Théorie de la dimension

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Espaces de type fini, dimensions

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps.

1.1 Définitions, lemme fondamental et conséquences

1.1.1 Espace de type fini

En pa$E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que E est de type fini s'il admet une famille génératrice finie, c'est-à-dire si $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

En particulier, si E admet une base finie, alors E est de type fini.

Exemples

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini car BC_n (de longueur n) engendre $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini car $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(\left(X^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}\right)$.

1.1.2 Petite histoire : théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de type fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Toute sous famille $(x_i)_{i \in I}$ de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a un longueur majorée par n car $I \subset [\![1,n]\!]$. On suppose dans la suite que $E \neq \{0_E\}$, l'un des x_i n'est donc pas nul donc il existe une sous-famille libre de $(x_1, x_2, \dots, x_{n,})$. On peut donc considérer une sous-famille libre de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de longueur maximale. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ cette longueur et $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ cette famille libre. Montrons que $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ est une base de E.

- $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ est libre par définition.
- Montrons par l'absurde que $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ est génératrice. Si $\exists j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j \notin \text{Vect}\,(y_1, y_2, \dots, y_r)$, alors $(y_1, y_2, \dots, y_r, x_j)$ est une famille libre de longueur $r+1$, absurde au vu de la définition de r.

Ainsi, $E = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \text{Vect}\,(y_1, y_2, \dots, y_r) \subset E$.

Bilan provisoire

E admet des bases finies. Plus précisément, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie, alors il existe une sous-famille libre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ qui est une base de E.

Proposition Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de $\mathcal{G}$. Alors on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L}$ est une sous-famille de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$.

En effet, il suffit de considérer une sous-famille libre de $\mathcal{G}$ de longueur maximale telle que $\mathcal{L}$ soit une sous-famille de cette sous-famille.

Théorème de la base incomplète

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L}$ est une sous-famille de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est une sous-famille de $\mathcal{B} \vee \mathcal{L}$ [a].

[a] Recollement des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$. Voir le paragraphe recollement de familles libres de la section 21.2.3.3 du cours complet page 387.

En effet, $\mathcal{G}' = \mathcal{L} \vee \mathcal{G}$ est aussi une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ est une sous-famille libre de $\mathcal{G}'$ donc, d'après la proposition précédente appliquée à $\mathcal{G}'$ et à $\mathcal{L}$, il existe une base $\mathcal{B}$ qui convient.

1.1.3 Lemme fondamental

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de V. Alors toute famille de longueur $n+1$ de vecteurs de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

Démonstration Soit H_n : « Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs de V, alors toute famille de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de longueur $n+1$ est liée ».

- H_1 est vraie : soit $x \in V$, $y, z \in \operatorname{Vect}(x)$. Si $x = 0$, $\operatorname{Vect}(x) = \{0\}$ donc $y = z$ donc (y, z) est liée. Si $x \neq 0$ et si $y = 0$ ou $z = 0$, alors (y, z) est liée. Sinon, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tels que $y = \alpha x$ et $z = \beta x$ donc $\beta y - \alpha z = 0$ donc (y, z) est liée.
- Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons H_{n+1}. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in V$ et $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, montrons que $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2})$ est liée.
  - Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ est liée d'après H_n donc $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+2})$ aussi.
  - Supposons maintenant que $\exists i \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $y_i \notin \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on pose $y_i = y_{n+2}$ quitte à renuméroter les y_k. Ainsi, $y_{n+2} \notin \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ or $y_{n+2} \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ donc

$$y_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec } \alpha \neq 0$$

On a donc $x_{n+1} \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+2})$ donc $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \subset \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+2})$ et l'autre inclusion est évidente car $y_{n+2} \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Ainsi, $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+2})$ donc $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $y_i \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_{n+2})$ donc y_i s'écrit $y_i = z_i + \beta_i y_{n+2}$ avec $z_i \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ est une famille de vecteurs de longueur $n+1$ de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donc, d'après H_n, cette famille est liée, c'est-à-dire que $\exists\,(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}$ avec

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i z_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \left(y_i - \beta_i y_{n+2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mu_i\right) y_{n+2} = 0 \end{aligned}$$

Ceci est une relation de dépendance non-triviale entre $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ d'où le résultat.

