7 Réduction d'endomorphismes (2)

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. »
Victor Hugo (1802–1885)

Plan de cours

♦ **Introduction –** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. u désigne un endomorphisme de E.

Nous avons à de nombreuses occasions croisé le chemin de *polynômes annulateurs* d'un endomorphisme ou d'une matrice. Par exemple,

- au détour de calculs d'inverses ou de puissances. Rappelons que si u vérifie $u^2 = 5u - 6\mathrm{id}_E$, alors :

$$-\frac{1}{6}\cdot u\circ(u-5\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E \text{ donc } u \text{ est bijective et } u^{-1} = \frac{1}{6}\cdot(5\mathrm{id}_E - u)$$

  Par ailleurs, $u^2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$ et il est même possible d'exprimer explicitement u^n en fonction de id_E et u.
- au détour de recherche de valeurs propres. Rappelons que si u vérifie $u^2 = 5u - 6\mathrm{id}_E$ et que l'on note λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, il vient :

$$u^2(x) - 5u(x) + 6x = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x = 0_E \text{ donc, } x \text{ étant non nul, } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

  Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{2,3\}$. Tous les cas de figure sont possibles : $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$, $\mathrm{Sp}(u) = \{3\}$, ou $\mathrm{Sp}(u) = \{2,3\}$.

Les polynômes d'endomorphismes, en particulier les polynômes annulateurs, vont constituer de précieux outils pour réduire des endomorphismes. La logique de fond restera la même que dans le premier chapitre, nous chercherons à identifier des sous-espaces laissés stables par u sur lesquels l'endomorphisme agira le plus simplement possible, en particulier sur ses sous-espaces propres et ses sous-espaces caractéristiques.

I | Polynômes d'endomorphismes et de matrices

A – Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$

Définition 7.1 : Polynôme d'endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. À tout polynôme $P = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, on associe l'endomorphisme $P(u)$ défini par :

$$P(u) = a_p u^p + a_{p-1}u^{p-1} + \cdots + a_1 u + a_0 \mathrm{id}_E \quad \text{où} \quad u^k = \underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{k \text{ fois}}$$

On pose alors $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^n)$.

On définit de même, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $P(M) = a_p M^p + a_{p-1}M^{p-1} + \cdots + a_1 M + a_0 I_n$.

Théorème 7.2

L'application $P \mapsto P(u)$ définit un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$, dont l'image est $\mathbb{K}[u]$.

Démonstration

$P \mapsto P(u)$ est une application linéaire et un morphisme d'anneaux : pour tous $P,Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$,

(i) $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$ (ii) $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ (iii) $1(u) = \mathrm{id}_E$

Seule la propriété (ii) mérite quelques précisions. Soient deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$.

Alors, $PQ = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j X^{i+j}$. De plus, et c'est là le point clé, pour tous $i,j \in \mathbb{N}$, $u^i \circ u^j = u^{i+j} = u^j \circ u^i$.

Par bilinéarité de la composition, $(P \times Q)(u) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j u^{i+j} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i u^i\right) \circ \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j u^j\right) = P(u) \circ Q(u)$. ■

La commutativité de $\mathbb{K}[X]$ se transmet à la sous-algèbre $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$, en tant qu'image de $\mathbb{K}[X]$ par le morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$.

Corollaire 7.3 : Structure d'algèbre de $\mathbb{K}[u]$

$(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$ possède une structure de $\mathbb{K}$-algèbre **commutative**. Plus précisément,

- $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathbb{K}[u], +, \circ)$ est un anneau commutatif.
- Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathbb{K}[u]$, $(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g)$.

$(\mathbb{K}[M], +, \times, \cdot)$ possède de même une structure d'algèbre commutative et $\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On posera par la suite $\mathbb{K}_n[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}_n[X]\} = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Vect}}\,(u^k)$; on fait de même avec $\mathbb{K}_n[M]$.

Corollaire 7.4

- Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et E de dimension finie, $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ (de dimension finie).
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[M]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (donc de dimension finie).

Exercice 1

Expliciter les sous-algèbres engendrées par chacune des matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Proposition 7.5

Si deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ le sont.

Démonstration

Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(Q^{-1}MQ)^k = Q^{-1}M^kQ$.

