III

1] $F_1(0)=0$; $F_1'(0)=p$

(2)

2] Soit T_2 la variable aléatoire égale au premier instant où l'on atteint la valeur 2 :

$$\mathbb{P}(T_2=n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_2=n \mid T_1=k) \cdot \mathbb{P}(T_1=k).$$

or si l'on note $\tilde{X}_p = Z_{k+1}+\dots+Z_p$ et $\tilde{T}_1$ le premier instant où $\tilde{X}_p=1$, on a :

$$\mathbb{P}(T_2=n \mid T_1=k) = \mathbb{P}(\tilde{T}_1=n-k \mid T_1=k)$$
$$= \mathbb{P}(\tilde{T}_1=n-k) \quad (\text{car } T_1=k \text{ et } \tilde{T}_1=n-k \text{ sont } \perp\!\!\!\perp)$$
$$= \mathbb{P}(T_1=n-k) \quad (\text{car } \tilde{X}_p \text{ suit la loi de } X_p \text{, donc } \tilde{T}_1 \text{ celle de } T_1)$$

Alors
$$\underline{\mathbb{P}(T_2=n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_1=n-k) \cdot \mathbb{P}(T_1=k)} \quad (1)$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(T_1=n+1) = \mathbb{P}(T_1=n+1 \mid X_1=-1) \cdot \mathbb{P}(X_1=-1) + 0$ (si $X_1=1$ alors $T_1=1$)

$= \mathbb{P}(T_2=n)\, \mathbb{P}(X_1=-1)$ [se démontre en détail comme précédemment]

$$\underline{\mathbb{P}(T_1=n+1) = q\, T(T_2=n)} \quad (2)$$

en substituant (2) dans (1) on obtient exactement le résultat voulu.

3] on résout l'équation obtenue :

$$\forall s \neq 0,\ \exists\, \varepsilon(s) \in \{\mp 1\} \ / \ F_1(s) = \frac{1+\sqrt{1-4pqs^2}\cdot\varepsilon(s)}{2qs}.$$

- Comme F_1 est continue sur $]0,1[$ $\varepsilon(s)$ ne dépend pas de s.
- comme $F_1(s)$ a une limite finie en 0, $\varepsilon(s)=-1$.
- Ainsi $F_1(s) = \dfrac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$ $\forall s \in]0,1[$.

4] $F_1(1) = \dfrac{F(1)}{2q} = \dfrac{\min(p,q)}{q} = \min\left(1, \dfrac{p}{q}\right).$

$\boxed{5}$

(i) Soit $B_k = [\exists n,\ X_n = k]$.

Alors comme en 5] on a $\mathbb{P}(B_k | B_1) = \mathbb{P}(B_{k-1})$ et $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)^k$.

De plus la famille (B_k) est décroissante pour l'inclusion : Par continuité ↓ on a

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 0}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k\infty} \min\left(1, \frac{p}{q}\right)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \\ 1 & \text{si } q \leq p \end{cases}$

(ii) En échangeant p et q $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{Z}^{(-)}} B_k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > q \\ 1 & \text{si } p \leq q \end{cases}$.

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} B_k\right) = 0$ si $p \neq q$
$= 1$ si $p = q = \frac{1}{2}$.

(iii) (iv) Notons A_k l'événement [k est transient], R_k = [k est récurrent].

alors $\mathbb{P}(R_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(R_k \mid S_n = k) \cdot \mathbb{P}(S_n = k)$ (car $R_k \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [S_n = k]$

S_n désignant le premier passage en k autrement dit

$S_n = k = [X_n = k] \cap [\forall i \neq k\ \forall k < i$)

$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(R_0) \cdot \mathbb{P}(S_n = k)$

$= \mathbb{P}(R_0) \times \mathbb{P}(\exists n,\ X_n = k)$

Ainsi si $p \neq \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(R_0) = 0 \Rightarrow \forall k\ \ \mathbb{P}(R_k) = 0$.

si $p = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(R_0) = 1$ et $\forall k,\ \mathbb{P}(\exists n, X_n = k) = 1$ donc $\mathbb{P}(R_k) = 1$.

IV 1) $\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ or $\left\{ \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!} \right.$ $\forall n \geq 0$ donc $\operatorname{ch} t \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$

2) $P(X_n > a) = P(e^{uX_n} > e^{ua})$ car $t \mapsto e^{ut}$ est croissante si $u > 0$

$\leq \frac{E(e^{uX_n})}{e^{ua}}$ par l'inégalité de Markov.

or $E(e^{uX_n}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{uZ_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{uZ_i})$ par indépendance

enfin $E(e^{uZ_i}) = \operatorname{ch} u$ car Z_i prend les valeurs $1, -1$ de façon équiprobable.

