Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Construction (non exigible)

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un anneau principal mais n'est pas un corps car seuls les polyômes constants non nuls admettent un inverse dans $\mathbb{K}[X]$.
Cette situation est comparable à celle de $\mathbb{Z}$. Il s'agit d'un anneau principal dont les seuls éléments inversibles sont 1 et -1.
Pour construire un corps à partir de $\mathbb{Z}$, on définit l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim$:

$$\forall \big((p,q),(p',q')\big) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2 ,\ (p,q) \sim (p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

C'est-à-dire que l'on identifie les fractions $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{p'}{q'}$ lorsque $pq' = p'q$.
On va faire de même pour les polynômes. On définit les fractions rationnelles comme l'ensemble des couples $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim$:

$$\forall ((P_1,Q_1),(P_2,Q_2)) \in (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*)^2 ,\ (P_1,Q_1) \sim (P_2,Q_2) \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1$$

Une fraction rationnelle est donc une classe d'équivalence. Par soucis de simplification, pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on notera $\dfrac{P}{Q}$, la classe d'équivalence contenant le couple (P,Q).
Une fraction rationnelle peut donc être vue comme le quotient de deux polynômes dont le dénominateur n'est pas le polynôme nul.
Comme dans le cas des rationnels, on identifie les fractions rationnelles $\dfrac{P_1}{Q_1}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2}$ lorsque $P_1Q_2 = P_2Q_1$.
On identifiera un polynôme P à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$

Définition. *L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.*
On le munit de deux lois de composition internes : $+$ et $\times$ et d'une loi de composition externe $\cdot$ définies par :
$\forall ((P_1,Q_1),(P_2,Q_2)) \in (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \quad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \quad \textit{et} \quad \lambda \cdot \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\lambda P_1}{Q_1}$$

Remarque : Il faut s'assurer que ces définitions ont bien un sens c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas des représentant choisis.

Proposition. $(\mathbb{K}(X),+,\times)$ *est un corps.*

Proposition. $(\mathbb{K}(X),+,\cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

II. Forme irréductible

Un rationnel admet une infinité de représentants $\left(\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{-3}{-9}\right)$ mais on a l'habitude d'en privilégier un, on parle de fraction irréductible.
On va faire de même pour les fractions rationnelles en définissant la "forme irréductible" d'une fraction rationnelle.

Définition. *Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On dit que $\frac{P_1}{Q_1}$ est un représentant irréductible de $\frac{P}{Q}$ ou que $\frac{P_1}{Q_1}$ est une forme irréductible de $\frac{P}{Q}$ si $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $P_1 \wedge Q_1 = 1$.*

Proposition. *Toute fraction rationnelle possède un représentant irréductible.*

Démonstration. Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. S'il l'on note $D = P \wedge Q$, alors il existe deux polynômes P_1 et Q_1 tels que $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$. On a alors $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $P_1 \wedge Q_1 = 1$. $\square$

Remarque : Pour montrer que P et Q sont premiers entre eux, il suffit de prouver qu'il n'ont pas de racine complexe commune.

Proposition. *Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non nulle de représentant irréductible $\frac{P_1}{Q_1}$.*
Il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = RP_1$ et $Q = RQ_1$.

Proposition. *Soit $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ deux représentants irréductibles d'une fraction rationnelle non nulle. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P_2 = \lambda P_1$ et $Q_2 = \lambda Q_1$.*

Définition. *Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On dit que $\frac{P_0}{Q_0}$ est un représentant irréductible unitaire de $\frac{P}{Q}$ ou que $\frac{P_1}{Q_1}$ est une forme irréductible unitaire de $\frac{P}{Q}$ si*

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{P}{Q}, \quad P_0 \wedge Q_0 = 1 \quad \textit{et} \quad Q_0 \textit{ est unitaire.}$$

Proposition. *Toute fraction rationnelle possède un unique représentant irréductible unitaire.*

III. Degré, zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Proposition. *Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, alors*

$$\forall\,(P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*, \quad \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \Longrightarrow deg(P) - deg(Q) = deg(P_1) - deg(Q_1)$$

Définition. *On appelle degré d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, la quantité $deg(P) - deg(Q)$.*
Si la fraction rationnelle est non nulle, il s'agit d'un entier relatif, sinon il est égal à $-\infty$. Dans tous les cas, il est indépendant du représentant choisi.