1.1.4 Conséquences

Corollaire 1 Soit E un espace vectoriel de type fini, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de longueur finie. Alors toute famille libre de E est nécessairement finie de longueur inférieure ou égale celle de $\mathcal{G}$.

En effet, soit n la longueur de $\mathcal{G}$, toute famille $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ de longueur $n+1$ est liée car c'est une famille de vecteurs de $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$.

Corollaire 2 et définition

Soit E un espace de type fini, alors E admet des bases. Toutes les bases sont de longueur finie et ont même longueur. Cette longueur commune s'appelle la dimension de E et se note $\dim E$

Démonstration

- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie, si $\mathcal{B}$ est une base finie de E, alors $\mathcal{B}$ est libre donc nécessairement de longueur finie inférieure ou égale à la longueur de $\mathcal{G}$.
- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E de longueurs finies. $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{C}$ est génératrice et vice-versa donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont même longueur.

Remarques

(1) Soit E une $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on suppose que E admet une base finie de longueur $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E est de type fini et $\dim E = n$. Par exemple, $\mathbb{K}^n$ est de longueur finie et $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\mathbb{K}_n[X]$ est fini et $\dim \mathbb{K}_n = n + 1$.

(2) Soit maintenant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui ne soit pas de type fini. Alors il existe dans E des familles libres de longueur arbitrairement grande.
   - En effet, il y a au moins un vecteur non nul dans E car $\{0\}$ est de type fini.
   - S'il existe pour $p \in \mathbb{N}^*$une famille libre de longueur p $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de vecteurs de E, alors (puisque E n'est pas de type fini), $E \neq \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ donc $\exists y \in E \setminus \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ donc $(x_1, x_2, \dots, x_p, y)$ est libre de longueur $p + 1$ d'où le résultat d'après le principe de récurrence.

Vocabulaire

– Les espaces de type fini s'appellent les espaces de dimension finie.
– Un espace qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie.
– $\{0\}$ est de dimension finie et $\dim \{0\} = 0$ car $(\varnothing)$ est bien une base de $\{0\}$.

1.2 Principes et résultats usuels

1.2.1 Principe de fainéantise

Soit [a] E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E, alors $\mathcal{L}$ est de longueur finie inférieure ou égale à n. Si la longueur de $\mathcal{L}$ est n, alors $\mathcal{L}$ est une base.

(2) Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de longueur finie de vecteurs de E. Alors la longueur de $\mathcal{G}$ est supérieure ou égale à n et si elle est égale à n, alors $\mathcal{G}$ est une base.

(3) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.Les assertions suivantes sont équivalentes [b] :

   (a) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre ;
   (b) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est génératrice ;
   (c) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base.

a. À l'instar du principe de fainéantise pour les applications (voir la section 7.4.3.2 du cours complet page 117), celui-ci permet de moins se fatiguer puisqu'il réduit le nombre de choses à montrer !
b. LASSE !

En particulier, si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre ou génératrice, alors c'est une base.

Démonstration

(1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathcal{B}$ est en particulier génératrice et toute famille libre de E est de longueur finie inférieure ou égale à n. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de longueur n, on sait que, d'après le théorème de la base incomplète, $\mathcal{L}$ peut être vue comme une sous-famille d'une certaine base $\mathcal{C}$. Or la longueur de $\mathcal{C}$ est n, ainsi que la longueur de $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ est une base.

(2) On sait que $\mathcal{G}$ est de longueur finie et contient une base $\mathcal{B}$ de longueur n. Or $\mathcal{B}$ est de longueur n donc $\mathcal{B} = \mathcal{G}$.

1.2.2 Dimension et sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie plus petite que celle de E. De plus, $\dim E = \dim F \Rightarrow F = E$.