Par combinaison linéaire, $P(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}P(M)Q$. ■

Si M représente l'endomorphisme u dans une certaine base, $P(M)$ représente alors l'endomorphisme $P(u)$.

Théorème 7.6

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par u.

Il s'agit comme toujours d'être vigilant(e) dans la rédaction employée :

- $P(u)(x)$ a un sens : c'est l'endomorphisme $P(u)$ que l'on évalue en x ; $P(u)(x)$ est donc un élément de E.
- $P(u(x))$ n'en a aucun puisqu'on ne peut pas élever le vecteur $u(x)$ à une quelconque puissance !

Exercice 2

Adapter la preuve précédente pour montrer que $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(u)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

B – Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Définition 7.7 : Polynôme annulateur

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est appelé polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple

- Le polynôme $X - \lambda$ annule l'homothétie $\lambda \mathrm{id}_E$.
- Le polynôme $X^2 - X$ annule toute projection vectorielle.
- Le polynôme $X^2 - 1$ annule toute symétrie vectorielle.

On définit de même un polynôme annulateur pour une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Avant d'étudier les propriétés des polynômes annulateurs, assurons-nous qu'en dimension finie, il en existe d'autres que le seul polynôme nul.

Lemme 7.8

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si E est de dimension finie, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration

Notons n la dimension de E. $\mathscr{L}(E)$ étant de dimension n^2, la famille $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ qui comporte $n^2 + 1$ vecteurs est nécessairement liée. Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 \mathrm{id}_E + \dots + \lambda_{n^2} u^{n^2} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Bref, le polynôme $\lambda_0 + \dots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ est non nul et annule u. ■

On constate qu'il existe toujours un polynôme annulateur de degré *au plus* égal à n^2. On fera nettement mieux !

Exercice 3

Trouver un polynôme annulateur non nul d'une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

On remarquera que si P annule u, alors tout multiple de P annule également u. En effet, si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors :

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)(u) = Q(u) \circ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

En dimension finie, il existe une infinité de polynômes annulateurs : on a au moins tous les multiples d'un polynôme annulateur donné. Maintenant, si P et Q sont deux polynômes annulateurs de u, qu'ont-ils en commun ? Il est facile de voir que le pgcd de P et Q annule lui aussi u. En effet, en posant $D = \mathrm{pgcd}(P, Q)$, le théorème de Bézout « version polynôme » donne :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X], \quad D = AP + BQ$$

Donc trivialement, $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Allons plus loin et montrons que tous les polynômes annulateurs sont multiples d'un seul et même polynôme unitaire, qualifié de *polynôme minimal*.

Théorème / Définition 7.9 : Polynôme minimal

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul, E étant supposé de dimension finie. Il existe alors un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de u.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u et est généralement noté π_u ou μ_u.

Un endomorphisme en dimension infinie n'admet pas toujours de polynôme minimal.

Démonstration

- Comme E est de dimension finie, l'ensemble $\{\deg(P) \mid P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul$\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément que l'on notera d.
- Soit π_u un polynôme annulateur de u de degré d que l'on va supposer de plus unitaire afin de garantir l'unicité. Soit maintenant un polynôme annulateur P quelconque de u. Par division euclidienne,

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X], \quad P = Q \times \pi_u + R \quad \text{avec } \deg(R) < d$$

De plus $R(u) = P(u) - Q(u) \circ \pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Comme R annule u et est de degré strictement inférieur au degré minimal d, $R = \tilde{0}$. Ce qui prouve bien que $P = Q \times \pi_u$. ■

Le polynôme minimal est donc minimal en degré et tous les polynômes annulateurs sont des multiples de ce polynôme [1].

$$P(u)=0 \iff \pi_u \mid P \iff P \equiv 0 \quad [\pi_u]$$

Bien entendu, ce qui est vrai en dimension finie pour un endomorphisme reste vrai pour une matrice. On définit donc de façon analogue le polynôme minimal d'une matrice.

Exercice 4

Quel est le polynôme minimal d'une projection vectorielle ? d'une symétrie vectorielle ? d'un endomorphisme nilpotent ? Quels sont les endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré 1 ?

Exercice 5

Déterminer le polynôme minimal des matrices $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}-1&3&2\\-1&3&1\\-3&3&4\end{bmatrix}$.

Proposition 7.10

Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Elles ont en effet même ensemble de polynômes annulateurs.

