DM 11 - Correction

Problème 1 - Deux tiges reliées par des ressorts

1) On a le phénomène suivant

① Le barreau M_1 va bouger sous l'action du ressort

② le circuit voit son flux varier.

③ on observe un courant induit

④ on a une force de Laplace dans M_1 (qui va le faire ralentir) et dans M_2 (qui va le faire accélérer).

2) · Systèmes : ①, barreau M_1

②, barreau M_2

· Référentiel : terrestre supposé galiléen.

· Bilan des forces :

① → Poids et réaction du support qui se compensent (mouvement 1D).

→ Force de Laplace $\vec{F}_{L_1} = i a B \vec{u_x}$

→ Force de rappel $\vec{F}_{K_1} = -k x_1 \vec{u_x}$.

② → Poids et réaction du support qui se compensent.

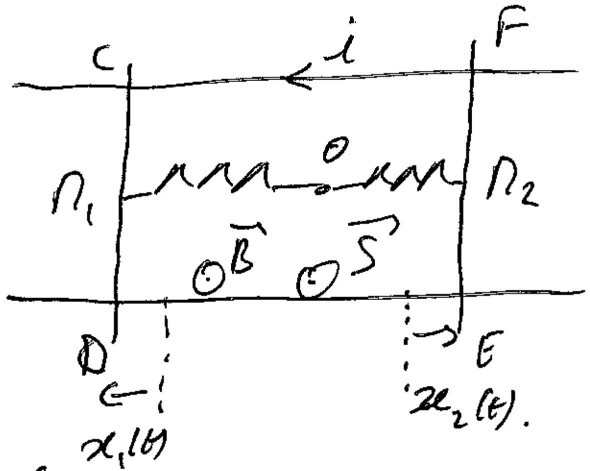
→ Force de Laplace $\vec{F}_{L_2} = -i a B \vec{u_x}$

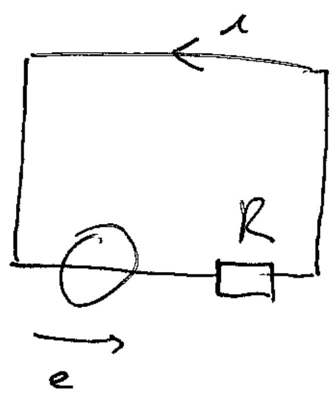
→ Force de rappel : $\vec{F}_{K_2} = -k x_2 \vec{u_x}$.

Le PFD projeté sur l'axe (Ox), on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = iaB - kx_1 & (1) \\ m\ddot{x}_2 = -iaB - kx_2 & (2) \end{cases}$$

On cherche alors les équations électriques :





La loi de Faraday s'applique, le circuit voit φ varier et il coupe des lignes de champ :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot(x_1 - x_2 + 2l_0)\cdot a\cdot\vec{n}$$
$$= B(x_1 - x_2 + 2l_0)a.$$

soit $e = Ba(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = Ri$ d'après la loi des mailles, soit

$$i = \frac{Ba}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

et on combine :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \dfrac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - kx_1 & (1) \\ m\ddot{x}_2 = \dfrac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - kx_1 & (2) \end{cases}$$

3) On détermine $\sigma(t)$ et $\delta(t)$:

① + ② : $\begin{cases} m\ddot{\sigma} + k\sigma = 0, \\ \sigma(0) = x_1(0) + x_2(0) = b \\ \dot{\sigma}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0. \end{cases}$

On détermine la solution $\sigma(t)$ en intégrant l'équation différentielle :

$$\sigma(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + G\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),\ A, G \in \mathbb{R}.$$

On identifie $\omega_\sigma = \sqrt{k/m}$,

et $\sigma(0) = A = b$, $\dot{\sigma}(0) = \sqrt{k/m}\,G = 0$,

$$\underline{\sigma(t) = b\cos(\omega_\sigma t)}$$

et ① − ② $\begin{cases} m\ddot{\delta} + \dfrac{2a^2B^2}{R}\dot{\delta} + k\delta = 0 \\ \delta(0) = b \\ \dot{\delta}(0) = 0. \end{cases}$

