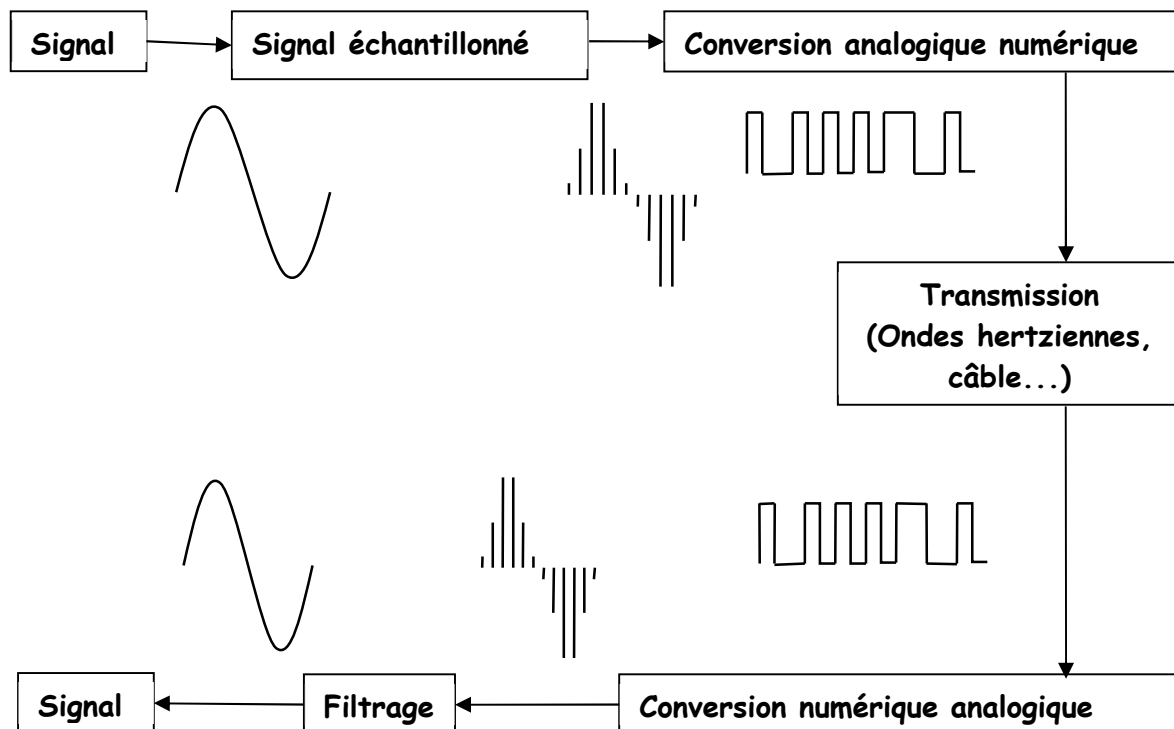


TP 1 TRAITEMENT DU SIGNAL NUMERIQUE

TP Cours : Théorème de Nyquist-Shannon

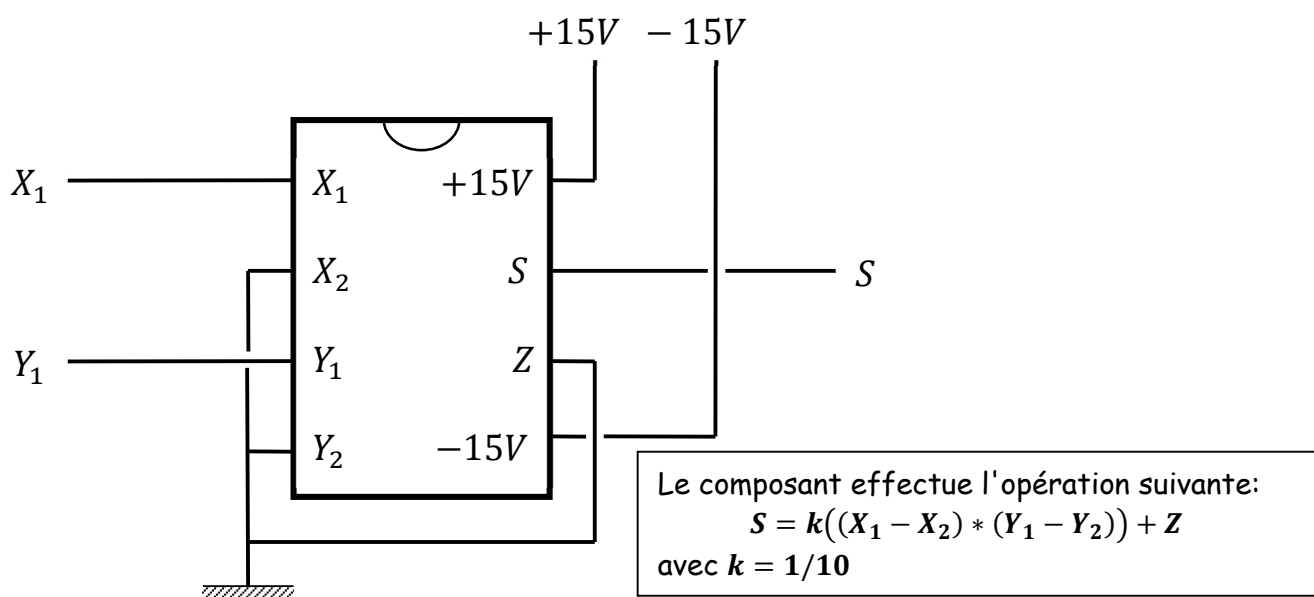
I. Chaîne du traitement



II. Echantillonnage

1) Préliminaire: le multiplieur

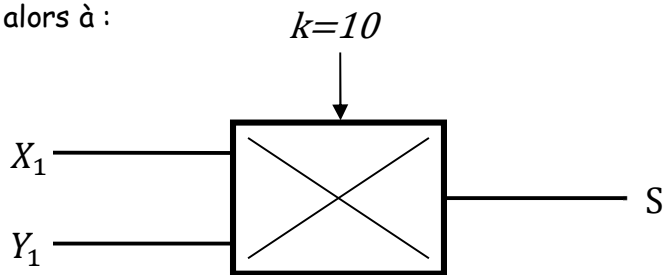
a) Le composant et ses connections



Indiquer la fonction réalisée en S dans la configuration précédente.

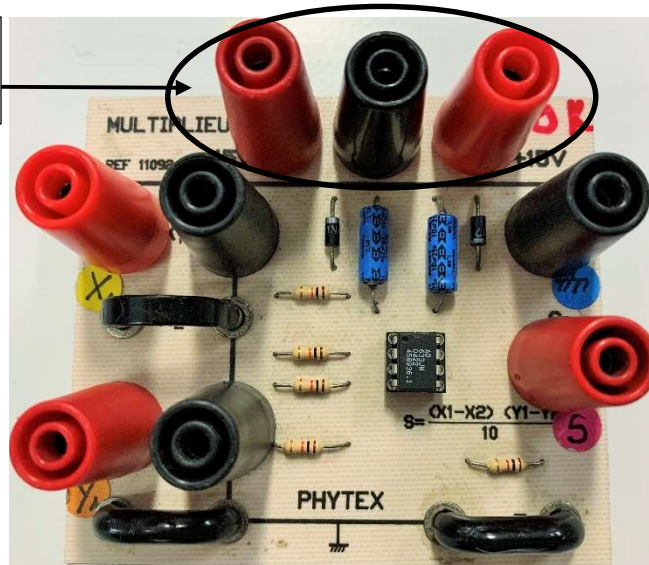
$$\left. \begin{array}{l} X_2 = 0 \text{ et } Y_2 = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{X_1 Y_1}{10}$$

Le circuit se résume alors à :



b) Montage expérimental sur la plaquette

Alimentation +15V et
-15V ainsi que la masse



LES MASSES (APPAREILS, MONTAGE) DOIVENT ETRE RELIEES ENTRE ELLES.

Relier à l'alimentation les bornes +15V et -15V ainsi que la masse.

ATTENTION, l'inversion des bornes d'alimentation peut entraîner la destruction du multiplieur.

Observer X_1 sur la voie 1 de l'oscillo et sur l'entrée EA0 de la console SP5.

Observer S sur la voie 2 de l'oscillo et sur l'entrée EA2 de la console SP5.

