Arcs paramétrés

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Généralités

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine euclidienne canonique naturelle. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ via la bijection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x + iy \in \mathbb{C}$ et on note $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ est un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^k\left(I, \mathbb{R}^2\right)$.

Dans la suite, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle que pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, si on pose $x = \Re\mathrm{e}(f)$ et $y = \Im\mathrm{m}(f)$, alors $\forall t \in I$, $f(t) = (x(t), y(t)) \simeq x(t) + iy(t)$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k\left(I, \mathbb{R}^2\right) \Leftrightarrow x, y \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et si c'est le cas, $f^{(k)}(t) = \left(x^{(k)}(t), y^{(k)}(t)\right) \simeq x^{(k)}(t) + iy^{(k)}(t)$.

Vocabulaire ❒ Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, pour $t \in I$ on note parfois $M(t)$ au lieu de $f(t)$. Cette notation provient d'une interprétation cinématique d'un point se déplaçant sur un plan. La paramètre t a alors une signification physique : le temps.

❒ Lorsque $k \geqslant 1$, $f(t)$ ou $\overrightarrow{f}(t)$ [a] est le vecteur vitesse noté aussi $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ [b]. Pour $t' \neq t$, on a

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} = \frac{1}{t' - t}\overrightarrow{M(t)\,M(t')}$$

Pour $k \geqslant 2$, $\overrightarrow{f''}(t)$ est l'accélération notée aussi $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}$.

❒ L'ensemble $f(I) = \{f(t) \,|\, t \in I\}$ s'appelle le support de l'arc paramétré. En cinématique, c'est la trajectoire. Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ si c'est le support d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples ❒ Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité : $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$. $\mathcal{C}$ est une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$: c'est le support de l'axe paramétré

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{it} \end{array} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

❒ Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Alors $\mathcal{E}$ est le support de l'axe paramétré $t \in \mathbb{R} \longmapsto a\cos t + ib\sin t$.

❒ Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Alors $\mathcal{H} \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est le support de $t \in \mathbb{R} \longmapsto a\cosh t + ib\sinh t$ et $\mathcal{H} \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R})$ est le support de $t \in \mathbb{R} \longmapsto -a\cosh t + ib\sinh t$.

❒ Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. Le graphe Γ de φ, c'est-à-dire l'ensemble $\{(t, \varphi(t)) \,|\, t \in I\}$ est le support de l'arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $t \in \mathbb{R} \longmapsto (t, \varphi(t))$.

1.2 En coordonnées polaires

Soient $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, on considère l'arc paramétré $f : t \in I \longrightarrow r(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$. On dit que f est donné en représentation polaire car pour $t \in I$, $(r(t), \theta(t))$ est un système de coordonnées polaires de $M(t)$ dans le repère canonique $((0,0)\,; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = (0, 1, i)$.

---

a. Puisque l'on manipule des couples de réels qui s'assimilent des complexes, les deux notations sont permises et on jouera sur l'ambiguïté entre nombre et vecteur.

b. « *À la physicienne !* »

Expression de la position, de la vitesse et de l'accélération Supposons $k \geqslant 2$, pour $t \in I$,

$$f'(t) = r'(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)} + ir(t)\,\theta'(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$$

Si on note $\overrightarrow{u}(t) = \cos t\overrightarrow{e_1} + \sin t\overrightarrow{e_2}$ d'affixe e^{it} et $\overrightarrow{v}(t) = -\sin t\overrightarrow{e_1} + \cos t\overrightarrow{e_2}$ d'affixe $i\mathrm{e}^{it}$, alors $(O, \overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t))$ est le repère polaire et dans ce repère, $\overrightarrow{f'}(t) \left| \begin{array}{l} r'(t) \\ r(t)\,\theta'(t) \end{array} \right.$. Mais on a aussi :

$$\begin{aligned} f''(t) &= r''(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)} + i\theta'(t)\,r'(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)} + i\left[r'(t)\,\theta'(t) + r(t)\,\theta''(t) + ir(t)\,\theta'^2(t)\right]\mathrm{e}^{i\theta(t)} \\ &= \left[r''(t) - r(t)\,\theta'^2(t)\right]\mathrm{e}^{i\theta(t)} + \left[2\theta'(t)\,r'(t) + r(t)\,\theta''\left('t\right)\right]i\mathrm{e}^{i\theta(t)} \end{aligned}$$

donc dans $(O, \overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{v}(t))$, $\overrightarrow{f''}(t) \left| \begin{array}{l} r''(t) - r(t)\,\theta'^2(t) \\ 2\theta'(t)\,r'(t) + r(t)\,\theta''(t) \end{array} \right.$.

Cas particulier Soit $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$, considérons la courbe d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, qui coïncide avec l'arc paramétré $f : \theta \longrightarrow r(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}$. D'après ce qui précède, dans $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$, on a

$$M(\theta) \left| \begin{array}{l} r(\theta) \\ 0 \end{array} \right. , \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} \left| \begin{array}{l} r'(\theta) \\ r(\theta) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta^2} \left| \begin{array}{l} r''(\theta) - r(\theta) \\ 2r'(\theta) \end{array} \right.$$

Remarque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $\exists r, \theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in I,\ f(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

En effet, $t \in I \longmapsto |f(t)|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et est de classe $\mathcal{C}^k$: $|f(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ or $x^2 + y^2 \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{\ }$ est $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ aussi.

Ainsi $t \in I \longmapsto \dfrac{1}{|f(t)|}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ donc $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{|f(t)|}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ à valeur dans $\mathbb{U}$. D'après le théorème de relèvement [a], $\exists \theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I,\ g(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$ d'où $f(t) = |f(t)|\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

1.3 Tangentes

1.3.1 Faits de base

Soit (I, f) un arc paramétré, Γ le support de f et $t_0 \in I$. On suppose que pour $t \neq t_0$ voisin de t_0, $M(t) \neq M(t_0)$. On dira alors que Γ admet une tangente au point $M(t_0)$ si la droite variable $\mathcal{D}_t = (M(t_0)\,M(t))$ admet une position limite pour $t \to t_0$, c'est-à-dire s'il existe une application $t \longmapsto \overrightarrow{u}(t)$ admettant une limite $\overrightarrow{v} \neq 0$ en t_0 telle que pour $t \neq t_0$ voisin de t_0, $\overrightarrow{u}(t)$ dirige $\mathcal{D}_t$.
Dans ce cas, la droite $T = M(t_0) \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{v}$ est la tangente à Γ en $M(t_0)$.

Problème de cohérence Si $t \longmapsto \overrightarrow{u_1}(t)$ et $t \longmapsto \overrightarrow{u_2}(t)$ admettent des limites $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ non nulles et si $\forall t \neq t_0$ voisin de t_0, $\overrightarrow{u_1}(t)$ et $\overrightarrow{u_2}(t)$ dirigent $\mathcal{D}_t$, alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels donc $M(t_0) \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{v_1} = M(t_0) \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{v_2}$.

En effet, soit $\varphi_1 : t \in I \longrightarrow \overrightarrow{u_1}(t)$ et $\varphi_2 : t \in I \longrightarrow \overrightarrow{u_2}(t)$, on rappelle que $\overrightarrow{u_1}(t)$ et $\overrightarrow{u_2}(t)$ sont à la fois des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et des complexes de $\mathbb{C}$. Pour $t \neq t_0$ voisin de t_0, $\overrightarrow{u_1}(t)$ et $\overrightarrow{u_2}(t)$ dirigent la même droite donc on peut écrite $\varphi_2(t) = \alpha(t)\,\varphi_1(t)$ avec $\alpha(t) \in \mathbb{R}^*$, d'où $\alpha(t) = \dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$. D'après les théorèmes généraux, $\dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$ où $\ell_2 = \overrightarrow{v_2}$ et $\ell_1 = \overrightarrow{v_1}$. Comme $\alpha \in \mathbb{R}^I$, $\dfrac{\ell_2}{\ell_1} \in \mathbb{R}$ donc $\ell_2 \in \mathrm{Vect}(\ell_1)$ d'où le résultat.

[a] Voir section 4 page 25.

Proposition Avec les notations précédentes, supposons $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Alors Γ admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\overrightarrow{f'}(t_0)$.

En effet, pour $t \neq t_0$ voisin de t_0,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}(t) &= \frac{\overrightarrow{M(t_0)\,M(t)}}{t-t_0}\\ &= \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\end{aligned}$$

or $\overrightarrow{u}(t)$ dirige $\mathcal{D}_t$ et, d'après la définition de la dérivée, $\overrightarrow{u}(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{f'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

On remarque de plus que si $f'(t_0) \neq 0$, alors $f(t)-f(t_0) \underset{t_0}{\sim} f'(t_0)(t-t_0)$ d'où $f(t) = f(t_0)+f'(t-t_0)+\mathrm{o}(t)$ pour $t \neq t_0$ voisin de t_0.