Ici, on remarque qu'on a une équation différentielle d'ordre 2, de pulsation ω_σ, mais amortie ! On effectue l'étude en régime permanent, ainsi $\delta(t) = 0$ dans ce cas, on ne conserve que la solution particulière. On en déduit alors que :

$$\delta(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0$$

$$x_1(t) = x_2(t),$$

ce qui nous donne :

$$\sigma(t) = 2x_1(t) = 2x_2(t),$$

soit $$x_1(t) = x_2(t) = \frac{b}{2}\cos(\omega_\sigma t).$$

---

4) On dresse le bilan de puissance :

→ électrique :

$$ei = -aBi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

→ mécaniques :

① : $$m\ddot{x}_1\dot{x}_1 = -kx_1\dot{x}_1 + iaB\dot{x}_1$$

$$m\ddot{x}_1\dot{x}_1 + kx_1\dot{x}_1 = iaB\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) = iaB\dot{x}_1.$$

② $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) = -iaB\dot{x}_2.$$

On peut alors sommer les trois relations,

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)\right)}_{①} = -ei = \underbrace{-Ri^2}_{②}.$$

① : Variation d'énergie mécanique du système {① + ②}.

② : Dissipation énergétique par effet Joule.

Cette dissipation est liée à l'atténuation du mode antisymétrique $\delta(t)$, mais l'énergie mécanique ne tendra pas vers 0, Problème 2 : Table à induction

1) On écrit la loi des mailles, dans ① et ②, sans négliger l'autoinduction.

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ 0 = R i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2) et en RSF,

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = R_1 \underline{i}_1 + jL_1\omega \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \\ 0 = R_2 \underline{i}_2 + jL_2\omega \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} \underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \\ 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1, \end{cases}$

donc $\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\dfrac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$.

3) On recherche alors $\underline{V}_1 = \underline{Z}_c \underline{I}_1$, donc :

$$\underline{v}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\underline{i}_1.$$

$$\underline{V}_1 = \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{I}_1$$

soit $\underline{Z}_c = R_1 + jL_1\omega + M^2\omega^2 / R_2 + jL_2\omega$.

4) On simplifie :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \simeq \frac{-jM\omega}{jL_2\omega} = -\frac{M}{L_2}, \quad \underline{Z}_c \simeq j\omega\left(L_1 + M^2/L_2\right)$$

On calcule alors :

$$\left|\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right| = -8,3 \quad , \quad |\underline{Z}_c| = 2,1\,\Omega.$$

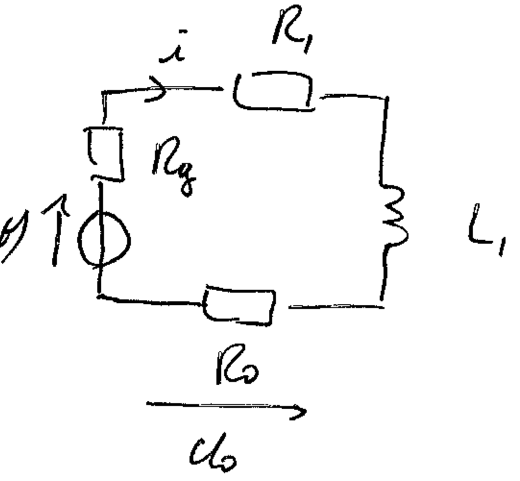
5) Si on éloigne la plaque, l'interaction diminue, Ω diminue, $\underline{Z}_c$ augmente, $i_1(t)$ diminue.

Problème 3 : Bobine de Ruhmkorff.

On traite les 3 expériences séparément.

Expérience 1 :

- Le circuit secondaire est ouvert, $i_2 = 0$,
- Le circuit primaire devient :



La loi des mailles donne :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_0 + R_g)\, i_1 = e.$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_1} = \frac{e}{L}, \quad \tau_1 = \frac{L_1}{R_1 + R_0 + R_g}.$$

On lit sur le graphique A, "$t=0$", l'instant de la perturbation à $110\,\mu s$, et on recherche τ_1 à l'aide de la méthode de notre choix, soit $\tau_1 = 140 - 110 = 30\,\mu s$.

