# Bric-à-brac I

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

## Table des matières

# 1 Notions de logique

## 1.1 Propositions, connecteurs

### 1.1.1 Propositions

Les propositions sont des énoncés ayant un sens mathématique. Une proposition est soit vraie (V), soit fausse (F), les deux possibilités s'excluant mutuellement.
A la base de toute théorie mathématique figurent les axiomes, énoncés qu'on considère comme vrais *a priori*.
Les théorèmes sont les énoncés vrais de la théorie, qu'on obtient au moyen d'une preuve ( ou démonstration ) mathématique, conséquences d'un raisonnement logique.

On distingue une hiérarchie parmi les théorèmes :

**Lemme :** mini-théorème utile pour la démonstration d'un théorème plus important.

**Proposition :** théorème d'importance moyenne.

**Théorème.**

**Corollaire :** conséquence aisée d'un théorème plus important.

On peut fabriquer une nouvelle proposition à partir d'une ou deux propositions grâce aux connecteurs logiques.

### 1.1.2 Connecteurs

Ces connecteurs sont à la base au nombre de trois :
- $\vee$ : « ou » logique.
- $\wedge$ : « et » logique.
- $\neg$ : « non » logique.

Ces trois connecteurs correspondent aux tables de vérité suivantes :

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | F |

## 1.2 Raisonnements et formules logiques

### 1.2.1 L'implication et le *modus-ponens*

Si $P$ et $Q$ sont deux assertions, on note $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\neg P) \vee Q$ dont voici la table de vérité :

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

On remarque que :
- la proposition $P \Rightarrow Q$ n'apprend rien sur les valeurs de $P$ et de $Q$ ;
- si $P$ est fausse, $P \Rightarrow Q$ est vrai ;
- si $P$ est vrai et que $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors $Q$ est vrai.

Cette dernière affirmation est la base de la démonstration mathématique, c'est le *modus-ponens*. En effet beaucoup de théorèmes du cours sont des implications du type hypothèses $\Rightarrow$ conclusion. Il s'agit donc de démontrer des implications du type $P \Rightarrow Q$ : pour cela on suppose que $P$ est vrai et on tente de montrer que $Q$ est vrai.

### 1.2.2 L'équivalence

Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Alors $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ dont voici la table de vérité :

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Pour démontrer l'équivalence, on prouve en général $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$. $P \Leftrightarrow Q$ est vrai si et seulement si $P$ et $Q$ ont la même valeur de vérité.

### 1.2.3 Équivalence logique

Soient $F$ et $G$ deux formules logiques. On dira que $F$ et $G$ sont logiquement équivalentes si elles ont les même valeurs de vérité quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles. On note ceci $F \equiv G$.

**Exemple**

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

En effet,

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ | $P \Rightarrow R$ | $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

De même, on a les propriétés suivantes :
- $P \equiv \neg(\neg P)$
- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$
- $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- etc.

### 1.2.4 Principe de contraposition

Pour prouver $Q$ en supposant $P$ vrai, on montre de manière équivalente que $P$ ne peut être obtenu si $Q$ est faux :

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

### 1.2.5 Raisonnement par l'absurde

Soit à démontrer une assertion $P$. Pour démontrer $P$, on suppose que $P$ est faux (c'est-à-dire qu'on ajoute $\neg P$ aux axiomes) et on cherche alors un énoncé $Q$ à la fois vrai et faux, ce qui est contradictoire. Puisqu'on admet que la théorie n'est pas contradictoire, l'existence d'un tel énoncé $Q$ invalide l'hypothèse de départ, qui était que $\neg P$ est vrai. Donc $P$ est vrai.

**Exemple** Démontrons que e est irrationnel. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Alors $(U_n)$ est strictement croissante. De plus,

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= 1 + \int_0^1 \left(1 \times \mathrm{e}^t\right) \, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \left[-(1-t)\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \quad \text{en intégrant par parties} \\
&= 1 + 1 + \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\
&= 1 + 1 + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{e}^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \quad \text{en intégrant par parties} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e} = U_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \quad \text{car } 1-t \leqslant 1$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = 0$ donc $(U_n)$ converge vers e et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < \mathrm{e}$.

