DM 1 : étude d'une suite récurrente (Extrait d'un problème de Centrale)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.
On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$$

et telles que, de plus, on ait $U_0 \geqslant 0$ et $U_1 \geqslant 0$.
On associe à tout élément (x, y) de Q la suite $U(x, y)$ appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.
Le terme de rang n de $U(x, y)$ sera noté $U_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'existe, par U_n.
Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x, y) de Q tels que la suite $U(x, y)$ ait pour limite λ.

Première partie

Généralités

I.1.a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.
b) Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, d'une suite appartenant à S ?
c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.
d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.
e) Que peut on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?

I.2. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à S et *non constante*.
a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
b) Montrer que, s'il existe $N \geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_N et à U_{N-1}, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
On établirait de même que, s'il existe $N \geqslant 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_N et à U_{N-1}, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.
c) Déterminer les limites des suites $U(x, y)$ pour $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ et pour $(x, y) = (2, 0)$.

I.3. Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geqslant N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. *On ne cherchera pas, dans cette question, à démontrer l'existence de telles suites.*
I.3.a) Montrer que U_0 et U_1 sont distincts.
I.3.b) On suppose que $U_0 < U_1$ (l'autre cas est similaire et conduit à la même conclusion).
Montrer par récurrence que pour tout n on a les inégalités $U_{2n} \leqslant U_{2n+2} \leqslant U_{2n+3} \leqslant U_{2n+1}$.
En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

I.4 Établir, pour une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non constante* appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \geqslant 1$ et $U_{N+1} \geqslant 1$.
b) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
c) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété **a)**, tous ses termes, sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1. il est demandé dans cette question de réfléchir soigneusement à la façon d'utiliser les questions précédentes pour éviter les longs calculs.

I.5. (cette question est analogue à la précédente, il n'est pas demander de la traiter : le résultat est admis)
Établir de même, pour une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S *non constante*, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \leqslant 1$ et $U_{N+1} \leqslant 1$.
b) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
c) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

I.6. Montrer que les ensembles $E_0, E_1, E_{+\infty}$ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Deuxième partie

Dans cette partie, on montre que E_1 a plusieurs éléments. éléments.

Pour $x \in \mathbb{R}+$, on désigne par $\lambda(x)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, 0)$.

II.1. Démontrer que $\lambda(x) \leqslant \lambda(x')$ dans l'hypothèse où $x \leqslant x'$.

II.2.

II.2.a) Démontrer que la fonction qui à x associe $U_n(x, 0)$ est continue.

II.2.b) En déduire que si $U(x, 0)$ tend vers l'infini, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier n tel que $U_n(x-\varepsilon, 0)$ et $U_{n+1}(x - \varepsilon, 0)$ soient supérieurs ou égaux à 2.

II.2.c) Etablir finalement que $U(x - \varepsilon, 0)$ tend vers l'infini.

II.2.d) De façon analogue, montrer que si $\lambda(x) = 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(x + \varepsilon) = 0$.

II.3.a) Montrer qu'il existe un réel a, borne supérieure de l'ensemble des $x \geqslant 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul (on utilisera la question **I.2.c**)

II.3.b) Que dire de $\lambda(x)$ pour $x < a$?

II.3.c) Démontrer que $\lambda(a) = 1$ On raisonnera par l'absurde en supposant successivement que $\lambda(a) = \infty$ et $\lambda(a) = 0$ et on utilisera la question **II.2.**.

II.3.d) Ecrire un script python déterminant pour déterminer la valeur approchée de a à 10^{-2} près par défaut. On pourra utiliser une dichotomie et le résultat de la question **I.5**.

Troisième partie

Étude de la rapidité de la croissance des suites croissantes de S tendant vers l'infini.

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque appartenant à S. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités

$$\frac{1}{2}U_n^2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n + \frac{1}{2}U_n^2$$

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$.
On pose $V_n = \dfrac{1}{2}U_n$ et $z_n = 2^{-n}\ln(V_n)$.

a) Établir que la suite (z_n) tend vers une limite L (utiliser la série de terme général $z_{n+1} - z_n$). Cette limite dépend de U_0 et de U_1, on ne cherchera pas à la calculer.

b) Sous les mêmes hypothèses, établir pour n assez grand la double inégalité

$$L - \frac{1}{2^n V_n} < z_n < L$$

En déduire un équivalent de U_n quand $n \to +\infty$ (on posera $e^L = M$).
Que peut-on dire de la différence entre U_n et cet équivalent ?

3. On prend $U_0 = U_1 = 2$. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de L à 10^{-6} près. Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de U_{20} ?