ .$$
La famille $(F_i)_{2 \leqslant i \leqslant d}$ convient, ce qui achève la preuve (la synthèse est évidente).

772. **RMS 2011 1044 TPE MP**
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0$ et $\operatorname{tr} M = 0$.

Solution. — Le polynôme $X^3 - X^2 - X - 2 = (X-1)(X^2+2) = (X-1)(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})$, scindé à racines simples, est annulateur de M, qui est donc diagonalisable. Soient $m_1, m_{i\sqrt{2}}, m_{-i\sqrt{2}}$ les multiplicités éventuellement nulles des éventuelles valeurs propres $1, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$. Alors $0 = \operatorname{tr} M = m_1 + i\sqrt{2}(m_{i\sqrt{2}} - m_{-i\sqrt{2}})$, donc il faut que $m_1 = 0$ et $m_{i\sqrt{2}} = m_{-i\sqrt{2}}$, que l'on note m. Comme M est diagonalisable, $n = 2m$ doit être pair.
Réciproquement, si $n = 2m$ est pair, il existe de telles matrices : toutes celles qui sont semblables à $i\sqrt{2}\,\mathrm{diag}(I_m, -I_m)$ conviennent (et ce sont les seules). Les n cherchés sont donc les entiers pairs strictement positifs.

773. **RMS 2011 1045 TPE MP**
Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ telles que $A^3 = I_n$.

Solution. — Voir l'exercice 769 page 497 pour la résolution de l'équation $x^2 + x + 1$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, qu'on utilise ci-dessous. Ces matrices annulant le polynôme scindé à racines simples $X^3 - \dot{1} = (X - \dot{1})(X^2 + X + \dot{1}) = (X - \dot{1})(X - \dot{2})(X - \dot{4})$, elles sont diagonalisables, et leur spectre est inclus dans $\{\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}\}$. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant 7}$ avec $\lambda_i \in \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}\}$ convient.
Remarque. — On peut déterminer le nombre de matrices A en question : comme $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto P^{-1}MP$ est injective pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de déterminer le nombre de matrices diagonales mentionnées ci-dessus et de multiplier par le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$. Un exercice classique montre que ce cardinal vaut $(7^n - 1)(7^n - 7)\cdots(7^n - 7^{n-1})$. Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des matrices cherchées, alors
$$\mathrm{Card}\,\mathcal{A} = 3^n(7^n - 1)(7^n - 7)\cdots(7^n - 7^{n-1}).$$

774. **RMS 2010 958 TPE MP**
Soit $\Phi\colon P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1 - X)$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Calculer $\Phi \circ \Phi$. Déterminer les éléments propres de Φ.

(c) Calculer $\exp(\Phi)$.

Solution. —

(a) La linéarité de Φ est claire. Comme $\deg \Phi(P) = \deg(P)$ pour tout polynôme P, on conclut que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Il est clair que $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. En d'autres termes, Φ est une symétrie vectorielle. Comme elle est manifestement différente de l'identité et de son opposé, elle admet les deux valeurs propres 1 et -1. Ses sous-espaces propres sont

$$E_1(\Phi) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1-X) = P(X)\},$$
$$E_{-1}(\Phi) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1-X) = -P(X)\}.$$

Si l'on veut aller plus loin dans la description de ces sous-espaces, on peut utiliser la base $\mathcal{B} = (X^k(1-X)^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est bien une base car c'est une famille échelonnée en degré, donc libre, et de cardinal $n+1$).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k(1-X)^{n-k}$. Alors $P \in E_1(\Phi)$ si et seulement si $\alpha_k = \alpha_{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est-à-dire si et seulement si la liste des composantes de P dans $\mathcal{B}$ est un palindrome. La dimension de ce sous-espace est $p+1$, que $n = 2p$ soit pair ou que $n = 2p+1$ soit impair.
De même, $P \in E_{-1}(\Phi)$ si et seulement si $\alpha_k = -\alpha_{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est-à-dire si et seulement si la liste des composantes de P dans $\mathcal{B}$ est un « antipalindrome ». La dimension de ce sous-espace est p si $n = 2p$ est pair, et $p+1$ si $n = 2p+1$ est impair.

(c) Comme $\Phi^2 = \mathrm{id}$, le calcul de l'exponentielle de Φ est simple :

$$\exp(\Phi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Phi^k}{k!} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) \mathrm{id} + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right) \Phi = \mathrm{ch}(1)\,\mathrm{id} + \mathrm{sh}(1)\Phi\ .$$

775. **RMS 2006 983 TPE MP**

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M\,{}^tMM = I_n$.

Solution. — Voir l'exercice 575 page 391.

Analyse

776. **RMS 2010 961 TPE MP**

Soient E un espace vectoriel normé réel et C une partie convexe de E.

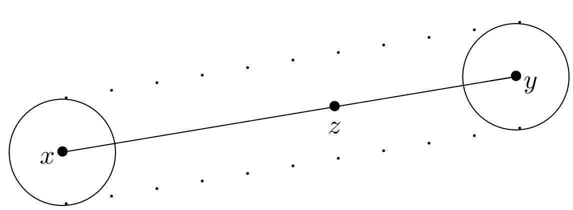
(a) Montrer que l'adhérence de C est convexe.

(b) Montrer que l'intérieur de C est convexe.

Solution. —

(a) On utilise ici la caractérisation suivante (séquentielle) de l'adhérence d'une partie A : un point $z \in E$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers z.
Soient x et y deux points de l'adhérence de C et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ est adhérent à C. Or il existe deux suites (x_n) et (y_n) de points de C de limites respectives x et y. Comme C est convexe, la suite (z_n) où $z_n = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n$ est formée de points de C. Par ailleurs cette suite converge vers z, ce qui achève la preuve.

(b) On utilise la caractérisation suivante de l'intérieur d'une partie A : un point $z \in E$ est intérieur à A si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte de centre z de rayon r est contenue dans A.
Soient x et y deux points intérieurs à C et $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ est intérieur à C. Or il existe r et r' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $B(x, r) \subset C$ et $B(y, r') \subset C$. On pose $\rho = \min(r, r')$, de sorte que les boules ouvertes $B(x, \rho)$ et $B(y, \rho)$ sont contenues dans A.



Comme l'indique le dessin ci-dessus, le tube formé par la translation, le long du segment $[x, y]$, d'une boule de rayon ρ, sera contenu dans C, et en particulier $B(z, \rho) \subset C$. On le démontre maintenant de manière formelle. Soit $t \in B(z, \rho)$. Alors $x + (t - z) \in B(x, \rho)$ et $y + (t - z) \in B(y, \rho)$, donc $x + (t - z)$ et $y + (t - z)$ sont dans C. La convexité montre que

$$\lambda[x + (t - z)] + (1 - \lambda)[y + (t - z)] = \lambda x + (1 - \lambda)y + (\lambda + 1 - \lambda)(t - z) = z + (t - z) = t \in C.$$

777. **RMS 2010 962 TPE MP**

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soient $x_0 \in [0, 1]$ et φ la forme linéaire $f \in E \mapsto f'(x_0)$. Montrer que φ n'est pas continue. Que dire de $\operatorname{Ker} \varphi$?

Solution. — La suite de fonctions (f_n) de E définies par $f_n\colon x \in [0, 1] \mapsto \sin(nx)/n$ converge vers la fonction nulle au sens de la norme infinie, puisque $\|f_n\|_\infty = 1/n$. Or $\varphi(f_n) = f_n'(x_0) = \cos(nx_0)$ est le terme général d'une suite qui ne converge pas vers $0 = \varphi(0)$, et ceci quel que soit $x_0 \in [0, 1]$. (En effet, si c'était le cas, la suite de terme général $\cos(2nx_0)$, extraite de $(\cos(nx_0))$, convergerait aussi vers zéro. Or $\cos(2nx_0) = 2\cos^2(nx_0) - 1$ tend vers -1 quand n tend vers $+\infty$ si $\cos(nx_0)$ tend vers zéro). Ceci montre que φ n'est pas continue.

Alors l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense, puisqu'il n'est pas fermé (est-ce vraiment au programme de la filière MP ? ? à terminer).

778. **RMS 2011 1053 ENSEA MP**

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

(a) Montrer que $s_n \leqslant 9(\operatorname{Log} n + 1)$, où Log est le logarithme de base 10.

(b) Montrer que la suite de terme général s_{n+1}/s_n est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Solution. —

(a) On suppose que n s'écrit $\sum_{p=0}^{k} c_p 10^p$, avec k entier naturel, $c_k \neq 0$ et $c_p \in [\![0, 9]\!]$ pour tout p (ce sont des chiffres en base 10). Alors $10^k \leqslant n < 10^{k+1}$, et on en déduit, en appliquant la fonction Log qui est strictement croissante, que $k \leqslant \operatorname{Log} n < k + 1$. On passe ensuite à la majoration de s_n :

$$s_n = \sum_{p=0}^{k} c_p \leqslant 9(k + 1) \leqslant 9(\operatorname{Log} n + 1)\,.$$

(b) On va démontrer que

$$\inf_{n \geqslant 1} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{n \geqslant 1} \left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = 2\,,$$

la borne inférieure n'étant pas atteinte, puisque $s_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la borne supérieure étant atteinte pour $n = 1$, puisque $s_1 = 1$ et $s_2 = 2$.

Il est clair que $s_{n+1}/s_n > 0$. On pose $n_k = 10^k - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a $s_{n_k} = s_{99\cdots 9} = 9k$ et $s_{n_k+1} = s_{10\cdots 0} = 1$, donc la suite extraite $(s_{n_k+1}/s_{n_k})_{k \geqslant 1}$ converge vers zéro, ce qui justifie la borne inférieure annoncée.

Si le dernier chiffre de n en base 10 n'est pas un 9, on a $s_{n+1} = s_n + 1$, et alors $s_{n+1}/s_n = 1 + 1/s_n \leqslant 1 + 1/1 = 2$. Si n se termine par exactement j chiffres 9, et si on désigne par t la somme de tous les autres chiffres de n, le phénomène de retenue dans les additions montre que $s_n = t + 9j$ et $s_{n+1} = t + 1$ (les j derniers chiffres de $n + 1$ sont des 0). Alors $s_{n+1}/s_n < 1$, et *a fortiori* $s_{n+1}/s_n \leqslant 2$, ce qui justifie la borne supérieure annoncée.

779. **RMS 2010 966 TPE MP**

Soit $f\colon x \in [-1, 1] \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

(a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$.

(b) Montrer par deux méthodes que f est développable en série entière autour de zéro.

Solution. — On pose $f_n\colon x \in [-1, 1] \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$. Tout d'abord, f est bien définie car la série de terme général $f_n(x)$ pour x fixé dans $[-1, 1]$ et $n \geqslant 2$ vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz des séries alternées :

– le caractère alterné est clair car le dénominateur $x + n \geqslant -1 + 2 = 1$ est toujours positif ;

– la limite du terme général est nulle ;

– $|\frac{(-1)^n}{x+n}| - |\frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1}| = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} > 0$, donc la suite des valeurs absolues du terme général décroît.

En d'autres termes, $\sum f_n$ converge simplement vers f sur $[-1, 1]$.

(a) Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on montre aisément par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k} \frac{k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

On en déduit que $\|f_n^{(k)}\|_\infty = \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$, donc que $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $[-1,1]$ pour tout $k \geqslant 1$. Les hypothèses du théorème de dérivation sont réunies : f est indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$, et

$$\forall x \in [-1,1], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{k+1}}.$$

En particulier, $f^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) *Première méthode : l'inégalité de Taylor Lagrange en zéro.*

Elle affirme que $|f(x) - S_k(x)| \leqslant M_{k+1} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}$, où $S_k(x) = \sum_{j=0}^k f^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!}$ est la somme partielle d'ordre k de la série de Taylor de f en zéro, et où M_{k+1} est un majorant de $|f^{(k+1)}|$ sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$ selon le signe de x. Comme la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(t+n)^{k+2}}$ satisfait les hypothèses du théorème des séries alternées, la valeur absolue de sa somme est majorée par la valeur absolue de son premier terme, donc $|f^{(k+1)}(t)| \leqslant \frac{(k+1)!}{(x+2)^{t+2}}$ pour tout $t \in [-1,1]$. On en déduit que, si $x \geqslant 0$, on peut choisir $M_{k+1} = \frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$, et que si $x < 0$, on peut choisir $M_{k+1} = \frac{(k+1)!}{(x+2)^{k+1}}$. Finalement,

$$|f(x) - S_k(x)| \leqslant \begin{cases} \frac{|x|^{k+1}}{2^{k+1}} & \text{si } x \geqslant 0, \\ \frac{|x|^{k+1}}{(x+2)^{k+2}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le majorant tend vers zéro pour tout $x \in]-1,1]$, ce qui montre que f est développable en série entière autour de zéro avec un rayon de convergence au moins 1 :

$$\forall x \in]-1,1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k.$$

Deuxième méthode : usage d'une famille sommable.

On part de l'égalité suivante, qui se déduit de la somme d'une série géométrique de raison $x/n \in [-1/2, 1/2]$:

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(1+\frac{x}{n})} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^k \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{x^k}{n^{k+1}}.$$

On pose $u_{n,k} = (-1)^{n+k} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \geqslant 1$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on dispose de la majoration

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} |x|^k = \frac{\pi^2}{6} \frac{|x|}{1-|x|} < +\infty.$$

La famille $(u_{n,k})_{n \geqslant 2, k \geqslant 1}$ est donc sommable, et on peut permuter l'ordre des sommes (théorème de Fubini) :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k.$$

On lit ci-dessus que f est développable en série entière autour de zéro avec un rayon de convergence au moins égal à 1.

780. **RMS 2010 968 TPE MP**

Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction $f \colon x \mapsto \operatorname{sh}(\sin x) \cos(\cos x)$.

Solution. — On remarque que f est impaire, de sorte que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit ensuite deux fonctions g_1 et g_2 sur $\mathbb{R}$ en posant $g_1(x) = \exp(\sin x + i \cos x) = \exp(ie^{-ix})$ et $g_2(x) = \exp(-\sin x + i \cos x) = \exp(ie^{ix})$ pour tout réel x, de sorte que

$$f = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(g_1 - g_2).$$

On calcule ensuite $\int_{-\pi}^{\pi} g_1(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \exp(ie^{-ix})\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\sum_{k=0}^{+\infty} i^k e^{-ikx}\sin(nx)/k!)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $h_k\colon x\in\mathbb{R}\mapsto i^k e^{-ikx}\sin(nx)/k!$. Il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\|h_k\|_\infty = 1/k!$, donc telle que $\sum h_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On peut alors permuter l'intégrale sur un segment (ici $[-\pi,\pi]$) et la série pour obtenir

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_1(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k}{k!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Les relations d'orthogonalité montrent que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\sin(nx) = 0$ sauf si $k=n$, auquel cas on a $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x - i\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = 0 - i\pi$. Finalement, $\int_{-\pi}^{\pi} g_1(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -i^{n+1}\pi/n!$. On prouve de même que $\int_{-\pi}^{\pi} g_2(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = +i^{n+1}\pi/n!$, et on conclut que

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{Re}(g_1(x)-g_2(x))\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(-\frac{i^{n+1}\pi}{n!}-\frac{i^{n+1}\pi}{n!}\right) = -\frac{1}{n!}\operatorname{Re}(i^{n+1}),\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,}\\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \text{si } n=2p+1 \text{ est impair.}\end{cases}
\end{aligned}$$

781. **RMS 2010 969 TPE MP**

Soient $f\colon t\mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x$ et (E) l'équation différentielle $ty''+y'-ty+1=0$.

(a) Montrer que f vérifie (E).

(b) Trouver les solutions de (E) développables en série entière.

(c) En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x$.

Solution. — On pose $g\colon (t,x)\in\mathbb{R}\times[0,\pi/2]\mapsto e^{-t\sin x}$.

(a) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'intervalle d'intégration est un segment, donc les hypothèses du théorème de Leibniz sont vérifiées à tout ordre : on peut dériver indéfiniment f sous le signe $\int$. En particulier, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\int_0^{\pi/2}\sin x\, e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x,\\
f''(t) &= \int_0^{\pi/2}\sin^2 x\, e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Alors $tf''(t)+f'(t)-tf(t) = \int_0^{\pi/2}(t\sin^2 x-\sin x - t)e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/2}(t\cos^2 x+\sin x)e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x$. On calcule ensuite $\int_0^{\pi/2}\sin x e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x$ par parties en intégrant $\sin x$ et en dérivant $e^{-t\sin x}$ par rapport à x :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad tf''(t)+f'(t)-tf(t) = -\int_0^{\pi/2} t\cos^2 x\, e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x + \left[\cos x\, e^{-t\sin x}\right]_{x=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} t\cos^2 x\, e^{-t\sin x}\,\mathrm{d}x = -1,$$

ce qui prouve que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) *Analyse.* On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R strictement positif et que sa somme y est solution de (E) sur $]-R,R[$. Le théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières, et le changement d'indice $n=p-2$ dans la dernière somme, montrent que

$$\begin{aligned}
\forall t\in\,]-R,R[\,,\quad ty''(t)+y'(t)-ty(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1},\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n t^{n-1} - \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2}t^{p-1} = 0 + a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n^2 a_n - a_{n-2})t^{n-1} = -1\,.
\end{aligned}$$

L'unicité des coefficients d'une somme de série entière de rayon de convergence $R>0$ montre que $a_1=-1$ et $\forall n\geqslant 2,\ a_n = a_{n-2}/n^2$. On en déduit que, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{1}{(2p)^2(2p-2)^2\cdots 2^2}a_0 = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2}a_0,\\
a_{2p+1} &= \frac{1}{(2p+1)^2(2p-1)^2\cdots 3^2}a_1 = -\frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2}.
\end{aligned}$$

Synthèse. On montre que les séries entières obtenues (le pluriel est de mise car elles dépendent d'un paramètre réel a_0) ont un rayon de convergence strictement positif en calculant les rayons de convergence R_1 de $\sum a_{2p}z^{2p}$ (pour $a_0 = 1$) et R_2 de $\sum a_{2p+1}z^{2p+1}$. Pour cela, on fixe $z \in \mathbb{C}$ et on pose $u_p = a_{2p}z^{2p}$ (avec $a_0 = 1$) et $v_p = a_{2p+1}z^{2p+1}$. Comme $u_{p+1}/u_p = (a_{2p+2}/a_{2p})z^2 = z^2/(2p+2)^2$ et $v_{p+1}/v_p = a_{2p+1}/a_{2p-1}z^2 = z^2/(2p+1)^2$ tendent vers zéro quand p tend vers $+\infty$, on a $R_1 = R_2 = +\infty$. La minoration $R \geqslant \min(R_1, R_2)$ du rayon de convergence d'une somme de séries entières montre alors que $R = +\infty$.

Les solutions de (E) développables en série entière sont donc les fonctions y telles que

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} t^{2p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{((2p+1)!)^2} t^{2p+1}.$$

(c) On commence par montrer que la fonction f de la question (a) est développable en série entière : en effet

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t\sin x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x \right) t^n.$$

La permutation série intégrale sur le segment $[0, \pi/2]$ à t fixé est justifiée, car chaque fonction $f_n \colon x \mapsto (-t\sin x)^n/n!$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et vérifie $\|f_n\|_\infty = |t^n|/n!$, ce qui prouve la convergence normale de la série $\sum f_n$.

La fonction f est donc l'une des fonctions de la question (b) : il s'agit d'identifier a_0. Pour cela, on calcule $f(0) = \int_0^{\pi/2} e^0\,\mathrm{d}x = \pi/2 = a_0$. L'unicité des coefficients d'un développement en série entière de rayon de convergence strictement positif montre enfin que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2p}\,\mathrm{d}x = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2p+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

782. **RMS 2010 970 TPE MP**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $X' = AX$.

Solution. — La méthode consiste à réduire la matrice A. Comme $\chi_A = (1-X)(2-X)(-1-X)+12+4(-1-X)-6(1-X) = -X^3 + 2X^2 + 3X = -X(X^2 - 2X - 3) = -X(X+1)(X-3)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On trouve aisément que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

vérifie $D := P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-1, 0, 3)$. On pose alors $Y = P^{-1}X$, de sorte que le système différentiel $X' = AX$ soit équivalent au système différentiel $Y' = DY$. Le caractère diagonal de D donne immédiatement

$$Y' = DY \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{-t} \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Comme $X = PY$, le calcul de P^{-1} est inutile, et on obtient :

$$X' = AX \iff \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{-t} + 4\lambda_2 + \lambda_3 e^{3t} \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 e^{3t} \\ \lambda_1 e^{-t} + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

783. **RMS 2010 971 TPE MP**

Soit $(E) \colon x' = \sin(xt)$.

(a) Soit x une solution telle que $x(0) = 0$. Que peut-on dire de x ?

(b) Montrer que toute solution maximale de E est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

Solution. — On pose $f \colon (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(xt)$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy et Lipschitz s'applique à l'équation différentielle $x' = f(x,t)$: il existe une unique solution maximale de (E) qui vaut zéro en zéro, elle est définie sur un intervalle ouvert contenant zéro, et toutes les solutions de (E) satisfaisant la même condition initiale sont des restrictions de cette solution maximale. Comme la fonction nulle, définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) et vérifie cette condition initiale, on a identifié la solution maximale en question. Par suite, la solution x dont parle l'énoncé est nulle.

(b) Soit x une solution maximale de (E) définie sur un intervalle ouvert $I \neq \mathbb{R}$, par exemple tel que $a = \inf I > +\infty$. On va montrer une contradiction. Comme $\forall t \in I$, $|x'(t)| = |\sin(xt)| \leqslant 1$, la fonction x est de Cauchy en a, donc admet une limite finie ℓ en a. Si on veut éviter cette notion, à la limite du programme, on utilise le critère séquentiel d'existence d'une limite finie : pour toute suite (t_n) d'instants de I qui converge vers a, l'inégalité des accroissements finis entraîne

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad |x(t_n) - x(t_p)| \leqslant |t_n - t_p|,$$

donc la suite $(x(t_n))$ est de Cauchy, puisque (t_n) l'est. Par suite, $(x(t_n))$ est une suite convergente, et la conclusion suit.

Une fois acquise l'existence d'une limite finie ℓ de x en a, on prolonge x à $I \cup \{a\}$ en une fonction $\tilde{x}$, en posant $\tilde{x}(a) = \ell$. Comme $x'(t) = \sin(tx(t))$ admet la limite finie $\sin(a\ell)$ en a, le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montre que $\tilde{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \cup \{a\}$, et est solution de (E). Ceci montre que x n'était pas maximale, d'où la contradiction, et on conclut que $a = \inf I = -\infty$. On montre de même que $b = \sup I = +\infty$, donc que $I = \mathbb{R}$.

On peut alors s'intéresser à la parité de x. Pour cela, on définit la fonction $y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto x(-t)$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = -x'(-t) = -\sin(-tx(-t)) = \sin(tx(-t)) = \sin(ty(t)),$$

donc y est une solution de (E), et $y(0) = x(0)$. L'unicité du théorème de Cauchy et Lipschitz montre que $y = x$, c'est-à-dire que x est paire.

784. **RMS 2010 972 TPE MP**

Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f' + 2\sqrt{f} = 0$.

Solution. — Les fonctions solutions sont nécessairement positives. On recherche ci-dessous les solutions maximales.

Soit f une solution maximale, non identiquement nulle, de cette équation différentielle définie sur un intervalle I. Comme $f' = -2\sqrt{f}$, la fonction f décroît sur I. Comme elle n'est pas identiquement nulle, il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) > 0$. Alors $f(t) \geqslant f(t_0) > 0$ pour tout $t \in I \cap]-\infty, t_0]$. L'ensemble $J := \{t \in I, f(t) > 0\}$ est donc un intervalle non vide contenu dans I, de la forme $]\infty, \sup(J)[\cap I$.

Sur la partie droite (éventuelle) de I, c'est-à-dire sur $[\sup J, +\infty[\cap I$, la fonction f est nulle.

On peut trouver l'expression de f sur J, puisqu'elle ne s'y annule pas :

$$\forall t \in J, \quad \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{f(t)}\right) = -1.$$

Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in J$, $\sqrt{f(t)} = -t + c$, donc $f(t) = (-t+c)^2$. Compte-tenu de la maximalité, $I = \mathbb{R}$ et $J =]-\infty, c[$.

Comme on a raisonné par conditions nécessaires, il faut vérifier que les fonctions

$$f_c\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (-t+c)^2 & \text{si } t < c, \\ 0 & \text{si } t \geqslant c \end{cases}$$

sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (le raccord en c se fait) et sont bien solutions de l'équation différentielle (c'est banal).

Remarque. — La fonction racine carrée n'étant pas de classe $\mathcal{C}^1$, les hypothèses du théorème de Cauchy et Lipschitz ne sont pas vérifiées. De fait, les conclusions non plus, car l'unicité est mise en défaut : une infinité de solutions maximales vérifient $f(0) = 0$, par exemple.

Géométrie

Autres concours PSI

Algèbre

785. **RMS 2011 1068 ENSAM PSI (Calcul formel)**

(a) Déterminer le reste de la division de $X^n + 2X^m + 1$ par $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$.
(b) Vérifier le résultat pour $n = 100$ et $m = 43$.

Solution. — On suppose que le corps de base est $\mathbb{R}$.

(a) La division euclidienne de X^n+2X^m+1 par $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ s'écrit $X^n+2X^m+1 = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)Q + R$, avec $(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\deg R \leqslant 3$, donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $R = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On détermine ces coefficients en substituant X par les racines de $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ dans la division euclidienne. On obtient le système

$$\begin{cases} a+b+c+d & = & 4\,, \\ 2^3a + 2^2b + 2c + d & = & 2^n + 2^{m+1} + 1\,, \\ 3^3a + 3^2b + 3c + d & = & 3^n + 2\times 3^m + 1\,, \\ 4^3a + 4^2b + 4c + d & = & 4^n + 2\times 4^m + 1\,. \end{cases}$$

Il s'agit, comme le prévoit la théorie, d'un système de Cramer, puisque son déterminant est, au signe près, le déterminant de Vandermonde $V(1,2,3,4)$. Maple fait les calculs, en validant

```
R:=x->a*x**3+b*x**2+c*x+d; A:=x->x**n+2*x**m+1; for i from 1 to 4 do eq[i]:=R(i)=A(i) end do;
solve({seq(eq[i],i=1..4)},{a,b,c,d});
```

On obtient

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} + 2^m + 2^{n-1} + \frac{1}{6}4^n + \frac{1}{3}4^m - \frac{1}{2}3^n - 3^m\,, \\ b &= \frac{9}{2} - 8\times 2^m - 4\times 2^n - 4^n - 2\times 4^m + \frac{7}{2}\times 3^n + 7\times 3^m\,, \\ c &= -13 + 19\times 2^m + 19\times 2^{n-1} + \frac{11}{6}4^n + \frac{11}{3}4^m - 7\times 3^n - 14\times 3^m\,, \\ d &= 13 - 6\times 2^n - 4^n - 2\times 4^m - 12\times 2^m + 4\times 3^n + 8\times 3^m\,. \end{aligned}$$

(b) La vérification demandée est étrange, vu qu'il n'y a pas d'erreur dans la question précédente, sauf à soupçonner des erreurs possibles dans Maple. Il suffit de valider `n:=100;m:=43;` puis de valider à nouveau les lignes ci-dessus. Le résultat obtenu ne présente aucun intérêt, et peut être consulté dans le fichier Maple correspondant.

786. **RMS 2008 969 Télécom Sud Paris PSI**

Soit $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$. On note $x_1, \ldots, x_5$ ses racines complexes. Calculer $\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j$.

Solution. — On note σ_k la k-ème fonction symétrique des racines de P, et on rappelle que $\sigma_k = (-1)^k a_{5-k}/a_5 = (-1)^k a_{5-k}$, les a_i étant les coefficients de P. En particulier, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 2$ et $\sigma_3 = 0$. Soit s la somme à calculer. On constate que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 + 2s$, donc que

$$s = \frac{1}{2}(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) = -1\,.$$

787. **RMS 2009 1090 ENSEA PSI**

Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

Solution. — On pose $f(x) = (1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k x^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La primitive de f nulle en zéro, notée g, admet les deux expressions suivantes : $g(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}$. La somme demandée vaut donc

$$g(1) = \frac{1}{n+1}\,\cdot$$

788. **RMS 2006 1044 TPE PSI**

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et f dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est exacte
(i) $\exists(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times(E\backslash\{0\}),\ f(u) = \lambda u$.
(ii) $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \exists(u,v) \in (E\backslash\{0\})^2,\ f(u) = \lambda u + \mu v$ et $f(v) = -\mu u + \lambda v$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 637 page 420.

Si f possède une valeur propre réelle, la première assertion est vérifiée.

Sinon, on note A la matrice de f sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En tant que matrice à coefficients complexes, A possède au moins une valeur propre complexe α, qui n'est pas réelle dans ce cas. On écrit alors $\alpha = \lambda + i\mu$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\mu \neq 0$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \alpha X$. En écrivant $X = U + iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'égalité $AX = \alpha X$ équivaut à $AU + iAV = (\lambda + i\mu)(U + iV) = \lambda U - \mu V + i(\mu U + \lambda V)$, ou encore aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} AU &= \lambda U - \mu V\,, \\ AV &= \mu U + \lambda V\,. \end{aligned}$$

Si $U = 0$, alors $0 = -\mu V$ d'après la première équation et, comme $\mu \neq 0$, on trouve aussi $V = 0$: dans ce cas, $X = U + iV = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle X est un vecteur propre. Si $V = 0$, la deuxième équation ci-dessus donne $\mu U = 0$, et on conclut là encore à une contradiction. Par suite, ni U ni V n'est nul.