Observer Y_1 sur l'entrée EA1 de la console SP5.

Paramètres Latis pro: 10000 points en 3ms, style trait.

Organiser la mosaïque sur l'écran avec quatre fenêtres:

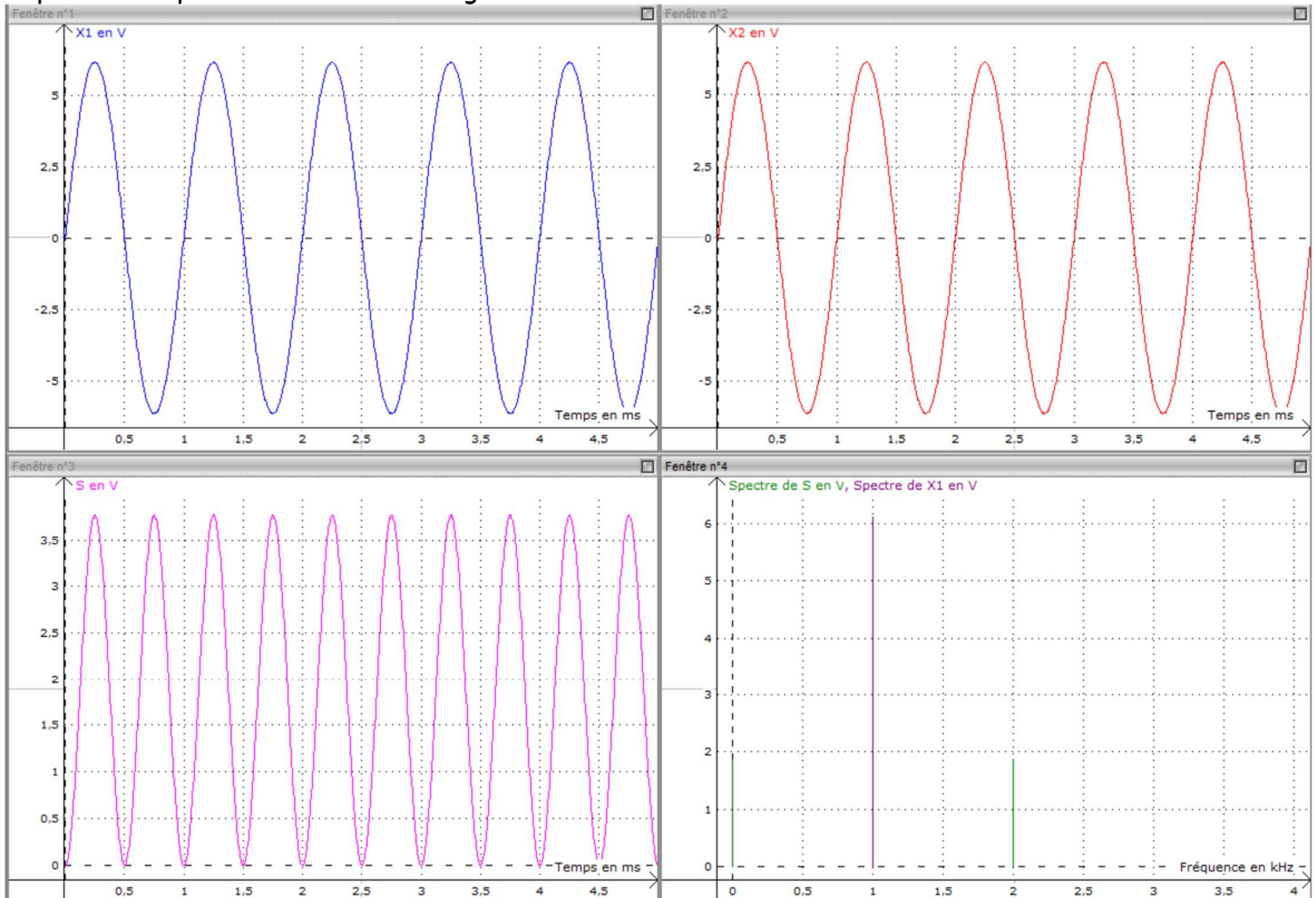
$EA0 = X_1$	Fenêtre d'analyse spectrale
$EA1 = Y_1$	
$EA2 = S$	

c) Vérification de la fonction multiplicationPremier exemple :

Alimenter les deux entrées X_1 et Y_1 simultanément avec la sortie du GBF.

GBF METRIX : **signal sinusoïdal** de fréquence $f = 1000\text{Hz}$ et d'amplitude 6V (12V crête à crête).

Reproduire rapidement l'allure des signaux observés.



Vérifiez l'opération effectuée par le multiplieur.

$$\begin{aligned}
 X_1(t) &= A_0 \cos(\omega t) = Y_1(t) \\
 S(t) &= \frac{X_1 Y_1}{10} = \frac{A_0^2}{10} \cos^2(\omega t) \\
 \Rightarrow S(t) &= \frac{A_0^2}{20} (1 + \cos(2\omega t)) \quad \text{avec } \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}
 \end{aligned}$$

Effectuer l'analyse spectrale du signal S .

Pourquoi l'analyse spectrale nous permet-elle d'affirmer que le multiplieur n'est pas un composant linéaire ?

L'analyse spectrale de $s(t)$ fait apparaître les fréquences 0 Hz et 2f absentes du signal d'entrée sinusoïdal de fréquence f .

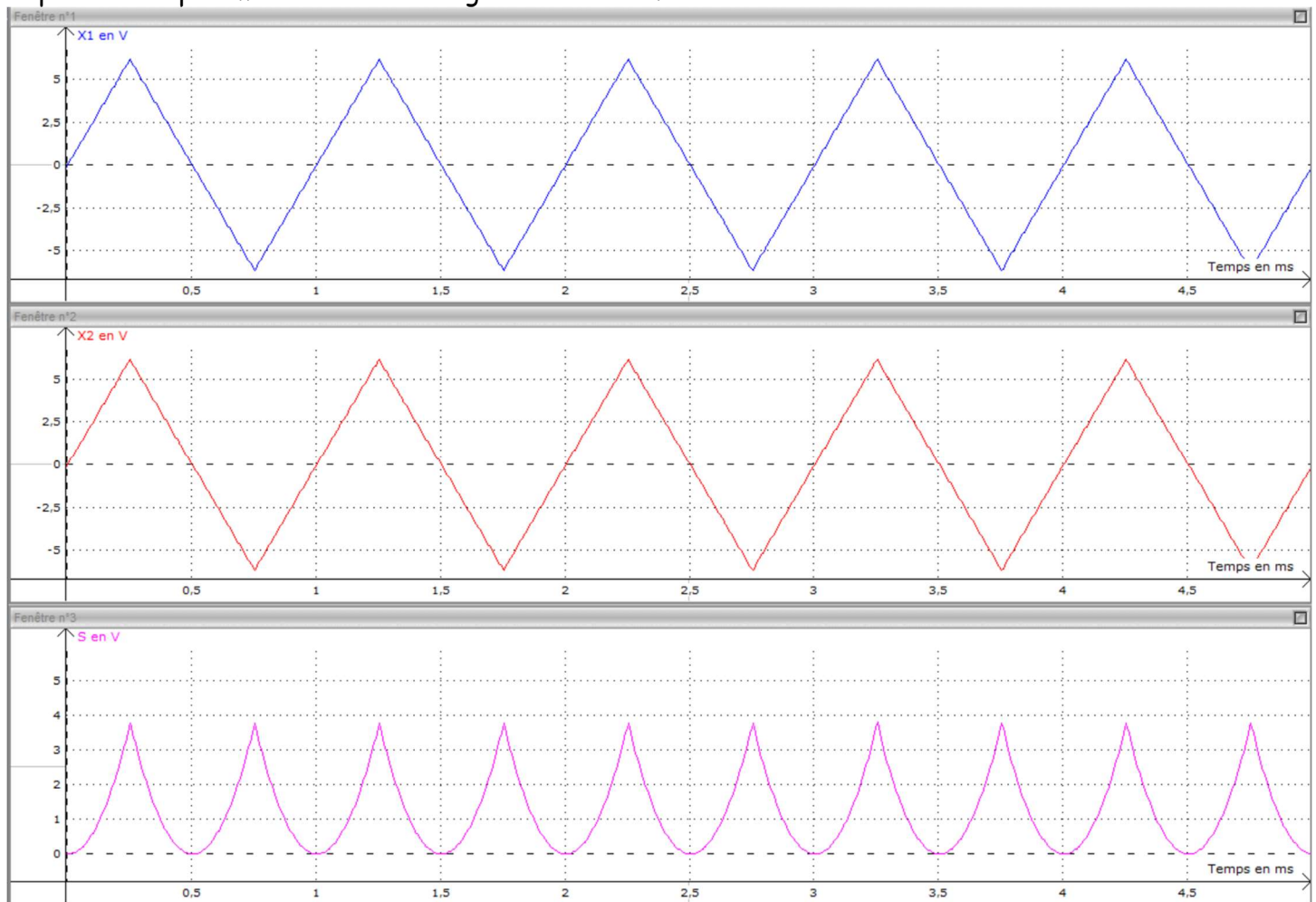
\Rightarrow le multiplieur n'est pas un composant linéaire.