Exercice 6

Trouver le polynôme minimal de la matrice $T=\begin{bmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{bmatrix}$ pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$. Exprimer celui d'une matrice $\operatorname{diag}(B_1,\dots,B_r)$ diagonale par blocs à l'aide des polynômes minimaux de $B_1,\dots,B_r$.

Proposition 7.11

Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
En particulier, $\dim(\mathbb{K}[u])=\deg(\pi_u)$.

Démonstration

Posons, pour u non nul, $d=\deg(\pi_u)$. Notons que $d\geqslant 1$. Montrons par double inclusion que $\mathbb{K}[u]=\mathbb{K}_{d-1}[u]$, ce qui revient à prouver que la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est génératrice.

- $\boxed{\supset}$ $\mathbb{K}_{d-1}[u]=\underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\operatorname{Vect}}(u^k)\subset\underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{Vect}}(u^n)=\mathbb{K}[u]$.
- $\boxed{\subset}$ Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. Montrons que $P(u)\in\underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\operatorname{Vect}}(u^k)$. Par division euclidienne,

$$\exists (Q,R)\in\mathbb{K}[X],\quad P=Q\times\pi_u+R \quad \text{avec } \deg(R)<d$$

Donc $P(u)=R(u)\in\mathbb{K}_{d-1}[u]$. Ainsi, $\mathbb{K}[u]\subset\underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\operatorname{Vect}}(u^k)$.

La famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est clairement libre : s'il existait $\lambda_0,\dots,\lambda_{d-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{d-1}\lambda_k u^k=0_{\mathscr{L}(E)}$, il existerait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à celui de π_u, contradiction ! $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est donc une base de $\mathbb{K}[u]$; la dimension de ce dernier en découle. ■

Voici une nouvelle propriété du polynôme minimal qui s'avérera fort utile dans la suite du chapitre.

Proposition 7.12

Soient $u\in\mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u non réduit à $\{0_E\}$.
Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $u_{|F}$ divise celui de u.

1. Nous verrons ultérieurement que l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme u est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. Cet idéal, non réduit à 0, est alors engendré par un seul élément unitaire, c'est le polynôme minimal.

Démonstration

Commençons par remarquer que les polynômes annulateurs de u annulent $u_{|F}$. En effet, si P annule u,

$$\forall x \in F, \quad P(u_{|F})(x) = P(u)(x) = 0_E$$

$\pi_{u_{|F}}$ divisant tous les polynômes annulateurs de $u_{|F}$, il divise tous ceux de u et en particulier π_u. ■

C – Polynômes annulateurs et valeurs propres

Théorème 7.13

Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Démonstration

Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme annulateur de u, λ une valeur propre de u associée au vecteur propre x.
$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$, $P(\lambda) = 0$. ■

Attention, comme indiqué à maintes reprises, l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur contient les valeurs propres mais n'est pas égal, en général, au spectre de u.

Exemple

Le polynôme $X(X-1)(X-2)$ annule I_n mais seule 1 est valeur propre.

Exercice 7

Trouver les valeurs propres de la matrice de taille $n \times n$ qui ne contient que des 1.

D – Théorème de Cayley-Hamilton

Il est un polynôme que l'on a laissé de côté depuis bien longtemps et dont les racines sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme u : son polynôme caractéristique. Mettons fin au suspens, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur ! C'est l'objet du fameux théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 7.14 : Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (ou d'une matrice) est un polynôme annulateur. Autrement dit, si E est de dimension finie,

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \quad \chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Voici une démonstration instructive du théorème (celle-ci n'est pas exigible aux concours).

Démonstration

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant supposé de dimension finie. Montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ revient à montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \chi_u(u)(x) = 0_E$$

La propriété étant immédiate pour $x = 0_E$, nous allons considérer par la suite un vecteur x fixé non nul.

- E étant de dimension finie, il existe un plus grand entier p tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Notons F le sous-espace vectoriel engendré. Par maximalité de p, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u^p(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$$

- F est stable par u. En effet, si y est combinaison linéaire de $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$ alors $u(y)$ est combinaison linéaire de $u(x), \dots, u^p(x)$ donc de $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$.

