Fondement des probabilités

Feuille d'exercices #10

Partie A – Probabilités sur un univers quelconque

Exercice 1 — Traduire à l'aide d'opérations ensemblistes les événements suivants :

1. L'un, au moins, des événements A ou B se réalise.
2. L'un et l'un seulement des évènements A ou B se réalise.
3. A et B se réalisent mais pas C.
4. Tous les événements A_n se réalisent.
5. Il y a une infinité d'événements A_n qui se réalisent.
6. Seul un nombre fini d'événements se réalise.
7. Il y a une infinité d'événements A_n qui ne se réalisent pas.
8. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

Exercice 2 — On tire simultanément 5 cartes d'un jeu en comportant 32. Quelle est la probabilité de tirer :

(a) l'as de ♠ et l'as de ♣ ?

(b) exactement deux as ?

(c) au moins deux as ?

(d) deux as et deux rois ?

(e) une double paire ?

(f) trois cartes de même valeur ?

(g) trois as et deux rois ?

(h) un full ?

Exercice 3 — Une urne contient a boules blanches $(a > 1)$ et b boules noires. On la vide en tirant une à une les boules sans remise. On note A_k l'évènement « la deuxième boule blanche est sortie au k–ième tirage ».

1. Calculer $\mathbf{P}(A_k)$.
2. Montrer que les événements A_k pour $2 \leqslant k \leqslant b+2$ forment un système complet d'événements.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{b+2}(k-1)\binom{a+b-k}{a-2} = \binom{a+b}{a}$.

Exercice 4 — On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $1/2$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$. On choisit une des pièces au hasard. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. Calculer la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 5 — *Double pile*
On lance une pièce avec la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile. Pour tout $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n^{e} lancer ». On pose $a_n = \mathbf{P}(A_n)$ pour tout $n > 1$ et $a_1 = 0$.

1. Déterminer a_2 et a_3.
2. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n > 1$.
3. On suppose $p = 2/3$. Exprimer a_n en fonction de n.

Exercice 6 — Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. On tire n boules en remettant à chaque tirage la boule tirée si celle-ci est rouge, en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?
2. La deuxième boule est rouge. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Exercice 7 — Un laboratoire vient de mettre au point un test pour détecter une maladie qui touche en moyenne un individu sur 5 000.

- Pour un patient malade, la probabilité d'être positif au test est de $998/1000$.
- Pour un patient sain, la probabilité d'être négatif au test est de $2999/3000$.

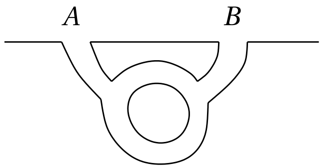
1. Ce test est-il vraiment fiable pour dépister les individus malades ?
2. Est-il vraiment fiable pour dépister les individus sains ?

Exercice 8 — Tim défie Tom au pile ou face. Tim lance deux fois une pièce équilibrée et Tom ne lance qu'une fois une pièce qui fait « pile » avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de « faces ». Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?

2. Quelle est la probabilité que Tim gagne le jeu ?
3. Existe-t-il un p tel que le jeu soit équitable ?

Exercice 9 — *La taupe*
Une taupe entre dans son terrier par l'entrée A. À chaque intersection, elle a une chance sur deux de prendre à gauche et une chance sur deux de prendre à droite.



Quelle est la probabilité qu'elle sorte en B ?

Exercice 10 — Pour $s > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$. Calculer $\mathbf{P}(A_p)$.
3. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   Montrer que la famille $(A_p)_{p \in \mathbb{P}}$ est indépendante.
4. À l'aide de $\mathbf{P}(\{1\})$, montrer que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Exercice 11 — On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b + kc}{a + b + kc}$.
   a) Montrer que l'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$, pour tout $n \geqslant 2$.
   b) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 12 — On se donne n boîtes et q jetons que l'on distribue dans les boîtes de façon indépendante.

1. Donner la probabilité $p_{q,n}$ que chaque boîte contienne au plus un jeton.
2. Déterminer les limites de $p_{q,n}$ et $p_{n,n}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. On suppose que le nombre q de jetons dépend de n et que $q_n \underset{n \to +\infty}{\sim} c\sqrt{n}$, où $c > 0$. Montrer que $(p_{q_n,n})$ converge vers une constante à déterminer.

Exercice 13 — *Loi de succession de Laplace*
On considère $p+1$ urnes $U_0, \dots, U_p$ en supposant que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p - k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer n tirages avec remise.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_i défini par « les i-premiers tirages ont donné des boules blanches ».
2. Exprimer $\mathbf{P}(A_{n+1} | A_n)$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \mathbf{P}(A_{n+1} | A_n)$.

Exercice 14 — On lance deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement « une somme de 5 apparaît au n-ième double lancer et sur les $n-1$ premiers doubles lancers ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît ». Calculer $\mathbf{P}(E_n)$.
2. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.
3. Trouver la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

🚲 **Exercice 15 —** *Lemme de Borel-Cantelli*
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(A_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$.

1. Traduire en français l'événement $B = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$.
2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)$ et $\mathbf{P}(B) \leqslant \displaystyle\sum_{p=k}^{+\infty} \mathbf{P}(A_p)$.
3. En déduire que $\mathbf{P}(B) = 0$. Interpréter.