Démonstration
- Si F n'est pas de dimension finie, F contient des familles libres de longueur arbitrairement grande donc E aussi, ce qui est impossible.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de F, c'est une famille libre de vecteurs de E donc la longueur de $\mathcal{B}$ est plus petite que $\dim E$ d'après le principe de fainéantise donc $\dim F \leqslant \dim E$. Si $\dim F = \dim E$, $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E de longueur $\dim E$ donc une base de E donc $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

1.2.3 Dimension d'une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(1) Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$. Plus généralement, si $F_1, F_2, \dots, F_r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i = E$, alors $\dim E = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$.

(2) Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors il existe un autre sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstrations

(1) Si $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors on sait que $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ est une base de E d'où le résultat.

(2) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ dans E tels que $(e_1, e_2, \dots, e_p, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une base de E. On prend alors $G = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$.

1.2.4 Dimension d'une somme quelconque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration D'après ce qui précède, on peut considérer un supplémentaire H dans F du sous-espace $F \cap G$ de F : $(F \cap G) \oplus H = F$. Montrons que $F + G = H \oplus G$.
- $H \cap G = \{0\}$ car si $x \in H \cap G$, donc $x \in F \cap G$ or $x \in H$ donc $x \in H \cap (F \cap G) = \{0\}$ donc $x = 0$.
- Montrons maintenant que $H + G = F + G$. $H \subset F$ donc $H + G \subset F + G$. Réciproquement, soit $x \in F + G$, x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ er $z \in G$ or $F = H \oplus (F \cap G)$ donc $y = a + b$ avec $a \in H$ et $b \in F \cap G$. On a alors

$$x = \underbrace{a}_{\in H} + \underbrace{b + y}_{\in G} \quad \text{car } b \in G$$

On a alors $\dim(F+G) = \dim H + \dim G$, or $\dim F = \dim H + \dim(F \cap G)$ d'où le résultat.

1.2.5 Produit cartésien

Soient E, F deux espaces vectoriels. Pour $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit les lois suivantes :

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in E \times F \quad \text{et} \quad (x, y) + \left(x', y'\right) = \left(x + x', y + y'\right)$$

On vérifie sans peine que $E \times F$ muni des lois ci-dessus forme un nouveau $\mathbb{K}$-espace vectoriel : c'est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel produit de E et de F, avec $0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$.

Supposons à présent E et F de dimension finie, $n = \dim E$ et $p = \dim F$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F et $(x, y) \in E \times F$ que l'on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x, 0_F) + (0_E, y)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{(e_i, 0_F)}_{e'_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \underbrace{(0_E, \varepsilon_j)}_{\varepsilon'_j}\end{aligned}$$

La famille $\left(e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_p\right)$ engendre $E \times F$.

Soient maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon_j = 0_{E\times F} &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon_j\right) = (0_E, 0_F)\\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon_j = 0_F\end{aligned}$$

Or $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en particulier des familles libres donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ e$\alpha_i = 0$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\beta_j = 0$. La famille $\left(e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_p\right)$ est libre, c'est donc une base de $E \times F$ qui est alors de dimension finie.

Ainsi, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$.

1.2.6 Ensemble des applications linéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim (\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \dim F$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et $\dim (\mathcal{L}(E)) = (\dim E)^2$.

Pour $F = \mathbb{K}$, l'ensemble des formes linéaires sur E $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim (\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim E$ car $\dim \mathbb{K} = 1$. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle l'espace dual et se note aussi E^*.

Rappels E admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ où $p = \dim E$. Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$, alors il existe [a] une unique application linéaire de E dans V telle que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = v_i$. En particulier, si $f, g \in \mathcal{L}(E, V)$ sont telles que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$. En d'autres termes, deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Démonstration du résultat Soit $n = \dim E$, $p = \dim F$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F. De plus, on pose pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ $f_{i,j}$ comme l'unique application linéaire de E dans F définie sur la base $\mathcal{B}$ par $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$f_{i,j}(e_k) = \delta_{ik} \varepsilon_j = \begin{cases} 0_F & \text{si } k \neq j \\ \varepsilon_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