- Considérons la matrice de l'endomorphisme induit $u_{|F}$ dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ et son polynôme caractéristique :

$$M = \mathrm{Mat}(u_{|F}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \lambda_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{p-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \chi_{u_{|F}} = \chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & -\lambda_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X-\lambda_{p-1} \end{vmatrix} = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$$

par exemple au moyen de l'opération $L_1 \leftarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1} L_k$.

Comme $u^p(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$, on vient de montrer que $\chi_{u_{|F}}(u)(x) = 0_E$.

- Comme $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u = P \times \chi_{u_{|F}}$. $\chi_u(u) = P(u) \circ \chi_{u_{|F}}(u)$ donc :

$$\chi_u(u)(x) = P(u)\big(\chi_{u_{|F}}(u)(x)\big) = P(u)(0_E) = 0_E$$

C'est bien ce que nous cherchions à démontrer. ■

Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise donc le polynôme caractéristique. Ainsi, $\deg(\pi_u) \leqslant \dim(E)$.

Corollaire 7.15

Le degré du polynôme minimal est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

On peut déduire directement du théorème de Cayley-Hamilton un nouveau résultat (même si l'on peut démontrer ce dernier par des moyens plus élémentaires).

Théorème 7.16

Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont, comme pour le polynôme caractéristique, exactement ses valeurs propres.

Démonstration

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de $u \in \mathscr{L}(E)$. Elles sont déjà racines de π_u en tant que polynôme annulateur :

$$(X-\lambda_1) \times \cdots \times (X-\lambda_r) \mid \pi_u$$

Mais comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, on peut écrire, en notant m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i,

$$\pi_u \mid (X-\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\lambda_r)^{m_r}$$

π_u est donc de la forme $(X-\lambda_1)^{d_1} \times \cdots \times (X-\lambda_r)^{d_r}$ avec, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $1 \leqslant d_i \leqslant m_i$. ■

La recherche d'un polynôme minimal s'en trouve ainsi facilitée. En effet, si $\chi_M = (X-2)^2(X-5)$, il n'y a que deux expressions possibles pour π_M : $\quad \pi_M = (X-2)(X-5) \quad$ ou $\quad \pi_M = (X-2)^2(X-5)$

Il suffit alors de calculer $(M-2I_n)(M-5I_n)$ pour pouvoir conclure.

Proposition 7.17

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est X^n.

Donnons une nouvelle preuve de ce résultat déjà démontré dans le précédent chapitre de réduction.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que X^p annule M. 0 est donc la seule valeur propre possible de M. Comme M admet au moins un valeur propre (complexe), $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ puis $\chi_M = X^n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\chi_M = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^n = 0$ donc M est nilpotente. ■

On retrouve à nouveau la majoration de l'indice de nilpotence par la dimension de l'espace.

II | Polynômes annulateurs et réduction

A – Lemme des noyaux

Faisons un (grand) pas vers la réduction à l'aide du lemme fondamental suivant.

Théorème 7.18 : Lemme de décomposition des noyaux (1)

Si P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$\mathrm{Ker}(P_1P_2(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$$

Démonstration

Tout repose sur la relation de Bézout. P_1 et P_2 étant premiers entre eux, il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$AP_1 + BP_2 = 1, \quad \text{ce qui implique,} \quad A(u) \circ P_1(u) + B(u) \circ P_2(u) = \mathrm{id}_E \quad (*)$$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u)) = \{0_E\}$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u))$. D'après $(*)$,

$$x = AP_1(u)(x) + BP_2(u)(x) = 0_E$$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$. L'inclusion découle directement du fait que $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ sont tous les deux inclus dans $\mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$, ce qui se montre aisément :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(P_1(u)), \quad P_1P_2(u)(x) = P_2P_1(u)(x) = P_2(u)(0_E) = 0_E$$

- Montrons enfin que $\mathrm{Ker}(P_1P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u))$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(P_1P_2(u))$.
Guidés par $(*)$, posons $x_1 = AP_1(u)(x)$ et $x_2 = BP_2(u)(x)$. On a directement $x = x_1 + x_2$ et

$$P_2(u)(x_1) = AP_1P_2(u)(x) = 0_E \quad \text{et} \quad P_1(u)(x_2) = BP_1P_2(u)(x) = 0_E$$

Ainsi, $x_1 \in \mathrm{Ker}(P_2(u))$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(P_1(u))$. ∎

Ce théorème est valable sans hypothèse sur la dimension de E. On aboutit, par récurrence, au résultat suivant.

