# Réduction des endomorphismes

Sauf mention contraire, $E$, $F$,... sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie ou infinie.

## I. Valeurs propres, vecteurs propres

### I.1. Généralités

**Définition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un vecteur $x$ est **vecteur propre** de $f$ si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

*On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $f$ s'il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

Si $x \neq 0_E$, la relation $f(x) = \lambda x$ définit le nombre $\lambda$ de manière unique. On dit que $\lambda$ est **la** valeur propre associée au vecteur propre $x$, et que $x$ est **un** vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.

**Proposition I.1.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

*Si $x$ est un vecteur propre de $f$, alors les vecteurs non nuls de la droite $\operatorname{Vect} x$ sont aussi vecteurs propres de $f$, associés à la même valeur propre ; la droite $\operatorname{Vect} x$ est donc stable par $f$.*

*Réciproquement, si $D$ est une droite stable par $f$, alors les vecteurs non nuls de $D$ sont vecteurs propres pour $f$.*

**Théorème I.2.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Une famille de vecteurs propres de $f$, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est forcément libre ; si $E$ est de dimension $n$, $f$ a donc au plus $n$ valeurs propres distinctes.*

**Définition.** *Si $E$ est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble des valeurs propres de $f$ est appelé **spectre** de $f$, et noté $\operatorname{Sp}(f)$.*

### I.2. Sous-espaces propres

**Définition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, admettant une valeur propre $\lambda$. L'ensemble $E_\lambda(f)$ des vecteurs vérifiant $f(x) = \lambda x$ est appelé **sous-espace propre associé à la valeur propre** $\lambda$ pour $f$.*

*L'ensemble $E_\lambda(f)$ est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ ; c'est donc un sous-espace de $E$. En particulier, $E_0(f) = \operatorname{Ker} f$.*

**Théorème I.3.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, admettant des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Alors, la somme $\sum_{k=1}^n E_{\lambda_k}(f)$ est directe.*

*En particulier, si $E$ est de dimension finie, alors $\sum_{k=1}^n \dim\big(E_{\lambda_k}(f)\big) \leqslant \dim E$.*

**Proposition I.4.** *Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Si $f \circ g = g \circ f$, alors les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$.*

### I.3. Valeurs propres d'une matrice carrée

**Définition.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $A$ s'il existe une colonne $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$. L'ensemble de ces valeurs propres est appelé **spectre** de $A$, et noté $\operatorname{Sp}(A)$.*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut ne s'intéresser qu'à ses valeurs propres réelles, qui forment le spectre réel de $A$, noté $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ ; ou à ses valeurs propres complexes, qui forment le spectre complexe, noté $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Les valeurs propres de $A$ sont les valeurs propres des endomorphismes représentés par $A$.

**Proposition I.5.** *Si les matrices $A$ et $B$ sont semblables, alors $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$.*

### I.4. Polynôme caractéristique

**Définition.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de $A$ la fonction $\chi_A$ définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.*

**Théorème I.6.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, le polynôme caractéristique de $A$ est un polynôme unitaire de degré $n$ ; le coefficient de $X^{n-1}$ vaut $-\operatorname{tr} A$, et celui de $X^0$ vaut $(-1)^n \det A$.*

**Proposition I.7.** *Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même polynôme caractéristique.*

**Définition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $E$ est de dimension finie. On appelle **polynôme caractéristique** de $f$ la fonction $\chi_f$ définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$.*

C'est aussi le polynôme caractéristique de la matrice de $f$ dans n'importe quelle base ; les résultats du Théorème **??** se traduisent donc de manière immédiate sur les endomorphismes (avec $n = \dim E$).

**Théorème I.8.** *Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre d'une matrice $A$ (respectivement d'un endomorphisme $f$) si et seulement si $\lambda$ est racine de son polynôme caractéristique.*

**Proposition I.9.** *Si $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors $\chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{ii})$ ; en particulier, les valeurs propres de $T$ sont ses coefficients diagonaux.*

**Théorème I.10.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$ ; soit $\overline{f}$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$. Alors, le polynôme caractéristique de $\overline{f}$ divise celui de $f$ ; et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\overline{f})$, le sous-espace propre $F_\lambda(\overline{f})$ est égal à $E_\lambda(f) \cap F$.*