Second exemple :

Alimenter les deux entrées X_1 et Y_1 simultanément avec la sortie du GBF.

GBF METRIX : **signal triangulaire** de fréquence $f = 1000\text{Hz}$ et d'amplitude 6V (12V crête à crête).

Reproduire rapidement l'allure des signaux observés.



Vérifiez l'opération effectuée par le multiplieur.

Pour cela on effectuera un calcul permettant de justifier l'allure et les valeurs relevées pour le signal de sortie.

Sur une demi-période, on a :

$$X_1(t) = at + b$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{X_1^2}{10} = \frac{1}{10}(at + b)^2$$

On obtient bien une parabole

Troisième exemple :

Alimenter l'entrée X_1 (on nommera cette tension $e(t)$) à l'aide du GBF GENTRAD.

GBF GENTRAD : **signal sinusoïdal** de fréquence $f = 300\text{Hz}$ et d'amplitude 5V (10V crête à crête).

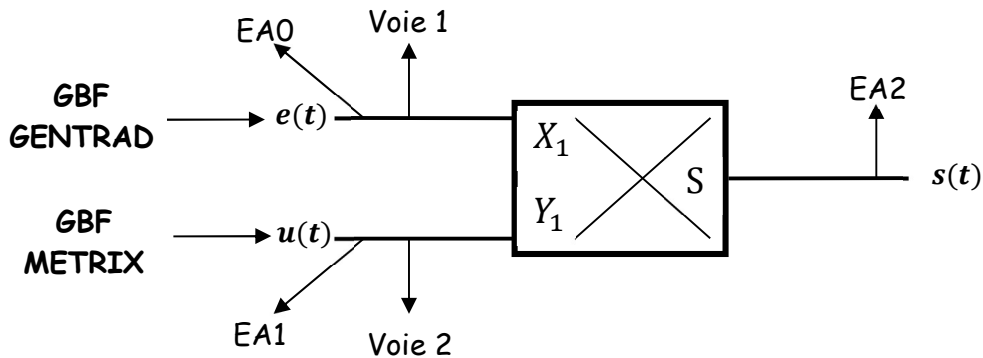
Alimenter l'entrée Y_1 (on nommera cette tension $u(t)$) à l'aide du GBF METRIX

GBF METRIX : **signal continu** de valeur $2,5\text{V}$.

Observer X_1 sur la voie 1 de l'oscillo et sur l'entrée EA0 de la console SP5.

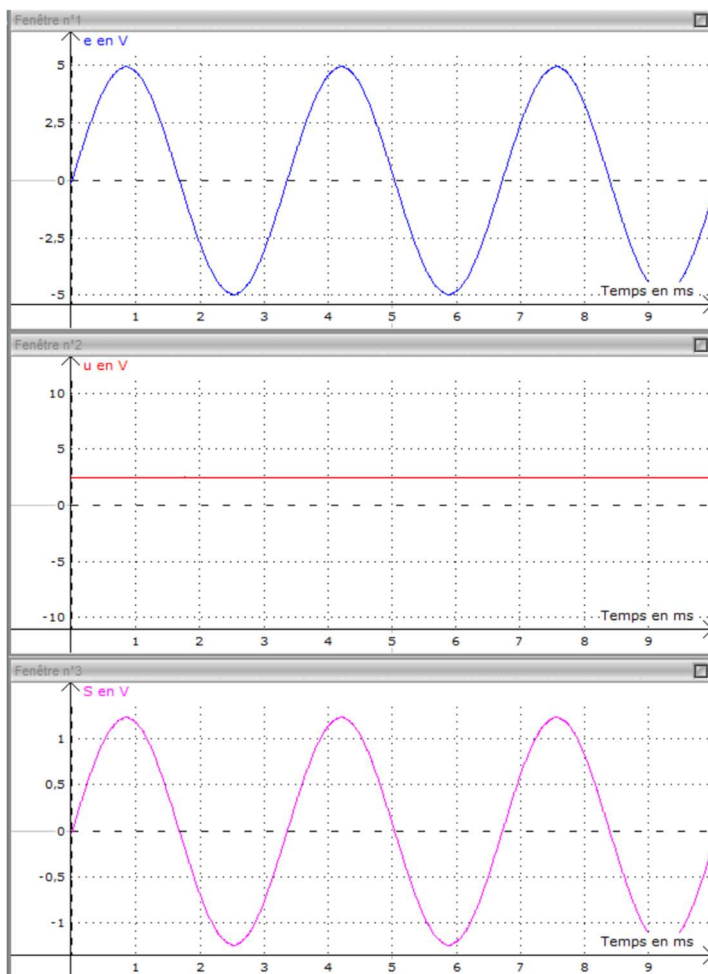
Observer Y_1 sur voie 2 de l'oscillo et l'entrée EA1 de la console SP5.

Observer S sur l'entrée EA2 de la console SP5 (cette tension sera notée $s(t)$).



Paramètres Latis pro : 10000 points avec environ 3 périodes observées, style trait.

Reproduire rapidement l'allure des signaux observés.



Vérifiez l'opération effectuée par le multiplieur.

$$X_1(t) = A_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec } A_0 = 5 \text{ V}$$

$$Y_1(t) = B_0 \quad \text{avec } B_0 = 2,5 \text{ V}$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{A_0 B_0}{10} \cos(\omega t)$$

Amplitude :

$$\frac{A_0 B_0}{10} = \frac{5 \times 2,5}{10} = 1,25 \text{ V}$$

2) Echantillonnage à l'aide du multiplieur

a) Signaux utilisés

Conserver les mêmes branchements que précédemment.

Conserver le réglage du GBF ($e(t)$):

GBF METRIX : **signal sinusoïdal** de fréquence $f = 300\text{Hz}$ et d'amplitude 5V (10V crête à crête).

Modifier le réglage du générateur de l'oscillo.

GBF GENTRAD : impulsions

Signal créneaux

Fréquence (appelée fréquence d'échantillonnage) : $f_e = 3000\text{ Hz}$

Niveau bas : $0,00\text{ V}$

Niveau haut : $5,00\text{ V}$

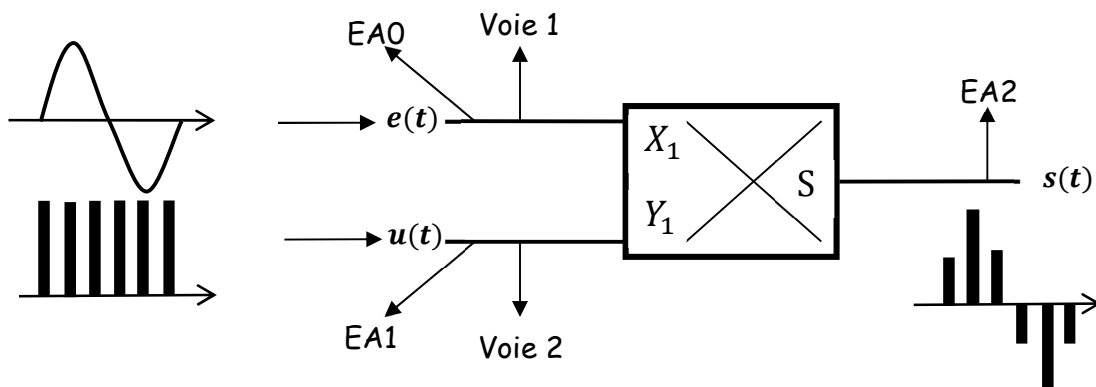
Largeur des impulsions : minimale

A l'aide de ce bouton, on règle la durée du niveau haut par rapport à la période du créneau.
Mettre la molette au minimum.