Théorème 7.19 : Lemme de décomposition des noyaux (2)

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

Corollaire 7.20

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit P et si P annule $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

On peut de cette façon décomposer E en somme de sous-espaces stables par u.

Exercice 8

Trouver l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y^{(3)} = y'' + y' + 2y$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle, non inversible et vérifiant $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 10

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux, de produit P, tels que P annule $u \in \mathscr{L}(E)$.
Prouver que le projecteur sur $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}\big(P_j(u)\big)$ est un polynôme en u.

B – Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 7.21 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (3)

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.
- Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

Démonstration

Remarquons d'abord que les deux conditions sont équivalentes puisque tout diviseur d'un polynôme scindé à racines simples est lui-même scindé à racines simples.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $P=(X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_r)$ annule u, les λ_i étant supposés distincts. Les facteurs étant deux à deux premiers entre eux, le lemme des noyaux indique alors que :

$$E=\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)$$

u est donc diagonalisable. *Attention,* $\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\,id_E)$ *n'est pas nécessairement un sous-espace propre.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons u diagonalisable et notons $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ ses valeurs propres toutes supposées distinctes. On pose alors $P=(X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_r)$. Il suffit de montrer que P annule u, ce qui est bien le cas puisque $E=\bigoplus_{i=1}^{r}E_{\lambda_i}(u)$ et pour tout $x\in E_i$,

$$P(u)(x)=\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r}(u-\lambda_k\mathrm{id}_E)\right]\circ(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)(x)=0_E$$

■

De la même manière, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples. Inutile d'aller chercher le polynôme minimal si les racines sont simples...

Ce théorème montre également que pour que M soit diagonalisable, π_M ne doit pas contenir de facteur de la forme $(X-\lambda)^\alpha$ avec $\alpha>1$.

Exemples

- Si p est un projecteur, $X(X-1)$ annule p. Comme il est scindé à racines simples, p est diagonalisable.
- Si s est une symétrie vectorielle, $(X-1)(X+1)$ annule s. Comme il est scindé à racines simples, s est diagonalisable.

Attention, les polynômes précédents ne sont pas toujours minimaux (mais peu importe !).

Exercice 11

Préciser si les matrices suivantes sont diagonalisables : $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1&3&2\\-1&3&1\\-3&3&4\end{bmatrix}$.

Nous pouvons alors démontrer un précieux corollaire de ce théorème.

Corollaire 7.22

Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Démonstration

Puisque $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u, π_u annule $u_{|F}$. Comme il est scindé à racines simples (u étant supposé diagonalisable), $u_{|F}$ est diagonalisable. ■

Exercice 12

Trouver, pour les matrices A et C de l'exercice précédent, l'ensemble des sous-espaces stables.

C – Réduction des endomorphismes à polynômes annulateurs scindés

Rappelons tout d'abord que u est trigonalisable si, et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. On en déduit qu'un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé, ou, ce qui revient au même, s'il admet un polynôme annulateur scindé. On peut même obtenir une forme réduite plus aboutie.

Supposons pour cela χ_u scindé et écrivons-le sous la forme $\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\lambda_r)^{m_r}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les r valeurs propres distinctes de u. Les facteurs $(X-\lambda_i)^{m_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton,

$$E = \mathrm{Ker}\big((u-\lambda_1\mathrm{id}_E)^{m_1}\big) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\big((u-\lambda_r\mathrm{id}_E)^{m_r}\big)$$

Nous venons ici de construire une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u. Cette décomposition « universelle » ne requiert qu'une seule condition : le caractère scindé de χ_u (ou de π_u, l'un ne va pas sans l'autre). Cette condition est toujours vérifiée, quitte à travailler dans une extension du corps $\mathbb{K}$.

Définition 7.23 : Sous-espace caractéristique

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ le sous-espace $\mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id}_E)^m)$ où m représente l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.

On notera par la suite F_λ le sous-espace caractéristique idoine mais cette notation n'a rien d'universelle.

Avant de construire une matrice de u adaptée à la décomposition de E en somme de sous-espaces caractéristiques, précisons la dimension de ces fameux sous-espaces (et donc celles des blocs afférents dans la matrice).