Exemples

(1) Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$ et Γ le graphe de φ. Alors Γ est le support de $t \in I \longmapsto M(t) = (t, \varphi(t))$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\left|\begin{array}{l}1\\ \varphi'(t)\end{array}\right. \neq \overrightarrow{0}$ donc $\forall t \in I$, Γ admet une tangente dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, \varphi'(t))$. L'équation de cette tangente à Γ au point M est donnée par

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{M(t)\,M}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-t & 1\\ y-\varphi(t) & \varphi'(t)\end{vmatrix} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad y = \varphi'(t)(x-t)+\varphi(t)\end{aligned}$$

(2) Soit $r \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et f l'arc paramétré $\theta \longmapsto r(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On a vu que dans $(0, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\left|\begin{array}{l}r'(\theta)\\ r(\theta)\end{array}\right.$ donc si $r(\theta) \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} \neq \overrightarrow{0}$: tout point de Γ autre que l'origine admet une tangente. Que se passe-t-il alors en $O = (0,0)$? Soit $\theta_0 \in I$ tel que $r(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow f(\theta_0) = 0$, supposons que pour $\theta \neq \theta_0$ voisin de θ_0, $r(\theta) \neq 0$. Alors pour $\theta \neq \theta_0$ voisin de θ_0,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M(\theta_0)\,M(\theta)} &= f(\theta) - \underbrace{f(\theta_0)}_{0}\\ &= r(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}\\ &= r(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{u_\theta}$ dirige $\overrightarrow{M(\theta_0)\,M(\theta)}$ or $\overrightarrow{u_\theta} \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \overrightarrow{u_{\theta_0}} \neq \overrightarrow{0}$ donc Γ admet en θ_0 une tangente dirigée par $\overrightarrow{u_{\theta_0}}$.

1.3.2 Paramètres réguliers et singuliers

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, $t \in I$. Si $f'(t) \neq 0$, on dit que t est régulier. Sinon, il est singulier.

Si t est un paramètre régulier, alors on a vu que Γ admet en $M(t)$ une tangente dirigée par $f'(t)$.

Paramètre singulier et tangente Supposons $f'(t_0) = 0$, $k \geqslant 2$ et $\exists j \in [\![2, k]\!]$ tel que $f^{(j)}(t_0) \neq 0$. Soit alors $p = \min\left\{j \in [\![2,k]\!] \,|\, f^{(j)}(t_0) \neq 0\right\}$. Un développement limité à l'ordre p au voisinage de t_0 [a] donne

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{l=0}^{p} \frac{f^{(l)}(t_0)}{l!}(t-t_0)^l + \mathrm{o}\left((t-t_0)^p\right)\\ &= f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + \mathrm{o}\left((t-t_0)^p\right)\end{aligned}$$

a. Voir section 14.3.2.5 du cours complet page 226.

Ainsi, $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0) \underset{t_0}{\sim} \dfrac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p$ donc pour $t \neq t_0$ voisin de t_0, $M(t) \neq M(t_0)$ et $\overrightarrow{u} = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)^p}$ dirige $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ et $\overrightarrow{u} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \dfrac{f^{(p)}(t_0)}{p!} \neq 0$ donc Γ admet en t_0 une tangente dirigée par $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$.

1.3.3 Étude locale

Soit (I,f) un axe paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$, Γ le support de f.

Cas d'un point birégulier

Soit $t \in I$, on dit que t est birégulier si la famille $\left(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right)$ est libre.

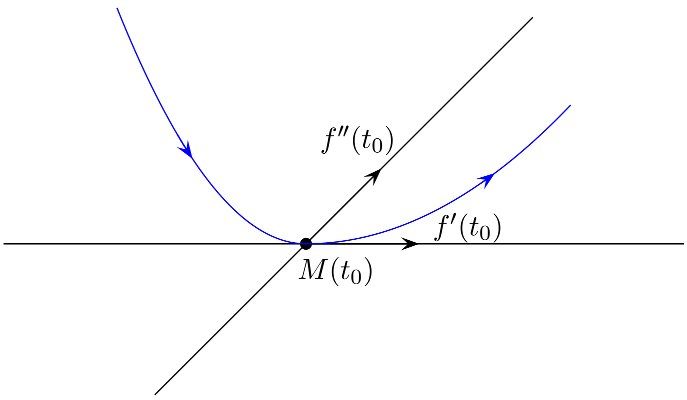
Supposons que $t_0 \in I$ est birégulier. D'après Taylor-Young,

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}f''(t_0) + \mathrm{o}\left((t-t_0)^2\right)$$

Dans le repère $\left(M(t_0), \overrightarrow{f'}(t_0), \overrightarrow{f''}(t_0)\right)$, le point $M(t)$ a pour coordonnées

$$M(t)\left|\begin{array}{l} t-t_0+\mathrm{o}\left((t-t_0)^2\right) = X(t) \\ \dfrac{(t-t_0)^2}{2} + \mathrm{o}\left((t-t_0)^2\right) = Y(t) \end{array}\right.$$

Ainsi $X(t) \underset{t_0}{\sim} t-t_0$ et $Y(t) \underset{t_0}{\sim} \dfrac{1}{2}(t-t_0)^2 \underset{t_0}{\sim} \dfrac{X^2(t)}{2}$.



L'allure de Γ est donnée par la figure ci-dessus.

Cas général (ou presque) On fait l'hypothèse suivante : $\exists m \geqslant 1$ tel que $f^{(m)}(t_0) \neq 0$ et on pose $p = \min\left\{m \geqslant 1 | f^{(m)}(t_0) \neq 0\right\}$, et on suppose de plus $\exists j > p$ tel que $\left(\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(j)}}(t_0)\right)$ est libre et on pose $q = \min\left\{j > p | \left(\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(j)}}(t_0)\right) \text{ est libre}\right\}$. Pour $l \in [\![p+1, q-1]\!]$, on écrit $f^{(l)}(t_0) = \lambda_l f^{(p)}(t_0)$ avec $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{q-1} \in \mathbb{R}$. Toujours d'après Taylor-Young, on a pour $t \neq t_0$ voisin de t_0 :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \sum_{l=1}^{q} \frac{f^{(l)}(t_0)}{l!}(t-t_0)^l + \mathrm{o}\left((t-t_0)^q\right) \\ &= f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + \left(\sum_{l=p+1}^{q-1} \frac{\lambda_l}{l!}(t-t_0)^l\right) f^{(p)}(t_0) + \frac{f^{(q)}(t_0)}{q!}(t-t_0)^q + \mathrm{o}\left((t-t_0)^q\right) \end{aligned}$$

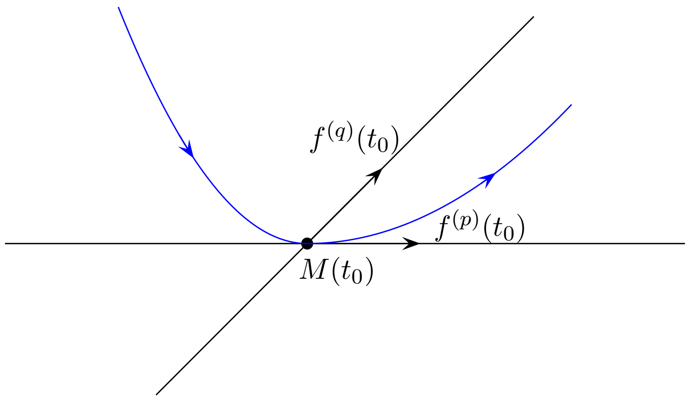
D'où, en se plaçant dans le repère $\left(M(t_0), \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)\right)$, on a $M(t) \left| \begin{array}{l} X(t) \\ Y(t) \end{array}\right.$ avec

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \underbrace{\sum_{l=p+1}^{q} \frac{\lambda_l}{l!}(t-t_0)^l + \mathrm{o}\left((t-t_0)^q\right)}_{\mathrm{o}((t-t_0)^p)} \\ &\underset{t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \end{aligned}$$

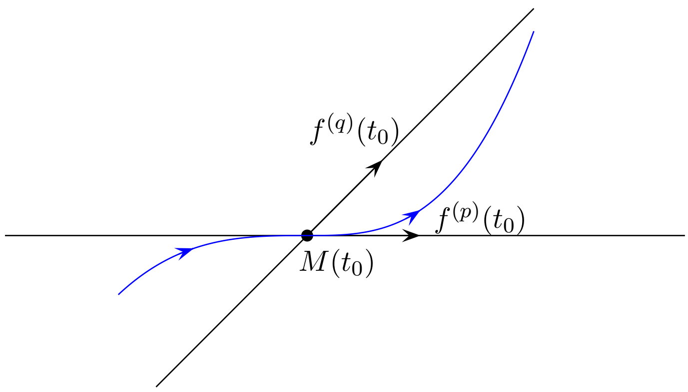
et $Y(t) = \dfrac{(t-t_0)^q}{q!} + \mathrm{o}\left((t-t_0)^q\right) \underset{t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$.

On remarque que $|Y(t)| = \alpha\,|X(t)|^{\frac{q}{p}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{q}{p} > 1$ et 4 cas se présentent pour déterminer le signe de $X(t)$ et $Y(t)$.

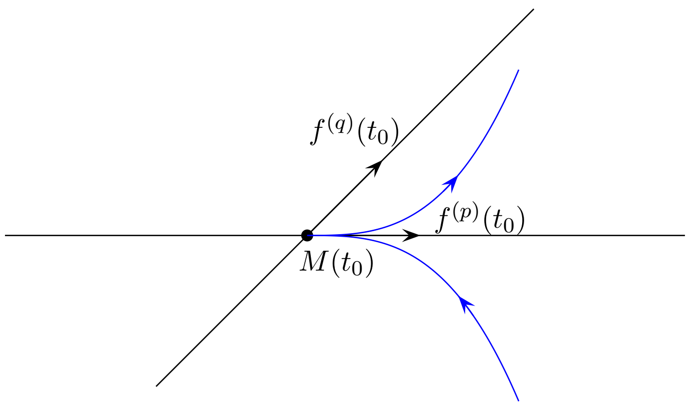
- Si p est impair et q est pair, on dit que Γ a une allure normale.