Proposition. *Soit $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2$. On a*

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max\left(\deg F_1, \deg F_2\right) \quad \textit{et} \quad \deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2.$$

De plus, si $\deg F_1 \neq \deg F_2$, alors $\deg(F_1 + F_2) = \max\left(\deg F_1, \deg F_2\right)$.

Définition. *On note $\mathbb{K}_0(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif.*

Proposition. *L'ensemble $\mathbb{K}_0(X)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}(X), +, .)$*

Définition. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$.*
On appelle racines de F les racines de P et pôles de F les racines de Q.
On dit qu'un zéro (respectivement un pôle) de F est de multiplicité m si c'est un zéro de P (respectivement de Q) de multiplicité m.

Remarque : Il est nécessaire de considérer un représentant irréductible sinon on rajouterait des zéros et des pôles artificiellement à F.
Cette définition a un sens car si $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P_1}{Q_1}$ sont deux écritures irréductibles d'une même fraction rationnelles, alors Q et Q_1 d'une part et P et P_1 d'autre part, ont les mêmes racines.

Proposition. *Dans $\mathbb{C}(X)$ toute fraction rationnelle qui n'a pas de pôle est un polynôme.*

Définition. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$ et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F.*
On définit la fonction rationnelle associée à F par $\tilde{F} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \dfrac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$ où $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont les fonctions polynomiales associées à P et Q.

IV. Décomposition en éléments simples

Proposition. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ alors il existe un unique couple $(R, F_0) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_0(X)$ tel que $F = R + F_0$. Autrement dit $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \bigoplus \mathbb{K}_0(X)$.*
Le polynôme R est appelé partie entière de F.

Remarque : La partie entière d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est le quotient de la division Euclidienne de P par Q.

Théorème. *Partie polaire associé à un pôle :*
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et a un pôle de F de multiplicité m alors il existe une unique fraction rationnelle G n'ayant pas a comme pôle et d'uniques scalaires $a_1, \ldots, a_m$ tels que

$$F = G + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-a)^k}.$$

La fraction rationnelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-a)^k}$ est appelé la partie polaire de F associé au pôle a.

Remarque : Autrement dit, si a est un pôle de F de multiplicité m alors il existe une unique fraction rationnelle G n'ayant pas a comme pôle et un unique polynôme $R \in \mathbb{K}_{m-1}[X]$ tels que

$$F = G + \frac{R}{(X-a)^m}.$$

Proposition. *Sous les hypothèses précédentes, $a_m \neq 0$ et $F(x) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{a_m}{(x-a)^m}$.*

Théorème. *Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$:*
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $a_1, .., a_p$ ses pôles de multiplicité respective $m_1, .., m_p$ alors il existe un unique polynôme R et des complexes $(\alpha_{i,j})_{i \in [\![1,p]\!],\, j \in [\![1,m_i]\!]}$ uniques tels que

$$F = R + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j}.$$

De plus, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_{i,m_i} \neq 0$.

On rappelle que pour décomposer un polynôme en irréductibles dans $\mathbb{R}$, il suffit de savoir le décomposer en irréductibles dans $\mathbb{C}$ et de "regrouper les racines conjuguées".
Par exemple

$$\begin{aligned}
X^5-1 &= \prod_{k=0}^{4}\left(X-e^{2ik\pi/5}\right)\\
&= (X-1)\left(X-e^{2i\pi/5}\right)\left(X-e^{4i\pi/5}\right)\left(X-e^{-i4\pi/5}\right)\left(X-e^{-2i\pi/5}\right)\\
&= (X-1)\left(X-e^{2i\pi/5}\right)\left(X-e^{-2i\pi/5}\right)\left(X-e^{4i\pi/5}\right)\left(X-e^{-i4\pi/5}\right)\\
&= (X-1)\left(X^2-2\cos(2\pi/5)X-1\right)\left(X^2-2\cos(4\pi/5)X-1\right)
\end{aligned}$$

Il n'est pas forcément nécessaire de passer par la décomposition dans $\mathbb{C}$ pour les cas faciles. Par exemple X^3-1 a clairement 1 comme racine donc $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et on vérifie que X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$ car de discriminant strictement négatif.

Pour décomposer une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}$, on va distinguer les pôles réels des pôles complexes conjugués.
On commence par le résultat intuitif suivant :

Proposition. *Soit $F\in\mathbb{C}(X)$. Si z est un pôle de F de multiplicité m, alors $\bar{z}$ est un pôle de $\overline{P}$ de multiplicité m.*
Plus précisément si la partie polaire de F en z est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(X-a)^k}$, alors la partie polaire de $\overline{F}$ en $\overline{z}$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{a_k}}{(X-\overline{z})^k}$.

