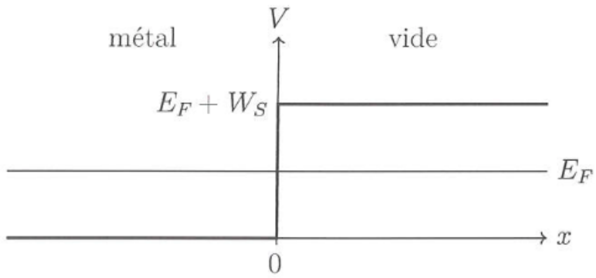
Phystat & MQ

#buffon/réservoir

XII · 10 Électrons de conduction dans un métal



On admet que les électrons de conduction d'un métal se comportent en bonne approximation comme s'ils étaient *libres* et que seuls les électrons dont l'énergie cinétique est voisine de l'énergie de Fermi E_F participent effectivement à la conduction.

Le franchissement de la surface du métal exige qu'on leur fournisse une certaine énergie appelée historiquement le travail de sortie W_S. C'est cette marche de potentiel $V_0 = E_F + W_S$ qui confine les électrons dans le matériau.

Pour le cuivre, $E_F = 7$ eV et $W_S = 4,6$ eV. En déduire la valeur de la distance δ qui caractérise la décroissance de la probabilité de présence d'un électron au voisinage de la surface et conclure.

XIV · 2 Système à deux niveaux

Un système est formé de N particules interagissant faiblement, chacune d'entre elles pouvant se trouver dans l'un ou l'autre des deux états d'énergie ε_1 ou ε_2 avec $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

1) Sans la calculer explicitement, tracer qualitativement le graphe donnant l'énergie moyenne du système $\langle E \rangle$ en fonction de sa température T. Que vaut $\langle E \rangle$ à haute et basse température ? Au voisinage de quelle température le système effectue-t-il sa transition ?

2) Donner une expression explicite de l'énergie moyenne de ce système. Vérifier que cette expression donne bien une dépendance en température comme établie à la question précédente.

3) Sans la calculer explicitement, donner l'allure de la capacité thermique molaire du système en fonction de la température.

XIV · 11

On considère un système à trois niveaux d'énergie en équilibre avec un thermostat à la température T.

- Le fondamental d'énergie nulle, n'est pas dégénéré ;
- Le premier niveau d'énergie ε est dégénéré deux fois ;
- Le deuxième niveau excité est dégénéré quatre fois et son énergie est 2ε.

1) Exprimer les probabilités P_0, P_1, P_2 d'être dans chaque niveau.

2) Étudier les limites haute et basse températures.

3) Ordonner P_0, P_1, P_2 en fonction de T. Définir une température dite d'inversion T_i.

XII · 2

Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un électron et d'un photon de même énergie $E = 2$ eV.

XIV · 15 Sédimentation ; relation de Stokes–Einstein

On disperse N particules identiques, sphériques, de rayon R, de masse volumique μ dans un bécher de section S, rempli d'un liquide de masse volumique $\mu' < \mu$ et de viscosité η. Les particules sont soumises à une force de frottement, due à la viscosité de l'eau, dont l'expression est donnée par la formule de Stokes : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$. On notera (Oz) l'axe vertical ascendant et g la norme du champ de pesanteur terrestre.

On constate que les particules ne tombent pas toutes au fond du récipient, bien qu'elles soient plus denses que l'eau : il y a une compétition entre la sédimentation et la diffusion.

Dans un premier temps (questions 1 à 3), on ne considère que la sédimentation sans prendre en compte la diffusion.

1) Quelle est la dimension de la viscosité dynamique η ?

2) Déterminer la vitesse limite $\overrightarrow{v_\ell}$ des particules. Quelle est la durée caractéristique d'établissement du régime permanent ? On fera apparaître la masse « apparente » des particules : $m_\star = (1 - \mu'/\mu)m$.

Le nombre de particules traversant une surface $\mathrm{d}S$ orientée par le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ entre t et $t + \mathrm{d}t$ est donné par $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$, où $\overrightarrow{j}$ est le vecteur densité de flux de particules.

3) Exprimer le vecteur densité de courant de particules associé à ce mouvement de sédimentation, $\overrightarrow{j_{sed}}$ en fonction de la densité $n(z)$ des particules et de la vitesse $\overrightarrow{v_\ell}$.

Il existe une autre contribution au flux de particules : la diffusion des particules en raison de l'inhomogénéité de la concentration. Le vecteur $\overrightarrow{j_{diff}}$ est donné par la loi de Fick : $\overrightarrow{j_{diff}} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(n)$, où D est le coefficient de diffusion.

4) Citer deux autres lois analogues à la loi de Fick.

5) Quelle est la dimension de coefficient de diffusion D ?

6) Calculer la densité de particules $n(z)$ à l'altitude z en régime permanent. Commenter. On notera n_0 la densité de particules en $z = 0$.

7) L'ensemble étant en équilibre thermique à la température T, exprimer $n(z)$ en utilisant la loi de Boltzmann.