Proposition 7.24

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, en notant m l'ordre de multiplicité de λ, $\dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id}_E)^m) = m$.

Démonstration

Avec les notations déjà introduites, $\chi_u = (X-\lambda)^m Q$ où $(X-\lambda)^m \wedge Q = 1$. D'où $E = F_\lambda \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.
Notons respectivement v et w les endomorphismes induits par u sur les sous-espaces stables F_λ et $\mathrm{Ker}(Q(u))$.
Posons $p = \dim \mathrm{Ker}((u-\lambda\mathrm{id}_E)^m)$. Remarquons que :

- $(X-\lambda)^m$ annulant v, λ est la seule valeur propre de v. Ainsi, $\chi_v = (X-\lambda)^p$.
- λ n'étant pas racine de Q et Q annulant w, λ n'est pas racine de χ_w.

$\chi_u = (X-\lambda)^m Q = \chi_v \cdot \chi_w = (X-\lambda)^p \cdot \chi_w$ et aussi bien Q que χ_w sont premiers avec $X-\lambda$. Ainsi, $m = p$. ■

Exemple

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Alors, $\chi_M = (X-1)(X-2)^3$. $F_2 = \mathrm{Ker}((M-2I_4)^3)$ est un sous-espace de dimension 3 :

$$E_2 = \mathrm{Ker}(M-2I_4) = \mathrm{Vect}((0,1,0,0),(0,0,0,1)) \quad \text{et} \quad F_2 = \mathrm{Ker}((M-2I_4)^3) = \mathrm{Vect}((0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

Dans l'exemple précédent, $\mathrm{Ker}((M-2I_4)^3) = \mathrm{Ker}((M-2I_4)^2)$. Ceci provient du fait que $\pi_M = (X-1)(X-2)^2$. Justifions cette affirmation.

Proposition 7.25

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé. Alors, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de u, si $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ et $\pi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{d_i}$, $F_i = \mathrm{Ker}((u-\lambda_i\mathrm{id}_E)^{m_i}) = \mathrm{Ker}\big((u-\lambda_i\mathrm{id}_E)^{d_i}\big)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le lemme des noyaux à χ_u et π_u :

$$E=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\right)=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{d_i}\right)$$

Pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{d_i}\right)\subset\operatorname{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i})$.
En sommant les dimensions, il vient en outre $\dim\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{d_i}\right)=\dim\operatorname{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i})$. ■

Exercice 13

Montrer que les sous-espaces propres et sous-espaces caractéristiques de u sont confondus si et seulement si u est diagonalisable.

Il ne nous reste plus qu'à étudier les restrictions de u à chaque sous-espace caractéristique.

Théorème 7.26

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. S'il existe un polynôme scindé annulant u, E est la somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

La version matricielle de ce théorème est sans doute plus intelligible : toute matrice admettant un polynôme annulateur scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux. On préférera la formulation suivante :

Théorème 7.27

Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un polynôme scindé annulant M, alors M est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{bmatrix},\ \text{où pour tout } i\in[\![1,r]\!],\ T_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & \ast \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

Démonstration

Conservons les notations précédentes. Si u est annulé par un polynôme scindé,

$$E=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\right)=\bigoplus_{i=1}^{r}F_i$$

- Chaque sous-espace F_i est de dimension $m_i\geqslant 1$.
- Notons u_i l'endomorphisme induit par u sur F_i. $P_i=(X-\lambda_i)^{m_i}$ annule u_i.
  Comme λ_i est la seule racine de P_i, c'est l'unique valeur propre de u_i.
- Il suffit alors de poser $n_i=u_i-\lambda_i\mathrm{id}_{F_i}$ et de constater que n_i est nilpotent.
  En effet, pour tout $x\in F_i$, $n_i^{m_i}(x)=(u-\lambda_i\mathrm{id}_E)^{m_i}(x)=0_E$. Ainsi, $n_i^{m_i}=0_{\mathscr{L}(F_i)}$. ■

III | Autour de la commutativité de deux endomorphismes (HP)

Cette partie vise à présenter des situations classiques dans lesquelles la commutativité de deux endomorphismes intervient afin de ramener un problème global à des sous-problèmes plus simples à résoudre. Les résultats présentés sous forme de théorèmes constituent des exercices et applications courantes qu'il faut maîtriser mais il sera nécessaire de redémontrer ces résultats si on souhaite les utiliser.