En notant u (respectivement v) le vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ dont la colonne des composantes dans la base canonique est U (respectivement V), on obtient la seconde assertion de l'énoncé.

789. **RMS 2007 903 TPE PSI**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \operatorname{Ker} u\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ dont on donnera la dimension.

Solution. — Soit H un supplémentaire de G dans E (qui existe car E est de dimension finie). On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathcal{L}(H, F) & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ & & u & \mapsto & (x = y + z \mapsto u(z))\,, \end{array}$$

où $x = y + z$ est l'unique décomposition d'un vecteur de E sous la forme d'une somme $y + z$ avec $y \in G$ et $z \in H$. Voici trois propriétés de φ, qui résolvent l'exercice.

– Elle est linéaire : si u et v sont deux éléments de $\mathcal{L}(H, F)$, si α et β sont deux scalaires, si $x = y + z$ est un vecteur quelconque de E décomposé suivant la somme directe $G \oplus H$, alors

$$\varphi(\alpha u + \beta v)(x) = (\alpha u + \beta v)(z) = \alpha u(z) + \beta v(z) = \alpha\varphi(u)(x) + \beta\varphi(v)(x) = [\alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)](x)\,,$$

ce qui prouve que les applications linéaires $\varphi(\alpha u + \beta v)$ et $\alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$ sont les mêmes.

– Son image est A : en effet, pour toute $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $y \in G$, on a $\varphi(u)(y) = \varphi(u)(y + 0) = u(0) = 0$, ce qui montre que $G \subset \operatorname{Ker} u$, donc que $\varphi(u) \in A$, donc que $\operatorname{Im}\varphi \subset A$. Réciproquement, si $v \in A$, l'application $u = v_{/H}$ appartient bien à $\mathcal{L}(H, F)$ et vérifie $\varphi(u) = v$. On en déduit que A est un sous-espace vectoriel, en tant qu'image d'un espace vectoriel par une application linéaire.

– Elle est injective : en effet, si $\varphi(u) = 0$, cela signifie que $u(z) = 0$ pour tout $z \in H$, c'est-à-dire que u est l'application nulle sur H, donc est l'élément nul de $\mathcal{L}(H, F)$. Il en résulte que la corestriction de φ à son image, qui est A, est un isomorphisme, et on en déduit que

$$\dim A = \dim \mathcal{L}(H, F) = (\dim E - \dim G)\dim F\,.$$

790. **RMS 2006 1045 TPE PSI**

Calculer, lorsque k et n sont des entiers tels que $0 \leqslant k < n - 1$, et x un nombre réel, le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \cdots & (n+1)^k \\ \vdots & & & & \vdots \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \cdots & (2n-1)^k \end{vmatrix}.$$

Solution. — La famille $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ avec $P_j = (X + j)^k$ est formée de n polynômes appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$, qui est de dimension $k + 1 < n$. Par suite, cette famille est liée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j P_j = 0$.

La colonne j (notée C_j) du déterminant proposé est constituée de $P_1(x), P_1(x + 1), \dots, P_1(x + n - 1)$ si $j = 1$, et de $P_j(0), P_j(1), \dots, P_j(n - 1)$ si $j \geqslant 2$, donc on a $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$, donc les colonnes du déterminant proposé sont liées. Ce déterminant est donc nul.

791. **RMS 2009 1091 ENSAM PSI (calcul formel)**

Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Solution. — On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constate que la matrice de l'énoncé, que l'on note A, vaut $aI_3 + bJ + cJ^2$. Il suffit que M commute avec J pour que M commute avec A, mais la réciproque dépend des valeurs de b et c (par exemple, s'ils sont tous deux nuls, A est une matrice d'homothétie et toute $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec A.

Maple donne la réponse en considérant les lettres a, b et c comme des indéterminées, donc dans le cas général lorsque ce sont des nombres réels. Voici les commandes utilisées (M désigne une matrice générique réelle d'ordre 3) :

```
with(linalg): A:=matrix(3,3,[a,b,c,c,a,b,b,c,a]); M:=matrix(3,3); C:=evalm(A&*M-M&*A);
systeme:={seq(seq(C[i,j]=0,i=1..3),j=1..3)}; inconnues:={seq(seq(M[i,j],i=1..3),j=1..3)};
solve(systeme,inconnues);
```

Voici le résultat, tel qu'indiqué par Maple :

$$M_{1,3} = M_{2,1}, M_{2,2} = M_{1,1}, M_{2,3} = M_{1,2}, M_{3,1} = M_{1,2}, M_{3,2} = M_{2,1}, M_{3,3} = M_{1,1}, M_{1,1} = M_{1,1}, M_{1,2} = M_{1,2}, M_{2,1} = M_{2,1}.$$

En éliminant les tautologies (les trois dernières égalités), on obtient trois séries d'égalités : $m_{1,1} = m_{2,2} = m_{3,3}$, que l'on note α, puis $m_{1,2} = m_{2,3} = m_{3,1}$, que l'on note β, et enfin $m_{1,3} = m_{2,1} = m_{3,2}$, que l'on note γ. Finalement, dans le cas général, M commute avec A si et seulement si

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

De façon plus abstraite, le commutant de la sous-algèbre $\mathbb{R}[J]$ est $\mathbb{R}[J]$ elle-même.

792. **RMS 2011 1071 TPE PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{tr} A = \operatorname{rg} A = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

Solution. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à A. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} u$, complétée par e_n pour former une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$, et soit B la matrice de u sur $\mathcal{B}$. Cette matrice est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

Deux matrices semblables ayant même trace, on doit avoir $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = b_n = 1$. On constate alors immédiatement que $B^2 = B$, donc que

$$A^2 = A\,.$$

793. **RMS 2008 970 TPE PSI**

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

Solution. — On écarte le cas $A = 0$, qui est banal. On raisonne par conditions nécessaires et suffisantes.

Analyse. Si X est solution $X = B - \operatorname{tr}(X)A = B + \lambda A$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Synthèse. Cherchons X sous la forme $B + \lambda A$. La trace étant linéaire, cette matrice est solution si et seulement si $B + \lambda A + (\operatorname{tr} B + \lambda \operatorname{tr} A)A = B + (\lambda[1 + \operatorname{tr} A] + \operatorname{tr} B)A = B$, ou encore $(\lambda[1 + \operatorname{tr} A] + \operatorname{tr} B)A = 0$. Comme on a supposé A non nulle, cela équivaut finalement à

$$\lambda[1 + \operatorname{tr} A] + \operatorname{tr} B = 0$$

On distingue alors trois cas :

(a) Si $\operatorname{tr} A = -1$ et $\operatorname{tr} B = 0$, l'équation a une infinité de solutions : $X = B + \lambda A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Si $\operatorname{tr} A = -1$ et $\operatorname{tr} B \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.

(c) Si $\operatorname{tr} A \neq -1$, l'équation a une unique solution : $X = B - \frac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A} A$.

Remarque. — On peut donner un tour plus algébrique à la résolution, en notant que l'application $f\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto X + \operatorname{tr}(X)A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, calculer son noyau dans un premier temps, puis utiliser le théorème de structure des solutions. En fait, la discussion menée ci-dessus fournit tous ces résultats : f est injective — donc bijective, d'où le cas (c) discuté ci-dessus — si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq -1$, et si $\operatorname{tr} A = -1$, alors $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par A, et $\operatorname{Im} f$ est un hyperplan. Comme $\operatorname{tr}(f(X)) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans ce cas, l'hyperplan en question est celui des matrices de trace nulle, d'où les résultats des cas (a) et (b).

794. **RMS 2008 971 ENSAM PSI**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX + XA$. Montrer que f est un endomorphisme et calculer sa trace.

Solution. — Le caractère linéaire de f est clair, et l'ensemble d'arrivée de f est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: la fonction f est bien un endomorphisme.

On note $C_k[A]$ (respectivement $L_k[A]$) les colonnes (respectivement les lignes) de la matrice A. On sait, ou on retrouve, que $AE_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf éventuellement la j-ème, qui vaut $C_i[A]$, et que $E_{i,j}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf éventuellement la i-ème, qui vaut $L_j[A]$. Par conséquent,

$$f(E_{i,j}) = \sum_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{(k,\ell),(i,j)} E_{k,\ell} = (a_{j,i} + a_{j,i})E_{i,j} + \sum_{(k,\ell)\neq(i,j)} \lambda_{(k,\ell),(i,j)} E_{k,\ell}\,.$$

Soit s la somme des n^2 éléments de A. On déduit du calcul ci-dessus que

$$\operatorname{tr} f = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{(i,j),(i,j)} = 2 \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{j,i} = 2s\,.$$

795. **RMS 2010 980 TPE PSI**

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $m_{i,j} = a_i/a_j$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Solution. — Voir aussi l'exercice 564 page 387).

On note C_j la colonne numéro j de M, et U la colonne — non nulle — de terme général a_i. Alors $C_j = U/a_j$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, ce qui montre que $\operatorname{rg} M = 1$. On connaît déjà une valeur propre de M : zéro, qui est d'ordre au moins $n-1$, puisque $E_0(M) = \operatorname{Ker} M = n-1$, d'après la formule du rang.

La dernière valeur propre est donnée par la trace : $\operatorname{tr} M = (n-1)0 + \lambda = n$, donc $\lambda = n \neq 0$. Alors $\dim E_n(M) = 1$, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut n, donc M est diagonalisable.

796. **RMS 2010 984 ENSEA PSI**

Trouver les $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - M^2 + M - I_n = 0$.

Solution. — En tant que matrice symétrique réelle, M est diagonalisable. Ses valeurs propres (réelles) sont par ailleurs parmi les racines du polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X-1) + (X-1) = (X^2+1)(X-1)$. Par suite, M est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre réelle, qui vaut 1, donc $M = I_n$.

797. **RMS 2010 985 Télécom Sud Paris PSI**

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}$. Montrer que n est pair.

Solution. — On déduit de l'hypothèse que $\det(f\circ f) = (\det f)^2 = \det(-\mathrm{id}) = (-1)^n \geqslant 0$, donc que n est pair.

798. **RMS 2009 1093 Télécom Sud Paris PSI**

Calculer $\begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. — On note A la matrice en question, u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et on les réduit. Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= (4-X)(-4-X)(3-X) - 30 - 30 - 6(-4-X) + 10(4-X) + 15(3-X)\,,\\ &= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1\,,\\ &= -(X-1)^3\,.\end{aligned}$$

Comme le spectre de A vaut $\{1\}$ et que $A \neq I_3$, elle n'est pas diagonalisable. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. On calcule $E_1(A)$:

$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3x - 15y + 3z &=& 0,\\ x - 5y + z &=& 0,\\ 2x - 10y + 2z &=& 0, \end{array}\right. \iff x - 5y + z = 0\,.$$

On obtient un plan, dont on nomme (e'_1, e'_2) une base. Soit e'_3 tel que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Si P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $A' := P^{-1}AP$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour certains x et y réels. On pourrait en rester là (le calcul de A'^n étant relativement aisé), mais on peut aller plus loin dans la réduction de A, en cherchant un vecteur e'_3 tel que $u(e'_3) = e'_2 + e'_3$. Pour cela, on nomme a, b et c les coordonnées de e'_2 et x, y, z celles de e'_3, et on cherche une solution de

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3(x-5y+z) &= a,\\ x-5y+z &= b,\\ 2(x-5y+z) &= c,\end{cases}$$

On voit que $a = 3b$ et $c = 2b$ est nécessaire, et qu'alors e'_2 appartient nécessairement à $E_1(u)$. On choisit par exemple $e'_2 = (3,1,2)$. Le système ci-dessus se réduit alors à l'unique équation $x - 5y + z = 1$, et on peut choisir $e'_3 = e_3$ [il est certain que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $e'_3 \notin E_1(u)$]. Il reste à choisir $e'_1 \in E_1(u)$ non colinéaire à e'_2 : par exemple, $e'_1 = (1,0,-1)$. Dans ce cas,

$$P = \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\1&-5&1\end{pmatrix}, \quad A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3 + E_{2,3}\,.$$

La matrice $E_{2,3}$ commutant avec I_3 et étant nilpotente d'ordre 2, la formule du binôme de Newton donne $(I_3 + E_{2,3})^n = I_3 + nE_{2,3}$, et on en déduit que

$$A^n = P(I_3 + E_{2,-3})^n P^{-1} = P(I_3 + nE_{2,3})P^{-1} = I_3 + nPE_{2,3}P^{-1} = \begin{pmatrix}1+3n & -15n & 3n\\ n & 1-5n & n\\ 2n & -10n & 1+2n\end{pmatrix}.$$

799. **RMS 2009 1094 Télécom Sud Paris PSI**

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}$.

Solution. — On note A la matrice triangulaire inférieure de l'énoncé et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On remarque que le spectre de A vaut $\{1,4\}$, que $E_1(A)$ [respectivement $E_4(A)$] est la droite engendrée par e_2 [respectivement par e_3]. En particulier, A n'est pas diagonalisable.

Analyse. Soient M une telle matrice, et λ une valeur propre complexe de M. Il existe donc un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Alors $M^2X = \lambda^2 X$, et on en déduit deux conséquences :
– le nombre λ^2 est une valeur propre de $M^2 = A$, donc $\lambda^2 \in \{1,4\}$, donc $\lambda \in \{-1,1,-2,2\}$;
– le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ est inclus dans $E_{\lambda^2}(A)$ [il s'agit des sous-espaces propres au sens réel].
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de M répétées avec multiplicité et rangées dans l'ordre croissant des valeurs absolues. La matrice M étant trigonalisable sur $\mathbb{R}$, puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$, ce qui implique que

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_3^2 = 4\,.$$

De plus, M n'est pas diagonalisable sinon A le serait, donc M ne peut avoir trois valeurs propres distinctes, donc $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_3 = 2\varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$, et on dispose des inclusions $E_{\lambda_1}(M) \subset E_1(A)$ et $E_{\lambda_3}(M) \subset E_4(A)$. Les sous-espaces propres de M étant au moins de dimension 1, et ceux de A étant des droites, on dispose finalement des égalités

$$E_{\lambda_1}(M) = E_1(A) \quad \text{et} \quad E_{\lambda_3}(M) = E_4(A)\,.$$

La matrice M a donc nécessairement la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ a & \lambda_1 & 0\\ b & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Synthèse. On calcule les valeurs de a et b en résolvant

$$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&4\end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & 0\\ 2a\lambda_1 & \lambda_1^2 & 0\\ b(\lambda_1+\lambda_3) & 0 & \lambda_3^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2a\lambda_1 & 1 & 0\\ b(\lambda_1+\lambda_3) & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à $a = 1/(2\lambda_1) = \lambda_1/2$, car $\lambda_1 = \pm 1$, et $b = 1/(\lambda_1 + \lambda_3)$, car il est impossible que le dénominateur soit nul. On peut alors dresser la liste des quatre solutions :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac12 & 1 & 0\\ \frac13 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac12 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\ -\frac12 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\ -\frac12 & -1 & 0\\ -\frac13 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

800. **RMS 2010 987 TPE PSI** .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ et n matrices $M_1, \dots, M_n$ dans $\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ tels que $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p M_i$.

Solution. — Dans un premier temps, on suppose que A est diagonale, ce que l'on écrit $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{i,i}$, où les $E_{i,j}$ pour $1 \leqslant i$ et $j \leqslant n$ désignent les matrices élémentaires d'ordre n. Les produits (donc aussi les puissances) de matrices diagonales s'effectuant terme à terme, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p E_{i,i} \, .$$

Les n premières équations ci-dessus disent que les matrices A^p pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$ appartiennent au sous-espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sous-espace est de dimension n, et on va montrer que la famille $(A^p)_{0 \leqslant p \leqslant n-1}$ en est une base. Comme elle est de cardinal n, il suffit de montrer que cette famille est libre. Pour cela, soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que $\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p A^p = 0$. Si Q désigne le polynôme $\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p X^p$, on vient de supposer que Q est un polynôme annulateur de A. Par suite, les n valeurs propres distinctes α_i de A sont racines de Q. Comme $\deg(Q) \leqslant n-1$, cela n'est possible que si $Q = 0$, donc si tous les λ_p sont nuls.
Il en résulte que $\mathcal{D}_n = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$, donc que les $E_{i,i}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$. La formule $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p E_{i,i}$ permet de conclure.
Dans un second temps, on ne suppose plus que A est diagonale. Comme elle possède n valeurs propres distinctes donc simples, elle est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. L'étude du cas précédent montre que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^p M_i \, ,$$

où $M_i = PE_{i,i}P^{-1} \in \mathrm{Vect}(PD^iP^{-1},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1) = \mathrm{Vect}(A^i,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

801. **RMS 2010 990 ENSAM PSI**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Exprimer le rang de M en fonction de celui de A^2. La matrice M peut-elle être diagonalisable ?

Solution. — On commence par déterminer le noyau de M (on confondra, dans la rédaction qui suit, les matrices avec les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{C}^{2n}$ qui leur sont canoniquement associés). Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. Alors

$$\begin{aligned} MZ = 0 \iff \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} AX - Y & = & 0 \, , \\ AY & = & 0 \, , \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & AX \, , \\ A^2X & = & 0 \, , \end{array} \right. \\ \iff X \in \mathrm{Ker}\, A^2 \quad \text{et} \quad Y = AX \, . \end{aligned}$$

L'application, manifestement linéaire, $X \in \mathrm{Ker}\, A^2 \mapsto \begin{pmatrix} X \\ AX \end{pmatrix}$ est donc une bijection, donc un isomorphisme. Par suite, $\dim(\mathrm{Ker}\, M) = \dim(\mathrm{Ker}\, A^2)$, et la formule du rang donne

$$\mathrm{rg}\, M = 2n - \dim(\mathrm{Ker}\, A^2) = n + \mathrm{rg}\, A^2 \, .$$

On remarque ensuite que $\chi_M = (\chi_A)^2$, donc que A et M ont le même spectre. De plus, si m_λ est la multiplicité de λ dans χ_A, la multiplicité de λ dans χ_M vaut $2m_\lambda$. Le corps de base étant $\mathbb{C}$, les polynômes caractéristiques χ_M et χ_A sont scindés, donc M est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_\lambda(M)) = 2m_\lambda$ pour toute valeur propre λ de M.
Or l'étude menée au début de l'exercice, appliquée avec $A - \lambda I_n$ à la place de A, c'est-à-dire avec $M - \lambda I_{2n}$ à la place de M, montre que

$$\dim(E_\lambda(M)) = \dim(\mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2) \, .$$

La condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M est donc $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2) = 2m_\lambda$ pour toute valeur propre λ de A. Or ceci ne se produit jamais, en vertu d'un autre argument : d'après la forme de M, le sous-espace $F = \mathbb{C}^n \times \{0\}^n$ de $\mathbb{C}^{2n}$ est stable par M. Par conséquent, si M est diagonalisable, sa restriction à F l'est aussi, c'est-à-dire que A est diagonalisable. Dans ce cas, en raisonnant sur une matrice diagonale semblable à A, on montre que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2$, donc que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A, \quad \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^2) = m_\lambda \neq 2m_\lambda \, .$$

On conclut que M n'est jamais diagonalisable.

802. **RMS 2010 994 TPE PSI**

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$, de norme associée $\|\ \|$.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$. Montrer que $|\det M| \leqslant \prod_{i=1}^n \|C_i\|$.

(b) En déduire que le volume d'un parallélépipède de côtés donnés est maximal s'il est droit.

Solution. —

(a) Si M n'est pas inversible, $\det(M) = 0$ et l'inégalité est banale.

Si M est inversible, la famille $\mathcal{C}$ des colonnes de M est une base de $\mathbb{R}^n$, identifié avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par F_k le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_k)$ de $\mathbb{R}^n$, et par p_k le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur F_k. L'application du processus d'orthogonalisation de Gram et Schmidt (et non d'orthonormalisation) à cette famille consiste à fabriquer la base orthogonale $(C'_1, \ldots, C'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ où $C'_1 = C_1$ et $C'_k = C_k - p_{k-1}(C_k)$ pour tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.

Comme $p_{k-1}(C_k) \in F_{k-1}$, ce processus de Gram et Schmidt est un algorithme du pivot n'utilisant que des transformations élémentaires de type I, donc laisse invariant le déterminant : si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$\det M = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(C'_1, \ldots, C'_n)\,.$$

Soit alors $\mathcal{B}'$ la base *orthonormale* formée des vecteurs $C'_k/\|C'_k\|$. Suivant que $\mathcal{B}'$ est une base directe ou non, on a $\det_{\mathcal{B}} = \pm \det_{\mathcal{B}'}$ (formules de changement de base entre deux bases orthonormales), et alors

$$\det M = \pm \det_{\mathcal{B}'}(C'_1, \ldots, C'_n) = \pm \|C'_1\| \ldots \|C'_n\|\,.$$

Il est clair que $\|C'_1\| = \|C_1\|$ et, pour $2 \leqslant k \leqslant n$, l'égalité $C_k = C'_k + p_{k-1}(C_k)$ montre que $\|C_k\|^2 = \|C'_k\|^2 + \|p_{k-1}(C_k)\|^2$, donc que $\|C'_k\| \leqslant \|C_k\|$ (en effet, les vecteurs $C_k - p_{k-1}(C_k)$ et $p_{k-1}(C_k)$ sont orthogonaux, et il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore). On en déduit que

$$|\det M| = \prod_{i=1}^n \|C'_i\| \leqslant \prod_{i=1}^n \|C_i\|\,.$$

(b) On connaît l'interprétation du déterminant sur une base orthonormale directe (ou produit mixte, noté Det avec une majuscule) dans un espace euclidien orienté : en dimension 2, la valeur absolue $|\mathrm{Det}(x, y)|$ est l'aire géométrique du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y, et, en dimension 3, le nombre $|\mathrm{Det}(x, y, z)|$ est le volume géométrique du parallélépipède construit sur les vecteurs x, y et z.

L'énoncé se place dans le dernier cas cité, et la question (a) dit que le volume V du parallélépipède construit sur x, y et z vaut $|\mathrm{Det}(x, y, z)|$ et qu'il est majoré par $\|x\|\,\|y\|\,\|z\|$. Cette majoration est une égalité si et seulement si toutes les inégalités $\|C'_k\| \leqslant \|C_k\|$ de la question précédente sont des égalités, c'est-à-dire si et seulement si $p_{k-1}(C_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$, ou encore si et seulement si la famille $(C_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale.

En revenant aux notations de ce paragraphe, $V \leqslant \|x\|\,\|y\|\,\|z\|$, avec égalité si et seulement si le parallélépipède dont les longueurs des côtés sont $\|x\|$, $\|y\|$ et $\|z\|$ est droit, ce qui établit la propriété voulue.

Analyse

803. **RMS 2010 998 ENSEA PSI**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et F un sous-espace de E tel que $(*)\ \forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leqslant n\|f\|_2$.

(a) Montrer que $F \neq E$.

(b) Montrer que F est de dimension finie $\leqslant n^2$.

(c) Donner un exemple de sous-espace F de dimension n vérifiant $(*)$.

Solution. —

(a) Pour $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction affine par morceaux (donc continue) définie par $f(0) = n$ et $f(1/n^3) = f(1) = 0$. Alors $\|f\|_\infty = n$ et

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{1/n^3} (-n^4t + n)^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\frac{(-n^4t + n)^3}{-3n^4}\right]_0^{1/n^3}} = \frac{1}{\sqrt{3n}}\,.$$

L'inégalité $(*)$ pour f_n s'écrit $n \leqslant \sqrt{n/3}$, et elle est fausse pour n assez grand, donc $F \neq E$.

(b) Soit p le cardinal d'une famille libre de F, et G le sous-espace vectoriel de dimension p de F engendré par cette famille. La norme $\| \ \|_2$ est euclidienne, et il existe une base orthonormale $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de G. L'inégalité $(*)$ élevée au carré pour les fonctions g de F donne,

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\quad \forall y\in[0,1],\quad \Bigl(\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x)\Bigr)^2 \leqslant \Bigl\|\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i\Bigr\|_\infty^2 \leqslant n^2\Bigl\|\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i\Bigr\|_2^2 = n^2\sum_{i=1}^p \lambda_i^2\,.$$

On fixe $x\in[0,1]$, et on applique l'inégalité ci-dessus à $\lambda_i=g_i(x)$ et à $y=x$. On obtient $(\sum_{i=1}^p g_i^2(x))^2\leqslant n\sum_{i=1}^p g_i^2(x)$. Si la somme $\sum_{i=1}^p g_i^2(x)$ n'est pas nulle, on peut simplifier pour obtenir

$$\sum_{i=1}^p g_i^2(x)\leqslant n^2\,,$$

et si elle est nulle, l'inégalité ci-dessus est clairement vraie. Comme x est quelconque, on peut intégrer sur $[0,1]$ pour obtenir $\|\sum_{i=1}^p g_i\|_2^2\leqslant n^2$. Mais comme la famille $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est orthonormale, $\|\sum_{i=1}^p g_i\|_2^2=p$, donc $p\leqslant n^2$. Cette inégalité prouve que le cardinal des familles libres de F est majoré (par n^2), donc que F est de dimension finie, et de plus

$$\dim F\leqslant n^2\,.$$

(c) ? ? à terminer

804. **RMS 2010 1001 ENSAM PSI (calcul formel)**

Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 3–périodique et telle que $\forall x\in[0,3[,\ f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

(a) À quelle condition f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(b) À quelle condition f admet-elle un extremum en 1 valant 4 ?

(c) À quelle condition f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(d) Ces conditions étant remplies, représenter f sur $[-3,6]$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Solution. — On commence par définir une fonction g par `g:=x->a*y**3+b*y**2+c*y+d`; l'intérêt principal de g est de pouvoir calculer formellement les dérivées de f à droite ou à gauche en les points de $3\mathbb{Z}$, comme on le verra à la question (c). Ensuite, si $x\in\mathbb{R}$, il s'écrit de manière unique sous la forme $3k+y$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $y\in[0,3[$. Alors $f(x)=f(y)=ay^3+by^2+cy+d$. Or $x=3k+y$ équivaut à $x/3=k+(y/3)$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $y/3\in[0,1[$. On reconnaît alors que k est la partie entière de $x/3$, et que $y/3$ en est sa partie décimale. Par suite, on définit f dans une session Maple par

```
f:=proc(x)
local y; y:=3*(x/3-floor(x/3)); g(y);
end proc;
```

On prendra garde que la commande `frac` de Maple ne coïncide pas avec la partie décimale pour les nombres négatifs, ce qui explique que la définition correcte de la partie décimale du nombre réel u soit `u-floor(u)`, comme indiqué dans la procédure ci-dessus.

(a) La périodicité de f et son caractère polynomial sur $[0,3[$ montre qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue à gauche en zéro, c'est-à-dire si et seulement si

$$f(0)=d=\lim_{0^-}f=\lim_{3^-}f=27a+9b+3c+d\,,\quad\text{ou encore}\quad 9a+3b+c=0\,.$$

Cette condition apparaît dans la session Maple après `f(0)=limit(f(x),x=0,left)`. J'ignore comment demander la simplification automatique (sans résolution) d'une telle équation, pourtant très simple (on peut bien entendu exiger que Maple transpose le membre de gauche vers celui de droite, puis divise par 3, mais cela revient à la résolution manuelle, qui est de toutes façons plus rapide dans ce cas).

(b) On suppose dans cette question que le mot extremum désigne un extremum *local* et *strict*, ce qui suppose que f ne soit pas localement constante (donc globalement, puisqu'elle est périodique et polynomiale sur une période).

Pour que les exigences de l'énoncé soient satisfaites, il faut que $f(1)=4$ et que $f'(1)=0$. On suppose ces deux conditions remplies. Pour s'assurer ensuite que f possède bien un extremum local en 1, on utilise la formule de Taylor pour f en 1 à l'ordre 3 : comme f est polynomiale de degré au plus 3, cette formule est exacte et s'écrit

$$f(x)=4+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3\,.$$

– Si $f''(1) \neq 0$, il est clair que $f(x) - f(1) = f(x) - 4$ est localement du signe de $\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$ au voisinage de 1, donc non nul de signe constant au voisinage épointé de 1 : la fonction f y présente bien un extremum local strict.
– Si $f''(1) = 0$, alors $f(x) - f(1)$ est constante si $f^{(3)}(1) = 0$, ou bien change strictement de signe de part et d'autre de 1 si $f^{(3)}(1) \neq 0$: dans ce cas, f n'a pas d'extremum strict en 1.

On conclut alors que la condition nécessaire et suffisante recherchée est donnée par le système

$$\begin{aligned} f(1) &= a+b+c+d = 4\,, \\ f'(1) &= 3a+2b+c = 0\,, \\ f''(1) &= 6a+2b \neq 0\,. \end{aligned}$$

Ce système est obtenu dans la session Maple en validant `S:={f(1)=4,D(f)(1)=0,(D@@2)(f)(1)<>0}`.