a. Voir la section 21.3.2 du cours complet page 391.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{k,l}\varepsilon_l$ avec pour $l \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_{l,k}$ la l-ième coordonnée de $f(e_k)$ dans la base $\mathcal{C}$. Montrons que $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_{i,j}$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_{i,j}(e_k) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j}\delta_{ik}\varepsilon_j \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j}\varepsilon_j \\ &= f(e_k) \end{aligned}$$

  f et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_{i,j}$ coïncident sur $\mathcal{B}$ donc sont égales. La famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ engendre $\mathcal{L}(E,F)$.
- Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_{i,j} = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$. Montrons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\alpha_{i,j} = 0$. Pour $k \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned} 0_F &= 0_{\mathcal{L}(E,F)}(e_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_{i,j}(e_k) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j}\varepsilon_j \end{aligned}$$

  Or $\mathcal{C}$ est libre donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_{i,k} = 0$.

Ainsi, $(f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$ donc $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = n \times p$.

Remarque Pour $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{C} = (1_{\mathbb{K}})$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, soit $e_i^* \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ définie par $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_k) = \delta_{ik}1_{\mathbb{K}}$. Alors $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.

Soit $x \in E$, $j \in [\![1,n]\!]$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors

$$\begin{aligned} e_j^*(x) &= e_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_j^*(e_i) \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

L'application e_j^* associe à tout vecteur de E sa j-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Rang d'une application linéaire

Grande histoire Il était une fois E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= f(E) \\ &= f(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)) \\ &= \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie avec $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim E$ car $\dim \operatorname{Im} f$ est engendrée par une famille de longueur $\dim E$.

On définit le rang de f comme étant $\dim \operatorname{Im} f$ et on le note $\operatorname{rg} f$. On a toujours $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$.

- Si f est injective, $\mathcal{B}$ est libre donc $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ aussi donc $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{rg} f = \dim E$.
- Si $\operatorname{rg} f = \dim E$, $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de longueur $\dim E$ de $\operatorname{Im} f$ de dimension $\dim E$ donc $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est libre.
- $\mathcal{B}$ est une base de E et $f(\mathcal{B})$ est libre donc f est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} F$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Rightarrow f(x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$. $(f(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = 0$ donc $x = 0_E$.

(2) Supposons de plus maintenant que F soit de dimension finie. $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F :onc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$ et on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} f = \dim F &\Leftrightarrow f \text{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

- Si $\dim F < \dim E$, alors $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F < \dim E$ donc f ne peut pas être injective.
- Si $\dim F > \dim E$, $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E < \dim F$ donc f ne peut pas être surjective.

Proposition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

(1) Si $\dim E < \dim F$, il ne peut exister d'application linéaire surjective de E dans F.

(2) Si $\dim E > \dim F$, il ne peut exister d'application linéaire injective de E dans F.

(3) E et F sont isomorphes [a] si et seulement si $\dim E = \dim F$.

a. C'est-à-dire s'il existe une application linéaire bijective de E dans F ou de F dans E.

En effet, démontrons (3) :

$\Rightarrow$ Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme, φ est injective et surjective donc $\dim E = \dim F$ d'après (1) et (2).

$\Leftarrow$ Si $\dim E = \dim F = n$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F. Soit f l'unique application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = \varepsilon_i$. f transforme une base en une base donc f est un isomorphisme [b].

Remarque Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. S'il existe un isomorphisme de E dans X, alors X est de dimension finie et $\dim X = \dim E$.

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $X = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ donc X est de dimension finie et $\dim E = \dim X = n$.

b. Voir les divers paragraphes de la section 21.3.4 du cours complet page 393. f est injective et surjective équivaut à : elle transforme une famille libre et génératrice en une famille libre et génératrice.

2.2 Principe de fainéantise : le retour

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies tels que $\dim E = \dim F$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Les assertions suivantes sont équivalentes [a] :

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est bijective ;

(4) $f(\mathcal{B})$ est libre ;

(5) $f(\mathcal{B})$ est génératrice ;

(6) $f(\mathcal{B})$ est une base.

a. LASSE !

Démonstration On remarque que si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de longueur n, alors $\dim E = \dim F$ assure (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6).