Finalement $P(X_n > a) \leq \frac{(\operatorname{ch} u)^n}{e^{ua}} \leq \frac{e^{\frac{nu^2}{2}}}{e^{ua}} = e^{\frac{nu^2}{2} - ua}$. Ceci est vrai $\forall u > 0$

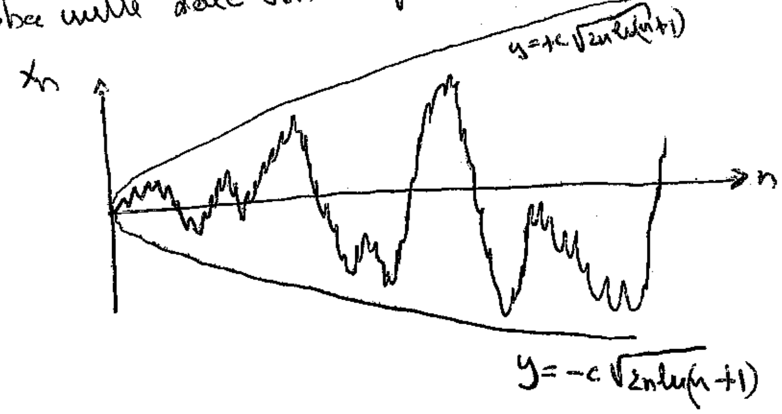
on applique pour $u = \frac{a}{n}$ et il vient $\boxed{P(X_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}}$

3) $P(X_n > c\sqrt{2n\ln n}) \leq e^{-c^2 \ln n} = \frac{1}{n^{c^2}}$ est le TG d'une série CV si $c > 1$

4) l'événement $B_m = \bigcup_{n \geq m} (X_n > c\sqrt{2n\ln n})$ est de probabilité majorée

par $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{c^2}}$. Donc $P(B_m) \xrightarrow[m\infty]{} 0$ Par suite l'événement $B = \bigcap_m B_m$ est

de proba nulle donc son complémentaire de proba 1.

5) 

(par exemple...)

V

1) on pose $u_x(t) = f(x)\, e^{i\langle t|x\rangle}$. c'est une fonction continue et de plus

$\|u_x\| \leq |f(x)|$ est le TG d'une série CV. Il y a CV normale

donc $\hat{f}$ est continue. Elle est de plus majorée par $\sum_{\mathbb{Z}^d} |f(x)| = \|f\|_1$

2] $\forall x, \ |f*g(x)| = \left|\sum_y f(y)\, g(x-y)\right| \leq \sum_y |f(y)\, g(x-y)|$

Cette somme a bien un sens, par exemple en remarquant que g est bornée et f sommable.

D'après le théorème de Fubini (qui s'applique car tout est positif) :

$$\sum_x |f*g(x)| = \sum_x \left(\sum_y |f(y) g(x-y)| \right) = \sum_y \left(\sum_x |g(x-y)| \right) |f(y)| = \sum_{\mathbb{Z}^d} |f(y)| \times \sum_{\mathbb{Z}^d} |g(x)|.$$

cette somme est finie, ce qui justifie qu'elle est aussi vraie sans les valeurs absolues.

3] on a $\hat{f}(t)\, e^{-i\langle t, x\rangle} = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f(y)\, e^{i\langle t, y-x\rangle}$

comme cette série de fonctions de la variable t vérifie $\sum_{\mathbb{Z}^d} \int_{[0,2\pi]^d} |f(y)\, e^{-i\langle t, y-x\rangle}|\, dt = \sum_{\mathbb{Z}^d} |f(y)| < +\infty$

le théorème d'intégration terme à terme s'applique :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \hat{f}(t)\, e^{-i\langle t, x\rangle} dt = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \frac{f(y)}{(2\pi)^d} \underbrace{\int_{[0,2\pi]^d} e^{i\langle t, y-x\rangle} dt}_{I_{y-x}}$$

l'intégrale I_{y-x} est nulle sauf pour $y = x$ auquel cas elle vaut $(2\pi)^d$.

4] a] $\hat{\mu}(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu(x)\, e^{i\langle t, x\rangle} = \sum_{j=1}^{d} \left(\mu(e_j)\, e^{i\langle e_j, t\rangle} + \mu(-e_j)\, e^{i\langle -e_j, t\rangle} \right)$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^{d} e^{it_j} + e^{-it_j} = \frac{1}{d} \sum_{1}^{d} \cos t_j$$

b] $\hat{\mu}(t) = \frac{1}{d} \left[\sum_{k=1}^{d} 1 - \frac{t_k^2}{2} + o(t_k^2) \right]$. On les $o(t_k^2)$

sont à fortiori des $o(\|t\|^2)$ ... le résultat est alors clair

5] a] on a $P(X_n = x) \leq 1$ donc la série converge pour $|\lambda| < 1$

5] b]. Si $\sum P(X_n=x)$ converge, alors la série $\sum \lambda^n P(X_n=x)$ converge

normalement sur $[0,1]$ donc et continue sur $[0,1]$ (pour la variable λ)

• Si $\sum P(X_n=x)$ diverge : on utilise, en le redémontrant le résultat suivant :

Soit $\sum a_n x^n$ une série de rayon 1 avec $a_n \geq 0$: alors si $\sum a_n$ diverge

on a $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_0^{\infty} a_n x^n = +\infty$

c] Soit T_n la variable aléatoire qui vaut 1 si $X_n=x$ et zéro sinon.