(c) Il faut déjà que f soit continue : voir la question (a). Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et, compte-tenu de sa périodicité, pour qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que la dérivée à gauche $f'_g(0)$ [qui vaut aussi $f'_g(3)$] soit égale à la dérivée à droite $f'_d(0)$:

$$27a + 6b + c = c\,, \quad \text{ou encore} \quad 9a + 2b = 0\,.$$

Cette condition est obtenue en écrivant `D(g)(3)=D(g)(0)`.

(d) On définit puis on résout le système de toutes les conditions imposées aux paramètres a, b, c et d en validant `T:=S union {f(0)=g(3),D(g)(3)=D(g)(0)}; solve(T,{a,b,c,d})`. Maple ne donne pas de réponse, ce qui signifie qu'il n'y a pas de solution, ou plus exactement que la (les) solution(s) satisfaisant les égalités du système `T` ne satisfait (satisfont) pas l'inégalité qu'il contient. En effet, `T1:=T minus {(D@@2)(f)(1)<>0}; solve(T1,{a,b,c,d})` donne

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 4.$$

En d'autres termes, seule la fonction f constante égale à 4 satisfait les exigences de l'énoncé. Il n'est pas utile de la représenter pour conclure qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

805. **RMS 2011 1085 ENSAM PSI (calcul formel)**

Soit $f\colon x \mapsto Q(x)\arctan(x) - P(x)$, avec $Q\colon x \mapsto 1 + ax^2 + bx^4$ et $P\colon x \mapsto x(1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)$. Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que $f(x)$ soit, en zéro, un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible. Trouver, pour ces valeurs, un encadrement de $\arctan(x) - P(x)/Q(x)$ sur $[0, 1]$.

Solution. — On rappelle qu'il faut utiliser les commandes `taylor` ou `series` de Maple avec un argument entier égal à $n+1$ si l'on veut que l'ordre du développement soit égal à n. On valide

```
P:=x*(1+a*x+b*x**2+c*x**3+d*x*4);Q:=1+a*x**2+b*x**4;f:=Q*arctan(x)-P;
taylor(f,x=0,6);R:=convert(%,polynom);
systeme:={seq(coeff(R,x,k)=0,k=0..5)};inconnues:={a,b,c,d};solutions:=solve(systeme,inconnues);
```

L'ordre 5 du développement limité a été obtenu par tâtonnements, de manière à obtenir autant de coefficients non nuls que d'inconnues dans le problème, à savoir 4. Dans ce cas,

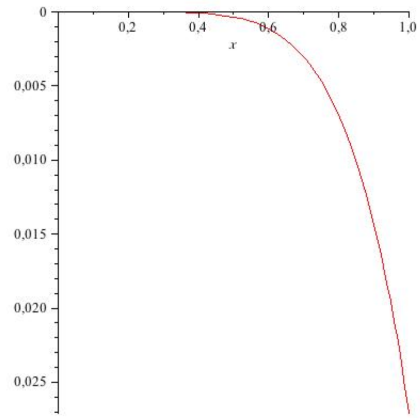
$$R = (-a-4d)x^2 + \left(-\frac{1}{3} + a - b\right)x^3 - cx^4 + \left(\frac{1}{5} + b - \frac{a}{3}\right)x^5$$

et l'unique solution du système (qui annule les 4 coefficients ci-dessus) est

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{2}{15}, \quad c = 0, \quad d = -\frac{1}{20}\cdot$$

Pour attribuer à a, b c et d les valeurs ci-dessus, on valide ensuite `assign(solutions)`. On définit la fonction $g\colon x \mapsto \arctan(x) - P(x)/Q(x)$, et on demande son graphe sur $[0, 1]$. Il apparaît que g décroît de $g(0) = 0$ à $g(1) \approx -0,027$, comme le montrent les instructions suivantes :

```
g:=arctan(x)-P/Q;plot(g,x=0..1);evalf(subs(x=1,g));
```



Si l'on veut une preuve guidée des affirmations qui précèdent, on demande le domaine de définition de g grâce à `solve(Q=0,x);map(evalf,[%])}` : on obtient deux racines imaginaires pures conjuguées et deux racines réelles opposées, la racine positive valant environ $1,89$. Par suite, g est définie sur $[0,1]$ et la question de l'énoncé fait sens. Le calcul simplifié de la dérivée de g, obtenue en validant `normal(diff(g,x))`, donne :

$$\forall x \in [0,1], \quad g'(x) = \frac{4x^6(-23+2x^2)}{(1+x^2)(-15-3x^2+2x^4)^2}.$$

Cette dérivée est clairement négative sur $[0,1]$, ce qui confirme l'encadrement

$$\forall x \in [0,1], \quad g(1) \approx -0,027 \leqslant g(x) = \arctan(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant g(0) = 0.$$

806. **RMS 2008 977 TPE PSI**

Déterminer la limite de $[(2n)!/n!n^n]^{1/n}$.

Solution. — Voir l'exercice 686 page 447.

807. **RMS 2007 914 TPE PSI**

Pour $n \geqslant 2$, soit $a_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$. Nature de la série de terme général $1/a_n$?

Solution. — Posons $f(t) = (\ln t)^2$ pour tout $t \geqslant 1$.

On définit ainsi une fonction continue et croissante. Par suite, $\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \geqslant 2$, donc $\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a_k \leqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration parties fournit une primitive de f : il s'agit de $t \mapsto \ln t(t\ln t - t) - (t\ln t - t) + t$. On en déduit alors que

$$a_n \sim n(\ln n)^2$$

Alors $1/a_n \sim g(n)$ avec $g(t) = 1/[t(\ln t)^2]$. Une primitive de g est $t \mapsto -1/\ln t$, ce qui montre que g est intégrable sur $[2,+\infty[$: comme g est par ailleurs décroissante, le théorème de comparaison série-intégrale affirme que $\sum g(n)$ est convergente. On en déduit que $\sum 1/a_n$ converge.

Remarque. — On peut reconnaître, dans $\sum g(k)$, une série de Bertrand convergente.

808. **RMS 2011 1082 TPE PSI**

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Nature de la série de terme général $v_n = u_n e^{-u_n}/n^2$?

Solution. — Soit $f\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto xe^{-x}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. On conclut que $f \geqslant 0$ avec un maximum en 1, qui vaut $1/e$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1/en^2$, donc $\sum u_n$ converge.

809. **RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \cos(u_{n-1})/n$. Nature de la série de terme général u_n ?

Solution. — Pour $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant 1/n$, donc la suite de terme général u_n tend vers zéro, donc on dispose du développement limité $\cos(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}^2/2 + \mathrm{o}(u_{n-1})^2$. Par suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n u_{n-1}^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right) = x_n + y_n + \mathrm{o}(y_n)\,,$$

avec des notations évidentes pour les suites (x_n) et (y_n). La série $\sum x_n$ converge, par application du théorème spécial des séries alternées. Comme $|y_n| \leqslant 1/[2n(n-1)^2]$ pour tout $n \geqslant 2$, la série $\sum y_n$ converge absolument, et il en est de même de $\sum \mathrm{o}(y_n)$.

Finalement, $\sum u_n$ converge (elle est en fait semi-convergente).

810. **RMS 2011 1083 ENSAM PSI**

Soient a un réel quelconque et $u_n = (e - (1+1/n)^n)^a$.

(a) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

(b) Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Solution. — Comme $(1+1/n)^n < e$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme u_n est bien défini.

(a) On pose $c = (e/2)^a$ et $d = -11ac/12$. Un développement limité quand n tend vers l'infini donne

$$\begin{aligned} u_n &= \left(e - \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)^a = \left(e - \exp\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)^a \\ &= \left(e - e\left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{8n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right)^a = \left(\frac{e}{2n}\left[1 - \frac{11}{12n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)^a, \\ &= \frac{c}{n^a} \exp\left(a \ln\left[1 - \frac{11}{12n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) = \frac{c}{n^a} \exp\left(-\frac{11a}{12n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \\ &= \frac{c}{n^a} + \frac{d}{n^{a+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{a+2}}\right). \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim c/n^a$ quand n tend vers l'infini, et qu'il s'agit d'un équivalent positif, $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$a > 1.$$

(b) On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $w_n = v_n - (-1)^n c/n^a$. Une condition nécessaire de convergence de la série $\sum v_n$ est que $\lim v_n = 0$. Comme $v_n \sim (-1)^n/n^a$, cette condition nécessaire est réalisée si et seulement si $a > 0$.

On suppose désormais $a > 0$. Alors la série de terme général $(-1)^n c/n^a$ converge, en vertu du théorème spécial des séries alternées. Comme $|w_n| \sim |d|/n^{a+1}$ et que $a > 0$, la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente. On en déduit que la série de terme général $v_n = (-1)^n c/n^a + w_n$ est convergente.

En conclusion, $\sum (-1)^n u_n$ converge si et seulement si

$$a > 0.$$

811. **RMS 2008 913 TPE PSI**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]2, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Étudier la série $\sum_{n\geqslant 0}(2 - u_n)$.

Solution. — On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$. On montre aisément que $[2, +\infty[$ est un intervalle stable par f où f est croissante, donc que (u_n) est monotone, et comme $f(x) \leqslant x$ sur cet intervalle, (u_n) décroît. Comme elle est minorée, elle converge. Comme f est continue, la limite de la suite est un point fixe de f. Or il n'y en a qu'un, qui est 2. Par suite, (u_n) converge vers 2, donc le terme général de la série à étudier tend vers zéro.

On estime maintenant la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers 2. On majore $f'(x) = (2\sqrt{2+x})^{-1}$ par $1/4$ sur $[2, +\infty[$, donc f est 1/4-lipschitzienne sur $[2, +\infty[$. Cela entraîne que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - 2| = |f(u_{n-1}) - f(2)| \leqslant \frac{1}{4}|u_{n-1} - 2|\,,$$

puis, par une récurrence immédiate, que $|u_n - 2| \leqslant c/4^n$, où c désigne la constante $|u_0 - 2|$. La série géométrique de raison $1/4$ étant convergente, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0}(u_n - 2)$ converge absolument, avec une vitesse au moins géométrique de raison $1/4$.

812. **RMS 2010 1003 Télécom Sud Paris PSI**

Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln(\frac{x}{1-e^{-x}})\frac{e^{ax}}{x}\,\mathrm{d}x$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Solution. — On pose $f_a\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(\frac{x}{1-e^{-x}})\frac{e^{ax}}{x}$. Les développements limités des fonctions usuelles montrent qu'au voisinage de zéro,

$$f_a(x) = \ln\left(\frac{x}{1 - [1 - x + x^2/2 + \mathrm{o}(x^2)]}\right)\frac{1+\mathrm{o}(1)}{x} = \ln\left(\frac{1}{1 - x/2 + \mathrm{o}(x)}\right)\frac{1+\mathrm{o}(1)}{x} = (x/2 + \mathrm{o}(x))\,\frac{1+\mathrm{o}(1)}{x} \sim \frac{1}{2}\,.$$

L'intégrale proposée est donc faussement impropre en zéro. Au voisinage de $+\infty$, on dispose de l'équivalent $f_a(x) \sim \frac{\ln x}{x}e^{ax}$. On discute ensuite suivant le signe de a.

– Si $a < 0$, alors $x^2 f_a(x) \sim_{+\infty} (x\ln x)e^{ax}$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale proposée est absolument convergente.

– Si $a=0$, alors $f_0(x)\sim\frac{\ln x}{x}\geqslant\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale proposée diverge.
– Si $a>0$, alors $f_a(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale proposée diverge.

813. **RMS 2010 1004 Petites Mines PSI**
Nature de $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\ln(\frac{2+x}{1+x})\,\mathrm{d}x$.

Solution. — La fonction $f\colon x\in\,]0,+\infty[\,\mapsto\frac{\arctan x}{x}\ln(\frac{2+x}{1+x})$ est prolongeable par continuité en zéro en posant $f(0)=\ln 2$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(\frac{2+x}{1+x})=\ln(\frac{1+2/x}{1+1/x})=\ln((1+2/x)(1-1/x+\mathrm{o}(1/x))=\ln(1+1/x+\mathrm{o}(1/x))=1/x+\mathrm{o}(1/x)$, donc
$$f(x)\sim\frac{\pi}{2x^2}\ ,$$
ce qui montre que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

814. **RMS 2011 1088 ENSAM PSI**
Soient $h\in\mathcal{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon x\in[0,\pi/2]\mapsto h(x)(\sin x)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. — Comme la suite de terme général $(\sin x)^n$ converge vers zéro pour tout $x\in[0,\pi/2[$ et vers 1 si $x=\pi/2$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers $h(\pi/2)\chi_{\{\pi/2\}}$, où $\chi_{\{\pi/2\}}$ est la fonction indicatrice du singleton $\{\pi/2\}$.
Cas où $h(\pi/2)\neq 0$. La convergence n'est pas uniforme sur $[0,\pi/2[$: sinon, le théorème d'interversion des limites donnerait
$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to(\pi/2)^+}f_n(x)=\lim_{x\to(\pi/2)^+}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to(\pi/2)^+}0=0.$$
Elle ne l'est pas *a fortiori* sur $[0,\pi/2]$. En revanche, si $a\in\,]0,\pi/2[$, on va montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$. La continuité de h sur le segment $[0,a]$ montre l'existence de $m=\max_{x\in[0,a]}|h(x)|$. Alors
$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]}=m(\sin a)^n,$$
qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, ce qui prouve la convergence uniforme annoncée.
Cas où $h(\pi/2)=0$. On va montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,\pi/2]$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Comme h est continue en $\pi/2$, il existe $a\in\,]0,\pi/2[$ tel que, pour tout $x\in[a,\pi/2]$, on ait $|h(x)-h(\pi/2)|=|h(x)|\leqslant\varepsilon$. L'étude du cas précédent montre qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0$, $\forall x\in[0,a]$, $|f_n(x)|\leqslant\varepsilon$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[a,\pi/2]$, $|f_n(x)|=|h(x)|(\sin x)^n\leqslant|h(x)|\leqslant\varepsilon$, on en déduit que
$$\forall n\geqslant n_0,\quad\|f_n\|_{\infty,[0,\pi/2]}\leqslant\varepsilon,$$
ce qui établit la convergence uniforme annoncée.

815. **RMS 2010 1005 Petites Mines PSI**
Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\arccos(\cos(nx))}{n!}$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de f. Calculer $f(\pi)$.
(b) Montrer que f est continue sur D. Pour quels $x\in D$ le théorème de dérivation terme à terme s'applique-t-il ?

Solution. —

(a) On pose $f_n(x)=\frac{\arccos(\cos(nx))}{n!}$, ce qui définit une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$. Comme arccos est bornée par π, l'égalité $\|f_n\|_\infty=\frac{\pi}{n!}$ montre que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (de plus elle est paire). Comme
$$f_n(\pi)=\frac{\arccos((-1)^n)}{n!}=\begin{cases}0&\text{si } n \text{ est pair,}\\ \pi/n!&\text{si } n \text{ est impair,}\end{cases}$$
on en déduit que $f(\pi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\pi}{(2k+1)!}=\pi\,\mathrm{sh}\,1$.

(b) La continuité à déjà été prouvée. La fonction f_0 est identiquement nulle. Pour $n\geqslant 1$, comme arccos est dérivable (et de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]-1,1[$ seulement, f_n est dérivable (et de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$. Comme $\frac{\pi}{n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, l'ensemble $\mathbb{R}\setminus(\cup_{n\geqslant 1}\frac{\pi}{n}\mathbb{Z})$ où *toutes* les f_n sont dérivables ne contient aucun sous-intervalle de longueur strictement positive, donc le théorème de dérivation ne peut s'appliquer (il s'agit d'un théorème global et non ponctuel : il vise à établir que la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle de longueur strictement positive*).

816. **RMS 2010 1006 TPE PSI**

Étudier la convergence et la continuité de $x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(x)^2}{\operatorname{ch}(nx)}$.

Solution. — On pose $f_n\colon x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}$. Il s'agit d'une fonction définie, continue et paire sur $\mathbb{R}$. On fixe $a>0$. L'inégalité et l'équivalent

$$\forall x \in [a,+\infty[\,, \quad |f_n(x)| \leqslant f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-na}$$

montrent que la série de terme général $\|f_n\|_{\infty,[a+\infty[}$ converge, donc que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc que la somme $f\colon x\mapsto \sin(x)^2\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a>0$, on en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme les f_n et le carré du sinus sont des fonctions paires, il en résulte que f est définie et continue (et paire) sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, comme $\sin(0)^2\times f_n(0)=0$ pour tout n, il est clair que $f(0)$ existe et vaut zéro. On a donc prouvé que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Il reste à étudier la continuité de f en zéro, et même en zéro à droite par parité. Pour cela, on utilise une comparaison série-intégrale consistant à remplacer la variable entière n par une variable réelle t. On fixe $x>0$, et on pose $g\colon t\in\mathbb{R}_+\mapsto 1/\operatorname{ch}(tx)$. Il s'agit d'une fonction continue et décroissante, et intégrable de la variable t, donc

$$\forall n\geqslant 1,\quad \int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t\,,\qquad \text{et par suite}\qquad \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t - f_0(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or (voir le rappel ci-dessous) $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/\operatorname{ch}(tx) = [(2/x)\arctan(e^{tx})]_{t=0}^{+\infty} = \pi/(2x)$. On en déduit que

$$\forall x>0,\quad \frac{\pi\sin(x)^2}{2x} - \sin(x)^2 \leqslant f(x) = \sin(x)^2\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{\pi\sin(x)^2}{2x}\,.$$

Comme $\sin x\sim x$ au voisinage de zéro, $\pi\sin(x)^2/(2x)\sim \pi x/2$ au voisinage de zéro, et on déduit de l'encadrement ci-dessus que $f(x)$ tend vers $f(0)=0$ quand x tend vers zéro à droite, donc que f est continue en zéro.

Rappel. — Une primitive de $u\mapsto 1/\operatorname{ch} u$ est $u\mapsto 2\arctan(e^u)$. Pour le retrouver, effectuer le changement de variable $y=e^u$ dans l'intégrale $\int_0^t \mathrm{d}u/\operatorname{ch} u$. On obtient $\int_0^t \mathrm{d}u/\operatorname{ch} u = \int_0^t 2\,\mathrm{d}u/(e^u+e^{-u}) = \int_1^{e^t} 2\,\mathrm{d}y/(y^2+1) = 2\arctan(e^t)-\pi/2$.

817. **RMS 2008 982 TPE PSI**

Soient $a\in\mathbb{R}$ et (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$. Montrer que la série de terme général f_n converge et calculer sa somme.

Solution. — On fixe un réel x et on note $[\alpha,\beta]$ la segment $[a,x]$ ou $[x,a]$ suivant les cas. La fonction continue f_0 est bornée sur le segment $[\alpha,\beta]$: il existe $M_x\in\mathbb{R}$ tel que pour tout t entre a et x, on ait $|f_0(t)|\leqslant M_x$. On montre alors par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[\alpha,\beta],\quad |f_n(t)|\leqslant M_x\frac{|t-a|^n}{n!}$$

Pour $n=0$, c'est la définition même de M_x. Si la propriété est vraie à l'ordre n, alors

$$|f_{n+1}(t)| \leqslant \left|\int_a^t |f_n(u)|\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M_x\left|\int_a^x \frac{|u-a|^n}{n!}\,\mathrm{d}u\right| = M_x\left|\int_a^x \frac{(u-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}u\right| = M_x\left|\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

pour tout t entre a et x : c'est bien la propriété au rang $n+1$.

On en déduit que $\|f_n\|_{\infty,[\alpha,\beta]}\leqslant M_x|x-a|^n/n!$. La série de terme général $|x-a|^n/n!$ étant convergente, on en déduit que $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[\alpha,\beta]$, et en particulier, $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sa somme.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1}\colon x\mapsto\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f_n est continue, et $f_{n+1}'=f_n$. L'étude faite ci-dessus montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n+1}'$ est normalement convergente sur $[\alpha,\beta]$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n+1}$ est simplement convergente. On en déduit que $T:=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}=S-f_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $T'=(f-f_0)'=f=T+f_0$ sur le segment $[\alpha,\beta]$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier, vu la construction de $[\alpha,\beta]$. Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle

$$T'-T=f_0$$

avec la condition initiale $T(a)=0$, puisque $f_n(a)=0$ pour tout $n\geqslant 1$. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $x\mapsto e^x(\int_a^x e^{-t}f_0(t)\,\mathrm{d}t+c)$, ou c est une constante réelle. La condition initiale donne $c=0$. Finalement,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x)+T(x) = f_0(x)+e^x\int_a^x e^{-t}f_0(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

818. **RMS 2008 984 TPE PSI**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n diverge. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n/S_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux $a_n z^n$ et $S_n z^n$.

Solution. — On note R_a et R_S les deux rayons de convergence à comparer, et on appelle f et S les sommes respectives des deux séries entières sur leur disque ouvert de convergence. On va montrer que

$$R_a = R_S\,.$$

Comme a_n/S_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, $|a_n| \leqslant |S_n|$ à partir d'un certain rang, donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit que $|a_n z^n| \leqslant |S_n z^n|$ à partir d'un certain rang.

(a) L'inégalité ci-dessus montre que si $|z| < R_S$, alors la suite de terme général $a_n z^n$ est bornée donc $|z| \leqslant R_a$. On en déduit que $R_S \leqslant R_a$.

(b) L'inégalité inverse résulte de l'observation suivante : la suite (S_n) est le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite constante égale à 1, puisque $S_n = \sum_{k=0}^n a_k \times 1$. Soit alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$. Comme la série de terme général a_n diverge, R_a est au plus égal à 1, donc $|z| < 1$. Par conséquent les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ convergent absolument. Le théorème relatif au produit de Cauchy affirme alors que la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ converge absolument, donc que $|z| \leqslant R_S$, ce qui prouve que $R_a \leqslant R_S$

On conclut que $R_a = R_S$ comme annoncé. De plus $S(z) = f(z)/(1-z)$ pour tout z tel que $|z| < R_a = R_S$.

Remarques. — 1) L'hypothèse selon laquelle les a_n sont des réels positifs n'intervient pas, et il suffit que $a_n = \mathrm{O}(S_n)$, ce qui peut s'écrire sans faire intervenir le quotient a_n/S_n, donc sans se préoccuper de la nullité éventuelle de S_n (l'hypothèse $a_n = \mathrm{o}(S_n)$ de l'énoncé est superflue).

2) Il suffit que les séries $f(z)$ et $S(z)$ convergent pour que la relation $S(z) = f(z)/(1-z)$ soit vérifiée. En effet, on a dans ce cas $S(z) = S_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} S_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + S_{n-1})z^n = f(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1}z^n = f(z) + zS(z)$, d'où le résultat.

819. **RMS 2008 985 Télécom Sud Paris PSI**

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière de terme général $[(2n+1)!/(n!)^2]x^{2n}$.

Solution. — Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = [(2n+1)!/(n!)^2]x^{2n}$, et on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+3)!(n!)^2}{(2n+1)!(n+1)!^2}x^2 = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = \frac{4n+6}{n+1}x^2\,.$$

La limite de cette quantité pour n tendant vers l'infini est $4x^2$. La règle de d'Alembert dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument si $4x^2 < 1$ et diverge grossièrement si $4x^2 > 1$. On en déduit que le rayon de convergence recherché est $1/2$.

Pour $|x| < 1/2$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}[(2n+1)!/(n!)^2]x^{2n}$, et on note F la primitive nulle en zéro de f. Le cours affirme que F est développable en série entière avec le même rayon de convergence que f :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\,, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n+1}$$

On pose $G(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}(y/4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y_n$, dont le rayon de convergence est égal à 1, de sorte que $F(x) = xG(-4x^2)$ pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$. On reconnaît ensuite a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\times 2\times 1}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\times 3\times 1}{2^n n!}\,, \\ &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-[n-1])}{n!} = \binom{-1/2}{n}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $G(y) = (1+y)^{-1/2}$, puis $F(x) = x(1-4x^2)^{-1/2}$, puis

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\,, \quad f(x) = F'(x) = (1-4x^2)^{-1/2} + x(-1/2)(-8x)(1-4x^2)^{-3/2} = (1-4x^2)^{-3/2}\,.$$

820. **RMS 2010 1009 ENSAM PSI**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

(b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$.

(c) Calculer sa somme $S(z)$ pour $|z| < R$. En déduire une expression de u_n.

Solution. —

(a) L'inégalité demandée est vraie pour $n \in \{0, 1\}$. Si elle est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$|u_{n+2}| = |u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n| \leqslant |u_{n+1}| + 2|u_n| + 1 \leqslant 2^{n+2} - 1 + 2\left(2^{n+1} - 1\right) + 1 = 2 \times 2^{n+2} - 2 \leqslant 2^{(n+2)+1} - 1.$$

(b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n z^n| \leqslant (2^{n+1} - 1)|z^n| \leqslant 2|2z|^n$, on en déduit que, si $|z| < 1/2$, alors la suite de terme général $u_n z^n$ tend vers zéro, donc que $R \geqslant 1/2$. On va montrer que

$$R = \frac{1}{2},$$

en minorant $|u_n|$, de la manière suivante : $\forall n \geqslant 2$, $2^{n-1} + 1 \leqslant u_n$. On calcule en effet

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 2u_0 + 1 = 4 \geqslant 2^{2-1} + 1 = 3, \\ u_3 &= u_2 + 2u_1 - 1 = 5 \geqslant 2^{3-1} + 1 = 5. \end{aligned}$$

Si elle est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n \geqslant 2^n + 1 + 2 \times (2^{n-1} + 1) - 1 = 2^{n+1} + 2 \geqslant 2^{n+1} + 1.$$

Il en résulte que $\forall n \geqslant 2$, $|u_n z^n| \geqslant |2z|^n/2$, donc que si $|z| > 1/2$, alors la suite de terme général $u_n z^n$ n'est pas bornée, ce qui achève la preuve.

(c) On multiplie la relation de récurrence par z^{n+2} et on somme pour n allant de zéro à l'infini. Comme $\sum (-1)^n z^n$ a un rayon de convergence $1 > 1/2$, on peut bien écrire que, pour tout z tel que $|z| < 1/2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} z^{n+2} &= S(z) - (u_0 + u_1 z) = S(z) - z - 1, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{n+2} = z[S(z) - u_0] + 2z^2 S(z) + \frac{z^2}{1+z}, \\ &= (z + 2z^2) S(z) - z + \frac{z^2}{1+z}. \end{aligned}$$

Par suite, $D(0, 1/2)$ désignant le disque ouvert de centre l'origine et de rayon $1/2$ du plan complexe,

$$\forall z \in D(0, 1/2), \quad S(z) = \frac{1 + z + z^2}{(1+z)(1 - z - 2z^2)}.$$

La factorisation $1 - z - 2z^2 = (1 - 2z)(1 + z)$ conduit à la la décomposition en éléments simples

$$\forall z \in D(0, 1/2), \quad S(z) = \frac{1/3}{(1+z)^2} + \frac{-1/9}{1+z} + \frac{7/9}{1 - 2z}.$$

On reconnaît ensuite, dans les deux derniers termes, des sommes de séries géométriques, le premier terme étant (aux constantes près) la dérivée du deuxième : $S(z) = -(1/3)\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n z^n - (1/9)\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n + (7/9)\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$. Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{9}\left[7 \times 2^n + (1 + 3n)(-1)^{n+1}\right].$$

821. **RMS 2008 987 ENSAM PSI**

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = n\int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Solution. — Le changement de variable $u = nt$ montre que $I_n = \int_0^n f(u/n)g(u)\,\mathrm{d}u$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ une suite de fonctions (h_n) par

$$h_n(u) = \begin{cases} f(u/n)g(u) & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant n, \\ 0 & \text{si } n < u. \end{cases}$$

La suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f(0)g$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, il existe M tel que $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant M$. La suite h_n vérifie alors l'hypothèse de domination $|h_n| \leqslant M|g|$ avec g intégrable, et le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

822. **RMS 2010 1011 TPE PSI**
Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (I_n).

SOLUTION. — La suite de fonctions $f_n\colon x \in [0,1] \mapsto f(x^n)$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f\colon x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } x \in [0,1[, \\ f(1) & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée : il existe M tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$. On dispose alors de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = |f(x^n)| \leqslant M$, où la fonction constante M est clairement intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim I_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,.$$

823. **RMS 2010 1013 Télécom Sud Paris PSI**
Calculer la limite de $I_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$.

SOLUTION. — L'intégrale I_n convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \exp(-x^n) \leqslant e^{-x}$. La suite de fonctions $f_n\colon x \in [1,+\infty[\mapsto \exp(-x^n)$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f\colon x \in [1,+\infty[\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

On dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) := \exp(-x)$, où la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim I_n = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

824. **RMS 2011 1094 TPE PSI**
Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x/(x^n + e^x)$.

SOLUTION. — L'intégrale I_n convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant 1/(x^n + e^x) \leqslant e^{-x}$. La suite de fonctions $f_n\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1/(x^n + e^{-x})$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1/(1+e) & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

On dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) := e^{-x}$, où la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-1}\,.$$

825. **RMS 2011 1096 TPE PSI**
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telle que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge. On note γ sa limite.

(b) Montrer que $\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.

(c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$.

