# Équations différentielles

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

## Table des matières

# 1 Généralités

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

## 1.1 Notion d'équation différentielle

### 1.1.1 Équation différentielle

On appelle équation différentielle toute écriture du type :

$$(E) \quad F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{[n]}\right) = 0$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $F$ une application de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{K}$ avec $\Omega \in \mathcal{P}\left(\mathbb{K}^{n+1}\right)$.

### 1.1.2 Solutions

Une solution de $(E)$ est un couple $(J, \varphi)$ avec $J$ un sous-intervalle de $I$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application $n$ fois dérivable telle que :
- $\forall t \in J$, $\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{[n]}(t) \in \Omega$
- $\forall t \in J$, $F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{[n]}(t)\right) = 0$

Une solution $(J, \varphi)$ de $(E)$ est dite maximale si l'on ne peut trouver d'intervalle $J_1$ tel que $J \subset J_1 \subset I$ et $\psi_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ une solution de $(E)$ telle que $\varphi = \psi_{1|J}$ (c'est-à-dire, $\forall t \in I$, $\varphi(t) = \psi_1(t)$).

On remarque que :
- Il n'existe pas toujours de solutions.
- Même si on pose des contraintes (conditions initiales, etc), la solution n'est pas toujours unique.

## 1.2 Équations différentielles linéaires

Elles sont de la forme :

$$(E) \quad a_n(x)\, y^{[n]} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

où $a_o, a_1, \dots, a_n$ sont des applications de $I$ dans $\mathbb{K}$ [a].

[a] En pratique, ces applications sont au moins continues.

On note que $F : I \times \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$. On appelle $b$ le second membre de $(E)$, à $(E)$ est associée une équation $(E_0)$ dite sans second membre (ou homogène) :

$$(E_0) \quad a_n(x)\, y^{[n]} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

$(E_0)$ admet au moins une solution : la fonction nulle définie sur $I$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $(E_0)$ définies sur $I$.

### 1.2.1 Détermination de $\mathcal{S}$ en fonction de $\mathcal{S}_0$ et d'une solution particulière

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I$, et supposons connaître un élément particulier de $\mathcal{S}$ noté $\varphi$. Alors,

$$\mathcal{S} = \{\varphi + \varphi_0 | \varphi_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Autrement dit, si on connaît une solution $\varphi$ de $(E)$ et toutes les solutions de $(E_0)$, alors on connaît toutes les solutions de $(E)$.

**Démonstration**

$\Rightarrow$ Soit $\varphi_0 \in \mathcal{S}_0$. Alors $\varphi + \varphi_0$ est $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ et $\forall k \in [[0, n]]$, $(\varphi + \varphi_0)^{[k]} = \varphi^{[k]} + \varphi_0^{[k]}$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\varphi + \varphi_0\right)^{[k]} = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{[k]} + \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_0^{[k]}$$

Or, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi^{[k]} = b$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi_0^{[k]} = 0$ donc $\varphi + \varphi_0$ avec ien solution de $(E)$.

$\Leftarrow$ Soit $\psi \in \mathcal{S}$. Alors $g = \psi - \varphi$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et

$$\sum_{k=0}^{n} a_k g^{[k]} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \psi^{[k]}}_{b} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{[k]}}_{b} = 0$$

Donc $g \in \mathcal{S}_0$ et $\psi = \varphi + g \in \varphi + \mathcal{S}_0$.

**Bilan** Ainsi, pour résoudre $(E)$ dans $I$, il suffit de :
- Résoudre $(E_0)$.
- Trouver une solution de $(E)$.

### 1.2.2 Principe de superposition

On suppose que $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$ avec $b_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(E_i)$ l'équation différentielle suivante :

$$(E_i) \quad a_n\left(x\right) y^{[n]} + \cdots + a_1\left(x\right) y' + a_0\left(x\right) y = b_i\left(x\right)$$

Soit $\varphi_i$ une solution de $(E_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ est une solution de $(E)$.

### 1.2.3 Méthode de variation de la constante

Supposons que l'on connaît une solution de $(E_0)$ notée $u$ qui ne s'annule pas sur $I$. Alors toute application $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ s'écrit sous la forme $x \longmapsto \lambda\left(x\right) u\left(x\right)$ où $\lambda$ est $n$ fois dérivable [a] de $I$ dans $\mathbb{K}$.

Si $u$ est $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{u}$ aussi. Si $f$ est $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ , on peut écrire $f = \dfrac{f}{u} \cdot u$ donc $f$ s'écrit bien sous la forme $\lambda u$ avec $\lambda$ $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$.