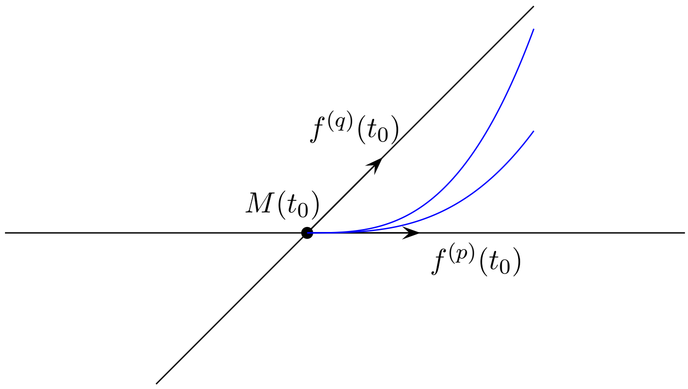
- Si p et q sont impairs, on parle d'un point d'inflexion en t_0.



- Si p est pair et q impair, on dit que Γ présente un point de rebroussement de première espèce.



– Si p et q sont pairs, c'est un point de rebroussement de la deuxième espèce. On ne sait pas dans quelle sens se parcourt l'arc.



Exemple Soit Γ le support d'une courbe paramétré définie par $f(t) = \left(t + \dfrac{1}{2t^2}, t^2 + \dfrac{2}{t}\right)$. On demande l'allure de Γ aux points de paramètres singuliers.

❒ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(1 - \frac{1}{t^3}, 2t - \frac{2}{t^2}\right) \\ f''(t) &= \left(\frac{3}{t^4}, 2 + \frac{4}{t^3}\right) \\ f'''(t) &= \left(-\frac{12}{t^5}, -\frac{12}{t^4}\right) \end{aligned}$$

❒ Ainsi il vient $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{t^3} = 0 = 2t - \dfrac{2}{t^2} \Leftrightarrow t = 1$. On a alors $M(1) = \left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = (3, 6)$ et $f'''(1) = (-12, -12)$. $f''(1)$ et $f'''(1)$ ne sont pas proportionnelles donc avec les notations du cours, $p = 2$ et $q = 3$. f présente un point de rebroussement de première espèce en $t = 1$.

1.3.4 Étude de branches infinies

> Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ une extrémité de I n'appartenant pas à I, $x = \Re\text{e}(f)$ et $y = \Im\text{m}(f)$. On dit que f présente une branche infinie pour $t \to a$ lorsque $|f(t)| \xrightarrow[t\to a]{} +\infty$.

C'est le cas en particulier si $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ et (ou) $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ car $|f(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

Piège On est pas nécessairement dans ce cas : on peut avoir $|f(t)| \xrightarrow[t\to a]{} +\infty$ sans que x ou y ne tendent vers l'infini lorsque t tend vers a. Par exemple, $x(t) = t\cos t$ et $y(t) = t\sin t$ et $a = +\infty$.

> Une droite $\mathcal{D} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est asymptote au support Γ de f lorsque t tend vers a si $\mathrm{d}(M(t), \mathcal{D}) \xrightarrow[t\to a]{} 0$, ce qui revient à dire avec les notations précédentes que
>
> $$\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma \xrightarrow[t\to a]{} 0$$

Cas classiques

(1) Supposons $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$. Alors il est clair que $\mathcal{D} : x = \ell$ est asymptote à Γ pour $t \to a$. De même, si $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$, alors $\mathcal{D} : y = \ell$ est asymptote à Γ pour $t \to a$.

(2) On se place dans le cas où $x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$. Supposons qu'il existe une droite $\mathcal{D} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ qui soit asymptote à Γ pour $t \to a$. Alors $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ car dans le cas contraire, on aurait $\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma \xrightarrow[t\to a]{} +\infty$. $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne du type $y = \lambda x + \mu$ donc

$$y(t) - \lambda x(t) - \mu \xrightarrow[t\to a]{} 0 \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} - \lambda - \underbrace{\frac{\mu}{x(t)}}_{\xrightarrow[t\to a]{} 0} \xrightarrow[t\to a]{} 0$$

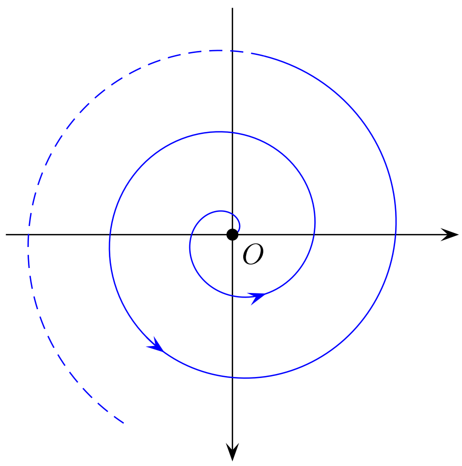
On doit donc avoir $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} \lambda$ puis $y(t) - \lambda x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \mu$.

On étudie donc $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ pour $t \to a$.

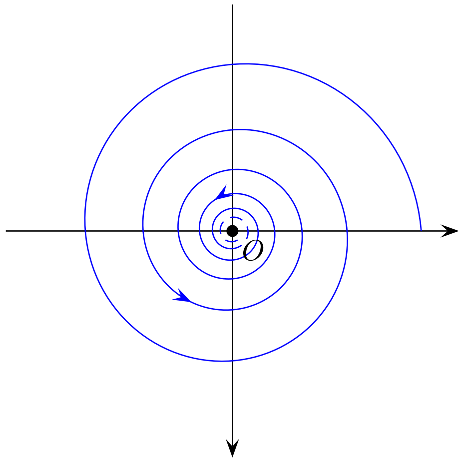
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$, on parle de branche parabolique dans la direction (Oy) ; il n'y a pas d'asymptote.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} 0$, pas d'asymptote non plus mais une branche parabolique dans la direction (Ox).
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to a]{} \lambda \in \mathbb{R}^*$, on étudiera $y(t) - \lambda x(t)$.
  - ○ Si $y(t) - \lambda x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \pm\infty$, c'est une branche parabolique dans la direction de $y = \lambda x$.
  - ○ Si $y(t) - \lambda x(t) \xrightarrow[t\to a]{} \mu \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{D} : y = \lambda x + \mu$ est asymptote à Γ et le signe de $y(t) - (\lambda x(t) + \mu)$ au voisinage de a détermine les positions relatives des deux courbes.

Cas d'une courbe donnée en coordonnées polaires On étudie l'arc paramétré $f : \theta \longrightarrow g(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et pour $\theta \in I$, $|f(\theta)| = |g(\theta)|$. On suppose que $\pm\infty$ sont des extrémités de I.

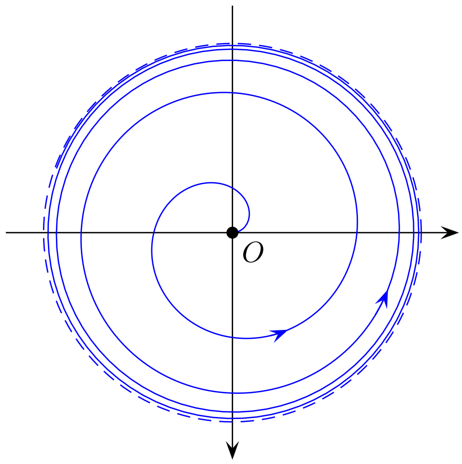
- Si $g(\theta) \xrightarrow[\theta\to\pm\infty]{} \pm\infty$, on parle de branche spirale.



- Si $g(\theta) \xrightarrow[\theta\to\pm\infty]{} 0$, O est point limite.



– Si $g(\theta) \underset{\theta\to\pm\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}^*$, le cercle $\mathcal{C}(O,\lambda)$ est cercle limite.



– Si $g(\theta) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ avec θ_0 une extrémité de I n'appartenant pas à I, plaçons nous dans le repère $\mathcal{R}_{\theta_0} = (O;\overrightarrow{u_{\theta_0}},\overrightarrow{v_{\theta_0}})$. Un système de coordonnées polaires de $M(\theta)$ dans $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est $(g(\theta),\theta)$ donc un système de coordonnées polaires de $M(\theta)$ dans $\mathcal{R}_{\theta_0}$ est $(g(\theta),\theta-\theta_0)$. Si on note $M(\theta)\left|\begin{array}{l} X(\theta) \\ Y(\theta)\end{array}\right.$ dans $\mathcal{R}_{\theta_0}$, alors $X(\theta) = g(\theta)\cos(\theta-\theta_0)$ et $Y(\theta) = g(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ donc

$$\frac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \tan(\theta-\theta_0) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} 0$$

On étudie donc $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} Y(\theta)$.

◦ Si $Y(\theta) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}$, la droite $y = L$ dans $\mathcal{R}_{\theta_0}$ est asymptote à Γ pour $\theta \to \theta_0$.

◦ Si $Y(\theta) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors Γ admet une branche parabolique dirigée vers $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_{\theta_0}})$.

2 Méthode de tracé

En pratique [a], on donne $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ très souvent de classe $\mathcal{C}^\infty$ où D es réunion finie d'intervalles disjoints. f n'est donc pas un arc paramétré *stricto sensu.* Si $D = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ou les I_k sont des intervalles, alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f_{|I_k} : I_k \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré de support Γ_k. L'objectif est de tracer $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$. f est donnée par ses applications coordonnées x et y : $\forall t \in D$, $f(t) = (x(t), y(t))$.

2.1 Réduction du domaine d'étude

❒ Il se peut que Γ soit complètement décrit lorsque t décrit $D_1 \subsetneq D$. Par exemple, si x et y sont T-périodiques avec $T > 0$, $\forall t \in D$, $M(t + T) = M(t)$ donc Γ est entièrement décrit lorsque t décrit un intervalle d'amplitude T.

❒ On peut exploiter les symétries de Γ.

