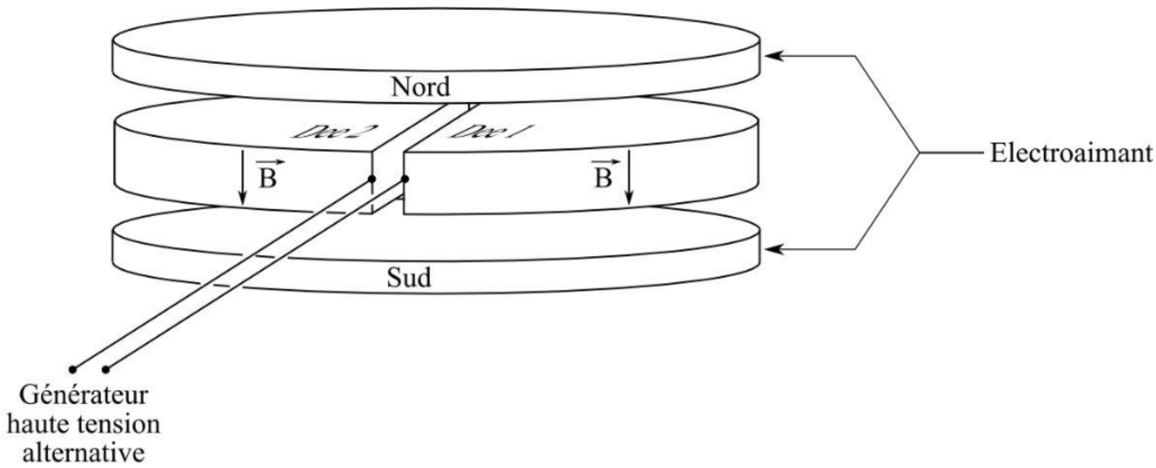
DM 09 : Particules chargées et mécanique du solide

Exercice 1 : Mouvement d'un proton dans un cyclotron

Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ afin d'accélérer des particules chargées. Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron. En France, il existe deux principaux centres utilisant cette technique : Nice (protons de 65 MeV) et Orsay (protons de 200 MeV). On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre. Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et constant d'intensité $B = 1{,}67\,\mathrm{T}$. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100\,\mathrm{kV}$ crée un champ $\overrightarrow{E}$ perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_P = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et de charge $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_0 de l'espace séparant les deux Dees. (Voir Annexe)

On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\overrightarrow{F_L}$ que subit une particule de charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ lorsqu'elle est placée dans une zone où règne un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$:

$$\overrightarrow{F_L} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \ .$$

Dans tout le problème, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

Étude du mouvement dans les Dees

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse $\vec{v}_1$, de valeur V_1 (voir feuille annexe).

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.

2. Représenter sur le schéma 1 de la feuille annexe les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2.

3. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir le système d'équations différentielles couplées auxquelles satisfont les composantes V_x et V_y de son vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. On introduira la pulsation cyclotron $\omega_C = eB/m$.

4. Montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de rayon $R_1 = V_1/\omega_C$.

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la n^{e} traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = V_n/\omega_C$.

5. Exprimer, en fonction de R_n la distance d parcourue dans un Dee lors du n^{e} demi-tour.

6. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m, e et B.

Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

7. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\vec{E}$ entre les Dees quand le proton décrit A_0A, puis BC. Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe, schéma 1) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees ?

8. Le schéma 2 de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :
— le moment où le proton passe de A_0 à A, puis lorsqu'il passe de B à C ;
— la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

9. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m, e et B.

Exercice 2 : Étude des frottements dans une scie circulaire

On considère une scie circulaire de diamètre 60 cm tourne à 640 tr · min^{-1}.

1. Calculer sa vitesse angulaire.

2. Calculer la vitesse d'une des dents, appelée vitesse de coupe. À quelle fréquence devrait tourner la scie pour que la vitesse de coupe soit de 30 m · s^{-1} ?

3. Lorsqu'on coupe le moteur, la scie ralentit uniformément et s'arrête en 6 s. Calculer la valeur absolue de l'accélération angulaire de la scie. On note $t = 0$ le moment où l'on coupe le moteur. Donner l'expression numérique de la vitesse angulaire de la scie entre $t = 0$ et $t = 6$ s.

4. Combien de tours aura effectué la scie durant cette phase d'arrêt ?

On note maintenant J le moment d'inertie de cette scie, dont le disque pèse 4 kg. On considère qu'il est soumis à un couple de frottement solide $\Gamma = \alpha J$.

