Développements limités

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Définitions et développements limités classiques

1.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a (en abrégé dans la suite : f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe P polynomiale de degré inférieur ou égal à n telle que :

$$f(x) - P(x-a) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

C'est-à-dire si on peut écrire, pour x voisin de a, $f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Remarques

- On a vu que[a] f admet un $\mathrm{DL}_1(a) \Leftrightarrow f$ est dérivable en a. On a alors au voisinage de a,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \mathrm{o}(x-a)$$

- f admet un $\mathrm{DL}_0(a) \Leftrightarrow f$ est continue en a. En effet :
  - $\Leftarrow$ On sait que $f(x) - f(a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Donc au voisinage de a, $f(x) = f(a) + (x-a)^0 \underbrace{f(x) - f(a)}_{\substack{\to 0\\ x\to a}}$. Soit

$$f(x) = f(a) + \mathrm{o}(1)$$

    et on a bien $f(a)$ un polynôme de degré 0.
  - $\Rightarrow$ Si f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$, on a au voisinage de a $f(x) = \lambda + \mathrm{o}(1)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$. f admet une limite en a donc est continue et $\lambda = f(a)$.

Piège ! Attention en général on a pas[b] f admet un $\mathrm{DL}_n(a) \Rightarrow f$ admet une dérivée n-ième au voisinage de a.

Par exemple, considérons f définie par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Posons $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, alors $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) = 0 + x^2\varepsilon(x)$ donc f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De plus f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc f' n'admet pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

1.2 Propriétés

1.2.1 Unicité

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x) - P(x-a) = \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$. P s'appelle la partie régulière du développement limité à l'ordre n en a de f.

[a]. Voir section 14.1.2 du cours complet page 207.
[b]. Dès que $n \geqslant 2$ en fait.

Démonstration Soient P, Q deux polynômes de degré inférieur ou égal à n avec $f(x) = P(x-a) + \mathrm{o}((x-a)^n)$ et $f(x) = Q(x) + \mathrm{o}((x-a)^n)$ au voisinage de a. Ainsi, $Q(x-a) - P(x-a) = \mathrm{o}((x-a)^n)$. Or on peut écrire pour $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n \quad \text{et} \quad Q(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \cdots + \mu_n t^n$$

Donc $P(x-a) - Q(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{\nu_i} (x-a)^k$. Supposons que $\exists j \in [\![0,n]\!]$ tel que $\nu_j \neq 0$ et posons $m = \min\{j \in [\![0,n]\!] \,|\nu_j \neq 0\}$. Alors :

$$\begin{aligned} P(x-a) - Q(x-a) &= \nu_m (x-a)^m + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{n} \nu_i (x-a)^j}_{\mathrm{o}((x-a)^m)} \\ &\underset{x \to a}{\sim} \nu_m (x-a)^m \end{aligned}$$

Ainsi, $P(x-a) - Q(x-a)$ n'est pas négligeable devant $(x-a)^n$, ce qui est impossible. Donc $\forall j \in [[0,n]]$, $\lambda_j = \mu_j$ donc[a] $P = Q$.

1.2.2 Reformulation de Taylor-Young

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, et $a \in I$, alors f admet en a un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k$$

En[b] particulier, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, alors f admet en tout point de I un développement limité à tout ordre.

1.3 Développements limités classiques

1.3.1 Fonctions usuelles

Tous les résultats suivants seront donnés au voisinage de 0 :

a. M. Sellès nous demande en effet d'admettre pour l'instant le résultat suivant : deux polynômes sont égaux si tous leurs coefficients sont égaux.

b. On note que $P(x-a) = T_{n,f,a}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^n\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Pour $\alpha \notin \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

1.3.2 Autres résultats

Inverse Soit $f : \begin{array}{l}]-\infty, +1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1-t} \end{array}$. On sait que, pour $t < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $1 + t + \cdots + t^n = \dfrac{1 - t^{n+1}}{1-t}$ Donc

$$f(t) = 1 + t + \cdots + t^n + t^n \underbrace{\frac{t}{1-t}}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0}$$

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^n + \mathrm{o}\left(t^n\right)$$

De l'importance de développements limités en 0 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ et $J = I - a = \{x - a | x \in I\}$. Il est clair que J est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0. Pour $t \in J$, posons $g(t) = f(a+t)$. Ainsi, pour $x \in I$, $f(x) = g(x-a)$. Pour P polynômiale de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière P si et seulement si g admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P.

Démonstration

$\Leftarrow$ On a, pour t voisin de 0 :

$$g(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t) \qquad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Pour x voisin de a, $x - a$ est voisin de 0 donc $f(x) = g(x-a) = P(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ d'où le résultat.