DC OFFSET permet d'ajouter une tension continue au signal créneaux



Paramètres Latis pro: 10000 points avec environ 3 périodes observées, style trait.



b) Etude du signal de sortie

→ Echantillons par période

Compter le nombre N d'échantillons par période de $e(t)$.

Vérifier sa valeur en la comparant au rapport des périodes de $u(t)$ et de $e(t)$.

$$f = 300 \text{ Hz}$$

$$f_e = 3000 \text{ Hz}$$

Nombre d'échantillons par période :

$$N = \frac{f_e}{f} = 10$$

→ Analyse spectrale

Effectuer l'analyse spectrale de $s(t)$.

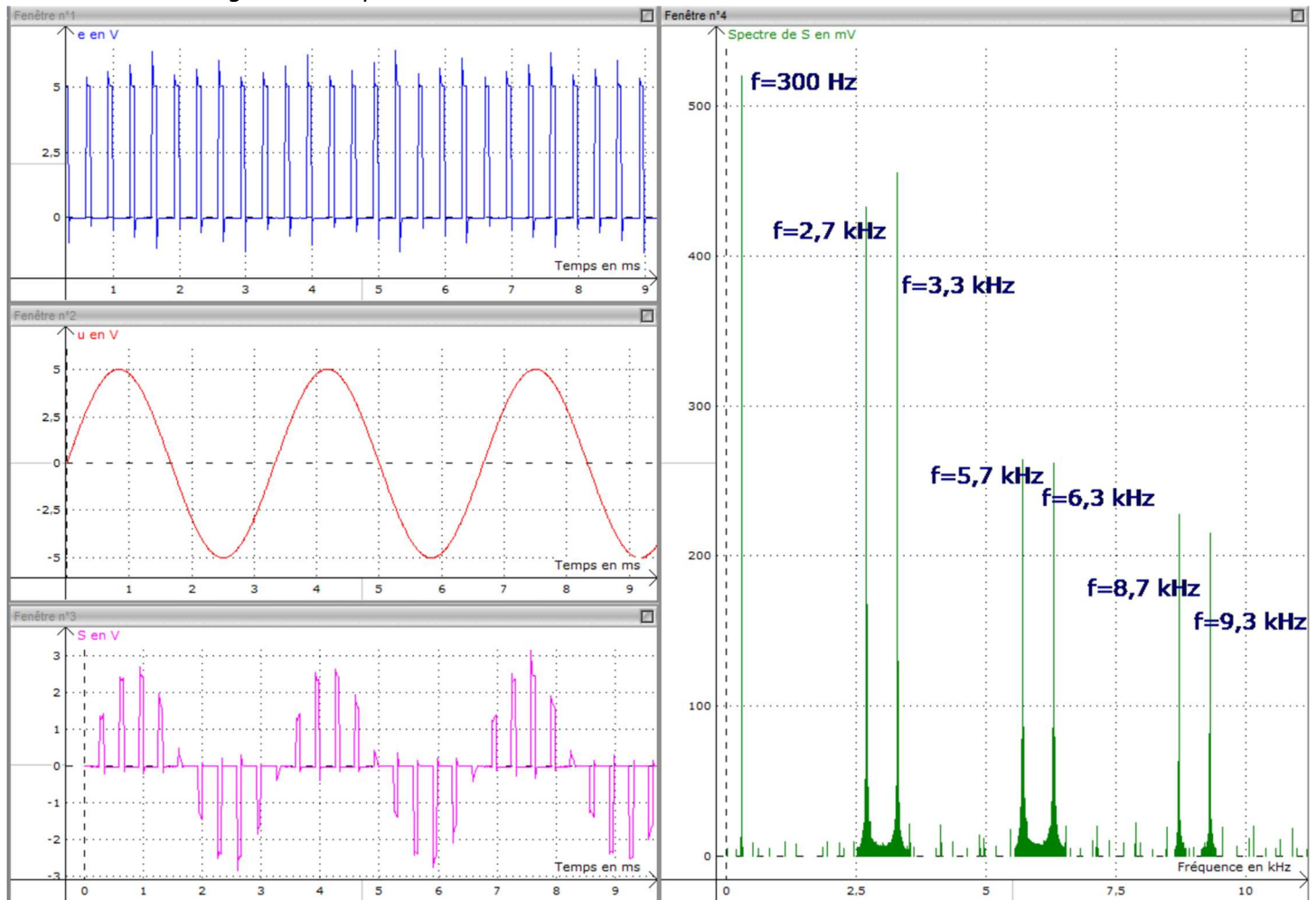
Représenter l'allure des courbes $e(t)$, $u(t)$ et $s(t)$.

Pour une bonne qualité de l'analyse spectrale, il faut un nombre de périodes importantes.

Pour cela modifier les paramètres de Latis pro:

Paramètres Latis pro: 10000 points et 100 ms.

Effectuer de nouveau l'analyse spectrale de $s(t)$. A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $s(t)$ sur 10 kHz environ. A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.



Indiquer à quoi correspondent les valeurs des différentes des fréquences du spectre.

Les fréquences présentes sont :
 f ; $pf_e - f$ et $pf_e + f$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

Quel type de filtre disposé à la sortie du multiplieur permettrait de récupérer le signal $e(t)$?

Pour récupérer le signal $e(t)$, il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c \in [300 \text{ Hz} ; 2,7 \text{ kHz}]$

c) Modification de la fréquence d'échantillonnage

Nouvelle fréquence:

GBF GENTRAD : impulsions $f_e = 1000 \text{ Hz}$

Ne rien modifier d'autre.

→ Echantillons par périodeCompter le nombre N d'échantillons par période de $e(t)$.Vérifier sa valeur en la comparant au rapport des périodes de $u(t)$ et de $e(t)$.