*a.* Si $f, g$ sont $n$ fois dérivables de $I$ dans , alors $fg$ aussi et

$$(fg)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} g^{[n-k]}$$

Démonstration en exercice.

On peut donc rechercher toutes les solutions de $(E)$ sous la forme $x \longmapsto \lambda\left(x\right) u\left(x\right)$ avec $\lambda$ $n$ fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ [a].

**Exemple pour** $n = 2$

$$(E) \quad a_2\left(x\right) y'' + a_1\left(x\right) y' + a_0\left(x\right) y = b\left(x\right)$$

Soit $u$ une solution de $(E_0)$ sur $I$ qui ne s'annule jamais. Recherchons les solutions de $(E)$ sous la forme $\lambda u$ avec $\lambda$ deux fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$.

*a.* Cette méthode ramène la résolution de $(E)$ à la résolution d'une équation différentielle en $\lambda'$ d'ordre strictement plus petit que $n$.

Soit $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable et $f = \lambda u$. Alors

$$f' = \lambda' u + \lambda u' \quad \text{et} \quad f'' = \lambda'' u + 2\lambda' u' + \lambda u''$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = b \\ &\Leftrightarrow a_2 \left(\lambda'' u + 2\lambda' u' + \lambda u''\right) + a_1 \left(\lambda' u + \lambda u'\right) + a_0 \lambda u = b \\ &\Leftrightarrow \lambda \underbrace{\left(a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u\right)}_{0} + \lambda' \left(2a_2 u' + a_1 u\right) + \lambda'' a_2 u = b \\ &\Leftrightarrow \lambda' \text{ est solution de } a_2 u y' + \left(2a_2 u' + a_1 u\right) y = b \quad (*) \end{aligned}$$

Si on sait résoudre $(*)$, on connaît la forme générale de $\lambda'$ puis celle de $\lambda$ par intégration.

# 2 Équation linéaires d'ordre 1

## 2.1 Équation normalisées

On s'intéresse ici à des équations différentielles du type

$$(E) \quad y' + a(x) y = b(x)$$

où $a$ et $b$ sont des fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$, continues [a].

a. Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des applications de $I$ dans $\mathbb{K}$ telles que $\alpha$ ne s'annule pas sur $I$ et

$$(E) \quad \alpha(x) y' + \beta(x) y = \gamma(x) \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$$

Cette deuxième forme de $(E)$ est l'équation résolue en $y'$.

### 2.1.1 Résolution de $(E) \quad y' + a(x) y = b(x)$

**Résolution de l'équation homogène** $(E_0) \quad y' + a(x) y = 0$ Soit [b] $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable. On rappelle que si $\varphi$ est dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$, alors $t \xrightarrow{\psi} \exp(\varphi(t))$ est aussi dérivable et $\psi'(t) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t))$.

On remarque que si $g$ est dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$ alors $\psi$ est dérivable et

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= g'(t) \exp(\varphi(t)) + g(t) \varphi'(t) \exp(\varphi(t)) \\ &= \left(g'(t) + \varphi'(t)\right) \exp(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Revenons à $f$. $f$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si $f' + af = 0$. Considérons $A$ une primitive de $a$ sur $I$ car $a$ est continue. $f$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} f' + A' f = 0 &\Leftrightarrow \left(f' + A' f\right) \exp(A) = 0 \quad \text{car } \exp(A) \text{ ne s'annule pas sur } I \\ &\Leftrightarrow (f \exp(A))' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall t \in I, f(t) \exp(A(t)) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / f = \lambda \exp(-A) \end{aligned}$$

b. Au brouillon *uniquement*, on peut écrire pour se souvenir :

$$\begin{aligned} y' + ay = 0 &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = -\int^x a + \lambda \\ &\Leftrightarrow y = \lambda \exp\left(-\int^x a\right) \end{aligned}$$

**Bilan**

Soit $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Alors,

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda \exp(-A) \,|\lambda \in \mathbb{K}\}$$

**Recherche d'une solution particulière de** $(E)$ $\quad y' + a(x)\,y = b(x)$ Notons $A$ une primitive de $a$ sur $I$. Alors $u = \exp(-A)$ est une solution de $(E_0)$ qui ne s'annule jamais. Recherchons une solution de de $(E)$ sous la forme $t \overset{\psi}{\longmapsto} \lambda(t)\,u(t)$ avec $\lambda$ dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } \mathcal{S} &\Leftrightarrow \varphi' + a\varphi = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' u + \lambda u' + a\lambda u = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' u = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' = \frac{b}{u} = b\exp(A)
\end{aligned}$$