$\Rightarrow$ Idem.

Ainsi, par changement de variable, on peut toujours se ramener au voisinage de 0. Par conséquent, tous les développements limités envisagés dans la suite le seront au voisinage de 0.

2 Opérations sur les développements limités

Dans toute la suite, I est un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0.

2.1 Opérations élémentaires

2.1.1 Troncature

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$.
Alors, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, f admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ dont la partie régulière est, pour $t \in \mathbb{R}$, $Q_p(t) = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_p t^p$.
On dit que Q_p est P tronquée au degré p.

Démonstration Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(t) &= P(t) + \mathrm{o}(t^n) \\ &= Q_p(t) + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k t^k + \mathrm{o}(t^n)}_{\mathrm{o}(t^p)} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemple Au voisinage de 0, $\sin t = t + \mathrm{o}\left(t^2\right)$ car au voisinage de 0, $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}\left(t^3\right)$.

2.1.2 Multiplication élémentaire

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P.
Alors, pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $t \longmapsto \alpha t^p f(t)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+p}(0)$ de partie régulière $Q(t) = \alpha t^p P(t)$.

Démonstration Au voisinage de 0, $f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ d'où $\alpha t^p f(t) = \alpha t^p + \alpha t^{n+p} \varepsilon(p)$, d'où le résultat.

Exemple Au voisinage de 0, $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)$ d'où $t^2 \cos t = t^2 - \dfrac{t^4}{2} + \mathrm{o}\left(t^4\right)$.

2.1.3 Composition élémentaire

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour t voisin de a, $\alpha t^m \in I$ [a].
Alors $f(\alpha t^m)$ admet un $\mathrm{DL}_{nm}(0)$ de partie régulière $t \longmapsto P(\alpha t^m)$.

a. C'est toujours le cas si $0 \in \mathrm{Int}\, I$.

Démonstration Au voisinage de 0, $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc pour t voisin de 0, αt^m est voisin de 0 donc

$$f(\alpha t^m) = P(\alpha t^m) + \alpha t^{mn} \varepsilon(\alpha t^m) \quad \varepsilon(\alpha t^m) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Exemple

– Au voisinage de 0, on a $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)$ donc $\cos\left(t^2\right) = 1 - \dfrac{t^4}{2} + \mathrm{o}\left(t^4\right)$ ou $\cos\left(t^3\right) = 1 - \dfrac{t^6}{2} + \mathrm{o}\left(t^6\right)$.

– On a vu que, au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ d'où, par composition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)\\ \frac{1}{1-x^2} &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)\\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)\end{aligned}$$

2.1.4 Intégration de développements limités

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière Q avec pour $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$.

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de partie régulière $P(t) = f(0) + \lambda_0 t + \lambda_1 \dfrac{t^2}{2} + \cdots + \lambda_n \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ [a].

[a] Il suffit d'intégrer Q en prenant $f(0)$ pour constante.

Démonstration On veut montrer que $\dfrac{f(t) - P(t)}{t^{n+1}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que pour $t \neq 0$ et $|t| \leqslant \alpha$, $\dfrac{|f(t) - P(t)|}{|t^{n+1}|} \leqslant \varepsilon$. On sait que $\dfrac{f'(t) - Q(t)}{t^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $\exists \beta > 0$ tel que $\forall t \in I \setminus \{x_0\}$, $|t| \leqslant \beta \Rightarrow \dfrac{|f'(t) - Q(t)|}{|t^n|} \leqslant \varepsilon$.

Prenons $\alpha = \beta$, soit $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $|x| \leqslant \alpha$. Pour $t \in \underset{\leftrightarrow}{[0, x]}$, posons $\varphi(t) = f(t) - P(t)$. φ est dérivable et $\forall t \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned}\left|\varphi'(t)\right| &= \left|f'(t) - P'(t)\right|\\ &= \left|f'(t) - Q(t)\right|\\ &\leqslant \varepsilon\left|t^n\right|\end{aligned}$$

– Si $x < 0$, φ est dérivable sur $[x, 0]$ et $\forall t \in [x, 0[$, $|\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon(-t)^n = g'(t)$ où $g(t) = -\dfrac{\varepsilon(-t)^{n+1}}{n+1}$. D'après les inégalités des accroissements finis,

$$\begin{aligned}|\varphi(0) - \varphi(x)| \leqslant g(0) - g(x) &\Rightarrow |\varphi(0) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon(-x)^{n+1}}{n+1} \leqslant \varepsilon|x|^{n+1}\\ &\Rightarrow |f(0) - P(0) - (f(x) - P(x))| \leqslant \varepsilon|x|^{n+1}\\ &\Rightarrow |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon|x|^{n+1}\end{aligned}$$

– Le cas $x > 0$ est laissé au courageux lecteur !