SOLUTION. — Voir aussi l'exercice 496 page 347, où l'on présente un autre calcul pour établir un lien entre $\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) La fonction $h\colon t \mapsto 1/t$ est continue, positive et décroissante. Le théorème de préparation à la comparaison série-intégrale affirme que la série de terme général $w_k = \int_{k-1}^k h(t)\,\mathrm{d}t - h(k) = \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}$ converge. La somme partielle d'ordre n de cette série vaut $S_n = \sum_{k=2}^n w_k = \ln(n) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = -u_n + 1$, d'où le résultat.

(b) On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ par

$$f_n(t)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n f(t), & \text{si } 0<t<n,\\ 0 & \text{si } n\leqslant t.\end{cases}$$

La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $t\mapsto e^{-t}f(t)$: en effet, si $t>0$ est fixé, pour $n>t$, on a $f_n(t)=(1-\frac{t}{n})^n f(t)$ et un développement limité pour n tendant vers l'infini donne alors

$$f_n(t)=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)f(t)=\exp\left(-t+\mathrm{o}(1)\right)f(t)=e^{-t}f(t)+\mathrm{o}(1)\,.$$

Par ailleurs, la concavité du logarithme montre que $\ln(1-\frac{t}{n})\leqslant -\frac{t}{n}$ pour tout $t<n$, donc $n\ln(1-\frac{t}{n})\leqslant -t$, et, en composant par la fonction croissante exponentielle et en multipliant par le nombre positif $|f(t)|$, on obtient l'hypothèse de domination

$$\forall t\in]0,n],\quad |f_n(t)|\leqslant e^{-t}|f(t)|\,.$$

Pour $t\geqslant n$, cette inégalité est encore vraie puisque le membre de gauche est nul. Comme $t\mapsto e^{-t}f(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) Dans cette question, f est la fonction logarithme. Comme $e^{-t}\ln t\sim\ln t$ en zéro et $e^{-t}\ln t=\mathrm{o}(1/t^2)$ en l'infini, la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln t$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule ensuite $\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n\ln t\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties sur un segment $[a,n]$ avec $0<a<n$, puis en développant $(1-\frac{t}{n})^{n+1}$ par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\int_a^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln t\,\mathrm{d}t&=\frac{n}{n+1}\left(-\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\ln t\right]_a^n+\int_a^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right),\\&=\frac{n}{n+1}\left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n+1}\ln a+\int_a^n\left(\frac{1}{t}+\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}(-1)^p\frac{t^{p-1}}{n^p}\right)\mathrm{d}t\right),\\&=\frac{n}{n+1}\left(\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n+1}-1\right]\ln a+\ln n+\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{(-1)^p}{n^p}\left[\frac{t^p}{p}\right]_a^n\right).\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre a vers zéro, et on obtient :

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{n}{n+1}\left(\ln n+\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{(-1)^p}{p}\right).$$

On pose $\alpha_n=\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{(-1)^p}{p}$ et on calcule, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\alpha_n-\alpha_{n-1}&=\sum_{p=1}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{(-1)^p}{p}-\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\frac{(-1)^p}{p}=\sum_{p=1}^{n}\left[\binom{n+1}{p}-\binom{n}{p}\right]\frac{(-1)^p}{p}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\,,\\&=\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1}\frac{(-1)^p}{p}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}\frac{(-1)^{p+1}}{p+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\,,\\&=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{(-1)^{p+1}}{p+1}\,.\end{aligned}$$

La raison de ce calcul est la facilité d'évaluation du résultat final : on pose $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\sum_{p=0}^n\binom{n}{p}x^p=(1+x)^n$. Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}[(1+x)^{n+1}-1]=\sum_{p=0}^n\binom{n}{p}\frac{x^{p+1}}{p+1}$ et, en substituant x par -1, on obtient

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{(-1)^{p+1}}{p+1}=-\frac{1}{n+1}\,.$$

Comme $\alpha_0=1$, on en déduit que $\alpha_n=-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}+\alpha_0)=-\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}$, puis que $\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{n}{n+1}(-u_n-\frac{1}{n+1})$. En faisant tendre n vers l'infini, et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t=-\gamma\,.$$

826. **RMS 2010 1015 TPE PSI**

Soit $f\colon (x,t) \mapsto\in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xt}/(1+t^2)$ et $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F. La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

(b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel F est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Trouver une équation différentielle vérifiée par F. La résoudre.

Solution. —

(a) Si $x \geqslant 0$, on a $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) := 1/(1+t^2)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $F(x)$ converge. Si $x < 0$, on constate que $tf(x,t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $F(x)$ diverge, par application de la règle de Riemann. Par suite,

$$D = \mathbb{R}_+ \,.$$

Comme $x \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on remarque que la domination $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable prouve du même coup la continuité de F sur D.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et, en fixant $a > 0$,

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \psi_a(t) = \frac{te^{-at}}{1+t^2} \,.$$

Comme ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de Leibniz affirme que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \,.$$

On va montrer que F n'est pas dérivable en zéro, en établissant que $F'(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers zéro par valeur strictement positives. Comme F est continue en zéro, cela suffira (en vertu d'un corollaire, démontré en première année, du théorème des accroissements finis). On utilise pour cela la minoration $e^y \geqslant 1+y$, valable pour tout nombre réel y, et qui résulte de la convexité de la fonction exponentielle :

$$-F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{1/x} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{1/x} \frac{t(1-xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 1 + x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{4}\ln x,$$

ce qui prouve la limite annoncée, et établit que F n'est pas dérivable en zéro, mais que le graphe de F présente une demi tangente parallèle à Oy en zéro.

(b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et, en fixant $a > 0$,

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \kappa_a(t) = \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2} \,.$$

Comme κ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de Leibniz affirme que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \,.$$

Comme F n'est même pas dérivable en zéro, la question de la classe $\mathcal{C}^2$ sur $D = \mathbb{R}_+$ ne se pose pas, et le plus grand intervalle demandé par l'énoncé est $]0,+\infty[$.

(c) On reprend l'expression de $F''(x)$ calculée à la question (b) : comme les deux intégrales ci-dessous convergent, on peut écrire que

$$\forall x > 0, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - F(x) \,.$$

L'équation différentielle cherchée est donc $y'' + y = 1/x$, sur $\mathbb{R}_+^*$ nécessairement. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $\lambda\cos + \mu\sin$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, et on recherche une solution particulière y_p de l'équation complète en utilisant la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire que $y_p = \lambda\cos + \mu\sin$, où λ et μ sont cette fois des éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ qui vérifient $\lambda'\cos + \mu'\sin = 0$. On sait (ou on retrouve) que y_p satisfait alors l'équation différentielle si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \,,$$
$$-\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \frac{1}{x} \,\cdot$$

Les formules de Cramer donnent alors $\lambda'(x) = -\sin x/x$ et $\mu'(x) = \cos x/x$. Les solutions de $y'' + y = 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme

$$y\colon x \mapsto \left(\lambda + \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x\,,$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Les choix des bornes des intégrales sont justifiés par le fait que $\int_1^{+\infty}(\sin t/t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}(\cos t/t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, ainsi que par la remarque ci-dessous.

Remarque. — Faut-il aller plus loin et identifier F parmi les solutions déterminées ci-dessus ? L'énoncé ne le demande pas. Voici néanmoins comment on ferait. On montre que $\lim_{+\infty} F = 0$ par application du théorème de convergence dominée : $t \mapsto f(x,t)$ tend simplement vers la fonction nulle quand x tend vers $+\infty$, et on dispose de la domination $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ vue à la question (a). Or, si λ ou μ est non nul, la solution y correspondante vérifie $y(x) \sim \lambda\cos x + \mu \sin x$ au voisinage de $+\infty$, ce qui est incompatible avec une limite nulle en $+\infty$. Parmi les solutions de l'équation $y'' + y = 1/x$, la fonction F est donc celle qui vérifie $\lambda = \mu = 0$:

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x\,.$$

On peut même aller plus loin. On a vu que F a une limite en 0^+ qui vaut $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi/2$. Comme $\cos t/t \sim 1/t$ au voisinage de zéro et comme $\int_0^1 \mathrm{d}t/t$ diverge, les théorèmes d'intégration des relations de comparaison (sont-ils au programme de la filière PSI ?) montrent que $\int_x^1 (\cos t/t)\,\mathrm{d}t \sim \int_x^1 \mathrm{d}t/t = -\ln x$ au voisinage de $x = 0$, puis que $\int_x^{+\infty}(\cos t/t)\,\mathrm{d}t \sim -\ln x$ au voisinage de $x = 0$. Compte-tenu de ce que $\sin x \sim x$ au voisinage de zéro, on en déduit que $\lim_{0^+} F = \int_0^{+\infty}(\sin t/t)\,\mathrm{d}t$, et on retrouve la valeur

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,.$$

827. **RMS 2010 1016 Navale PSI**

Montrer que $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. — On pose $g(x,t) = \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour $x > 0$ fixé, on a $g(x,t) \sim x\sqrt{t}$ quand t tend vers zéro, donc l'intégrale $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge. Par ailleurs, $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$ si $t \geqslant 1$ et x quelconque, ce qui montre que $\int_1^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge. Finalement, f est bien définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$.

On fixe $x > 0$, et on définit deux suites de terme général $t_n = n\pi/x$ et $u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \geqslant 0$. La relation de Chasles montre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,.$$

Si l'on établit que la série ci-dessus relève du théorème spécial des séries alternées, on pourra en déduire que sa somme $f(x)$ est du signe du premier terme $u_0 = \int_0^{\pi/x} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, qui est strictement positif. Pour cela, on note φ la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-t}/\sqrt{t}$. Elle est dérivable de dérivée $\varphi'\colon t \mapsto -(e^{-t}/\sqrt{t}) - (e^{-t}/2t^{3/2})$, qui est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ est strictement décroissante (on peut aussi dire que φ est le produit de deux fonctions strictement décroissantes et positives). On vérifie maintenant les hypothèses sur la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

- Comme $t \mapsto g(x,t)$ est continue et de signe constant égal à $(-1)^n$ sur l'intervalle ouvert $]t_n, t_{n+1}[$, on en déduit que $x_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est non nul et de signe $(-1)^n$: la série est bien alternée.
- Alors, grâce à au changement de variable $t = s + \pi/x$ dans la deuxième intégrale, grâce à la décroissance stricte et à la continuité de la fonction φ, et grâce à la π–périodicité de la fonction $|\sin|$, on obtient

$$\begin{aligned}|u_n| - |u_{n+1}| &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(x,t)|\,\mathrm{d}t - \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} |g(x,t)|\,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(x,t)|\,\mathrm{d}t - \int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(x, s+\pi/x)|\,\mathrm{d}s\,,\\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\varphi(t)|\sin(xt)| - \varphi\left(t + \frac{\pi}{x}\right)\left|\sin\left(x\left[t + \frac{\pi}{x}\right]\right)\right|\right]\mathrm{d}t\,,\\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\varphi(t) - \varphi\left(t + \frac{\pi}{x}\right)\right)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t \;>\; 0\,,\end{aligned}$$

  ce qui montre que la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante.
- Enfin, u_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, car $u_n = \int_{t_n}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_{n+1}}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est la différence de deux restes d'une intégrale convergente et la suite (t_n) diverge vers $+\infty$.

Rappel. — Le cours sur les séries alternées indique, en général, des inégalités larges en ce qui concerne le signe de la somme ou des restes. On a démontré ici que la suite $(|u_n|)$ décroît strictement ; par conséquent, les deux suites adjacentes (S_{2n}) et (S_{2n+1}) formées des sommes partielles de rangs pairs ou impairs sont respectivement décroissante au sens strict et croissante au sens strict. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < |u_0| - |u_1| = u_0 + u_1 = S_1 < S_{2n+1} < S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = f(x) < S_{2n} < S_0 ,$$

et cela établit bien que $f(x) > 0$.

828. **RMS 2010 1017 ENSEA PSI**

Montrer que $f\colon x \mapsto \int_0^{\pi/2} \ln(x^2+t^2)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$, puis comparer $f(x)$ à $\ln(x)$ quand x tend vers l'infini.

Solution. — On pose $g(x,t) = \ln(x^2+t^2)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi/2]$. L'intégrale $f(x)$ est celle d'une fonction continue sur un segment : sa convergence est assurée. Enfin, comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ et comme l'intervalle d'intégration est un segment, les hypothèses du théorème de Leibniz sont satisfaites, donc sa conclusion aussi : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[2\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{\pi/2} = 2\arctan\left(\frac{\pi}{2x}\right) \cdot$$

On va montrer que $f(x) \sim \pi \ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Pour cela, on évalue la différence

$$f(x) - \pi\ln(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}\ln(x^2) = \int_0^{\pi/2} \left[\ln(x^2+t^2) - \ln(x^2)\right]\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Comme $0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u \geqslant 0$, on en déduit que $0 \leqslant f(x) - \pi\ln(x) \leqslant \int_0^{\pi/2}(t^2/x^2)\,\mathrm{d}t = \pi^3/24x^2$. Comme $\pi^3/24x^2$ est négligeable devant $\pi\ln(x)$ en l'infini, on a bien prouvé l'équivalent annoncé.

Remarque. — On peut exprimer f à l'aide des fonctions usuelles grâce au calcul de sa dérivée. Comme $x > 0$, on a $f'(x) = 2\arctan(\pi/2x) = \pi - 2\arctan(2x/\pi)$, en vertu de la relation $\arctan(u) + \arctan(1/u) = \operatorname{signe}(u)\pi/2$. Or une primitive de arctan, obtenue par intégration par parties, est la fonction $h\colon u \mapsto u\arctan(u) - \ln(1+u^2)/2$. On en déduit que

$$f(x) = \pi x - 2 \times \frac{\pi}{2} h\left(\frac{2x}{\pi}\right) + k = \pi x - 2x\arctan\left(\frac{2x}{\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\ln\left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right) + k\,,$$

où k est une constante. Sa valeur est donnée (sous réserve du fait que f soit prolongeable par continuité en zéro) par $\lim_{0^+} f(x) = k = \int_0^{\pi} 2\ln(t^2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} 2\ln(t)\,\mathrm{d}t = 2[t\ln(t) - t]_0^{\pi/2} = \pi\ln(\pi/2)$, ce qui détermine complètement f :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2x}{\pi}\right)\right] + \frac{\pi}{2}\left[\ln\left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right) + \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right] = 2x\arctan\left(\frac{\pi}{2x}\right) + \frac{\pi}{2}\ln\left(x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\cdot$$

On retrouve alors l'équivalent $f(x) \sim_{+\infty} \pi\ln(x)$ établi plus haut. Quant au prolongement de f par continuité en zéro, il résulte de l'application du théorème de convergence dominée, car $|g(x,t)| \leqslant \psi(t) := 2|\ln(t)|$ quand x et t sont proches de zéro, avec ψ intégrable en zéro.

829. **RMS 2010 1019 IIE PSI**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/(x^2+t^2)^n$.

(a) Quel est le domaine de définition de I_n ? Calculer I_1.

(b) Montrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $I_n'(x)$.

(c) Trouver une relation entre $I_n'(x)$ et $I_{n+1}(x)$. En déduire une expression simple de I_n.

Solution. — On pose $g_n(x,t) = (x^2+t^2)^{-n}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ouvert de définition (fonctions usuelles et règles de construction), et on a en particulier

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t) = -2nx(x^2+t^2)^{-n-1}\,.$$

(a) Si $x = 0$, l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{d}t/(x^2+t^2)^n = \int_0^1 \mathrm{d}t/t^{2n}$ est divergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x \neq 0$, zéro n'est pas une borne impropre de I_n et, au voisinage de $+\infty$, l'inégalité $0 \leqslant 1/(x^2+t^2)^n \leqslant 1/t^2$ prouve que I_n converge. Par suite, le domaine de définition de I_n est $\mathbb{R}^*$. Comme I_n est évidemment paire, on ne l'étudiera que sur $]0, +\infty[$.
On obtient

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n} = \left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}\,.$$

(b) On fixe un segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$. La domination $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+$, $|\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t) := 2nb(a^2+t^2)^{-n-1}$, où $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, prouve que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (les hypothèses faibles sont évidemment satisfaites). Ce raisonnement étant valable pour tout segment $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$, on en déduit que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \quad I_n'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^{n+1}}$$

(c) La formule de Leibniz écrite ci-dessus montre que $\forall x \in]0,+\infty[$, $I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x)$. On devine alors l'expression de $I_n(x)$ en calculant les premiers termes : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} I_2(x) &= -\frac{I_1'(x)}{2x} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2x^3}\,, \\ I_3(x) &= -\frac{I_2'(x)}{4x} = \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2\times 4x^5}\,, \\ I_4(x) &= -\frac{I_3'(x)}{6x} = \frac{\pi}{2} \times \frac{3\times 5}{(2\times 4\times 6)x^7}\,. \end{aligned}$$

On voit se dessiner la première égalité ci-dessous, que l'on transforme grâce à la technique habituelle consistant à multiplier numérateur et dénominateur par les facteurs pairs qui manquent pour former une factorielle : pour tout $x > 0$,

$$I_n(x) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)x^{2n-1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2 x^{2n-1}} = \frac{\pi}{(2x)^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

On démontre ensuite cette formule par récurrence. Pour $n=1$, le coefficient du binôme est $\binom{0}{0} = 1$, et on retrouve bien $I_1(x) = \pi/(2x)$. Si $I_n(x)$ est donné par l'expression ci-dessus, alors pour tout $x > 0$,

$$I_{n+1}(x) = -\frac{I_n'(x)}{2nx} = (2n-1)\frac{\pi}{2^{2n-1}x^{2n}(2nx)}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{\pi}{(2x)^{2n+1}} \times \frac{2n(2n-1)}{n^2} \times \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = \frac{\pi}{(2x)^{2n+1}}\binom{2n}{n}.$$

830. **RMS 2010 1021 ENSAM PSI**

Soit $F\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$. Étudier F en 0^+ et en $+\infty$.

SOLUTION. — Voir aussi l'exercice 604 page 403.

On pose $g(x,t) = \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Si $x = 0$, alors $g(0,t) = 0$ pour tout t donc $F(0)$ existe et vaut zéro. Si $x \neq 0$, alors $g(x,t) \sim x$ quand t tend vers 0^+, l'intégrale $\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge : elle est faussement impropre. La majoration $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$ pour tout x et tout $t \geqslant 1$ montre que $\int_1^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Finalement, F est bien définie sur $\mathbb{R}$ (en fait de plus impaire car g est impaire par rapport à x).

Étude par dérivation. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$. La domination $|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leqslant \theta(t) = e^{-t}$ avec θ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ permet d'appliquer le théorème de Leibniz : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_{t=0}^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

On en déduit que $F = \arctan + k$ où k est une constante et comme $F(0) = 0$, on en déduit que $F = \arctan$. Alors $\lim_{+\infty} F = \pi/2$.

Étude en 0^+ sans calcul explicite de $F(x)$.

La majoration $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $|\sin u| \leqslant u$ et la convergence absolue établie ci-dessus montrent que

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\,.$$

On en déduit que $\lim F(x) = 0$ quand x tend vers 0^+. On peut aller plus loin et montrer que $F(x) \sim x$ quand x tend vers 0^+. Pour cela, on évalue la différence :

$$F(x) - x = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t - x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(xt)\,\mathrm{d}t\,,$$

où l'on a posé $\varphi(u) = (\sin u - u)/u = -1 + (\sin u)/u$ pour tout $u > 0$. Un développement limité du sinus montre que $\lim_{0^+}\varphi(u) = 0$. La majoration $|\sin u| \leqslant u$ déjà invoquée montre que $|\varphi(u)| \leqslant 2$ pour tout u. Le théorème de convergence dominée s'applique alors à l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(xt)\,\mathrm{d}t$, puisque $e^{-t}\varphi(xt)$ tend simplement vers zéro quand x tend vers zéro pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $|e^{-t}\varphi(xt)| \leqslant \psi(t) := 2e^{-t}$, avec ψ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro quand x tend vers 0^+, ce qui prouve que $F(x) - x = \mathrm{o}(x)$ quand x tend vers 0^+ et établit l'équivalent annoncé.

Étude en $+\infty$ sans calcul explicite de $F(x)$.

Pour tout $x > 0$, on pose $\operatorname{sinc}(x) = (\sin x)/x$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Il s'agit de la fonction sinus cardinal, continue sur $[0, +\infty[$. On effectue le changement de variable $u = xt$ dans $F(x)$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}}{u} \sin u \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u/x} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$, l'expression $e^{-u/x}\operatorname{sinc}(u)$ tend vers $\operatorname{sinc}(u)$, simplement par rapport à $u \geqslant 0$, mais on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée car le sinus cardinal n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (voir par exemple l'exercice 188 page 165). On va démontrer néanmoins que

$$\lim_{+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Pour cela, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u$ converge, il existe $a > 0$ tel que $|\int_a^{+\infty} \operatorname{sinc}(u)\,\mathrm{d}u| \leqslant \varepsilon$. L'inégalité de convexité $\forall y \in \mathbb{R}$, $1 + y \leqslant e^y$ montre que, pour $y \leqslant 0$, on a $y \leqslant e^y - 1 \leqslant 0$, et donc $|e^y - 1| \leqslant |y|$.

831. **RMS 2011 1097 ENSAM PSI**

Soit $F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition D de F.

(b) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Exprimer F sur D.

(d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 731 page 472.

On pose $f\colon (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Comme $f(0,t) = 0$ pour tout $t > 0$, l'intégrale $F(0)$ converge et vaut zéro. Comme f est impaire par rapport à la variable x, il en est de même pour F, et il suffit d'étudier la nature de $F(x)$ pour $x > 0$. On fixe donc $x > 0$.
– Quand t tend vers zéro, $f(x,t)$ tend vers la limite finie x : l'intégrale $F(x)$ est faussement impropre en zéro.
– Quand t tend vers l'infini, $f(x,t) \sim \frac{\pi}{2t^3}$, donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
On conclut que

$$D = \mathbb{R}\,.$$

(b) L'hypothèse de domination du théorème de Leibniz est donnée par le calcul suivant : pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t}{t(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right| = \left|\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right| \leqslant \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\cdot$$

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable, il s'ensuit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) On effectue le calcul de $F(x)$ pour $x > 0$, et on conclura grâce au caractère impair de F. Si $x \neq 1$, la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $1/[(1+t^2)(1+x^2t^2)]$ d'indéterminée t est $\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{,1\}, \quad F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2-1}\left[x\arctan(xt) - \arctan(t)\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2(x+1)}\cdot$$

De plus, cette expression reste valable pour $x = 1$ par continuité de la dérivée (on a utilisé la positivité stricte de x de manière implicite, en écrivant que $\lim_{t\to+\infty} \arctan(xt) = \pi/2$ dans l'évaluation de l'intégrale). Comme $F(0) = 0$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$. Le caractère impair de F montre ensuite que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0,\\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

(d) L'intégrale est convergente (en zéro, la fonction intégrée a une limite finie égale à 1) et en $+\infty$, elle est dominée par la fonction $t \mapsto 1/t^2$). Son calcul se fait par intégration par parties (on l'écrit sur un segment $[0, a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{(\arctan t)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 2F(1) = \pi \ln 2\,.$$

832. **RMS 2011 1100 TPE PSI**

Soie $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\tilde{f} \colon x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $T \colon f \mapsto \tilde{f}$ est un endomorphisme de E.

(b) L'application T est-elle surjective ?

(c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Solution. —

(a) La linéarité de T résulte de celle de l'intégrale. Comme

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad \tilde{f}(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

la fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour toute $f \in E$ (intégrales fonctions de la borne supérieure de fonctions continues). Alors $\tilde{f}$ est *a fortiori* continue, donc T arrive bien dans E. On remarque aussi que $\tilde{f}(0) = 0$.

(b) La réponse est non, et on peut donner deux arguments distincts, tirés des remarques de la question (a).
– L'image de T est incluse dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, qui est un sous-espace vectoriel strict de E (la fonction $t \mapsto |t - 1/2|$ est continue sur $[0,1]$ mais pas dérivable en $1/2$). Une propriété plus forte sera donnée à la question (c).
– L'image de T est incluse dans le sous-espace vectoriel strict de E formé des fonctions nulles en zéro.

(c) On calcule d'abord la dérivée de $T(f) = \tilde{f}$: pour tout $x \in [0,1]$, on a $\tilde{f}'(x) = xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Il en résulte que $\tilde{f}$ est deux fois dérivable, avec $\forall x \in [0,1]$, $\tilde{f}''(x) = -f(x)$. On en déduit par récurrence que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais cela ne sert pas pour la suite.

Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Deux fonctions deux fois dérivables f et g sur $[0,1]$ sont égales si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites : $f'' = g''$, $f'(0) = g'(0)$ et $f(0) = g(0)$. On en déduit l'équivalence suivante :

$$T(f) = \lambda f \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \forall x \in [0,1], \quad -f(x) & = & \lambda f''(x)\,, \\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t & = & \lambda f'(0)\,, \\ 0 & = & \lambda f(0)\,. \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 0$, alors f est nulle d'après la première équation ci-dessus, donc ne peut être un vecteur propre. On écarte désormais ce cas ; alors le système ci-dessus s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall x \in [0,1], \quad f''(x) + \frac{1}{\lambda} f(x) & = & 0\,, \\ f'(0) & = & \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ f(0) & = & 0\,. \end{array} \right.$$

On discute suivant le signe de λ, en supposant que f n'est pas la fonction nulle (on cherche des éléments propres).

– Si $\lambda > 0$, on pose $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$, et l'équation différentielle implique que

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\,.$$

Les conditions initiales donnent ensuite $a = 0$, puis $b\omega = \omega^2 \int_0^1 b\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = b\omega(1 - \cos\omega)$. Il est impossible que b soit nul (sinon f l'est), et ω ne l'est pas par hypothèse, donc la dernière équation équivaut à $\cos\omega = 0$. Les valeurs propres de ce premier cas sont donc quantifiées par un entier k (*a priori* un entier relatif) :

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2} \quad \text{et} \quad E_{\lambda_k}(T) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} + k\pi\right] x\right)\right).$$

On peut se contenter de faire varier k dans $\mathbb{N}$: la présence du carré montre que $\lambda_{-k} = \lambda_{k-1}$.

– Si $\lambda < 0$, on pose $\omega = 1/\sqrt{-\lambda}$, et l'équation différentielle implique que

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) = a\,\mathrm{ch}(\omega x) + b\,\mathrm{sh}(\omega x)\,.$$

Les conditions initiales donnent ensuite $a = 0$, puis $b\omega = -\omega^2 \int_0^1 b\,\mathrm{sh}(\omega t)\,\mathrm{d}t = b\omega(1 - \mathrm{ch}\,\omega)$. Comme précédemment, on obtient $\mathrm{ch}\,\omega = 0$, qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. L'opérateur T n'a donc pas de valeurs propres négatives, et l'exercice est terminé.

833. **RMS 2010 1025 Petites Mines PSI**

Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$.

Solution. — Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto (at+b)e^t$, où a et b sont deux constantes réelles. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Q(t)e^t$, où Q est un polynôme de degré $0+2$ et de valuation $\geqslant 2$, c'est-à-dire que $Q = kX^2$, où $k \in \mathbb{R}$. On trouve $k = 1/2$, et finalement, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions telles que

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + ax + b\right) e^x \, .$$

834. **RMS 2010 1102 ENSAM PSI**

Soit (E) l'équation différentielle $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x)$.

(a) Trouver des solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(c) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Solution. — On note (H) l'équation homogène associée à (E).

(a) Si α est un réel quelconque, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est *a priori* définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, elle est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0 \, ,$$

ou encore si et seulement si $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$. Les solutions sont entières : 1 et 2. Alors les fonctions correspondantes $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. D'après la théorème de Cauchy et Lipschitz pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 dont le coefficient de y'' ne s'annule pas, on peut affirmer que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ (respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$).

(b) On cherche une solution particulière sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, par la méthode de variation des constantes. Soient donc α et β deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $\forall x \in I$, $x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$. On définit une fonction p sur I et on calcule ses dérivées par :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, &\quad p(x) := x\alpha(x) + x^2\beta(x) \, ,\\
\forall x \in I, &\quad p'(x) = \alpha(x) + 2x\beta(x) \, ,\\
\forall x \in I, &\quad p''(x) = \alpha'(x) + 2x\beta'(x) + 2\beta(x) \, .
\end{aligned}$$

Alors p est solution de (E) sur I avec la condition imposée à α et β, si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha'(x) & + & x\beta'(x) & = & 0 \, ,\\ x^2\alpha'(x) & + & 2x^3\beta'(x) & = & 2(1+x) \, . \end{array}\right.$$

Comme prévu par la théorie, le déterminant vaut x^3 et il ne s'annule par sur I. Les formules de Cramer donnent

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) &= -\frac{2(1+x)}{x^2} \, ,\\
\beta'(x) &= \frac{2(1+x)}{x^3} \, .
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha(x) = -2\ln|x| + 2/x$ et $\beta(x) = -1/x^2 - 2/x$, d'où $p(x) = -2x\ln|x| + 2 - 1 - 2x = 1 - 2x - 2x\ln|x|$ pour tout $x \in I$. Les ensembles $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ respectivement sont donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_+ &= \left\{x \mapsto ax + bx^2 + 1 - 2x - 2x\ln x, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \, ,\\
\mathcal{S}_- &= \left\{x \mapsto cx + dx^2 + 1 - 2x - 2x\ln(-x), \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\} \, .
\end{aligned}$$

(c) La réponse est non : on raisonne par l'absurde.