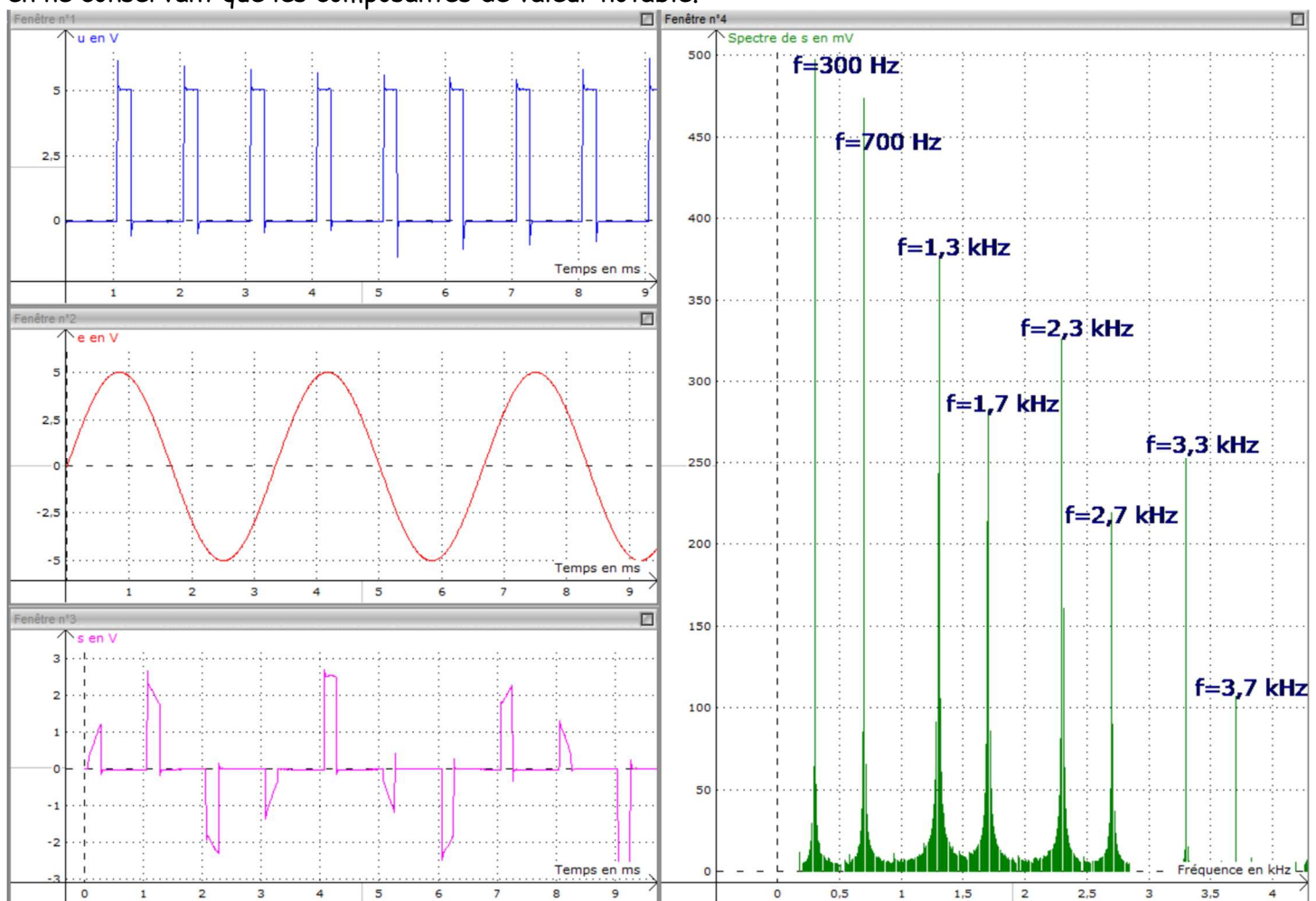
$$f = 300 \text{ Hz}$$

$$f_e = 1000 \text{ Hz}$$

$$\text{Nombre d'échantillons par période : } N = \frac{f_e}{f} = 3,3 \quad (3 \text{ ou } 4 \text{ selon les périodes})$$

→ Analyse spectraleEffectuer l'analyse spectrale de $s(t)$.A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $s(t)$ sur 4 kHz environ.

A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.



Les résultats sont-ils cohérents avec les résultats de l'analyse spectrale précédente ?

$$\text{Pics aux fréquences : } f ; pf_e - f \text{ et } pf_e + f \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*$$

d) Critère de Nyquist-Shannon

Proposer une valeur limite de la fréquence d'échantillonnage pour qu'un filtre passe-bas disposé à la sortie du multiplieur puisse récupérer le signal $e(t)$?

Critère de Nyquist-Shannon:

Il ne faut pas que les pics se mélangent afin de ne perdre aucune information :

$$pf_e + f < (p+1)f_e - f \Rightarrow f < \frac{f_e}{2}$$

e) Repliement du spectre.

Nouvelle fréquence:

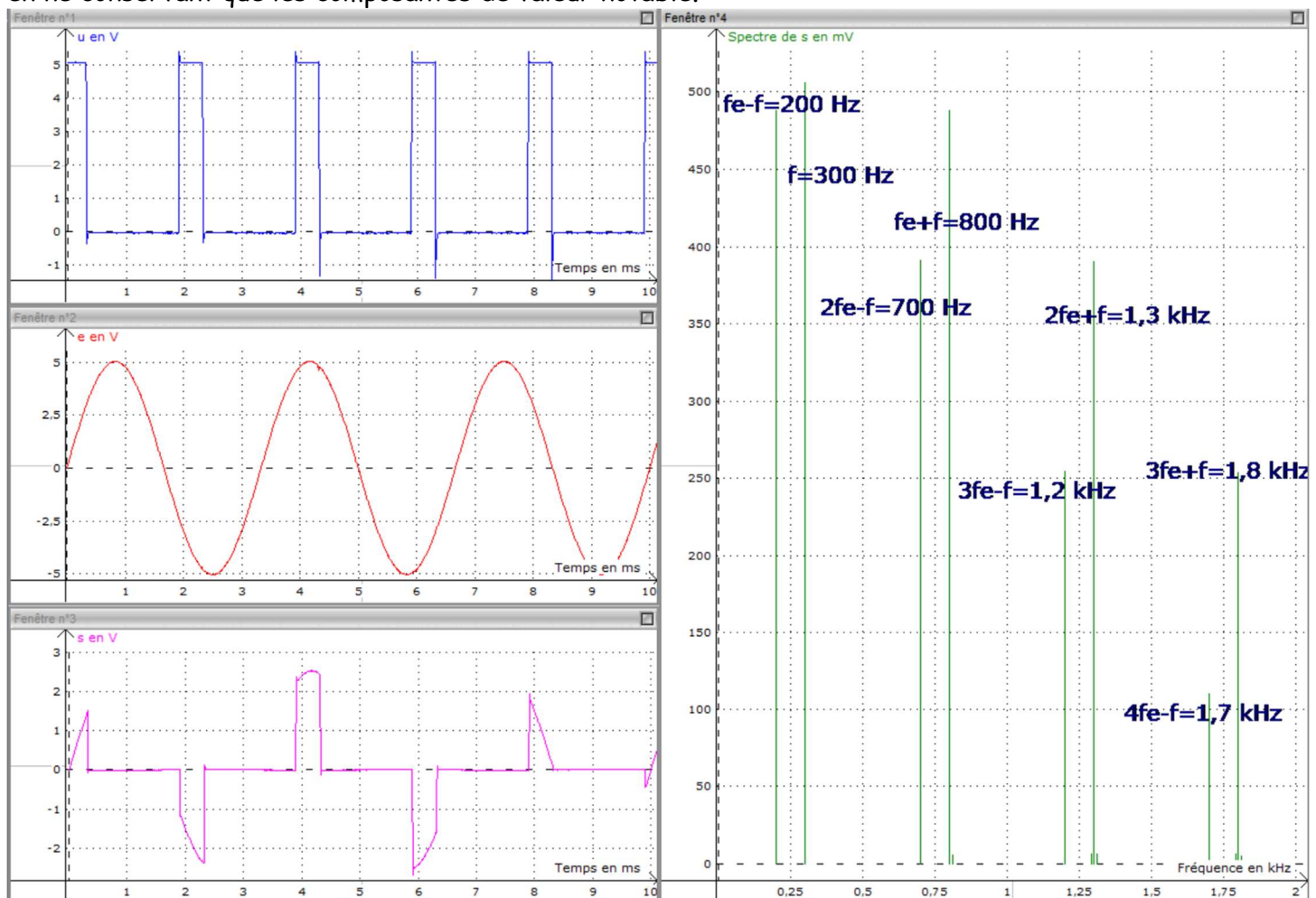
GBF GENTRAD : impulsions $f_e = 500 \text{ Hz}$

Ne rien modifier d'autre.

Effectuer l'analyse spectrale de $s(t)$.

A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $s(t)$ sur 2 kHz environ.

A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.



Pourquoi parle-t-on dans ce cas de repliement du spectre ?

On a un mélange des pics : $pf_e + f > (p+1)f_e - f$
 \Rightarrow on a du repliement de spectre

f) Echantillonnage d'un signal non sinusoïdal

GBF METRIX : signal en créneaux de fréquence $f = 300\text{ Hz}$ et d'amplitude 5V (10V crête à crête).