Exemple

– Au voisinage de 0

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Par intégration,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \underbrace{0}_{\ln(1+0)} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Puis, par composition, $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$.

– Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)\end{aligned}$$

Par intégration, au voisinage de 0 :

$$\arctan x = \underbrace{\arctan 0}_{0} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(t^{2n+1}\right) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(t^{2n+1}\right)$$

Exercice Donnons un $\mathrm{DL}_7(0)$ de arcsin.

arcsin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc un tel développement limité existe. De plus, pour $x \in]-1,1[$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$. Or au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}(1+u)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}u + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{6}u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right) \\ &= 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$. Par intégration, au voisinage de 0, on a donc :

$$\arcsin x = 0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right)$$

2.1.5 Dérivation des développements limités

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$, on suppose que f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de partie régulière P et que f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière Q.
Alors $P' = Q$.

Démonstration Géométrie ad'après Taylor-Young, $P = T_{n+1,f,0}$ et $Q = T_{n,f',0}$ et on a déjà vu par le calcul que $P' = Q$ [a].

Exemple Au voisinage de 0, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n+1} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$. Or $t \longmapsto \frac{1}{1-t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc, par dérivation,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

a. Voir section 14.3.2.4 du cours complet page 223.

Remarque D'après la section 2.1.4 page 6, si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dérivable et admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de partie régulière P, et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière Q, alors $P' = Q$.

2.1.6 Parité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{K}$, on suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière P.
Alors f est de même parité que P, si toutefois f admet une parité.

Démonstration Pour $t \in [-a, a]$, $f(t) = P(t) + \mathrm{o}(t^n)$ donc $f(-t) = P(-t) + \mathrm{o}(t^n)$. Si f est paire, $f(-t) = f(t)$ donc, par unicité de la partie régulière, $P(-t) = P(t)$.

De plus, si l'on écrit $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$, alors

$$\begin{aligned} P(t) = P(-t) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (-t)^k = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(1 - (-1)^k\right) t^k = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in [[0, n]]$, $\lambda_k \left(1 - (-1)^k\right) = 0$ donc tous les coefficients des termes de degré impair sont nuls.

De même, si f est impaire, tous les coefficients des termes de degré pair sont nuls.

2.1.7 Combinaisons linéaires

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$, on suppose que f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q.
Alors $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha f + g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $\alpha P + Q$.

Démonstration Au voisinage de 0, $f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(t) = Q(t) + t^n \omega(t)$ avec $\omega(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où

$$\alpha f(t) + g(t) = \alpha P(t) + Q(t) + t^n \underbrace{(\alpha \varepsilon(t) + \omega(t))}_{\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0}$$

2.2 Autres opérations

2.2.1 Produit

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$, on suppose que f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q.
Alors fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est PQ tronquée au degré n.

Démonstration Au voisinage de 0, $f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(t) = Q(t) + t^n \omega(t)$ avec $\omega(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où

$$f(t)\, g(t) = P(t)\, Q(t) + t^n \underbrace{(\varepsilon(t)\, Q(t) + \omega(t)\, P(t) + t^n \varepsilon(t)\, \omega(t))}_{\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0}$$

De plus, on peut écrire $P(t)\, Q(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_{2n} t^{2n} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + \mathrm{o}(t^n)$, d'où le résultat.

Exemple Trouvons un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $t \longmapsto \mathrm{e}^t\sqrt{1+t}$.
Au voisinage de 0, $\mathrm{e}^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)$ et $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \mathrm{o}\left(t^2\right)$. D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^t\sqrt{1+t} &= 1 + t\left(1 + \frac{1}{2}\right) + t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \mathrm{o}\left(t^2\right) \\
&= 1 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{8}t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right)
\end{aligned}$$

2.2.2 Quotient

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$, on suppose que f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de parties régulières respectives A et B telles que $g(0) \neq 0$ [a].
Alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$Formula Frtie régulière est le quotient de la division suivant les puissances croissantes [b] à l'ordre n de A par B.

[a] g est continue en 0 car elle admet au moins un $\mathrm{DL}_0(0)$ donc, par continuité, g ne s'annule pas au voisinage de 0 donc $\dfrac{1}{g}$ est bien définie au voisinage de 0.
[b] Voir l'annexe 4 page 17.

