Inégalités de Hölder-Minkowski

1 $\boxed{1M}$

Posons $f(\alpha) = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \alpha\beta$

f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(\alpha) = \alpha^{p-1} - \beta$ $\quad f''(\alpha) = (p-1)\,\alpha^{p-2}$

Comme $p>1$ $f''>0$ et donc f atteint son minimum en $\alpha = \beta^{\frac{1}{p-1}}$

Mais $f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = 0$ donc :

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \geq \alpha\beta \text{ avec égalité ssi } \alpha^{p-1} = \beta$$

$\boxed{2M}$ La fonction logarithme est strictement concave donc :

$\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y > 0 \qquad \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y) \leq \ln(\lambda x + (1-\lambda) y)$

en prenant $\lambda = \frac{1}{p}$, $x = \alpha^p$, $y = \beta^q$ on a :

$$\frac{1}{p}\ln \alpha^p + \frac{1}{q}\ln \beta^q \leq \ln\left(\frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q\right)$$

comme $\frac{1}{p}\ln \alpha^p + \frac{1}{q}\ln\beta^q = \ln \alpha\beta$ c'est l'inégalité voulue.

De plus : on a égalité ssi $x = y$ soit si $\alpha^p = \beta^q$ ($\Leftrightarrow \alpha^{p-1} = \beta$)

2 Notons que l'inégalité du 1 est aussi valide si α ou $\beta = 0$.

Si $n_p(f) = 0$ Alors $\int_0^1 |f|^p dx = 0$. Mais $|f|^p$ est positive et continue

donc $|f|^p = \vec{0}$ soit $f = \vec{0}$.

Dans ce cas, l'inégalité proposée est vraie.

Par symétrie, c'est pareil si $n_q(g) = 0$.

Sinon : en appliquant l'inégalité du 1 pour $\alpha = \frac{|f(x)|}{N_p(f)}$ $\beta = \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$

Il vient :

$$\forall x \in [0,1] \quad \frac{|f(x)g(x)|}{N_p(f)N_q(f)} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{N_q(g)^q}.$$

En intégrant on obtient :

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\int_0^1 |f(x)||g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}\frac{N_p(f)^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q}\frac{N_q(f)^q}{N_q(f)^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Donc $\underline{\int_0^1 |f(x)g(x)|\,dx \leq N_p(f)N_q(g)}$ (H)

Pour $p=2$ on a $q=2$ ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) et l'inégalité (H) redonne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\underline{3}$: $N_p(f+g)^p = \int_0^1 |f+g|^p\,dx \leq \int_0^1 |f+g|^{p-1}|f|\,dx + \int_0^1 |f+g|^{p-1}|g|\,dx$

$\leq N_p(f)N_q((f+g)^{p-1}) + N_p(g)N_q((f+g)^{p-1})$ (par H)

Soit $\underline{N_p(f+g)^p \leq (N_p(f)+N_p(g))\,N_q((f+g)^{p-1})}$

Mais $N_q((f+g)^{p-1}) = \left(\int_0^1 |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = N_p(f+g)^{p-1}$

↳ $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p}$

Donc en $\underline{\text{simplifiant par } N_p(f+g)^{p-1}}$ on a le résultat voulu

(si $N_p(f+g) = 0$, l'inégalité est triviale)

4 La questi 3 donne l'inégalité triangulaire
Les autres axiomes sont trivialement satisfaits

5 : L'inégalité de Hölder donne : (pour $g = 1$)

$$\int_0^1 |f| \, dx \le n_p(f)$$

Donc <u>$\forall p > 1$ n_p est plus fine que n_1</u>

On a d'évidence $\int_0^1 |f|^p dx \le \|f\|_\infty^p$ donc $n_p(f) \le \|f\|_\infty$ et <u>$\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que</u> n_p

En prenant $f_n(x) = x^n$ on a sans difficulté $n_p(f_n) = \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}}$.

$$\frac{n_p(f_n)}{n_1(f_n)} = \frac{n+1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}} \underset{n\infty}{\sim} p^{-\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

et $$\frac{\|f_n\|_\infty}{n_p(f_n)} = \frac{1}{n_p(f_n)} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty .$$

Il n'y a donc aucune équivalence