5. Déterminer la valeur du moment d'inertie du disque.

6. Déterminer α à l'aide de l'étude cinématique.

7. Comment vérifier que α est bien une constante et qu'elle ne dépend pas de la vitesse de rotation du disque ?

Annexe - Mouvement d'un proton dans un cyclotron

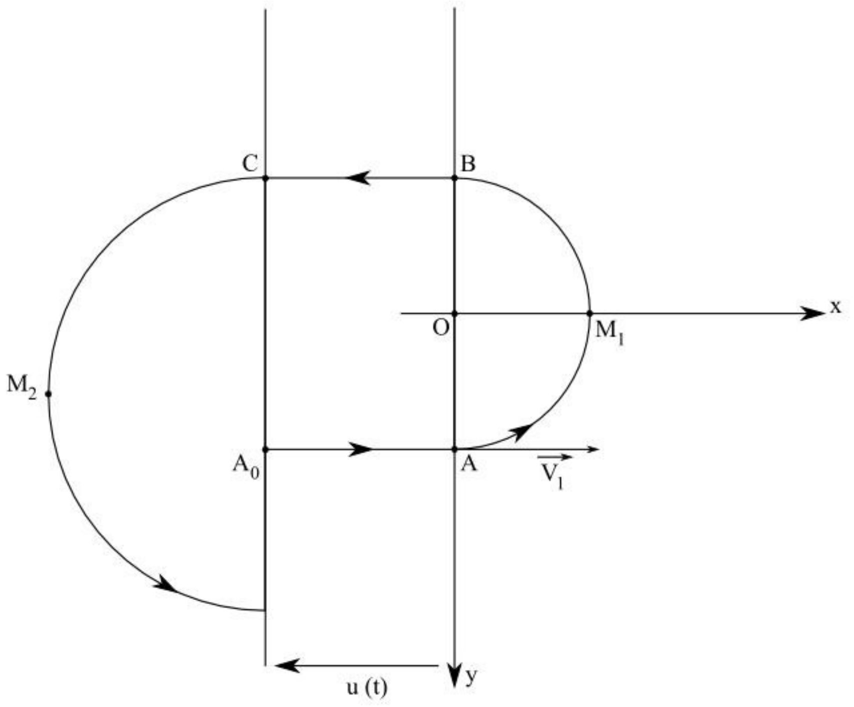


Schéma 1

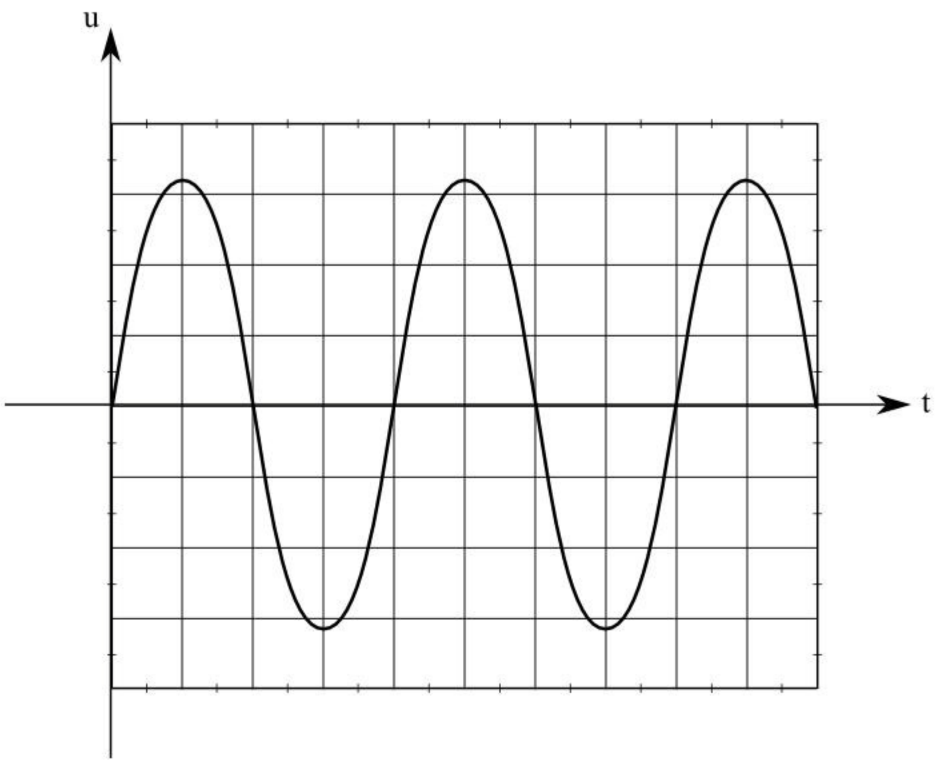


Schéma 2