Démonstration On écrit $A(t) = B(t)Q_n(t) + t^{n+1}R_n(t)$ avec Q_n de degré inférieur ou égal à n et R_n polynômiale. Au voisinage de 0, $f(t) = A(t) + t^n\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(t) = B(t) + t^n\omega(t)$ avec $\omega(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, pour t voisin de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{g(t)} - Q_n(t) &= \frac{B(t)Q_n(t) + t^nR_n(t) + t^n\varepsilon(t)}{B(t) + t^n\omega(t)} - Q_n(t) \\
&= \frac{t^{n+1}R_n(t) + t^n\varepsilon(t) - t^n\omega(t)Q_n(t)}{B(t) + \varepsilon(t)} \\
&= t^n \underbrace{\frac{tR_n(t) + \varepsilon(t) - \omega(t)Q_n(t)}{B(t) - t^n\omega(t)}}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ car } B(0)\neq 0}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(t)}{g(t)} - Q_n(t) \underset{0}{=} \mathrm{o}(t^n)$.

Exemples

- Trouvons un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$. Au voisinage de 0,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 5 de ces deux polynômes :

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\ \cline{2-2}
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\frac{2}{15}x^5 + \cdots & \\
0 + \cdots &
\end{array}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$.

– Trouvons un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\ln(1+t)}{1+\sqrt{1+t}}$. Au voisinage de 0,

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right) \quad \text{et} \quad 1+\sqrt{1+t} = 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathrm{o}\left(t^2\right)$$

La division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 des deux polynômes donne :

$$\begin{array}{r|l} t - \frac{1}{2}t^2 & 2 + \frac{1}{2}t - \frac{t^2}{8} \\ \cline{2-2} -\frac{3}{4}t^2 + \cdots & \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}t^2 \\ 0 + \cdots & \end{array}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $\dfrac{\ln(1+t)}{1+\sqrt{1+t}} = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{8}t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right)$.

2.2.3 Composition

Soient $f : I \longrightarrow J$, telles que $0 \in I$ et $0 \in J$. On suppose que f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulières respectives P et Q et $f(0) = 0$.
Alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $Q \circ P$ tronquée au degré n.

Démonstration P s'écrit $P(t) = tS(t)$ avec S polynômiale car $f(0) = 0$. De plus, au voisinage de 0 dans J, $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et pour x voisin de 0 dans I, $f(x) = P(x) + x^n\alpha(t)$ avec $\alpha(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a donc, au voisinage de 0 :

$$g(f(t)) = Q(f(t)) + (f(t))^n\,\varepsilon(f(t))$$

Or $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ donc $Q(f(t)) = a_0 + a_1f(t) + \cdots + a_n(f(t))^n$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrons que $(f(t))^k = (P(t))^k + \mathrm{o}(t^n)$. En effet,

$$\begin{aligned} (f(t))^k &= (P(t) + t^n(\alpha(t))^n) \\ &= (P(t))^k + \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}t^{np}\alpha^p(t)(P(t))^{k-p} \\ &= (P(t))^k + t^n\underbrace{\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}t^{n(p-1)}\alpha^p(t)(P(t))^{k-p}}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

D'où le résultat. Montrons maintenant que $(f(t))^n\,\varepsilon((f)) = \mathrm{o}(t^n)$. On montre par un raisonnement analogue au cas précédent que $(f(t))^n = (P(t))^n + t^n\omega(t)$ avec $\omega(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où :

$$\begin{aligned} (f(t))^n\,\varepsilon(f(t)) &= ((P(t))^n + t^n\omega(t)) \\ &= t^n\underbrace{((S(t))^n + \omega(t))}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

$P \circ Q$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à n^2 donc on peut écrire

$$Q \circ P(t) = \lambda_0 + \lambda_1t + \cdots + \lambda_nt^n + \underbrace{\lambda_{n+1}t^{n+1} + \cdots + \lambda_{n^2}t^{n^2}}_{\mathrm{o}(t^n)}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $g((t)) = T(t) + \mathrm{o}(t^n)$ où T est la troncature de $P \circ Q$ au degré n.

Calcul pratique On sait que $Q \circ P(t) = b_0 + b_1 P(t) + \cdots + b_n (P(t))^n$.

Pour tout polynôme S, on note $\text{tronc}_n(S)$ la troncature de S au degré n. Ainsi, $S(t) = \text{tronc}_n(S) + t^{n+1} R(t)$ avec R polynômiale.

Ici, $\text{tronc}_n(Q \circ P) = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{tronc}_n(P^k)$ or pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(P(t))^k = \text{tronc}_n\left((P(t))^k\right) + t^{n+1} R(t)$ donc

$$(P(t))^{k+1} = P(t) \cdot \text{tronc}_n\left((P(t))^k\right) + t^{n+1} P(t) R(t)$$

Le dernier terme ne contenant que des termes de degré plus grand que $n+1$, on a donc

$$\text{tronc}_n\left(P^{k+1}\right) = \text{tronc}_n\left(P \cdot \text{tronc}_n\left(P^k\right)\right)$$

D'où un calcul de proche en proche des différents $\text{tronc}_n\left(P^k\right)$.