Soit la suite $(V_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$V_n = \frac{1}{n \times n!} + U_n$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n \times n!} = 0$ donc $V_n$ converge aussi vers e. Or $(V_n)$ est strictement décroissante car :

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} + U_{n+1} - \frac{1}{nn!} - U_n \\
&= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{nn!} + U_{n+1} - U_n \\
&= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{nn!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{d'après la définition de } (U_n) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right] < 0
\end{aligned}$$

On obtient alors un encadrement de e : $\forall n \geqslant 1$,

$$U_n < \mathrm{e} < V_n$$

Supposons maintenant que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, alors $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. donc

$$\begin{aligned} U_q < \mathrm{e} < V_q &\Leftrightarrow U_q < \frac{p}{q} < V_q \\ &\Leftrightarrow q!U_q < p\,(q-1)! < q!V_q \\ &\Leftrightarrow q!U_q < p\,(q-1)! < q!U_q + \frac{1}{q} \text{ d'après la définition de } (V_n) \end{aligned}$$

Or $q!U_q \in \mathbb{N}$ car

$$q!U_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$$

Ainsi on a :

$$N < p\,(q-1) < N + \frac{1}{q} \leqslant N + 1$$

C'est à dire qu'il existe un entier entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire [a]. Ainsi, e est un irrationnel.

## 1.3 Quantificateurs et prédicats

### 1.3.1 Prédicat

Un prédicat est un énoncé dans lequel figure(nt) une ou plusieurs variables décrivant certains ensembles tel que, dès que l'on donne une valeur à ces variables, l'énoncé devient une assertion (vraie ou fausse).

### 1.3.2 Quantificateurs

**Quelque soit :** $\forall$

Soit $P$ un prédicat sur l'ensemble $E$. L'écriture $\forall x, P(x)$ signifie que pour tout élément $x$ de $E$, $P(x)$ est vrai. Ceci est néanmoins une assertion qui peut être vraie ou fausse.

**Il existe** $\exists$

Soit $P$ un prédicat sur l'ensemble $E$. L'écriture $\exists x, P(x)$ signifie qu'il existe au moins un élément $x$ de $E$ tel que $P(x)$ est vrai. Ceci est néanmoins une assertion qui peut être vraie ou fausse.

**Méfiance !**

$$\exists x, (P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$$

Par contre [b],

$$\exists x, (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$$

De même [c],

$$\forall x, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$$

Par contre,

$$\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x, P(x) \wedge (\forall x, Q(x))$$

*a.* On peut sans crainte remplacer cette conclusion par « Aaaaargh ! » dans un DS.

*b.* Prenons un exemple de l'assertion précédente : soit une classe d'élèves $x$ et $P(x)$ une fille, $Q(x)$ un garçon. Il existe bien au moins un fille et un garçon dans cette classe (dans un cas général) mais il n'existe pas d'élève étant à la fois une fille et un garçon (là encore dans le cas général).

*c.* Sur le même exemple, tout élève est soit un garçon soit une fille mais toute la classe n'est pas composée uniquement de garçons ou uniquement de filles.

# 2 Ensembles, relations, applications

## 2.1 Ensembles

### 2.1.1 Ensembles et éléments

La notion d'ensemble est une notion première, intuitive. Un ensemble est caractérisé par ses éléments.
– $x \in E$ signifie que l'objet $x$ est un élément de l'ensemble $E$.
– Si $E$ et $F$ sont deux ensembles, $E \subset F$ signifie que tout élément de $E$ est élément de $F$.
– $E = F$ signifie que $E$ et $F$ ont les mêmes éléments. De plus $E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \wedge (F \subset E)$.
Il existe un unique ensemble ne possédant aucun élément appelé ensemble vide et noté $\varnothing$. Pour tout ensemble $E$, $\varnothing \subset E$.

### 2.1.2 Réunion, intersection

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles :
– $E \cup F$ est la réunion de $E$ et de $F$, c'est-à-dire

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \vee (x \in F)$$

– $E \cap F$ est l'intersection de $E$ et de $F$, c'est-à-dire

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \in F)$$

**Propriétés** $E$, $F$ et $G$ étant des ensembles, on a toujours :
- $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
- $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

### 2.1.3 Définition d'un ensemble

- On peut définir un ensemble en citant tous ses éléments. C'est la définition par extension.
- On peut faire apparaître un ensemble grâce à une propriété caractérisant ses éléments.
- Si $X$ est un ensemble, alors $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de $X$, c'est-à-dire que si $x \in \mathcal{P}(X)$, alors $x$ est un sous-ensemble inclus dans $X$ [a].

