Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Ouverts et fermés

I.1. Parties ouvertes

Définition. *Soient $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un* ***voisinage*** *de a s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans V.*

On dit qu'une partie Ω de E est un ***ouvert*** *si c'est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si $\forall a \in \Omega \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(a, r) \subset \Omega$.*

L'ensemble E lui-même, $\varnothing$, et toutes les boules ouvertes, sont des ouverts.

Proposition I.1. *Si $(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)$ est une famille* ***finie*** *d'ouverts de E, alors $\bigcap_{k=1}^n \Omega_k$ est un ouvert.*

Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille ***quelconque*** *d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ est un ouvert.*

Proposition I.2. *Si deux normes sur E sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes ouverts.*

I.2. Parties fermées

Définition. *On dit qu'une partie F de E est* ***fermée*** *si son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert.*

L'ensemble E lui-même, $\varnothing$, les singletons, et toutes les boules fermées, sont des fermés.

Proposition I.3. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille* ***quelconque*** *de fermés de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.*

Si $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est une famille ***finie*** *de fermés de E, alors $\bigcup_{k=1}^n F_k$ est un fermé.*

Proposition I.4. *Soit F une partie de E. Il y a équivalence entre les deux propriétés :*

i. *F est fermée ;*

ii. *pour toute suite convergente (u_n) d'éléments de F, on a $\lim u_n \in F$.*

Autrement dit, F est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents.

Proposition I.5. *Si F est un fermé de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure (respectivement inférieure), alors $\sup F \in F$ (respectivement $\inf F \in F$).*

I.3. Intérieur, adhérence

Définition. *Soient $a \in E$ et $A \subset E$. On dit que a est un* ***point intérieur*** *à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$, c'est-à-dire si A est un voisinage de a.*

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé ***intérieur*** *de A et noté $\mathring{A}$.*

Proposition I.6. *Soit $A \subset E$. Alors*

- *$\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A ;*
- *si Ω est un ouvert inclus dans A, alors Ω est inclus dans $\mathring{A}$.*

L'intérieur de A est donc, au sens de l'inclusion, le plus grand ouvert inclus dans A.

Définition. *Soient $a \in E$ et $A \subset E$. On dit que a est* ***adhérent*** *à A si, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la boule ouverte $B(a, r)$ contient au moins un point de A.*

L'ensemble des points adhérents à A est appelé ***adhérence*** *de A et noté $\overline{A}$.*

Proposition I.7. *Un point a est adhérent à une partie A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.*

Proposition I.8. *Soit $A \subset E$. Alors*

- *$\overline{A}$ est un fermé qui contient A ;*
- *si F est un fermé qui contient A, alors F contient $\overline{A}$.*

L'adhérence de A est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit fermé contenant A.

Proposition I.9. *Une partie A de E est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$; elle est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Définition. *On appelle* ***frontière*** *d'une partie A de E l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$; c'est aussi $\overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$.*

I.4. Parties denses

Définition. *Une partie D de E est dite* ***dense*** *dans E si $\overline{D} = E$; cela équivaut à dire que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D.*

Proposition I.10. *Si deux fonctions sont continues sur E et sont égales sur une partie dense dans E, alors elles sont égales sur E.*

II. Topologie et continuité

II.1. Topologie induite

Définition. *Soit $A \subset E$. On dit qu'une partie Ω (respectivement F) de A est un **ouvert relatif** (respectivement **fermé relatif**) de A s'il existe un ouvert Ω_1 de E tel que $\Omega = A \cap \Omega_1$ (respectivement un fermé F_1 de E tel que $F = A \cap F_1$).*

Proposition II.1. *Une partie Ω de A est un ouvert relatif de A si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \cap A \subset \Omega$.*

Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si tous les points <u>de A</u> adhérents à F, appartiennent à F.