### I.5. Multiplicité

**Définition.** *Si $\lambda$ est valeur propre d'une matrice ou d'un endomorphisme, on appelle **multiplicité** de la valeur propre $\lambda$, la multiplicité de la racine $\lambda$ dans le polynôme caractéristique.*

**Théorème I.11.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant une valeur propre $\lambda$. Alors, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre $\lambda$.*

## II. Diagonalisation

### II.1. Définition

**Définition.** *Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres pour $f$ ; cela équivaut à dire qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.*

*Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Diagonaliser un endomorphisme, c'est déterminer une base de vecteurs propres pour cet endomorphisme ; diagonaliser une matrice carrée $A$, c'est déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $P^{-1}AP = D$.

### II.2. Diagonalisation et sous-espaces propres

**Théorème II.1.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ; notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$, et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés. Il y a équivalence entre les trois propriétés :*

**i.** *$f$ est diagonalisable ;*

**ii.** $E = \sum_{i=1}^p E_i$ ;

**iii.** $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.

**Théorème II.2.** *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il vérifie les deux propriétés :*

- *le polynôme caractéristique $\chi_f$ est scindé ;*
- *la dimension de chaque sous-espace propre de $f$ est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.*

**Corollaire II.3.** *Soit $f$ un endomorphisme d'un espace de dimension $n$. Alors, $f$ est diagonalisable dans chacun des cas suivants :*

**i.** *$f$ admet $n$ valeurs propres distinctes.*

**ii.** *$\chi_f$ est scindé à racines simples.*

### II.3. Matrices symétriques réelles

**Théorème II.4.** *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

## III. Polynômes d'endomorphismes

### III.1. Généralités

Si $f$ est un endomorphisme et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k$ l'endomorphisme $f \circ \cdots \circ f$, composé de $k$ facteurs égaux à $f$ ; par convention, $f^0 = \mathrm{Id}$.

**Définition.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(f)$ l'endomorphisme* $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$.

**Proposition III.1.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors*
- $[\lambda P + \mu Q](f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$ ;
- $[PQ](f) = P(f) \circ Q(f)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ; l'ensemble d'endomorphismes $\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, qui sera notée $\mathbb{K}[f]$ ; l'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbres, donc en particulier une application linéaire, dont l'image est $\mathbb{K}[f]$.

**Corollaire III.2.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*

**Corollaire III.3.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Ker}\, P(f)$ et $\mathrm{Im}\, P(f)$ sont des sous-espaces stables par $f$.*

### III.2. Polynômes de matrices

**Définition.** *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note $P(A)$ la matrice carrée* $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$.

**Proposition III.4.** *Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big)$.*

**Corollaire III.5.** *Si les matrices $A$ et $B$ sont semblables, et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.*

### III.3. Lemme des noyaux

**Théorème III.6 (Lemme des noyaux).** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$. Si $P = QR$, et si $Q$ et $R$ sont premiers entre eux, alors* $\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}\, Q(f) \oplus \mathrm{Ker}\, R(f)$.

**Corollaire III.7.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$. Si $P_1, \ldots, P_n$ sont deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^{n} P_k$, alors* $\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, P_k(f)$.

### III.4. Polynômes annulateurs

**Définition.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $P$ est un* ***polynôme annulateur*** *de $f$ si $P(f) = 0$ ; de même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(A) = 0$, on dit que $P$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.*

**Proposition III.8.** *Si les matrices $A$ et $B$ sont semblables, alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.*

Dans la suite, on notera $\mathcal{A}(f)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de $f$.

**Proposition III.9.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathcal{A}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, absorbant pour la multiplication : si $A \in \mathcal{A}(f)$ et $B \in \mathbb{K}[X]$, alors $AB \in \mathcal{A}(f)$.*

**Théorème III.10.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{A}(f) \neq \{0\}$, alors il existe un et un seul polynôme $\pi_f$ ayant les propriétés suivantes :*
- *$\pi_f$ est unitaire et appartient à $\mathcal{A}(f)$ ;*
- *tout élément de $\mathcal{A}(f)$ est un multiple de $\pi_f$.*

L'espace $\mathcal{A}(f)$ est alors exactement l'ensemble des multiples de $\pi_f$ ; $\pi_f$ est appelé le **polynôme minimal** de $f$. Il n'existe que si $\mathcal{A}(f) \neq \{0\}$.

