# Exponentielle de matrice

1 : On rappelle que la norme d'opérateur est sous-multiplicative :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R}) \qquad |||MN||| \leq |||M|||\,|||N|||.$$

Il en résulte que pour toute matrice A et tout entier n

$$|||\frac{A^n}{n!}||| \leq \frac{|||A|||^n}{n!} \quad (1)$$

la série $\sum_{n\geq 0} \frac{|||A|||^n}{n!}$ donc par comparaison $\sum |||\frac{A^n}{n!}|||$ converge.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est <u>complet</u> ceci assure que $\underline{\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} \text{ cv}}$

2. L'inégalité (1) donne :

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad |||\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}||| \overset{I.T}{\leq} \sum_{k\geq 0}^{N} |||\frac{A^k}{k!}||| \leq \sum_{k=0} \frac{|||A|||^k}{k!} \leq e^{|||A|||}. \quad (2)$$

De plus, par continuité de la norme :

$$\lim_{N\,\infty} |||\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}||| = |||\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}||| = |||\exp(A)||| \quad (3)$$

(2) et (3) prouvent que $\underline{|||\exp(A)||| \leq e^{|||A|||}}$

3. Pour tout entier $N$ on a par distributivité du produit :

$$P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{PA^k}{k!}$$

. Par continuité du produit matriciel $P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right) \xrightarrow[N\infty]{} P\exp(A)$

Ceci prouve que le terme de droite a une limite.

Par définition de la somme d'une série, cette limite est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^k}{k!}$.

4. De la même façon, en faisant le produit à gauche, on

obtient :

$$P(\exp A)P^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^kP^{-1}}{k!}$$

Mais $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par suite on a :

$$\boxed{P(\exp A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})}$$

5. Si $A = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ on a pour tout $k$ $\frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \frac{d_1^k}{k!} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{d_n^k}{k!} \end{bmatrix}$

d'après les propriétés de calcul sur les matrices triangulaires.

$\forall N \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N} \frac{d_1^k}{k!} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{N} \frac{d_n^k}{k!} \end{bmatrix}$$

d'après la convergence coordonnée par coordonnée, la matrice $\exp(A)$ est de la forme :

$$\exp A = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

6 : (a) De la même façon si $A = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ on a $\exp A = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix}$

D'après la questi 4 : si $A = P \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} P^{-1}$ on a

$$\exp A = P \begin{bmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

(b) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

si $A = P^{-1} T P$ avec $T = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$

on a d'après 4. et 5. $\exp A = P^{-1} \exp T \, P$

et $\det(\exp T) = \det \begin{bmatrix} e^{d_1} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{bmatrix} = e^{d_1 + \cdots + d_n} = e^{\mathrm{Tr}(T)}$

Par suite

$$\det(\exp A) = \det(\exp T) = e^{\mathrm{Tr}(T)} = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

ce scalaire est non nul, donc $\exp A$ est inversible

7. Posons $u_{n,m} = \dfrac{A^n B^m}{n!\,m!}$

à $n$ fixé on a

$$T_n = \sum_{m=0}^{\infty} |||u_{n,m}||| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|||A|||^n}{n!} \frac{|||B|||^m}{m!} = \frac{|||A|||^n}{n!} e^{|||B|||} < \infty \quad (4)$$

et $$\sum_{m=0}^{\infty} T_m \leq e^{|||B|||} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|||A|||^n}{n!} = e^{|||B|||} e^{|||A|||} < \infty \quad (5)$$

(4) et (5) assurent la sommabilité de la famille $(u_{n,m})$

On calcule la somme de deux façons :

<u>D'une part</u>, selon le théorème de Fubini, on a :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n B^m}{n!\,m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{A^n}{n!} \exp(B)\right] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) \exp B = \exp A \exp B$$

<u>D'autre part</u> : selon le théorème de sommation par paquets :

$$\sum_{(n,m)} u_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n+m=k} u_{n,m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n+m=k} \frac{A^n B^m}{n!\,m!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{n+m=k} \binom{k}{m} A^n B^m\right) \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \exp(A+B)$$

(*) La formule du binôme s'applique car $A$ et $B$ commutent

Par conséquent, $\underline{\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)}$

**8**

- $\exp(D) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$ (cas diagonal)
- $\forall n \geq 2 \; F^n = 0$ donc $\exp F = I + F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Le polynôme $(X-1)(X-2)$ annule $E$

on en déduit facilement que : $E^n = (2^n - 1)E + (2 - 2^n) I_2$

Par suite

$$\exp(E) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n-1)}{n!}\right) E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-2^n)}{n!} I_2$$

$$= (e^2 - e) E + (2e - e^2) I_2$$

$$= \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \exp(D+F)$$

comme $\exp(D)\exp(F) = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$ on <u>n'a pas</u> $\exp(D)\exp(F) = \exp(D+F)$

**9** Posons $u_n(t) = \frac{t^n}{n!} A^n$.

- $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ [c'est $\exp(tA)$]
- $\forall n \geq 1$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n$

- Soit $[-M, M]$ un segment de $\mathbb{R}$ on a $\forall t \in [-M, M]$

$$|||u_n'(t)||| \leq \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} |||A|||^n = \alpha_n$$

le réel $\alpha_n$ est indépendant de $t$ et $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ cv, par suite

<u>$\sum u_n'$ cv normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$</u>

le théorème de dérivation s'applique et $f_A'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \exp(tA)$