DM 08 : Mécanique

Exercice 1 : Distance de freinage

Les causes d'accidents sont nombreuses et variées. Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse lors de la sortie de route liée à un dépassement incontrôlé et décrite sur la photographie (figure 1) , on vous demande de déterminer l'expression littérale, puis numérique de la vitesse du véhicule en début de la phase de freinage. Toutes données pertinentes et nécessaires à la résolution de cette question pourront être introduites par le candidat.

FIGURE 1 – Sortie de route

Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés sur la figure 2.

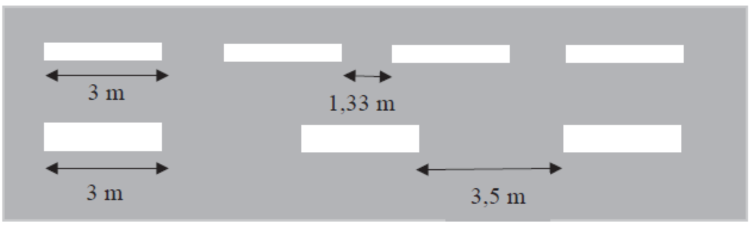

FIGURE 2 – Législation de marquage au sol

Par temps sec, le coefficient de frottement solide est $f = 0,8$.

Exercice 2 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (figure 1(a)).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ, pouvant subir une excitation externe de force $\overrightarrow{F}_{exc}$, et se déplaçant sur un support (figure 1(b)). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force d'excitation externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

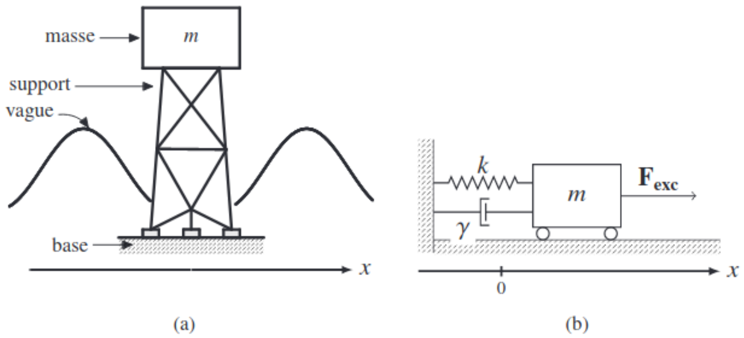

Figure 1 : (a) Plateforme en mer soumise aux vagues marines, (b) système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe ($\overrightarrow{F}_{exc}$)

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. La force totale $\overrightarrow{F}_{tot}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale $\overrightarrow{R}_N$ de la base horizontale, à la force de frottement $\overrightarrow{F}_d$, à la force de rappel $\overrightarrow{F}_k$ du ressort, au poids $\overrightarrow{P}$ de la masse et à la force $\overrightarrow{F}_{exc}$ d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$. En l'absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottements.

1. En effectuant une projection sur l'axe Ox, montrer que $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R}_N$ n'interviennent pas dans le bilan des forces.

Partie 1 : Ressort sans amortissement et sans excitation

2. Retrouver l'expression du mouvement en l'absence de frottements. Caractériser cette équation. Faire apparaitre la pulsation propre en fonction des paramètres du système.

3. On donne, à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Établir la solution de l'équation du mouvement.

4. En utilisant les expressions des énergies cinétique $K(t)$ et potentielle $U(t)$ du système, montrer que l'énergie totale $E(t)$ du système est alors :

$$E(t) = kR_0^2/2 \ ,$$

avec R_0 l'amplitude du mouvement. Justifier le résultat obtenu.

5. Représenter qualitativement $E(t)$, $K(t)$ et $U(t)$ en fonction de t.

Partie 2 : Ressort avec amortissement et sans excitation

6. La force de frottement que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse $\vec{v}$ de celle-ci : $\vec{F}_d = -\gamma \vec{v}$, avec γ constante d'amortissement (positive). En considérant une projection sur l'axe Ox, démontrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

avec ω_0 défini dans la partie précédente et ζ à exprimer en fonction de γ, k et m.

7. Dans le cas où $\zeta < 1$, $x(t)$ prend la forme suivante :

$$x(t) = \exp(-\zeta\omega_0 t) \cdot (A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t)) \ .$$

Déterminer les deux coefficients réels A_d et B_d en fonction de x_0, $\dot{x}_0$, ζ, ω_0 et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. On utilisera pour cela les mêmes conditions initiales que celles utilisées dans la partie précédente.

