Espaces vectoriels

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Définitions, exemples, faits de base

1.1 Définitions et exemples

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ où :
- E est un ensemble non-vide dont les éléments sont appelés vecteurs et se notent en minuscules latines, parfois surmontées d'une flèche ;
- $+$ est une loi de composition interne sur E ;
- $\cdot$ est une loi externe de domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$, c'est en fait une application de $E \times \mathbb{K}$ dans E.

Ce triplet doit être tel que :

(1) $(E, +)$ est un groupe commutatif. On notera 0_E le vecteur nul (élément neutre), et, pour $x \in E$, on notera $-x$ l'opposé de x ;

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(5) $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires et se notent généralement avec des minuscules grecques.

Exemples

(1) Soit $E = \mathbb{K}^3$, pour $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $y = (\lambda, \mu, \nu)$, on pose $x + y = (\alpha + \lambda, \beta + \mu, \gamma + \nu)$ et, pour $\delta \in \mathbb{K}$, $\delta \cdot x = (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$. On vérifie que $\left(\mathbb{K}^3, +, \times\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de neutre $0_{\mathbb{K}^3} = (0, 0, 0)$.

(2) Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, on pose

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est ainsi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(3) $(\mathbb{K}\left[X\right], +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

(4) Soit X un ensemble non-vide, $(\mathcal{F}\left(X, \mathbb{K}\right), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois usuelles sur les fonctions. En particulier, les ensembles de suites sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(5) Soit $\mathbb{L}$ un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$, $+$ l'addition de $\mathbb{L}$ et, pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{L}$, on pose $\alpha \cdot x = \alpha x$ (produit dans $\mathbb{L}$). Alors $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ainsi, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1.2 Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(1) Soit $x \in E$, l'application $\lambda \in \mathbb{K} \longmapsto \lambda \cdot x \in E$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K}, +)$ dans $(E, +)$. En particulier, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$. Mieux, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n\lambda) \cdot x = n\left(\lambda \cdot x\right)$. En prenant $\lambda = 1$ et $n = -1$, $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \in E \longmapsto \lambda \cdot x$ est un endomorphisme de groupes de $(E, +)$, on a donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (nx) = n\left(\lambda \cdot x\right)$ d'où, en combinant avec les résultats de (1) : $\forall\left(n, \lambda, x\right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{K} \times E$,

$$\lambda \cdot (nx) = n\left(\lambda \cdot x\right) = (n\lambda) \cdot x$$

En particulier, pour $n = -1$, $\lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$.

(3) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$. En effet :

$\Leftarrow$ *« Djàvu ! »*

$\Rightarrow$ Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et montrons que $x = 0_E$.

$$\begin{aligned} x &= 1_{\mathbb{K}} \cdot x \\ &= \left(\lambda \frac{1}{\lambda}\right) \cdot x \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E \\ &= 0_E \end{aligned}$$

(4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $x \in E$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot x)$$

(5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot x_i)$$

1.3 Combinaisons linéaires, familles libres, liées, génératrices

Dans la suite, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.3.1 Combinaisons linéaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. Une combinaison linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, si on prend $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$.

1.3.2 Familles libres et liées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre si $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Lorsque la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée, c'est-à-dire si $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

Remarques Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$.

- Si l'un des x_i est nul, alors la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée. En effet, si par exemple $x_1 = 0$, alors $\alpha_1 = 1_{\mathbb{K}}$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\alpha_i = 0$ font que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

– Si l'un des x_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

En effet, supposons que x_1 est combinaison linéaire de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, alors $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ donc

$$1 \cdot x_1 + (-\lambda_2) \cdot x_2 + \cdots + (-\lambda_n) \cdot x_n = 0$$

et $(1, -\lambda_2, -\lambda_3, \ldots, -\lambda_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

– En particulier, si $\exists i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i = x_j$, alors la famille est liée.

– Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée, alors $\exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_j \neq 0$, alors

$$\alpha_j x_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i x_i \Rightarrow x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i$$

Ainsi, x_j est combinaison linéaire des autres x_i.

La famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des x_i est combinaison linéaire des autres.
Par contraposée, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres.

Exemples

(1) Soit $x \in E$, on note $\mathbb{K}x = \{\alpha \cdot x | \alpha \in \mathbb{K}\}$. Si $x = 0_E$, $\mathbb{K}x = \{0_E\}$. Sinon, on dit que $\mathbb{K}x$ est la droite vectorielle engendrée par x. On dit que $y \in E$ est colinéaire à x lorsque $y \in \mathbb{K}x$.
  - 0_E est colinéaire à tout $x \in E$.
  - L'unique vecteur colinéaire à 0 est 0.
  - Si $x, y \in E \setminus \{0_E\}$, x est colinéaire à $y \Leftrightarrow y$ est colinéaire à x, on dit alors que x et y sont colinéaires.

  On a donc, pour $x, y \in E$ avec $x \neq 0$: (x, y) est liée si et seulement si y est colinéaire à x. En effet :

  $\Leftarrow$ Si y est colinéaire à x, $y = \alpha \cdot x$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ donc $-\alpha \cdot x + 1 \cdot y = 0$ et $(-\alpha, 1) \neq (0, 0)$.

  $\Rightarrow$ Supposons que $\exists\, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que $\alpha x + \beta y = 0$. Si $\beta = 0$, alors $\alpha x = 0$, faux car $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\beta \neq 0$ et $y = -\dfrac{\alpha}{\beta} x$.

  On a donc, si $x, y \in E \setminus \{0\}$ et si y n'est pas colinéaire à x, alors la famille (x, y) est libre.

(2) Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 2, 1)$, $y = (1, -1, 1)$ et $z = (2, 1, 3)$. La famille (x, y, z) est elle libre ?
  Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0_E = (0, 0, 0)$, montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha - \beta + \gamma, \alpha + \beta + 3\gamma) = (0, 0, 0) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 & \\ -3\gamma - 3\beta = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

(3) Toujours avec $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 1)$, $y = (1, -1, 2)$ et $z = (1, 3, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ la famille (x, y, z) est-elle libre ?
  Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y + \gamma z = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha - \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta + \lambda\gamma)$. On a alors

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \lambda\gamma = 0 \end{cases} \quad (S)$$

La famille (x, y, z) est libre si et seulement si l'unique solution de S est $(0, 0, 0)$. Or, avec le pivot de [a] Gauss, on a :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \\ -2\beta + 2\gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \beta + (\lambda - 1)\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + (\lambda - 1)\gamma = 0 \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \\ \beta + (\lambda - 1)\gamma = 0 & \\ 2\lambda\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

– Si $\lambda \neq 0$, l'unique solution de S est $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\alpha = 0$.
– Si $\lambda = 0$, $(-2, 1, 1)$ est une solution non nulle.

Par conséquent, la famille est libre si et seulement si $\lambda \neq 0$.

(4) Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes tels que $0 \leqslant \deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$. Alors cette famille est libre. En particulier, si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\deg P_k = k$, alors $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Supposons que $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$ et soit $m = \max\{i \in [\![1, n]\!] \,|\, \lambda_i \neq 0\}$. Alors $\lambda_m \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m = 0$. Or $\deg \lambda_m P_m = \deg P_m$ car $\lambda_m \neq 0$. Or, pour $k < m$, $\deg \lambda_k P_k \leqslant \deg P_k < \deg P_m$. Par conséquent, $\deg(0 = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m) = \deg P_m \in \mathbb{N}$, d'où la contradiction.