### III.5. Étude de $\mathbb{K}[f]$

**Théorème III.11.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
- ▷ *Si $\mathcal{A}(f) = \{0\}$, alors l'application $P \longmapsto P(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[f]$. En particulier, $\mathbb{K}[f]$ est un sous-espace de dimension infinie de $\mathcal{L}(E)$ ; ce cas ne peut donc pas se produire si $E$ est de dimension finie.*
- ▷ *Si $\mathcal{A}(f) \neq \{0\}$, et si le polynôme minimal $\pi_f$ de $f$ est de degré $d$, alors l'application $P \longmapsto P(f)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[f]$. En particulier, $\mathbb{K}[f]$ est un sous-espace de dimension $d$ de $\mathcal{L}(E)$, et $(1, f, f^2, \ldots, f^{d-1})$ en constitue une base.*

### III.6. Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème III.12 (de Cayley-Hamilton).** *En dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f$, est un polynôme annulateur de $f$.*

**Corollaire III.13.** *Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique.*

## IV. Diagonalisation et polynômes

### IV.1. Valeurs propres et polynômes

**Proposition IV.1.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $x$ est vecteur propre de $f$, associé à la valeur propre $\lambda$, alors il est aussi vecteur propre de $P(f)$, associé à la valeur propre $P(\lambda)$.*

**Proposition IV.2.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Si $P(f) = 0$, alors les valeurs propres de $f$ sont racines de $P$.*

**Théorème IV.3.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal. Les valeurs propres de $f$ sont alors exactement les racines de $\pi_f$ dans $\mathbb{K}$.*

### IV.2. Diagonalisation et polynômes annulateurs

**Théorème IV.4.** *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.*

Dans ce cas, le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est en particulier annulateur.

**Corollaire IV.5.** *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

### IV.3. Diagonalisation d'un endomorphisme induit

**Proposition IV.6.** *Si l'endomorphisme $f$ admet un sous-espace stable $F$, alors le polynôme minimal de l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$, divise le polynôme minimal de $f$.*

**Corollaire IV.7.** *Si $f$ est diagonalisable et $F$ est un sous-espace stable par $f$, alors l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$ est diagonalisable.*

## V. Trigonalisation

### V.1. Endomorphismes nilpotents

**Définition.** *Un endomorphisme $f$ (respectivement une matrice carrée $A$) est dit **nilpotent(e)** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$ (respectivement $A^k = 0$).*

***L'indice de nilpotence*** *de $f$ (respectivement $A$) est alors le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^k = 0$ (respectivement $A^k = 0$).*

**Proposition V.1.** *L'indice de nilpotence d'un endomorphisme de $E$ est inférieur ou égal à $\dim E$. L'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inférieur ou égal à $n$.*

**Théorème V.2.** *Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire stricte (c'est-à-dire une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls).*

### V.2. Sous-espaces caractéristiques

**Définition.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant un polynôme caractéristique **scindé** ; posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{q_k}$, où les $\lambda_k$ sont des scalaires deux à deux distincts, et les $q_k$ sont dans $\mathbb{N}^*$. On appelle **sous-espaces caractéristiques** de $f$, les sous-espaces $F_k = \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{q_k}$.*

Les sous-espaces caractéristiques sont des noyaux de polynômes en $f$ : ils sont donc stables par $f$.

**Théorème V.3.** *Avec les hypothèses et notations précédentes,* $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

### V.3. Endomorphismes trigonalisables

**Définition.** *Un endomorphisme $f$ est dit **trigonalisable** s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire.*

*Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.*

**Théorème V.4.** *Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a pour seule valeur propre 0.*

**Théorème V.5.** *Si le polynôme caractéristique de la matrice carrée $A$ est scindé, alors $A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, dans laquelle chaque bloc diagonal est triangulaire et a ses termes diagonaux égaux.*

**Théorème V.6.** *Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

**Proposition V.7.** *Si le polynôme caractéristique de $f$ est scindé, la dimension de chaque sous-espace caractéristique est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.*

### V.4. Relations entre coefficients et valeurs propres

**Théorème V.8.** *Si le polynôme caractéristique de $f$ est scindé, alors :*

- *la trace de $f$ est égale à la somme de ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité ;*
- *le déterminant de $f$ est égal au produit de ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.*