- Le plus souvent, on regarde la parité de x et y [b].
  - Si x et y sont paires, alors $M(t) = M(-t)$ donc $\Gamma = \{M(t) \,|\, t \in D \cap \mathbb{R}_+\}$.
  - Si x est paire et y impaire, $M(t)$ est le symétrique de $M(-t)$ par rapport à (Ox). Soit $\Gamma_+ = \{M(t) \,|\, t \in D \cap \mathbb{R}_+\}$, alors $\Gamma = \Gamma_+ \cup s_{(Ox)}(\Gamma_+)$.
  - Si x est impaire et y paire, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Oy) donc $\Gamma = \Gamma_+ \cup s_{(Oy)}(\Gamma_+)$.
  - Si x et y sont impaires, $M(-t) = -M(t)$ donc $M(t)$ est le symétrique de $M(-t)$ par rapport à O donc $\Gamma = \Gamma_+ \cup s_O(\Gamma_+)$.
- Si, pour $t \in D$, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$, alors $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.

Exemples

(1) Soit $f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, x et y sont 2π-périodiques donc on s'intéresse à f sur $[-\pi, \pi]$. Or pour $t \in [-\pi, \pi]$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Oy). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ et on note $\Gamma_+ = f([0, \pi])$. On a donc $\Gamma = \Gamma_+ \cup s_{(Oy)}(\Gamma_+)$. Or pour $t \in [0, \pi]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc $M(\pi - t)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à O. On étudiera donc f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on note $\Gamma_+ = \Gamma_1 \cup s_O(\Gamma_1)$ car lorsque t décrit $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\pi - t$ décrit $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(2) Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \left(\frac{1}{t^2} + 2t, \frac{2}{t} + t^2\right)$ et on remarque que $f\left(\frac{1}{t}\right) = (y(t), x(t))$ donc $M\left(\frac{1}{t}\right)$ se déduit de M par la symétrie par rapport à la première bissectrice $\Gamma : y = x$. Si $\Gamma_1 = f([0, 1])$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup s_\Delta(\Gamma_1)$.

(3) Étudions une cycloïde définie par $x(t) = t\sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$ donc $M(t + 2\pi)$ de déduit de $M(t)$ par une translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{e_1}$. On étudiera donc f sur $[-\pi, \pi]$ puis on effectue des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{e_1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $x(t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ donc $M(-t)$ est l'image de $M(t)$ par rapport à (Oy) donc si $\Gamma_1 = f([0, \pi])$, alors $f([-\pi, \pi]) = \Gamma_1 \cup s_{(Oy)}(\Gamma_1)$.

---

a. Le 25 mai 2012 est une jour historique : notre angevin blond national, Girvile, a découvert un théorème qui va révolutionner la géométrie :

« Toutes droites passant par un point M concourrent en M »

Je vous laisse juge de la portée de ce résultat génial.

b. Ce qui suppose bien évidemment que D soit symétrique par rapport à l'origine.

2.2 Étude de x et y

❒ On calcule x' et y', on veut le signe de x' et y' et les points où ces deux fonctions s'annulent.
- Si t est tel que $x'(t) = y'(t) = 0$, alors t est un paramètre singulier.
- Si t est tel que $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$, alors la tangente à Γ en $M(t)$ est verticale.
- Si t est tel que $x'(t) \neq 0$ et $y'(t) = 0$, alors la tangente à Γ en $M(t)$ est horizontale.

❒ On cherche ensuite les limites de x et y aux points adhérents à D dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais n'appartenant pas à D. Cette étude fait apparaître des branches infinies éventuelles. Pour chacune, on vérifie l'existence de l'asymptote.

❒ Enfin, on détermine l'allure de Γ aux points de paramètres singuliers.

Bilan On résumé tout cela dans un tableau de variation à 5 entrées $(t,\ x'(t),\ y'(t),\ x(t),\ y(t))$ où figurent tous les « points intéressants ».

2.3 Tracé

Pour la précision, on peut placer quelques points supplémentaires.

2.3.1 Exemples en coordonnées cartésiennes

(1) Étudier $f(t) = \begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$ définie sur $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$.

- Il n'y a pas de réductions évidentes du domaine d'étude.
- x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et pour $t \in D$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2 - \frac{2}{(2t+1)^2} \\ &= 2\frac{(2t+1)^2 - 1}{(2t+1)^2} \\ &= \frac{8t(t+1)}{(2t+1)^2} \\ y'(t) &= 2t + \frac{2}{(2t+1)^2} \\ &= 2\frac{t(2t+1)^2 + 1}{(2t+1)^2} \\ &= \frac{2}{(2t+1)^2}\left[4t^3 + 4t^2 + t + 1\right] \\ &= \frac{2}{(2t+1)^2}\left(4t^2 + 1\right)(t+1) \end{aligned}$$

- $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ or $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{2t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc Γ admet pour $t \to +\infty$ une branche parabolique dans la direction (Oy).
- $x(t) \underset{t \to -\frac{1}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $y(t) \underset{t \to -\frac{1}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$, $x(t) \underset{t \to -\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t \to -\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$ or $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t \to -\frac{1}{2}}{\longrightarrow} -1$ et

$$x(t) + y(t) \underset{t \to -\frac{1}{2}}{\longrightarrow} -\frac{3}{4}$$

donc $\Delta : y = -x - \dfrac{3}{4}$ est asymptote à Γ pour $t \to -\dfrac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned} y(t) + x(t) + \frac{3}{4} &= t^2 + 2t + \frac{3}{4} \\ &\underset{-\frac{1}{2}}{\sim} 1 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) \text{ car } -\frac{1}{2} \text{ est racine de } t^2 + 2t + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

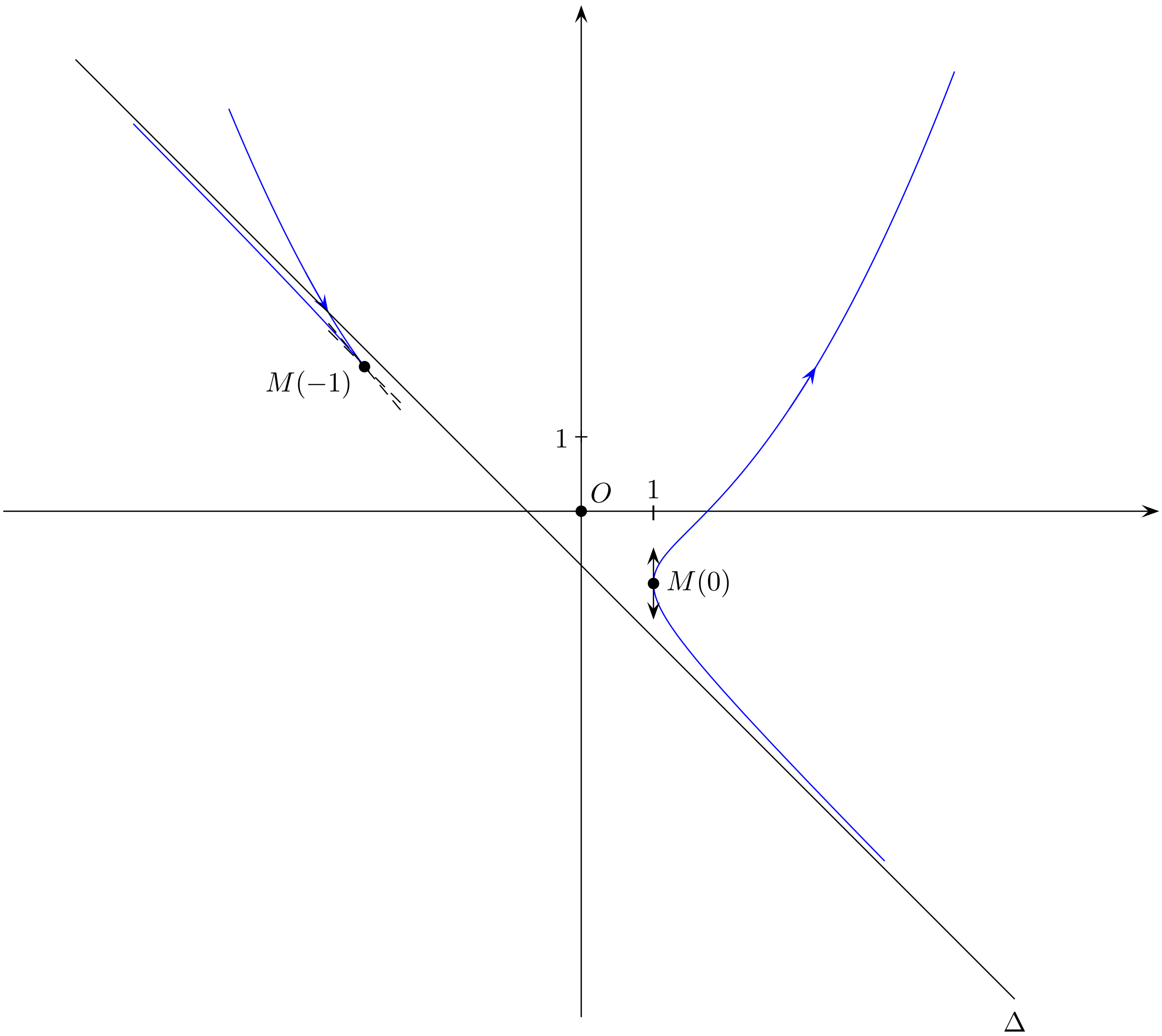
Ainsi pour $t \to -\dfrac{1}{2}^{+}$, $M(t)$ est au dessus de Δ et pour $t \to -\dfrac{1}{2}^{-}$, $M(t)$ est en dessous de Δ.