(5) On prend maintenant $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r \in \mathbb{R}$ distincts avec $r \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $f_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{e}^{\alpha_k t}$. Montrons que $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est une famille libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \cdots + \lambda_r \mathrm{e}^{\alpha_r t} = 0$. D'où, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \cdots + \lambda_r \mathrm{e}^{(\alpha_r - \alpha_1)t} = 0$$

Or, $\forall k \in [\![2, r]\!]$, $\alpha_k > \alpha_1$ donc, en faisant tendre t vers $-\infty$, on obtient $\lambda_1 = 0$. On recommence le processus $r - 1$ fois pour obtenir le résultat.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \cos(kt)$. Pour $k, l \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_k g_l$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soient $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} g_k(t)\, g_l(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos((k+l)t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos((k-l)t)\ \mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

– Si $k = l = 0$, alors $I = 2\pi$.
– Si $k = l \neq 0$, alors $I = \pi$.
– Si $k \neq l$, alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin((k+l)t)}{k+l}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin((k-l)t)}{k-l}\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

a. Karl Friedrich !

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = 0$. Soit $l \in [\![0, n]\!]$, alors $0_E = \lambda_0 g_0 g_l + \cdots + \lambda_n g_n g_l$ donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} 0_E \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{\int_0^{2\pi} g_i(t)\, g_l(t)\ \mathrm{d}t}_{0 \text{ si } k \neq l} \\ &= \lambda_l \underbrace{\int_0^{2\pi} g_l^2}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Donc $\lambda_l = 0$.

(c) Soit, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $h_k(t) = \cos^k t$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ est une famille libre. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 h_0 + \cdots + \lambda_n h_n = 0$, ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos^n t = 0 \Rightarrow \widetilde{P}(\cos t) = 0$$

où $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. $\{\cos t | t \in \mathbb{R}\}$ est infini donc $P = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Généralisation

Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dira que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si $\forall J \subset I$ tel que J est fini, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Si I est fini et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, il est clair que $\forall J \subset I$, toute sous-famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Exemples On a vu que $(x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et il en est de même pour $(x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(kx))_{k}$
Pour $a \in \mathbb{K}$, $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Vocabulaire

- Lorsque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre, on dit que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants.
- Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, toute relation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$ s'appelle une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cette relation est dite triviale si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$. La famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si il existe une relation de dépendance linéaire non-triviale entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.3.3 Familles génératrices

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que cette famille est génératrice ou que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ engendre E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(2) Soit I un ensemble quelconque, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est génératrice si tout vecteur de E s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, c'est-à-dire que $\forall x \in E$, $\exists J \subset I$ avec J fini tel que x est combinaison linéaire des vecteurs de $(x_i)_{i\in J}$.

Exemples

- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$. D'après la formule de Taylor, $\forall a \in \mathbb{K}$, $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

1.4 Bases

1.4.1 Définition, exemples

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si $(x_i)_{i\in I}$ est à la fois libre et génératrice.

Exemples

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on note $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) = (\delta_{ik})_{i\in[\![1,n]\!]}$. Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

– Montrons d'abord que la base est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(0,0,\dots,0) &= \alpha_1 (1,0,\dots,0) + \dots + \alpha_n (0,\dots,0,1)\\ &= (\alpha_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0,\dots,0,\alpha_n)\\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha_i = 0$.

– Montrons maintenant que la famille est génératrice. Soit $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ donc x est une combinaison linéaire des e_i.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et se note $\textsc{bc}_n$.

(2) $(1_{\mathbb{K}})$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

(3) $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors on peut montrer [a] que $(1, z)$ est une base de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(4) $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et, plus généralement, d'après la formule de Taylor, $\forall a \in \mathbb{K}$, $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.

(5) Soient $x = (\alpha, \beta), y = (\gamma, \delta) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que (x, y) est une base de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

$\Rightarrow$ Si $\alpha\delta = \beta\gamma$, alors

$$\begin{aligned}\delta x - \beta y &= (\alpha\delta, \beta\gamma) - (\beta\gamma, \beta\delta)\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

Ceci montre que (x, y) est liée si $(\beta, \delta) \neq (0,0)$. Si $\beta = \delta = 0$, alors $\gamma x - \alpha y = (0,0)$ donc la famille est aussi liée. Le résultat est démontré par contraposée.

$\Leftarrow$ Supposons que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

– Montrons que (x, y) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda x + \mu y = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\lambda + \gamma\mu = 0 & (1)\\ \beta\lambda + \delta\mu = 0 & (2)\end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\delta(1) - \gamma(2) &\Rightarrow \alpha\delta\lambda + \gamma\delta\mu - \beta\gamma\lambda - \delta\gamma\mu = 0\\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{\neq}\lambda = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda = 0\\ \beta(1) - \alpha(2) &\Rightarrow \underbrace{(\gamma\beta - \alpha\delta)}_{\neq 0}\mu = 0\\ &\Leftrightarrow \mu = 0\end{aligned}$$

a. « *Left to the reader !* »

– Montrons que (x, y) est génératrice. Soit $u = (a, b) \in E$, on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda x + \mu y = u \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha + \mu\gamma = a & (1) \\ \lambda\beta + \delta\mu = b & (2) \end{cases}$$

○ Si λ et μ existent, alors

$$\begin{aligned} \delta\,(1) - \gamma\,(2) &\Rightarrow (\alpha\delta - \beta\gamma)\,\lambda = \delta a - \gamma b \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta a - \gamma b}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\ \beta\,(1) - \alpha\,(2) &\Rightarrow (\gamma\beta - \alpha\delta)\,\mu = \beta a - \alpha b \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{\beta a - \alpha b}{\gamma\beta - \alpha\delta} \end{aligned}$$

○ Vérifions maintenant que ces solutions conviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\delta a - \gamma b}{\alpha\delta - \beta\gamma}x + \frac{\beta a - \alpha b}{\gamma\beta - \alpha\delta}y &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left((a\delta - \gamma b)\,\alpha + (\alpha b - \beta a)\,\gamma, (a\delta - \gamma b)\,\beta + (\alpha b - \beta a)\,\delta\right) \\ &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(a\delta\alpha - a\beta\gamma, \alpha\delta b - \gamma\beta b\right) \\ &= (a, b) \\ &= u \end{aligned}$$

(6) Posons $u = (1, -1, 1)\,, v = (1, 0, 2)\,, w = (2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$, montrons que (u, v, w) est une base.

– Montrons que (u, v, w) est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v + \nu w = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu - \nu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \\ -\lambda - 5\nu = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ -\lambda + \nu = 0 \\ 6\nu = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \nu = 0, \lambda = 0, \mu = 0 \end{aligned}$$

– Montrons que (u, v, w) est génératrice. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = x &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = a \\ -\alpha + \gamma = b \\ \alpha + 2\beta - \gamma = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = a \\ \beta + 3\gamma = a + b & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \beta - 3\gamma = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = a \\ \beta + 3\gamma = a + b \\ -6\gamma = c - b - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que le dernier système d'inconnues α, β, γ admet des solutions donc la première équation aussi, d'où le résultat.

1.4.2 Coordonnées

Supposons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admette une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. On dira que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est le n-uplet de coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Démonstration L'existence est assurée par la définition de la base $\mathcal{B}$. Reste donc à montrer l'unicité. Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0_E$, or $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i - \beta_i = 0$ d'où l'unicité.

Remarque En termes plus savants, l'application $\varphi : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est une bijection de $\mathbb{K}^n$ dans E. On en déduit que, pour $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)) &= \varphi(\alpha\lambda_1 + \mu_1, \alpha\lambda_2 + \mu_2, \ldots, \alpha\lambda_n + \mu_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \\
&= \alpha\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in E$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\alpha_i(x)$ la i-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$. Alors $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_i(\lambda x + y) = \lambda\alpha_i(x) + \alpha_i(y)$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition, exemples

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :
1. (1) F est un sous-groupe de $(E, +)$;
2. (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda \cdot x \in F$.

