Fonctions vectorielles : dérivation et intégration

Dans tout le chapitre, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$; E, F, G,...sont des espaces vectoriels **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$.

I. Dérivation

I.1. Généralités

Définition. *Soient $f : I \longrightarrow E$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable** en t_0 si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a :*

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)u + (t - t_0)\varepsilon(t)$$

où ε est une fonction vectorielle de limite 0_E en t_0 ; ou, de manière équivalente, $f(t_0 + h) = f(t_0) + hu + h\varepsilon_1(h)$ où ε_1 a pour limite 0_E en 0.

*Le vecteur u est alors défini de manière unique par ces relations ; il est appelé le **vecteur dérivé** de f en t_0, et noté $f'(t_0)$.*

Proposition I.1. *Avec les notations précédentes, f est dérivable en t_0 si et seulement si $\dfrac{1}{t - t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big)$ admet une limite en t_0, ou, de manière équivalente, $\dfrac{1}{h}\big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big)$ admet une limite en 0. Dans les deux cas, la limite est alors le vecteur dérivé de f en t_0.*

Proposition I.2. *Avec les notations précédentes, si f est dérivable en t_0, alors elle est continue en t_0.*

Définition. *Avec les mêmes notations, on dit que f est **dérivable à gauche** en t_0, si $\dfrac{1}{t - t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big)$ admet une limite à gauche en t_0. Le vecteur limite est alors appelé **vecteur dérivé à gauche** de f en t_0, et noté $f'_g(t_0)$.*

Proposition I.3. *Soient $f : I \longrightarrow E$ et $t_0 \in I$. On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et on note $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$; on a donc, pour tout $t \in I$, $\quad f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)e_k$.*

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont ; et, dans ce cas, $\quad f'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(t_0)e_k$.

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow E$. Si f est dérivable en chaque point de I, on dit que f est dérivable sur I ; et l'application $f' : I \longrightarrow E$, $t \longmapsto f'(t)$ est appelée application dérivée de f.*

Si de plus cette application dérivée est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I.

I.2. Dérivation et opérations

Proposition I.4. *Soient f et g deux fonctions de I dans E, $t_0 \in I$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si f et g sont dérivables en t_0 (respectivement sur I), alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi, et $[\lambda f + \mu g]'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0)$ (respectivement $[\lambda f + \mu g]' = \lambda f' + \mu g'$).*

Corollaire I.5. *L'ensemble $\mathcal{C}^1(I, E)$ des fonctions de classe C^1 de I dans E, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition I.6. *Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ prenant ses valeurs dans l'intervalle J ; soient $t_0 \in I$ et $f : J \longrightarrow E$.*

Si φ est dérivable en t_0 (respectivement sur I) et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$ (respectivement sur J), alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 (respectivement sur I) et $[f \circ \varphi]'(t_0) = \varphi'(t_0)f'\big(\varphi(t_0)\big)$ $\quad$ (respectivement $[f \circ \varphi]' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$).

Proposition I.7. *Soient $f : I \longrightarrow E$, $t_0 \in I$ et L une application **linéaire** de E dans F.*

Si f est dérivable en t_0 (respectivement sur I), alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 (respectivement sur I) et $\;[L \circ f]'(t_0) = L\big(f'(t_0)\big)\;$ (respectivement $[L \circ f]' = L \circ f'$).

Proposition I.8. *Soient $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow F$, $t_0 \in I$ et B une application **bilinéaire** de $E \times F$ dans G. Soit $h : I \longrightarrow G$, $t \longmapsto B\big(f(t), g(t)\big)$.*

Si f et g sont dérivables en t_0 (respectivement sur I), alors h est dérivable en t_0 (respectivement sur I) et $\;h'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big)$.

Plus généralement, si $f_1, \ldots, f_p$ sont dérivables, et si M est p-linéaire, alors $g = M(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable, et g' est la somme des p termes de la forme $M(f_1, \ldots, f_{k-1}, f'_k, f_{k+1}, \ldots, f_p)$.

I.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow E$. Pour $k \geqslant 1$, on définit les fonctions dérivées successives $f^{(k)}$ de f par récurrence : si f est k fois dérivable sur I, de dérivée k-ième $f^{(k)}$, on dit que f est $(k+1)$ fois dérivable sur I si $f^{(k)}$ est dérivable sur I ; on pose alors $f^{(k+1)} = [f^{(k)}]'$. Par convention, $f^{(0)} = f$.*

On dit que f est de classe C^k sur I si elle est k fois dérivable sur I, et si $f^{(k)}$ est continue sur I.

On notera que, dans ce dernier cas, les dérivées $f^{(j)}$, pour $j \leqslant k - 1$, sont toutes dérivables, donc sont continues.