Remarque : En particulier, si $F=\overline{F}$ (i.e. si $F\in\mathbb{R}(X)$), alors :
si x est un pôle réel de F, alors la partie polaire de F en x est réelle.
si z est un pôle complexe et si la partie polaire de F en z est $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(X-z)^k}$, alors la partie polaire de F en $\overline{z}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{a}_k}{(X-\overline{z})^k}$.

Théorème. *Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$:*
Soit $F\in\mathbb{R}(X)$ et $\dfrac{P}{Q}$ son représentant irréductible unitaire.
Si la décomposition de Q dans $\mathbb{R}$ est

$$Q=\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)^{m_i}\prod_{i=r+1}^{p}(X^2+a_iX+b_i)^{m_i},$$

alors il existe un unique polynôme R, des réels $(\alpha_{i,j})_{i\in[\![1,r]\!],\,j\in[\![1,m_i]\!]}$ et $(\beta_{i,j},\gamma_{i,j})_{i\in[\![r+1,p]\!],\,j\in[\![1,m_i]\!]}$ uniques tels que

$$F=R+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\alpha_{i,j}}{(X-x_i)^j}+\sum_{i=r+1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{\beta_{i,j}X+\gamma_{i,j}}{(X^2+a_iX+b_i)^j}$$

Théorème. *Résultat classique à connaître*
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ se décomposant en $\lambda\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-x_i)^{m_i}$ alors

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{r}\frac{m_i}{X-x_i}$$

Corollaire. *Une conséquence classique*
Théorème de Gauss-Lucas : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré supérieur ou égal à deux alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
Autrement dit si on note $x_1,..,\ x_r$ les racines de P, alors toute racine y de P' est un barycentre des $x_1,..,\ x_r$ i.e. il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in (\mathbb{R}^+)^r$ tel que $y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ et $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$.

V. En pratique

Lorsque l'on dispose d'une fraction rationnelle que l'on veut décomposer en éléments simples.
On commence par obtenir la partie entière de F : il s'agit du quotient de la division Euclidienne du numérateur par le dénominateur.
On dispose alors d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ de degré strictement inférieur à 0.
On factorise alors le dénominateur dans $\mathbb{C}$, ce qui permet d'identifier les pôles c'est-à-dire les racines de Q qui ne sont pas racine de P et de se ramener à une fraction irréductible.
A ce stade, les théorèmes de décomposition permettent, si l'on n'a pas peur des calculs de conclure.

Exemple. *Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{X^4}{X^3-1}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.*
On a $X^4 = X(X^3-1) + X$ donc $\dfrac{X^4}{X^3-1} = X + \dfrac{X}{X^3-1}$.
Comme $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$, il existe des complexes a, b et c tels que

$$\frac{X}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}$$

Si l'on est motivé, il suffit donc de réduire au même dénominateur et de trouver a, b et c en résolvant un système 3×3.

Il existe bien sûr plus rapide.

1. Limiter les calculs

Dans tous les cas, il faut **utiliser l'unicité de la décomposition pour calculer le moins de coefficients possible** pour cela on prend en compte la parité/imparité de la fraction rationnelle ou d'éventuelles symétries. (Dans l'exemple précédent, on a $c = \overline{b}$.)

2. Le cas des pôles simples

Lorsqu'un pôle est simple (i.e. de multiplicité 1), il est facile d'obtenir la partie polaire en ce pôle.

Proposition. *Partie polaire associée à un pôle simple :*
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ admettant un pôle simple a de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-a)Q_1}$ alors la partie polaire de F associé à a est

$$\frac{a_1}{X-a} \qquad \text{avec } a_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

Remarque : Pour obtenir a_1, on considère donc la fraction rationnelle $(X-a)F(X)$ dont on détermine la limite (finie) au point a.

Exemple. *Décomposer la fraction rationnelle* $\dfrac{X^4}{X^3-1}$ *sur* $\mathbb{C}$ *et sur* $\mathbb{R}$.