Exercice 16 — *Étude asymptotique du retour à l'origine*
Une particule se déplace dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct. À $t = 0$, elle est située en O. Puis, à chaque instant entier $t = n$, elle se trouve en un point $M_n(x_n, y_n, z_n)$ de coordonnées entières. Elle passe avec équiprobabilité à l'un des huit points obtenus en faisant varier x_n, y_n et z_n de ± 1.

1. On note X_n l'événement « la particule est située en O à l'instant $t = 2n$ ». Déterminer $\mathbf{P}(X_n)$ en considérant les axes (Ox), (Oy) et (Oz).
2. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ vers une limite $\ell > 0$. *On s'aidera d'une comparaison suite/série.*
3. Montrer que $\mathbf{P}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell^3}{n^{3/2}}$.
4. La particule repasse-t-elle une infinité de fois par l'origine ? *On pourra recourir au lemme de Borel-Cantelli.*

Partie B – Variables aléatoires discrètes

Exercice 17 — Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X : nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X : nombre de bosses.
3. On tire avec remise et successivement les cartes d'un jeu en contenant 32. X : rang d'apparition de la première dame.
4. On prend un jeu de 32 cartes. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X : nombre de cartes retournées.
5. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
6. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X : nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 18 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite de variables $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_k = -1) = \mathbf{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$. Donner la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Exercice 19 — Un insecte pond des œufs, dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 20 — On note N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S = X_1 + \cdots + X_N$ et $T = N - S$.

1. Montrer que S et T sont des variables aléatoires discrètes.
2. On suppose dans cette question seulement que $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que S et T suivent des lois de Poisson et sont indépendantes.
3. On suppose désormais S et T indépendantes.
   Écrire $\mathbf{P}(N = i + j)$ sous la forme $\dfrac{a_i b_j}{(i+j)!}$. Prouver que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire que N suit une loi de Poisson.

Exercice 21 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement, avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour obtenir, pour la première fois, deux numéros distincts.

1. On désigne par A_i l'événement « le n°i apparaît au 1er tirage ». Calculer $\mathbf{P}(X = k | A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$; en déduire la loi de X.
2. Quelle est la loi de $Y = X - 1$?

Exercice 22 — Soient $p \in]0, 1[$ et $X, Y \sim \mathscr{G}(p)$ indépendantes. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Exercice 23 — *Lois du maximum et du minimum*
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d. indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer les loi de $Y = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$ et de $Z = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$.

Exercice 24 — *Fonctions de répartition de lois classiques*

1. Soient $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathscr{G}(p)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X, c'est-à-dire $x \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant x)$.
   b) Retrouver le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et une variable aléatoire Y telle que $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx$$

Exercice 25 — *Somme de variables géométriques indépendantes*

1. Soient $p \in]0,1[$ et $X, Y \sim \mathscr{G}(p)$ indépendantes. Donner la loi de $X+Y$.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant n$, $\displaystyle\sum_{j=n}^{k} \binom{j-1}{n-1} = \binom{k}{n}$.
3. Soient $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n \sim \mathscr{G}(p)$ indépendantes. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Montrer que pour tout $k \geqslant n$, $\mathbf{P}(S_n = k) = p^n (1-p)^{k-n} \binom{k-1}{n-1}$.

Exercice 26 — *Loi binomiale négative*
On considère une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès p, et on note X_k le rang d'apparition du k-ième succès.

1. Préciser la loi de X_1 et son espérance.
2. On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir $k-1$ succès en $n+k-1$ épreuves et en déduire $\mathbf{P}(X_k = n+k)$. Calculer $\mathbf{E}(X_k)$; interpréter.
3. Montrer que les variables aléatoires $T_1 = X_1$ et $T_k = X_k - X_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 27 — Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de X sachant que $(X+Y=n)$.

Exercice 28 — *Loi des séries*
Soient $p \in]0,1[$ et une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de v.a.d. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, portées par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_r = \inf\{n \geqslant r \mid X_{n-r+1} = \cdots = X_n = 1\}$ avec, comme convention, $\inf \varnothing = +\infty$.

1. Que représente T_r ?
2. Montrer que T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
3. Prouver que pour tous $n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T_r = n+r+1) = (1-p)p^r \mathbf{P}(T_r > n)$.
4. Montrer que T_r est presque sûrement finie et calculer son espérance.

Exercice 29 — Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$.

1. Calculer la probabilité de l'événement « M est diagonalisable ».
2. Déterminer sa limite lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 30 — On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant des boules de couleur rouge, bleue et verte, de proportions respectives p, q, $1-p-q$. On note X (resp. Y) le nombre de boules rouges (resp. bleues) obtenues.

1. Quelles sont les lois de X, Y et du couple (X,Y) ?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 31 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$). On tire successivement et sans remise deux jetons. Soient X le numéro du premier jeton obtenu et Y celui du second.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y=j)$.

Exercice 32 — Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(Y=k) = pq^k$$
où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On pose $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V) et les deux lois marginales.
2. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 33 — On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi du couple (X,Y) puis calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.
2. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 34 — Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi de $S = X+Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(S=k)$, où $k \in S(\Omega)$.
3. Pour $n \in S(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(S \geqslant n)$.
4. Déterminer $\mathbf{P}(S \leqslant Z)$, $\mathbf{P}(S \geqslant Z)$ et $\mathbf{P}(S = Z)$.