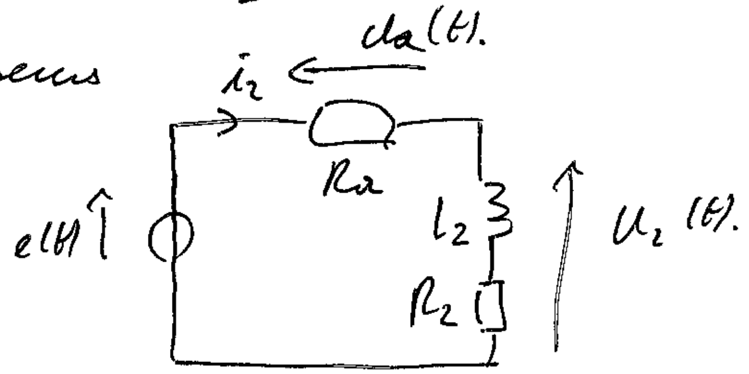
AN : $\underline{L_1 = \tau_1 (R_0 + R_g + R_1) = 4,5 \text{ mH}}$.

C'est un ordre de grandeur raisonnable.

<u>Expérience 2 :</u>

Le primaire est ouvert, $i_1 = 0$, et le secondaire est étudié en RSF.

On écrit les ponts diviseurs pour :



- la bobine :

$$\underline{u_2} = \frac{jL_2\omega + R_2}{R_a + jL_2\omega + R_2}\,\underline{e}$$

- la résistance

$$\underline{u_a} = \frac{R_a}{R_a + jL_2\omega + R_2}\,\underline{e} \quad , \quad \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_a}} = \frac{jL_2\omega + R_2}{R_a}.$$

On a accès facilement au gain, alors :

$$\frac{U_2}{U_a} = \left|\frac{\underline{u_2}}{\underline{u_a}}\right| = \frac{\sqrt{L^2\omega^2 + R_2^2}}{R_a} \quad , \quad L_2 = \frac{1}{\omega}\sqrt{R_a^2\frac{U_2^2}{U_a^2} - R_2^2}.$$

On relève :

→ $T = 0,05$ s, $\omega = 126 \text{ rad.s}^{-1}$

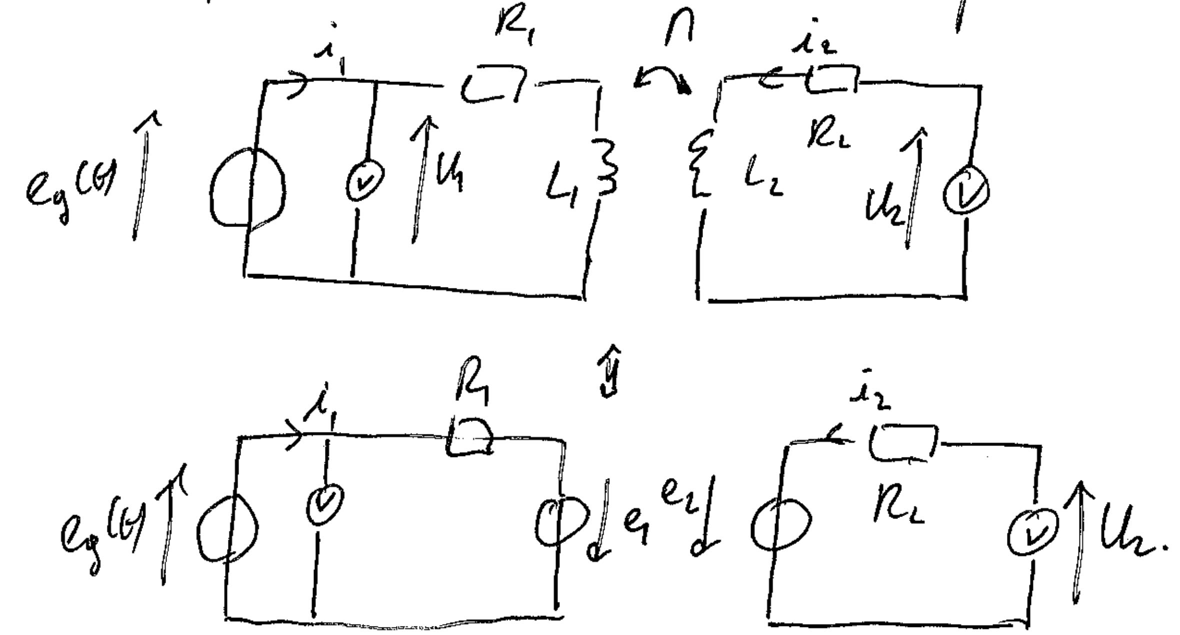
→ $U_2 = 4,9$ V (c'est la plus grande, sinon L sera complexe !