Afin d'appliquer le bien connu principe *diviser pour régner*, commençons par prouver que si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de l'un sont stables par l'autre.

Proposition 7.28

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors, $\operatorname{Ker}(P(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))$ sont stables par v pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors $u^k \circ v = v \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $P(u) \circ v = v \circ P(u)$. Ainsi,

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(P(u)), \quad P(u)(v(x)) = v(P(u)(x)) = v(0_E) = 0_E$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(P(u))$ est stable par v. La démonstration est analogue pour $\operatorname{Im}(P(u))$. ■

Dès lors, si $u \circ v = v \circ u$, on peut considérer l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$.

N'oublions pas que parmi les endomorphismes qui commutent avec u, on rencontre tous les polynômes en u.

A – Diagonalisation simultanée

Proposition 7.29

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. On suppose que u et v sont diagonalisables. Alors, il existe une base de diagonalisation commune à u et v.

Autrement dit, si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables et si $AB = BA$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

Démonstration

L'endomorphisme u est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$.

$E_\lambda(u)$ étant stable par v, introduisons v_λ, l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$.

- v_λ est, tout comme v, diagonalisable. Il est alors possible de considérer une base de $E_\lambda(u)$ constituée de vecteurs propres de v_λ, donc de v (et de toute évidence, ce sont aussi des vecteurs propres de u).
- En concaténant les bases obtenues pour chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$, on obtient une base de diagonalisation commune à u et v. ■

Par récurrence, si $u_1, \ldots, u_p$ sont diagonalisables et si $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$, alors il existe une base de diagonalisation commune à $u_1, \ldots, u_p$.

Exercice 14

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide des matrices $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ que les groupes $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ et $(\mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \times)$ sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

Il est aussi possible de justifier l'existence de bases communes de trigonalisation (cf. feuille d'exercices), sous réserve de commutativité.

B – Racines carrées d'un endomorphisme

Étant donné $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable, on cherche les endomorphismes v tels que $u = v^2$. Si une solution v existe, alors u et v commutent. Travaillons dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$ et posons $v_i = v_{|E_{\lambda_i}}$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{bmatrix} \operatorname{Mat}(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{Mat}(v_r) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{m_r} \end{bmatrix}$$

La question revient donc à trouver $v_i \in \mathscr{L}(E_{\lambda_i})$ tel que $v_i^2 = u_i = \lambda_i \mathrm{id}_{E_{\lambda_i}}$.

- Lorsque u est à valeurs propres simples, il suffit de résoudre l'équation $\operatorname{diag}(\mu_1^2,\dots,\mu_n^2)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Le nombre (fini) de solutions dépendra alors du corps $\mathbb{K}$ de résolution.
- Il s'agit plus généralement de résoudre l'équation $V^2=\lambda I_n$. Les solutions sont (dans $\mathbb{C}$) en nombre infini lorsque $n\geqslant 2$. Il suffit de considérer $\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}^2=I_2$ pour s'en convaincre.

C – Commutant d'un endomorphisme

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. On appelle commutant de u l'ensemble défini par $\mathscr{C}(u)=\{v\in\mathscr{L}(E)\mid u\circ v=v\circ u\}$.

Proposition 7.30

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[u]$.

$(\mathscr{C}(u),+,\cdot)$ est en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ dont on va préciser la dimension dans le cas où u est diagonalisable. Pour ce faire, cherchons tous les endomorphismes v de E qui commutent avec u.

Dans une base adaptée à $E=\bigoplus_{i=1}^{r}E_{\lambda_i}(u)$,

$$V=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(v)=\begin{bmatrix}\operatorname{Mat}(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{Mat}(v_r)\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad U=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{m_r}\end{bmatrix}$$

Réciproquement, toute matrice de la forme de V commute avec U. La dimension de $\mathscr{C}(u)$ est donc $\sum_{i=1}^{r}m_i^2$ où m_i représente l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i. De façon plus formelle, on prouve que

$$\varphi:\left|\begin{array}{rcl}\mathscr{C}(u) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_{\lambda_1})\times\cdots\times\mathscr{L}(E_{\lambda_r})\\ v & \longmapsto & \left(v_{|E_{\lambda_1}},\dots,v_{|E_{\lambda_r}}\right)\end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 15

Montrer de deux façons que si u admet $n=\dim(E)$ valeurs propres simples, alors $\mathscr{C}(u)=\mathbb{K}[u]$.