Exemples

- Soient $Q(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ et $P(t) = 1 + 2t - t^2 + t^3$, calculons $\text{tronc}_3(P \circ Q)$. $Q(P(t)) = 1 + P(t) + P^2(t) + P^3(t)$ donc [a] :

$$\begin{aligned} \text{tronc}_3(P \circ Q(t)) &= 1 + \left(1 + 2t - t^2 + t^3\right) + \left(1 + 4t + 2t^2 - 2t^3\right) + P^3(t) \\ &= \cdots \\ &= 8t^3 + 5t^2 + 3t + 3 \end{aligned}$$

- Donnons un $\text{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1 + \ln(1+t)}$. Au voisinage de 0, $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \text{o}\left(t^2\right)$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \text{o}\left(u^2\right)$. D'où, par composition :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \ln(1+t)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(t - t^2\right) - \frac{1}{8}\text{tronc}_2\left(\left(t - t^2\right)^2\right) + \text{o}\left(t^2\right) \\ &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{3}{8}t^2 + \text{o}\left(t^2\right) \end{aligned}$$

2.2.4 Applications de la composition

Parfois on doit effectuer des $\text{DL}_n(0)$ d'expressions du type $g(f(t))$, avec $f(0) \neq 0$. On ne peut alors pas appliquer directement le théorème de composition : il faut d'abord modifier l'expression.

Exemples

- Calculons un $\text{DL}_3(0)$ de $f : t \longrightarrow \text{e}^{\sqrt{1+t}}$. Au voisinage de 0, $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t^3}{16} + \text{o}\left(t^3\right)$. Donc

$$\begin{aligned} \text{e}^{\sqrt{1+t}} &= \exp\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \text{o}\left(t^3\right)\right) \\ &= \text{e}.\exp\left(\underbrace{\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \text{o}\left(t^3\right)}_{\varphi(t)}\right) \end{aligned}$$

On a cette fois $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et on peut appliquer le théorème de composition. Au voisinage de 0, $\text{e}^u = 1 + u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \text{o}\left(u^3\right)$. D'où :

$$\begin{aligned} \text{e}^{\varphi(t)} &= 1 + \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{8}\right) + \text{o}\left(t^3\right) \\ &= 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^3}{48} + \text{o}\left(t^3\right) \end{aligned}$$

[a]. Le calcul suivant étant extrêmement long et pénible, vous m'excuserez de ne pas m'avancer trop avant sur le détail des calculs : quant au résultat final, il m'a été donné par ma calculette. Libre à vous de le vérifier !

Et

$$e^{\sqrt{1+t}} = e + e\frac{t}{2} + e\frac{t^3}{48} + o\left(t^3\right)$$

– Donnons un $DL_2(0)$ de $t \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o\left(t^2\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o\left(t^2\right)\right) &= \ln\left(2\left(1 - \frac{t}{4} + \frac{3t^2}{16} + o\left(t^2\right)\right)\right) \\
&= \ln 2 + \ln\left(\underbrace{1 - \frac{t}{4} + \frac{3t^2}{16} + o\left(t^2\right)}_{\varphi(t)}\right)
\end{aligned}$$

et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Au voisinage de 0, $\ln(1+t) = u - \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. D'où

$$\ln(1+\varphi(t)) = \frac{-t}{4} + \frac{3t^2}{16} - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{16}\right) + o\left(t^2\right)$$

Et par conséquent

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) = \ln 2 - \frac{t}{4} + \frac{5t^2}{32} + o\left(t^2\right)$$

Développement limité d'un inverse Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ admettant un $DL_n(0)$ et $f(0) \neq 0$. Par continuité, f est non nulle au voisinage de 0 et donc $\dfrac{1}{f}$ y est bien définie. On a au voisinage de 0 :

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_n t^n + o(t^n) \Leftrightarrow f(t) = \alpha_0\left(1 + \underbrace{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}t + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_0}t^n + o(t^n)\right)}_{\varphi(t)}\right)$$

On a bien $\alpha_0 = f(0) \neq 0$, et $\dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{1}{\alpha_0}\dfrac{1}{(1+\varphi(t))}$. φ admet bien sûr un $DL_n(0)$ et $\varphi(0 = 0)$. On peut donc obtenir un $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+\varphi(t)}$ par composition. [a]

Exemples Reprenons les deux exemples de quotients déjà traités avec cette nouvelle méthode :

– $DL_2(0)$ de $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+\sqrt{1+t}}$. Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{1+t} &= 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o\left(t^2\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{16} + o\left(t^2\right)\right)
\end{aligned}$$

[a]. Ceci constitue la méthode du programme pour calculer les développements limités de quotients : on calcule le développement d'un inverse ainsi puis on multiplie par le numérateur. Néanmoins, on notera que M Sellès juge que cette méthode plus longue et source de bien plus d'erreurs que la division suivant les puissances croissantes...