On rappelle que (1) $\Leftrightarrow 0_E \in F$ et $\forall x, y \in F$, $x - y \in F$.

Exemples

(1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

(2) Pour $E = \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

(3) Soit I un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$, on prend $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E, de même que les ensembles des fonctions paires d'une part, et impaires d'autre part.

(4) Pour $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ainsi que l'ensemble des suites qui convergent vers 0.

(5) Soit le système suivant pour $p, n \in \mathbb{N}^*$:

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Un tel système appelé système linéaire de n équations à p inconnues possède un ensemble de solutions $\mathrm{Sol}\,(S)$, qui est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Montrons ce résultat.

- $0_{\mathbb{K}^p}$ est évidemment une solution de (S).
- Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$0 = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\alpha_j = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\beta_j \quad \Rightarrow \quad 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(\alpha_j - \beta_j)$$
$$\Rightarrow \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) - (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$$

De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} \lambda a_{i,j}\alpha_i = 0$ donc $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$ d'où le résultat.

En particulier, l'ensemble des $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Critère réduit Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $F \subset E$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \neq \varnothing$ et $\forall x, y \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x + y \in F$. En effet :

$\Rightarrow$ On sait que $F \neq \varnothing$ d'après la définition d'un sous-espace vectoriel. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$, $\alpha \cdot x \in F$ donc $\alpha x + y \in F$ toujours d'après la définition.

$\Leftarrow$ Soient $x, y \in F$, alors $-x + y = (-1_{\mathbb{K}})\,x + y \in F$ donc F est un sous-groupe de $(E, +)$ donc $0_E \in F$ donc, pour $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x = \alpha x + 0_E \in F$ d'où le résultat.

Intersection de sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel. La démonstration est similaire à celle des sous-groupes [a].

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. Comment décrire le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

L'ensemble $\mathcal{F}$ des sous-espaces vectoriels qui contiennent $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a au moins un élément : E. L'intersection de tous les éléments de F est alors un sous-espace vectoriel de E, et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) qui contient $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On le note $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Montrons que $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **est l'ensemble des combinaisons linéaires de** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Notons provisoirement $\mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- On a toujours $\mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En effet, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i x_i \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- D'autre part, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ car $x_i = 0x_1 + \cdots + 1x_i + \cdots + 0x_n$, et, pour $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \in \mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda y + z = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + \beta_i)\,x_i \in \mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

donc $\mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donc on a bien l'inclusio inverse : $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset \mathrm{CL}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En particulier, pour $x \in E\setminus\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}\,(x) = \mathbb{K}x$, la droite vectorielle engendrée par x.

[a]. Voit la section 18.2.1.4 du cours complet page 297.

Remarque Si $x_n \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, alors $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. En effet :

– $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'où

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

car $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel.

– $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et $x_n \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ donc $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots$ donc $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Exemples

(1) Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, -1)\,, v = (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. *Quid* de $F = \mathrm{Vect}\,(u, v)$? Il s'agit de décrire F à l'aide d'une ou plusieurs équations cartésiennes.
Soit $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} e \in F &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \alpha u + \beta v = e \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \alpha + \beta = y \\ -\alpha + \beta = z \end{cases} \quad (S) \\ &\Leftrightarrow \text{le système } (S) \text{ d'inconnues } \alpha, \beta \text{ possède des solutions} \end{aligned}$$

Or, d'après le pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -\beta = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3\beta = z + x & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -\beta = y - x \\ 0 = -2x + 3y + z & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

– Si $-2x + 3y + z \neq 0$, alors (S) n'admet pas de solutions.
– Si $-2x + 3y + z = 0$, alors (S) admet clairement des solutions en α, β.

Ainsi, (S) admet des solutions si et seulement si $-2x + 3y + z = 0$. F est donc le sous-espace vectoriel d'équation cartésienne $-2x + 3y + z = 0$.

(2) Soit F le sous-espace vectoriel de E dont un système d'équations cartésiennes est

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

On veut décrire F comme un sous-espace vectoriel engendré par une partie.
Soit $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} e \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 2y = 0 \\ z + 3y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ z = -3y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow e = (5y, y, -3y) = y\,(5, 1, -3) \\ &\Leftrightarrow e \in \mathrm{Vect}\,(5, 1, -3) \end{aligned}$$

(3) Soit F d'équation cartésienne $x+y-z=0$. Alors

$$\begin{aligned} e=(x,y,z)\in F &\Leftrightarrow x=-y+z \\ &\Leftrightarrow e=(-y+z,y,z)=y\,(-1,1,0)+z\,(1,0,1) \\ &\Leftrightarrow e\in \operatorname{Vect}\left((-1,1,0)\,,(1,0,1)\right) \end{aligned}$$

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

2.3.1 Petite histoire

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On sait que, en général, $F\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Quel est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F\cup G$?

Si $x\in F$ et $y\in G$, alors $x\in \operatorname{Vect}(F\cup G)$ et $y\in\operatorname{Vect}(F\cup G)$ donc $x+y\in\operatorname{Vect}(F\cup G)$. Ainsi, si l'on note $F+G=\{x+y|\,(x,y)\in F\times G\}$, alors $F+G\subset\operatorname{Vect}(F\cup G)$.

Mais on a $F\subset F+G$ et $G\subset F+G$ donc $F\cup G\subset F+G$ et $F+G$ est un sous-espace vectoriel car $\forall x,x'\in F$, $\forall y,y'\in G$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\alpha\,(x+y)+(x'+y')=(\alpha x+x')+(\alpha y+y')\in F+G$. $F+G$ est un sous espace-vectoriel qui contient $F\cup G$ donc $\operatorname{Vect}(F\cup G)\subset F+G$.

Finalement, $\operatorname{Vect}(F\cup G)=F+G$. $F+G$ s'appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G.

On note que $F=F+\{0_E\}=F+F$ et si $F\subset G$, $F+G=G$: ce n'est donc pas une vraie somme, mais une notation.

2.3.2 Généralisation

Soient $F_1,F_2,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note $\sum\limits_{i=1}^{n}F_i$ l'ensemble

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i|\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in F_1\times F_2\times\cdots\times F_n\right\}$$

. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}F_i$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est même $\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i\right)$. On appelle cet ensemble le sous-espace vectoriel somme des sous-espaces vectoriels F_i.

Remarque Soients $A_1,A_2,\ldots,A_n\subset E$, alors $\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{Vect}(A_i)$. En effet :

- $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $A_i\subset\operatorname{Vect}(A_i)\subset\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Vect}(A_k)$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)\subset\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Vect}(A_k)$.
- $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $A_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j\Rightarrow\operatorname{Vect}(A_i)\subset\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j\right)$ donc $\bigcup\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Vect}(A_j)\subset\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j\right)$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Vect}(A_j)=\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{i=j}^{n}\operatorname{Vect}(A_j)\right)\subset\operatorname{Vect}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j\right)$.

2.3.3 Sommes directes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0_E$;

(2) $\forall x \in \sum_{i=1}^{n} F_i,\ \exists! (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

(3) $\forall j \in [\![1, n]\!],\ F_j \cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i = \{0_E\}$.

