Équations différentielles

Feuille d'exercices #17

Partie A – Équations linéaires scalaires d'ordre 1

Exercice 1 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' + y = \sin(t)\,; \quad \cos(t)y' + \sin(t)y = t\,; \quad y' - \cos(t)y = \sin(2t)$$
$$2ty' + y = 1 + t\,; \quad y' - 2y = \sin(2t)\mathrm{e}^t\,; \quad (1-t)y' + y = t$$

Exercice 2 — Déterminer l'unique solution qui s'annule en 0 de :

$$(1+t)^3 y' + 2(1+t)^2 y = 1$$

Exercice 3 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x|y' - y = x^2$.

Exercice 4 — Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 5 — Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 —

1. Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de limite nulle en $+\infty$.
   Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = b$ ont une limite nulle en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
   Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 7 — Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f vérifiant $f(0) = 0$ et solution de l'équation différentielle :

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$$

Exercice 8 — Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et T-périodiques. Montrer que toute solution φ de $y' + a(x)y = b(x)$ est T-périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(T)$.

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation :

$$xy' - y + f(x) = 0$$

1. Démontrer que l'équation admet une unique solution φ telle que φ' ait une limite nulle en $+\infty$.
2. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors il en va de même pour φ.

Partie B – Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Exercice 10 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2\mathrm{e}^t + t\,; \quad y'' + 4y' + 4y = \sin t$$
$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2t)\,; \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 11 — Résoudre pour $m \in \mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 2my' + y = \mathrm{e}^{-t}\,; \quad y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{mt}\,; \quad y'' - 2my' + (m^2+1)y = \mathrm{e}^x \sin x$$

Exercice 12 — Soit l'équation $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0 \quad (E)$

1. Déterminer une solution polynomiale puis toutes les solutions de (E).
2. Construire la courbe intégrale passant par le point $A(0,1)$ avec une tangente parallèle à la première bissectrice.

Exercice 13 — Résoudre le problème de Cauchy suivant à l'aide de séries entières :

$$y'' - 2xy' - y = 0\,; \quad y(0) = 1\,; \quad y'(0) = 0$$

Exercice 14 — Intégrer $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

Exercice 15 — Résoudre $t^3y'' + ty' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ via une solution polynomiale.

Exercice 16 — On considère l'équation différentielle :

$$(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0 \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre (E) sur un intervalle ne contenant pas $-1/2$.

Exercice 17 — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-\alpha xy'+\alpha y=0 \quad (E_\alpha)$$

1. Déterminer les solutions de (E_2) développables en séries entières.
   A-t-on toutes les solutions de (E_2) ?
2. Soient un entier $n \geqslant 3$ et φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)=(1-X^2)P''-3XP'$.
   a) Montrer que $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
   b) Montrer que φ est diagonalisable et en déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3).
3. Résoudre l'équation (E_1) à l'aide du changement de variable $x=\sin t$.

Exercice 18 — Soit l'équation différentielle :

$$x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1 \quad (E)$$

Intégrer (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z=x^2y$. Étudier le recollement en 0.

Exercice 19 —

1. Résoudre l'équation différentielle $y''+y=\cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation :

$$y''+y=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos(nt)$$

Exercice 20 — Soient $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution de l'équation $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ est T-périodique si et seulement si $y(0)=y(T)$ et $y'(0)=y'(T)$.

Exercice 21 — Soit $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer qu'une solution de l'équation $y''+a(x)y=0$ est impaire si et seulement si elle vérifie $y(0)=0$.

Exercice 22 — Soit $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ supposée continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle $y''+q(x)y=0$.

1. Soit f une solution bornée de cette équation sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que f' admet une limite nulle en $+\infty$.
2. À l'aide du wronskien, montrer que deux solutions bornées sont liées.
3. Toujours à l'aide du wronskien, montrer que deux solutions linéairement indépendantes ne peuvent avoir de zéro commun.
4. Montrer que les zéros de toute solution non nulle sont isolés.

Exercice 23 — *Équation de Bessel*
Soit α un réel positif. On appelle équation de Bessel l'équation différentielle :

$$t^2y''+ty'+(t^2-\alpha^2)y=0$$

1. Montrer qu'elle admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution de la forme :

$$J_\alpha(t)=t^\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n \quad \text{en imposant} \quad a_0=1$$

   Une telle solution est appelée fonction de Bessel.
2. Exprimer pour $\alpha=1/2$ toutes les solutions à l'aide des fonctions circulaires.
3. On suppose désormais que $\alpha=0$ et on admet que J_0 possède une infinité dénombrable de racines distinctes sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des racines de J_0.
   a) Montrer que $\psi_n : x \mapsto J_0(\lambda_n x)$ vérifie l'équation $y''+\dfrac{y'}{x}+\lambda_n^2y=0$.
   b) On considère alors l'espace vectoriel $E=\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(\psi_n)$.
   Montrer que $(f,g)\mapsto\displaystyle\int_0^1 tf(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ défini un produit scalaire sur E.
   c) Vérifier que $\phi : f\mapsto f''+\dfrac{f'}{t}$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
   d) En déduire que pour $i\neq j$, $\displaystyle\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)\,\mathrm{d}x=0$.

Partie C – Exponentielles de matrices

Exercice 24 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\binom{p}{k}\dfrac{1}{p^k} \leqslant \dfrac{1}{k!}$.
2. En déduire par permutation de limites que $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(I_n + \dfrac{A}{p}\right)^p = \exp(A)$.

Exercice 25 — On pose $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire le polynôme minimal de A.
2. En déduire $\exp(A)$.

Exercice 26 — Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A et diagonaliser A.
2. Calculer $\exp(A)$ à l'aide d'une division euclidienne de X^n par π_A.

Exercice 27 — Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\varphi(t) = A\exp(tB)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Partie D – Équations différentielles linéaires vectorielles

Exercice 28 — Résoudre les sytèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 5x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ z' = -x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Exercice 29 — Montrer sans les déterminer que les trajectoires du système différentiel suivant sont planes :

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$$

Généraliser aux systèmes linéaires de la forme $X' = AX$ où $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 30 — Résoudre les problèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x'' = x + 8y - 2 \\ y'' = 2x + y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - y - z + t \\ y' = -x + y - z + t \\ z' = -x - y + z + t \end{cases}$$

Exercice 31 — Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + I_{2n} = 0$.
Déterminer les solutions de l'équation $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 32 — On cherche à exprimer les solutions des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.
Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on a :

$$P(D)(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{(k)} = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

où D désigne l'opérateur de dérivation $f \mapsto f'$.
On note enfin $\mathscr{S}_P$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation $P(D)(y) = 0$.

1. a) Soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux.
   On pose $P = P_1 \times \cdots \times P_r$. Montrer que $\mathscr{S}_P = \mathscr{S}_{P_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{S}_{P_r}$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $y^{(3)} + 2y'' + y' + 2y = 0$.
2. Montrer par récurrence que pour $P = (X-\alpha)^n$, les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}Q(t)$ avec $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
3. En déduire la forme générale des solutions pour $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque.