TD 12 : Aspects énergétiques de la mécanique du point

1 Distance de freinage

Une voiture de masse $m = 1{,}5 \cdot 10^3$ kg roule à la vitesse de $50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur écrase la pédale de frein et s'arrête sur une distance $d = 15\,\mathrm{m}$. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. Calculer le travail de la force de freinage.

2. En déduire la norme de cette force.

3. Quelle distance faut-il pour s'arrêter si la vitesse initiale est de $70\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$?

4. Commenter cette phrase relevée dans un livret d'apprentissage de la conduite : « La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile ».

2 Toboggan

Un adulte ($m = 70\,\mathrm{kg}$) descend un toboggan d'une hauteur $h = 5\,\mathrm{m}$ faisant un angle $\alpha = 45°$ avec le sol. La norme de la force de frottement $\vec{T}$ est donnée par $\|\vec{T}\| = f\|\vec{R}\|$, où $f = 0{,}4$ est le coefficient de frottement et $\vec{R}$ la réaction normale. On prendra $g = 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

1. Calculer la variation d'énergie mécanique due au frottement entre le haut et le bas du toboggan.

2. Déterminer la vitesse de la personne en bas du toboggan. La comparer à celle qu'il aurait s'il n'y avait pas de frottement.

3 Interaction entre particules chargées

On considère deux particules A (fixe) et B (mobile), de même masse m et de charge respective q_A et q_B. On considère la force de Coulomb entre ces deux particules comme étant la seule force en jeu dans ce problème.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb notée $\vec{f}$.

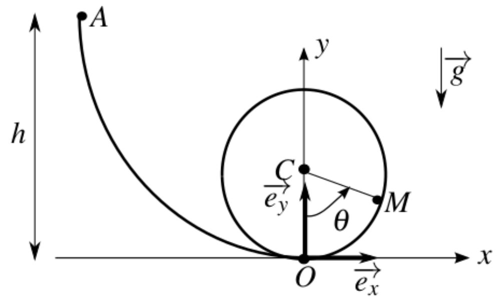
2. Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{f}$.

3. On suppose $q_A = q_B = q$. On lance B vers A avec la vitesse $\vec{v}_0$. À quelle distance minimale B s'approche-t-elle de A ? On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

4. On suppose $q_A = -q_B = q$. Quelle vitesse minimale faut-il donner à B pour qu'elle puisse s'échapper à l'infini ? On pourra s'aider d'un graphe d'énergie potentielle.

4 Bille dans une gouttière

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière située à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du cercle. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ l'accélération de la pesanteur.



1. Calculer la norme v_0 de la vitesse en O puis en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.

2. Déterminer la réaction de la gouttière en un point du guide circulaire.

3. Déterminer la hauteur minimale de A pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.

5 Étude d'un oscillateur à l'aide de son portrait de phase

On fait l'étude d'un oscillateur M de masse $m = 0{,}2\,\text{kg}$ astreint à se déplacer suivant l'axe Ox de vecteur unitaire $\vec{u}_x$. Il est soumis uniquement aux forces suivantes :

- la force de rappel d'un ressort de caractéristiques (k, l_0) ;
- une force de frottement visqueux : $\vec{f}_v = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$;
- une force constante $\vec{F}_C = F_C\vec{u}_x$.

1. Équation du mouvement.

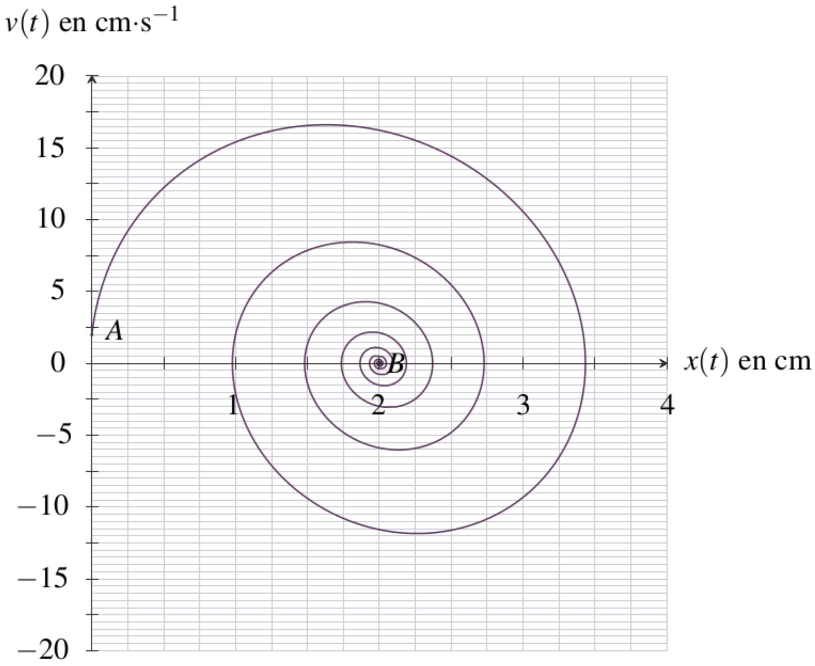
1.a. Établir l'équation différentielle du mouvement de M et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \ ,$$

où x est l'allongement du ressort (par rapport à l_0). Les grandeurs ω_0, Q et X_0 sont à exprimer en fonction des données.

1.b. Dans le cas d'une solution pseudo-périodique, exprimer $x(t)$: on définira le temps caractéristique de décroissance des oscillations τ et la pseudo-pulsation Ω que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q.

2. Le portrait de phase $(v(t) = \dot{x}(t), x(t))$ de l'oscillateur étudié est donné sur la figure. On souhaite pouvoir en tirer les valeurs des différents paramètres de l'oscillateur.



2.a. Quel est le type de mouvement ?

2.b. Déterminer la vitesse et l'élongation au début et à la fin du mouvement.

2.c. Déterminer la vitesse maximale atteinte ainsi que l'élongation maximale.

2.d. On donne les différentes dates correspondant aux croisements de la trajectoire de phase avec l'axe des abscisses :

t (s)	0,31	0,65	0,97	1,3	1,62

En déduire le pseudo-période T et la pseudo-pulsation Ω.

2.e. On définit le décrément logarithmique par

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t) - x_B}{x(t+nT) - x_B}\right) ,$$

où $x(t)$ et $x(t+nT)$ sont les élongations aux instants t et $t+nT$ (n entier naturel) et x_B l'élongation finale de M. Exprimer δ en fonction de T et τ. En choisissant une valeur de n la plus grande possible pour les données dont on dispose, déterminer δ puis τ.

2.f. Déduire des résultats précédents le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.

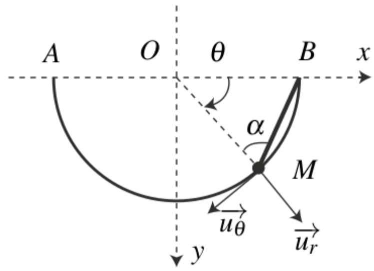
2.g. Déterminer la raideur du ressort k, le coefficient de frottement λ et la force F_c sachant que $l_0 = 1\,\text{cm}$.

6 Mouvement d'une bille reliée à un ressort sur un cercle

On considère le mouvement d'une bille M de masse m pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de centre O et de rayon R disposé dans un plan vertical. On note AB le diamètre horizontal du cerceau, Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical descendant et θ l'angle entre Ox et OM. La bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k dont la seconde extrémité est fixée en B. Elle ne peut se déplacer que sur le demi-cercle inférieur.

1. Déterminer l'angle α entre MO et MB en fonction de θ.

2. Établir l'expression de la longueur de ressort en fonction de R et θ.



3. En déduire l'énergie potentielle totale du système. Représenter la courbe d'énergie potentielle et en déduire les positions d'équilibres éventuelles et leur stabilité.

4. Si l'on écarte faiblement la bille de sa position d'équilibre stable θ_e et qu'on la lâche sans vitesse initiale, à quel type de mouvement peut-on s'attendre ?

5. Établir l'équation différentielle du mouvement.

6. On note ε l'écart $\theta - \theta_e$. Initialement, on écarte la bille d'un angle $\varepsilon \ll \pi/2$ à partir de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Linéariser l'équation du mouvement et conclure.