La partie entière de F *est* X *et* $F = X + \dfrac{X}{X^3-1}$. *Dans* $\mathbb{C}$, F *admet trois pôles simples* 1, j *et* j^2. *Il existe donc des complexes* a, b *et* c *tels que*

$$\frac{X}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}$$

Comme $(X-1)F = \dfrac{X}{(X-j)(X-j^2)} = \dfrac{X}{X^2+X+1}$, *on a* $a = \dfrac{1}{3}$.
Comme $(X-j)F = \dfrac{X}{(X-1)(X-j^2)} = \dfrac{X}{X^2+jX+j^2}$, *on a* $b = \dfrac{1}{3j} = \dfrac{j^2}{3}$.
Comme $(X-j^2)F = \dfrac{X}{(X-1)(X-j)} = \dfrac{X}{X^2+j^2X+j}$, *on a* $c = \dfrac{1}{3j}\dfrac{j^2}{3} = \dfrac{j}{3}$.
Bien sûr, il était inutile de calculer c *car* $c = \overline{b}$. *Ainsi*

$$\frac{X^4}{X^3-1} = X + \frac{1}{3(X-1)} + \frac{j^2}{3(X-j)} + \frac{j}{3(X-j^2)}.$$

La décomposition sur $\mathbb{R}$ *se fait en regroupant les pôles conjugué et on obtient*

$$\frac{X^4}{X^3-1} = X + \frac{1}{3(X-1)} + \frac{-X+1}{3(X^2+X+1)}.$$

Remarque : L'expression $a_1 = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ peut simplifier les calculs dans le cas où il n'est pas simple d'évaluer Q_1 en a.

Exemple. *Décomposer la fraction rationnelle* $\dfrac{1}{X^{2n}-1}$ *sur* $\mathbb{C}$ *et sur* $\mathbb{R}$.
La fraction rationnelle est de degré $-2n < 0$ *donc de partie entière nulle. Elle possède* n *pôles simples* ω^k *avec* $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ *et* $\omega = e^{i\pi/n}$.

Il existe donc des complexes $a_0, \ldots a_{2n-1}$ *tels que* $\dfrac{1}{X^{2n}-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{X-z_k}$.

On a $a_k = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2n-1} (z_k - z_i)}$ *ce qui n'est pas aisé à calculer. Il vaut mieux alors utiliser l'autre expression qui donne* $a_k = \dfrac{1}{2n z_k^{2n-1}} = \dfrac{z_k}{2n}$ *puis* $\dfrac{1}{X^{2n}-1} = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{z_k}{X-z_k}$.
Seules $z_0 = 1$ *et* $z_n = -1$ *sont des pôles réels et sinon* $\overline{z_k} = z_{2n-k}$, *on regroupe donc les racines conjuguées de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^{2n}-1} &= \frac{1}{2n}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2n}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{z_k}{X-z_k} + \frac{\overline{z}_k}{X-\overline{z}_k}\right)\\ &= \frac{1}{2n}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2n}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k\pi/n)-1}{X^2-2\cos(k\pi/n)X+1}.\end{aligned}$$

3. Pôle multiple

Quand la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-a)^m Q_1}$ on a un pôle multiple a, obtenir la partie polaire au point a, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-a)^k}$, est plus compliquée.

Voici quelques méthodes basées sur la remarque suivante :
On a $F = R + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-a)^k}$ avec R une fraction rationnelle n'ayant pas a comme pôle d'ordre m. Donc

$$(X-a)^m F = \frac{P}{Q_1} = (X-a)^m R + \sum_{k=1}^{m} a_k (X-a)^{m-k}.$$

Par conséquent :
- $a_m = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \lim_{x \to a} (x-a)^m F(x)$.
- $(x-a)^m R(x) = o_a\left((x-a)^{m-1}\right)$ donc $\sum_{k=1}^{m} a_k (x-a)^{m-k}$ est le DL à l'ordre $m-1$ de $(x-a)^m F(x)$ en a

Nous allons illustrer ces deux méthodes pour décomposer $F = \frac{X^2+1}{X^2(X-1)^2}$.

Première méthode :

Identifier $a_m = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \lim_{x \to a} (x-a)^m F(x)$ puis considérer $F_1 = F - \frac{a_m}{(X-a)^m}$ et recommencer.