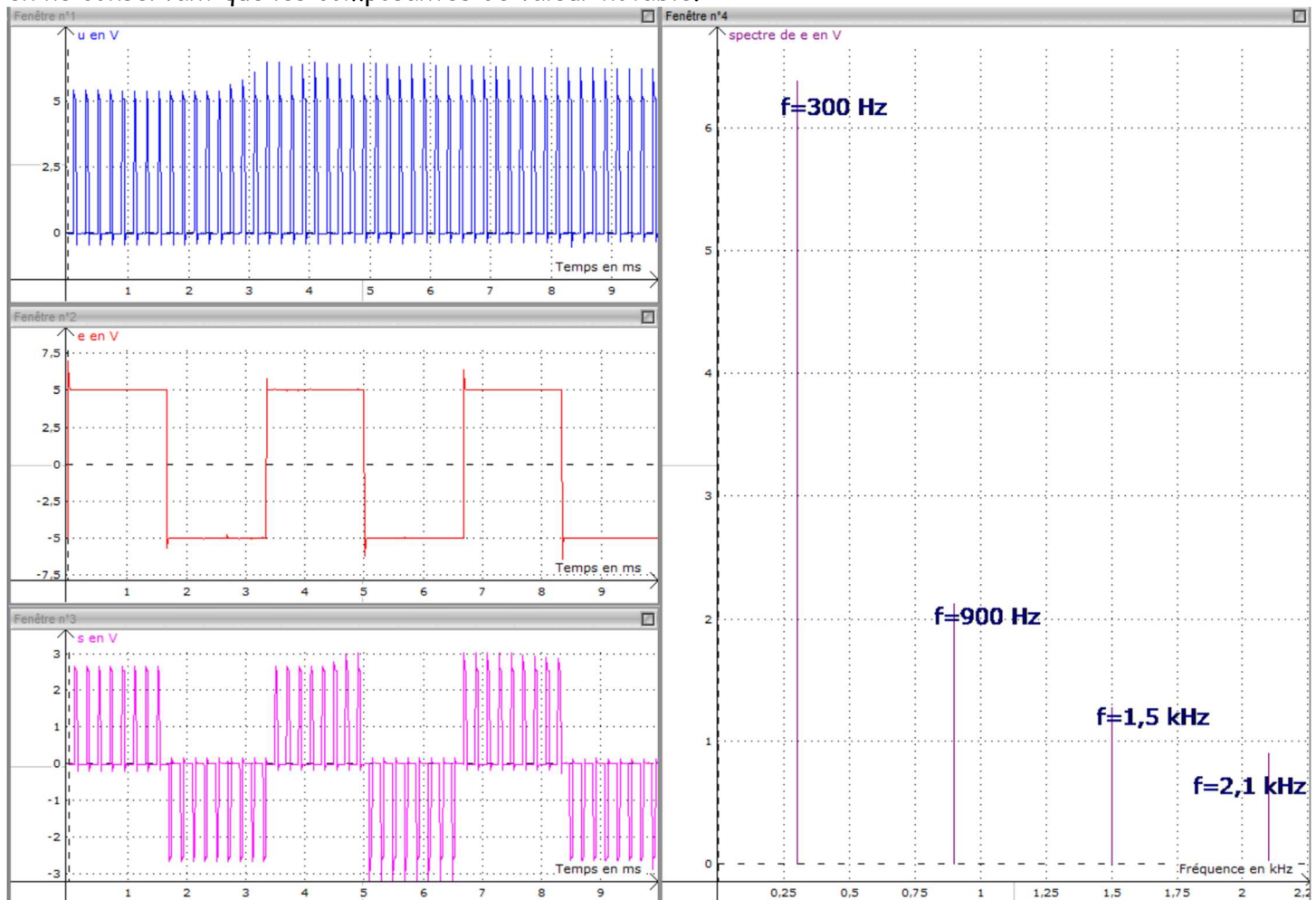
→ Analyse spectrale du signal en créneaux $e(t)$:

GBF GENTRAD : impulsions $f_e = 5000\text{ Hz}$

Effectuer l'analyse spectrale de $e(t)$.

A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $e(t)$ sur 2 kHz environ.

A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.

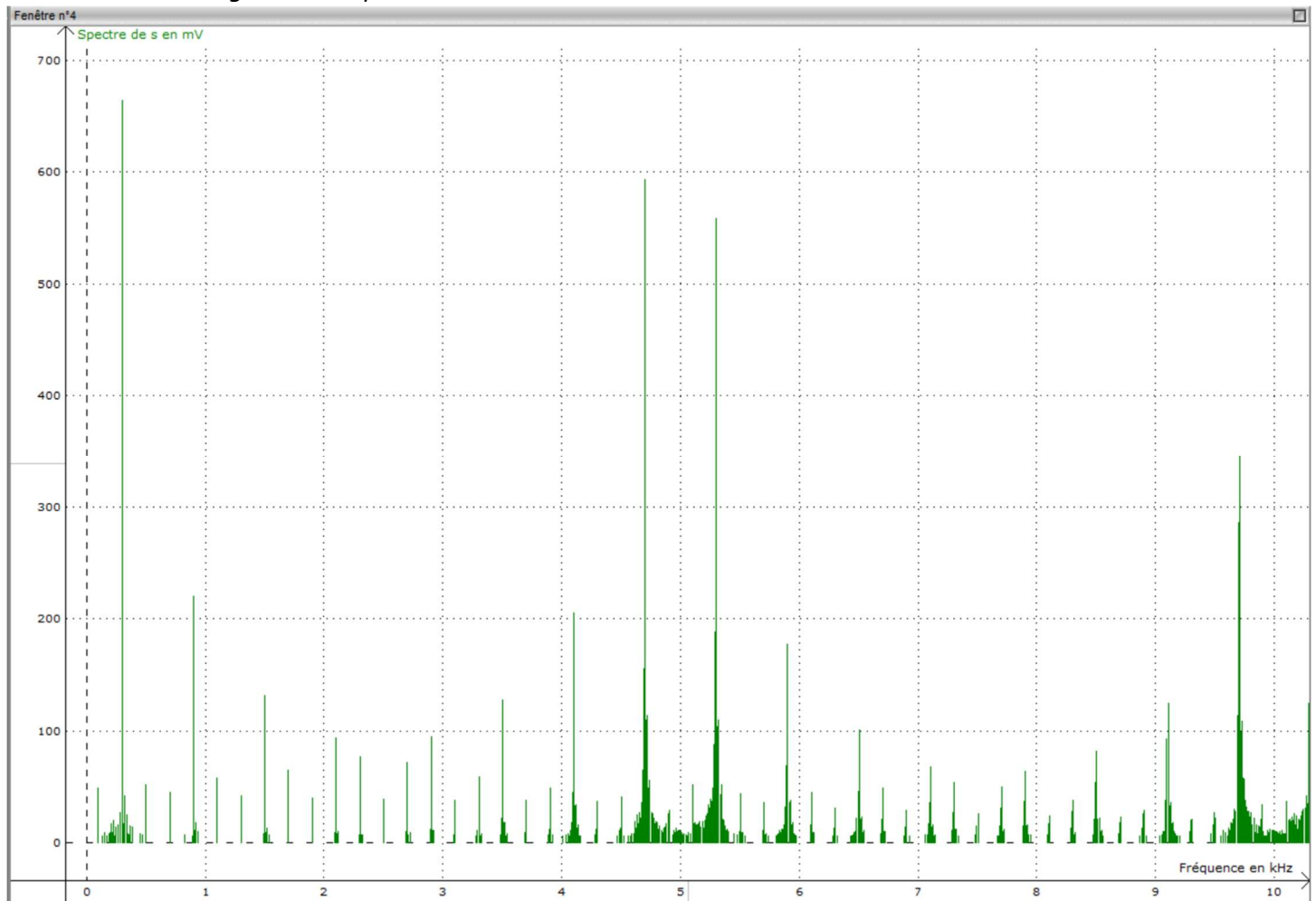


→ Analyse spectrale du signal en créneaux $s(t)$:

Effectuer l'analyse spectrale de $s(t)$.

A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $s(t)$ sur 10 kHz environ.

A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.



→ **Critère de Nyquist-Shannon :**

Commenter le spectre de $s(t)$ dans le cadre du critère de Nyquist-Shannon.

Pour le fondamental, le critère de Nyquist-Shannon est respecté.

Pour $p = 3$ (900 Hz), 3^{ème} harmonique, le critère de Nyquist-Shannon est respecté.

Pour $p = 5$ (1,5 kHz), 5^{ème} harmonique, le critère de Nyquist-Shannon est respecté.

Pour $p = 7$ (2,1 kHz), 7^{ème} harmonique, le critère de Nyquist-Shannon est respecté.

