TD35 - Probabilités

Ex 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On considère $\Omega = [\![1,6]\!]^n$

On pose : A : "le joueur obtient un 6"

On considère P, la probabilité uniforme

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$P_n(A) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P_n(\bar{A}) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant P_n(\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow -\ln(2) \geqslant n \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

$$\Leftrightarrow n \geqslant -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 3{,}80$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\Omega = [\![1,6]\!]^n$

A : "le joueur obtient un double 6"

On considère P_-.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$P(A) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(\bar{A}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P_n(\bar{A}) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(n \ln\left(\frac{35}{36}\right)\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{35}{36}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \ln \nearrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \simeq 24,6$$

Il faut 25 lancers.

Ex 2 :

1) On considère $\Omega = \left\{ (i,j) \text{ où } \begin{cases} (i,j) \in [\![0,6]\!] \\ j \leqslant i \end{cases} \right\}$

Muni de la proba uniforme

On pose $S : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ (i,j) \mapsto i+j \end{array}$

Cherchons la loi de S

Soit $k \in [\![0,12]\!]$

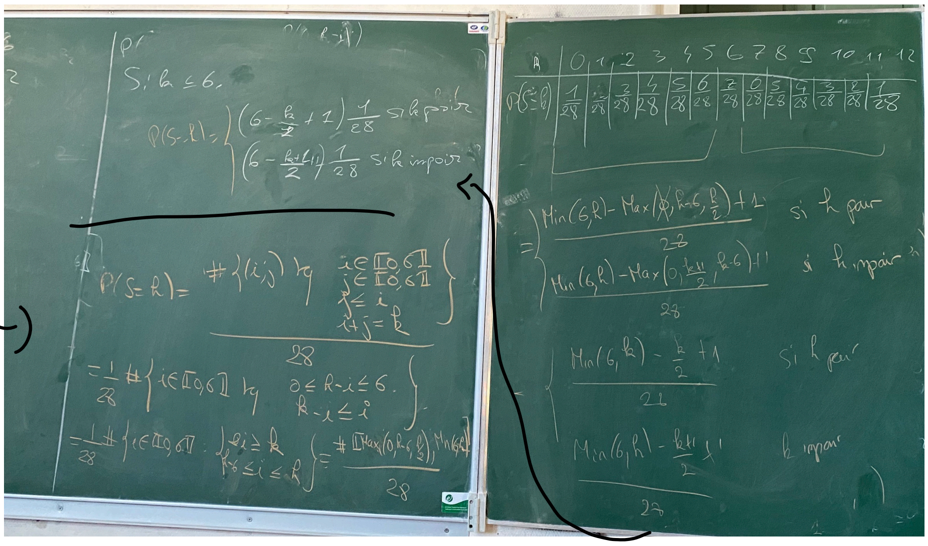
$$P(S=k) = \sum_{i=\text{Min}(0,k-6)}^{\text{Min}(6,k)} P(\{(i,k-i)\})$$

$$= \frac{1}{28}\left(\text{Min}(6,k) - \text{Max}(0,k-6) + 1\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{28}(k+1) & \text{si } k \leqslant 6 \\ \frac{1}{28}(6-(k-6)+1) = \frac{13-k}{28} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant 6 \\ 0 \leqslant k-i \leqslant 6 \\ k-i \leqslant i \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant 6 \\ k-6 \leqslant i \leqslant k \\ k \leqslant 2i \end{cases} \iff \text{Max}\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, 0, k-6\right) \leqslant i \leqslant \text{Min}(6,k)$$

$$P(S=k) = \frac{\#\left\{(i,j)\in [\![0,6]\!]^2 \text{ tq } \begin{cases} i \in [\![0,6]\!] \\ j \in [\![0,6]\!] \\ j < i \\ i+j=k \end{cases}\right\}}{28}$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

NON $\frac{7}{4}$ total

---

28 dominos

On en pioche 2

$\rightarrow \binom{28}{2}$ façons équiprobables

A = " piocher 2 dominos de même sommes

$$A = \bigsqcup_{k=0}^{12} A_k$$

A_k : " piocher 2 dominos dont la somme vaut k "

L'union étant disjointe proba $\dfrac{\binom{N_k}{2}}{\binom{28}{2}} = \dfrac{N_k(N_k-1)}{28\times 27}$

$\binom{N_k}{2}$ ← cas favo

$\binom{28}{2}$ ← tot

$$P(A) = \sum_{k=0}^{12} \frac{N_k(N_k - 1)}{28 \times 27}$$

Soit $k \in [\![0, 12]\!]$, N_k ?