S'il existe une solution y sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $y(x) = ax + bx^2 + 1 - 2x - 2x\ln x$ pour tout $x > 0$ et $y(x) = cx + dx^2 + 1 - 2x - 2x\ln(-x)$ pour tout $x < 0$, et l'équation différentielle impose que $y(0) = 1$. Pour tous choix de a, b, c et d, on a $\lim y(x) = 1$ lorsque x tend vers zéro par valeurs différentes de zéro, donc y est continue.

Le taux d'accroissement de y en zéro à droite vaut $\tau_+(x) = \frac{y(x)-1}{x} = a + bx - 2 - \ln(x)$, et il n'a pas de limite finie en zéro à droite quel que soit le choix de a et b. Par suite, une telle fonction n'est pas dérivable en zéro, ce qui contredit le fait qu'elle soit solution d'une équation différentielle d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.

Géométrie

835. **RMS 2011 1104 ENSAM PSI**

Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $f \colon x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x \wedge u$.

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Déterminer l'image et le noyau de f.

(c) En utilisant une base adaptée, déterminer $f \circ f$.

(d) En déduire f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. — Si u est non nul, on note D la droite engendrée par u et P le plan orthogonal à u.

(a) La linéarité de f résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire.

(b) Si u est nul, f est l'application nulle, d'image nulle et de noyau $\mathbb{R}^3$.
On suppose désormais $n \neq 0$. Les propriété connues du produit vectoriel montrent alors que le noyau de f est D et son image est P.

(c) On pose $e_1 = u/\|u\|$, qu'on complète par e_2 et e_3 de façon à disposer d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale directe. Les matrices M de f et M^2 de $f \circ f$ dans $\mathcal{B}$ valent

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît que $r := f^2$ est le demi-tour d'axe D, c'est-à-dire la rotation d'angle π, d'axe D.

(d) On note ρ l'endomorphisme induit par f sur P orienté par u. il s'agit de la rotation vectorielle d'angle $-\pi/2$, comme le montre la décomposition en blocs de M. L'endomorphisme f^n sera alors donné par ses restrictions à D et à P :

$$\begin{aligned} f^n_{/\!/D} &= 0\,, \\ f^n_{/\!/P} &= \rho^n\,, \end{aligned}$$

où ρ^n est la rotation de P d'angle $-n\pi/2$.

836. **RMS 2011 1105 TPE PSI**

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de centre de gravité O. Calculer $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Solution. — On note a (respectivement α) la norme (respectivement l'angle à π près) commun(e) de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ (respectivement des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ deux à deux) : ces valeurs sont communes car le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

Comme O est le centre de gravité du tétraèdre, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$. En effectuant le produit scalaire avec $\overrightarrow{OA}$, on obtient $a(1 + 3\cos\alpha) = 0$, donc

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}\cdot$$

837. **RMS 2008 991 TPE PSI**

Soit ABC un triangle quelconque d'un plan euclidien. Déterminer le maximum de la fonction qui, à un point M intérieur au triangle, associé le produit des distances de M aux trois côtés. En quel point ce maximum est-il atteint ?

Solution. — On suppose que le triangle ABC n'est pas aplati. On note S son aire, et a, b et c les longueurs de ses côtes respectivement opposés aux points A, B et C. Pour M intérieur au triangle, on note p, q et r les distances respectives de M aux côtés BC, CA et AB. Comme ABC est la réunion quasi-disjointe de AMB, BMC et CMA, l'aire S est égale à la somme des aires de ces trois petits triangles :

$$2S = ap + bq + cr\,.$$

L'inégalité arithmético-géométrique et son cas d'égalité (voir ci-dessous) donne alors la majoration

$$\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{\frac{(ap)(bq)(cr)}{abc}} \leqslant \frac{ap + bq + cr}{3\sqrt[3]{abc}} = \frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}}\,,$$

avec égalité si et seulement si $ap = bq = cr$, c'est-à-dire si et seulement si les aires de BMC, CMA et AMB sont les mêmes. Or M est barycentre de ABC avec comme coefficients les trois aires en question. L'égalité est réalisée si et seulement si M est isobarycentre de A, B et C. En résumé,

$$\max(pqr) = \frac{8S^3}{27abc}, \qquad \text{avec égalité si et seulement si } M \text{ est le centre de gravité de } ABC.$$

Remarque. — On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, on dispose de l'inégalité suivante entre les moyennes géométrique et arithmétique :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Cette inégalité équivaut à $\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \leqslant \ln(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n})$: sous cette forme, il s'agit de l'inégalité générale de concavité pour le logarithme, qui est bien une fonction concave, car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -1/x^2 \leqslant 0$. De plus, la concavité *stricte* du logarithme, qui se manifeste par l'inégalité stricte $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) < 0$, donne le cas d'égalité : elle est réalisée si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Voici une solution différente, réalisée à l'aide de Maple (l'intervention du calcul formel n'est pas absolument nécessaire : le lecteur courageux pourra le vérifier en menant les calculs à la main). Le triangle $\mathcal{T} = ABC$, entendu comme le triangle plein, y compris les côtés, est une partie compacte du plan, et la fonction $f \colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ qui à M, fait correspondre le produit des distances aux côtés, est une fonction continue (on connaît les formules exprimant la distance d'un point à une droite : voir plus loin). Par conséquent, f admet sur $\mathcal{T}$ un maximum, nécessairement atteint à l'intérieur. En effet, sur les côtés, f est nulle donc minimale. Le problème étant invariant par similitude, on peut supposer que $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (a,b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que la distance d'un point $M = (u,v)$ à une droite affine D d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est

$$d(M,D) = \frac{|\alpha u + \beta v + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Les équations des côtés AB, BC et CA de $\mathcal{T}$ sont respectivement $y = 0$, $(a-1)y - b(x-1) = 0$ et $bx - ay = 0$. Si $M = (x,y)$ est un point de $\mathcal{T}$, on sait, par l'examen du cas du sommet opposé, que $y \geqslant 0$, $(a-1)y - b(x-1) \geqslant 0$ et $bx - ay \geqslant 0$. Par conséquent

$$\forall M \in \mathcal{T}, \quad f(M) = f(x,y) = \frac{y((a-1)y - b(x-1))(bx - ay)}{\sqrt{((a-1)^2 + b^2)(a^2 + b^2)}}.$$

Cette expression qui évite les valeurs absolues, valable uniquement dans $\mathcal{T}$, présente l'avantage d'être de classe $\mathcal{C}^1$, de sorte qu'on pourra chercher les extrema parmi les points critiques. Le dénominateur, qui est une constante, peut être laissé de côté. Dans une session Maple, on validera donc les lignes suivantes :

```
f:=y*(b*x-a*y)*((a-1)*y-b*(x-1));
eq1:=expand(diff(f,x))=0;eq2:=expand(diff(f,y))=0;sys:={eq1,eq2};
solve(sys,{x,y});
```

On obtient quatre solutions : les trois sommets, qui sont des solutions parasites dues au fait que $\mathcal{T}$ n'est pas un ouvert et que l'expression de f ne vaut qu'à l'intérieur de $\mathcal{T}$, ainsi que le point $(\frac{a+1}{3}, \frac{y}{3})$, qui est le centre de gravité de $\mathcal{T}$. La commande `expand(subs(y=b/3,x=(a+1)/3,f))` fournit la valeur de f au centre de gravité : elle vaut $b^3/27$, et on ne peut pas reconnaître la valeur théorique donnée plus haut (mais l'énoncé ne le demande pas).

838. **RMS 2010 1028 TPE PSI**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a,b,c).

Solution. — On note u le vecteur (a,b,c), puis D la droite engendrée par u, et P le plan orthogonal à D, et enfin r la rotation étudiée. Cette dernière est aussi appelée le demi-tour d'axe D, et c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à D.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Comme u est unitaire, on sait que le projeté orthogonal de x sur D vaut $(u|x)u$ et la décomposition unique de x sur la somme directe $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ est $x = (u|x)u + [x - (u|x)u]$. On en déduit que

$$r(x) = (u|x)x - [x - (u|x)u] = 2(u|x)u - x.$$

On applique cela à x valant successivement les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui donne la matrice cherchée :

$$\begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ba & 2ca \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2cb \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

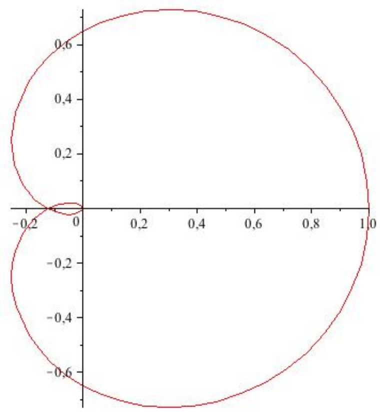
839. **RMS 2010 1030 TPE PSI**

Étudier la courbe (Γ) d'équation polaire $\rho = \cos^3(\theta/3)$. Déterminer sa longueur et sa courbure.

Solution. — On commence par les réductions d'intervalle d'étude. Comme ρ est paire et 6π-périodique, on trace la courbe pour $\theta \in [0, 3\pi]$, puis on effectue une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Comme $\rho(\theta + 3\pi) = -\rho(\theta)$, et comme les deux points de coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + 3\pi)$ sont confondus, il suffit en fait de tracer la courbe sur $[0, 3\pi/2]$, d'effectuer la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.
Comme $\rho'(\theta) = -\cos^2(\theta/3)\sin(\theta/3)$, le tableau de variation et de valeurs de ρ sur $[0, 3\pi/2]$ est

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0	
$\rho(\theta)$	1	$3\sqrt{3}/8$	$1/8$	0

La courbe ci-dessous a été tracée à l'aide de Maple grâce à la commande `polarplot(cos(t/3)^3,t=0..3*Pi/2)`, après avoir chargé la bibliothèque graphique par `with(plots)`. La courbe (Γ) n'est pas une cardioïde : noter la présence de la boucle intérieure.



La longueur L de la courbe qu'on va calculer est à entendre au sens de la longueur du support de l'arc parcouru une fois et une seule. La symétrie notée plus haut montre que

$$L = 2\int_0^{3\pi/2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{3\pi/2} \sqrt{\cos^6(\theta/3) + \cos^4(\theta/3)\sin^2(\theta/3)}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{3\pi/2} \cos^2(\theta/3)\,\mathrm{d}\theta\,,$$
$$= \int_0^{3\pi/2} [\cos(2\theta/3) + 1]\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{3}{2}\sin(2\theta/3) + \theta\right]_0^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2}\,.$$

Sauf si $\theta = 3\pi/2 \mod 3\pi$, le vecteur tangent à la courbe en $M(\theta)$ est dirigé par $\rho(\theta)u(\theta) + \rho'(\theta)v(\theta)$ avec les notations habituelles des coordonnées polaires, ou encore par $\cos(\theta/3)u(\theta) - \sin(\theta/3)v(\theta)$. Par conséquent, l'angle orienté $\alpha(\theta) = (Ox, \overrightarrow{OM}'(\theta))$ est donné par $\alpha(\theta) = \theta - \theta/3 = 2\theta/3$. Comme $s'(\theta) = \|\overrightarrow{OM}'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} = \cos^2(\theta/3)$, la courbure est donnée par

$$C(\theta) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha'(\theta)}{s'(\theta)} = \frac{2}{3\cos^3(\theta/3)}\,.$$

840. **RMS 2010 1031 TPE PSI**

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 et $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x) = P(y)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est, dans certains cas à déterminer, la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité $\sqrt{2/3}$.

Solution. — Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, alors

$$P(x) = P(y) \iff a(x^3 - y^3) + b(x^2 - y^2) + c(x - y) = 0 \iff (x - y)[a(x^2 + xy + y^2] + b(x + y) + c] = 0\,.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc la réunion de la droite d'équation $x = y$ et de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $a(x^2+xy+y^2)+b(x+y)+c = 0$. Comme $a \neq 0$, c'est une conique, et on réécrit son équation sous la forme $x^2 + xy + y^2 + b'(x + y) + c' = 0$, avec $b' = b/a$ et $c' = c/a$. La matrice de la partie quadratique vaut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = 3/4 > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$, la conique $\mathcal{C}$ est du genre ellipse. On constate que, si $e'_1 = {}^t(1,1)/\sqrt{2}$ et $e'_2 = {}^t(-1,1)/\sqrt{2}$, alors $Ae'_1 = (3/2)e'_1$ et $Ae'_2 = (1/2)e'_2$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad A' = P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}X = {}^tPX.$$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans la base canonique (e_1, e_2) s'écrit ${}^tXAX + \begin{pmatrix} b' & b' \end{pmatrix} X + c' = 0$. Dans la base (e'_1, e'_2), elle s'écrit ${}^tX'({}^tPAP)X' + \begin{pmatrix} b' & b' \end{pmatrix} PX' + c' = {}^tX'A'X' + \begin{pmatrix} 0 & b'\sqrt{2} \end{pmatrix} X' + c' = 0$, ou encore

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + b'\sqrt{2}y' + c' = 0\,.$$

En posant $y'' = y' + b'\sqrt{2}$ et $c'' = 2[c' - b'^2] = 2[c/a - (b/a)^2] = 2[ac - b^2]/a^2$, cette équation s'écrit $3x'^2 + y''^2 + c'' = 0$. On discute ensuite suivant la valeur de c''.

- Si $c'' > 0$, c'est-à-dire si $ac - b^2 > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est vide, et $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $x = y$.
- Si $c'' = 0$, c'est-à-dire si $ac - b^2 = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est réduite à un point, et $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $x = y$ et du point de coordonnées $(0, -b\sqrt{2}/a)$.
- Si $c'' < 0$, c'est-à-dire si $ac - b^2 < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est l'ellipse d'équation réduite $(x'/\alpha)^2 + (y''/\beta)^2 = 1$, avec $\alpha = \sqrt{-c''/3}$ et $\beta = \sqrt{-c''}$. Comme $\beta > \alpha$, on pose $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sqrt{-2c''/3}$, et l'excentricité de $\mathcal{C}$ est donnée par la formule

$$e = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{-2c''/3}}{\sqrt{-c''}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Dans ce cas, $\mathcal{E}$ est bien la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité $\sqrt{2/3}$.

Autres concours PC

Algèbre

Ensembles, combinatoire

Groupes, anneaux, corps

Nombres complexes, polynômes

841. **RMS 2006 1109 TPE PC**

Trouver les racines de $x^3 - 3x - 1 = 0$ en posant $x = u + v$ et en cherchant la valeur de uv telle que l'équation en x se ramène à $u^3 + v^3 = 1$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 48 page 118, où il s'agit, comme ici, d'utiliser dans un cas particulier la méthode de Cardan pour la résolution de l'équation du troisième degré.

Une étude rapide de la fonction f d'expression $f(x) = x^3 - 3x - 1$ montre que $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, que $f(-1) = 1$, que $f(1) = -4$, donc que f possède trois racines réelles simples (ceci n'est pas nécessaire pour la résolution que l'énoncé propose).

Si $x = u+v$, on a $x^3 - 3x - 1 = (u+v)^3 - 3(u+v) - 1 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3(u+v) - 1 = u^3 + v^3 - 1 + 3(u+v)(uv-1)$. Pour que cette équation soit équivalente à $u^3 + v^3 = 1$, il suffit que $uv = 1$. Alors $u^3v^3 = 1$, et u^3 et v^3 sont connus par leur somme et leur produit : ce sont donc les deux racines du polynôme $Y^2 - sY + p = Y^2 - Y + 1$, avec des notations évidentes pour s et p. Par suite (l'ordre importe peu, puisque $x = u + v = v + u$) :

$$u^3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}} ,$$
$$v^3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}} .$$

Chaque nombre complexe non nul possède trois racines cubiques, ce qui donne neuf combinaisons pour le couple (u, v), mais on sait que $uv = 1$ (et pas seulement que $u^3v^3 = 1$). Comme l'équation complexe $z^n = a$ est équivalente à $z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, où k est un entier quelconque dans $[\![0, n-1]\!]$, et z_0 est une racine n-ième de a choisie une fois pour toutes, on obtient

$$\exists k \in [\![0, 2]\!], \quad u = e^{\frac{i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} ,$$
$$\exists \ell \in [\![0, 2]\!], \quad v = e^{-\frac{i\pi}{9}} e^{\frac{2i\ell\pi}{3}} .$$

La condition $uv = 1$ se traduit par $e^{\frac{2i(k+\ell)\pi}{3}} = 1$, ou encore par : « $k + \ell$ est un multiple de 3 ». Avec k et ℓ entre 0 et 2, les valeurs possibles de (k, ℓ) sont les couples $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. On obtient alors les trois racines

$$x_1 = e^{\frac{i\pi}{9}} + e^{-\frac{i\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right),$$
$$x_2 = e^{\frac{7i\pi}{9}} + e^{\frac{11i\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right),$$
$$x_3 = e^{\frac{13i\pi}{9}} + e^{\frac{5i\pi}{9}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right).$$

Remarque. — Il est possible de prouver ce résultat directement : on applique la formule de Moivre $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ avec $n = 3$. En ne conservant que les parties réelles, on obtient $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Multipliant par 2 cette égalité et posant $x = 2\cos\theta$, il vient

$$x^3 - 3x - 2\cos(3\theta) = 0 .$$

C'est l'équation de départ à chaque fois que $2\cos(3\theta) = 1$, c'est-à-dire à chaque fois que $3\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, ou encore $\theta = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$. Les angles correspondants dans $[0, \pi]$ (comme $x = 2\cos(\theta) = 2\cos(-\theta)$, l'intervalle $[0, \pi]$ suffit) sont donc

– si l'on choisit le signe plus : $\frac{\pi}{9}$ et $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$ (le suivant est $\frac{13\pi}{9} > \pi$) ;

– si l'on choisit le signe moins : $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$ (le précédent et le suivant ne conviennent pas).

La conclusion en résulte.

842. **RMS 2012 1308 TPE PC**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}((X^2 - 1)^n)$.

(a) Étudier le degré de P_n ainsi que sa parité.
(b) Montrer que $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.
(c) Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

Solution. — à rédiger ? ?

Algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, rang

843. **RMS 2009 1155 TPE PC**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $V_1, \dots, V_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que la somme $\sum_{k=1}^n V_k$ est directe si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$ est directe et $(\sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n = \{0\}$.

Solution. — L'hypothèse selon laquelle E est de dimension finie est inutile.
La première condition implique la seconde. Soit $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in \prod_{k=1}^{n-1} V_k$ tel que $x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$. Comme le vecteur nul appartient à V_n, le n-uplet $(X_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ appartient à $\prod_{k=1}^n$ et vérifie $x_1 + \dots + x_{n-1} + 0 = 0$. Comme la somme $\sum_{k=1}^n$ est directe, on en déduit que $x_1 = \dots = x_{k-1} = 0$. Soit ensuite $x \in (\sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n$. Il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \prod_{k=1}^{n-1} V_k$ tel que $x = x_1 + \dots + x_{n-1}$ ou encore $x_1 + \dots + x_{n-1} + (-x) = 0$. Comme $(x_1, \cdots, x_{n-1}, (-x) \in \prod_{k=1}^n V_k$ et comme la somme $\sum_{k=1}^n V_k$ est directe, on en déduit en particulier que $-x = 0$, donc que $x = 0$, donc que $(\sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n = \{0\}$.

La seconde condition implique la première. Soit $(x_1, \dots, x_k) \in \prod_{k=1}^n V_k$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0$, ou encore tel que $x + x_n = 0$, où l'on a posé $x = x_1 + \dots + x_{n-1}$. Comme $x \in \sum_{k=1}^{n-1} V_k$ et comme $x = -x_n$, le vecteur x est dans l'intersection $(x \in \sum_{k=1}^{n-1} V_k) \cap V_n$, donc il est nul : en particulier $x_n = -x = 0$. Enfin, comme la somme $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$ est directe et comme $x = x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$, on en déduit que $x_1 = \dots = x_{n-1}$, ce qui achève de montrer que la somme $\sum_{k=1}^n V_k$ est directe.

844. **RMS 2010 1034 TPE PC**
Montrer que $((1-X)^n, (1-X)^{n-1}X, \dots, (1-X)X^{n-1}, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. — La famille proposée est échelonnée en valuation, donc libre, et maximale, puisqu'elle contient $n+1$ polynômes. C'est donc une base.

845. **RMS 2010 1042 TPE PC**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.
Ind. On pourra faire une récurrence sur $\dim E - \dim F$.

Solution. — La dimension de E est fixée dans cet exercice. On note $\mathbb{K}$ le corps de base, et $p = \dim E - \dim F$.
Si $p = 0$, c'est-à-dire si $\dim F = \dim G = n = \dim E$, alors $H = \{0\}$ convient (et c'est le seul). On suppose que l'existence de H est établie pour tout couple (F, G) de sous-espaces de même dimension $k = \dim E - p \geqslant 1$.
Soient F et G deux sous-espaces de E de même dimension $k - 1 = \dim E - (p+1)$. S'ils sont égaux, H existe (tout sous-espace d'un espace de dimension finie admet un supplémentaire : c'est une conséquence du théorème de la base incomplète). S'ils ne le sont pas, alors on n'a ni $F \subset G$ ni $G \subset F$ car ils ont même dimension. Il existe donc $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. On pose alors $z = x + y$, et constate que z n'est ni dans F ni dans G (par l'absurde). On pose

$$F' = F \oplus (\mathbb{K} \cdot z) \quad \text{et} \quad G' = G \oplus (\mathbb{K} \cdot z)\,.$$

Il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension k, et l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un sous espace vectoriel H' de E tel que $E = F' \oplus H' = G' \oplus H'$. On vérifie ensuite que

$$H = H' \oplus (\mathbb{K} \cdot z)$$

est un supplémentaire commun de F et G. Tout d'abord, il est de dimension $\dim E - k + 1 = \dim E - \dim F$. Ensuite, on montre que $F \cap H = \{0\}$, ce qui prouve que $E = F \oplus H$, et on montrerait de même que $E = G \oplus H$.
Pour cela, soit $t = h' + \lambda z = h' + \lambda(x + y)$ un élément quelconque de H (λ est un scalaire quelconque). Si t appartient aussi à F, alors

$$\underbrace{t - \lambda z}_{\in F'} = \underbrace{h'}_{\in H'}\,.$$

Comme F' et H' sont en somme directe, $t - \lambda z = h' = 0$, donc $t = \lambda z \in F$. Comme $z \notin F$, il faut que $\lambda = 0$, donc $t = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

846. **RMS 2006 1111 Télécom Sud Paris PC**

Soient $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = P(x+i+j-2)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$. Démontrer que A n'est pas inversible.

Solution. — On note C_j pour $1 \leqslant j \leqslant n+1$ les colonnes de A.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n. Une famille comportant $n+1$ polynômes de degré au plus $n-1$ est donc liée. En particulier, si l'on pose

$$Q_j(X) = P(X+j-1),$$

la famille $(Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1})$ est liée. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j Q_j = 0$. En évaluant cette égalité en $x+i-1$ pour i variant de 1 à $n+1$, on obtient $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j P(x+i+j-2) = 0$, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j C_j = 0\,,$$

La famille des colonnes de A étant liée, la matrice A n'est pas inversible.

847. **RMS 2010 1035 Petites Mines PC**

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication. Déterminer une base ainsi que la dimension de E.

Solution. — Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad J = M(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = M(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $I = M(1,0,0)$ est la matrice identité d'ordre n, de sorte que $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$. Il est alors clair que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille (I,J,K). De plus, $aI + bJ + cK = M(a,b,c) = 0$ implique clairement $a = b = c = 0$: finalement,

$$E \text{ est un espace vectoriel,} \quad \dim(E) = 3 \quad \text{et} \quad (I,J,K) \text{ en est une base.}$$

On remarque ensuite que $K = J^2$ et $J^3 = I_n$, donc que E est stable par produit (E est en fait la sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendrée par J).

Algèbre linéaire : applications linéaires

848. **RMS 2012 1310 ENSEA PC**

Soit $f\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

(a) Montrer que f est linéaire, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

(b) Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = 0$. Simplifier alors $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$.

(c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Généraliser.

Solution. — à rédiger ? ?

Algèbre linéaire : endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Algèbre linéaire : déterminants

849. **RMS 2006 1110 TPE PC**

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Solution. — On note D_{n+1} le déterminant à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'un déterminant d'ordre $n+1$, et en particulier

$$D_1 = a_0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0\ .$$

Pour $n \geqslant 2$, on développe D_{n+1} par rapport à sa dernière colonne, ce qui donne

$$D_{n+1} = (-1)^n D_n + a_n \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

On note Δ_n le déterminant (d'ordre n) en facteur de a_n ci-dessus, dont le terme en position (i,j) est $\binom{n+1-i}{j-1}$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$. On note que

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \binom{2}{0} & \binom{2}{1} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\ .$$

Pour $n \geqslant 2$, on effectue les transformations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i valant successivement $1, \dots, n-1$: comme $\binom{n+1-i}{j-1} - \binom{n-i}{j-1} = \binom{n-i}{j-2}$, on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & \binom{n-2}{0} & \cdots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-2}{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on établit que $\Delta_n = (-1)^{n-1}\Delta_{n-1}$. Une récurrence immédiate fournit $\forall n \geqslant 1$, $\Delta_n = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\Delta_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$, et on en déduit que $\forall n \geqslant 1, \quad D_{n+1} = (-1)^n D_n + (-1)^{n(n-1)/2} a_n$. On devine alors au brouillon, puis on démontre par récurrence la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k\ .$$

Pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $D_1 = a_0$, ce qui est vrai. On suppose la formule établie au rang $n-1$. Alors $D_{n+1} = (-1)^n D_n + (-1)^{n(n-1)/2} a_n = (-1)^n \times (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} a_k + (-1)^{n(n-1)/2} a_n$. Or

$$n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n + \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\ ,$$

donc $D_{n+1} = (-1)^{n(n-1)/2}[a_n - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k} a_k] = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k$, ce qui établit la relation souhaitée.

850. **RMS 2011 1111 Télécom Sud Paris PC**

Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $A = I_n + X\,{}^tY$.

Solution. — Si l'on désigne par E_j avec $1 \leqslant j \leqslant n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la j-ième colonne de A vaut $E_j + y_j X$. Dans le développement, par multilinéarité, de $\det(E_1 + y_1 X, \dots, E_n + y_n X)$, on obtient 2^n déterminants de la forme $\det(U_1, \dots, U_n)$, où U_j vaut E_j ou bien $y_j X$. Le caractère alterné montre que les déterminants contenant plus de deux colonnes de la forme $y_j X$ sont nuls. Il ne reste finalement plus qu'une somme de $n+1$ termes : le déterminant ne contenant pas de colonne égale à $y_j X$, et ceux qui n'en contiennent qu'une. En utilisant de nouveau la multilinéarité et l'alternance, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(I_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(E_1, \dots, E_{j-1}, y_j X, E_{j+1}, \dots, E_n) = 1 + \sum_{j=1}^{n} y_j \det(E_1, \dots, E_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i E_i, E_{j+1}, \dots, E_n)\ , \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\ . \end{aligned}$$

851. **RMS 2010 1036 Navale PC**

(a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(C+M) = \det(M)$. Montrer que $C = 0$.

(b) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+M) = \det(B+M)$. Montrer que $A = B$.

(c) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+M) = \det(B+{}^tM)$. Montrer que $A = {}^tB$.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

(a) On raisonne par contraposition. Supposons C ne soit pas la matrice nulle : elle possède au moins une colonne C_{j_0} non nulle. On complète alors la colonne $-C_{j_0}$ en une base $(X_1,\dots,X_{j_0-1},-C_{j_0},X_{j_0+1},\dots,X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Ces colonnes forment les colonnes d'une matrice inversible M telle que $\det M \neq 0$ alors que $\det(C+M) = 0$ puisque la matrice $C+M$ a sa $j_0^{\text{ème}}$ colonne nulle : c'est la négation de la propriété du (a).

(b) Il suffit d'écrire la matrice M quelconque sous la forme $-B+N$. L'hypothèse de la question (b) devient alors $\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A-B+N) = \det(N)$, et la question (a) montre que $C = A-B = 0$, donc que $A = B$.

(c) Le déterminant d'une matrice étant égal à celui de sa transposée, l'hypothèse s'écrit aussi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+M) = \det({}^tB+M)$. Il suffit ensuite d'appliquer la question (b).

852. **RMS 2010 1037 Télécom Sud Paris PC**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{i,j} = (-1)^{\max\{i,j\}}$. Calculer $\det(A)$.

Solution. — La matrice A est symétrique, et, pour $i \leqslant j$, on a $a_{i,j} = (-1)^j$. En d'autres termes, les éléments de A alternent sur les équerres de cette forme $\ulcorner$, qui apparaissent ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Les transformations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ..., et enfin $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ ne changent pas la valeur de $\det(A)$ ni sa dernière ligne, et conduisent à un déterminant triangulaire inférieur :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & 2 & -2 & \cdots & 2(-1)^{n-1} & 0 \\ -1 & 1 & -1 & (-1)^{n-1} & (-1)^n \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} 2^{n-1}.$$

En effet, il apparaît un signe moins pour chaque colonne impaire : le nombre de colonnes impaires étant le plus grand entier k tel que $2k+1 \leqslant n$, la puissance de -1 est ainsi justifiée.

