Corrigé du devoir à rendre le 07/10/2019

Exercice 1 :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = \sum_{k=0}^{4} (-z)^k = \begin{cases} \dfrac{1-(-z)^5}{1+z} & \text{si } z \neq -1 \\ 5 & \text{sinon} \end{cases}$$
Or, $(-z)^5 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] \,:\, -z = e^{2ik\pi/5} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] \,:\, z = -e^{2ik\pi/5}$.
Ainsi l'ensemble des solutions est
$$\boxed{\mathcal{S} = \{-e^{2ik\pi/5},\ k \in [\![1,4]\!]\}}$$

2. Soit $Z \in \mathbb{C}$, on a
$$Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z \in \{j, j^2\}$$
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a donc
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \{j, j^2\}$$
Or,
$$\frac{z+i}{z-i} = j \Leftrightarrow z(1-j) = -i(1+j) \Leftrightarrow z = -i\frac{e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}\right)}{e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z = -i\frac{\cos(\pi/3)}{-i\sin(\pi/3)} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
et
$$\frac{z+i}{z-i} = j^2 \Leftrightarrow z\left(1-j^2\right) = -i\left(1+j^2\right) \Leftrightarrow z = -i\frac{e^{2i\pi/3}\left(e^{-2i\pi/3} + e^{2i\pi/3}\right)}{e^{2i\pi/3}\left(e^{-2i\pi/3} - e^{2i\pi/3}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z = -i\frac{\cos(2\pi/3)}{-i\sin(2\pi/3)} \Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
Ainsi l'ensemble des solutions est
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$$

Exercice 2 : Soit $u = e^{2i\pi/5}$.

1. On pose $\alpha = u + u^4$ et $\beta = u^2 + u^3$.
   (a) Comme $u \neq 1$, on a $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = \dfrac{1-u^5}{1-u} = 0$.
   Comme le polynôme $X^2 + X - 1$ est unitaire, les deux racines x_1 et x_2 (dans $\mathbb{C}$ a priori) sont caractérisées par $X^2 + X - 1 = (X - x_1)(X - x_2)$ donc par
   $$x_1 + x_2 = x_1 x_2 = -1$$
   Or, on vient de prouver que $1 + \alpha + \beta = 0$ et d'autre part, on a
   $$\alpha\beta = \left(u + u^4\right)\left(u^2 + u^3\right) = u^3\left(1 + u^3\right)(1+u) = u^3\left(1 + u + u^3 + u^4\right) = -u^5 = -1$$
   Par conséquent, $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont les deux racines du polynôme } X^2 + X - 1.}$

   (b) Le discriminant associé au polynôme est $\Delta = 5$ donc les racines sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Or $\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
   Comme $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \geq 0$ donc α est la racine positive de $X^2 + X - 1 = 0$ d'où
   $$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

2. On note A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, u, u^2, u^3, u^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   (a) La droite (A_1A_4) a pour équation $x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ car $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$
   donc H a pour coordonnées $\boxed{\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right), 0\right)}$.

   (b) Comme le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ a pour coordonnées $(1/2, 1)$, $\Omega B = \sqrt{5/4}$. De plus $(\alpha + 1/2)^2 = \alpha^2 + \alpha + 1/4 = 5/4$ donc le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ appartient à $\mathcal{C}$.
   De même, $(\beta + 1/2)^2 = 5/4$ donc le point de coordonnées $(\beta, 0)$ appartient à $\mathcal{C}$.
   Par conséquent,
   $$\boxed{\text{les coordonnées des pints } M \text{ et } N \text{ sont } (\alpha, 0) \text{ et } (\beta, 0)}$$
   Comme $\alpha = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, on en déduit que $\boxed{H \text{ est le milieu de } [OM]}$.