→ **Modification de la fréquence d'échantillonnage :**

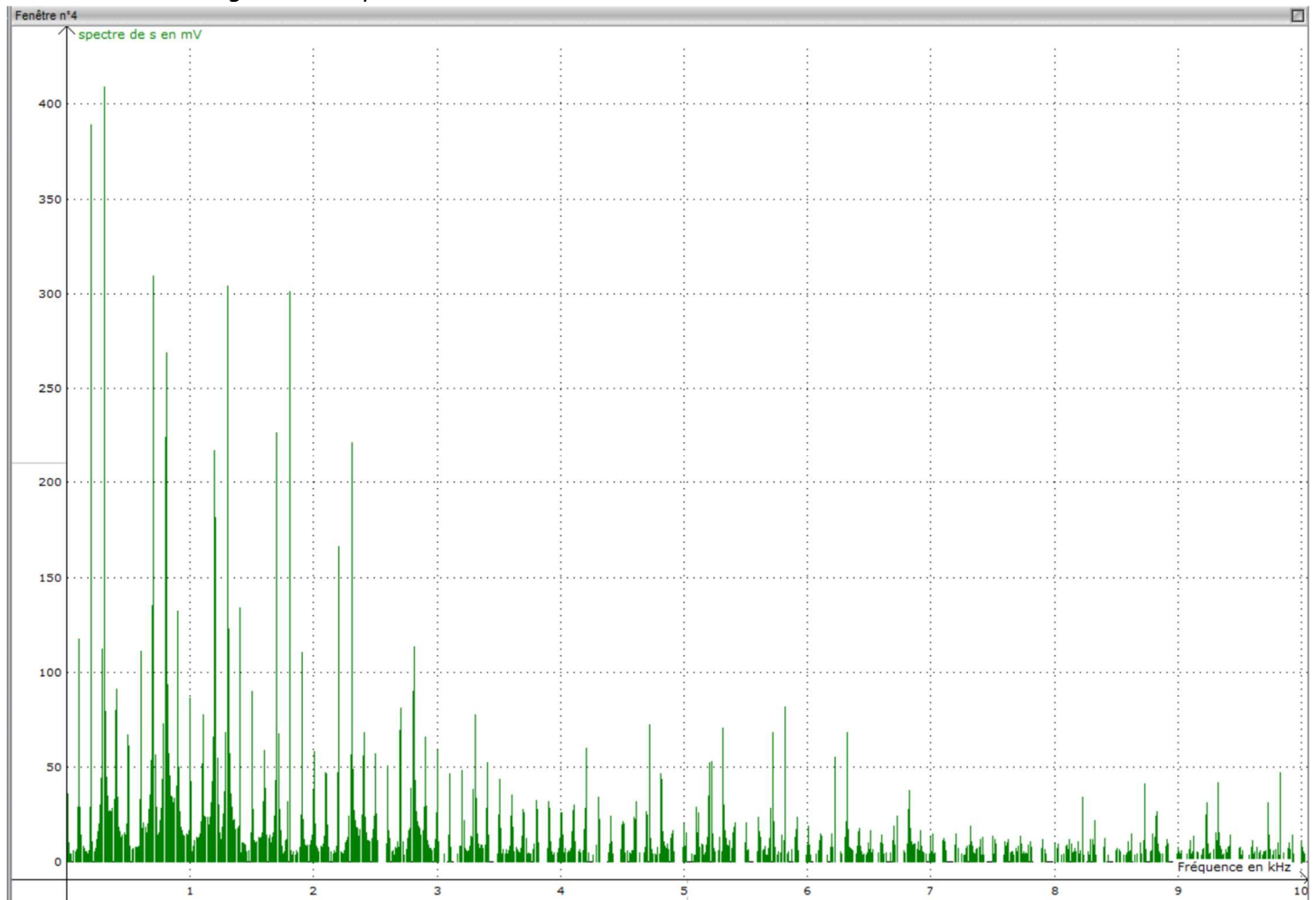
GBF GENTRAD : impulsions $f_e = 500$ Hz

Ne rien modifier d'autre.

Effectuer l'analyse spectrale de $s(t)$.

A l'aide de la loupe, sélectionner les fréquences du spectre de $s(t)$ sur 10 kHz environ.

A l'aide du pointeur, relever et noter les valeurs des différentes fréquences puis reproduire ce spectre en ne conservant que les composantes de valeur notable.



Commenter le spectre de $s(t)$ dans le cadre du critère de Nyquist-Shannon.

Le critère de Nyquist-Shannon n'est pas respecté même pour le fondamental. Tous les pics sont mélangés. L'information est perdue avec le repliement de spectre.

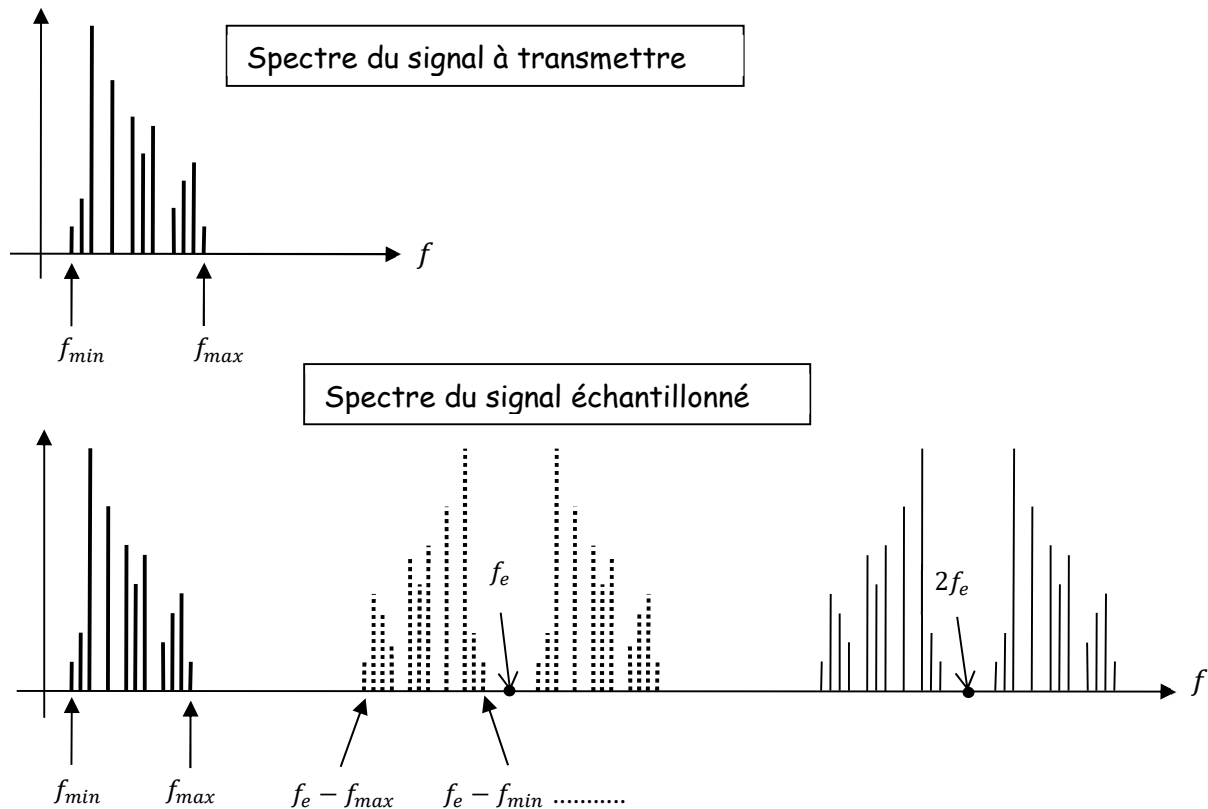
3) Conclusion

a) Echantillonnage

Il consiste à prélever à la fréquence d'échantillonnage f_e des échantillons d'un signal que l'on doit numériser dans l'objectif de le transmettre.

Le spectre du signal à transmettre comporte des fréquences comprises dans l'intervalle :
 $[f_{\min}, f_{\max}]$

Le spectre du signal échantillonné comporte les fréquences comprises dans les intervalles successifs:
 $[f_{\min}, f_{\max}]$, $[f_e - f_{\max}, f_e - f_{\min}]$, $[f_e + f_{\min}, f_e + f_{\max}]$, $[2f_e - f_{\max}, 2f_e - f_{\min}]$, $[2f_e + f_{\min}, 2f_e + f_{\max}]$,
 $[3f_e - f_{\max}, 3f_e - f_{\min}]$, $[3f_e + f_{\min}, 3f_e + f_{\max}]$...



Pour récupérer correctement l'ensemble du signal initial par simple filtrage passe-bas, il faut que $f_e - f_{\max}$ soit supérieur à f_{\max} de façon à ne pas mélanger les spectres successifs.