### 2.1.4 Produit cartésien

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles, le produit cartésien de $E$ et de $F$ noté $E \times F$ désigne l'ensemble des couples $\{a, b\}$ avec $a \in E$ et $b \in F$ avec la règle d'égalité suivante :

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow (a = c) \wedge (c = d)$$

---

*a.* Prenons $X = \varnothing$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & = & \{\varnothing\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & = & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) & = & \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}\}\} \\ \cdots & = & \cdots \end{array}$$

Vous voulez continuer ?

## 2.2 Relations et applications

### 2.2.1 Relation

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une relation de source $E$ et de but $F$ est un triplet $R = (E, F, \Gamma)$ où $\Gamma$ est une partie de $E \times F$.

Une relation de source $E$ et de but $E$ est une relation binaire de $E$.

### 2.2.2 Application

**Définition** Soients $E$ et $F$ deux ensembles. Une application de $E$ dans $F$ est une relation $f = (E, F, \Gamma)$ telle que pour tout élément $x$ de $E$, il existe un unique élément $y$ de $F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. C'est à dire :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F / (x, y) \in \Gamma$$

Ainsi, pour définir une application de $E$ dans $F$, il suffit d'associer à chaque élément de $E$ un unique élément dans $F$.

**Vocabulaire**

- Si $f$ est une application de $E$ dans $F$, $E$ est l'ensemble de départ de $f$ et $F$ est l'ensemble d'arrivée de $f$.
- Pour tout $x \in E$ on note $f(x)$ l'unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. $f(x)$ est alors l'image de $x$ par $f$.
- Pour tout $y \in F$ , tout élément $x$ de $E$ dont $y$ est l'image s'appelle un antécédent de $y$ par $f$.
- On note l'application de la façon suivante :

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

  ou plus simplement $f : E \longrightarrow F$.
- $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est le graphe de $f$.

**Autour de $\varnothing$** Si $E = \varnothing$, alors pour tout ensemble $F$, $\varnothing \times F = \varnothing$. Or l'unique partie de $\varnothing$ est $\varnothing$ donc il existe une seule relation de source $\varnothing$ et de but $F$, qui est le triplet $(\varnothing, F, \varnothing)$. Il s'agit bien d'une application car $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow f(x) \in F$ [a].

Si $E \neq \varnothing$ et si $F = \varnothing$, alors $E \times \varnothing = \varnothing$ donc $(E, \varnothing, \varnothing)$ est l'unique relation de but $F$. Ce n'est néanmoins pas une application puisque on ne peut pas associer des éléments de $\varnothing$ à des éléments [b] de $E$.

### 2.2.3 Image directe et réciproque d'une partie

Soient $E$ et $f$ deux ensembles distincts de $\varnothing$, $f$ une application de $E$ dans $F$ et une partie $A \subset E$.

- On appelle l'image directe de $A$ par $f$ notée $f(A)$ l'ensemble des images par $f$ des éléments de $A$, c'est-à-dire

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$$

  Pour $y \in F$ , $y \in f(A)$ s'il existe un élément $\alpha$ de $A$ tel que $y = f(\alpha)$. En particulier pour $A = E$, $f(E)$ se note $\operatorname{Im}(f)$ et se lit image de $f$.
- Soit $B \subset F$, alors on appelle image réciproque de $B$ par $f$ notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents des éléments de $B$ par $f$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

### 2.2.4 Injection, bijection, surjection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

---

*a*. En effet l'assertion $x \in \varnothing$ étant fausse ($\varnothing$ n'a aucun élément), elle peut impliquer n'importe quoi dont ce qui nous intéresse.
*b*. Qui existent bien, eux !

**Injection**

On dit que $f$ est injective lorsque $\forall x, x' \in E$, si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$. Ceci est équivalent à

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

**Surjection**

On dira que $f$ est surjective lorsque tout élément de $F$ admet au moins un antécédent par $f$, c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$$

**Bijection**

On dit que $f$ est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

### 2.2.5 Résultats concernant ces trois concepts

**Injectivité et monotonie** Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors n'importe quelle application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

**Négation** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- $f$ n'est pas injective est équivalent à $\exists x, x' \in E / f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.
- $f$ n'est pas surjective est équivalent à $\exists y \in F / \forall x \in E, f(x) \neq y$.

