Devoir à rendre le 05/10/2020

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
2. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Exercice 2 :
Soit $u = e^{2i\pi/5}$.

1. On pose $\alpha = u + u^4$ et $\beta = u^2 + u^3$.
   (a) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$ et en déduire que α et β sont les deux racines du polynôme $X^2 + X - 1 = 0$.
   (b) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
2. On note A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, u, u^2, u^3, u^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe $(O, \vec{i})$. Déterminer les coordonnées de H.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ passant par B d'affixe i. Ce cercle coupe $(O, \vec{i})$ en M et N (M sera le point d'abscisse positive).
   Montrer que les coordonnées de M et N sont $(\alpha, 0)$ et $(\beta, 0)$ et que H est le milieu de $[OM]$.
   (c) En déduire une construction (à la règle et au compas) d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0. En ne partant que de ces deux points, on décrira les différentes étapes de la construction, n'utilisant qu'une règle (non graduée) et un compas.

Exercice 3 :
On considère l'équation à coefficients complexes : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, et on note $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. (a) Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X) = P(X + \alpha)$ soit nul.
   (b) On note alors $Q(X) = X^3 + pX + q$. Exprimer p et q en fonction de a, b, c.

   On s'est ainsi ramené à résoudre l'équation $(*)$: $z^3 + pz + q = 0$
2. On écrit $z \in \mathbb{C}$ sous la forme $z = u + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que l'équation se factorise sous la forme :
$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0.$$
3. Montrer que pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, unique à l'ordre près, tel que $\begin{cases} z = u + v \\ 3uv + p = 0. \end{cases}$
4. Montrer que si z est solution de (*), alors u^3 et v^3 sont les deux racines d'une équation du second degré que l'on explicitera.
5. En déduire les solutions de (*).
6. On suppose dans cette question que $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.
   Dans quel cas les solutions de (*) sont-elles toutes réelles ?
   Comparer avec l'étude des variations de la fonction $x \mapsto Q(x)$.
7. Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.