Fonctions usuelles

I. Généralités sur les fonctions

1. Domaine de définition et graphe

Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles permet, à tout élément x d'une partie de $\mathbb{R}$, d'associer un unique nombre réel alors noté $f(x)$.

Définition. *L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est défini s'appelle le domaine de définition de f. Si on le note D_f, alors on écrit*

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x).$$

Remarque. *Si l'on doit prouver que la fonction $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ est bien définie, alors il faut vérifier que pour tout $x \in D$, le réel $f(x)$ est bien défini, c'est-à-dire que $D \subset D_f$.*

Remarque. *Si le couple (x, y) vérifie $y = f(x)$ on dit alors que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f.*

Définition. *Soit $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.*
On appelle graphe de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in D\}$
On dit encore que Γ_f est la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exercice. *(*) Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble de définition et les graphes des fonctions suivantes en fonctions de ceux de f.*

- $x \mapsto f(-x)$
- $x \mapsto f(x) + a$
- $x \mapsto a - f(x)$
- $x \mapsto f(2x)$
- $x \mapsto -f(x)$
- $x \mapsto f(x + a)$
- $x \mapsto f(a - x)$
- $x \mapsto 2f(x)$

Remarque. *(*)*
- *Pour montrer que Γ_f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$, on doit prouver que $\forall x \in D_f,\ 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.*
- *Pour montrer que Γ_f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b), on doit prouver que $\forall x \in D_f,\ 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.*

Définition. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ où D est symétrique par rapport à O.*
- *f est paire si $\forall \in D,\ f(x) = f(-x)$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$.
- *f est impaire si $\forall \in D,\ f(x) = -f(-x)$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Définition. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
- *Le réel T est une période de f (ou encore f est T-périodique) si :*
  - *d'une part $\forall x \in D,\ x + T \in D$ et $x - T \in D$,*
  - *d'autre part $\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x)$.*
- *f est périodique s'il existe un réel T non nul qui soit une période de f.*

Remarque. *Si f est T-périodique, alors f est $-T$-périodique.*
Si f est T-périodique et T'-périodique, alors f est $T+T'$-périodique.
Ainsi, Si f est T-périodique, alors f est kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.*
- *Γ_f est invariant par toute translation de vecteur $k\,T\,\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Si $a \in \mathbb{R}$ est un réel donné, le graphe de f est la réunion des images de $\Gamma_{f_{|D\cap[a,a+T[}}$ par toutes les translations de vecteur $k\,T\,\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

2. Opérations sur les fonctions

On définit la somme, le produit et la composée.

Définition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On définit :*

$$f^+ : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{et} \quad f^- : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.*

3. Propriétés des fonctions

Définition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
La fonction f est dite croissante si $\forall (x,x') \in D^2,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
La fonction f est dite décroissante si $\forall (x,x') \in D^2,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.

Remarque. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
La fonction f est croissante si, et seulement si, $-f$ est décroissante.
La fonction f est croissante si, et seulement si, $\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
Si $f : D \to \mathbb{R}$ est croissante, elle ne vérifie pas forcément $\forall (x,x') \in D^2,\ x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x')$

Définition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
La fonction f est dite strictement croissante si $\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.
La fonction f est dite strictement décroissante si $\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

Remarque. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
La fonction f est strictement croissante si, et seulement si, $-f$ est strictement décroissante.
La fonction f est strictement croissante si, et seulement si, $\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(x')$

Exercice. *Que dire de la multiplication d'une fonction croissante par un scalaire ?*
Que dire de l'inverse d'une fonction croissante ?
Que dire de la somme, du produit, de la composée de deux fonctions croissantes ?

Définition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
On dit que f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leq M$.
On dit que f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ m \leq f(x)$.
On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée

Remarque. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$.*
La fonction f est majorée si, et seulement si, $-f$ est minorée.
La fonction f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) < M$.

Proposition. *Une fonction f est bornée si, et seulement si, la fonction $|f|$ est majorée.*

Exercice. *Que dire de la multiplication d'une fonction majorée par un scalaire ?*
Que dire de l'inverse d'une fonction majorée ?
Que dire de la somme, du produit, de la composée de deux fonctions majorées ?

II. Rappels et compléments sur la continuité et la dérivation

Tous les résultats de cette partie sont admis mais à connaître
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Définitions

Les définitions qui suivent sont connues mais seront reprises ultérieurement lorsque la notion de limite aura été définie proprement.

Définition. *La fonction f est continue en $a \in D$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Remarque. *Le caractère continue d'une fonction en a est une propriété locale : si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a, alors f est continue en a si et seulement si g l'est.*

Définition. *On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.*
L'ensemble des fonctions continues sur D est noté $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.