$$N_k = \#\left\{ (i,j) \in [\![1, 6]\!]^2 \text{ tq } \begin{cases} i + j = k \\ i \leq j \end{cases} \right.$$

$$= \#\left\{ (i, k-i) \text{ avec } \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 6 \\ 0 \leq k - i \leq 6 \\ i \leq k - i \end{array} \right\}$$

$$= \#\left\{ i \in \mathbb{N} \text{ tq } \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 6 \\ k-6 \leq i \leq k \\ 2i \leq k \end{array} \right\}$$

$$= \#\left\{ i \in [\![\mathrm{Max}(0, k-6), \mathrm{Min}(6, k)]\!] : 2i \leq k \right\}$$

$$= \begin{cases} \#[\![\mathrm{Max}(0, k-6), \frac{k}{2}]\!] \text{ si } k \text{ pair} \\ \#[\![\mathrm{Max}(0, k-6), \frac{k}{2}]\!] \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{k}{2} - \mathrm{Max}(0, k-6) + 1 & \text{si pair} \\ \frac{k-1}{2} - \mathrm{Max}(0, k-6) + 1 & \text{si impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{k}{2} + 1 & \text{si } k \text{ pair et } k \leq k \\ \frac{k}{2} - (k-6) + 1 = \frac{14-k}{2} & \text{si pair si } k > 6 \\ \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} & \text{si impair et } k \leq 6 \\ \frac{k-1}{2} - (k-6) + 1 = \frac{13-k}{2} & \text{si impair et } k > 6 \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_k	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1

$$P(A) = \frac{1}{28 \times 27} \sum_{k=0}^{12} N_k (N_k - 1)$$

$$= \frac{1}{28 \times 27} \times (\underbrace{4 \times 2}_{\substack{k=2 \\ k=3 \\ k=9 \\ k=10}} + 4 \times 6 + 12)$$

2) B : " piocher 2 dominos ayant un en commun "

$B = \cup B_k$

B_k : " piocher 2 dominos ayant k en commun "

L'union est disjointe

donc $P(B) = \sum_{k=0}^{6} P(B_k)$

$= \frac{M_k(M_k - 1)}{2}$ où M_k = Nb de dominos ayant le numéro k

$= 7$

Ex 3 :

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(J=i)}_{\frac{1}{n}} \underbrace{P(C \mid J=i)}_{\begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } i \in \{1, n\} \\ \frac{2}{n-1} & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + (n-2) \times \frac{1}{n} \times \frac{2}{n-1}$$

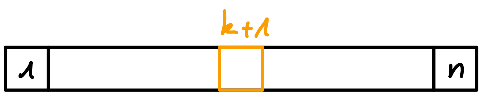
$$= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

Ex : si $n = 2$ $P(C) = 1$

si $n = 3$ $P(C) = \frac{2}{3}$

$P(C) = \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Cohérent

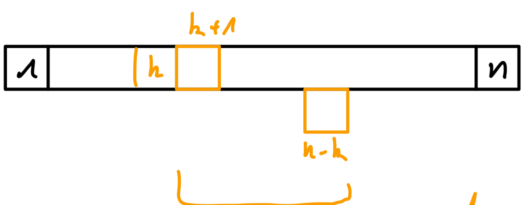
2)



$$P(D=k) = \sum_{i=1}^{n} P(J=i)\, P(D=k \mid J=i)$$

Si $k+1 > n$ alors $P(D=k) = 0$

Supp $k \leqslant n-1$



2 chances gauche et droite

$$P(D=k \mid J=i) = \begin{cases} \frac{2}{n-1} & \text{si } i \in [\![k+1, n-k]\!] \\ \frac{1}{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

* Si $k+1 \leq n-k$

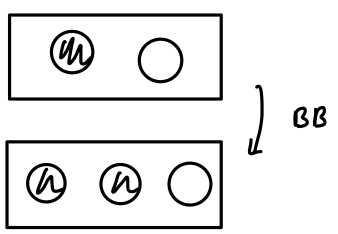
$$P(D=k) = \big((n-k)-k\big) \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n} + 2k \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(n-2k)\times 2 + 2k}{(n-1)\,n}$$

$$= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

Rq : $k = 1$

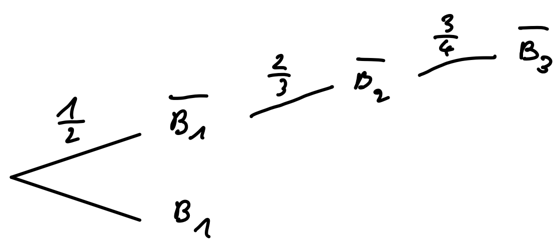
Ex 4 :



B_k "la $k^{\text{è}}$ boule tirée est blanche"

"1re BB est tirée au $k^{\text{è}}$ tirage"

$= \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k = A$



$$P(A) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) \times P(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \times \dots P(B_k \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k(k-1)}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(B_2) = P(B_1)\, P(B_2 \mid B_1) + P(\overline{B_1}) \times P(B_2 \mid \overline{B_1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_3) = \frac{1}{2}$$