(1) $\Rightarrow$ (2) Si f est injective, $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$ donc f est surjective.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si f est surjective, $\operatorname{rg} f = \dim F = \dim E$ donc f est injective donc bijective.

(3) $\Rightarrow$ (1) Une application bijective est en particulier injective.

(3) $\Leftrightarrow$ (6) *« Djàvu ! »*

Illustration : polynôme interpolateurs de Lagrange Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ distincts dans $\mathbb{C}$. Alors pour tout $n+1$-uplet $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\exists P \in \mathbb{C}_n[X] / \forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\widetilde{P}(x_i) = y_i$.

En effet, soit

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ P \mapsto \left(\widetilde{P}(x_1), \widetilde{P}(x_2), \ldots, \widetilde{P}(x_{n+1})\right) \end{array}$$

Montrons que φ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= \left(\widetilde{\lambda P + Q}(x_1), \ldots, \widetilde{\lambda P + Q}(x_{n+1})\right) \\ &= \left(\lambda \widetilde{P}(x_1) + \widetilde{Q}(x_1), \ldots, \lambda \widetilde{P}(x_{n+1}) + \widetilde{Q}(x_{n+1})\right) \\ &= \lambda \left(\widetilde{P}(x_1), \ldots, \widetilde{P}(x_{n+1})\right) + \left(\widetilde{Q}(x_1), \ldots, \widetilde{Q}(x_{+1})\right) \end{aligned}$$

D'autre part, montrons que φ est injective. Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$, $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\left(\widetilde{P}(x_1), \ldots, \widetilde{P}(x_{n+1})\right) = (0, \ldots, 0)$. P admet $n+1$ racines distinctes or $\deg P \leqslant n$ donc $P = 0_{\mathbb{C}_n[X]}$. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ donc φ est injective ; or $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{C}^{n+1}$ donc φ est un isomorphisme d'où l'existence du polynôme interpolateur [c].

2.3 Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (quelconque) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$$

Démonstration Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E (de dimension finie), on a alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus H$. Soit

$$\varphi : \begin{array}{l} H \longrightarrow \operatorname{Im} f \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

c. En effet, chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent par φ qui convient.

- $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ car $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Soit $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, $x \in H$ donc $x \in H \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ donc $x = 0$ donc φ est injective.
- Soit $y \in \operatorname{Im} f$, $\exists a \in E$ tel que $y = f(a)$ or $a = x + b$ avec $x \in H$ et $b \in \operatorname{Ker} f$ donc $y = f(a) = f(x) + f(b)$ or $f(b) = 0$ donc $y = f(x)$ avec $x \in H$ donc $y \in \operatorname{Im}\varphi$ donc φ est surjective.

$\operatorname{Im} f$ et H sont isomorphes, ils ont même dimension donc $\dim H = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$ et, puisque $E = H \oplus \operatorname{Ker} f$, $\dim E = \dim H + \dim \operatorname{Ker} f$ d'où le résultat.

Exemple Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (x - 2y + z, x - z, y - z)$ [a] et $\text{BC}_3 = (e_1, e_2, e_3)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= f(\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3))\\ &= \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))\\ &= \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)\end{aligned}$$

avec $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (-2,0,1)$ et $u_3 = (1,-1,-1)$. Or (u_1,u_2) est libre et $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1,u_2)$. (u_1,u_2) est donc une base de $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{rg} f = 2$.

D'après le théorème du rang,

$$\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$$

Or $0 = u_1 + u_2 + u_3 = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = f(e_1 + e_2 + e_3) = f(a)$ avec $a = (1,1,1)$. Puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et (a) est libre, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a) = \mathbb{K}a$.

Montrons maintenant que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Supposons avoir montré que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. On a alors $\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ d'où $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

3 Hyperplans et formes linéaires

3.1 Définitions

Dans la suite, E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ [b].

- On appelle droite de E tout sous-espace vectoriel de dimension 1.
- On appelle plan de E tout sous-espace vectoriel de dimension 2.
- On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Si $n = 2$, alors les hyperplans sont des droites et si $n = 3$, alors les hyperplans sont les plans.