Définition. *La fonction f est dérivable en $a \in D$ si son taux d'accroissement en a :*

$$\tau_a : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Remarque. *Graphiquement, le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ est égal à la pente de la droite qui joint les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$. Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet en a une tangente d'équation*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Proposition. *Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Remarque. *Le caractère dérivable d'une fonction en a est une propriété locale : si f et g sont deux fonctions qui coïncident au voisinage de a, alors f est dérivable en a si et seulement si g l'est.*

Définition. *On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, l'application*

$$I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

est appelée fonction dérivée de f sur I et notée f'.
L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

2. Propriétés

Proposition. *Si f et g sont continues en a, alors la fonction $f + g$ est continue en a*
Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.

Proposition. *Si f est continue en a, alors pour tout réel a, λf est continue en a.*
Si f est dérivable en a, alors pour tout réel a, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

Proposition. *Si f et g sont continues en a, alors la fonction fg est continue en a*
Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Proposition. *Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est continue en a.*
Si f est dérivable en aet si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Corollaire. *Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est continue en a.*
Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

Proposition. *Soient f une fonction définie sur D et g une fonction définie sur un D tel que $f(D) \subset D'$.*
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\,(g' \circ f)(a)$$

3. Variations

Définition. *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme*

— $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
— $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
— $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,
— $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
— $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
— $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
— $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,
— $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

où a et b sont deux réels vérifiant $a \leq b$.

Théorème. *Si f est une fonction dérivable sur un* **intervalle** *I et si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.*

Théorème. *Si f est une fonction dérivable sur un* **intervalle** *I et si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d points, alors la fonction f est strictement croissante.*

Proposition.
— *Si f est dérivable sur un* **intervalle** *I de dérivée nulle sur I, alors f est constante sur I.*
— *Si f est dérivable sur un* **intervalle** *I de dérivée négative sur I, alors f est décroissante sur I.*
— *Si f est dérivable sur un* **intervalle** *I de dérivée strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarque. *Il est nécessaire que I soit un intervalle comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ mais pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$*
De même, une fonction de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^\star$ n'est pas nécessairement constante. En revanche, elle est constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et constante sur $\mathbb{R}^{-\star}$.

4. Résultat sur les réciproques

Proposition. *(*)*
— *Si f est strictement monotone sur D, alors elle est injective sur D.*
— *Si f est une injection de D dans $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de D dans $f(D)$.*

— *Si f est injective et monotone sur D, alors elle est strictement monotone sur D.*
— *Si f est croissante sur D et réalise une bijection de D dans $f(D)$, alors f^{-1} est strictement croissante sur $f(D)$.*
— *Si f est impaire sur D et réalise une bijection de D dans $f(D)$, alors f^{-1} est impaire.*
— *Si f est réalise une bijection de D dans $f(D)$, alors les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Théorème. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.*
Sa réciproque

$$f^{-1} \,:\, f(I) \to I,\ y \mapsto l'unique\ x \in I\ tel\ que\ y = f(x)$$

est continue et strictement croissante.

Remarque.
— *C'est l'hypothèse de continuité de f qui assure que l'image de l'intervalle I par f soit un intervalle.*
— *Si $I = [a, b]$, alors $J = [f(a), f(b)]$; si $I = [a, b[$, alors $J = [f(a), \lim_{x\to b-} f(x)[$; si $I =]-\infty, b]$, alors $J = [\lim_{x\to-\infty} f(x), f(b)]$,...*

Remarque. *On peut remplacer f par une application strictement décroissante et obtenir le même résultat. La réciproque est alors continue et strictement décroissante.*

Théorème. *Soit f dérivable sur un intervalle I et établissant une bijection de I dans $f(I)$.*
La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $a \in f(I)$ si, et seulement si, $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$.
Dans ce cas,

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

5. Plan d'étude d'une fonction

— Domaine de définition
— Étude des propriétés permettant la réduction du domaine d'étude : parité, imparité, périodicité
— Tableau de variations.
— asymptotes :
Si f a une limite finie en $\pm\infty$, alors la droite d'équation $y = b$ est appelée asymptote horizontale à la courbe.
Si f a une limite infinie en un point a, alors la droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale à la courbe.
— Tracé

III. Fonctions usuelles

1. Fonctions circulaires réciproques

Définition. *La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On définit alors la fonction arccosinus comme sa bijection réciproque. Elle est donc strictement décroissante.*

Proposition. *(*) On a $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$, mais on a $\arccos(\cos x) = x$ si et seulement si $x \in [0, \pi]$ et pas pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice. *(*) Calculer $\arccos(\cos(2\pi))$, $\arccos(\cos(-\pi/3))$.*
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos x)$

Proposition. *(*) La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Définition. *La fonction sinus réalise une bijection strictement croissante de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $[-1,1]$. *On définit alors la fonction arcsinus comme sa bijection réciproque. Elle est donc strictement croissante et impaire.*