Proposition II.2. *Les résultats sur union et intersection d'ouverts ou de fermés restent valables pour des ouverts ou fermés relatifs de A.*

II.2. Parties ouvertes et continuité

Théorème II.3. *Soit $A \subset E$; soit f une application de A dans un espace vectoriel normé F, continue sur A. Soit B une partie de F. Si B est un ouvert (respectivement un fermé) de F, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert relatif (respectivement fermé relatif) de A.*

III. Parties compactes

III.1. Généralités

Définition. *Soit $K \subset E$. On dit que K est une partie **compacte**, ou est un **compact**, si toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K.*

Proposition III.1. *Si une partie est compacte, alors elle est fermée et bornée.*

Proposition III.2. *Si une suite d'éléments d'un compact a une seule valeur d'adhérence, alors cette suite converge.*

Proposition III.3. *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

III.2. Compacts en dimension finie

Théorème III.4. *De toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on peut extraire une suite convergente.*

Théorème III.5. *Si E est un espace de dimension finie, alors les compacts de E sont exactement les parties fermées et bornées.*

Proposition III.6. *Dans un espace E quelconque, tout sous-espace de dimension finie est fermé.*

III.3. Continuité et parties compactes

Théorème III.7. *L'image d'un compact par une application continue, est un compact.*

Théorème III.8. *Une fonction continue sur un compact K à valeurs réelles, est bornée sur K et atteint ses bornes.*

Théorème III.9. *Si une application est continue sur un compact, alors elle est uniformément continue sur ce compact.*

III.4. Équivalence des normes en dimension finie

Théorème III.10. *Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre elles.*

III.5. Produits de compacts

Proposition III.11. *Si A et B sont des parties compactes de E et F respectivement, alors $A \times B$ est une partie compacte de l'espace produit $E \times F$.*

IV. Connexité par arcs

IV.1. Définition

Définition. *Soit $(a,b) \in E^2$. On appelle **chemin** de a à b toute application f de $[0,1]$ dans E, continue sur $[0,1]$, vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

*Une partie C de E est dite **connexe par arcs** si, pour tout $(a,b) \in C^2$, il existe un chemin f de a à b vérifiant $\forall t \in [0,1] \quad f(t) \in C$.*

Proposition IV.1. *Toute partie convexe est connexe par arcs.*

Proposition IV.2. *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

IV.2. Continuité et connexité

Théorème IV.3. *L'image d'un connexe par arcs par une application continue, est connexe par arcs.*

Proposition IV.4. *Soit C une partie connexe par arcs de E, et f une application continue sur C, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : si a et b sont dans $f(C)$, alors tout l'intervalle borné par a et b est inclus dans $f(C)$.*

IV.3. Composante connexe par arcs

Soit $A \subset E$. On définit une relation $\sim_A$ sur A par : si $(a,b) \in A^2$, $a \sim_A b$ si et seulement si il existe un chemin de a à b qui ne sort pas de A ; c'est-à-dire une application continue de $[0,1]$ dans E telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f(t) \in A$ pour tout $t \in [0,1]$.

Proposition IV.5. *La relation $\sim_A$ est une relation d'équivalence.*

Définition. *Les classe d'équivalence de la relation $\sim_A$ sont appelées les **composantes connexes par arcs** de A.*

La composante connexe par arcs d'un élément a de A, est donc l'ensemble des $b \in A$ que l'on peut atteindre à partir de a par un chemin qui ne sort pas de A.

V. Séries dans un espace de dimension finie

Dans toute cette partie, E est un espace de dimension finie.

V.1. Convergence

Définition. *Soit (u_n) une suite de vecteurs de E ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, le vecteur S limite de la suite (S_n) est appelé la **somme** de la série, et noté $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; et, pour tout n, le vecteur $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste de rang** n de la série.*

Proposition V.1. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) a pour limite 0_E.*

Proposition V.2. *La **suite** de vecteurs (u_n) converge, si et seulement si la **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans ce cas, en notant ℓ la limite de la suite, on a pour tout n : $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$.*

V.2. Convergence absolue

Définition. *Soit (u_n) une suite de vecteurs de E. On dit que la série $\sum u_n$ converge **absolument** si la série **à termes réels** $\sum \|u_n\|$ converge.*

Théorème V.3. *Soit (u_n) une suite de vecteurs de E. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge ; et dans ce cas* $\left\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$.

V.3. Série géométrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition. *On dit qu'une norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **norme d'algèbre** si $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.*

Théorème V.4. *Soient $\|\ \|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\|A\| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible, la série $\sum A^k$ converge absolument, et $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$.*

V.4. Série exponentielle

V.4.1. Dans $\mathbb{C}$

Proposition V.5. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^k}{k!}$ converge absolument.*

Définition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose* $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!}$.

Proposition V.6. *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$,* $e^{a+b} = e^a e^b$.

V.4.2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème V.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, la série $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ converge absolument.*

Définition. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose* $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Proposition V.8. *Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.*

Proposition V.9. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors* $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.