IV | Vers la décomposition de Dunford et la réduction de Jordan (HP)

Tous les éléments de cette partie sont hors programmes et donc donnés à titre culturel.

Lorsque u admet un polynôme annulateur scindé, la restriction de u à chaque sous-espace caractéristique F_i induit un endomorphisme $u_i=d_i+n_i$ où d_i est une homothétie et n_i est nilpotent. Rappelons que dans une certaine base,

$$\operatorname{Mat}(u)=\begin{bmatrix}T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r\end{bmatrix},\ \text{où pour tout } i\in[\![1,r]\!],\ T_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{bmatrix}\in\mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

À l'échelle de E, et comme on peut le lire directement sur la matrice ci-dessus, u est la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent. Mieux, ces deux endomorphismes ainsi construits commutent et il n'en existe pas d'autre !

Théorème 7.31 : Décomposition de Dunford

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n)\in\mathscr{L}(E)^2$ tel que $u=d+n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $d\circ n=n\circ d$.

Démonstration

- *Existence* – Il suffit en quelque sorte de recoller les morceaux. On pose :

$$d = \sum_{i=1}^{r} d_i \circ p_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad n = \sum_{i=1}^{r} n_i \circ p_i = u - d$$

  où p_i est le projecteur sur F_i parallèlement à la somme de tous les autres sous-espaces caractéristiques. Avec une telle définition, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,
  (i) $d_{|F_i} = d_i = \lambda_i \mathrm{id}_E$ donc d est diagonalisable.
  (ii) $n_{|F_i}^{m_i} = n_i^{m_i} = 0_{\mathscr{L}(F_i)}$ donc $n^{\dim(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  (iii) $d_i \circ n_i = n_i \circ d_i$ donc $d \circ n = n \circ d$.
- *Unicité* – Soit $(d', n') \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant $u = d' + n'$, d' diagonalisable, n' nilpotent et $d' \circ n' = n' \circ d'$.
  (i) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u \circ d' = d' \circ u$ donc $F_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i})$ est stable par d'. Notons d'_i l'endomorphisme induit par d' sur F_i. Puisque $d_i = \lambda_i \mathrm{id}_E$, $d'_i \circ d_i = d_i \circ d'_i$. Ainsi, d et d' commutent. Il en va donc de même pour $n = u - d$ et $n' = u - d'$.
  (ii) d et d' étant de plus diagonalisables, ils sont co-diagonalisables. Ainsi, $d - d' = n' - n$ est diagonalisable.
  (iii) Mais $n' - n$ est aussi la différence de deux endomorphismes nilpotents qui commutent, donc lui-même un endomorphisme nilpotent. Sa diagonalisabilité entraîne $d - d' = n' - n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. ■

Parmi les applications classiques de la décomposition de Dunford figure bien entendu le calcul de puissances, mais aussi le calcul d'exponentielles. En effet, comme d et n commutent,

$$\exp(u) = \exp(d + n) = \exp(d) \circ \exp(n) \quad \text{avec} \quad \exp(d) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} p_i \quad \text{et} \quad \exp(n) = \sum_{k=1}^{\dim(E)} \frac{n^k}{k!}$$

Pour conclure, rajoutons qu'il existe une réduction plus fine que celle que nous avons obtenue, dénommée réduction de Jordan (sans autre hypothèse que l'existence d'un polynôme annulateur scindé). Si cette dernière est totalement hors programme, sachez qu'elle repose sur une décomposition de chaque sous-espace caractéristique F_i, de sorte à obtenir pour la partie nilpotente une représentation matricielle de la forme :

$$\mathrm{Mat}(n_i) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{i,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{i,m_i-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \varepsilon_{i,1}, \ldots, \varepsilon_{i,m_i-1} \in \{0, 1\}$$

En construisant une base adaptée, la représentation matricielle de u sera alors de la forme :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_{i,1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \varepsilon_{r,m_r-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \varepsilon_{1,1}, \ldots, \varepsilon_{r,m_r-1} \in \{0, 1\}$$