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que les F_i sont en somme directe ou que la somme des F_i est directe.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in \sum_{i=1}^{n} F_i$. Par définition de $\sum_{i=1}^{n} F_i$, $\exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ convient aussi, alors, par différence, $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) = 0$, ce qui entraîne $\forall i \in [\![1, n]\!]\ x_i - y_i = 0$ grâce à la propriété (1) d'où l'unicité.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Il est clair que $\{0_E\} \subset F_j \cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i$. Soit $x \in F_j \cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i$, x s'écrit $x = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i$ avec

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_{j-1} \times F_{j+1} \times \cdots \times F_n$$

De plus

$$(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0), (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$$

et $x = 0 + \cdots + x_j + \cdots + 0 = x_1 + \cdots + x_{j-1} + 0 + x_{j+1} + \cdots + x_n$ d'où

$$x = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$, montrons que $x_j = 0$.

$$\begin{aligned} x_j &= -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i \\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \underbrace{(-x_i)}_{\in F_i} \in \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i \end{aligned}$$

Ainsi, $x_j \in F_j \cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i = \{0_E\}$ donc $x_j = 0_E$.

Remarque

Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels $F, G \in E$, la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Cette condition ne se généralise pas de façon naturelle. On peut avoir des sous-espaces vectoriels F, G, H tels que $F \cap H = G \cap H = F \cap G = \{0_E\}$ mais avec $F + G + H$ non-directe.

En effet, dans $\mathbb{R}^2$, pour $G = \text{Vect}(0, 1)$, $F = \text{Vect}(1, 0)$ et $H = \text{Vect}(1, 1)$, on a bien $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0_E\}$ mais $F + G + H$ n'est pas directe car $(1, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0)$.

Exemples

(1) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$. Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}x_i$ est directe.

$\Rightarrow$ Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}x_1 \times \mathbb{K}x_2 \times \cdots \times \mathbb{K}x_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = 0$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \alpha_i x_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$ d'où $0_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ car $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre d'où, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$ donc $y_i = 0$.

$\Leftarrow$ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $0_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \alpha_i x_i \in \mathbb{K}x_i$Plonc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. La somme est directe donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = 0$ d'où $\alpha_i = 0$ car $x_i \neq 0$.

(2) Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, alors $\mathcal{P} + \mathcal{I}$ est directe.

En effet, montrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ d'où $2f(x) = 0$ donc $f(x) = 0$.

(3) Soient $(x_1, x_2, \dots, x_m), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ des familles libres de vecteurs non-nuls de E, $F = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $G = \operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Alors $F + G$ est directe si et seulement si $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ est libre.

$\Leftarrow$ Soit $z \in F$, $t \in G$ tels que $z + t = 0$, montrons que $z = t = 0$. $z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ et $t = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$ d'où

$$0 = z + t = x_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$$

Formula \$se $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ est libre donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0 \Rightarrow z = t = 0$.

$\Rightarrow$ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\underbrace{x_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_m x_m}_{z \in F} + \underbrace{\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n}_{t \in G} = 0$$

$F + G$ est directe donc $z = t = 0$ donc, puisque $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont libres, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Recollement de familles libres

(1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G$ est directe, $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ une famille libre de vecteurs de F et $(y_1, y_2, \dots, y_s)$ une famille libre de vecteurs de G. Alors la famille recollée $(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$ notée encore $(x_1, x_2, \dots, x_r) \vee (y_1, y_2, \dots, y_s)$ est libre.

(2) Plus généralement, si $F_1, F_2, \dots, F_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, et si $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont des familles libres finies de vecteurs appartenant respectivement à $F_1, F_2, \dots, F_n$, alors $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} L_i$ est libre.

La première démonstration est très similaire à celle de l'exemple (3), tandis que la deuxième se fait par récurrence à l'aide du troisième critère qui définit une somme directe.

2.3.4 Sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous espaces vectoriels de E. On dit que les F_i sont supplémentaires si :

(1) $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe ;

(2) $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, on écrit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Dans les cas de deux sous-espaces vectoriels F et G,

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\} \text{ et } F + G = E$$

Exemple Avec les notations précédentes [a], montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. On a déjà vu que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$, il reste à montrer que $\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathbb{R}$, procédons par analyse et synthèse [b].

Analyse : Supposons que f s'écrive $f = g + h$ avec $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(x) - h(x)$ d'où

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Synthèse : Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Alors $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ et $f(x) = g(x) + h(x)$ d'où le résultat.

Supplémentarité et coordonnées Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de F. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ si et seulement si $\forall x \in E$, il existe un unique m-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ tel que $x = \sum_{i=1}^{m} F_i$.

$\Rightarrow$ Soit $x \in E$, $E = \sum_{i=1}^{m} F_i$ donc $\exists (x_1, x_2, \dots, x_m) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ tel que $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$. Supposons que $(y_1, y_2, \dots, y_m) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ vérifie aussi $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$, alors

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(x_i - y_i)}_{\in F_i}$$

donc, puisque la somme est directe, $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $y_i - x_i = 0$. L'unicité est bien montrée.

$\Leftarrow$

- Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ avec $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in F_i$. Ainsi, $x \in \sum_{i=1}^{n} F_i$ or $\sum_{i=1}^{m} F_i \subset E$ d'où $E = \sum_{i=1}^{m} F_i$.
- La somme $\sum_{i=1}^{m} F_i$ est directe, soient alors $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ avec $\sum_{i=1}^{m} x_i = 0_E$. Montrons que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $x_i = 0$. D'autre part, $0_E = \sum_{i=1}^{m} 0_E$ et $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $0_E \in F_i$ donc, puisque l'écriture est unique, $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $x_i = 0_E$.

a. Voir exemple (2) page précédente.

b. Un petit hommage aux courageux pensionnaires de Ginette qui ont semble-t-il l'habitude de ce mode de raisonnement, selon M. Sellès.

Recollement bis Si $F = \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2, \dots, y_m)$, alors [a]

$$F + G = \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Ceci se généralise au cas de plusieurs espaces vectoriels.

Supposons $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$, si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{B}_n$ est une base de E.

3 Applications linéaires

3.1 Définition et exemples

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est linéaire si :

(1) f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$;

(2) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f\,(\alpha x) = \alpha f\,(x)$.

On note $\mathcal{L}\,(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}\,(E)$ au lieu de $\mathcal{L}\,(E, E)$ et les éléments de $\mathcal{L}\,(E)$ sont appelés endomorphismes.

Critère plus léger Soit $f \in \mathcal{F}\,(E, F)$, f est linéaire si et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $f\,(\alpha x + y) = \alpha f\,(x) + f\,(y)$.

$\Rightarrow$ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in F$, $f\,(\alpha x + y) = f\,(\alpha x) + f\,(y) = \alpha f\,(x) + f\,(y)$.

$\Leftarrow$ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$. $f\,(x + y) = f\,(1_{\mathbb{K}} x + y) = 1_{\mathbb{K}} f\,(x) + f\,(y) = f\,(x) + f\,(y)$. f est ainsi un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc $f\,(0_E) = 0_F$. D'autre part, $f\,(\alpha x) = f\,(\alpha x + 0_E) = \alpha f\,(x) + f\,(0_E) = \alpha f\,(x)$.

Exemples

(1) Prenons $E = \mathcal{C}\,([a, b]\,, \mathbb{R})$, alors $f \in E \longmapsto \int_a^b f \in \mathbb{R}$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

(2) Si E est l'ensemble des suites complexes convergentes, alors $u \in E \longmapsto \lim u \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(3) $P \in \mathbb{K}\,[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}\,[X]$.

(4) $f \in \mathcal{C}^1\,(I, \mathbb{R}) \longmapsto f' \in \mathcal{C}^0\,(I, \mathbb{R})$ est linéaire.