**Application identité** Soit $E$ un ensemble. L'application notée $Id_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$ est bijective.

**Injection, surjection, bijection et équations du type** $f(x) = y$ Soit $f : E \longrightarrow F$.

- $f$ est injective si et seulement si $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans $E$.
- $f$ est surjective si et seulement si $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $E$.
- $f$ est bijective si et seulement si $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution dans $E$. Ou alors tout $y \in F$ admet un unique antécédent $x \in E$ par $f$.

### 2.2.6 Composition d'applications

Soient $E$, $F$ et $G$ des ensembles, et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. $g \circ f$ est l'application de $E$ dans $G$ définie par $\forall x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Cette opération n'est pas commutative :

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Par contre elle est associative : si on a $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

De plus, soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, alors :

(1) Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(2) Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

**Démonstrations**

(1) On suppose $f$ et $g$ injectives. Montrons que $g \circ f$ est injective : soient $x, x' \in E / g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Il s'agit de montrer que $x = x'$. On a $g(f(x)) = g(f(x'))$ or $g$ est injective donc $f(x) = f(x')$ or $f$ est injective donc $x = x'$.

(2) On suppose $f$ et $g$ surjectives. Montrons que $g \circ f$ est surjective : soit $z \in G$, on cherche $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$. $g$ est surjective donc $\exists y \in F / z = g(y)$ or $f$ est surjective donc $\exists x \in E / y = f(x)$. Ainsi $z = g \circ f(x)$ donc $g \circ f$ est surjective.

### 2.2.7 Application réciproque d'une application bijective

Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Pour $y \in F$, $y$ admet un unique antécédent noté $g(y)$ par $f$, ce qui définit $g : F \longrightarrow E$ correctement. $g$ est alors l'application réciproque de $f$ et se note $f^{-1}$.

**Propriétés de la composition d'une application avec sa réciproque**

**Partie directe** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective et d'application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$. Ainsi on définit $f^{-1} \circ f : E \longmapsto E$ mais aussi $f \circ f^{-1} : F \longrightarrow F$.

– Pour $x \in E$, $x$ est un antécédent de $f(x)$ et même l'unique car $f$ est bijective. Par conséquent,

$$f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{Id}_E$$

– Pour $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est un antécédent de $y$ par $f$ donc

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y = f \circ f^{-1}(y) = \mathrm{Id}_F$$

**Partie réciproque** Réciproquement, soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Supposons qu'il existe une application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

Montrons d'abord que $f$ est bijective.

– $f$ est surjective : soit $y \in F$, alors

$$y = Id_F(y) = f \circ g(y)$$

donc $g(y)$ est un antécédent de $y$ par $f$.

– $f$ est injective : prenons $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. En effet, on a

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g\left(f\left(x'\right)\right) &\Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f\left(x'\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E\left(x'\right) \\ &\Leftrightarrow x = x' \end{aligned}$$

$f$ est donc une bijection donc $f^{-1}$ est définie comme application réciproque de $f$. Montrons que $g = f^{-1}$.

$$\begin{aligned} g &= g \circ \mathrm{Id}_F \\ &= g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \\ &= (g \circ f) \circ f^{-1} \\ &= Id_E \circ f^{-1} \\ &= f^{-1} \end{aligned}$$

**Bilan**

– Si $f$ est bijective de $E$ dans $F$, il y a une unique application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ qui est l'application réciproque de $f$ notée $f^{-1}$.

– S'il existe une application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors $f$ est bijective et $g = f^{-1}$.

### 2.2.8 Conflit de notation

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $B \subset F$. On a donc les deux notations :
- $f^{-1}(B)$, image réciproque de $B$ par $f$.
- $f^{-1}(B)$, image directe de $B$ par $f^{-1}$.

On montre que ces deux notations sont équivalentes dans le cas où $f$ admet une application réciproque.

## 2.3 Exercices

### 2.3.1 Parties d'un ensemble et application

Soit $E$ un ensemble et $A, B \subset E$. On définit $f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f$ soit :

(1) Injective ?

(2) Surjective ?

(3) Bijective ? Quel est alors l'application réciproque de $f$ ?