→ $U_a = 1,9$ V

soit $\underline{L_2 = 190 \text{ H}}$. C'est une valeur qui commence à être importante.

Expérience 3 :

On représente le circuit équivalent :



La loi des mailles impose :

$$\begin{cases} e_g = R_1 i_1 - \dfrac{d\varphi_1}{dt} = u_1 , & \varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ u_2 = R_2 i_2 - \dfrac{d\varphi_2}{dt} , & \varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

or, $i_2 \simeq 0$, car le voltmètre a une grande impédance, alors :

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} \\ u_2 = M \dfrac{di_1}{dt} . \end{cases} \xRightarrow{RSF} \begin{cases} \underline{u}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 \\ \underline{u}_2 = jM\omega \underline{i}_1 . \end{cases}$$

Or, on a accès au gain en dB.

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{jM\omega}{R_1 + jL_1\omega} , \quad G = \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{M\omega}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2}} ,$$

$$G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \left(M\omega \Big/ \sqrt{R_1^2 + L_1^2\omega^2} \right)$$

A haute fréquence, G_{dB} est une constante, G_2 dB, ce qui implique $L_1\omega >> R_2$.
On en déduit alors :

$$G_{dB}^{HF} = 20 \log \frac{M}{L_1}, \quad \underline{M = 0,6\ H}$$

Problème 4 : Glace.

---

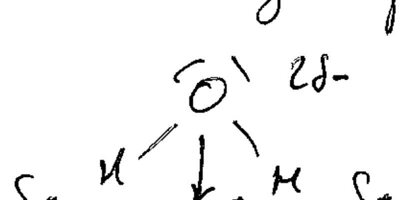
1) a) H : $1s^1$ $\quad$ O : $1s^2\,2s^2\,2p^4$,
d'après les règles de Klechkowski, ~~de~~ Hund et du principe de Pauli.

b) H_2O :

c) La liaison OH est polarisée car l'électronégativité de H et celle de O ne sont pas identiques.

2) a) Les doublets non liants sont plus proche de l'atome central, sont plus volumineux, et repoussent davantage les autres groupements, d'où l'angle plus petit que celui attendu.

b)



La molécule est symétrique.

c) On rappelle : $\|\vec{\mu}\| = \delta q d$, d la distance entre les barycentres des charges ⊕ et ⊖.

On a alors :

$d = l \cos\theta,$

$= 58{,}7 \cdot 10^{-12}\ m,$

et $\delta q = \dfrac{\mu}{d} = 1{,}0 \cdot 10^{-19}\ C = 0{,}63\ e.$

On a alors une charge partielle de $-0{,}63e$ portée par O, soit une charge partielle de $+0{,}32\ e$ portée par chaque H.

d) L'eau est un solvant protique polaire, il peut donner des protons (acide) et peut dissocier des paires d'ion ou ioniser des liaisons.

3) a) Les interactions sont de type dipôle-dipôle, ceux-ci étant permanents ou induits.

b) La liaison H est une liaison a majorité électrostatique.

c) $E^{liaison}_{cov} \sim 100\ kJ.mol^{-1}$

$E^{liaison}_{H} \sim 10\ kJ.mol^{-1}$

$E^{liaison}_{vdW} \sim 1\ kJ.mol^{-1}$

4) On coupe un petit cube d'arête $a/2$, et on a tangence des atomes suivant la diagonale de ce cube, une liaison étant covalente, l'autre H.

On écrit alors :

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} = 2d_1 + 2d_2 ,$$

soit $\underline{a = \dfrac{4(d_1 + d_2)}{\sqrt{3}} = 637 \text{ pm}}$

C'est assez important par rapport aux autres cristaux étudiés.