(5) Montrons que les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont du type $\varphi_{a,b} : z \in \mathbb{C} \longrightarrow az + b\overline{z}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

– Soient $a, b \in \mathbb{C}$, pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b}\left(tz + z'\right) &= a\left(tz + z'\right) + b\overline{tz + z'} \\ &= taz + az' + b\left(t\overline{z} + \overline{z'}\right) \\ &= t\,(az + b\overline{z}) + az' + b\overline{z'} \\ &= t\varphi_{a,b}\,(z) + \varphi_{a,b}\left(z'\right) \end{aligned}$$

$\varphi_{a,b}$ est donc linéaire.

– Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linéaire. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z = \Re\mathrm{e}\,(z) + i\Im\mathrm{m}\,(z)$ d'où

$$\begin{aligned} f\,(z) &= f\,(\Re\mathrm{e}\,(z) + i\Im\mathrm{m}\,(z)) \\ &= \Re\mathrm{e}\,(z)\,f\,(1) + \Im\mathrm{m}\,(z)\,f\,(i) \\ &= \frac{z + \overline{z}}{2} f\,(1) + \frac{z - \overline{z}}{2i} f\,(i) \\ &= z\underbrace{\left(\frac{f\,(1)}{2} + \frac{f\,(i)}{2i}\right)}_{a} + \underbrace{\left(\frac{f\,(1)}{2} - \frac{f\,(i)}{2i}\right)}_{b}\overline{z} \\ &= \varphi_{a,b}\,(z) \end{aligned}$$

a. Ce résultat est tiré de la section 2.3.2 page 13.

Question : quelles sont parmi ces applications $\mathbb{R}$-linéaires celles qui conservent le module ? Le courageux lecteur instiguera du côté des rotations et des translations...

(6) Les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont celles du type $x \in \mathbb{K} \longmapsto ax$ avec $a \in \mathbb{K}$. En effet :
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $x \longmapsto ax \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$;
- si $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = f(1_{\mathbb{K}} x) = x f(1_{\mathbb{K}})$, on prend alors $a = f(1_{\mathbb{K}})$.

3.2 Relations avec les bases

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, on suppose que E admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Pour $x \in E$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\alpha_i(x)$ la i-ième coordonnée de x dans $\mathcal{B}$. On a vu que α_i est linéaire de E dans $\mathbb{K}$ [a].

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, pour $x \in E$ on a $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i$ donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) f(e_i)$. Notons, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = f(e_i)$. Alors $\exists y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ tels que f est l'application $x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$.
- Réciproquement, soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des vecteurs de F , et posons

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i \end{array}$$

  Alors f est linéaire de E dans F : soient $x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x' + x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x') y_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$ car α_i est linéaire.

On remarque que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_j(e_i) = \delta_{ij}$ d'où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} y_i = y_j$.

Bilan

(1) Les applications linéaires de E dans F sont celles du type $x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$ avec $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$.

(2) Pour $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$, l'application $f : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$ est l'unique application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = y_i$.

Si une application linéaire f vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = 0$, alors $f = 0_{E^F}$.

Cas particulier Pour $E = \mathbb{K}^n$, prenons $\mathcal{B} = \mathrm{BC}_n$ [b].

(1) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, alors $\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$ car, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = \alpha_i(x)$.

(2) Prenons $F = \mathbb{K}^p$, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, $\exists (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Or on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = (a_{1,i}, \ldots, a_{p,i})$, onc

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= (a_{1,1}\alpha_1, a_{2,1}\alpha_1, \ldots, a_{p,1}\alpha_1) + (a_{1,2}\alpha_2, \ldots, \alpha_{p,2}\alpha_2) + \cdots + (a_{1,n}\alpha_n, \ldots, a_{p,n}\alpha_n) \\ &= (a_{1,1}\alpha_1 + a_{1,2}\alpha_2 + \cdots + a_{1,n}\alpha_n, \ldots, a_{p,1}\alpha_1 + \cdots + a_{p,n}\alpha_n) \end{aligned}$$

a. Voir la remarque page 10.
b. Voir l'exemple (1) page 8.

Exemple Pour $n = p = 2$, toute application linéaire de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^2$ est du type $(x, y) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto (ax + by, cx + dy)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

On convient de représenter cette application linéaire par le tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si f est représentée par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et g par $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors quel tableau représente $f \circ g$?

$$\begin{aligned} f(g(x,y)) &= \left(a\left(a'x + b'y\right) + b\left(c'x + d'y\right), c\left(a'x + b'y\right) + d\left(c'x + d'y\right)\right) \\ &= \left(\left(aa' + bc'\right)x + \left(ab' + bd'\right)y, \left(ca' + dc'\right)x + \left(cb' + dd'\right)y\right) \end{aligned}$$

Donc $f \circ g$ est représentée par $\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ Cette opération sur les tableaux s'appelle le produit matriciel, elle sera détaillée dans un chapitre ultérieur. Elle admet pour neutre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à l'application identité.

3.3 Homothéties

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose pour $x \in E$, $h_\lambda(x) = \lambda x$. On appelle h_λ l'homothétie de rapport λ. C'est une application linéaire : $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} h_\lambda(\alpha x + y) &= \lambda\alpha x + \lambda y \\ &= \alpha\lambda x + \lambda y \\ &= \alpha h_\lambda(x) + h_\lambda(y) \end{aligned}$$

C'est un exemple d'endomorphisme d'espaces vectoriel. En particulier, h_0 (application nulle) et h_1 (application identité) sont des endomorphismes.

Les assertions suivantes sont équivalentes [a] :
(1) f est une homothétie ;
(2) $\forall x \in E$, $f(x)$ est proportionnel à x ;
(3) $\forall x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

a. Encore un résultat de Lasse !

Démonstration
- Un sens est évident : (1) $\Rightarrow$ (2). En effet soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = h_\alpha$. Alors il est clair que pour tout x, $f(x) = \alpha x$ est proportionnel à x.
- Mais attention, pour (2) $\Rightarrow$ (1), il faut voir que (2) ne garantit pas que le coefficient de proportionnalité est le même pour chaque x. En termes plus mathématiques, (2) garantit que $\forall x \in E$, $\exists \alpha_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \alpha_x x$ et on doit montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $f(x) = \alpha x$. Il s'agit en fait de montrer que, $\forall x, y \in E$, $\alpha_x = \alpha_y$. Prenons x et y non nuls :
  - Premier cas : la famille (x, y) est libre. On a $\alpha_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \alpha_x x + \alpha_y y$. Ainsi $\alpha_{x+y}x + \alpha_{x+y}y = \alpha_x x + \alpha_y y$ soit encore $(\alpha_{x+y} - \alpha_x)x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y)y = 0_E$. (x, y) est libre donc $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$
  - Deuxième cas : (x, y) est liée. x et y sont non nuls donc $\exists w \in \mathbb{K}^*$, $y = wx$. $\alpha_y y = f(y) = f(wx) = wf(x) = w\alpha_x x = \alpha_x y$, soit $(\alpha_y - \alpha_x)y = 0_E$. Comme $y \neq 0$, $\alpha_x = \alpha_y$.

  Donc dans tous les cas $\alpha_x = \alpha_y$. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E^*$, $f(x) = \alpha x$. C'est vrai aussi si x est nul : $f(0_E) = 0_E = \alpha 0_E$. Donc $f = h_\alpha$.

3.4 Propriétés des applications linéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) $f(0_E) = 0_F$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

3.4.1 Image d'un sous espace vectoriel

Soit E_1 un sous espace vectoriel de E alors $f(E_1)$ est un sous espace vectoriel de F appelé image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$. De plus f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. [a]

a. En effet, le sens réciproque est trivial, et voici le sens direct : si $\mathrm{Im}(f) \neq F$, $\exists x \in F$ tel que $\forall y \in E$, $f(y) \neq x$ donc f n'est pas surjective.

