TD 25 - DL

Ex 1 :

5)

$$\frac{1}{1+\ln(1+x)} = 1 - \ln(1+x) + \ln^2(1+x) + o(\ln^2(1+x)) = 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$+ (x^2 + o(x^2))\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{x^2 + x - \sin x}{1 + \ln(1+x)} \sim x^2$$

$$\frac{x^2 + x - \sin x}{\ln(1+x)} \sim \frac{x^2}{x} = x$$

$$= x + o(x)$$

$$\underbrace{(x^2 + x - \sin x)}_{DL_3} \times \underbrace{\frac{1}{\ln(1+x)}}_{DL_0}$$

$$= \left(x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \left(x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)}$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \frac{x^2}{6} + o(x^2) + o(x^2)$$

$$= x + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

$1)\ e^x = e^a(x-a) + \frac{e^a}{2}(x-a)^2 + \underset{x \to a}{o}((x-a))$

$2)\ f : x \mapsto x\sqrt{x} = x^{3/2}$

$$(a+h)^{3/2} = \left(a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right)^{3/2}$$

$$= a^{3/2}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{3/2}$$

$$= a^{3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{a} + \frac{3}{2\times 2}\times\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2 + o\left(\left(\frac{h}{a}\right)^2\right)\right)$$

$$= a^{3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{a} + \frac{3}{8}\frac{h^2}{a^2} + o(h^2)\right)$$

$$= a^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{a}\,h + \frac{3}{8\sqrt{a}}h^2 + o(h^2)$$

$\boxed{\text{ou}}$ TY :

$\mathcal{C}^2$ aux voisinages de a

Rq : $x^{3/2} = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{a_0} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{a_1} x + a_2 x^2 + o(x^2)$

$$x^{3/2} = a_2 x^2 + o(x^2)$$

$$\underbrace{\frac{x^{3/2}}{x^2}}_{\xrightarrow{x \to 0} +\infty} = a_2 + o(1) \qquad \text{Absurde}$$

Donc f n'a pas de DL en 0 à l'OD2

$$3)\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x+x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left[(-x+x^2) - (-x+x^2)^2\frac{1}{2} + (-x+x^2)^3\frac{1}{3} + \underbrace{o((-x+x^2)^3)}_{o(x^3)}\right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

4) $\dfrac{1}{(x+3)(1-x)} = \dfrac{1}{3(1+\frac{x}{3})} \times \dfrac{1}{(1-x)}$

$$= \frac{1}{3}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x + x^2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right) + x^3\left(-\frac{1}{27}+1-\frac{1}{3}\right)+o(x^3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{2}{9}x+\frac{7}{27}x^2+\frac{17}{81}x^3+o(x^3)$$

6) $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$

On pose $h=x-1$

$$f(1+h)=\frac{(h+1)\ln(h+1)}{(h+1)^2-1}=\frac{(h+1)\ln(h+1)}{h(h+2)}=\frac{1}{h}\,\frac{(h+1)\ln(h+1)}{(h+2)}$$

$$=\frac{1}{h}\,\overset{DL_2}{\frac{1}{(h+2)}}\times\underbrace{\overset{DL_3}{(h+1)\ln(h+1)}}_{\sim h}$$

$$\frac{1}{h+2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}\right)^2+o(h^2)\right]$$

$$(h+1)\ln(h+1)=(1+h)\left[h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\right]$$

$$=h+\frac{h^2}{2}+h^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+o(h^3)$$

$$=h+\frac{h^2}{2}-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)$$

$$\frac{1}{h}\,\frac{1}{(h+2)}\times(h+1)\ln(h+1)=\frac{1}{h}\times\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}\right)^2+o(h^2)\right]\times\left(h+\frac{h^2}{2}-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right]\times\left[1+\frac{h}{2}-\frac{1}{6}h^2+o(h^2)\right]$$

$$f(1+h)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}h^2+o(h^2)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$$

7) $\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2\times 3}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{2\times 4}x^4 + o(x^4)$$

$$= \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{7} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = -x^3 - \frac{x^3}{8} + o(x^4)$$

8) $\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\ln(\cos(x))$

$$= -\ln\Big[1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}_{h}\Big]$$

$$= -\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2)\right]^2 + o\Big(\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}\right)^2}_{=o(x^4)}\Big)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

9) $(\ln(1+x))^2 = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]$

$$\times\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]$$

$$= x^2 + x^3\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] + x^4\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + o(x^4)$$

$$= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

Ex2:

1) $\dfrac{\overbrace{\sin(x)}^{\sim x}\,(\overbrace{\tan x - x}^{= o(x)})}{\underbrace{\ln(1+x)}_{\sim x}} \sim \dfrac{x^3}{3}$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$

$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\dfrac{\sin(x)(\tan x - x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

2) $\dfrac{a^x - b^x}{x}$

$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + o(x)$

$b^x = e^{x \ln b} = 1 + x \ln b + o(x)$

$a^x - b^x = 1 + x \ln a + o(x) - 1 - x \ln b + o(x)$

$\dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b + o(1)$

$\lim\limits_{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$

On pose $h = x - \frac{\pi}{4}$

$\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)} = \exp\left(\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)}_{\to \pm\infty} \times \underbrace{\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right)}_{\to 0}\right)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)} = \dfrac{\cos(2h)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right)} \sim \dfrac{-1}{2h}$

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan(h)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan h}$

Ex 3:

1) Soit u_n définie par $\begin{cases} u_n \in]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{1+n} \end{cases}$

Mq u_n CV vers 1

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0;2]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H(n)$: " $u_n \in [0;2]$ "

. I: $u_1 \in]0;1[$

donc $u_1 \in [0;2]$

donc on a $H(1)$

. H: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $H(n)$

Mq $H(n+1)$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{1+n}$$

Donc $u_{n+1} \geqslant 0$ comme somme de termes positifs et $u_{n+1} \leqslant 2$ car $u_n \in [0;2]$ par HR

Donc u est bornée

Donc $\left(\frac{u_n}{1+n}\right)$ tend vers 0.

Donc $(u_n - 1)$ tend vers 1.

2) Soit $n \geqslant 2$

$$u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n} \sim \frac{1}{n}$$

Donc $a = 1$

$$u_{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{u_{n-1}}{n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{u_{n-1} - 1}{n}$$

Or $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$

Donc $u_{n-1} - 1 \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$

Donc $\frac{u_{n-1}-1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $u_n - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $u_n - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$