853. **RMS 2012 1311 Mines d'Alès PC**

Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $\det A = 0$ puis que $A = 0$.

Solution. — à rédiger ? ?

Algèbre linéaire : éléments propres, polynômes annulateurs, polynôme caractéristique

854. **RMS 2011 1118 TPE PC**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un scalaire λ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $(f - \lambda\mathrm{id})^p = 0$. Montrer que λ est valeur propre de f et que c'est la seule.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

L'endomorphisme f annule $(X-\lambda)^p$ donc $\mathrm{Sp}\, f \subset \{\lambda\}$. De plus, la relation de l'énoncé donne $[\det(f - \lambda\mathrm{id})]^p = 0$ soit $\det(f - \lambda\mathrm{id}) = 0$, et λ est effectivement valeur propre.

855. **RMS 2010 1045 Télécom Sud Paris PC**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle ayant pour polynôme annulateur $X(X+2)$. Montrer que -2 est valeur propre de A.

Solution. — Les valeurs propres de A sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, donc valent zéro ou -2. Si -2 n'était pas valeur propre de A, alors l'unique valeur propre de A serait zéro. Comme A est diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle. Cette hypothèse étant exclue par l'énoncé, on en déduit que -2 est bien une valeur propre de A.

856. **RMS 2012 1312 TPE PC**
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. — à rédiger ? ?

857. **RMS 2012 1317 ENSEA PC**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Solution. — à rédiger ? ?

858. **RMS 2006 1115 ENSEA PC**
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. — Le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$ est annulateur de A. Or $P = \frac{X^4-1}{X-1}$, donc les racines de P sont les racines quatrièmes de l'unité différentes de 1, c'est-à-dire i, -1 et $-i$. Les valeurs propres de A sont donc *parmi* ces racines, mais on ne peut pas en dire plus. Par ailleurs, comme P, polynôme annulateur de A, est scindé à racines simples, A est diagonalisable.

859. **RMS 2011 1123 TPE PC**
Soient E un espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

(a) Montrer que les valeurs propres non nulles de $g \circ f$ sont aussi valeurs propres de $f \circ g$.
(b) En dimension finie, montrer que si zéro est valeur propre de $g \circ f$, alors zéro est aussi valeur propre de $f \circ g$.
(c) Montrer que cette propriété est fausse en dimension infinie.
Indication. Considérer $E = \mathbb{R}[X]$, $f \colon P \mapsto P'$ et $g \colon P \mapsto XP$.

Solution. —

(a) Soit λ une valeur propre non nulle de $g \circ f$, et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $y := f(x) \neq 0$, sinon $(g \circ f)(x) = g(0) = 0 = \lambda x$, alors que ni x ni λ n'est nul. En composant l'égalité $(g \circ f)(x) = \lambda x$ par f, on obtient
$$(f \circ g)(y) = \lambda y \quad \text{avec} \quad y = f(x) \neq 0\,,$$
ce qui prouve que λ est aussi valeur propre de $f \circ g$.
(b) On suppose que si zéro est valeur propre de $g \circ f$, donc que $g \circ f$ n'est pas bijectif. Comme E est de dimension finie, on peut utiliser le déterminant : $\det(g \circ f) = 0$. Comme le déterminant est un morphisme pour les lois $\circ$ et $\times$, on obtient $\det(g) \times \det(f) = 0$, donc $\det(f) \times \det(g) = 0$ donc $\det(f \circ g) = 0$. Cette dernière égalité montre que $f \circ g$ n'est pas bijectif, donc (il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie) que $f \circ g$ n'est pas injectif, donc que zéro est valeur propre de $f \circ g$.
(c) Avec les endomorphismes f et g de l'indication, on obtient $g \circ f \colon P \mapsto XP'$, dont zéro est valeur propre car $g(1) = 0$, et $f \circ g \colon P \mapsto (XP)' = XP' + P$, qui est injectif, car $(f \circ g)(X^n) = (n+1)X^n$, ce qui montre que $\deg(f \circ g)(P) = \deg(P)$ pour tout polynôme P.

Algèbre linéaire : réduction d'endomorphismes ou de matrices explicites

860. **RMS 2006 1117 TPE PC**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_{n-k,k+1} = z_k$, les autres coefficients étant nuls.

Solution. — Voir aussi l'exercice 530 page 373.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$:
$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & z_{n-2} & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & z_1 & \cdots & 0 & 0 \\ z_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On va utiliser une décomposition de l'espace en plans stables. Soit $\mathcal{B}_1$ la base contenant les vecteurs de la base canonique, dans l'ordre suivant : le premier suivi du dernier, puis le second suivi de l'avant dernier, jusqu'à ce qu'il ne reste plus

que deux vecteurs si $n = 2p$ est pair (qui seront e_p et e_{p+1}), ou bien jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul vecteur si $n = 2p+1$ est impair (ce sera e_{p+1}). En d'autres termes :

$$\begin{aligned}\text{si } n = 2p \text{ est pair,}\quad \mathcal{B}_1 &= \Big(\underbrace{e_1, e_{2p}}, \underbrace{e_2, e_{2p-1}}, \dots, \underbrace{e_p, e_{p+1}}\Big),\\ \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair,}\quad \mathcal{B}_1 &= \Big(\underbrace{e_1, e_{2p+1}}, \underbrace{e_2, e_{2p}}, \dots, \underbrace{e_p, e_{p+2}}, e_{p+1}\Big).\end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant k < n-1-k$, on note P_k le plan vectoriel $\operatorname{Vect}(e_k, e_{n-1-k})$ engendré par les deux vecteurs distincts e_k et e_{n-k-1}. La base $\mathcal{B}_1$ est adaptée à la décomposition suivante de E en somme directe :

$$\begin{aligned}\text{si } n = 2p \text{ est pair,}\quad & E = P_1 \oplus \dots \oplus P_p\,,\\ \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair,}\quad & E = P_1 \oplus \dots \oplus P_p \oplus D_p, \quad \text{où } D_p = \operatorname{Vect}(e_{p+1}).\end{aligned}$$

Dans la base $\mathcal{B}_1$, la matrice de u est une matrice diagonale par blocs : $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \dots, B_p)$ si $n = 2p$ est pair, et $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \dots, B_p, z_{p+1})$ si $n = 2p+1$ est pair, avec

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & z_{n-k} \\ z_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le cours affirme que si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ est une décomposition de E en sous-espaces vectoriels stables par u, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'endomorphisme u est diagonalisable.

(ii) Les endomorphismes induits $u_{/\!/F_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ sont diagonalisables.

Il suffit donc de déterminer à quelle condition les blocs B_k sont diagonalisables (dans le cas impair, l'endomorphisme u induit sur la droite D_p est évidemment diagonalisable). Or le polynôme caractéristique de B_k est $\chi_k(x) = x^2 - z_{k-1}z_{n-k}$. Deux cas se produisent.

(a) Le produit $z_{k-1}z_{n-k}$ n'est pas nul. Alors χ_k admet deux racines simples complexes, et B_k est diagonalisable.

(b) Le produit $z_{k-1}z_{n-k}$ est nul. On distingue de nouveau deux cas.
   – Les deux nombres z_{k-1} et z_{n-k} sont nuls : alors B_k est nulle, donc diagonalisable.
   – Un seul des deux nombres en question est nul. Alors B_k est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \neq 0\,.$$

   La seule valeur propre de B_k est zéro et son noyau est une droite, donc elle n'est pas diagonalisable.

Voici donc la condition nécessaire et suffisante recherchée.

> La matrice A est diagonalisable si et seulement si, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et tel que z_{k-1} soit nul, alors z_{n-k} est nul aussi. En d'autres termes, les éléments nuls de l'antidiagonale de A sont distribués symétriquement par rapport au centre de A.

861. **RMS 2010 1043 Petites Mines PC**

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m pour que A soit diagonalisable.

(b) La matrice A peut-elle être semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$?

SOLUTION. — On suppose que $n \geqslant 2$ dans ce qui suit.

(a) Les colonnes de A étant proportionnelles à la première et non toutes nulles, A est de rang $n-1$, donc zéro est valeur propre de A de multiplicité au moins $n-1$. Il reste éventuellement une dernière valeur propre, notée λ, à découvrir. Pour cela, on sait que la trace de A est la somme de ses valeurs propres complexes, et on obtient

$$\lambda = n - 1 + m\,.$$

On discute ensuite suivant la valeur de m.
   – Si $m = n-1$, alors zéro est valeur propre de A d'ordre $n > \dim E_0(A) = n-1$, donc A n'est pas diagonalisable.
   – Si $m \neq n-1$, alors $\lambda \neq 0$ est valeur propre de A d'ordre 1, donc $\dim E_0(A) + \dim E_\lambda(A) = n$, donc A est diagonalisable.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $m \neq 1-n$.

(b) La réponse est oui, et cela se produit si et seulement si $m = 1 - n$.

Analyse. Si tel est le cas, A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Il est clair que B est de rang 1 et que $\operatorname{tr} B = 0$, donc que zéro est la seule valeur propre de B, de multiplicité n. D'après la question (a), il faut que $m = 1 - n$ pour que A soit semblable à B.

Synthèse. Si $m = 1 - n$, on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarque que $\operatorname{Im} u$ est la droite engendrée par $e'_1 = e_1 + \cdots + e_n$, et que $u(e'_1) = 0$, donc que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, qui est de dimension $n - 1$ d'après la question (a).

On pose alors $e'_2 = e_2$, de sorte que $u(e'_2) = e'_1 \neq 0$, et le théorème de la base incomplète assure que l'on peut trouver des vecteurs $e'_3, \dots, e'_n$ pour compléter e'_1 et former une base $(e'_1, e'_3, \dots, e'_n)$ de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e'_2 \notin \operatorname{Ker} u$, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de u sur $\mathcal{B}'$ est B, donc A est bien semblable à B.

862. **RMS 2006 1114 TPE PC**

Soit u l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans lui-même qui, à la matrice de colonnes $[C_1, C_2, C_3]$ associe $[C_3, C_1, C_2]$.

(a) Montrer que u est un endomorphisme.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

(c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

(d) Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans une base de diagonalisation.

Solution. —

(a) La linéarité de u est évidente, et l'ensemble d'arrivée de u est bien $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc c'est un endomorphisme.

(b) Soit $M = [C_1, C_2, C_3]$ un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et soit λ un nombre complexe. La matrice M est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ si et seulement si $M \neq 0$ et si le système suivant est satisfait :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_3 & = & \lambda C_1\,, \\ C_1 & = & \lambda C_2\,, \\ C_2 & = & \lambda C_3\,, \end{array}\right. \qquad \text{ou encore, par substitution,} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} C_3 & = & \lambda^3 C_3\,, \\ C_1 & = & \lambda C_2\,, \\ C_2 & = & \lambda C_3\,. \end{array}\right.$$

Il est impossible que $C_3 = 0$, sinon $C_2 = 0$, puis $C_1 = 0$, et M serait nulle, ce qui contredirait sa qualité de vecteur propre. La première équation est donc équivalente à $\lambda^3 = 1$. Par suite, les valeurs propres complexes de u sont les racines cubiques de l'unité, et les vecteurs propres correspondants sont les matrices de la forme $[\lambda^2 C_3, \lambda C_3, C_3]$ avec C_3 non nulle.

(c) La dimension des trois sous-espaces propres de u est 3, leur somme vaut $9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))$, donc u est diagonalisable.

Remarque. — Pour les questions (b) et (c), on peut aussi noter que u^3 est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, donc que u annule le polynôme $X^3 - 1$, que ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc que u est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que les valeurs propres de u sont parmi les racines de P *etc.*

(d) Cette question n'a pas de réponse unique, car il faut décider de l'ordre dans lequel on écrit les matrices élémentaires E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Je choisis $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33})$. Alors la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A&0&0 \\ 0&A&0 \\ 0&0&A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}.$$

La deuxième expression est plus parlante : il s'agit d'une matrice diagonale par blocs. Dans une base de diagonalisation bien choisie (d'abord la valeur propre 1, puis $\omega = e^{2i\pi/3}$, puis son conjugué), la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & \omega I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\omega} I_3 \end{pmatrix}.$$

Algèbre linéaire : réduction, problèmes théoriques

863. **RMS 2006 1116 ENSEA PC**

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \mathrm{id}_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$. Montrer que $g = 3f_1 + f_2 - 2f_3 + 5f_4$ est diagonalisable.

Solution. — L'argument essentiel est le suivant : les f_i sont des projecteurs sur quatre sous-espaces F_i (qui peuvent être réduit(s) à $\{0\}$) tels que

$$F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 = E\ ,$$
$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \quad \mathrm{Ker}(f_i) = \oplus_{j \neq i} F_j\ .$$

En effet, si l'on compose (à gauche) l'égalité $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \mathrm{id}_E$ par f_1 en tenant compte du fait que $f_1 \circ f_j = 0$ pour $j \neq 1$, on obtient $f_1 \circ f_1 = f_1$, qui est précisément la caractérisation des projecteurs si l'on sait déjà que f_1 est linéaire (c'est le cas). On procède de même pour f_2, f_3 et f_4.

On note F_i l'image de f_i. L'identité $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = \mathrm{id}_E(x) = x$, valable pour tout $x \in E$, montre que la somme des F_i vaut E. Reste à voir que cette somme est directe. On suppose que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, avec $x_i \in F_i$. Comme F_i est la base du projecteur f_i, chaque x_i est fixe par f_i : on a $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) = 0$. On applique alors f_1 en tenant compte du fait que $f_1 \circ f_j = 0$ pour $j \neq 1$. On obtient $f_1 \circ f_1(x_1) = 0$, donc $x_1 = 0$, puisque x_1 est fixe par f_1. On procède de même pour montrer que $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. On en déduit que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 = E$.

L'affirmation relative aux noyaux des f_i est laissée à la lectrice (au lecteur). En fait, elle est déjà prouvée de façon implicite ci-dessus.

Les quatre sous-espaces F_i étant en somme directe, on peut choisir une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ en mettant bout à bout des bases de ceux des F_i qui ne sont pas réduits au vecteur nul (la situation idéale est celle où les F_i sont des droites, et e_i est une base de la droite F_i). Compte tenu des calculs de noyau et d'image, chaque F_i non réduit au vecteur nul est un sous-espace propre de g : ces sous-espaces propres ont donc une somme qui vaut E, ce qui montre que g est diagonalisable.

Dans la situation idéale (quatre droites), la matrice de g sur $\mathcal{B}$ vaut $\mathrm{diag}(3, 1, -2, 5)$. Si, par exemple, $F_2 = F_3 = \{0\}$, et que F_1 est une droite (alors F_4 est de dimension 3), la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(3, 5, 5, 5)$.

Remarque. — On généralise sans peine cet exercice au cas d'une dimension quelconque. Les f_i sont appelés les projecteurs spectraux associés à l'endomorphisme g.

864. **RMS 2007 935 Télécom Sud Paris PC**

Soit u dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}) = \{0\}$. Montrer que u est diagonalisable.

Solution. — On va démontrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = \mathbb{R}^n$, ce qui suffira. En effet, ou bien les deux noyaux ne sont pas réduits à $\{0\}$, et ce sont alors tous deux des sous-espaces propres dont la somme vaut E, et c'est la définition de la diagonalisabilité de u, ou bien un seul n'est pas réduit à zéro, et alors $u = \pm\mathrm{id}$ est diagonalisable (il est impossible que les deux soient réduits à $\{0\}$, puisque leur somme vaut $\mathbb{R}^n$, et qu'il est implicitement supposé que $n \geqslant 1$).

Comme on sait déjà que la somme $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ est directe (ce sont des sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes ou bien ils sont réduits à zéro), il suffit de démontrer que $\dim[\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})] + \dim[\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})] \geqslant n$. Or, par hypothèse, la somme $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) + \mathrm{Im}(u + \mathrm{id})$ est directe et contenue dans E, donc

$$\dim[\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u + \mathrm{id})] = \dim[\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})] + \dim[\mathrm{Im}(u + \mathrm{id})] \leqslant n\ .$$

La formule du rang indique alors que $n - \dim[\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})] + n - \dim[\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})] \leqslant n$, d'où l'on déduit que

$$\dim[\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})] + \dim[\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})] \geqslant n\ ,$$

ce que l'on voulait démontrer. On peut ajouter que u est une symétrie, vu que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) = \mathbb{R}^n$.

865. **RMS 2010 1052 TPE PC**

Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\Phi\colon v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de Φ si et seulement si λ est une valeur propre de u.

(c) Si E_λ est l'espace propre de u associé à la valeur propre λ, montrer que $\mathcal{L}(E, E_\lambda)$ est l'espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

(d) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si Φ est diagonalisable.

Solution. —

(a) Tout d'abord $\Phi(v) = u \circ v$ est un endomorphisme de E pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$. Ensuite, les propriétés d'algèbre de $(\mathcal{L}(E), +\,, \cdot\,, \circ\,)$ montrent que $\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = u \circ (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u \circ v_1 + \lambda_2 u \circ v_2 = \lambda_1 \Phi(v_1) + \lambda_2 \Phi(v_2)$ pour tous scalaires λ_1, λ_2 et tous endomorphismes v_1, v_2. Il s'ensuit que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(b) On suppose que λ est une valeur propre de Φ. Il existe un endomorphisme v non nul tel que $\Phi(v) = u \circ v = \lambda v$, donc $u(v(x)) = \lambda v(x)$ pour tout $x \in E$. Comme v n'est pas la fonction nulle, il existe $x_0 \in E$ tel que $y_0 := v(x_0) \neq 0$, et alors $u(y_0) = \lambda y_0$, donc λ est une valeur propre de u.

Réciproquement, on suppose que λ est une valeur propre de u. Il existe un vecteur y_0 non nul tel que $u(y_0) = \lambda y_0$. Comme E est de dimension finie (on l'appelle n) et comme (y_0) est une famille libre puisque $y_0 \neq 0$, le théorème de la base incomplète s'applique : il existe des vecteurs $y_1 \dots, y_{n-1}$ tels que $(y_0, \dots, y_{n-1})$ soit une base de E. On définit alors un endomorphisme non nul v de E en posant $v(y_0) = y_0$ et $v(y_i) = 0_E$ pour tout $i \geqslant 1$. Alors

$$\begin{array}{rrcccccccc} & \Phi(v)(y_0) & = & u(v(y_0)) & = & u(y_0) & = & \lambda y_0 & = & (\lambda v)(y_0)\,, \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, & \Phi(v)(y_i) & = & u(v(y_i)) & = & u(0_E) & = & 0_E & = & (\lambda v)(y_i)\,, \end{array}$$

ce qui prouve que l'égalité $\Phi(v)(x) = (\lambda v)(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, puisqu'elle est vraie sur une base de E. On en déduit que $\Phi(v) = \lambda v$, donc que λ est une valeur propre de Φ puisque v n'est pas nul.

(c) On cherche les endomorphismes v tels que $\Phi(v) = \lambda v$, c'est-à-dire tels que $u(v(x)) = \lambda v(x)$ pour tout $x \in E$. Par définition de E_λ, cela se produit si et seulement si $v(x) \in E_\lambda$ pour tout $x \in E$, ou encore si et seulement si $\operatorname{Im} v \subset E_\lambda$. L'ensemble des endomorphismes de E dont l'image est contenue dans le sous-espace vectoriel E_λ est en effet isomorphe (mais pas égal) à $\mathcal{L}(E, E_\lambda)$, ce qui achève la question.

(d) On utilise le critère suivant de diagonalisabilité : la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut la dimension de l'espace de départ. La question (b) ayant établit l'égalité des spectres de u et de Φ, la question (c) ayant calculé les sous-espaces propres de Φ, on en déduit la relation

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi)} \dim E_\lambda(\Phi) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi)} \dim \mathcal{L}(E, E_\lambda(u)) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi)} (\dim E \times \dim E_\lambda(u)) = \dim E \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)\,.$$

L'équivalence entre $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ et $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi)} \dim E_\lambda(\Phi) = \dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ en résulte immédiatement, donc u est diagonalisable si et seulement si Φ est diagonalisable.

Espaces préhilbertiens : bases orthonormales, projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

866. **RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

(a) Montrer : $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$.

Solution. — Voir l'exercice 665 page 434.

Espaces euclidiens : automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales, endomorphismes et matrices symétriques

867. **RMS 2010 1061 TPE PC**

Soient A, M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont diagonalisables.

(b) Montrer que MN et NM ont les mêmes valeurs propres et que les espaces propres associées à une valeur propre λ non nulle ont même dimension.

(c) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. En déduire qu'il existe $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = {}^tU A\,{}^tAU$.

Solution. — Elle est due à Alain Walbron.

(a) Les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont symétriques réelles donc diagonalisables.

(b) – Comparaison des spectres.
Si $0 \in \operatorname{Sp}(MN)$, alors $\det(MN) = 0$, donc aussi $\det(NM) = 0$ donc $0 \in \operatorname{Sp}(NM)$.
Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(MN)\backslash\{0\}$ et $X \neq 0$ tel que $MNX = \lambda X$. Comme $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$, il vient $NX \neq 0$. On a alors $(NM)NX = \lambda NX$ avec $NX \neq 0$ donc $\lambda \in \operatorname{Sp}(NM)\backslash\{0\}$.

– Comparaison des dimensions.
Soit λ une valeur propre non nulle commune à MN et NM. L'application $\Phi_\lambda : E_\lambda(MN) \longrightarrow E_\lambda(NM)$ définie par

$$\forall X \in E_\lambda(MN), \quad \Phi_\lambda(X) = NX$$

est linéaire, et son noyau vaut $E_\lambda(MN) \cap \operatorname{Ker} N = \{0\}$. Ainsi Φ_λ est injective et $\dim E_\lambda(MN) \leqslant \dim E_\lambda(NM)$ et en échangeant les rôles :

$$\dim E_\lambda(MN) = \dim E_\lambda(NM)\,.$$

Remarque. — L'égalité des dimensions tombe en défaut pour $\lambda = 0$, comme le montre le cas suivant, basé sur les matrices élémentaires : $M = E_{1,1}$ et $N = E_{1,2}$, pour lesquelles $MN = E_{1,2}$ avec $\dim E_0(MN) = n-1$ et $NM = 0$ avec $\dim E_0(NM) = n$.

(c) Il s'agit de montrer que $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}({}^tAA)$, $\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_\lambda(A\,{}^tA)$. D'après la fin de la question (b), il reste à voir le cas de l'éventuelle valeur propre zéro.
Or on prouve (classique) que $\operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}(A\,{}^tA) = \operatorname{Ker}({}^tA)$. La formule du rang, assortie de l'égalité $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A)$, donne $\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}({}^tA)$ et finalement $\dim \operatorname{Ker}({}^tAA) = \dim \operatorname{Ker}(A\,{}^tA)$.
Il s'agit, pour terminer, de la diagonalisation orthogonale de deux matrices symétriques avec une même diagonale.

Analyse

Espaces vectoriels normés

868. **RMS 2006 1121 Télécom Sud Paris PC**
Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t)^{\frac12}$.

(a) Montrer que N est une norme sur E.
(b) La norme N et la norme préhilbertienne canonique sont-elles équivalentes sur E ?

Solution. —

(a) Pour toutes fonctions f et g de E, on pose

$$(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Ceci définit un produit scalaire sur E : la forme en question est manifestement bilinéaire et symétrique et, si $(f|f) = f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$, alors les deux termes de cette somme sont nuls puisqu'ils sont positifs, donc f' est nulle sur $[0,1]$ (propriété des intégrales de fonctions continues), donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, c'est que f est nulle. La fonction N est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

(b) On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E par : $\forall t \in [0,1]$, $f_n(t) = t^n$. On calcule

$$\|f_n\| = \left(\int_0^1 (t^n)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12} = \left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\right)^{\frac12} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,,$$
$$N(f_n) = \left(f_n(0) + \int_0^1 (nt^{n-1})^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12} = \left(n^2\left[\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1\right)^{\frac12} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}\,.$$

On lit ci-dessus que (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|$, et que $N(f_n)$ diverge vers $+\infty$, donc que la suite (f_n) ne converge pas pour la norme N (vers quelque limite que ce soit). Les normes N et $\|\cdot\|$ ne sont donc pas équivalentes.

Suites récurrentes

869. **RMS 2012 1326 TPE PC**
Soient $a > 0$ et $f\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{1+ax} - 1$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f, que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que $f(x) - x$ est du signe de $x(a-2-x)$. Déterminer les points fixes f ainsi que les intervalles stables. Tracer le graphe de f pour différentes valeurs de a.
(b) On suppose $a < 2$ et on considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim u_n = 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

(c) Que dire de la suite (u_n) si $a > 2$?

Solution. — à rédiger ? ?

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

870. **RMS 2010 1071 Petites Mines PC**

Déterminer la limite de $(3^x - 3\times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$ quand x tend vers 3.

Solution. — On note f la fonction dont l'expression est donnée ci-dessus, et on effectue un développement limité de $f(3+h)$ quand h tend vers zéro :

$$\begin{aligned}
f(3+h) &= \exp\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{6}\right)\ln\left(27e^{h\ln 3}-24e^{h\ln 2}-2\right)\right) = \exp\left(-\frac{\ln\left(27e^{h\ln 3}-24e^{h\ln 2}-2\right)}{\tan\left(\frac{\pi h}{6}\right)}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\ln\left(27\left[1+h\ln 3+\mathrm{o}(h)\right]-24\left[1+h\ln 2+\mathrm{o}(h)\right]-2\right)}{\frac{\pi h}{6}+\mathrm{o}(h)}\right),\\
&= \exp\left(-\frac{\ln\left(1+[27\ln 3-24\ln 2]h+\mathrm{o}(h)\right)}{\frac{\pi h}{6}+\mathrm{o}(h)}\right) = \exp\left(-\frac{[27\ln 3-24\ln 2]h+\mathrm{o}(h)}{\frac{\pi h}{6}+\mathrm{o}(h)}\right),\\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{6}{\pi}[24\ln 2-27\ln 3]\right).
\end{aligned}$$

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonctions indéfiniment dérivables, convexité

871. **RMS 2010 1072 Télécom Sud Paris PC**

Soit $(a,b)\in([1,+\infty[)^2$. Montrer que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ 1+x^ay^b\leqslant(1+x)^a(1+y)^b$.

Solution. — Si $y=0$, l'inégalité et banale. Si $y>0$, on étudie la fonction $f\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto(1+x)^a(1+y)^b-1-x^ay^b$. Elle est dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=a(1+x)^{a-1}(1+y)^b-ax^{a-1}y^b=ay^b\left[k(1+x)^{a-1}-x^{a-1}\right]\ ,$$

où k est la constante $(y^{-1}+1)^b$.

Si $a\geqslant 1$, la fonction $u\mapsto u^{a-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $(1+x)^{a-1}\geqslant x^{a-1}$ et, comme $k\geqslant 1$, on en déduit que $f'(x)\geqslant 0$ pour tout $x>0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que $f(x)\geqslant f(0)=(1+y)^b-1\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 0$, ce qui établit l'inégalité souhaitée.

Si $b\geqslant 1$, on échange les rôles de x et y et on parvient au même résultat.

Remarque. — On a démontré un résultat un peu plus général : si au moins l'un des deux nombres (positifs) a ou b est dans $[1,+\infty[$, alors $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ 1+x^ay^b\leqslant(1+x)^a(1+y)^b$. En revanche, si a et b sont strictement plus petits que 1, l'inégalité demandée peut être fausse au voisinage de l'origine : si $a=b=1/3$ et si $x=y$, le membre de gauche vaut $1+x^{2/3}$, et celui de droite admet le développement limité $1+2x/3+\mathrm{o}(x)$ au voisinage de l'origine. Comme $2x/3$ est négligeable devant $x^{2/3}$ au voisinage de zéro et comme ce sont deux quantités positives, on peut affirmer que $1+x^{2/3}>(1+x)^{2/3}$ pour x proche de zéro.

872. **RMS 2007 945 ENSEA PC**

Étudier $x\mapsto\int_x^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (variations, prolongement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, équivalent en $+\infty$).

Solution. — On note f la fonction étudiée et g la fonction $t\mapsto e^{-t}/t$.