En effet, soient $z, w \in f(E_1)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda z + w \in f(E_1)$ [c]. Par définition de l'image directe, il existe $x, y \in E_1$, tels que $z = f(x)$ et $w = f(y)$, d'où $\lambda z + w = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y)$. Or $x, y \in E_1$ et E_1 est un sous-espace vectoriel donc $\lambda x + y \in E_1$. Par conséquent, $f(\lambda x + y) \in f(E_1)$.

3.4.2 Image réciproque

Soit F_1 un sous espace vectoriel de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous espace vectoriel de E. En particulier $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est le noyau du morphisme de groupes de f de $(E, +)$ dans $(F, +)$. On l'appelle encore noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ [a]
De même que pour les groupes [b] :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in E, f(x) = 0_F \Rightarrow x = 0_E \end{aligned}$$

a. On a $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}$.
b. Ceci ne sera pas redémontré, se reporter à la propriété (4) (c) de la section 18.2.2.2 du cours complet page 299.

En effet, comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$ qui est donc non vide. Soient $x, y \in f^{-1}(F_1)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha x + y \in f^{-1}(F_1)$, c'est à dire $f(\alpha x + y) \in F_1$. $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ or x et y sont dans $f^{-1}(F_1)$ donc $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à F_1. F_1 est un sous-espace vectoriel donc $\alpha f(x) + f(y) \in F_1$.

3.4.3 Injectivité et liberté

Supposons que f soit injective et soit $L = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = 0_F$. Par linéarité de f on a $f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = 0_F$. Donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E$ et puisque la famille L est libre, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 0$. Ainsi la famille $f(L)$, par définition $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est libre. Donc si f est injective alors elle transforme toute famille libre finie de vecteurs de E en famille libre de vecteurs de F.

C'est aussi vrai pour une famille quelconque (pas forcément finie) : si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre quelconque de vecteurs de E alors pour $J \subset I$, J fini, $(x_i)_{i \in J}$ est libre donc $(f(x_i))_{i \in J}$ aussi. Donc (ceci étant vrai pour tout J), $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre. On retiendra le résultat suivant :

Si f est injective alors f transforme toute famille libre de vecteurs de E en famille libre de vecteurs de F.

c. On a bien $f(E_1) \neq \varnothing$ puisque $E_1 \neq \varnothing$.

La réciproque est vraie [a] : supposons que f change toute famille libre de E en une famille libre d'éléments de F, alors en particulier, comme $\forall x \in E\backslash\{0_E\}$ la famille (x) est libre, donc $(f(x))$ est une famille libre de F. Ainsi $f(x) \neq 0_F$. On a donc $\forall x \in E$, $x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0_F$. En prenant la contraposée on retrouve la propriété précédente, qui assure que f est injective.

Supposons maintenant que E admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors f est injective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F .

$\Rightarrow$ *« Djàvu ! »* : une base est en effet en particulier une famille libre donc c'est bon.

$\Leftarrow$ Montrons que f est injective : soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Montrons que $x = 0_E$. $\mathcal{B}$ est une base donc x s'écrit (de manière unique) : $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. (avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$).

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F \quad &\Leftrightarrow \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0_F \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_F \end{aligned}$$

Comme $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, on a $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Par conséquent $x = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}} e_i = 0_E$.

3.4.4 Surjectivité et engendrement

Tout d'abord démontrons la propriété suivante :

Si $S \subset E$ ou si S est une famille quelconque de vecteurs de E, alors $f(\text{Vect}(S)) = \text{Vect}(f(S))$

On a pas encore défini $\text{Vect}(S)$ lorsque S est une partie infinie de vecteurs de E. Dans ce cas $\text{Vect}(S)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de S.

Preuve Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ alors $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \text{Vect}(S)$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in \text{Vect}(S)$. On a donc l'inclusion

$$\text{Vect}(S) \supset \{\text{combinaison linéaires finies d'éléments de } S\}$$

D'autre part on montre que l'ensemble des combinaison linéaires finies d'éléments de S est un sous-espace vectoriel de E qui contient S [b].

- On a alors $S \subset \text{Vect}(S)$, d'où $f(S) \subset f(\text{Vect}(S))$, et $f(\text{Vect}(S))$ est un sous-espace vectoriel de F car $\text{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\text{Vect}(f(S)) \subset f(\text{Vect}(S))$
- D'autre part si $z \in \text{Vect}(S)$, z s'écrit $z = f(x)$ où $x \in \text{Vect}(S)$: $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, $\exists y_1, y_2, \ldots, y_m \in S$, $x = \sum_i \alpha_i y_i$. On a donc $z = f(x) = \sum_i \alpha_i \underbrace{f(y_i)}_{\in f(S)}$. Donc z est combinaison linéaire d'éléments de $f(S)$, $z \in \text{Vect}(f(S))$.

a. Même si, selon M. Sellès, elle sert beaucoup moins.
b. Se référer au paragraphe 2.2 page 11

Relation avec les familles génératrices Soit maintenant G une famille génératrice de E. On a $f(E) = f(\text{Vect}(G)) = \text{Vect}(f(G))$.

$$\begin{array}{rcl} f \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & f(E) = F \\ & \Leftrightarrow & \text{Vect}(f(G)) = F \\ & \Leftrightarrow & f(G) \text{ engendre } F \end{array}$$

On retiendra le résultat suivant :

f est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice.

3.4.5 Composition des applications linéaires

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$. En utilisant la linéarité de f et g :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(\alpha x + y) & = & g(f(\alpha x + y)) \\ & = & g(\alpha f(x) + f(y)) \\ & = & \alpha g \circ f(x) + g \circ f(y) \end{array}$$

3.4.6 Réciproque d'un isomorphisme

Supposons de plus que f est bijective (une telle application linéaire est appelée isomorphisme d'espaces-vectoriels). Alors la réciproque de f, notée f^{-1} est aussi une application linéaire.

Démonstration Soient $z, w \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Il s'agit de montrer que $\underbrace{f^{-1}(\alpha z + w)}_{u} = \underbrace{\alpha f^{-1}(z) + f^{-1}(w)}_{v}$. On a d'une part $f(u) = \alpha z + w$, d'autre part $f(v) = f\left(\alpha f^{-1}(z) + f^{-1}(w)\right) = \alpha f\left(f^{-1}(z)\right) + f\left(f^{-1}(w)\right) = \alpha z + w$. $f(u) = f(v)$ et comme f est injective, $u = v$.

3.5 Opérations sur les applications linéaires, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$.

3.5.1 Construction

(1) Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (quelconque), X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}(X, F)$:
- Une addition $+$ par $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, F)$, $\forall x \in X$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Une multiplication $\cdot$ par les scalaires par : $\forall f \in \mathcal{F}(X, F)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$

Alors $(\mathcal{F}(X, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est l'application nulle $f : x \longrightarrow 0_F$ [a].