Posons $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n$ (c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

T est la variable aléatoire égale au nombre de passages en x.

Il faut démontrer $E(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E(T_n)$ car $E(T_n) = P(X_n=x)$.

. Ceci repose sur un résultat Hors programme sur l'espérance : Théorème

de convergence monotone : Voir dernière page pour la preuve dans ce cas particulier

6] on ~~remarque~~ Prouve que $P(X_n=x) = \mu^{*n}(x)$ par récurrence sur n :

- $n=1$ $\quad P(X_1=x) = \mu(x)$ par définition
- si c'est vrai pour n : $\quad P(X_{n+1}=x) = \sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} P(X_n=x-y, X_{n+1}-X_n=y)$

$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P(X_n=x-y)\, P(X_{n+1}-X_n=y)$$

$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \mu^{*n}(x-y)\, \mu(y) = \mu^{*n+1}(y).$$

Donc
$$u_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu^{*n}(x)$$

$\widehat{u_\lambda}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n \widehat{\mu^{*n}}(x)$ se démontre en intégrant terme à terme la

série $\sum \lambda^n \widehat{\mu^{*}}(x)\, e^{i\langle t, x\rangle}$ par rapport à t. C'est possible car

$$|\lambda^n \mu^{*n}(x)\, e^{i\langle t,x\rangle}| \leq |\lambda|^n \qquad (|\mu^{*n}(x)| \leq 1)$$

on en déduit

$$\widehat{u_\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{\mu}(x)^n \quad \left(\text{puisque } \widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g} \text{ on a } \widehat{\mu^{*n}} = \hat{\mu}^n \text{ en notant que } \mu \text{ est bien sommable}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda\hat{\mu}(x)}$$

on a enfin, d'après le 3)

$$u_\lambda(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[0,2\pi]^d} \widehat{u_\lambda}(t)\, e^0\, dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[0,2\pi]^d} \frac{dt}{1-\lambda\hat{\mu}(t)}$$

7) on prend une suite λ_n qui tend vers 1. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{1-\lambda_n\hat{\mu}(t)}$

alors $f_n(t) \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}$. De plus $\mu(t) \geq 0$ pour $\|t\|$ assez petit donc f_n est dominée par $\dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}$ au voisinage de 0.

on en déduit facilement : • si $\dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}$ est intégrable, $\lim\limits_{\lambda\to 1} u_\lambda(0) = \dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{[0,2\pi]^d} \frac{dt}{1-\hat{\mu}(t)}$

• si $\dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}$ n'est pas intégrable " $= +\infty$

$u_1(0)$ est fini $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\hat{\mu}(t)}$ est intégrable $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\|t\|^2}$ intégrable $\Leftrightarrow d > 2$

Dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ le point 0 est récurrent

Dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ " est transient.

$\longrightarrow$

Preuve de la questi 5 c)

→ Convergence monotone pour les séries :

on suppose que $(u_{n,k})_{n,k}$ est une famille de réels positifs telle que :

(i) $u_{n,k} \xrightarrow[k \infty]{} u_n$

(ii) $u_{n,k+1} \geq u_{n,k}$ (monotonie)

Alors : si $\sum u_n$ converge on a $\lim\limits_{k \infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$

si $\sum u_n$ div on a $\lim\limits_{k \infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{n,k} = +\infty$

A faire en eto :

si on a ceci alors posons $Y_k = \sum\limits_{n=0}^{k} T_n$ et $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n$

on a $\sum\limits_{n=0}^{k} E(T_n) = E(Y_k)$

or $E(Y_k) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} P(Y_k > p)$

Par continuité croissante, on montre facilement que $P(Y_k > p) \xrightarrow[k \infty]{} P(T > p)$

en croissant.

En appliquant le théorème précédent. $E(Y_k) \xrightarrow[k \infty]{} \sum\limits_{p=0}^{\infty} P(T > p) = E(T)$

Donc $E(T) = \lim\limits_{k \infty} \sum\limits_{n=0}^{k} E(T_n) = \lim\limits_{k \infty} \sum\limits_{n=0}^{k} P(X_n = x) = \sum\limits_{0}^{\infty} P(X_n = x)$