– Étudions Γ au point de paramètre singulier -1 : en effet, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$. $M(-1) = (-3, 2)$,

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{8}{(2t+1)^3} \quad \text{et} \quad y''(t) = 2 - \frac{8}{(2t+1)^3} \\ x'''(t) &= -\frac{48}{(2t+1)^4} \quad \text{et} \quad y'''(t) = \frac{48}{(2t+1)^4} \end{aligned}$$

d'où $f''(-1) = (-8, 10)$, $f'''(-1) = (-48, 48)$. $f''(-1)$ et $f'''(-1)$ ne sont pas proportionnelles donc Γ présente en $(-3, 2)$ un point de rebroussement de la première espèce. On a donc :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

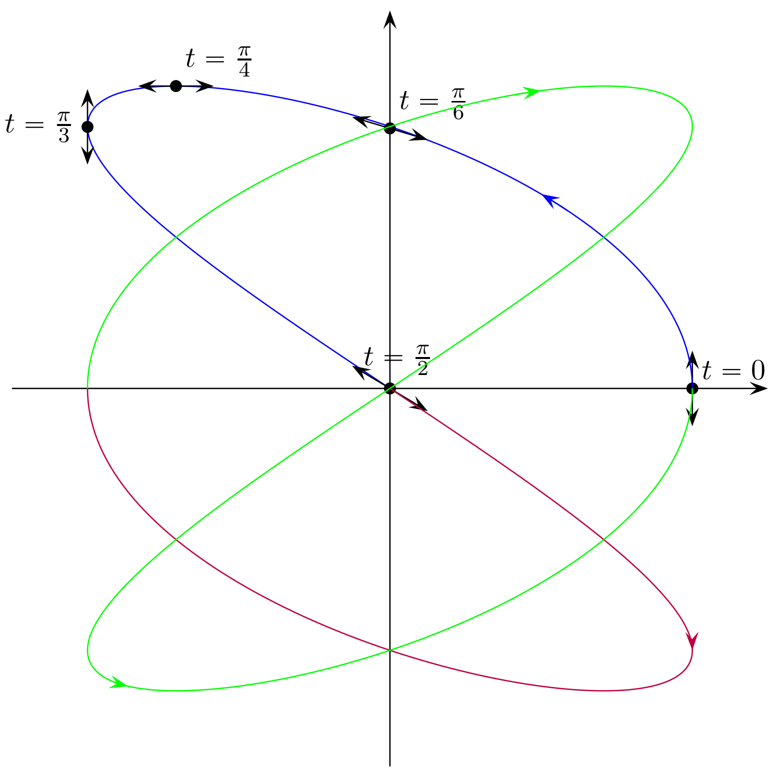


(2) Traçons une courbe de Lissajous : pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$.

- f est 2π-périodique donc Γ est entièrement décrite si t décrit $[-\pi, \pi]$. x est paire et y est impaire donc $M(-t)$ se déduit de $M(t)$ par la symétrie d'axe (Ox) donc si $\Gamma_1 = f([0, \pi])$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup s_{(Oy)}(\Gamma_1)$. Mieux, pour $t \in [0, \pi]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - r = -y(t))$ donc $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à O donc, si $\Gamma_2 = f\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 \cup s_O(\Gamma_2)$.
- Étudions donc f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = -3\sin(3t)$ et $y'(t) = 2\cos(2t)$ donc on dresse le tableau de variations suivant :

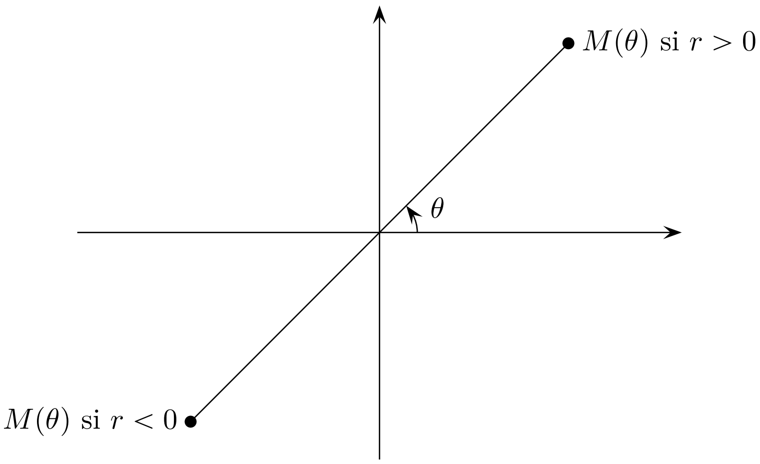
t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	-3	$-$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-$	0	$+$	3
$y'(t)$	2	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$x(t)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

D'où la courbe qui suit :



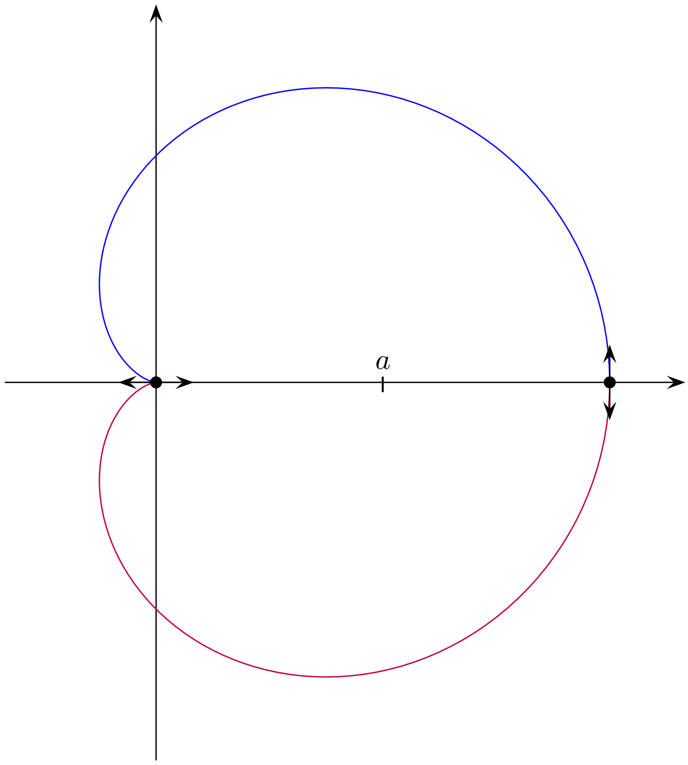
2.3.2 Exemples en coordonnées polaires

On donne $\theta \longmapsto r(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et on étudie $f : \theta \longrightarrow M(\theta) = O + r(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$. On ne repassera pas en coordonnées cartésiennes pour garder la signification géométrique de θ. Ce qui importe est de trouver le signe de r ainsi que les valeur où r s'annule.



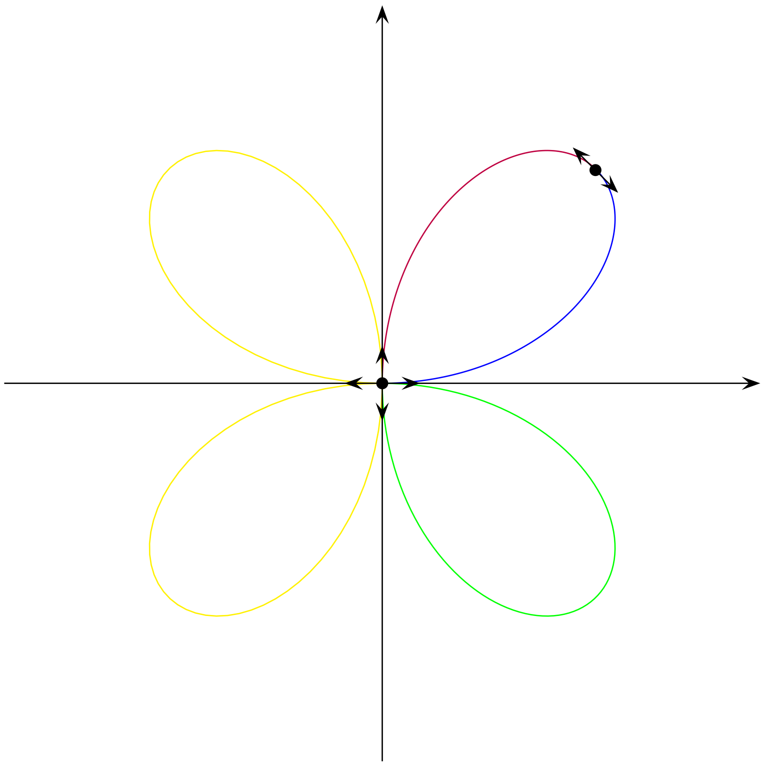
On poursuit avec une étude éventuelle de branches infinies et le cas du passage par l'origine.

(1) Traçons la cardioïde $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. $\theta \longmapsto \rho\,(\theta)$ est 2π-périodique donc $M\,(\theta + 2\pi) = M\,(\theta)$. Γ est entièrement décrite lorsque θ décrit $[-\pi, \pi]$ par exemple. ρ est paire donc $M\,(-\theta) = s_{(Ox)}\,(M\,(\theta))$ [a]. Ainsi, si Γ_1 est l'ensemble décrit par $M\,(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup s_{(Oy)}\,(\Gamma_1)$. Une rapide étude de la fonction et de sa dérivée permet de tracer la courbe suivante :



(2) On pose $\rho = \sin\,(2\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. ρ est π périodique donc $M\,(\theta + \pi)$ se déduit de M par une symétrie centrale de centre O. Pour $\theta \in [0, \pi]$, $\rho\,(\pi - \theta) = \sin\,(2\pi - 2\theta) = -\rho\,(\theta)$ et $M\,(\pi - \theta)$ se déduit de $M\,(\theta)$ par rapport à la symétrie d'axe (Ox). Si on note $\Gamma_2 = f\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$, alors $\Gamma = f\,([0, \pi]) = \Gamma_2 \cup s_{(Ox)}\,(\Gamma_2)$. De plus, pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\,(\theta)$ donc $M\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ se déduit de $M\,(\theta)$ par la symétrie d'axe $\Delta : y = x$. Une rapide étude de la fonction sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ nous permet de tracer :

[a] On aurait eu de même $M\,(-\theta) = s_{(Oy)}\,(M\,(\theta))$ si ρ avait été impaire.