Ensemble de définition. Si $x\neq 0$, le segment d'extrémités x et $3x$ ne contient pas zéro. Alors $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue (la fonction g) sur un segment, donc elle est définie :

$$D_f=\mathbb{R}^*\ .$$

Étude en zéro. Pour $t\in[-1,1]\setminus\{0\}$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction dérivable $t\mapsto e^{-t}$, affirme que

$$\left|\frac{e^{-t}-1}{t}\right|=\left|\frac{e^{-t}-e^{-0}}{t-0}\right|\leqslant\sup_{t\in[-1,1]}|-e^{-t}|=e\ .$$

Par inégalité triangulaire, il en résulte que

$$\left|f(x)-\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|=\left|f(x)-[\ln|t|]_x^{3x}\right|=|f(x)-\ln 3|\leqslant\left|\int_x^{3x}\left|\frac{e^{-t}-1}{t}\right|\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^{3x}e\,\mathrm{d}t\right|=2e|x|\ .$$

On en déduit que f est prolongeable par continuité en zéro en posant (ce que l'on fera dans le reste de l'exercice) :

$$f(0) = \ln 3\,.$$

Variations et prolongement $\mathcal{C}^1$. Soit $\varepsilon = \pm 1$, suivant le signe de $x \in \mathbb{R}^*$. En écrivant que $f(x) = \int_\varepsilon^{3x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$ et en invoquant la continuité de g, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 3g(3x) - g(x) = \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{x}\,.$$

Un développement limité montre que

$$f'(x) = \frac{1 - 3x + \mathrm{o}(x) - (1 - x + \mathrm{o}(x))}{x} = -2 + \mathrm{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2\,.$$

Le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dit alors (f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, et f'admet une limite finie en zéro) que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(0) = -2\,.$$

On en déduit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que f décroît strictement.
Étude en $+\infty$. On peut constater, pour commencer, que $t \geqslant 1$ entraîne $0 \leqslant g(t) \leqslant e^{-t}$, donc que $x \geqslant 1$ entraîne $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{3x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-x} - e^{-3x}$, donc que

$$\lim_{+\infty} f = 0\,.$$

On obtient un équivalent par intégration par parties :

$$f(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-3x}}{3x} - \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

On majore la dernière intégrale par

$$0 \leqslant \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x^2} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\,.$$

Comme $\frac{e^{-3x}}{3x}$ est aussi négligeable devant $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$, on en déduit que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}\,.$$

873. **RMS 2011 1138 TPE PC**
Déterminer les $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en zéro et telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

Solution. — On pose $a = f'(0)$. En substituant x et y par zéro, on obtient $f(0) = 2f(0)$ donc

$$f(0) = 0\,.$$

Analyse. On fixe x, et on calcule le taux d'accroissement de f en x :

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = e^x \frac{f(y)}{y} + \frac{e^y - 1}{y} f(x) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} ae^x + f(x)\,.$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = ae^x$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme 1 est une racine simple du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto bxe^x$ avec $b \in \mathbb{R}$. On trouve $b = a$, et finalement, f est de la forme $x \mapsto \lambda e^x + axe^x$. Comme $f(0) = 0$, il faut que $\lambda = 0$.
Synthèse. Si $f\colon x \mapsto axe^x$, la fonction f est bien dérivable en zéro, $f(x+y) = a(x+y)e^{x+y}$, et $e^x f(y) + e^y f(x) = ae^x ye^y + ae^y xe^x$: c'est la même chose. On conclut que les solutions de l'équation fonctionnelle étudiée sont

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = axe^x\,.$$

Séries numériques

874. **RMS 2007 941 TPE PC**

Nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 - 1/n^2)$.

Solution. — L'équivalent $u_n \sim -1/n^2$ prouve que la série étudiée est (absolument) convergente.

875. **RMS 2011 1135 TPE PC**

Si $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de chiffres de n. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = 1/(na^{p_n})$.

Solution. — Le terme général n'est défini qu'à partir du rang 1 : on supposera donc $n \geqslant 1$. Alors n possède k chiffres si et seulement s'il vérifie $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$, ou encore $k - 1 \leqslant \log n < k$, où log désigne le logarithme décimal. On en déduit que

$$\log n \leqslant p_n = 1 + \lfloor \log n \rfloor \leqslant 1 + \log n\,.$$

Si $a \leqslant 1$, alors $a^{p_n} = \exp(p_n \ln a) \leqslant 1$, donc $u_n \geqslant 1/n$, et la série $\sum n$ diverge. Si $a > 1$, on déduit de la minoration de p_n ci-dessus que $a^{p_n} = \exp(p_n \ln a) \geqslant \exp(\log n \ln a) = \exp(\ln n \log a/\ln 10) = n^{\log a/\ln 10}$, donc que

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{\log a}{\ln 10}}}\,,$$

ce qui montre, par comparaison à une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 + \log a/\ln 10 > 1$, que $\sum u_n$ converge.

876. **RMS 2006 1123 TPE PC**

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On définit (u_n) par : $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(a_n + \tan u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge, et que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} u_n < \frac{\pi}{2}$.

Solution. — La suite (u_n) est bien définie, car arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ par hypothèse, donc $\tan(u_0)$ est définie, donc u_1 est définie et, comme a_0 est positif et arctan croissante, $u_1 = \arctan(a_0 + \tan(u_0)) \geqslant \arctan(\tan(u_0)) = u_0$ (la dernière égalité résulte de l'identité $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).
- On suppose $(\mathcal{P}_{n-1})$ vraie. Alors u_n appartient à $[0, \frac{\pi}{2}[$ en tant qu'image par arctan d'un nombre réel positif. Puis, comme a_n est positif et arctan croissante, $u_{n+1} = \arctan(a_n + \tan(u_n)) \geqslant \arctan(\tan(u_n)) = u_n$, grâce au fait qu'on vient d'établir que $-\frac{\pi}{2} < u_n < \frac{\pi}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$, donc elle converge, vers une limite notée ℓ, appartenant à l'intervalle fermé $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\tan(u_{n+1}) = a_n + \tan(u_n)$, ou encore $a_n = \tan(u_{n+1}) - \tan(u_n)$. La somme partielle S_n d'ordre n de $\sum a_n$ est télescopique et vaut

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} [\tan(u_{k+1}) - \tan(k_n)] = \tan(u_{n+1}) - \tan(u_0)\,.$$

Par suite, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si la suite de terme général $\tan(u_n)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\ell < \frac{\pi}{2}$.

877. **RMS 2007 942 TPE PC**

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$.

Solution. — La série est manifestement alternée. Comme $|u_n| = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$ et comme $\forall x \in [0, \pi/2]$, $(\cos x)^{n+1} \leqslant (\cos x)^n$, la suite de terme général $|u_n|$ décroît. La domination $|(\cos x)^n| \leqslant 1$ avec la fonction constante 1 qui est intégrable sur $[0, \pi/2]$ et la convergence simple de la suite de fonctions $f_n \colon x \mapsto (-\cos x)^n$ vers la fonction nulle sur $]0, \pi/2]$ montrent que $\lim u_n = 0$.

Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Leibniz, ou théorème spécial des séries alternées : la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

On peut aussi prouver la convergence en calculant la somme, par l'intermédiaire des sommes partielles

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} (-\cos x)^k = \frac{1 - (-\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x}\,.$$

La domination $\forall x \in [0, \pi/2]$, $|S_n(x)| \leqslant 2$ et la convergence simple de la suite de fonctions (S_n) vers $x \mapsto 1/(1 + \cos x)$ sur $]0, \pi/2]$ montre que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} S_n(x) \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}\,.$$

On retrouve le fait que la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge. Le changement de variable $t=\tan(x/2)$ permet de calculer la somme de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

878. **RMS 2010 1063 TPE PC**

Donner un équivalent de $u_n=\sum_{k=1}^n (\ln k)^2$.

Solution. — On remarque que $u_n=\sum_{k=2}^n (\ln k)^2$. On applique une comparaison série intégrale : comme la fonction continue $f\colon t\in[1,+\infty[\mapsto (\ln t)^2$ est croissante, $\int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et on en déduit que

$$\forall n\geqslant 2,\quad \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On calcule une primitive de f par intégration par partie, que l'on mène par exemple sur l'intégrale de gauche :

$$\int_1^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t = [(t\ln t - t)\ln t]_1^n - \int_1^n (\ln t - 1)\,\mathrm{d}t = [(t\ln t - t)\ln t - t\ln t + 2t]_1^n = \left[t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t\right]_1^n\,,$$
$$= n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2$$

Il est clair que cette intégrale est équivalente à $n(\ln n)^2$ quand n tend vers $+\infty$. Dans l'encadrement de u_n, l'intégrale de droite vaut alors $(n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - k$, où k est une constante réelle dont la valeur importe peu : un développement limité banal montre que cette quantité est elle aussi équivalente à $n(\ln n)^2$ quand n tend vers $+\infty$, et on en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2\,.$$

879. **RMS 2010 1065 Télécom Sud Paris PC**

Déterminer la limite de $S_n=\sum_{k=1}^n \sin(k/n)\sin(k/n^2)$.

Solution. — On pose

$$R_n=\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\,,$$

où $a=0$, $b=1$, et f désigne la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ d'expression $f(x)=x\sin x$. On reconnaît dans R_n une somme de Riemann régulière d'ordre n de la fonction f. Cette dernière étant continue par morceaux, le théorème relatif aux sommes de Riemann montre que $\lim R_n=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, qui n'est pas nulle.

On établit maintenant le lien entre R_n et S_n. Une étude de fonctions très simple montre que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $x-x^3/6\leqslant \sin x\leqslant x$. Cet encadrement, appliqué au second facteur du terme général de S_n, montre que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad R_n - \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant R_n$$

L'inégalité triangulaire et la majoration de $|\sin|$ et de k/n par 1 pour tout $k\in\{1\dots,n\}$ montrent que

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6n^2}\,,$$

qui tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Comme la suite de terme général converge vers une limite finie non nulle, on en déduit que $S_n\sim R_n$ quand n tend vers $+\infty$, donc que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^1 + \int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x+\sin x]_0^1 = \sin 1 - \cos 1\,.$$

880. **RMS 2010 1068 Navale PC**

Nature de la série de terme général $u_n=(-1)^n/\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}$ avec $\alpha>0$?

Solution. — Voir aussi l'exercice 247 page 185.

On effectue un développement limité à deux termes :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1/2} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}}_{w_n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)\cdot$$

L'équivalent $u_n - v_n \sim -w_n + \mathrm{o}(w_n)$ que l'on déduit du développement limité ci-dessus, et le signe fixe (négatif) de $-w_n$ montrent que les deux séries de termes généraux $u_n - v_n$ et w_n ont même nature. Or la série (de Riemann) de terme général w_n converge si et seulement si $3\alpha/2 > 1$, ou encore $\alpha > 2/3$.

Par ailleurs, la série de terme général v_n est alternée et la suite de terme général $|v_n|$ décroît et converge vers zéro (car $\alpha > 0$). Le théorème de Leibniz (ou théorème spécial des séries alternées) affirme que $\sum v_n$ converge. Par suite, la nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum(u_n - v_n)$. On en déduit finalement que $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\alpha > \frac{2}{3}\cdot$$

881. **RMS 2010 1069 TPE PC**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+3n+3})$.

(a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(b) Calculer la somme de la série. Ind. Écrire $\frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{a-b}{1+ab}$ avec $a = b+1$.

Solution. —

(a) On sait que $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$. On en déduit l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2+3n+3} \leqslant \frac{1}{n^2}$, qui prouve que la série de terme général u_n est convergente.

(b) On constate que $\frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{(n+2)-(n+1)}{1+(n+2)(n+1)} = \frac{a_n-b_n}{1+a_nb_n}$ avec $a_n = n+2 = b_n+1 = b_{n+1}$. Si l'on pose $x_n = \arctan b_n$, alors $x_{n+1} = \arctan a_n$, et

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right) = \arctan\left(\frac{\tan x_{n+1} - \tan x_n}{1+\tan x_{n+1}\tan x_n}\right) = \arctan\left(\tan(x_{n+1}-x_n)\right) = x_{n+1}-x_n\ ,$$

la dernière égalité étant justifiée par l'inégalité $|x_{n+1}-x_n| < \frac{\pi}{2}$, puisque x_n et x_{n+1} sont deux valeurs positives de la fonction arctangente. La somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est alors télescopique et vaut $x_{n+1} - x_0 = \arctan(n+2) - \arctan(1)$, et on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}\cdot$$

882. **RMS 2011 1137 TPE PC**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — Sur le segment $[n, n+1]$, la fonction $\cos(\pi x)$ est du signe de $(-1)^n$, donc il en est de même de u_n : la série étudiée est alternée. De plus, $|u_n| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$, donc la suite (u_n) converge vers zéro. Enfin, le changement de variable $t = x+1$ dans la deuxième intégrale montre que

$$\begin{aligned}|u_n| - |u_{n+1}| &= \int_n^{n+1} \frac{|\cos(\pi x)|}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_{n+1}^{n+2} \frac{|\cos(\pi t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{|\cos(\pi x)|}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_n^{n+1} \frac{|-\cos(\pi x)|}{2+x}\,\mathrm{d}t\ ,\\ &= \int_n^{n+1} |\cos(\pi x)|\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0\,.\end{aligned}$$

Alors la suite $(|u_n|)$ est décroissante, et on peut appliquer le théorème de Leibniz : la série $\sum u_n$ est convergente.

883. **RMS 2012 1324 Mines d'Alès PC**

Donner la nature de la série de terme général $\ln(1+(-1)^n/n^\alpha)$ en fonction de α.

Solution. — à rédiger.

884. **RMS 2012 1325 TPE PC**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$ et $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. Montrer que la série de terme général (u_n) converge et calculer sa somme.

Solution. — à rédiger.

885. **RMS 2010 1085 Petites Mines PC**

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer la limite de (u_n). Étudier la monotonie de (u_n).

(b) Donner une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire un équivalent de u_n.

(c) Nature de la série de terme général u_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Solution. —

(a) La majoration $|u_n| \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ montre que $\lim u_n = 0$. Comme $x^{n+1} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0,1]$, la suite (u_n) est décroissante.

(b) On obtient $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x - u_n = \frac{1}{n+1} - u_n$, ou encore

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}\,.$$

La décroissance de la suite (u_n) montre que $2u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 2u_n$. En substituant n par $n-1$ dans la première inégalité que l'on vient d'écrire, on obtient $2u_n \leqslant \frac{1}{n}$. Finalement, on a démontré l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n}$, d'où l'on tire immédiatement que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\,.$$

(c) L'équivalent (entre suites de signe fixe) démontré à la question (b) montre que $\sum u_n$ diverge. La décroissance et la limite de la suite (u_n) établies à la question (a) montrent que les hypothèses du théorème spécial des séries alternées sont satisfaites, donc $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Intégration sur un intervalle quelconque

886. **RMS 2006 1126 TPE PC**

Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$.

Solution. — On pose $f\colon x \in [1, +\infty[\mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. On raisonne en deux étapes.

– Convergence. La seule borne litigieuse est $+\infty$. On sait que $\arcsin(u) - u \sim \frac{u^3}{6}$ au voisinage de $u = 0$. En effet, $\arcsin'(u) = (1-u^2)^{-1/2} = 1 + (-1/2)(-u^2) + \mathrm{o}(u^2) = 1 + u^2/2 + \mathrm{o}(u^2)$, donc par intégration des développements limités, on obtient $\arcsin u = \arcsin 0 + u + u^3/6 + \mathrm{o}(u^3) = u + u^3/6 + \mathrm{o}(u^3)$. Grâce au théorème de substitution dans les relations de comparaison, on obtient

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{6x^3}\,.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f l'est aussi (équivalents de signe fixe).

– Valeur. On effectue une intégration par parties, de façon à faire disparaître la fonction transcendante arcsinus. Pour cela, on effectue le calcul sur le segment $[y, z]$ puis on fait tendre y vers 1 et z vers $+\infty$ (on a posé $h = 1/z$) :

$$\begin{aligned}
\int_y^z \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x &= \left[x\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_y^z - \int_y^z x\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}\,\mathrm{d}x - [\ln(x)]_y^z\,,\\
&= \frac{\arcsin(h)}{h} - y\arcsin(1/y) + \int_y^z \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} - \ln(z) + \ln(y)\,,\\
&= \frac{\arcsin(h)}{h} - y\arcsin(1/y) + \mathrm{Argch}(z) - \mathrm{Argch}(y) - \ln(z) + \ln(y)\,,\\
&= \frac{\arcsin(h)}{h} - y\arcsin(1/y) + \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) - \mathrm{Argch}(y) - \ln(z) + \ln(y)\,,\\
&= \frac{\arcsin(h)}{h} - y\arcsin(1/y) + \ln\left(z\left[1 + \sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\right]\right) - \mathrm{Argch}(y) - \ln(z) + \ln(y)\,,\\
&= \frac{\arcsin(h)}{h} - y\arcsin(1/y) + \ln\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\right) - \mathrm{Argch}(y) + \ln(y)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

887. **RMS 2010 1077 TPE PC**

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$.

(a) Montrer que $x\mapsto\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

(b) Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

(c) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. —

(a) Un développement limité donne

$$\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}=\frac{(1-a^2x^2/2+\mathrm{o}(x^2))-(1-b^2x^2/2+\mathrm{o}(x^2))}{x}=\frac{b^2-a^2}{2}x+\mathrm{o}(x)\,.$$

On en déduit que la fonction étudiée est prolongeable par continuité en zéro, donc est intégrable sur $]0,1]$.

(b) On effectue une intégration par parties sur un segment $[1,m]$:

$$\int_1^m\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{\sin u}{u}\right]_1^m+\int_1^m\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sin m}{m}-\sin 1+\int_1^m\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Comme $|\frac{\sin u}{u^2}|\leqslant\frac{1}{u^2}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est absolument convergente donc convergente. Comme $\frac{\sin m}{m}$ tend vers une limite finie (zéro) quand m tend vers $+\infty$, on en déduit que $\int_1^m\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ a une limite finie quand m tend vers $+\infty$: c'est la définition de la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On remarque que le résultat persiste lorsqu'on remplace la borne 1 par une borne strictement positive (on utilise cette remarque dans la question suivante).

(c) La question (a) montre que $\int_0^1\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, et la question (b) montre que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (somme de deux intégrales convergentes). Le calcul se fait en intégrant sur intervalle $[\varepsilon,+\infty[$ avec $\varepsilon>0$, en effectuant les changements de variables $u=ax$ et $u=bx$:

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{b\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

L'idée qui guide la fin de la démonstration est la suivante : au voisinage de zéro, on dispose de l'équivalent $\cos u/u\sim 1/u$ et, sous réserve d'un théorème d'intégration des équivalents, $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\sim\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\frac{b}{a}$ quand ε tend vers zéro. Un tel théorème est au programme des filières PSI et MP seulement.

On prouve alors le résultat souhaité en évaluant la différence entre $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ et la limite supposée :

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u-\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{u}=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

où φ est la fonction $u\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\frac{\cos u-1}{u}$. Comme $\lim_0\varphi=0$, la fonction φ est prolongeable par continuité en zéro, donc intégrable sur tout intervalle $]0,m]$ avec $m>0$. Alors $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\varphi(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{b\varepsilon}\varphi(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^{a\varepsilon}\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ se présente comme la différence de deux restes d'une intégrale convergente, restes qui ont tous deux pour limite zéro quand ε tend vers zéro. On a alors démontré que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot$$

888. **RMS 2011 1139 TPE PC**

Calculer $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x/(\cos x+2\sin x+3)$.

Solution. — On effectue le changement de variable $t=\tan(x/2)$, de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}&=\int_0^1\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}+3}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1}=[\arctan(t+1)]_0^1\,,\\&=\arctan 2-\frac{\pi}{4}\cdot\end{aligned}$$

889. RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — On note f la fonction $x \in [0,+\infty[\mapsto \lfloor x \rfloor e^{-x}$. La continuité de f et la limite $\lim_{+\infty} x^2 f(x) = 0$ montrent que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j = k+1$:

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k\left(e^{-k} - e^{-(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k e^{-k} - \sum_{j=1}^{n} (j-1)e^{-j} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} - (n-1)e^{-n}\,.$$

Comme $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lim_{n\to+\infty}(n-1)e^{-n} = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}\,\cdot$$

Suites et séries de fonctions

890. RMS 2011 1153 Télécom Sud Paris PC

Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

(a) Comme $\|u_n\|_\infty = 1/n^2$, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction u_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n}$: c'est le terme général d'une série divergente. Pour établir l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale, on va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum u_n$. En effet, à $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de terme général $u_n(x)$ est alternée de premier terme négatif, et celle de terme général $|u_n(x)|$ est décroissante de limite nulle. Les sommes partielles vérifient donc les encadrements du théorème spécial des séries alternées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_1(x) = u_1(x) = -\frac{1}{1+x^2} \leqslant S_n(x) \leqslant S_2(x) \leqslant 0\,.$$

On en déduit l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|S_n(x)| \leqslant \varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme la suite (S_n) converge simplement vers la fonction continue f, le théorème de convergence dominée affirme que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+n^2}\,,\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.\end{aligned}$$

Le calcul de la somme de la série de terme général $(-1)^n/n$ est donnée, par exemple, à l'exercice 894 page 553.

Séries entières

891. RMS 2006 1125 ENSEA PC

Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solution. — Voir aussi l'exercice 894 page 553.

La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est alternée, et la valeur absolue $\frac{1}{2n+1}$ décroît avec n et tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Le théorème spécial des séries alternées s'applique : la série proposée est convergente. Voici deux méthodes pour le calcul de la somme.

(a) Usage d'une série entière. La série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ converge absolument pour $|z|<1$ car $|\frac{z^n}{2n+1}| \leqslant |z|^n$, et diverge grossièrement pour $|z|>1$ (comparaison d'une suite géométrique et d'une suite polynomiale). On en déduit que son rayon de convergence est $R=1$. La somme de cette série sur $]-1,1[$ est la fonction arctan.

De plus, le théorème de convergence radiale d'Abel affirme que, si la série converge en R ou en $-R$ (voire aux deux extrémités de l'intervalle de convergence), alors la somme est définie et continue sur $]-R,R]$ ou $[-R,R[$ (voire sur $[-R,R]$). C'est le cas ici, en $R=1$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{t\to 1^-} (\arctan t) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

(b) Usage d'une série de Fourier. Soit f la fonction 2π–périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ pour tout $x\in]-\pi,\pi[$ et $f(\pi)=0$. Elle est impaire, donc ses coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f)$ sont tous nuls. Pour $n\geqslant 1$, une intégration par parties donne

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{n}+0\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\cdot$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifie $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet affirme que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,.$$

En particulier, pour $x=\pi/2$, on obtient

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1},$$

et la valeur demandée s'ensuit.

Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

892. **RMS 2006 1129 TPE, PC**

Déterminer la limite de $I_n=\int_0^1 (1-x^{1/n})^{1/n}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $g_n\colon x\in[0,1]\mapsto 1-x^{1/n}\in[0,1]$, ce qui définit une fonction continue. Alors la fonction d'expression $f_n(x)=(g_n(x))^{1/n}$ est définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ elle aussi. L'intégrale I_n est donc ordinaire : il n'y a pas lieu de se préoccuper de sa convergence.

On étudie, pour x fixé non nul, la nature de la suite de terme général $f_n(x)$ grâce à un développement limité :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left[1-\exp\left(\frac{\ln x}{n}\right)\right]\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left[1-\left(1+\frac{\ln x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\right),\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left[-\frac{\ln x}{n}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)\right]\right) = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln(-\ln(x))+\frac{1}{n}\ln\left(1+\mathrm{o}(1)\right)\right),\\ &= \exp\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\ln(-\ln(x))+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, à x fixé non nul. Pour $x=0$, on a $f_n(0)=1$ pour tout n. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f constante égale à 1 sur $[0,1]$. Par ailleurs, l'étude initiale de f_n fournit l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in[0,1],\quad |f_n(x)|\leqslant\varphi(x)=1\,.$$

La fonction constante égale à 1 intégrable sur $[0,1]$, le théorème de convergence dominée donne la limite de I_n :

$$\lim_{+\infty} I_n = \int_0^1 \lim_{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1\,.$$

893. **RMS 2010 1084 Télécom Sud Paris PC**

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n).

Solution. — On pose $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}$ pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite (f_n) de fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Les comparaisons usuelles montrent que $\lim_{+\infty} x^2 f_n(x) = 0$, donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc I_n existe.

Un développement limité à x fixé et pour n tendant vers $+\infty$ montre que $(1+x/n)^n = \exp(n\ln(1+x/n)) = \exp(x+\mathrm{o}(1))$ tend vers e^x. On en déduit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue $f\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x}$. L'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant x$, qui vient de la concavité de la fonction logarithme, montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f(x) = e^{-x}.$$

Il s'agit d'une hypothèse domination : la fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

894. **RMS 2011 1151 TPE PC**

(a) Soient $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\mu n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\mu}$.

(b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

(c) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solution. —

(a) La série étudiée est alternée, et la suite de terme général $|u_n| = \frac{1}{\mu n+1}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème de Leibniz sur les séries alternées affirme que $\sum u_n$ converge. Pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose ensuite

$$f_n(t) = (-1)^n t^{\mu n}\,, \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,, \qquad S(t) = \frac{1}{1+t^\mu}\,.$$

On définit ainsi des fonctions continues sur $[0,1[$. La fonction S_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général f_k, et la suite (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction S (série géométrique de raison $t^\mu \in\,]-1,1[$). Par ailleurs, comme $\sum f_k(t)$ est alternée et comme la suite de terme général $|f_k(t)|$ décroît et converge vers zéro, les inégalités relatives aux séries alternées de premier terme positif s'appliquent : $S_1(t) = 1-t^\mu \leqslant S_n(t) \leqslant S_0(t) = 1$ pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times[0,1[$, et on en déduit l'hypothèse de domination $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times[0,1[\,, |S_n(t)| \leqslant 1$, la fonction constante égale à 1 étant intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de convergence dominée montre alors que $\sum_{k\geqslant 0}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, ce que l'on savait déjà, et que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\mu} = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{1+\mu k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\,.$$

(b) En appliquant la question précédente avec $\mu = 1$ et $\mu = 2$, on obtient successivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2\,,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

(c) Comme le degré de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}$ est strictement négatif, l'existence de (a,b,c) résulte du théorème de décomposition en éléments simples (première et deuxième espèce) sur $\mathbb{R}(X)$. On calcule a par multiplication par $1+t$ et substitution de t par -1 : on trouve $a = 1/3$. Le nombre b est obtenu par le calcul de la limite de $\frac{t}{t^3+1}$ en $+\infty$: on trouve $0 = a+b$, donc $b = -1/3$. Enfin, c est obtenu en substituant t par zéro : $1 = a+c$, donc $c = 2/3$, et finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{-t+2}{1-t+t^2}\right).$$

En écrivant ensuite que $\frac{-t+2}{1-t+t^2} = -\frac{1}{2}[\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{(t-1/2)^2+3/4}]$ et en appliquant la question précédente avec $\mu = 3$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}[\ln(1+t)]_0^1 - \frac{1}{6}[\ln(t^2-t+1)]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\cdot$$

Intégrales à paramètre

895. **RMS 2006 1133 IIE PC**

On considère la fonction $\phi\colon t \mapsto \int_0^\pi e^{-t\sin\theta}\cos(t\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Montrer que $\phi \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

(b) Montrer que, pour $t > 0$: $\phi'(t) = -2(\sin t)/t$.

(c) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

Solution. — On note g la fonction définie sur $[0,+\infty[\times[0,\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'expression $g(t,\theta) = e^{-t\sin\theta}\cos(t\cos\theta)$.

(a) La fonction de deux variables g est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\phi(t)$ est l'intégrale de $g(t,\theta)$ pour θ appartenant au $[0,\pi]$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ (les hypothèses de domination sont automatiquement vérifiées pour des intégrales sur des segments). De plus, la formule suivante est satisfaite : pour tout $t \in [0,+\infty[$,

$$\phi'(t) = \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial t}(t\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\int_0^\pi e^{-t\sin\theta}\Big[\sin(\theta)\cos(t\cos\theta) + \cos(\theta)\sin(t\cos\theta)\Big]\,\mathrm{d}\theta\,.$$

(b) On fixe $t > 0$. Dérivons par rapport à θ la fonction $h\colon \theta \mapsto e^{-t\sin\theta}\sin(t\cos\theta)$:

$$\forall\theta \in [0,\pi],\quad h'(\theta) = -te^{t\sin\theta}[\cos\theta\sin(t\cos\theta) + \sin\theta\cos(t\cos\theta)]\,.$$

Au facteur t près, on obtient exactement le contenu de l'intégrale qui donne la valeur de ϕ'. Par suite,

$$\phi'(t) = \frac{1}{t}\int_0^\pi h'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{t}\big[h(\theta)\big]_0^\pi = \frac{1}{t}\big[\sin(-t) - \sin(t)\big] = -\frac{2\sin t}{t}\cdot$$

(c) On pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. On sait que f tend vers la limite finie 1 en zéro, donc que l'intégrale est faussement impropre en zéro. Il suffit ensuite de montrer la convergence sur $[1,+\infty[$. Pour cela, effectuons une intégration par parties, destinée à faire apparaître un t^2 au dénominateur (par dérivation de $\frac{1}{t}$) : pour tout $a > 1$,

$$\int_1^a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos a}{a} + \cos 1 - \int_1^a \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

étant donné que $|\frac{\cos t}{t^2}| \leqslant \frac{1}{t^2}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. De plus $\frac{\cos a}{a}$ tend vers zéro quand a tend vers $+\infty$. On conclut que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On montre maintenant que l'intégrale $\phi(t) = \int_0^\pi g(t,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$, en utilisant la caractérisation séquentielle des limites. Soit $(t_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs qui diverge vers $+\infty$. La suite de fonctions $(\theta \mapsto g(t_n,\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle, et on dispose de l'hypothèse de domination $|g(t,\theta)| \leqslant 1$. Le résultat annoncé découle du théorème de convergence dominée. Alors, d'après les questions précédentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \phi'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\lim_{+\infty}\phi + \frac{1}{2}\phi(0) = -0 + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^0\cos(0)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\cdot$$

896. **RMS 2006 1134 TPE PC**

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de F ?

(b) La fonction F est-elle continue ? Dérivable ?

(c) Montrer que la limite de F en 0^+ vaut $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. — Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, on pose $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{1+t}$.