Ainsi

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{t}{4}-\frac{t^2}{16}+\mathrm{o}\left(t^2\right)}_{\varphi(t)}}$$

avec $\varphi\left(t\right) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Or au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+\mathrm{o}\left(t^2\right)$$

Donc

$$\frac{1}{1+\varphi\left(t\right)} = 1-\left(\frac{t}{4}-\frac{t^2}{16}\right)+\frac{t^2}{16}+\mathrm{o}\left(t^2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{1+\varphi\left(t\right)} = 1-\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}+\mathrm{o}\left(t^2\right)$$

D'autre part, $\ln\left(1+t\right) = t-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}\left(t^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+t\right)}{1+\sqrt{1+t}} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{4}+\frac{t^2}{8}+\mathrm{o}\left(t^2\right)\right)\left(t-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}\left(t^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(t-\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}\left(t^2\right)\right)\\ &= \frac{t}{2}-\frac{3t^2}{8}+\mathrm{o}\left(t^2\right)\end{aligned}$$

– $\mathrm{DL}_5\left(0\right)$ de tan. Au voisinage de 0 :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(t^5\right) \quad \text{et} \quad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+u} = 1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+\mathrm{o}\left(u^5\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)}\\ &= 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^4}{4}\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Formula \$X\$:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^5}{12}+\frac{5}{24}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\ &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Remarque Même si $f\left(0\right)=0$, avec f non nulle au voisinage de 0 sauf peut-être en 0, cette méthode permet d'obtenir un développement asymptotique de $\frac{1}{f}$ au voisinage de 0.

Par exemple, pour $f(t) = \sin t$. Au voisinage de 0, $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}\left(t^3\right) = t\left(1 - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)\right)$. Pour t voisin de 0 mais différent de 0,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t}\frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + \mathrm{o}\left(t^2\right)} \\ &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + \mathrm{o}\left(t^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{t} - \frac{t}{6} + \mathrm{o}(t) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{t}{6} + \mathrm{o}(t) \Rightarrow \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} \underset{0}{\sim} -\dfrac{t}{6}$. Posons φ telle que $\varphi(0) = 0$ et pour $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$. On a en fait, pour t voisin de 0, $\varphi(t) = \dfrac{t}{6} + \mathrm{o}(t)$, y compris pour $t = 0$ donc φ admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \dfrac{t}{6}$ par unicité de la partie régulière.

3 Utilisation des développements limités

3.1 Obtention d'équivalents

3.1.1 Principe

Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P \neq 0$. Alors on peut écrire $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ et poser $m = \min\{k \in [\![0, n]\!] \,|a_k \neq 0\}$ donc $P(t) = a_m t^m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k t^k = a_m t^m + \mathrm{o}(t^m)$. Ainsi, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(t) &= P(t) + \mathrm{o}(t^n) \\ &= a_m t^m + \mathrm{o}(t^m) + \mathrm{o}(t^n) \\ &= a_m t^m + \mathrm{o}(t^m) \\ &\underset{0}{\sim} a_m t^m \end{aligned}$$

Exemples

(1) Trouvons un équivalent de $t \longmapsto \sin t - t$ en 0. Au voisinage de 0, $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}\left(t^3\right)$ donc $\sin t - t = -\dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}\left(t^3\right) \underset{0}{\sim} -\dfrac{t^3}{6}$.

(2) Montrons qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\sin(\ln(1+t)) - \ln(1 + \sin t) \underset{0}{\sim} \lambda x^4$. Au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sin(\ln(1+x)) &= \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) + \mathrm{o}\left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - x^4 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3\right) - \frac{1}{4}\left(x^4\right) + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

D'où, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \sin\left(\ln\left(1+x\right)\right) - \ln\left(1+\sin x\right) &= \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &\underset{0}{\sim} \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

3.1.2 Un problème de raccord...

Soit l'équation différentielle :

$$(E) \quad 2x\left(1+x\right)y' + \left(1+x\right)y = 1$$

Cette équation admet des solutions définies sur $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Cherchons une éventuelle solutions définie sur $]-1,+\infty[$. On rappelle que [a] :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{ x>0 \longmapsto \frac{\lambda + \arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} | \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{]-1,0[} = \left\{ x \in \left]-1,0\right[\longmapsto \frac{\mu + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right)}{\sqrt{|x|}} | \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit f une éventuelle solution de (E) définie sur $]-1,+\infty[$. Alors $f_{|]-1,0[}$ est solution de (E) sur $]-1,0[$ et $f_{|]0,+\infty[}$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ donc nécessairement, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{\lambda + \arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x>0 \\ \frac{\mu + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right)}{\sqrt{|x|}} & \text{si } -1<x<0 \end{cases}$$

