L'équation fonctionnelle $f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$.

1. **Analyse** : Supposons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution sur $]-R, R[$ avec $R \neq 0$

En reportant dans (E) il vient :

$$\forall x \in]-R,R[\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + \lambda^n) a_n x^n.$$

Par théorème d'unicité on obtient :

$$\begin{cases} a_0 = c \\ a_{n+1} = \dfrac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \lambda^k)}{n!} c}$

Synthèse : Comme $|\lambda| < 1$ on a $|a_n| \leq |c| \dfrac{(|\alpha| + 1)^n}{n!}$ Donc par comparaison

La série $\sum a_n z^n$ a un rayon infini, donc non nul, ce qui valide les calculs

Ainsi La série $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée.

$f(x)$ est un polynôme ssi $\exists k_0 \,/\, a_{k_0} = 0$ (car alors $\forall n \geq k_0 \;\; a_n = 0$)

Donc $f(x)$ est un polynôme ssi $\underline{\exists n_0, \quad \alpha = -\lambda^{n_0}}$

2 : (i) $|v(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N} v_k x^k + \sum_{N+1}^{\infty} v_k x^k\right|$

$\leq \left|\sum_{n=0}^{N} v_k x^k\right| + \sum_{N+1}^{\infty} |v_k| x^k$ (car $x > 0$). On pose $P_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{N} v_k x^k$

$\leq |P_\varepsilon(x)| + \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon u_k x^k$

$\leq |P_\varepsilon(x)| + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = |P_\varepsilon(x)| + \varepsilon u(x)$ (car $\forall k \;\; u_k \geq 0$)

(ii) Comme les u_k sont positifs on a $u(x) \geq u_{N+1}\, x^{N+1}$

comme $d^\circ P_\varepsilon \leq N$ on a $P_\varepsilon(x) = \underset{+\infty}{o}\left(x^{N+1}\right)$

a fortiori : $P_\varepsilon(x) = \underset{+\infty}{o}\left(u(x)\right)$

(iii) $\exists A_\varepsilon, \ \forall x > A_\varepsilon \quad |P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon\, u(x)$

Alors $\forall x > A_\varepsilon \quad |v(x)| \leq 2\varepsilon\, u(x)$.

Comme cette construction est possible $\forall \varepsilon > 0$, on a bien prouvé $|v(x)| = \underset{x\infty}{o}\left(u(x)\right)$

(b) $n!\, \alpha^{-n} a_n = C \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{d^k}{\alpha}\right)$. Comme C est constant, il suffit de montrer la convergence de la suite $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{d^k}{\alpha}\right)$. Notons que $\left|\frac{d^k}{\alpha}\right| < 1$ pour $k \geq n_0$ car $|d| < 1$

Pour $k \geq n_0$ $1 + \frac{d^k}{\alpha} > 0$ donc on peut écrire :

$b_n = b_{n_0-1} \prod_{k=n_0}^{n-1}\left(1 + \frac{d^k}{\alpha}\right)$ et $\ln\left(\prod_{k=n_0}^{n-1}\left(1+\frac{d^k}{\alpha}\right)\right) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{d^k}{\alpha}\right)$

La série de T.G $\ln\left(1+\frac{d^k}{\alpha}\right)$ est convergente absolument $\left(\left|\ln\left(1+\frac{d^k}{\alpha}\right)\right| \sim \frac{|d|^k}{\alpha}\right)$

Donc b_n possède bien une limite finie (non nulle sauf si $b_{n_0-1} = 0$, auquel cas f est un polynôme)

(c) $a_n \sim \frac{k\alpha^n}{n!}$ où k est la limite non nulle précédente

- $a_n - \frac{k\alpha^n}{n!} = o\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)$ et $u_n = \frac{\alpha^n}{n!} > 0$. De plus les rayons des séries sont infinis

Par suite (question (2)) $f(x) - k e^{\alpha x} = \underset{+\infty}{o}\left(e^{\alpha x}\right)$ $\quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} k e^{\alpha x}$.

3. $g'(x) = \alpha g(x) + g(\lambda x)$

(a) Déjà par une récurrence facile g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ $[\, g\ \mathcal{C}^k \Rightarrow g'\ \mathcal{C}^k \,]$.

De plus en dérivant p fois on a l'égalité

$$g^{(p)}(x) = \alpha g^{(p-1)}(x) + \lambda^{p-1} g^{(p-1)}(x)$$

(b) Notons $\| \|_\infty$ la norme uniforme de l'intervalle $[-a,a]$.

La quest° précédente donne $\|g^{(p)}\|_\infty \leq (\alpha + |\lambda|^{p-1}) \|g^{(p-1)}\|_\infty$

Donc par récurrence immédiate $\|g^{(p)}\|_\infty \leq \alpha^p \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 + \frac{|\lambda|^{k-1}}{\alpha}\right) \|g\|_\infty$

Mais comme au 2(b) la suite $\prod_{k=0}^{p-1} \left(1 + \frac{|\lambda|}{\alpha}^{k-1}\right)$ est convergente donc bornée

par une constante C_α : Il vient alors.

$$\|g^{(p)}\|_\infty \leq \alpha^p \underbrace{C_\alpha \|g\|_\infty}_{K_\alpha}$$

(c) D'après l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|g^{(n+1)}\|_\infty \leq K_\alpha \frac{(\alpha |x|)^{n+1}}{(n+1)!} = r_n(x)$$

La suite $(r_n(x))_n$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$. (Croissances comparées)

Par suite $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$

4. La quest° 3 prouve que l'on a trouvé au 1. toutes les solutions de (E).