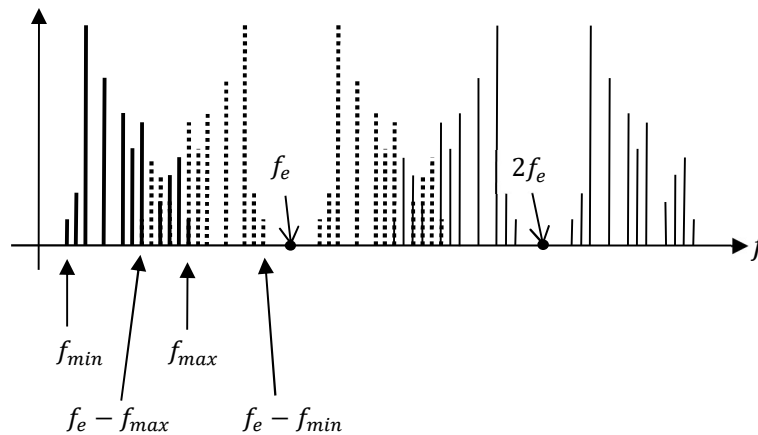
b) Théorème de Nyquist-Shannon

La fréquence d'échantillonnage doit être au minimum égale à deux fois la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner.

$$f_e > 2f_{\max} \quad T_e < \frac{1}{2f_{\max}}$$

La fréquence $f_{e,\min} = 2f_{\max}$ est appelée fréquence de Nyquist.

Cette fréquence correspond au prélèvement d'un minimum de deux échantillons par période du signal à transmettre.

c) Non respect du critère de Nyquist-Shannon: repliement du spectreCas ou $f_e < 2f_{max}$:

Le spectre replié à gauche de f_e se superpose au spectre du signal à transmettre, il est alors impossible de récupérer ce signal par filtrage.

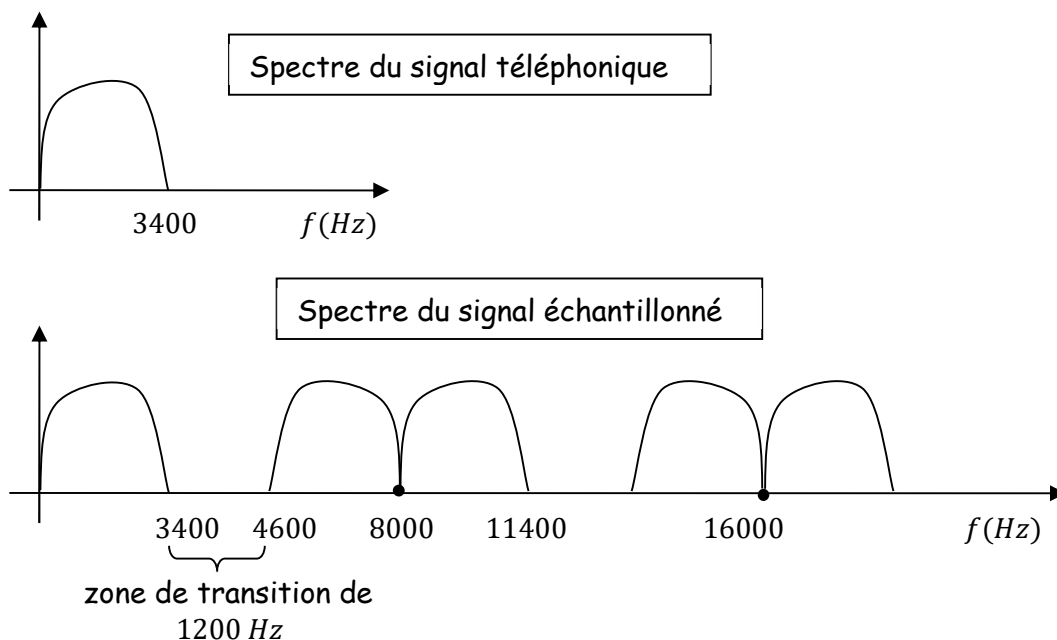
4) Exemplesa) Téléphonie

Le signal correspondant à la voix comporte, pour une qualité satisfaisante à la restitution, les fréquences comprises dans l'intervalle:

$$[0, f_{max} = 3400 \text{ Hz}] \quad \text{soit} \quad T_{min} = 0,30 \text{ ms}$$

Fréquence d'échantillonnage:

$$f_e = 8000 \text{ Hz} \quad \text{soit} \quad T_e = 0,125 \text{ ms}$$



Déterminer le nombre d'échantillons minimal prélevé sur le signal téléphonique :

$$N_{min} = \frac{T_{min}}{T_e} = \frac{0,3}{0,125} = 2,4 \quad \text{critère de Nyquist – Shannon respecté}$$

Déterminer le nombre d'échantillons prélevé pour la fréquence de $f = 1000 \text{ Hz}$ du signal téléphonique :

$$N = \frac{T}{T_e} = \frac{f_e}{f} = \frac{8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = 8 \quad \text{critère de Nyquist – Shannon respecté}$$

Calculer le rapport transition sur fréquence maximale du signal utile :

$$\frac{\text{transition}}{\text{signal utile}} = \frac{1200}{3400} = 35 \%$$

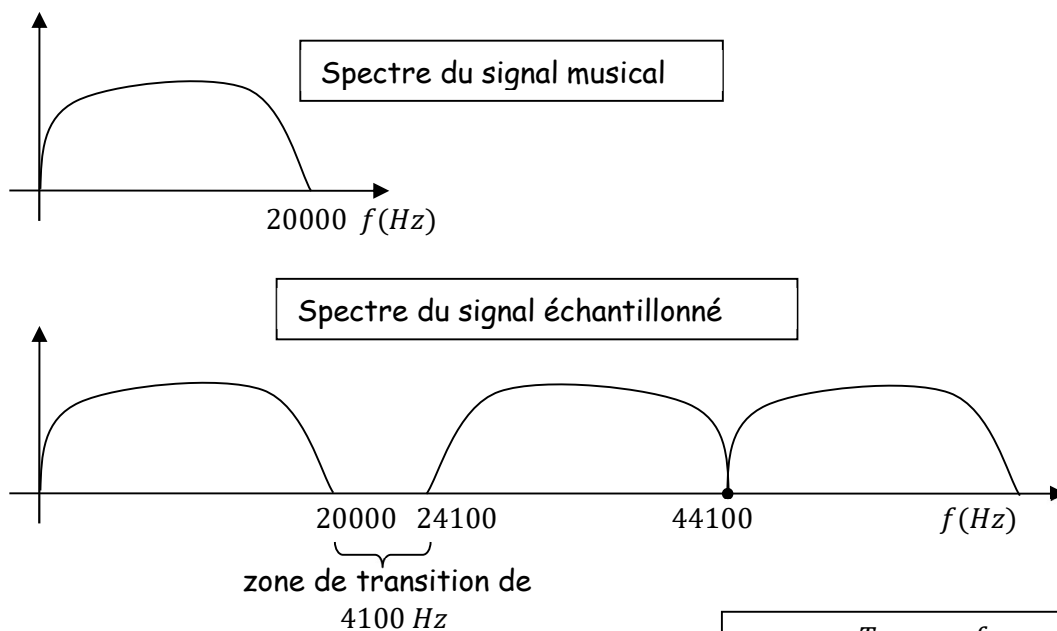
b) Musique

Le signal correspondant à la musique comporte, pour une qualité satisfaisante à la restitution, les fréquences comprises dans l'intervalle:

$$[0, f_{max} = 20000 \text{ Hz}] \quad \text{soit} \quad T_{min} = 50 \mu\text{s}$$

Fréquence d'échantillonnage:

$$f_e = 44100 \text{ Hz} \quad \text{soit} \quad T_e = 23 \mu\text{s}$$



Nombre d'échantillons minimal prélevé sur le signal musical :

$$N_{min} = \frac{T_{min}}{T_e} = \frac{f_e}{f_{max}} = 2,2$$

Nombre d'échantillons prélevé pour la fréquence de $f = 1000 \text{ Hz}$ du signal musical :

$$N = \frac{T}{T_e} = \frac{f_e}{f} = 44$$

Rapport transition sur fréquence maximale du signal utile :

$$\frac{\text{transition}}{\text{signal utile}} = \frac{4100}{20000} = 20 \%$$