3 Notions métriques attachées aux courbes planes

3.1 Changement de paramètre

3.1.1 Arcs $\mathcal{C}^k$-équivalents

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle changement de paramètre de classe $\mathcal{C}^k$ de J sur I tout $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : J \longrightarrow I$ [a]

a. Voir section 14.3.1.4 du cours complet page 220. φ est donc bijective de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque.

On rappelle que si φ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de J sur I, alors φ' est non nulle et de signe constant. On pourra donc parler de changements de paramètres croissants et décroissants.

Soient (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$, on dira que f et g sont équivalents s'il existe un changement de paramètre de classe $\mathcal{C}^k$ $\varphi : J \longrightarrow I$ tel que $g = f \circ \varphi$. On dit alors que (J, g) est un reparamétrage de (I, f).

Si on a $\varphi : \begin{array}{l} J \longrightarrow I \\ u \mapsto t = \varphi(u) \end{array}$, alors considérer $g = f \circ \varphi$ c'est prendre u pour paramètre et poser $t = \varphi(u)$.

Remarques La relation de $\mathcal{C}^k$-équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. En effet :

- $(I, f) \sim (I, f)$ via Id_I ;
- si $(J, g) \sim (I, f)$ alors il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ tel que $g = f \circ \varphi$ d'où, puisque φ est bijective, $f = g \circ \varphi^{-1}$ et φ^{-1} est aussi un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme ;
- si $(K, h) \sim (J, g)$ et $(J, g) \sim (I, f)$, alors il existe φ et ψ des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes tels que $g = f \circ \varphi$ et $h = g \circ \psi$ donc $h = f \circ \varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi$ est aussi un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Propriété Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \longrightarrow I$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et $g = f \circ \varphi$.

❒ $g(J) = \{f(\varphi(u)) \,|u \in J\} = \{f(t) \,|t \in I\} = f(I)$ donc (I, f) et (J, g) ont le même support Γ.

❒ Pour $u \in J$, $g'(u) = \varphi'(u) f'(\varphi(u))$ donc le vecteur vitesse en $g(u)$ est proportionnel au vecteur vitesse $f(\varphi(u))$. D'ailleurs, u est régulier pour (J, g) si et seulement si $t = \varphi(u)$ est régulier pour (I, f).

❒ Supposons $k \geqslant 2$, alors pour $u \in J$, $g''(u) = \varphi''(u) f'(\varphi(u)) + \varphi'(u)^2 f''(\varphi(u))$ donc

$$\begin{aligned}
\det_{\mathrm{BC}}\left(g'(u), g''(u)\right) &= \det_{\mathrm{BC}}\Big(\varphi''(u) f'(\varphi(u)) + \varphi'(u)^2 f''(\varphi(u)), \varphi'(u) f'(\varphi(u))\Big) \\
&= \det_{\mathrm{BC}}\left(\varphi''(u) f'(\varphi(u)), \varphi'(u) f'(\varphi(u))\right) + \det_{\mathrm{BC}}\Big(\varphi'(u)^2 f''(\varphi(u)), \varphi'(u) f'(\varphi(u))\Big) \\
&= \underbrace{\varphi'(u)^3}_{\neq 0} \det_{\mathrm{BC}}\left(f''(\varphi(u)), f'(\varphi(u))\right)
\end{aligned}$$

Ainsi u est birégulier pour (J, g) si et seulement si $t = \varphi(u)$ est birégulier pour (I, f).

3.1.2 Notations classiques

❒ Pour $u \in J$ on note $t = \varphi(u)$, $M(u)$ pour $g(u)$, $M(t)$ pour $f(t)$.

❒ Concernant les dérivées, $\varphi'(u)$ se note $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$, $f'(t)$ se note $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ et $g'(u)$ se note $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u}$. Les calculs précédents deviennent alors

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

Remarque On sait que $\varphi'(u)$ est de signe constant sur J donc on a deux cas :

(1) $\forall u \in J$, $\varphi'(u) > 0$;

(2) $\forall u \in J$, $\varphi'(u) < 0$.

Dans le cas (1), $\overrightarrow{f'}(\varphi(u))$ et $\overrightarrow{g'}(u)$ sont colinéaires de même sens donc Γ est parcouru dans le même sens que (I, f). Dans les cas (2), les vecteurs sont opposés donc (J, g) est parcouru dans les sens inverse de celui de (I, f).

L'arc paramétré $\mathcal{C}^k$ (I, f) définit une orientation sur Γ ; seront considérés de même orientation tous les arcs paramétrés (J, g) de classe $\mathcal{C}^k$ déduits de (I, f) par un changement de paramètre croissant.

3.2 Longueur

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ une subdivision de $[a,b]$ [a]. On définit $L(\sigma)$ comme la longueur de la ligne brisée $(M(t_0), M(t_1), \ldots, M(t_m))$ d'où

$$L(\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

L'ensemble $\{L(\sigma) \,|\sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$ est en fait majoré et par définition, la longueur $\ell(\Gamma)$ du support de f est la borne supérieure de cet ensemble.

a. Voir section 17.1.1.1 du cours complet page 263.

Démonstration ❒ Montrons d'abord que $\{L(\sigma) \,|\sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$ est majoré. Soit $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ une subdivision de $[a,b]$, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$, $f(t_{k+1}) - f(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t_m} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f'| \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b |f'|$ majore $L(\sigma)$ pour toute subdivision σ.

❒ Montrons à présent que $\displaystyle\int_a^b |f'|$ est en fait la longueur $\ell(\Gamma)$, c'est-à-dire la borne supérieure de l'ensemble $\{L(\sigma) \,|\sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$. On sait que $\ell(\Gamma) \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'|$ en sa qualité de borne supérieure. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ [b], on cherche une subdivision de $[a,b]$ telle que $L(\sigma) \geqslant \displaystyle\int_a^b |f'| - \varepsilon$. Mais avant, soit $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ une subdivision de $[a,b]$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b |f'| - L(\sigma) &= \int_a^b |f'| - \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f'(t)|\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} |f'(t)| - |f'(t_k)|\,\mathrm{d}t \right]}_{U} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \left[\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| - \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f'(t_k)|\,\mathrm{d}t \right]}_{V} \end{aligned}$$

Majorons séparément U et V.

$$\begin{aligned} |U| &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f'(t)| - |f'(t_k)|\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \big| |f'(t)| - |f'(t_k)| \big|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

b. Le grand retour des epsilons !

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|f'(t) - f'(t_k)\right| \,\mathrm{d}t$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|V| &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \left|\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t_k)\,\mathrm{d}t\right|\right| \text{ car } \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|f'(t_k)\right| \,\mathrm{d}t = \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t_k)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t_k)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|f'(t) - f'(t_k)\right| \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

C'est la même expression que U. On a donc

$$\int_a^b \left|f'\right| - L(\sigma) \leqslant 2\sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|f'(t) - f'(t_k)\right| \,\mathrm{d}t$$

De plus, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ donc f' est continue sur le compact $[a, b]$. D'après le théorème de Heine, f' est uniformément continue sur $[a, b]$ donc $\exists \delta > 0 / \forall s, t \in [a, b]$, $|s - t| \leqslant \delta \Rightarrow |f'(s) - f'(t)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$.

❒ Soit $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ une subdivision de $[a, b]$ de pas plus petit que δ : $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $|t - t_k| \leqslant |t_{k+1} - t_k| \leqslant \delta(\sigma) \leqslant \delta$ donc

$$\left|f'(t) - f'(t_k)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|f'\right| - L(\sigma) &\leqslant 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\epsilon}{2(b-a)} (t_{k+1} - t_k) \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{b-a} (t_m - t_0) \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

D'où le résultat [a].

Remarque Si (J, g) est un arc paramétré $\mathcal{C}^k$-équivalent à $([a, b], f)$, alors il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : J \longrightarrow [a, b]$ tel que $g = f \circ \varphi$. φ est une bijection continue de J sur $[a, b]$ donc J est un segment $[\alpha, \beta]$. On sait alors que $\Gamma = f([a, b]) = g([\alpha, \beta])$. Il est donc logique de s'attendre à ce que la longueur soit indépendante du paramétrage.

En effet, supposons par exemple que $\forall u \in J$, $\varphi'(u) > 0$. Alors pour $u \in J$, $g'(u) = \varphi'(u) f' \circ \varphi(u)$ et $[a, b] = \varphi(J) = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ donc $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \left|g'(u)\right| \,\mathrm{d}u &= \int_\alpha^\beta \underbrace{\left|\varphi'(u)\right|}_{\varphi'(u)} \left|f'(\varphi(u))\right| \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \left|f'(t)\right| \,\mathrm{d}t \text{ avec le changement de variable } t = \varphi(u) \\
&= \int_a^b \left|f'(t)\right|
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\forall u \in J$, $\varphi'(u) < 0$, $|\varphi'(u)| = -\varphi'(u)$ mais $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$ d'où le même résultat.

a. « *Ouf !* »

En pratique

– Si $f(t) = (x(t), y(t))$, alors $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}$.
– Si Γ est le graphe de $t \in [a,b] \longmapsto \psi(t)$ où $\psi \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, alors Γ est le support de l'arc paramétré $t \longmapsto (t, \psi(t))$ et $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \psi'^2}$.
– Si on donne $r \in \mathcal{C}^k([a,b], \mathbb{R})$ en coordonnées polaires, alors pour $\theta \in \mathbb{R}$, dans $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} \left| \begin{array}{l} r'(\theta) \\ r(\theta) \end{array} \right.$ donc, puisque $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ est orthonormé, $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2}$.