De plus, on doit avoir $2\cdot 0\cdot(1+0)\,f'(0) + (1+0)\,f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$. Pour $x>0$, $\lambda + \arctan\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \lambda$ donc si $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$, ce qui est impossible puisque f est dérivable donc continue en 0 donc $\lambda = 0$. De la même façon, on a nécessairement $\mu = 0$. Ainsi, on a f définie par :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan\sqrt{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right) & \text{si } -1<x<0 \end{cases}$$

Réciproquement, soit f définie sur $]-1,+\infty[$ par la formule suivante. f est-elle dérivable en 0 ?

- Pour $x>0$,

$$\begin{aligned} \frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x} &= \frac{\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1}{x} \\ &= \frac{\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

  Au voisinage de 0, $\arctan u = u - \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$ donc $\arctan u - u = -\dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right) \underset{0}{\sim} -\dfrac{u^3}{3}$. Or $\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$ d'où $f_d'(0) = -\dfrac{1}{3}$.

- Pour $-1<x<0$,

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{|x|}}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right) - 2\sqrt{|x|}\right)$$

[a]. Pour la résolution de cette équation différentielle d'ordre 1, se reporter au chapitre 5.1 du cours complet page 60.

Au voisinage de 0, $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$ et $\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$ d'où $\ln(1+u) - \ln(1-u) - 2u = \dfrac{2}{3}u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right)$. Or $\sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}\right) - 2\sqrt{x} \underset{0}{\sim} \frac{2\,|x|^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3} \quad \text{car } \frac{|x|}{x} = -1$$

Ainsi, $f'_d(0) = f'_g(0)$ donc f est dérivable en 0.

3.2 Développements asymptotiques à l'infini

3.2.1 Exemple introductif

Soit la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}$.

Pour $h > 0$, on pose $\varphi(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$, étudions φ au voisinage de 0. Pour $h > 0$, $\varphi(h) = \left(\dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{1}{h} - 2\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{h}(1-2h$
Or, au voisinage de 0,

$$(1-2h)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2h}{3} - \frac{4}{9}h^2 - \frac{40}{81}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right) \Rightarrow \varphi(h) = \frac{1}{h} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9}h - \frac{40}{81}h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)$$

D'où, au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9x} - \dfrac{40}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) - \left(x - \frac{2}{3}\right) &= -\frac{4}{9x} \underbrace{- \frac{40}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{4}{9x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - \dfrac{2}{3}$ est asymptote oblique à Γ_f en $+\infty$. Au voisinage de $++\infty$, $-\dfrac{4}{9x} < 0$ donc Γ_f est en dessous de son asymptote.

3.2.2 Méthode

Rappel Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$ si $f(x) - (\alpha x + \beta) \xrightarrow[x\to+\infty]{}$
Ceci impose $\dfrac{f(x) - (\alpha x + \beta)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} - \alpha - \dfrac{\beta}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Une façon de procéder pour détecter une éventuelle asymptote est d'étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe et est finie égale à $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on étudie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lambda$. Si cette limite est à son tour finie et égale à $\mu \in \mathbb{R}$, alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \lambda x + \mu$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$.

Avec les développements limités

On essaie d'effectuer un développement asymptotique de $h > 0 \longmapsto \varphi(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ du type $\varphi(h) = \dfrac{a}{h} + b + ch^m + \mathrm{o}(h^m)$ avec $m \geqslant 1$ et $c \neq 0$. Ceci donne, au voisinage de $+\infty$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^m} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^m}\right)$ d'où :

$$f(x) - (ax+b) \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x^m}$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$ et le signe de $\dfrac{c}{x^m}$ donne les positions relatives de $\mathcal{D}$ et Γ_f.

