*Lycée Buffon . MP**

DM 9

Traiter au minimun les parties **I,II,III**. Le sujet est de difficulté progressive.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$.
L'objectif du problème est d'étudier l'ensemble noté$\sqrt{A}$ des matrices B telles que $B^2 = A$

I : Un exemple

Dans cette partie, A est la matrice $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que A est une matrice diagonalisable. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $P^{-1}AP = D$.

2. En déduire 4 matrices B telles que $B^2 = A$.

3. (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I.
   (b) Soit a, b deux nombres complexes. On pose $B = aI + bA$. Déterminer les conditions sur a, b pour que $B^2 = A$.
   (c) Trouver 4 matrices B telles que $B^2 = A$. Les comparer à celles trouvées précédemment.

II Le cas des matrices diagonalisable.

Dans cette partie $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

1. Montrer que $\sqrt{A}$ n'est pas l'ensemble vide.

   On se propose dans les questions qui suivent d'étudier le nombre d'éléments de $\sqrt{A}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Justifier qu'il existe une infinité de matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = \lambda I_n$.

3. On suppose que A possède une valeur propre multiple. Montrer en utilisant la question précédente que $\sqrt{A}$ est infini. (on pourra commence par le cas ou A est diagonale).

   Dans la suite, on note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et $E_1, ..E_p$ les espaces propres . Soit Q_i le projecteur sur E_i parallèlement à la somme des autres espaces propres.

4. (a) Vérifier que $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Q_i$ et calculer les produits $Q_i Q_j$.
   (b) En déduire que pour tout polynôme P la matrice $P(A)$ est une combinaison linéaire de $Q_1, \dots, Q_p$
   (c) Déterminer le polynôme minimal de A et en déduire la dimension de l'algèbre $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A.
   (d) Conclure quque $\mathbb{C}[A]$ est égal à vect$< Q_1, ..., Q_p >$.
   (e) Soit $B = \sum_{1}^{p} b_i Q_i$ un élément de $\mathbb{C}[A]$. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que $B \in \sqrt{A}$.
   (f) Montrer que $\mathbb{C}[A] \cap \sqrt{A}$ est fini, et préciser son cardinal en fonction de p et selon que A est inversible ou non.

5. Dans cette question, on suppose que les valeurs propres de A sont simples.
   (a) Montrer que $\mathbb{C}[A]$ est de dimension n
   (b) i. Montrer que $MA = AM$ si et seulement si les espaces propres de A sont stables par M.
       ii. En déduire que toute matrice qui commute avec A est un un élément de $\mathbb{C}[A]$
   (c) Conclure que $\sqrt{A}$ est un ensemble fini.
6. Exemples : Dénombrer les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (il n'est pas demandé de déterminer ces matrices)

III Le cas où A n'a qu'une valeur propre.

1. Soit A une matrice nilpotente. On suppose que son indice de nilpotence k vérifie $k > \dfrac{n+1}{2}$.
   Soit B telle que $B^2 = A$. Calculer successivement B^{2k}, B^n, puis A^{k-1}.

   A quoi est égal $\sqrt{A}$?

2. Soit A une matrice n'ayant qu'une valeur propre $a \neq 0$.
   (a) Montrer que la matrice $N = A - aI_n$ est nilpotente.
   (b) Justifier l'existence d'un polynôme P tel que X^n divise $P^2 + a - X$
   (c) En utilisant P, construire une matrice B telle que $B^2 = A$.

IV Le cas général

Dans cette partie, on identifie les matrices aux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qu'elles représentent canoniquement.
B désigne un élément de $\sqrt{A}$.
On note $(\lambda_1, .., \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives $(m_1, .., m_p)$.
On note $E_k = \ker((A - \lambda_k I)^{m_k}$.

1. Montrer que la somme directe des E_k est égale à $\mathbb{C}^n$. Quelle est la dimension de E_k ?
2. Montrer que E_k est stable par A et B. On note A_k et B_k les endomorphismes induits.
   Montrer que $B_k \in \sqrt{A_k}$.
3. Réciproquement, si on se donne une famille d'endomorphismes $B_k, k = 1..p$ tels que $B_k \in \sqrt{A_k}$ pour tout k, construire un élément B de $\sqrt{A}$.
4. Déterminer le spectre de A_k.
5. Des questions précédentes , déduire que si A est inversible, alors $\sqrt{A}$ est non vide.

V. Le cas réel

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On appelle toujours $\sqrt{A}$ l'ensemble des matrices B **réelles** dont le carré vaut A (les questions de cette partie sont volontairement non détaillées, et donc plus difficiles)

1. Montrer que si $\sqrt{A}$ est non vide, alors les valeurs propres réelles négatives de A sont toutes de multiplicité paire.
2. Montrer que si A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ alors la condition précédente est suffisante.
3. Déterminer toutes les racines carrées réelles de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$