Proposition. *(*) On a* $\sin(\arcsin x) = x$ *pour tout* $x \in [-1,1]$, *mais on a* $\arcsin(\sin x) = x$ *si et seulement si* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ *et pas pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice. *(*) Calculer* $\arcsin(\sin(\pi))$, $\arcsin(\sin(-3\pi/4))$.
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$

Proposition. *(*) La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition. *(*) On a :* $\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$

Définition. *La fonction tangente réalise une bijection strictement croissante de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $\mathbb{R}$. *On définit alors la fonction arctangente comme sa bijection réciproque. Elle est donc strictement croissante et impaire.*

Proposition. *On a* $\tan \arctan x = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *mais on a* $\arctan \tan x = x$ *si et seulement si* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *et pas pour tout* $x \in D_{\tan}$.

Exercice. *(*) Calculer* $\arctan \tan(\pi)$, $\arctan \tan(-3\pi/4)$.
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arctan \tan x$

Proposition. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice. *(*) Calculer* $\arctan \tan(\pi)$, $\arctan \tan(-3\pi/4)$.
Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arctan \tan x$

Exercice. *(*) Tracer le graphe de la fonction* $x \mapsto \arctan x + \arctan(1/x)$

2. Fonction logarithme

Pour définir la fonction logarithme on admet la proposition suivante.

Définition. *Soit* f *une fonction définie sur* D. *On dit que* F *est une primitive de* f *sur* D *si* F *est dérivable sur* D *et si* $\forall x \in D$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème. *(admis) Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *et* $a \in I$. *La fonction* $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est une primitive de* f.

Corollaire. *Si* f *est une fonction continue sur un intervalle* I, *alors elle admet une primitive sur* I.

Remarque. *Dans ce cas,* f *admet une infinité de primitives sur* I *qui diffèrent toutes d'une constante. En effet, la différence entre deux primitives de* f *est de dérivée nulle.*

Corollaire. *(*) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. Il existe une unique primitive F de f sur I s'annulant en a ; il s'agit de $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$*

Définition. *On définit la fonction logarithme népérien notée ln comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Autrement dit,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Proposition. *(*) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \\ \ln(x^n) &= n\ln(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Proposition. *(*) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on a*

$$\ln(x) \leq x - 1$$

Remarque. *Ce résultat est équivalent à $\ln(1 + t) \leq t$ pour tout réel $t > 1$.*

Proposition. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc la fonction logarithme népérien réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque. *Pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on admet le résultat suivant*
Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors elle admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée. Dans le cas contraire, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

On construit de même une proposition sur les fonctions décroissantes et concernant les limites en $-\infty$.

3. Fonction exponentielle

Définition. *On définit la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$ la fonction réciproque du logarithme népérien. Elle est donc strictement croissante. L'image d'un réel x est noté e^x ou $\exp(x)$.*

Corollaire. *On en déduit les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Proposition. *(*) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction exponentielle.*

Proposition. *(*) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x e^y \\ e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ e^x &\geq 1 + x \end{aligned} \tag{2}$$

4. Fonction puissance

Proposition. *Pour tout entier naturel n, la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de même parité que n.*

Proposition. *(*) Pour tout entier naturel n, la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.*

Proposition. *(*) Si n est un entier impair, alors la fonction puissance $x \mapsto x^n$ établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
On peut donc définir sur $\mathbb{R}$ sa réciproque que l'on note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ou $x \mapsto x^{1/n}$. Elle est impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{x^{1/n}}{nx}\cdot$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(x)\right) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(-x)\right) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Proposition. *Si n est un entier impair, alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(xy)^{1/n} = x^{1/n}y^{1/n}$.*

Proposition. *(*) Si n est un entier pair non nul, alors la fonction puissance $x \mapsto x^n$ établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.*
On peut donc définir sur $\mathbb{R}^+$ sa réciproque que l'on note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ou $x \mapsto x^{1/n}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{x^{1/n}}{nx}\cdot$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(x)\right) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Proposition. *Si n est un entier pair non nul, alors : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $(xy)^{1/n} = x^{1/n}y^{1/n}$.*

Remarque. *Si n est un entier impair, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x^{1/n}\right)^n = x$ et $(x^n)^{1/n} = x$.*
Si n est un entier pair, alors :
- *l'expression $\left(x^{1/n}\right)^n$ n'a de sens que si $x \in \mathbb{R}^+$ et dans ce cas $\left(x^{1/n}\right)^n = x$*
- *l'expression $(x^n)^{1/n}$ a un sens pour tout réel x et $(x^n)^{1/n} = |x|$.*

Proposition. *Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et de même parité que n. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$.*

Proposition. *(*) Si n est un entier impair, alors la fonction puissance $x \mapsto x^{-n}$ établit une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.*
On peut donc définir sur $\mathbb{R}^*$ sa réciproque que l'on note $x \mapsto x^{-1/n}$. Elle est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{x^{-1/n}}{nx}\cdot$
De plus, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}}$ et $(xy)^{-1/n} = x^{-1/n}y^{-1/n}$.