Exemple Étudions en $+\infty$ $f : x \longrightarrow \dfrac{x^2+1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Posons pour $h>0$ $\varphi(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \frac{\frac{1}{h^2}+1}{\frac{1}{h}-1}\mathrm{e}^h \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1+h^2}{1-h}\right)\mathrm{e}^h\end{aligned}$$

Or au voisinage de 0, $\mathrm{e}^h = 1+h+\dfrac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^2\right)$ et $\dfrac{1}{1-h} = 1+h+h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1+h^2}{1-h} &= \left(1+h^2\right)\left(1+h+h^2\right)+\mathrm{o}\left(h^2\right) \\ &= 1+h+2h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^h\left(\frac{1+h^2}{1-h}\right) &= \left(1+h+2h^2\right)\left(1+h+2h^2\right)+\mathrm{o}\left(h^2\right) \\ &= 1+2h+\frac{7}{2}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, $\varphi(h) = \dfrac{1}{h}+2+\dfrac{7}{2}h+\mathrm{o}(h)$ donc $f(x) = x+2+\dfrac{7}{2x}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc :

$$\begin{aligned}f(x)-(x+2) &= \frac{7}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{7}{2x}\end{aligned}$$

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$ et Γ_f est au dessus de $\mathcal{D}$.

4 Complément : division suivant les puissances croissantes de deux polynômes

4.1 Définition

Soient A et B deux polynômes avec $B(0) \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un (unique) couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = B(t)\,Q_n(t) + t^{n+1}R_n(t)$$

Avec Q_n de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration

- Soit H_n : »Pour tout polynôme A, il existe un couple (Q_n, R_n) de polynômes avec Q_n de degré inférieur ou égal à n avec $A(t) = B(t)\,Q_n(t) + t^{n+1}R_n(t)$ ».

Montrons que H_0 est vraie. Soit A un polynôme, on peut écrire avec $m \in \mathbb{N}$, $A(t) = \alpha + a_1t + \cdots + a_mt^m$ et $B = \beta + b_1t + \cdots + b_mt^m$, quitte à rajouter des coefficients nuls à l'un des polynômes. On rappelle $\beta \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}A(t) - \frac{\alpha}{\beta}B(t) &= \sum_{i=1}^{m}\left(a_i - \frac{\alpha}{\beta}b_i\right)t^i \\ &= t\sum_{i=1}^{m}\left(a_i - \frac{\alpha}{\beta}b_i\right)t^{i-1}\end{aligned}$$

On arrive donc à $tR(t)$ avec $R(t)$ polynômiale, d'où le résultat.

– Supposons que H_n est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Soit A un polynôme, on sait que A s'écrit $A(t) = B(t)\,Q_n(t) + t^{n+1}R_n(t)$ avec Q_n de degré inférieur ou égal à n. De plus :

$$R_n(t) = \underbrace{R_n(t) - \frac{\alpha}{\beta}B(t)}_{\text{polynôme sans terme constant}} + \frac{\alpha}{\beta}B(t)$$

Donc $R_n(t) - \dfrac{\alpha}{\beta}B(t) = tS(t)$ avec S polynômiale. Par conséquent,

$$\begin{aligned} A(t) &= B(t)\,Q_n(t) + \frac{\alpha}{\beta}t^{n+1}B(t) + t^{n+2}S(t) \\ &= B(t)\left[Q_n(t) + \frac{\alpha}{\beta}t^{n+1}\right] + t^{n+2}S(t) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4.2 Exemples

Prenons $A(t) = 1 + t^2$, $B(t) = 1 + t + t^2$ et $n = 2$. Alors :

$$A_1(t) = A(t) - 1 \cdot B(t) = t \quad \text{et} \quad A_2 = A_1(t) - t \cdot B(t) = -t^3$$

Ainsi, $-t^3 = A_1(t) - tB(t) = A(t) - (1+t)\,B(t)$ donc $A(t) = \underbrace{(1+t)}_{Q_2}B(t) + t^3\underbrace{1}_{R_2}$.

Disposition pratique

A chaque ligne, on cherche à annuler le terme du polynôme de droite en multipliant le polynôme de gauche par ce qu'il faut pour que le premier terme du polynôme de gauche soit égal au terme du polynôme de droite que l'on veut annuler. Puis on retranche l'expression ainsi multipliée, on note le reste et le terme multiplicatif dans la case du quotient. On répète le procédé jusqu'à ce que le reste ne contienne plus que des termes de degré supérieur à n.

$$\begin{array}{r|l} 1+t+t^2 & 1+t^2 \\ \cline{2-2} t & 1+t \\ -t^3 & \end{array} \qquad n = 2$$

$$1 + t + t^2 = (1+t)\left(1+t^2\right) - t^3$$

$$\begin{array}{r|l} 2+t+t^3 & 1-t+t^2 \\ \cline{2-2} 3t-2t^2+t^3 & 2+3t+t^2-t^3 \\ t^2-2t^3 & \\ -t^3-t^4 & \\ -2t^4+t^5 & \end{array} \qquad n = 3$$

$$2 + t + t^3 = \left(2 + 3t + t^2 - t^3\right)\left(1 - t + t^2\right) + t^4(t-2)$$