8) En déduire une relation, dite de Stokes–Einstein, entre D, η et T.

Cette relation a été établie par A. Einstein en 1905. [1]

XIV · 4 Loi de Curie

Dans le modèle du paramagnétisme de Brillouin, chacun des N atomes d'un solide de température T, placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$, possède un moment magnétique $\mu_z\overrightarrow{u_z}$ dont la projection μ_z ne peut prendre que deux valeurs $\pm\mu$.

1) À quelle condition peut-on parler de limite haute température avec les valeurs numériques suivantes ? $\mu = \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24}$ J/T et $B = 1$ T et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

2) Quel est le moment magnétique moyen du solide en projection sur l'axe Oz en fonction du champ magnétique et de la température ?

3) Simplifier l'expression précédente à haute puis à basse températures

4) La loi de Curie établie expérimentalement indique que le moment magnétique moyen du solide est proportionnel au champ magnétique et inversement proportionnel à la température. Le modèle de Brillouin est-il en accord avec cette loi empirique ?

5) Pour certaines substances ferromagnétiques, le champ magnétique engendré par les atomes prend des valeurs notables et ne peut être négligé par rapport au champ extérieur $\overrightarrow{B}$. L'expression du moment magnétique moyen $\langle\mu\rangle$ est la même que précédemment à condition de remplacer B par $B + \lambda\langle\mu\rangle$, où λ est une constante positive. Grâce à une construction graphique, montrer que le moment magnétique μ_z est non nul même en absence de champ dans une certaine gamme de température. Que se passe-t-il quand on chauffe un aimant ?

XIV · 5

Les noyaux des atomes d'un solide cristallin ont un spin égal à un. D'après la théorie quantique, chaque noyau peut donc se trouver dans l'un des trois états quantiques décrits par les nombres quantiques $m = 0$, 1 ou -1. Puisque la distribution de charge électrique dans le noyau n'est pas à symétrie sphérique, l'énergie du noyau dépend de l'orientation de son spin par rapport au champ électrique interne au noyau non uniforme : un noyau a la même énergie ε dans l'état $m = 1$ ou $m = -1$ mais son énergie est nulle dans l'état $m = 0$.

1) Donner en fonction de la température, l'expression de la contribution nucléaire à l'énergie interne molaire moyenne du solide. La tracer qualitativement. Préciser les valeurs intéressantes.

2) Tracer qualitativement le graphe de la contribution nucléaire à la capacité thermique molaire du solide. La calculer explicitement. Que devient-elle à haute température ?

XII · 7

Un électron est placé à une distance z d'une plaque métallique confondue avec le plan $z = 0$. On admet qu'il est à l'origine d'une distribution surfacique de charges. La force exercée par la plaque sur l'électron est identique à celle d'une unique charge $+e$ placée en $-z$.

1) En mécanique classique : déterminer la force exercée sur l'électron. En déduire son énergie potentielle. Préciser son comportement et sa trajectoire si sa vitesse initiale est nulle.

2) Rappeler l'équation de Schrödinger. On cherche les états stationnaires de l'électron, sous la forme $\psi(z,t) = \varphi(z)g(t)$. Déterminer la forme de g en la choisissant unitaire.

3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par φ.

4) Montrer que la fonction $z \mapsto cz\,\mathrm{e}^{-kz}$ correspond à un état stationnaire possible. Déterminer k en fonction des constantes du problème. En déduire l'énergie correspondante.

5) Calculer la constante c.

6) Exprimer D, la distance moyenne entre la plaque et l'électron dans cet état.

XIV · 8

On considère un système dont les N atomes peuvent occuper trois niveaux d'énergie : $E_1 = -E$, $E_2 = 0$ et $E_3 = E$ (avec $E > 0$), en équilibre thermique avec un thermostat à la température T.

1) Calculer les nombres N_i, $i = 1, 2, 3$ d'atomes dans chacun des trois états.

2) Commenter les limites haute et basse température. Tracer l'allure des N_i en fonction de la température.

3) Calculer l'énergie moyenne ε d'un atome.

4) Tracer son évolution en fonction de la température à l'aide de la calculatrice. Commenter.

5) Décrire qualitativement l'évolution de la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$.

XII · 8 Atome d'hydrogène

On donne la partie spatiale de la fonction d'onde de l'électron d'un atome d'hydrogène, dans un certain état :

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a_0},$$

où a_0 est une constante strictement positive, et où l'on a utilisé les coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$ centrées sur le noyau de l'atome.

1) Écrire l'équation de schrödinger indépendante du temps pour l'électron dans l'atome d'hydrogène.

2) Déterminer a_0, ainsi que l'énergie E pour que la fonction précédente corresponde à un état stationnaire. Faire l'application numérique.

3) Montrer que cette fonction d'onde vérifie bien la condition de normalisation.

4) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(r)$ à la distance r du noyau. Le comparer au champ électrostatique crée par le noyau seul. Montrer qu'il y a un effet d'écrantage par l'électron.

Données : expressions du gradient et du laplacien en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \\
\Delta f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$