Remarque Pour $k \in [\![0,n]\!]$, il existe toujours des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

En effet, $\dim\{0\} = 0$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, $\dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = k$.

Une forme linéaire [a] est un élément de l'ensemble $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et on rappelle que $\dim E^* = \dim E$.

a. Voir section 1.2.6 page 6.

3.2 Relation entre formes linéaires et hyperplans

Petite histoire

- Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\exists x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $\operatorname{Im}\varphi \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi \geqslant 1$. Or $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{K}$ et $\dim \mathbb{K} = 1$ d'où $\operatorname{rg}\varphi = 1$ et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{rg} f = n \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\varphi = n - 1$$

Ker φ est donc un hyperplan.

a. on vérifie en effet aisément que f est bien une application linéaire

b. En pratique, on aura $n \geqslant 2$.

– Soit H un hyperplan de E, $a \in E \backslash H \neq \varnothing$ car $\dim H < \dim E$. Montrons que $E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$.
  ○ Si $z \in H \cap \mathrm{Vect}\,(a)$, $z = \alpha a$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, si $\alpha \neq 0$, alors $a = \dfrac{1}{\alpha} z \in H$ ce qui est impossible. $z = 0$ donc $H \cap \mathrm{Vect}\,(a) = \{0\}$.
  ○ On a alors

$$\dim\left(H + \mathrm{Vect}\,(a)\right) = \dim H + \dim \mathrm{Vect}\,(a) = \dim E \Rightarrow E = H + \mathrm{Vect}\,(a)$$

  Ainsi, tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = \alpha a + y$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $y \in H$. Notons $\alpha = \varphi(x)$, montrons que φ est linéaire : soient $x, x' \in E$, $x = \alpha a + y$, $x' = \alpha' a + y'$ avec $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$, $y, y' \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda x + x' = \left(\lambda \alpha + \alpha'\right) a + \lambda y + y' \Rightarrow \varphi\left(\lambda x + x'\right) = \lambda \alpha + \alpha' = \lambda \varphi(x) + \varphi\left(x'\right)$$

  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$. Montrons que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$:
  ○ si $x \in H$, $x = 0a + x$ donc $\varphi(x) = 0$;
  ○ si $\varphi(x) = 0$, alors $x = \varphi(x)\, a + y$ avec $y \in H$ donc $x = y \in H$.
  De plus, $\varphi \neq 0$ car $\varphi(a) = 1$ donc $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Autre façon de démontrer que tout hyperplan est le noyau d'une application linéaire On peut considérer $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. Alors, par recollement, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de E. On note $\left(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_{n-1}^*, a^*\right)$ la base duale de $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, a)$. On peut montrer que $H = \mathrm{Ker}\, a^*$.

Bilan 1

(1) Si H est un hyperplan de E, alors $\exists \varphi \in E^* \backslash \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Toute forme linéaire φ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ s'appelle une équation de H.
(2) Soient $\varphi, \psi \in E^* \backslash \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^* / \varphi = \alpha \psi$. Si H est un hyperplan de E et φ une équation de H, les équations de H sont les $\alpha \psi$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Démonstration du 2^e point

$\Leftarrow$ Pour $x \in E$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = 0$ car $\alpha \neq 0$.

$\Rightarrow$ Soit $H = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, H est un hyperplan. Pour $a \notin H$, $E = \mathrm{Vect}\,(a) \oplus H$, $\varphi(a) \neq 0$ et $\psi(a) \neq 0$ car $a \notin H$ donc $\psi(a) = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)} \varphi(a)$. Posons $\alpha = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$, montrons que $\forall x \in E$, $\psi(x) = \alpha \varphi(x)$. Soit $x \in E$, $x = \lambda a + y$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y \in H$ donc $\psi(x) = \lambda \psi(a) + \psi(y) = \lambda \psi(a)$. Ainsi, $\psi(x) = \lambda \psi(a) = \lambda \alpha \varphi(a) = \alpha \varphi(x)$.