Exemple. *Comme* $\deg F = 2 - 4 < 0$*, sa partie entière est nulle. Les pôles de* F *sont* 0 *et* 1 *; il s'agit de pôle double.*
On a donc $F = \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2}$ *avec*

$$a_2 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \quad et \quad b_2 = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2} = 2$$

On considère alors la fraction

$$F - \frac{1}{X^2} - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{-2}{X(X-1)} = \frac{a_1}{X} + \frac{b_1}{X-1}.$$

Il s'agit d'une fraction rationnelle ayant 0 *et* 1 *comme pôles simples. Par conséquent*

$$a_1 = \lim_{x \to 0} \frac{-2}{x-1} = 2 \qquad et \quad b_1 = \lim_{x \to 1} \frac{-2}{x} = -2$$

Ainsi $F = \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-2}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$.

Deuxième méthode

Effectuer un développement limité de la fonction $x \mapsto (x-a)^m F(x)$ au voisinage de a à l'ordre $m-1$.

Exemple. *Effectuons un DL à l'ordre 1 en* 0 *de* $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$.
Au voisinage de 0*, on a* $\frac{x^2+1}{(x-1)^2} = (x^2+1)(1+2x+o(x)) = 1 + 2x + o(x)$.
Donc $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$*. La partie polaire en* 0 *est donc* $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$.
Effectuons un DL à l'ordre 1 en 1 *de* $\frac{x^2+1}{x^2}$ *i.e. un DL à à l'ordre 1 en* 0 *de* $\frac{(1+h)^2+1}{(1+h)^2}$.
Au voisinage de 0*, on a*

$$\frac{(1+h)^2+1}{(1+h)^2} = \frac{h^2+2h+2}{h^2+2h+1} = (2+2h+o(h))\,(1-2h+o(h)) = 2 - 2h + o(h).$$

La partie polaire en 1 *est donc* $\dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{-2}{x-1}$.
On retrouve $F = \dfrac{2}{X} + \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{-2}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$.

Autres méthodes

On peut aussi pour obtenir la décomposition utiliser des limites et/ou des valeurs particulières.

Exemple. *On a* $F = \dfrac{a_1}{X} + \dfrac{a_2}{X^2} + \dfrac{b_1}{X-1} + \dfrac{b_2}{(X-1)^2}$ *avec* $a_2 = 1$ *et* $b_2 = 2$ *puis*

$$\lim_{x \mapsto +\infty} xF(x) = a_1 + b_1 = 0 \text{ et } F(2) = \frac{5}{5} = \frac{9}{4} + \frac{b_1}{2}$$

D'où $b_1 = -2 = -a_1$.

On peut bien sûr mélanger ces différentes méthodes, faire différemment selon les pôle mais rappelons que la prise en compte de la parité/imparité de la fraction rationnelle ou d'éventuelles symétries permet de limiter les calculs

Exemple. *La fraction rationnelle* $F = \dfrac{1}{X^2(X-1)^2}$ *présente une symétrie : son graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation* $X = \dfrac{1}{2}$ *i.e.* $F(X) = F(1-X)$.
Ainsi, si on note $F = \dfrac{a_1}{X} + \dfrac{a_2}{X^2} + \dfrac{b_1}{X-1} + \dfrac{b_2}{(X-1)^2}$, *alors*

$$\frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2} = \frac{a_1}{1-X} + \frac{a_2}{(1-X)^2} + \frac{b_1}{-X} + \frac{b_2}{X^2}$$

donc, par unicité de la décomposition $a_1 = -b_1$ *et* $a_2 = b_2 = 1$.

VI. Entrainement

Décomposer en élément simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1. $\dfrac{1}{X(X-2)}$
2. $\dfrac{X}{(X^2-1)^2}$
3. $\dfrac{1}{X^3+1}$
4. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$
5. $\dfrac{1}{X^3(X^2+X+1)}$
6. $\dfrac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$
7. $\dfrac{1}{(X^2+1)^2}$
8. $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$
9. $\dfrac{X^n}{X^{2n}-1}$
10. $\dfrac{n!}{X(X-1)...(X-n)}$

VII. Utilisations

Citons quelques utilisations principales des fractions rationnelles en Mathématiques (vous les utilisez aussi en SI pour la résolution d'équations différentielles par transformation de Laplace) :
- calcul d'intégrale ou de primitive ;
- calcul de sommes télescopiques ;
- calcul de dérivées n-ème.

Exercice.

1. *Déterminer des primitives de* $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4-1}$ *et* $x \mapsto \dfrac{x^4}{x^3-1}$.
2. *Montrer que les séries* $\sum \dfrac{1}{k(k+1)}$ *et* $\sum \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ *convergent et calculer leurs sommes.*
3. *Calculer la dérivée n-ème de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2\cos\theta x+1}$ *et de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.