(a) Avant de donner une hypothèse de domination, on intègre par parties sur un segment $[0,a]$ avec $a>0$, en dérivant la fonction $t\mapsto 1/(1+t)$:

$$\int_0^a f(x,t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\cos(xt)}{x(1+t)}\right]_0^a+\int_0^a\frac{\cos(xt)}{x(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(1-\frac{\cos(xa)}{1+a}+\int_0^a\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right).$$

Pour x fixé, le terme central tend vers zéro quand a tend vers $+\infty$ et, comme $|\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}|\leqslant\frac{1}{(1+t)^2}$ et que la fonction majorante est intégrable sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $F(x)$ existe pour tout nombre réel x. De plus, on a démontré la formule suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad F(x)=\frac{1}{x}\left(1+\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t\right),$$

où la fonction g est définie sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ par l'expression $g(x,t)=\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}$.

(b) La fonction g est continue, et vérifie l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[,\quad |g(x,t)|\leqslant\varphi(t)=\frac{1}{(1+t)^2},$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres implique alors que la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}g(x,t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}^*$. Cette méthode ne permet pas de trancher quant à la continuité de F en zéro. Un coup d'oeil à la valeur $F(0)=0$ et à la question (c) montre que ce n'est pas la peine d'essayer : F ne sera pas continue en zéro.

Pour montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ à l'aide du théorème de Leibniz, on effectue une nouvelle intégration par parties : on vérifie que

$$F(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}h(x,t)\,\mathrm{d}t\right),$$

où la fonction h est définie sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ par l'expression $h(x,t)=\frac{\sin(xt)}{(1+t)^3}$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[,\quad\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\left|-\frac{t\cos(xt)}{(1+t)^3}\right|\leqslant\gamma(t)=\frac{t}{(1+t)^3},$$

où γ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. Ceci entraîne que $x\mapsto\int_0^{+\infty}h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'où l'on déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(c) On fixe $x>0$, on pose $u=tx$, donc $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u/x$, et on effectue le changement de variables sur le segment $[0,a]$ avec $a>0$:

$$\int_0^a f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{ax}\frac{\sin u}{1+u/x}\,\frac{\mathrm{d}u}{x}=\int_0^{ax}\frac{\sin(u)}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

En faisant tendre a vers l'infini, on en déduit une nouvelle expression de F :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Voici quelques arguments préalables à la majoration de la différence entre $F(x)$ et sa limite en $+\infty$:

– La fonction sinus cardinal, notée sinc, d'expression $\sin u/u$ pour u non nul et prolongée par continuité par 1 en zéro, vérifie $|\operatorname{sinc}u|\leqslant 1$ pour tout $u\in[0,1]$.
– Pour tous $u\geqslant 1$ et $x>0$, on dispose de l'inégalité $0\leqslant 1/(u(x+u))\leqslant 1/u^2$.
– L'intégrale $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}u/u^2$ converge et vaut 1.

Alors

$$\begin{aligned}\left|F(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right|&=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right|=\left|\int_0^{+\infty}\sin u\left[\frac{1}{x+u}-\frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u\right|,\\&=x\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u\right|,\\&\leqslant x\int_0^1|\operatorname{sinc}u|\times\frac{1}{x+u}\,\mathrm{d}u+x\int_1^{+\infty}|\sin u|\times\frac{1}{u(x+u)}\,\mathrm{d}u,\\&\leqslant x\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{x+u}+x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2},\\&=x\ln(1+x)-x\ln(x)+x\,.\end{aligned}$$

Le majorant $x\ln(1+x) - x\ln(x) + x$ tend vers zéro en 0^+, ce qui achève l'exercice. On peut démontrer en fait que $x\ln x$ est la partie principale de la différence $F(x) - \int_0^{+\infty} (\sin u/u)\,\mathrm{d}u$ lorsque x tend vers zéro à droite.

897. **RMS 2006 1136 TPE PC**

Existence et continuité de F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Solution. — On pose $f\colon (x,t) \in \mathbb{R}\times\,]0,+\infty[\, \mapsto \sin(t^x) = \sin(\exp(x\ln t))$. La fonction f ainsi définie est continue.

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, l'inégalité suivante est vraie : $|\sin(t^x)| \leqslant 1$. Alors la fonction continue par morceaux $t\mapsto \sin(t^x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Pour l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$, on va discuter suivant le signe de x.

– Pour $x=0$, la fonction $t\mapsto f(0,t) = \sin(1)$ est une constante non nulle, donc non intégrable sur $[1,+\infty[$.
– Pour $x<0$, comme $\lim_{t\to+\infty} t^x = 0$, on a $f(x,t) \sim t^x$ quand t tend vers $+\infty$ (équivalents entre fonctions de signe fixe), donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x<-1$.
– Pour $x>0$, on effectue le changement de variable $u=t^x$ sur le segment $[1,a]$, où $a>1$. Comme $t=u^{1/x}$, on a $\mathrm{d}t = u^{-1+1/x}/x$, donc :
$$\int_1^a \sin(t^x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_1^{a^x} \sin(u)u^{-1+1/x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_1^{a^x} \frac{\sin(u)}{u^{1-1/x}}\,\mathrm{d}u\,.$$
Comme $x>0$, la borne supérieure a^x tend vers $+\infty$ quand a tend vers $+\infty$, de sorte que la convergence de $\int_1^{+\infty}\sin(t^x)\,\mathrm{d}t$ équivaut à la convergence de $\int_1^{+\infty}(\sin u/u^{1-1/x})\,\mathrm{d}u$. Or la remarque ci-dessous montre que $\int_1^{+\infty}(\sin u/u^{\alpha})\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\alpha>0$. On obtient la condition $1-1/x>0$, c'est-à-dire $x>1$, puisque $x>0$ dans le cas étudié.

Finalement $F(x)$ existe si, et seulement si $|x|>1$.

On va étudier la continuité de F en écrivant que $F = F_1+F_2$, avec
$$\forall x\in D_F =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\quad F_1(x) = \int_0^1 \sin(t^x)\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad F_2(x) = \int_1^{+\infty}\sin(t^x)\,\mathrm{d}t\,,$$
et en montrant séparément la continuité de F_1 et de F_2. Comme l'hypothèse de domination $|f(t,x)| = |\sin(t^x)| \leqslant \varphi(t) = 1$ est vérifiée, comme la fonction continue par morceaux φ est évidemment intégrable sur $]0,1]$, comme f est continue, on en déduit que F_1 est continue sur D_F.

On étudie ensuite la continuité de F_2 sur $]-\infty,a[$, où $a<-1$ est fixé. Pour $t\geqslant 1$ et $x\leqslant a<-1$, on a $0<t^x\leqslant 1$, donc $0\leqslant f(t,x) = \sin(t^x)\leqslant t^x$, en utilisant l'inégalité $\sin(y)\leqslant y$ pour y positif ou nul. Par suite, on dispose de l'hypothèse de domination
$$\forall (x,t)\in]-\infty,a]\times[1,+\infty[,\quad |f(x,t)|\leqslant \psi_a(t) = t^a\,,$$
où ψ_a est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres affirme alors que F_2 est continue sur $]-\infty,a]$. Comme a est quelconque parmi les nombres strictement plus petits que -1, ceci démontre que F_2 est continue sur $]-\infty,-1[$.

On étudie enfin la continuité de F_2 sur $[b,+\infty[$, où $b>1$. Le changement de variables $u=t^x$ conduit, comme dans l'étude de l'existence de F, à l'égalité
$$\forall x\in[b,+\infty[,\quad F_2(x) = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^{1-1/x}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\sin(u)u^{-1+1/x}\,\mathrm{d}u\,.$$
Avant de donner une hypothèse de domination, on effectue une intégration par parties, en dérivant $u^{-1+1/x}$ et en intégrant $\sin u$. Tous calculs faits (c'est-à-dire sur $[1,c]$ et en prenant ensuite la limite lorsque c tend vers $+\infty$), on obtient
$$F_2(x) = \frac{\cos 1}{x} + \frac{1-x}{x^2}\int_1^{+\infty}\cos(u)u^{-2+1/x}\,\mathrm{d}u\,.$$
La continuité de F_2 sur $[b,+\infty[$ est manifestement équivalente à la continuité de l'intégrale ci-dessus. On pose alors $g(x,u) = \cos(u)u^{-2+1/x}$ pour tout $(x,u)\in[b,+\infty[\times[1+\infty[$, ce qui définit une fonction g continue. On dispose de l'hypothèse de domination
$$\forall (x,u)\in[b,+\infty[\times[1+\infty[,\quad |g(x,u)|\leqslant\theta_b(u) = u^{-2+1/b} = \frac{1}{u^{2-1/b}}\,\cdot$$
Comme l'exposant $2-1/b$ est strictement plus grand que 1 (puisque $b>1$), la fonction continue par morceaux θ_b est intégrable sur $[1,+\infty[$, et le théorème de continuité des intégrales à paramètre donne la continuité de F_2 sur $[b,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $b>1$, la fonction F_2 est continue sur $]1,+\infty[$, et on a bien montré que F est continue sur son ensemble de définition.

Remarque. — Étude de $\int_1^{+\infty}(\sin u/u^\alpha)\,\mathrm{d}u$.

Si $\alpha > 1$, la majoration $|\sin u/u^\alpha| < 1/u^\alpha$ montre la convergence absolue de l'intégrale.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, on utilise une intégration par parties pour montrer que l'intégrale est semi-convergente.

Enfin, pour montrer que l'intégrale est divergente pour $\alpha \leqslant 0$, on utilise les inégalitéssin $u \geqslant 1/2$ sur tout intervalle de la forme $[\beta_k, \gamma_k] = [2k\pi + \pi/6, 2k\pi + 5\pi/6]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $1/u^\alpha \geqslant 1$ pour $u \geqslant 1$ puisque $\alpha < 0$, et on en déduit que $\int_{\beta_k}^{\gamma_k}(\sin u/u^\alpha)\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{2}(\gamma_k - \beta_k) = \pi/3$. On conclut ainsi : si l'intégrale convergeait, alors le reste $R(y) = \int_y^{+\infty}(\sin u/u^\alpha)\,\mathrm{d}u$ existerait et tendrait vers zéro en $+\infty$. En particulier, $R(\beta_k) - R(\gamma_k) = \int_{\beta_k}^{\gamma_k}(\sin u/u^\alpha)\,\mathrm{d}u$ tendrait vers zéro quand k tend vers $+\infty$, ce qui est faux.

Séries de Fourier

898. **RMS 2006 1138 IIE PC**

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π–périodique, et (E) l'équation différentielle $y' + y = f$.

(a) Montrer que (E) admet une unique solution 2π–périodique notée ϕ.

(b) La fonction ϕ est-elle la somme de sa série de Fourier ?

(c) Trouver une relation entre les coefficients de Fourier exponentiels de f et de ϕ.

(d) On suppose que f est lipschitzienne. Montrer que $c_n(\phi) = \mathrm{o}(1/n^2)$ quand $|n| \to \infty$.

Solution. — Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions d'expression $y(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où λ est une constante réelle (expression obtenue par la résolution de l'équation homogène, suivie de la recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante).

(a) Soit y une solution comme ci-dessous. On pose $z(x) = y(x + 2\pi)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui définit ainsi une fonction z. Répondre à la première question, c'est montrer qu'il existe une et une seule valeur de λ telle que $z = y$. Pour cela, on profite du théorème de Cauchy et Lipschitz appliqué à l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : l'égalité $z = y$ est équivalente aux deux propriétés suivantes.

   i. La fonction z est une solution de (E).

   ii. Elle coïncide avec y en un point (par exemple en zéro).

   Compte-tenu des définitions, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$z(x) = \lambda e^{-x-2\pi} + e^{-x-2\pi}\int_0^{x+2\pi} e^t f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
$$z'(x) = -\lambda e^{-x-2\pi} - e^{-x-2\pi}\int_0^{x+2\pi} e^t f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-x-2\pi} \times \left[e^{x+2\pi} f(x+2\pi)\right] = -z(x) + f(x+2\pi)\,.$$

   Comme f est 2π–périodique, on obtient finalement $z'(x) + z(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que z est solution de (E). On remarque que ce calcul est indépendant de la valeur de λ. Ensuite, $z(0) = y(2\pi) = \lambda e^{-2\pi} + b$, où b vaut $e^{-2\pi}\int_0^{2\pi} e^t f(t)\,\mathrm{d}t$, et $y(0) = \lambda$. La relation $z(0) = y(0)$ entre conditions initiales est satisfaite si et seulement si $\lambda e^{-2\pi} + b = \lambda$, ou encore

$$\lambda = \frac{b}{1 - e^{-2\pi}}\,.$$

   On trouve bien une et une seule solution ϕ de (E) qui soit 2π–périodique.

(b) La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodique. Sa série de Fourier converge donc normalement vers ϕ, donc simplement, donc ϕ est, en tout point, somme de sa série de Fourier.

(c) Comme $\phi' + \phi = f$, et comme les coefficients de Fourier sont linéaires par rapport aux fonctions, on obtient $c_n(\phi') + c_n(\phi) = c_n(f)$. On connaît aussi la relation $c_n(\phi') = inc_n(\phi)$, qui se démontre par intégration par parties et qui est valable pour toute fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π–périodique. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\phi) = \frac{c_n(f)}{1 + in}\,.$$

(d) On utilise le lien entre les coefficients de Fourier de f et ceux de ses translatées, en rappelant de quoi il s'agit. Pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h(f)$ la fonction d'expression $x \mapsto f(x + h)$. On sait que, si f est continue par morceaux et 2π–périodique, il en est de même de $\tau_h(f)$ et que

$$c_n(\tau_h(f)) = e^{-inh} c_n(f)\,.$$

Rappel de la démonstration : le changement de variable $u = t + h$ donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t+h)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} e^{-in(u+h)} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-inh}}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} e^{-inu} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-inh}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inu} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

La dernière égalité vient de ce que l'intégrale sur une période d'une fonction périodique est indépendante de l'intervalle choisi.

En particulier, si $h = \pi/n$, on obtient $c_n(\tau_h(f)) = -c_n(f)$. Par suite, $|c_n(\tau_{\pi/n}(f)) - c_n(f)| = 2|c_n(f)|$. Mais cette différence peut aussi se majorer de la façon suivante, où on a noté k un rapport de Lipschitz de f :

$$\begin{aligned}\left|c_n(\tau_{\pi/n}(f)) - c_n(f)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\left[f\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - f(t)\right]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{-int}\left[f\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - f(t)\right]\right|\mathrm{d}t\,,\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{k\pi}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{k\pi}{n}\,\cdot\end{aligned}$$

On en déduit que $|c_n(f)| \leqslant k\pi/2n$. Comme $|1/(1+in)| \leqslant 1/n$, la question (b) entraîne alors que $|c_n(\phi)| \leqslant k\pi/2n^2$, donc que

$$c_n(\phi) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Comment passer à $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$? ?

899. **RMS 2006 1139 TPE PC**

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π–périodique coïncidant avec la valeur absolue sur $[-\pi,\pi]$. En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-4}$.

Solution. — Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = (2/\pi)\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette intégrale se calcule par parties, sauf $a_0(f)$ qui est à part :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi\,,\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\,,\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \text{ est pair,}\\ -\dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$

La formule de Parseval $\|f\|_2^2 = a_0^2/4 + (1/2)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ s'écrit ici

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2p+1)^4}\,.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^{-4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}\,\cdot$$

En séparant ensuite les termes d'indice pair de ceux d'indice impairs dans la somme $s = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$, on obtient

$$s = \sum_{p=1}^{\infty}(2p)^{-4} + \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^{-4} = \frac{s}{16} + \frac{\pi^4}{96},\quad \text{d'où}\quad s = \frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}\,\cdot$$

900. **RMS 2012 1337 Mines d'Alès PC**

Soient $\alpha \in]0,\pi[$ et f la fonction 2π–périodique définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x) = 1$ si $|x| \leqslant \alpha$ et $f(x) = 0$ sinon.

(a) Étudier la série de Fourier de f et sa convergence.

(b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sin n\alpha)^2}{n^2}$.

Solution. — à rédiger

Équations différentielles linéaires

901. **RMS 2011 1157 TPE PC**

Soit (E) l'équation différentielle $2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$.

(a) Montrer que (E) admet une unique solution f définie sur $]-\infty, 1[$ telle que $f(0) = 0$.

(b) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de zéro.

SOLUTION. —

(a) Les fonctions $x \mapsto 2(x-1)$ et $x \mapsto 1$ (coefficients de y' et y respectivement), et $x \mapsto \sin(2x) + x^2$ (second membre) sont continues, et la fonction coefficient de y' ne s'annule pas sur $]-\infty, 1[$. Le théorème de Cauchy et Lipschitz donne l'existence et l'unicité d'une solution f sur $]-\infty, 1[$ telle que $f(0) = 0$.

(b) La formulation de la question ne précise pas s'il faut admettre ou démontrer l'existence d'un tel développement limité. On choisit de le démontrer. Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela, on montre par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$, en utilisant la relation

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f'(x) = \frac{\sin(2x) + x^2 - f(x)}{2(x-1)} \cdot$$

Comme f est dérivable, elle est continue, et la relation ci-dessus montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, la relation ci-dessus montre que f' est de classe $\mathcal{C}^n$ donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Il en résulte que f admet un développement limité à tout ordre en zéro, donné par la formule de Taylor-Young.

Le calcul effectif des coefficients sera fait par un autre moyen : on écrit $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \mathrm{o}(x^4)$ avec $a = f(0) = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on sait que le développement limité de f' existe et est obtenu en dérivant celui de f. On substitue alors ces deux développements dans (E), on développe le second membre, et on utilise l'unicité des coefficients d'un développement limité :

$$\begin{aligned}
2(x-1)y' + y &= 2(x-1)(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \mathrm{o}(x^3)) + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \mathrm{o}(x^4)\,, \\
&= -2b + (3b - 4c)x + (5c - 6d)x^2 + (7d - 8e)x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,, \\
&= 2x - \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^4) + x^2
\end{aligned}$$

On en déduit successivement que $b = 0$, $c = -1/2$, $d = -7/12$ et $e = -11/32$, donc que

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{12}x^3 - \frac{11}{32}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\,.$$

902. **RMS 2006 1146 TPE PC**

Résoudre l'équation différentielle $x^{(3)} + x'' + x' + x = e^{at}$.

SOLUTION. — L'énoncé ne précise pas si la résolution se fait sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rédige les deux cas. Selon le programme de la filière PC, l'écriture directe des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants à partir des racines de l'équation caractéristique n'est énoncée que pour l'ordre 2. Les points (b) et (c) ci-dessous présentent une solution en accord avec cette restriction, le point (c) étant la méthode canonique. Le (a) s'affranchit de cette restriction.

(a) L'équation caractéristique $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ a pour racines sont -1, i et $-i$. Les solutions complexes de l'équation homogène sont les fonctions telles que

$$\exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-t} + \mu e^{it} + \nu e^{-it}\,.$$

Les solutions réelles sont de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha e^{-t} + \beta \cos(t) + \gamma \sin(t), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Si $a \notin \{-1, i, -i\}$ (cas complexe) ou bien si $a \neq -1$ (cas réel), il existe une solution particulière de l'équation complète de la forme $x \mapsto ke^{at}$: le nombre (complexe ou réel) k vaut $\chi(a)^{-1} = (a^3 + a^2 + a + 1)^{-1}$.

Dans le cas contraire, il existe une solution particulière de la forme $t \mapsto kte^{at}$, puisque les racines de l'équation caractéristique sont simples. Il vient $k(3a^2 + 2a + 1) = 1$, où encore $k\chi'(a)$ comme le prévoit la théorie, et donc $k = (3a^2 + 2a + 1)^{-1}$. En résumé, pour le cas complexe :

$$x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{it} + \nu e^{-it} + \begin{cases} (a^3 + a^2 + a + 1)^{-1} e^{at} & \text{si } a \notin \{-1, i, -i\}, \\ \frac{1}{2} te^{-t} & \text{si } a = -1, \\ -\frac{1}{4}(1+i)te^{it} & \text{si } a = i, \\ -\frac{1}{4}(1-i)te^{-it} & \text{si } a = -i, \end{cases}$$

et pour le cas réel :

$$x(t) = \alpha e^{-t} + \beta \cos t + \gamma \sin t + \begin{cases} (a^3 + a^2 + a + 1)^{-1} e^{at} & \text{si } a \neq -1, \\ \frac{1}{2} t e^{-t} & \text{si } a = -1. \end{cases}$$

(b) On expose ici une méthode *ad hoc*. On pose $z = x'' + x$. Alors l'équation de départ équivaut à $z' + z = e^{at}$. Les solutions de cette dernière sont

$$\begin{array}{llllll} \text{si } a \neq -1, & \exists \alpha \in \mathbb{K}, & \forall t \in \mathbb{R}, & z(t) & = & \alpha e^{-t} + \dfrac{1}{a+1} e^{at} , \\ \text{si } a = -1, & \exists \alpha \in \mathbb{K}, & \forall t \in \mathbb{R}, & z(t) & = & \alpha e^{-t} + t e^{-t} . \end{array}$$

Il reste ensuite à résoudre l'équation $x'' + x = z(t)$, et on retrouve les solutions décrites plus haut.

(c) Toute équation scalaire d'ordre n peut se ramener à une équation vectorielle à $n - 1$ composantes (un système) d'ordre 1. Soit X le vecteur colonne ${}^t(x, x', x'')$. L'équation proposée équivaut à $X' = AX + B(t)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ [le signe dépend de la définition adoptée pour χ_A]. Les valeurs propres sont -1, i et $-i$. Elles sont simples, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On vérifie facilement que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de passage qui diagonalise A : $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(-1, i, -i)$. En posant $Y = P^{-1}X$, le système $X' = AX + B(t)$ est équivalent à $Y' = DY + P^{-1}B(t)$, ou encore à

$$\begin{cases} y_1' & = & -y_1 + e^{at} , \\ y_2' & = & iy_2 - ie^{at} , \\ y_3' & = & -iy_3 - e^{at} . \end{cases}$$

La lectrice (le lecteur) est invité à terminer le calcul des y_i, puis à retrouver X, donc x, grâce à la relation $X = PY$.

903. **RMS 2010 1092 TPE PC**

Résoudre $x^2 y'' + axy' + by = 0$.

Solution. — Il s'agit d'une équation d'Euler, pour laquelle le changement de variable préconisé est $x = -e^t$ ou $x = e^t$, suivant que l'intervalle de résolution est $I_1 =]-\infty, 0[$ ou $I_2 =]0, +\infty[$.

On se place sur I_2, on pose $x = e^t$ avec $t \in \mathbb{R}$, et $z(t) = y(x) = y(e^t)$ ou encore $y(x) = z(\ln x)$. Alors $y'(x) = z'(\ln x)/x$ et $y''(x) = z''(\ln x)/x^2 - z'(\ln x)/x^2$. L'équation $x^2 y'' + axy' + by = 0$ devient alors une équation linéaire en z *à coefficients constants* :

$$z''(\ln x) - z'(\ln x) + az'(\ln x) + bz(\ln x) = z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = 0 .$$

On suppose dans un premier temps que $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et on recherche les solutions complexes. Soit $\Delta = (a-1)^2 - 4b$.

– Si $\Delta = 0$, alors les solutions en z sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu t) e^{(1-a)t/2}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, et les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$y \colon x \in I_2 \mapsto (\lambda + \mu \ln x) e^{(1-a) \ln x / 2} ,$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$,

– Si $\Delta \neq 0$, on choisit une racine carrée complexe δ de Δ. Alors les solutions en z sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{[(1-a)+\delta]t/2} + \mu e^{[(1-a)-\delta]t/2}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, et les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$y \colon x \in I_2 \mapsto \lambda e^{[(1-a)+\delta] \ln x/2} + \mu e^{[(1-a)-\delta] \ln x/2} ,$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$,

On suppose dans un deuxième temps que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on recherche les solutions réelles. On invite le lecteur à discuter suivant les trois cas $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$, et à réciter le cours correspondant.

Équations différentielles non linéaires

Calcul différentiel

904. **RMS 2012 1341 TPE PC**

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication. Poser $f(x,y) = e^{-y}g(x,y)$.

Solution. — à rédiger ? ?

Géométrie

905. **RMS 2006 1153 TPE PC**

Réduire la conique d'équation : $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0$. Donner sa nature et son centre.

Solution. — L'équation est de la forme usuelle ${}^tXAX + LX + 6 = 0$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = (-8, 8)\,.$$

Comme $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$, comme $AX = 2X$ équivaut à $x = y$, un vecteur propre associé à 2 est $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Comme une matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale, on sait que $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4. On pose

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})\,, \quad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P^{-1}X = {}^tPX\,, \quad L' = LP = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,16)\,.$$

L'équation de la conique s'écrit, avec les nouvelles coordonnées x' et y' : ${}^tX'DX' + L'X' + 6 = 0$, soit

$$2x'^2 + 4y'^2 + 8\sqrt{2}y' + 6 = 0 \quad \text{ou encore} \quad x'^2 + 2y'^2 + 4\sqrt{2}y' + 3 = 0\,.$$

La factorisation canonique sous la forme $x'^2 + 2(y' + \sqrt{2})^2 = 1$ conduit finalement à l'équation réduite

$$x''^2 + \frac{y''^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1 \quad \text{avec} \quad x'' = x' \quad \text{et} \quad y'' = y' + \sqrt{2}\,.$$

Il s'agit d'une ellipse, de centre $x'' = y'' = 0$, donc $x' = 0$ et $y' = -\sqrt{2}$ donc les coordonnées du centre dans le repère initial sont

$$X = PX' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. — On sait que, si $h(x,y) = 0$ est l'équation de la conique, et si la conique est à centre, celui-ci est l'unique point critique de h, c'est-à-dire le point tel que $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0$. Dans le cas de l'exercice, le système obtenu est

$$\begin{cases} 6x - 2y - 8 & = & 0\,, \\ -2x + 6y + 8 & = & 0\,. \end{cases}$$

On vérifie que ce système est de Cramer, et que $(1,-1)$ est son unique solution. Cette méthode donne le centre directement, mais ne fournit pas d'alternative aux calculs ci-dessus si la réduction est demandée.

906. **RMS 2006 1156 TPE PC**

Trouver le lieu (S) des points équidistants de l'axe Oz et de la droite d'équations $\begin{cases} x + y - 1 & = & 0, \\ z & = & 0. \end{cases}$ Trouver les droites incluses dans (S).

Solution. — Le carré de la distance d'un point M de coordonnées x, y et z à l'axe Oz est $x^2 + y^2$. La distance d d'un point M à une droite affine D passant par A dirigée par $\overrightarrow{u}$ vaut

$$d = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\,,$$

en supposant que M n'est pas sur (D). Ici, la droite passe par $A = (1,0,0)$ et est dirigée par $u = (1,-1,0)$, donc $d^2 = \frac{1}{2}(2z^2 + (1-x-y)^2)$. La surface obtenue a pour équation $2z^2 + (1-x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$, ou encore

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy + 2x + 2y - 1\,.$$

C'est une quadrique d'équation réduite $2z' = x'^2 - y'^2$. On reconnaît que (S) est un paraboloïde hyperbolique.

Pour alléger les notations, on suppose désormais que les coordonnées dans le nouveau repère ne sont pas x', y' et z', mais x, y et z. Soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) appartenant à (S) (c'est-à-dire que $2z_0 = x_0^2 - y_0^2$). Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur non nul. La droite (D) passant par M_0 dirigée par u est contenu dans (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M_0 + tu$ appartient à (S), ou encore $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2(z_0 + tc) = (x_0 + ta)^2 - (y_0 + tb)^2$, ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (a^2 - b^2)t^2 + 2(ax_0 - by_0 - c)t = 0\,.$$

Une fonction polynôme est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls. La droite (D) est tracée sur (S) si et seulement si $a = \varepsilon b$ et $c = ax_0 - by_0$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Il est impossible que a ou b soit nul, sinon $a = b = c = 0$. En remarquant alors que (D) est dirigée par u/a et que $c/a = x_0 - \varepsilon y_0$, on obtient le résultat suivant :

> Par tout point $M_0 = \left(x_0, y_0, \frac{x_0^2 - y_0^2}{2}\right)$ de (S), il passe exactement deux droites contenues dans (S), respectivement dirigées par $(1, 1, x_0 - y_0)$ et $(1, -1, x_0 + y_0)$.

Des paramétrisations de ces ces deux droites sont respectivement :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\,, \\ y & = & y_0 + \lambda\,, \\ z & = & \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} + \lambda(x_0 - y_0)\,, \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\,, \\ y & = & y_0 - \lambda\,, \\ z & = & \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} + \lambda(x_0 + y_0)\,. \end{array} \right.$$

Des systèmes d'équations de ces deux droites sont respectivement :

$$(D_\alpha) \left\{ \begin{array}{lcl} x - y & = & \alpha\,, \\ \alpha(x + y) & = & 2z \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad (\Delta_\beta) \left\{ \begin{array}{lcl} x + y & = & \beta\,, \\ \beta(x + y) & = & 2z \end{array} \right.$$

en ayant posé $\alpha = x_0 + y_0$ et $\beta = x_0 - y_0$.

Remarque. — L'équation $2z = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donne immédiatement les deux systèmes d'équations ci-dessus, donc prouve que les droites du type (D_α) ou (Δ_β) sont contenues dans (S), mais il n'est pas évident qu'elles soient les seules.