Soit $B$ une primitive de $b\exp(A)$. Alors $\varphi = B\exp(-A)$ est solution de $E$ donc :

$$\mathcal{S} = \varphi + \mathcal{S}_0 = \{t \longrightarrow (B(t) + \lambda)\exp(-A(t))\,|t \in I\}$$

### 2.1.2 Exemples

(1) $I = \mathbb{R}_+^*$. Résoudre $(E)$ $\quad x^2 y' + y = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$ car $x^2 \neq 0\ \forall x \in I$.

**Solution de** $(E_0)$ $y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ donc l'ensemble des solutions de $(E_0)$ est

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \lambda \exp\left(\frac{1}{x}\right) |\lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Solution particulière** $t \longmapsto 1$ est directement solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(\frac{1}{x}\right) |\lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) Résoudre $(E)$ $(x-1)\,y' + y = \ln x$ sur $]1, +\infty[$. On remarque que

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x-1} y = \frac{\ln x}{x-1}$$

**Solution de** $(E_0)$ Une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est $\ln(x-1)$ donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \longmapsto \frac{\lambda}{x-1} |\lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Solution particulière** $u = \frac{1}{x-1}$ est une solution de $(E_0)$ qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Recherchons une solution de $(E)$ de la forme $\varphi = \lambda u$, $\lambda$ dérivable de $I$ dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \varphi' + a\varphi = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' u + \lambda u' + a\lambda u = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' u = b \\
&\Leftrightarrow \lambda' = \frac{b}{u} = \ln x
\end{aligned}$$

Une primitive de $x \longmapsto \ln x$ est $x \longmapsto x\ln x - x$ donc $\varphi = \frac{x\ln x - x}{x-1}$ donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in ]1, +\infty[ \longmapsto \frac{x(\ln x - 1) + \lambda}{x-1} |\lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

## 2.2 Équations non normalisées

### 2.2.1 Cas général

$$(E) \quad \alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y = \gamma(x)$$

Avec $\alpha$ qui peut s'annuler en certains point de $I$. On ne peut rien affirmer de général quand à l'existence de solutions définies sur $I$ tout entier [a].

Pour résoudre $(E)$ sur $I$ :

(1) On commence par résoudre $(E)$ sur chaque sous-intervalle de $I$ où $\alpha$ ne s'annule pas.

(2) On essaie ensuite de « raccorder » les diverses solutions pour trouver les solutions maximales de $(E)$.

### 2.2.2 Exemple de problème de raccord

Soit

$$(E) \quad (x-1)\, y' + y = \ln x$$

avec $I = \mathbb{R}_+^*$. On ne peut rendre l'équation $(E)$ résolue en $y'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous procéderons donc par analyse et synthèse [b].

**Partie directe** Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et solution de $(E)$.

- On doit avoir

$$(1-1)\, f'(1) + f(1) = \ln 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

- De plus, $f_{|]1,+\infty[}$ est solution de $(E)$ sur $]1,+\infty[$ donc $\exists\lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 1$,

$$f(x) = \frac{\lambda + x\ln x - x}{x-1}$$

De même, $f_{|]0,1[}$ est solution de $(E)$ sur $]0,1[$ or pour $\varphi : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable,

$$\varphi \text{ est solution de}\,(E) \Leftrightarrow \varphi \text{ est solution de } y' + \frac{y}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1} \qquad (\Lambda)$$

Résolvons $(\Lambda)$ sur $]0,1[$.

○

$$(\Lambda_0) \quad y' + \frac{y}{x-1} = 0$$

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ est $x \longmapsto \ln(1-x)$ donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in ]0,1[ \longmapsto \frac{\lambda}{1-x} | \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in ]0,1[ \longmapsto \frac{\lambda}{x-1} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

○ Soit $\mu : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $x \longmapsto \dfrac{\mu}{x-1}$ est solution si et seulement si $\forall x \in ]0,1[$,

$$\frac{\mu'(x)}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1} \Leftrightarrow \mu'(x) = \ln(x)$$

Ainsi $x \longmapsto \dfrac{x\ln x - x}{x-1}$ est solution donc

$$\mathcal{S}_\Lambda = \left\{ x \in ]0,1[ \longmapsto \frac{\mu + x\ln x - x}{x-1} | \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

a. En pratique, $\alpha$ s'annule en un nombre de fois fini sur $\mathbb{R}$, ce qui partage $I$ en sous intervalles où $\alpha$ ne s'annule pas.

b. Procède, procède...