Proposition. *(*) Si n est un entier pair, alors la fonction puissance $x \mapsto x^{-n}$ établit une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On peut donc définir sur $\mathbb{R}^{+*}$ sa réciproque que l'on note $x \mapsto x^{-1/n}$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{x^{-1/n}}{nx}$.*
De plus, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}}$ et $(xy)^{-1/n} = x^{-1/n}y^{-1/n}$.

Remarque. *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $x^n = e^{n\ln(x)}$ et $x^{1/n} = e^{\ln(x)/n}$. Cette propriété va nous permettre de généraliser la notion de puissance.*

Définition. *Soit a un réel. On définit la fonction puissance a sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f_a : x \mapsto \exp(a\ln(x))$. L'image de tout réel strictement positif x est notée x^a.*

On remarque que si $a \in \mathbb{Z}^*$ ou $1/a \in \mathbb{Z}$, alors la fonction puissance f_a coïncide **sur** $\mathbb{R}^{+*}$ avec la définition précédente.

Proposition. *(*) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tous réels x et y **strictement positifs**, on a :*

$$\begin{aligned} x^{a+b} &= x^a x^b \\ (xy)^a &= x^a y^a \\ (x^a)^b &= x^{ab} \\ x^{-a} &= \frac{1}{x^a} \end{aligned} \tag{3}$$

Proposition. *(*) Pour tout réel a, la fonction puissance $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto ax^{a-1}$.*
Elle est donc strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Proposition. *(*) On a les limites suivantes :*

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} x^a = 0 && \text{si} \quad a > 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty && \text{si} \quad a < 0 \\ &\lim_{x\to +\infty} x^a = +\infty && \text{si} \quad a > 0 \\ &\lim_{x\to +\infty} x^a = 0 && \text{si} \quad a < 0 \end{aligned}$$

La fonction puissance réalise une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans lui-même. Sa réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/a}$.

Remarque. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur D telles que v soit à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors la fonction $v^u : x \mapsto v(x)^{u(x)}$ est dérivable sur D de dérivée*

$$x \mapsto \left(u'(x)\ln(v(x)) + u(x)\frac{v'(x)}{v(x)}\right) v(x)^{u(x)}$$

5. Fonctions hyperboliques

Définition. *On définit les fonction cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$ comme les parties paires et impaires de la fonction exponentielle, i.e. :*

$$\mathrm{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Définition. *On définit la fonction tangente hyperbolique sur $\mathbb{R}$ par*

$$\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$$

Proposition. *(*) La fonction cosinus hyperbolique est dérivable et a pour dérivée la fonction sinus hyperbolique. La fonction cosinus hyperbolique est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch} x \geq 1$.*

Proposition. *(*) La fonction sinus hyperbolique est dérivable et a pour dérivée la fonction cosinus hyperbolique. La fonction sinus hyperbolique est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Proposition. *(*) La fonction tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

La fonction tangente hyperbolique est impaire et strictement croissante.

Proposition. *(*) Soient x et y deux nombres réels, alors on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x &= 1 \\ \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y \\ \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y \end{aligned} \tag{4}$$

Proposition. *Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques admettent les limites suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}x = +\infty & \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}x = +\infty & \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}x = -1 & \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}x = 1 \end{array}$$

6. Croissances comparées

Proposition. *(*) On a les limites suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x}{x} = 0 & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0 & \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \end{array}$$

Proposition. *(*) Soient α et β des réels strictement positifs, alors on a :*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta \mid \ln(x) \mid^\alpha = 0 & \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0 \end{array}$$

IV. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition. *Une fonction à valeurs complexes est dite dérivable en un point lorsque ses parties réelles et imaginaires le sont. Dans ce cas, $f' = (Réf)' + (Imf)'$*

Les résultats sur la dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit ou d'un quotient sont conservés.

Proposition. *(*) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La fonction de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \lambda e^{\lambda x}$*

Proposition. *(*) Soit ϕ une fonction dérivable sur un ensemble D à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
La fonction de $x \mapsto e^{\phi(x)}$ est dérivable sur D de dérivée $x \mapsto \phi'(x)e^{\phi(x)}$

Proposition. *(*) Soit f une fonction dérivable sur un ensemble D à valeurs dans $D' \subset \mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur D' à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
La fonction de $g \circ f$ est dérivable sur D de dérivée $x \mapsto f'(x)\, g \circ f(x)$.

Proposition. *(*) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
La fonction f est constante sur I si, et seulement si, sa dérivée est nulle.