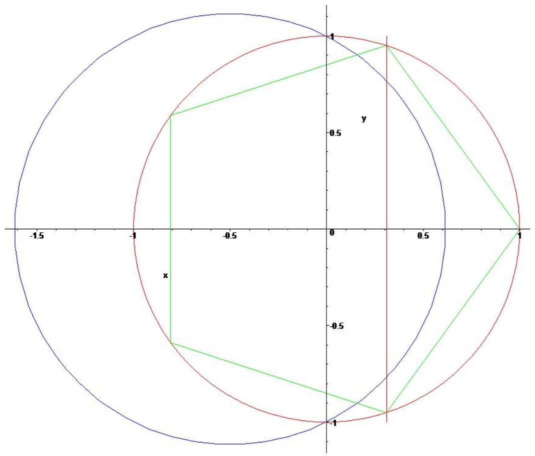
(c) On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O passant par A_0. Soit C son autre intersection avec la droite (OA_0). On construit le milieu Ω du segment $[C, O]$ comme intersection de la droite (OA_0) et de l'intersection de la médiatrice du segment $[C, O]$. Cette dernière s'obtient en joignant les points d'intersection de deux cercles de même rayons et centrés sur C et O.

De même, on obtient B comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et de la médiatrice du segment $[C, A_0]$. On construit alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par B. On considère son intersection M avec la demi-droite $[0, A_0)$.

Les point A_1 et A_4 sont obtenus comme intersection du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la médiatrice du segment $[O, M]$.

Le point A_2 est obtenu comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et du cercle de centre A_1 et de rayon A_0A_1.

Le point A_3 est obtenu comme intersection de $\mathcal{C}_1$ et du cercle de centre A_4 et de rayon A_0A_1.



Exercice 3 :

On considère l'équation à coefficients complexes : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, et on note $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. (a) Pour tout complexe α, le coefficient de X^2 du polynôme $P(X+\alpha)$ est $3\alpha + a$. Ainsi, le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X) = P(X+\alpha)$ est nul si et seulement si $\boxed{\alpha = -a/3}$.

   (b) Par identification, on a

$$\boxed{p = b - a^2/3} \qquad \text{et} \qquad \boxed{q = 2a^3/27 - ab/3 + c}$$

   On s'est ainsi ramené à résoudre l'équation $(*)$: $z^3 + pz + q = 0$

2. Comme $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\left(u^2v + uv^2\right)$, l'équation devient

$$\boxed{z^3 + pz + q = u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0}$$

3. Le couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est l'unique solution à l'ordre près du système

$$\begin{cases} z = u + v \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

   si et seulement si le polynôme $(X-u)(X-v)$ est égal à $X^2 - zX - p/3$.
   Or, pour tout complexe z le polynôme $X^2 - zX - p/3$ admet deux racines complexes ce qui prouve $\boxed{\text{que le système a une unique solution (à l'ordre près)}}$.

4. Si z est solution de $(*)$, alors

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{et} \qquad {}^3v^3 = (-p/3)^3 = -p^3/27$$

   Par conséquent, $\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les racines du polynôme } X^2 + qX - p^3/27.}$

5. Réciproquement, si u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + q - p^3/27$ alors $u^3 + v^3 + q = 0$ mais la relation $u^3v^3 = -p^3/27$ n'implique pas forcément $3uv + p = 0$.
   Ainsi, si u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + qX - p^3/27$ **et** si $3uv + p = 0$ alors $z = u + v$ est solution de $(*)$.
   Si $p = q = 0$ alors 0 est la seule solution de $(*)$.
   Sinon, si δ est une racine carrée de $\Delta = q^2 + 4p^3/27$ alors les racines de $X^2 + qX - p^3/27$ sont $\dfrac{-q+\delta}{2}$ et $\dfrac{-q-\delta}{2}$. Notons r_1 une racine cubique de $\dfrac{-q+\delta}{2}$ et r_2 une racine cubique de $\dfrac{-q-\delta}{2}$

Ainsi, u^3 et v^3 sont racines du polynôme $X^2+qX-p^3/27$ si, et seulement si, elles appartiennent à l'ensemble :

$$\mathcal{S}' = \left\{r_1, jr_1, j^2r_1, r_2, jr_2, j^2r_2\right\}$$

Les solutions de $(*)$ sont donc les complexes de la forme $u+v$ avec $(u,v)\in\mathcal{S}'^2$ tel que $3uv+p=0$.