(2) Si de plus X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté E, $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$. Vérifions que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel.
- Soit $\theta = 0_{\mathcal{F}(E,F)}$. Alors θ est linéaire : pour $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\theta(\alpha x + y) = 0_F = \alpha 0_F + 0_F = \alpha\theta(x) + \theta(y)$
- Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha f + g)(\lambda x + y) & = & \alpha f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y) \\ & = & \alpha\lambda f(x) + \alpha f(y) + \lambda g(x) + g(y) \\ & = & \lambda(\alpha f(x) + g(x)) + \alpha f(y) + g(y) \\ & = & \lambda((\alpha f + g)(x)) + (\alpha f + g)(y) \end{array}$$

a. Preuve : « *Left to the reader !* »

Donc $\alpha f + g \in \mathcal{L}(E,F)$.
Ainsi $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ et, muni des lois induites par restriction, $(\mathcal{L}_{,}(E,F)+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(3) Soient maintenant E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(a) Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$.
En effet, soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}(g \circ (f_1+f_2))(x) &= g((f_1+f_2)(x))\\ &= g(f_1(x)+f_2(x))\\ &= g(f_1(x)) + g(f_2(x))\\ &= g\circ f_1(x) + g\circ f_2(x)\\ &= (g\circ f_1 + g\circ f_2)(x)\end{aligned}$$

(b) Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $f \in \mathcal{L}_{.}(E,F)$ Alors $(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f + g_2 \circ f$.
En effet, [a] soit $x \in E$:

$$\begin{aligned}((g_1+g_2)\circ f)(x) &= (g_1+g_2)(f(x))\\ &= g_1(f(x)) + g_2(f(x))\\ &= g_1\circ f(x) + g_2\circ f(x)\\ &= (g_1\circ f + g_2\circ f)(x)\end{aligned}$$

(c) Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a $\alpha\cdot(g\circ f) = (\alpha\cdot g)\circ f = g\circ(\alpha\cdot f)$.
En effet, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot(g\circ f))(x) &= \alpha\cdot g\circ f(x)\\ &= \alpha g(f(x))\\ &= (\alpha\cdot g)(f(x))\\ &= ((\alpha\cdot g)\circ f)(x)\end{aligned}$$

Mézossi :

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot(g\circ f))(x) &= \alpha g(f(x))\\ &= g(\alpha f(x))\\ &= g(\alpha\cdot f(x))\\ &= g\circ(\alpha\cdot f(x))\end{aligned}$$

3.5.2 Introduction aux $\mathbb{K}$-algèbres

Une $\mathbb{K}$-algèbre est un quadruplet $(A,+,\times,\cdot)$ où :
– A est un ensemble non vide ;
– $+$ et $\times$sont deux lois de composition internes sur A ;
– $\cdot$ est une loi externe de domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$, c'est en fait une application de $A\times\mathbb{K}$ dans A.
Ce triplet doit être tel que :

(1) $(A,+,\times)$ est un anneau ;

(2) $(A,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a,b \in A$, $(\alpha\cdot a)\times b = a\times(\alpha\cdot b) = \alpha\cdot(a\times b)$.

Si $\times$ est commutative on parle de $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

[a] M.Sellès nous fait ici remarquer que cette deuxième démonstration n'utilise pas la linéarité, dans ce sens seulement elle est valable pour toutes les fonctions de $\mathcal{F}(E,F)$ et $\mathcal{F}(F,G)$.

Exemples

(1) $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative

(2) Si $\mathbb{K}$ est un corps et X un ensemble alors $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre commutative

Soit $\mathbb{L}$ un corps, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. Alors $\mathbb{L}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre, avec $+$ l'addition dans $\mathbb{L}$, $\times$ la multiplication dans $\mathbb{L}$, et pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot x = \alpha \times x$ (avec ici $\times$ la multiplication dans $\mathbb{L}$ de α et x) . Par exemple $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.

Soit à présent E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A = \mathcal{L}(E)$. On a déjà une addition et une multiplication par les scalaires. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ g$ est bien définie, va de E dans E et est linéaire. Donc $\circ$ est une loi de composition interne sur A. Elle admet un neutre, Id. On a vu dans les propriétés précédentes qu'elle est distributive par rapport à $+$, on sait qu'elle est associative. Donc $(A, +, \circ)$ est un anneau. De plus $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Enfin on a démontré que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall f, g \in A$, $(\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g) = \alpha \cdot (f \circ g)$.

Ainsi $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

On note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé le groupe linéaire. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on a $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$. Donc, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, f est linéaire et bijective donc f est un isomorphisme. Réciproquement, si f est un isomorphisme alors f est bijective et on sait que f^{-1} est linéaire. On a alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$. Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés les automorphismes de $\mathcal{L}(E)$

Exemples

(1) Pour $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $h_\alpha = \alpha \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}_E(.)$ [a]

(2) Dans le cas où E possède une base $\mathcal{B}$ finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $f \in \mathrm{GL}_E (\Leftrightarrow) f(\mathcal{B})$ est une base de E.

- $\Rightarrow$ f est injective et $\mathcal{B}$ est libre donc $f(\mathcal{B})$ est libre. f est surjective et $\mathcal{B}$ est génératrice donc $f(\mathcal{B})$ est génératrice. Donc $f(\mathcal{B})$ est une base.
- $\Leftarrow$ $\mathcal{B}$ est une base et $f(\mathcal{B})$est libre donc f est injective. $\mathcal{B}$Enum génératrice et $f(\mathcal{B})$aussi donc f est surjective. Donc f est bijective.

4 Projecteurs et symétries

4.1 Définition

avec$E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$.

(1) f est un projecteur lorsque $f \circ f = f$.

(2) f est une symétrie lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (une symétrie est donc un élément de $\mathrm{GL}(E)$).

Remarques

- Id_E est un projecteur et une symétrie.
- $-\mathrm{Id}_E$ est une symétrie.
- $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un projecteur.

4.2 Exemple standard

On prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [b]. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Tout $x \in E$ s'écrie de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On pose $p_{F,G}(x) = x_F$ et $s_{F,G}(x) = x_F - x_G$.

a. h_α désigne l'homothétie de rapport α, se reporter au paragraphe 3.3 page 19. On a de plus $h_\alpha^{-1} = h_{1/\alpha}$.

b. En fait nous verrons plus tard que n'importe quel corps dans lequel $0 \neq 2$ convient ! Mais $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ c'est très bien...

4.2.1 Propriétés de $p_{F,G}$

- $p_{F,G}$ est linéaire : soient $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$. $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ donc $\alpha x + y = \underbrace{\alpha x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\alpha x_G + y_G}_{\in G}$.

  Par unicité de l'écriture de tout z sous la forme $z = z_F + z_G$, on a

$$\begin{aligned} p_{F,G}(\alpha x + y) &= (\alpha x + y)_F + (\alpha x + y)_G \\ &= \alpha x_F + y_F + \alpha x_G + y_G \\ &= \alpha p_{F,G}(x) + p_{F,G}(y) \end{aligned}$$

- Pour $x \in E$, $p_{F,G}(x) = x_F \in F$ donc si $x \in F$, $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$, donc $x_F = x$ donc $p_{F,G}(x) = x$. Réciproquement, si $p_{F,G}(x) = x$, alors $x \in F$ donc $F = \{x \in E | p_{F,G}(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p_{F,G} - \mathrm{Id}_E)$.
- On a aussi $\operatorname{Im} p_{F,G} \subset F$ et si $x \in F$, $p_{F,G}(x) = x$ donc $x \in \operatorname{Im} p_{F,G}$. Ainsi, $F = \operatorname{Im} p_{F,G}$.
- Si $x \in G$, $x = 0 + x$ avec $0 \in F$ et $x \in G$ donc $x_F = 0$ donc $p_{F,G}(x) = 0$ donc $G \subset \operatorname{Ker} p_{F,G}$. Réciproquement, si $p_{F,G}(x) = 0$, alors $x = 0 + x_G$ donc $x \in G$. Finalement, $G = \operatorname{Ker} p_{F,G}$.