3.3 Repère de Frénet, abscisse curviligne et paramétrages normaux

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ régulier : $\forall t \in I$, $f'(t) \neq 0$. Pour $t \in I$, on pose

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{f'}(t)}{\left\|\overrightarrow{f'}(t)\right\|} \text{ et } \overrightarrow{N}(t) = \wedge \overrightarrow{T}(t)$$

$\left(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t)\right)$ s'appelle le repère de Frénet au point de paramètre t.

❒ f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ ainsi que $|f'|$, et $|f'|$ ne s'annule pas donc, d'après les théorèmes généraux, $t \in I \longmapsto \overrightarrow{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{|f'(t)|}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Si on note $\overrightarrow{T}(t) \left| \begin{array}{l} a(t) \\ b(t) \end{array} \right.$, alors $\overrightarrow{N}(t) \left| \begin{array}{l} -b(t) \\ a(t) \end{array} \right.$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ de la même manière que ses applications coordonnées.

❒ $\overrightarrow{T}(t)$ est le vecteur unitaire tangent au point de paramètre t et $\overrightarrow{N}(t)$ est le vecteur unitaire normal au point de paramètre t. La droite $M(t) + \text{Vect}\left(\overrightarrow{N}(t)\right)$ est la normale à Γ au point de paramètre t.

❒ Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : J \longrightarrow I$ un changement de paramètre de classe $\mathcal{C}^k$, $g = f \circ \varphi$. Pour $u \in J$, on pose $t = \varphi(u)$ et on a $g'(u) = \varphi'(u) f'(t)$ donc $|g'(u)| = |\varphi'(u)| |f'(t)|$ d'où

$$\frac{g'(u)}{|g'(u)|} = \underbrace{\frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}}_{\in\{\pm 1\}} \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

Ainsi, $\overrightarrow{T}(u) = \overrightarrow{T}(t)$ si φ est croissante et $\overrightarrow{T}(u) = -\overrightarrow{T}(t)$ si φ est décroissante.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$. On dit que l'arc paramétré (I, f) est normal si $\forall t \in I$, $|f'(t)| = 1$. Dans ce cas, $\forall t \in I$, $\overrightarrow{T}(t) = f'(t)$.

Petite histoire Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ régulier, on cherche un intervalle J de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow I$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme strictement croissant tel que, si on pose $g = f \circ \varphi$, alors $\forall u \in J$, $|g'(u)| = 1$.

❒ Supposons l'existence de J et de φ, soit $\psi = \varphi^{-1}$. On sait que $f = g \circ \psi$ d'où, pour $t \in I$, $f'(t) = \psi'(t) g'(\psi(t))$ et donc

$$|f'(t)| = \underbrace{|\psi'(t)|}_{\psi'(t)>0} \underbrace{|g'(\psi(t))|}_{1}$$

ψ est donc une primitive de $t \longmapsto |f'(t)|$.

❒ L'application $t \in I \longmapsto |f'(t)|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ car (I, f) est régulier de classe $\mathcal{C}^k$ donc $|f'|$ est au moins continue, elle admet une primitive ψ sur I. ψ' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I donc ψ est de classe $\mathcal{C}^k$. Or, $\forall t \in I$,

$\psi'(t) = |f'(t)| > 0$ donc ψ induit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ [a] de I sur $J = \psi(I)$. On remarque que pour $t_1, t_2 \in I$,

$$\begin{aligned}\psi(t_2) - \psi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |f'| \\ &= \pm L(\Gamma)\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varphi = \psi^{-1}$ le difféomorphisme réciproque, φ est donc aussi un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I et pour $s \in J$,

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(s) &= \varphi'(s)\, f'(\varphi(s)) \\ &= \frac{1}{\psi'(\varphi(s))} f'(\varphi(s)) \\ &= \frac{1}{|f'(\varphi(s))|} f'(\varphi(s))\end{aligned}$$

Ainsi, $\left|(f \circ \varphi)'(s)\right| = 1$ et si on note $g = f \circ \varphi$, alors l'arc paramétré (J, g) est équivalent à (I, f) et (J, g) est normal.

Bilan

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$. Alors il existe un arc paramétré (J, g) de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^k$-équivalent à (I, f) et de surcroît normal. On dit que (J, g) est un reparamétrage normal de (I, f).
Les changements de paramètres $\varphi : J \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $(J, f \circ \varphi)$ est normal sont tels que $\forall t \in I$, $\left(\varphi^{-1}\right)'(t) = |f'(t)|$.

Abscisse curviligne

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, une abscisse curviligne est une application $t \in I \longmapsto s(t)$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall t_1, t_2 \in I$,

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire la longueur algébrique de la portion de Γ délimitée par les points de paramètres t_1 et t_2.

Les abscisses curvilignes sont des primitives de $|f'|$. Par exemple, pour $t_0 \in I$, $s : t \in I \longrightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left|f'(u)\right|\,\mathrm{d}u$ s'appelle l'abscisse curviligne d'origine $M(t_0)$.

Exemple Soit $f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \left(t - \tanh t, \dfrac{1}{\cosh t}\right)$. Il s'agit de déterminer l'abscisse curviligne d'origine $A = M(0) = (0, 1)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = \displaystyle\int_0^t \left|f'(u)\right|\,\mathrm{d}u$ or pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(u) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 u}, -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u}\right) \\ &= \frac{\sinh u}{\cosh^2 u}(\sinh u, -1) \\ \text{d'où } \left|f'(u)\right| &= \frac{|\sinh u|}{\cosh^2 u}\sqrt{1 + \sinh^2 u} \\ &= \frac{|\sinh u|}{\cosh u}\end{aligned}$$

a. C'est classe, n'est-ce pas ?

- Si $t > 0$, $s(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sinh u}{\cosh u}\, \mathrm{d}u = [\ln \cosh u]_0^t = \ln(\cosh t)$.
- Si $t < 0$, $s(t) = -\ln(\cosh t)$.

Limitons nous à $t \in \mathbb{R}_+$ et cherchons un reparamétrage normal de $\Gamma_+ = f(\mathbb{R}_+)$. Pour $t \geqslant 0$, $s(t) = \ln(\cosh t)$ d'où

$$\cosh t = \mathrm{e}^{s(t)} \Rightarrow t = \operatorname{argch}\left(\mathrm{e}^{s(t)}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{s(t)} + \sqrt{\mathrm{e}^{2s(t)} - 1}\right)$$

Pour la dernière ligne de calcul, se reporter à la section 3.2.5.2 du cours complet page 45. Un reparamétrage normal de t est donc

$$s \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \left(\ln\left(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1}\right) - \tanh \ln\left(\mathrm{e}^s + \sqrt{\mathrm{e}^{2s} - 1}\right), \mathrm{e}^{-s}\right)$$

3.4 Courbure, relations de Frénet

Soit (I, f) un arc paramétré de classer $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ que l'on suppose régulier : $\forall t \in I$, $f'(t) \neq 0$ et $s \in J \longmapsto g(s) \in I$ un reparamétrage croissant normal de (I, f). On a alors $\forall s \in J$, $|g'(s)|^2 = 1$ et $\overrightarrow{T}(s) = g'(s)$. Pour $s \in J$, on note $g(s) = (a(s), b(s))$ où $a, b \in \mathcal{C}^k(J, I)$. Ainsi $a = a'^2(s) + b'^2(s)$ d'où, en dérivant,

$$0 = 2a'(s)\, a''(s) + 2b'(s)\, b''(s)$$

ainsi, $\overrightarrow{T}(s) . \overrightarrow{T}'(s) = 0$ donc $\overrightarrow{T'}(s) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{N}(s)\right)$.

On définit la courbure $\gamma(s)$ au point $M(s)$ comme étant l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{T'}(s) = \gamma(s)\, \overrightarrow{N}(s)$.

Interprétation géométrique En reprenant les notations précédentes, $\forall s \in J$, $|g'(s)| = 1$ et g' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ donc, d'après le théorème de relèvement, $\exists \alpha \in \mathcal{C}^k(J, I)$ telle que $\forall s \in J$, $g'(s) = \mathrm{e}^{i\alpha(s)}$ donc pour $s \in J$, $\alpha(s)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, g'(s)})$. On a alors

$$\overrightarrow{T}(s) \left| \begin{array}{l} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{array} \right. \quad \text{et } \overrightarrow{N}(s) \left| \begin{array}{l} -\sin(\alpha(s)) \\ \cos(\alpha(s)) \end{array} \right. \quad \text{d'où } \overrightarrow{T'}(s) \left| \begin{array}{l} -\alpha'(s) \sin(\alpha(s)) \\ \alpha'(s) \cos(\alpha(s)) \end{array} \right.$$

donc $\overrightarrow{T'}(s) = \alpha'(s)\, \overrightarrow{N}(s)$ donc $\gamma(s) = \alpha'(s)$.

De plus, en dérivant $\overrightarrow{N}(s)$, on obtient les relations de Frénet (en notation physicienne) :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \overrightarrow{N} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \overrightarrow{T}$$

On remarque que le produit mixte :

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{T}(s), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}\right] &= \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s^2}\right] \\ &= \left[\overrightarrow{T}, \gamma(s)\, \overrightarrow{N}\right] \\ &= \gamma(s) \underbrace{\left[\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right]}_{1} \\ &= \gamma(s) \end{aligned}$$

d'où $\gamma(s) = [f'(s), f''(s)]$. Ainsi, s est birégulier si et seulement si $\gamma(s) \neq 0$.