Or, si $r_1^3r_2^3=-p^3/27$ donc si $u\in\mathcal{S}$ alors $u^3\in\left\{r_1^3,r_2^3\right\}$ puis $\left(-\dfrac{p}{3u}\right)^3\in\left\{r_1^3,r_2^3\right\}$ i.e. $-\dfrac{p}{3u}\in\mathcal{S}'$

Par conséquent, les solutions de $(*)$ sont les complexes de la forme $u-\dfrac{p}{3u}$ avec $u\in\mathcal{S}'$. Il s'agit donc de l'ensemble :

$$\mathcal{S}=\left\{r_1-\frac{p}{3r_1},\ jr_1-\frac{pj^2}{3r_1},\ j^2r_1-\frac{pj}{3r_1},\ r_2-\frac{p}{3r_2},\ jr_2-\frac{pj^2}{3r_2},\ j^2r_2-\frac{pj}{3r_2}\right\}$$

Comme $r_1^3r_2^3=-p^3/27$, il existe $k\in[\![0,2]\!]$ tel que $r_1r_2=-\dfrac{p}{3}j^k$, on obtient

$$\mathcal{S}=\left\{r_1-\frac{p}{3r_1},\ jr_1-\frac{pj^2}{3r_1},\ j^2r_1-\frac{pj}{3r_1}\right\}$$

6. Si p et q sont des réels alors $\Delta=q^2+4p^3/27$ aussi.
   - Si $\Delta\geq 0$ alors les solutions de $(*)$ sont

$$\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\quad,\quad j\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+j^2\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

   et

$$j^2\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}+j\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

   La première racine est réelle et les deux dernières se réécrivent, grâce à la relation $1+j+j^2=0$,

$$j\left(\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\right)-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

   et

$$j^2\left(\left(\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}\right)-\left(\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}$$

   Elles sont donc réelles si et seulement si Δ est nul.
   - Si $\Delta<0$ et si on note $\dfrac{-q+i\sqrt{-\Delta}}{2}=\rho e^{i\theta}$ alors les solutions de $(*)$ sont

$$\sqrt[3]{\rho}\left(e^{i\theta/3}+e^{-i\theta/3}\right)\quad,\quad\sqrt[3]{\rho}\left(je^{i\theta/3}+j^2e^{-i\theta/3}\right)\quad\text{et}\quad\sqrt[3]{\rho}\left(j^2e^{i\theta/3}+je^{-i\theta/3}\right)$$

   qui sont toutes les trois réelles car respectivement égales à :

$$2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3)\quad,\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3+2\pi/3)\quad\text{et}\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3-2\pi/3)$$

   Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les solutions de } (*) \text{ sont toutes réelles si et seulement si } \Delta=q^2+4p^3/27\leq 0.}$$

   Si on fait l'étude des variations du polynôme Q, on obtient :
   - Si $p\geq 0$ alors l'application $x\mapsto Q(x)$ est strictement croissante donc Q admet au plus une racine réelle. Ainsi, toutes les racines de Q sont réelles si et seulement si Q a une racine triple ce qui est équivalent à $p=q=0$.
   - Si $p<0$ alors l'application $x\mapsto Q(x)$ est strictement croissante sur $]-\infty,-\sqrt{-p/3}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{-p/3},\sqrt{-p/3}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{-p/3},\infty[$.
     Comme $Q\left(-\sqrt{-p/3}\right)=\dfrac{-2p}{3}\sqrt{-p/3}+q$ et $Q\left(\sqrt{-p/3}\right)=\dfrac{2p}{3}\sqrt{-p/3}+q$, le polynôme Q a trois racines réelles si et seulement si

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-p/3}<q<\frac{-2p}{3}\sqrt{-p/3}$$

     i.e. si et seulement si $q^2<-4p^3/27$.

$$\boxed{\text{On retrouve que le polynôme } Q \text{ a trois racines réelles si et seulement si } \Delta\leq 0.}$$

7. Avec les notations précédentes, on a $p=q=-6$ donc $\Delta=4$. Les racines de Q sont donc

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\quad,\quad j\sqrt[3]{2}+j^2\sqrt[3]{4}\quad\text{et}\quad j^2\sqrt[3]{2}+j\sqrt[3]{4}$$

Les solutions de $x^3-3x^2-3x-1=0$ sont donc

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1\quad,\quad j\sqrt[3]{2}+j^2\sqrt[3]{4}+1\quad\text{et}\quad j^2\sqrt[3]{2}+j\sqrt[3]{4}+1$$