Graphes

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

19 juillet 2023

Introduction aux graphes.

1 Graphes

Les graphes sont des outils indispensables en informatique ; par exemple, les graphes acycliques (le terme anglais direct acyclic graphs sera plus facile à trouver sur www) sont très utiles en compilation et en optimisation de code. Les graphes sont aussi le support de ce que l'on appelle les réseaux bayésiens, utilisés pour la modélisation statistique. Ils servent aussi à l'étude des réseaux, dont Internet ; en particulier, on s'intéresse souvent dans ce cas aux graphes aléatoires. La recherche d'un tri topologique est importante aussi en mathématiques appliquées, pour l'optimisation multi-objectifs par exemples. Enfin, la recherche de plus court chemin sur un graphe, sous des formes très variées, a un vaste réseau d'applications. On pourra trouver une introduction aux graphes et aux algorithmes qui les concernent dans [1].

Définition 0.1 **Graphe orienté**
Un **graphe orienté** est la donnée d'un couple (X, U) où X est un ensemble muni d'une relation binaire U. Les éléments de X sont appelés les **sommets** du graphe et les éléments de U sont appelés les **arcs** du graphe.
On note $\Gamma^+(x)$ l'ensemble des y tels que $(x, y) \in U$; on l'appelle ensemble des **successeurs** de x.

On note $\Gamma^-(x)$ l'ensemble des y tels que $(y,x) \in U$; on l'appelle ensemble des **prédécesseurs** de x.
On note $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$ le **degré sortant** ou **degré externe** de x.
On note $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$ le **degré entrant** ou **degré interne** de x.
Si $d^-(x) = 0$ x est appelé une **source**.
Si $d^+(x) = 0$ x est appelé un **puits**.

DÉFINITION 0.2 **Graphe orienté sans circuit**
Un graphe orienté (X,U) est dit **sans circuit** s'il n'existe pas de cycle formé par des arcs $(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,x_1)$. En anglais on parle de DAG (directed acyclic graph).

THÉORÈME 0.1
Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté fini. G est sans circuit si et seulement si les deux énoncés suivants sont vérifiés :
•$\exists x \in X\ d^-(x) = 0$.
•$\forall x \in X\ d^-(x) = 0 \Longrightarrow G \setminus \{x\}$ est sans circuit.

THÉORÈME 0.2
Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté fini. G est sans circuit si et seulement si il existe une permutation $(x_1,x_2,...,x_n)$ des sommets tels que $d^-_{G_i}(x_i) = 0$, avec $G_i = G[\{x_i,...,x_n\}]$.

Voici un algorithme déterminant si oui ou non un graphe est sans circuit ou non. La structure de données employée consiste en une liste de successeurs pour chaque sommet.

Algorithme sans-circuit(G)
<u>Début :</u>
Pour tout $x \in X$ faire
    $d^-(x) = 0$
Pour tout $x \in X$ faire
    Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire
        $d^-(y) \leftarrow d^-(y) + 1$
$Source \leftarrow \emptyset$
$Nbsommets \leftarrow 0$
Pour tout $x \in X$ faire
    Si $d^-(x) = 0$ alors $Source \leftarrow Source \cup \{x\}$.
Tant que $Source \neq \emptyset$ faire
    $x \leftarrow choix(Source)$
    $Source \leftarrow Source\setminus\{x\}$
    $Nbsommets \leftarrow Nbsommets + 1$
    Pour chaque successeur y de x faire

$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
Si $d^-(y) = 0$ alors
$Source \leftarrow Source \cup \{y\}$.
Si $(Nbsommets = n)$ alors G est sans circuit sinon G a au moins un circuit.

La complexité de cet algorithme est $O(n + m)$ avec n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs. *Source* peut être implémentée sous forme de liste, avec pour fonction de choix la fonction simplissime qui choisit le premier élément.

Définition 0.3 **Tri topologique**

Un **tri topologique** d'un graphe orienté sans circuit $G = (X, U)$ est une permutation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de X telle que $(x_i, x_j) \in U \Longrightarrow i < j$.

Notons que la permutation calculée par l'algorithme précédent (ie. l'ordre de sortie de *Source*) est un tri topologique.

L'algorithme suivant sert à engendrer *tous* les tris topologiques :

Algorithme Tri-topologique(G)
Pour tout $x \in X$
Calculer $d^-(x)$ (comme dans l'algorithme précédent)
$S \leftarrow \emptyset$
Pour tout $x \in X$ faire
Si $d^-(x) = 0$ alors $S \leftarrow S \cup \{x\}$
$\sigma \leftarrow \emptyset$
Tri-topo(G, S, σ)

---

avec la procédure récursive « Tri-topo » suivante :

Algorithme Tri-topo(G, S, σ)
Si $S = \emptyset$ alors écrire σ sinon
Pour tout $x \in S$ faire
$S' \leftarrow S - \{x\}$
$\sigma \leftarrow \sigma.x$ (concaténation)
Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire
$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
Si $d^-(y) = 0$ alors
$S' \leftarrow S' \cup \{y\}$
Tri-topo(G, S', σ)
Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire
$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
$\sigma \leftarrow \sigma$ privé de x

La complexité est en $O((n+m)*|L(G)|)$, où $L(G)$ est le nombre de tri topologiques, n est le nombre de sommets, m est le nombre d'arcs.

Il existe des algorithmes de complexité $O(n*|L(G)|)$ (beaucoup plus compliqués).

Pour aller plus loin, le lecteur est encouragé à consulter [2].

Références

[1] M. Gondran, M. Minoux *Graphes et algorithmes, 2e édition*, Eyrolles, 1986.

[2] Vincent Bouchitté, Brice Goglin, Jean-Baptiste Rouquier, *Graphes et algorithmique des graphes*, `http://laure.gonnord.org/site-ens/mim/graphes/cours/cours_graphes.ps` Licence 'OpenContent', Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1998.