Proposition I.9. *Avec les notations précédentes, f est de classe C^k sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et f' est de classe C^{k-1} sur I.*

Proposition I.10. *On suppose E muni d'une base $\mathcal{B}$. Avec les notations précédentes, f est de classe C^k sur I si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont de classe C^k sur I.*

I.4. Opérations sur les fonctions C^k

Proposition I.11. *Soient f et g deux fonctions de I dans E, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $k \in \mathbb{N}$. Si f et g sont de classe C^k sur I, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi, et $[\lambda f + \mu g]^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.*

Corollaire I.12. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ des fonctions de classe C^k de I dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition I.13. *Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ prenant ses valeurs dans l'intervalle J ; soient $f : J \longrightarrow E$ et $k \in \mathbb{N}$. Si φ est de classe C^k sur I et si f est de classe C^k sur J, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur I.*

Proposition I.14. *Soient $f : I \longrightarrow E$, L une application* ***linéaire*** *de E dans F et $k \in \mathbb{N}$. Si f est de classe C^k sur I, alors $L \circ f$ est de classe C^k sur I et $[L \circ f]^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.*

Proposition I.15. *Soient $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow F$, B une application* ***bilinéaire*** *de $E \times F$ dans G et $k \in \mathbb{N}$. Soit $h : I \longrightarrow G$, $t \longmapsto B\big(f(t), g(t)\big)$.*

Si f et g sont de classe C^k sur I, alors h de classe C^k sur I et

$$\forall t \in I \quad h^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B\big(f^{(j)}(t), g^{(k-j)}(t)\big)$$

II. Intégration

II.1. Définition

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow E$. On dit que f est continue par morceaux sur un segment $[a, b] \subset I$ si elle n'y a qu'un nombre fini de discontinuités, et admet une limite à gauche (sauf éventuellement en a) et une limite à droite (sauf éventuellement en b) en chacun de ces points de discontinuité.*

Cela équivaut à dire que les fonctions coordonnées de f dans une base quelconque sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

Définition. *Soit $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b] \subset I$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.*

Le vecteur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\int_a^b f_k(t)\, dt\Big) e_k$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie ; on l'appelle ***intégrale*** *de f sur $[a, b]$, et on le note $\int_a^b f(t)\, dt$.*

II.2. Propriétés

Proposition II.1. *Si f et $g : I \longrightarrow E$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$, et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, et*

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g](t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

Proposition II.2. *Soient $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$, et $L \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors, $L \circ f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, et*

$$\int_a^b [L \circ f](t)\, dt = L \left(\int_a^b f(t)\, dt \right)$$

Proposition II.3. *Si $f : I \longrightarrow E$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, et si $c \in \,]a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$.*

Comme pour les fonctions numériques, on pose $\int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt$ si $a < b$, et $\int_a^a f(t)\, dt = 0$.

Proposition II.4. *Soit $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$. Posons enfin $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$.*

Alors, la suite $\big(S_n(f)\big)$ a pour limite $\int_a^b f(t)\, dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème II.5. *Soit $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors, la fonction $\|f\| : t \longmapsto \|f(t)\|$ l'est aussi, et $\displaystyle\Big\|\int_a^b f(t)\, dt\Big\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\, dt$.*

II.3. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème II.6. *Soit $f : I \longrightarrow E$* ***continue*** *sur I ; soient $a \in I$, et $F : I \longrightarrow E$, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$. Alors, F est de classe C^1 sur I, et $F' = f$.*

Corollaire II.7. *Soit $f : I \longrightarrow E$, continue sur I. Soit G une primitive de f sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$.*

Théorème II.8. *Soit f une fonction de classe C^1 de I dans E. On suppose de plus trouvé $M \in \mathbb{R}$ tel que $\|f'(t)\| \leqslant M$ pour tout $t \in I$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M|b-a|$.*

III. Formules de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans tout ce qui suit, f est une fonction de classe C^n de I dans E, et a un point fixé de I. Pour tout $x \in I$, on pose

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - T_n(x) \\ &= f(x) - \Big(f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a)\Big) \end{aligned}$$

III.1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème III.1. *Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors, pour tout $x \in I$,*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt$$

III.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème III.2. *Si f est de classe C^{n+1} sur I, et si on connaît $M \in \mathbb{R}$ tel que*
$\forall t \in I \quad \|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M$ *alors* $\forall x \in I \quad \|R_n(x)\| \leqslant \dfrac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

III.3. Formule de Taylor-Young

Théorème III.3. *Si f est de classe C^n sur I, alors $\|R_n(x)\| = o\big((x-a)^n\big)$ au voisinage de a.*