Si s est tel que $\gamma(s) \neq 0$, on on définit le rayon de courbure $R(s)$ par $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$ et le centre de courbure $I(s)$ au point $M(s)$ par $I(s) = M(s) \dotplus R(s)\overrightarrow{N}(s)$.
On peut démontrer que $M(s) \dotplus \overrightarrow{T}(s)$ est la tangente en $M(s)$ à $\mathcal{C}(I(s), |R(s)|)$. Si l'arc (I, f) est birégulier, alors l'ensemble des centres de courbure s'appelle la développée de f.

Calculs pratiques

(1) Si l'arc paramétré est donné par $f : t \in I \longrightarrow (x(t), y(t))$, soit $s \longmapsto M(s)$ un paramétrage normal de f. On a donc $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $\overrightarrow{T} \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$ or , si on pose $t = s(u)$, $f'(t) = s'(u) f'(t)$ et $f''(t) = s''(u) f'(t) + s'^2(u) f''(t)$ donc, en notation physicienne, $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left(s'(u)\right)^3 \left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}, \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s^2}\right] = \left(s'(u)\right)^3 \gamma(s)$ d'où

$$\boxed{\gamma(s) = \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

(2) Si Γ est d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} \left| \begin{array}{l} r' \\ r \end{array} \right.$ dans $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta^2} \left| \begin{array}{l} r'' - r \\ 2r' \end{array} \right.$. $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ est orthonormée directe donc

$$\boxed{\gamma(s) = \frac{\begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix}}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

(3) Si Γ est la courbe d'équation cartésienne $y = g(x)$ où $g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x} \left| \begin{array}{l} 1 \\ g'(x) \end{array} \right.$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x^2} \left| \begin{array}{l} 0 \\ g''(x) \end{array} \right.$ donc

$$\boxed{\gamma(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'(x) & g''(x) \end{vmatrix}}{(1 + g'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{g''(x)}{(1 + g'^2(x))^{\frac{3}{2}}}}$$

Exemples

(1) Calculons la courbure de la cardioïde donnée en équation polaire par $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Soit $\theta \longmapsto s(\theta)$ un changement de paramètre normal de Γ. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a dans $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} \left| \begin{array}{l} -a\sin\theta \\ a(1 + \cos\theta) \end{array} \right.$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} &= \left| \begin{array}{l} -2a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ 2a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left| \begin{array}{l} -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\| = 2a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\overrightarrow{T}(\theta) = -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v_\theta} = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$. Ainsi, $\alpha : \theta \longrightarrow \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ est une détermination de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{T}(\theta)}\right)$: $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{T}(\theta) = \mathrm{e}^{i\alpha(\theta)}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\gamma &= (\alpha \circ \theta)'(s) \\
&= \alpha'(\theta)\,\theta'(s) \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{s'(\theta)} \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\|} \quad \text{car } s \text{ est un changement de paramètre normal} \\
&= \frac{3}{4a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(a) Déterminons la développée d'une ellipse. Soit $\mathcal{E}$ le support de $(x(t), y(t)) = (a\cos t, b\sin t)$ avec $0 < b < a$. $\mathcal{E}$ est l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $t \longmapsto s(t)$ un changement de paramètre normal de $\mathcal{E}$. On a alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \left| \begin{array}{l} -a\sin t \\ b\cos t \end{array}\right.$ d'où $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Or $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2} \left| \begin{array}{l} -a\cos t \\ -b\sin t \end{array}\right.$ donc

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}\right]}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\|^3} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix}}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

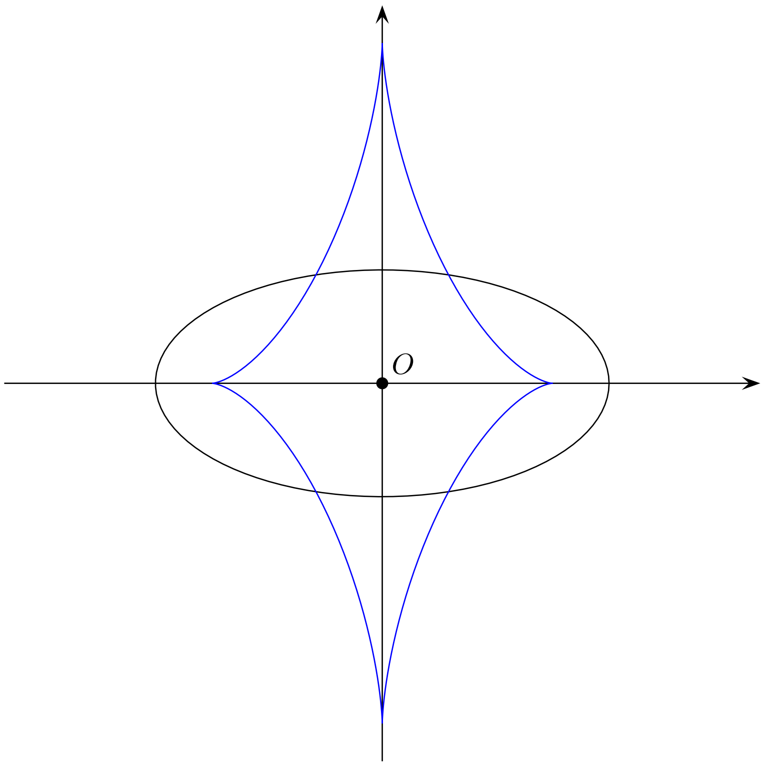
Ainsi,

$$R(t) = \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{1}{ab}\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\|^3, \ \overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\|}\left| \begin{array}{l} -a\sin t \\ b\cos t \end{array}\right. \quad \text{et } \overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right\|}\left| \begin{array}{l} -b\cos t \\ -a\sin t \end{array}\right.$$

donc $I(t) = M(t) \dotplus R(t)\,\overrightarrow{N}(t)$, d'où

$$\begin{aligned}
I(t) &= \left(a\cos t + \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\left(-\frac{1}{a}\cos t\right), b\sin t + \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\left(-\frac{1}{b}\sin t\right)\right) \\
&= \left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne la courbe suivante :



4 Complément : théorème de relèvement

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. Si $\forall t \in I,\ |g(t)| = 1$ alors $\exists \theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I,\ g(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$.

De façon équivalente, si $a, b \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ sont telles que $\forall t \in I,\ a^2(t) + b^2(t) = 1$, alors $\exists \theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I,\ a(t) = \cos(\theta(t))$ et $b(t) = \sin(\theta(t))$.

Démonstration ❒ Supposons que θ existe, alors $\forall t \in I,\ g(t) = \exp(i\theta(t))$ donc

$$\begin{array}{rcl} g'(t) & = & i\theta'(t)\exp(i\theta(t)) \\ & = & i\theta'(t)\, g(t) \end{array}$$

Ainsi, $\theta' = \dfrac{g'}{ig}$ et θ est une primitive de $\dfrac{g'}{ig}$.

❒ L'application $\varphi : t \in I \longrightarrow \dfrac{g'(t)}{ig(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ d'après les théorèmes généraux donc φ est au moins continue car $k \geqslant 1$ donc φ admet des primitives. Soit donc α une primitive de φ, α est de classe $\mathcal{C}^k$ et étudions $F : t \in I \longrightarrow \dfrac{g(t)}{\exp(i\alpha(t))} = g(t)\exp(-i\alpha(t))$. F est dérivable et

$$\begin{array}{rcl} F'(t) & = & g'(t)\exp(-i\alpha(t)) - \underbrace{i\alpha'(t)}_{\frac{g'(t)}{g(t)}} g(t)\exp(-i\alpha(t)) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc F est constante donc $\exists \omega \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in I,\ g(t) = \omega \exp(i\alpha(t))$. $\omega \neq 0$ car g ne s'annule pas donc, puisque exp est surjective, $\exists \lambda \in \mathbb{C} / \omega = \exp(i\lambda)$. Ainsi, $\forall t \in I,\ g(t) = \exp[i(\alpha(t) + \lambda)]$ et on pose $\theta(t) = \alpha(t) + \lambda$. On a $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$, montrons que θ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et on sait que

$\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} 1 &= |g(t)| \\ &= |\exp(i(\theta_1(t) + i\theta_2(t)))| \\ &= \mathrm{e}^{\Re\mathrm{e}(i\theta_1(t) - \theta_2(t))} \\ &= \mathrm{e}^{-\theta_2(t)} \end{aligned}$$

D'où $\theta_2(t) = 0$ donc θ est réelle.

Nota bene θ s'appelle un relèvement de g. Les autres relèvements de g sont les applications $t \longmapsto \theta(t) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

❒ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in I$, $\mathrm{e}^{i(\theta(t)+2k\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta(t)} = g(t)$ donc $t \in I \longmapsto \theta(t) + 2k\pi$ est un relèvement.

❒ Réciproquement, soit ω un relèvement de g de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\forall t \in I$, $\mathrm{e}^{i\theta(t)} = \mathrm{e}^{i\omega(t)} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{i(\omega(t)-\theta(t))} = 1$ donc $\omega(t) - \theta(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc $(\omega - \theta)(I) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ or ω est continue et I est un intervalle donc ,d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $(\omega - \theta)(I)$ est un intervalle inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$, c'est donc un singleton de $2\pi\mathbb{Z}$. En effet, si $(\omega - \theta)(I)$ contient deux éléments $2k\pi$ et $2l\pi$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$ et $k < l$, alors il doit contenir l'intervalle $[2k\pi, 2l\pi]$ qui n'est évidemment pas inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$.