8. Montrer alors que l'on peut obtenir une forme du type

$$x(t) = R_d \exp(-\zeta\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_d t - \phi_d) \ ,$$

avec R_d et ϕ_d à préciser.

9. Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $R_d \exp(-\zeta\omega_0 t)$, x_0 et $2\pi/\omega_d$.

10. Donner l'expression de $E(t)$ et commenter les cas où $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$.

11. Montrer de façon simple que E est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

12. On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = \tau_d$, avec τ_d : période des oscillations amorties. En utilisant l'équation de la question 8 et en considérant que $\zeta \ll 1$, montrer que :

$$\ln(x_1/x_2) \simeq 2\pi\zeta \ .$$

13. Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure, déterminer k, ζ et γ. Comment ce tracé serait modifié en fonction de la valeur de ζ ?

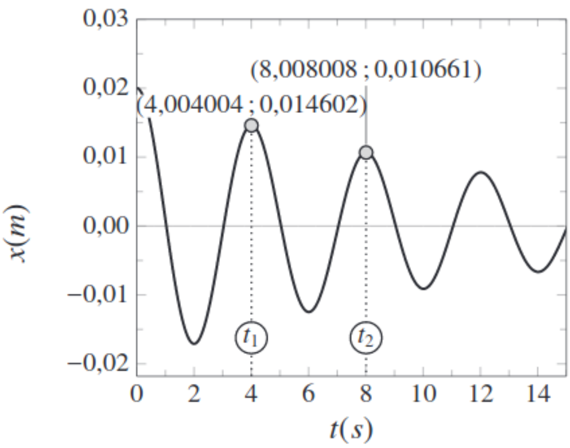

Figure 2 : Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse m tonnes en fonction du temps t (en s).

Partie 3 : Ressort avec amortissement et avec excitation

On envisage enfin le cas où le système est soumis à la fois aux effets d'amortissement et d'excitation. On se limite ici à la réponse à une excitation harmonique sinusoïdale de fréquence ω produite par une force extérieure au système

$$\vec{F}_{exc}(t) = F_0 \cos(\omega t)\,\vec{e}_x \ ,$$

avec $\vec{e}_x$ vecteur unitaire sur l'axe Ox et on se place dans le cas traité précédemment pour l'étude de l'amortisseur, c'est-à-dire $\zeta < 1$.

On admet de plus dans ce qui suit que la réponse du système dans le cas où amortisseur et excitation sont pris en compte peut s'écrire comme somme de la solution donnée par l'équation de la question 7 et de la contribution due à l'excitation :

$$x_{exc}(t) = X\cos(\omega t - \phi) \ .$$

14. Montrer que l'équation différentielle caractérisant le système devient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \ .$$

15. En déduire que

$$\begin{cases} X &= \dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} \\ \tan\phi &= \dfrac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases} ,$$

dans l'expression de la question 8.

16. Exprimer la grandeur $M = Xk/F_0$ en fonction de $r = \omega/\omega_0$ et expliciter le sens physique de la grandeur M.

17. Trouver la condition sur r puis sur ω pour laquelle M est maximale.

18. Si l'on considère une période moyenne des vagues en mer de 8 s, que peut-on conclure sur le mouvement de la plateforme ?

Exercice 3 : L'homme-canon (optionnel)

« L'homme-canon » est un spectacle de foire, qui consiste à propulser d'un canon un homme convenablement protégé, par la brutale détente d'un ressort comprimé.

1. Justifier que l'homme-canon peut être modélisé par un point matériel.

2. Justifier à l'aide de vos connaissances et d'une modélisation du système à l'instant initial l'assertion suivante : « La trajectoire est contenue dans un plan ».

3. On considère maintenant le mouvement contenu dans un plan (Oxy) avec (Ox) l'axe horizontal et (Oz) l'axe vertical tels que $x(t)$ et $z(t)$ soient croissantes dans les premiers instants du mouvement. On suppose que l'action du ressort est très courte et qu'on peut prendre un instant initial tel que $\overrightarrow{v}_0$ est la vitesse initiale et z_0 l'altitude initiale de l'homme-canon. On prend α l'angle entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{v}_0$. Déterminer les équations horaires de l'homme-canon ainsi que sa trajectoire.

On considère maintenant les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x(t) & = & 20t \\ z(t) & = & -4,9t^2 + 20t + 2,5 \end{cases}$$

Les distances sont exprimées en mètre, les durées en seconde.

4. Déterminer les valeurs de v_0, z_0 et de α.

5. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer les coordonnées du point matériel toutes les 0,5 s, de 0 à 4 s. Représenter ces positions.

6. Déterminer graphiquement à quelle distance du canon il faut placer le matelas de réception.