**Résolution**

**Question 1**
- Si $A \cup B \subsetneq E$, alors $\exists x \in E$ tel que $x \not\subset A \cup B$. Prenons $X = \{x\}$, alors

$$\begin{aligned} f(\{x\}) &= (\varnothing, \varnothing) \\ &= f(\varnothing) \end{aligned}$$

  Or $x \notin \varnothing$ donc $f$ n'est pas injective. Nous avons prouvé que si $A \cup B \neq E$, alors $f$ n'est pas injective. Donc, par contraposition, si $f$ est injective alors $A \cup B = E$.
- Supposons que $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ deux parties de $E$ telles que $f(X) = f(Y)$. Montrons que $X = Y$ : $f(X) = f(Y)$ donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. D'où

$$\begin{aligned} X &= X \cap E \\ &= X \cap (A \cup B) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \\ &= Y \cap (A \cup B) \\ &= Y \cap E \\ &= Y \end{aligned}$$

  Ainsi, $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

**Question 2**
- Supposons $A \cap B \neq \varnothing$ et $(\varnothing, B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Supposons maintenant qu'il existe $X \in E$ tel que $f(X) = (\varnothing, B)$, alors $X \cap A = \varnothing$ et $X \cap B = B$, c'est-à-dire que $B \subset X$. Or $A \cap B \neq \varnothing$ et $(A \cap B) \subset (A \cap X)$ donc $A \cap X \neq \varnothing$, ce qui n'est pas possible [a]. Ainsi le couple $(\varnothing, B)$ n'a pas d'antécédent par $f$ donc $f$ n'est pas surjective. On a donc montré que si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $f$ n'était pas surjective donc, par contraposée, si $f$ est surjective, alors $A \cap B = \varnothing$.

a. Aaaaaaargh !

– Supposons que $A \cap B = \varnothing$. Montrons que $f$ est surjective. Soit $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on cherche $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $(X \cap A, X \cap B) = (C, D)$. Prenons $X = C \cup D$, alors

$$\begin{aligned} X \cap A &= (C \cup D) \cap A \\ &= (C \cap A) \cup (D \cap A) \\ &= C \cup \varnothing \\ &= C \end{aligned}$$

De même, $X \cap B = D$. Ainsi, $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

**Question 3** $f$ est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si et et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$ ($A$ et $B$ forment une partition de $E$).

### 2.3.2 Des résultats impliquant une application composée sur ses applications composantes

Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.

(1) On suppose $g \circ f$ injective. Qu'en est-il de $f$ et $g$ ?

(2) On suppose $g \circ f$ surjective. Qu'en est-il de $f$ et $g$ ?

**Résolution**

**Question 1**

– Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que $f$ est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$ :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \\ &\Leftrightarrow x = y \quad \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

– $g$ n'est pas forcément injective. On peut donner un exemple d'ensembles $E$, $F$, $G$ et d'applications $f$, $g$ telles que $g$ n'est pas injective mais $g \circ f$ est injective. En effet, soit

$$f : \begin{array}{l} \{1,2,3\} \longrightarrow \{4,5,6,7\} \\ 1 \longmapsto 4 \\ 2 \longmapsto 6 \\ 3 \longrightarrow 7 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \{4,5,6,7\} \longrightarrow \{8,9,10\} \\ 4 \longmapsto 8 \\ 5 \longmapsto 9 \\ 6 \longmapsto 9 \\ 7 \longmapsto 10 \end{array}$$

On a alors $g \circ f : \begin{array}{l} \{1,2,3\} \longrightarrow \{8,9,10\} \\ 1 \longmapsto 8 \\ 2 \longmapsto 9 \\ 3 \longmapsto 10 \end{array}$ , qui est injective au contraire de $g$.

**Question 2**

– Supposons que $f$circ f est surjective. Montrons que $g$ est surjective. Supposons que $g$ n'est pas surjective, alors il existe$z \in G$ tel que pour tout $y$ de $F$, $g(y) \neq z$. Donc $\forall x \in F$, $g(f(x)) \neq z$ car $f(x) \in F$, donc $g \circ f$ est un projecteur lorsqe qui est impossible[a]. Ainsi $g$ est forcément surjective.

– Montrons que $f$ n'est pas forcément surjective. On a par exemple :

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \longmapsto t^2 \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \longmapsto \mathrm{e}^t \end{array}$$

On a bien $f$ surjective mais $g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{2t} \end{array}$ n'est pas surjective.

*a.* Aaaaaaargh !