De plus, pour $x \in E$, $p_{F,G}(p_{F,G}(x)) = p_{F,G}(x)$ donc $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$ donc $p_{F,G}$ est un projecteur : c'est le projecteur sur F parallèlement à G. On a aussi :

$$F = \operatorname{Im} p_{F,G} = \operatorname{Ker}(p_{F,G} - \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Ker} p_{F,G}$$

4.2.2 Propriétés de $s_{F,G}$

- Si $x \in F$, alors $x = x + 0$ donc $s_{F,G}(x) = x - 0 = x$. Réciproquement, si $s_{F,G}(x) = x$, alors

$$x_F + x_G = x_F - x_G \Leftrightarrow 2x_G = 0 \Leftrightarrow x_G = 0 \quad \text{car on suppose } 2 \neq 0$$

  Ainsi, $x = x_F + 0 \in F$ donc $F = \{x \in E | s_{F,G}(x) = x\}$.
- Si $x \in G$, alors $x = 0 + x$ donc $s_{F,G}(x) = 0 - x = -x$. Réciproquement, si $s_{F,G}(x) = x$, alors

$$-x_F + x_G = x_F - x_G \Leftrightarrow 2x_F = 0 \Leftrightarrow x_F = 0$$

  Ainsi, $x = 0 + x_G \in F$ donc $G = \{x \in E | s_{F,G}(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s_{F,G} + \mathrm{Id}_E)$.

Pour $x \in E$, $s_{F,G} \circ s_{F,G}(x) = s_{F,G}(x_F - x_G) = x_F - (-x_G) = x$ d'où $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \mathrm{Id}_E$ donc $s_{F,G}$ est une symétrie : c'est la symétrie par rapport à F parallèle à G.

4.2.3 Forme générique des projecteurs et symétries

Le dernier exemple est générique au sens suivant : si p est un projecteur de E, alors $\exists F, G$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$ et $p = p_{F,G}$. De même, si s est une symétrie de E, $\exists F, G$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $s = s_{F,G}$.

Démonstration

Projecteurs On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ et que $p \circ p = p$ [a].
- Si F et G existent, on doit avoir d'après ce qui précède $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} P$.
- Réciproquement, posons $G = \operatorname{Ker} p$ et montrons d'abord que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
  - $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Im} P$ car si $x \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, alors $p(x) = x \in \operatorname{Im} P$.

a. Bien évidemment, lire « *pop !* égale p » comme le fait le malicieux M. Sellès !

- ◦ Si $x \in \operatorname{Im} P$, alors $\exists y \in E$ tel que $x = p(y) \Rightarrow p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ [a] donc $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ donc $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$.

Il reste à montrer que $E = F \oplus G$ et que $p = p_{F,G}$.

- ◦ Si $x \in F \cap G$, alors $p(x) = x$ et $p(x) = 0$ d'où $F \cap G = \{0_E\}$.
- ◦ Soit $x \in E$, on cherche $y \in F$, $z \in G$ tels que $x = y + z$.
  - → Si y et z existent, alors $p(x) = p(y+z) = p(y) + p(y) = y$ donc $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$.
  - → En prenant $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$, alors $p(x) \in \operatorname{Im} P = F$ Si $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$ d'où $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = G$.

On a vu que pour tout $x \in E$, $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$ donc $p_{F,G}(x) = p(x)$ donc $p_{F,G} = p$.

Symétries Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s une symétrie de E : $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \operatorname{Id}_E$. Soit $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$, $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$, montrons que $E = F \oplus G$ et que $s = s_{F,G}$.

- Soit $x \in F \cap G$, montrons que $x = 0_E$. $x \in F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ donc $s(x) = x$. De plus $x \in G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$ donc $s(x) = -x$. Ainsi, $x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps où $2 \neq 0$.
- Soit $x \in E$, on cherche $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$.
  - ◦ Si y et z existent, $x = y + z$ d'où

$$s(x) = s(y) + s(z) = y - z \Rightarrow \begin{cases} 2y = x + s(x) \\ 2z = x - s(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+s(x)}{2} \\ z = \frac{x-s(x)}{2} \end{cases}$$

  - ◦ Écrivons donc $x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} s\left(\frac{x+s(x)}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(s(x) + s \circ s(x)\right) \\ &= \frac{x+s(x)}{2} \Rightarrow \frac{x+s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \\ s\left(\frac{x-s(x)}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(s(x) - s \circ s(x)\right) \\ &= -\frac{x-s(x)}{2} \Rightarrow \frac{x-s(x)}{2} \in \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E) \end{aligned}$$

Soit $x \in E$, on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ d'où $s(x) = s(y) + s(z) = y - z = s_{F,G}(x)$.

a. *« pop ! »*

5 Complément : $\mathbb{K}$-algèbres

5.1 Théorème

Soit $(A,+,\times,\cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $a \in A$. Il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres [a] φ_a de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$ tel que $\varphi_a(X) = a$. Il s'agit de $\varphi_a : P = \sum_{k\geqslant 0}\lambda_k X^k \longrightarrow \varphi_a(P) = \sum_{k\geqslant 0}\lambda_k a^k$.

a. C'est un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Démonstration

Analyse : Supposons l'existence d'un tel morphisme φ. Soit $P = \sum_{k\geqslant 0}\lambda_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{N}\lambda_k X^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\lambda_k\varphi\left(X^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N}\lambda_k(\varphi(X))^k\\ &= \sum_{k=0}^{N}\lambda_k a^k\end{aligned}$$

Synthèse : Prenons donc, pour $P = \sum_{k=0}^{N}\lambda_k X^k$, $\varphi_a(P) = \sum_{k=0}^{N}\lambda_k a^k$. On a bien $\varphi_a(X) = a$. Soient $P = \sum_{k=0}^{N}\lambda_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{N}\mu_j X^j$. Montrons que $\varphi_a(PQ) = \varphi_a(P)\times\varphi_a(Q)$.

$$\begin{aligned}\varphi_a(P)\times\varphi_a(Q) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a^k\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\mu_j a^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\underbrace{\left(\lambda_k a^k\right)\left(\mu_j a^j\right)}_{(\lambda_k\mu_j)\cdot a^{k+j}}\\ &= \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{k+j=p}\lambda_k\mu_j\right)a^p\\ &= \varphi_a(PQ)\end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}\varphi_a(\lambda P+Q) &= \varphi_a\left(\sum_{k\geqslant 0}(\lambda\lambda_k+\mu_k)X^k\right)\\ &= \sum_{k\geqslant 0}(\lambda\lambda_k+\mu_k)\cdot a^k\\ &= \lambda\sum_{k\geqslant 0}\lambda_k\cdot a^k+\sum_{k\geqslant 0}\mu_k\cdot a^k\\ &= \lambda\varphi_a(P)+\varphi_a(Q)\end{aligned}$$

Enfin on a bien $\varphi_a(1_{\mathbb{K}[X]}) = 1_A$ car $a^0 = 1_A$.

5.2 Applications

(1) Prenons $A = \mathbb{K}$ (en fait $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ avec pour $\lambda, x \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = \lambda \times x$). Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi_a(P) = \widetilde{P}(a)$. Et donc $P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto \widetilde{P}(a) \in \mathbb{K}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

(2) Prenons $A = \mathbb{K}[X]$. Pour $Q \in A$, il y a un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres φ_a de $\mathbb{K}[X]$ dans A tel que $\varphi_a(X) = a$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi_a(P) = P \circ Q$. $P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P \circ Q$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. (On a $(P_1 + P_2) \circ Q = P_1 \circ Q + P_2 \circ Q$ et $(P_1 P_2) \circ Q = (P_1 \circ Q)(P_2 \circ Q)$, pour tous polynômes P_1 et P_2)

(3) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Prenons $A = (\mathcal{L}(E), +, \times, \cdot)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$: il existe un unique morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres φ_a de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ (noté φ_f) tel que $\varphi_f(X) = f$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on note $P(f)$ au lieu de $\varphi_f(P)$. Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_d f^d$, où pour $k \in \mathbb{N}$, f^kdésigne l'itéré de f par $\circ$.