3.3 Équation cartésienne d'un hyperplan

Soit maintenant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, soit

$$\begin{aligned} h :\ & \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mapsto h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

L'ensemble d'équation cartésienne $h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ est l'ensemble des $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ tels que $h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

En effet, soit H un hyperplan de E, $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$ une équation de H. Soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale [a] de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$ est donc une base de E^*. φ s'écrit alors $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$. Pour $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k^*(e_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \end{aligned}$$

H est donc l'ensemble d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$.

Réciproquement, si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$, l'ensemble d'équations cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ dans $\mathcal{B}$ est alors $\operatorname{Ker}\varphi$ où $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ d'après le calcul précédent.

Bilan

(1) Les hyperplans de E sont les ensembles admettant (dans $\mathcal{B}$) une équation cartésienne du type $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$.

(2) Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$, H_1 l'hyperplan d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ et H_2 l'hyperplan d'équation cartésienne $\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j$. Alors, si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_1^*$ et $\psi = \sum_{j=1}^{n} b_i e_j^*$, $H_1 = \operatorname{Ker}\varphi$ et $H_2 = \operatorname{Ker}\psi$ et on a

$$\begin{aligned} H_1 = H_2 &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* / \psi = \lambda\varphi \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* / \forall i \in [\![1, n]\!], b_1 = \lambda a_1 \end{aligned}$$

Remarque

- $E = \mathbb{K}^2$, les hyperplans de E sont les ensembles d'équation cartésienne du type $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
- $E = \mathbb{K}^3$, les hyperplans de E sont les ensembles d'équation cartésienne du type $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

a. Voir la remarque page 7.

4 Complément : exercice classique

On rappelle [a] que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E$, $u(x) \in \text{Vect}(x)$, alors u est un homothétie.

Questions Soit $\mathbb{K}$-un espace vectoriel de dimension finie. Trouver tous les endomorphismes de E qui commutent avec :

(1) tous les projecteurs ;

(2) toutes les symétries ;

(3) tous les éléments de $\text{GL}(E)$;

(4) tout les endomorphismes.

Solution On remarque que les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de E. En effet, si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\begin{aligned} \alpha \text{Id}_E \circ f &= \alpha f \\ &= \alpha (f \circ \text{Id}_E) \\ &= f \circ (\alpha \text{Id}_E) \end{aligned}$$

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout projecteur p, $u \circ p = p \circ u$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, G un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ et $p = p_{\text{Vect}(x),G}$ le projecteur sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à G. Alors $u \circ p(x) = u(x)$ donc $u(x) = p \circ u(x)$ donc $u(x)$ est invariant par p donc $u(x) \in \text{Vect}(x)$ donc u est une homothétie d'après le rappel. Réciproquement, les homothéties commutent avec tout endomorphisme donc en particulier avec les projecteurs.

(2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour toute symétrie s, $u \circ s = s \circ u$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, G un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ dans E, on prend $s = s_{\text{Vect}(x),G}$: la symétrie par rapport à $\text{Vect}(x)$ parallèlement à G. Alors $u \circ s(x) = u(x)$ donc $u(x) = s \circ u(x)$ donc $u(x)$ est invariant par s donc $u(x) \in \text{Vect}(x)$ donc u est une homothétie. Réciproquement, les homothéties conviennent.

(3) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ convient, u commute en particulier avec les symétries qui sont bijectives donc u est une homothétie. Réciproquement, les homothétie conviennent.

(4) Il est clair que, puisque $\text{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$, seules les homothéties conviennent.

Une autre démonstration de la caractérisation des homothéties Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E$, $u(x) \in \text{Vect}(x)$. Montrons que u est une homothétie.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Soient $i \neq j$, on écrit $u(e_i, e_j) = \alpha(e_i + e_j)$ or $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ donc

$$(\alpha - \lambda_i) e_i + (\alpha - \lambda_j) e_j = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j = \alpha \quad \text{car } (e_i, e_j) \text{ est libre}$$

u est h_α coïncident sur $\mathcal{B}$ donc $u = h_\alpha$.

[a] Voir section 21.3.3 du cours complet page 392.