Ainsi, $\exists \mu \in \mathbb{R} / \forall x \in \left]0,1\right[$,

$$f(x) = \frac{\mu + x \ln x - x}{x-1}$$

$f$ est continue en 1 donc on doit avoir

$$f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x>1}}{\longrightarrow} f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\longrightarrow} f(1) = 0$$

Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\lambda - x}{x-1} + x\dfrac{\ln x}{x-1}$ or $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \ln' 1 = 1$. Si $\lambda \neq 1$, alors $\lambda - x$ tend vers $\lambda - 1 \neq 0$ lorsque $x$ tend vers 1 donc

$$f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x>1}}{\longrightarrow} \pm\infty$$

On doit donc avoir $\lambda = 1$, alors pour $x > 1$,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x-1} - 1 = -1 + 1 \cdot 1 = 0$$

De même, on montre que $\mu = 1$ pour $f$ définie sur $\left]0,1\right[$.

**Partie réciproque** Soit $\varphi$ une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1 + x \ln x - x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Alors $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\left]0,1\right[$ et $\left]1,+\infty\right[$ et est solution de $(E)$ sur ces deux intervalles. Cherchons si $\varphi$ est dérivable en $x = 1$. On a [a] :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est dérivable en 1 et $\varphi'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall x > 0$, $(x-1)\varphi'(x) + \varphi(x) = \ln x$, y compris pour $x = 1$ donc $\varphi$ est l'unique solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

### 2.2.3 Théorème de Cauchy-Lipchitz

> Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues et
> $$(E) \quad y' + a(x)\, y = b(x)$$
> Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors il existe une unique solution $f$ de $(E)$ telle que $f(x_0) = y_0$.

**Démonstration** Soit $A$ une primitive de $a$ et $B$ une primitive de $b \exp(A)$. Alors,

$$\mathcal{S}_E = \{x \in I \longmapsto (\lambda + B(x)) \exp(-A(x)) \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) = (\lambda + B(x)) \exp(-A(x))$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0) = y_0 &\Leftrightarrow (\lambda + B(x_0)) \exp(-A(x_0)) = y_0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = y_0 \exp(-A(x_0)) - B(x_0) \end{aligned}$$

$f$ est unique d'où le résultat.

a. Résultat obtenu grâce à la calculette : il faudra attendre le cours sur les développements limités pour pouvoir justifier cela.

# 3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

## 3.1 Résolution de l'équation homogène

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et

$$(E) \quad ay'' + by + cy = 0$$

### 3.1.1 Petite histoire

Que se passe-t-il pour les équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants ? Soit

$$ay' + by = 0 \quad a \in \mathbb{K}^*, b \in \mathbb{K}$$

Alors il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que

$$\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda \exp(rt) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Les fonctions de la forme $t \longmapsto \exp(rt)$ sont-elles solutions de l'équation $(E)$ ?

Soit $r \in \mathbb{K}$ et $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(rt)$. Alors $\varphi$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = r\exp(rt) \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = r^2\exp(rt)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad ar^2\varphi(t) + br\varphi(t) + c\varphi(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad ar^2 + br + c = 0 \quad \text{car } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow r \text{ est racine de } P(X) = aX^2 + bX + c
\end{aligned}$$

On appelle $P$ le polynôme caractéristique de $(E)$.

### 3.1.2 Premier cas : $P$ admet au moins une racine $r$ dans $\mathbb{K}$

On remarque que c'est toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(rt)$ est solution de $(E)$ et ne s'annule jamais. On peut donc chercher les solutions de $(E)$ sous la forme $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

Soit $\lambda \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ [a] et $f = \lambda\varphi$. Alors :

$$f' = \lambda'\varphi + \lambda\varphi' \quad \text{et} \quad f'' = \lambda''\varphi + 2\lambda'\varphi' + \lambda\varphi''$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow a\left(\lambda''\varphi + 2\lambda'\varphi' + \lambda\varphi''\right) + b\left(\lambda'\varphi + \lambda\varphi'\right) + c\lambda\varphi = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\underbrace{\left(a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi\right)}_{0} + a\varphi\lambda'' + \lambda'\left(2a\varphi' + b\varphi\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t)\left[a\lambda''(t) + (2ar + b)\lambda'(t)\right] = 0 \quad \text{car } \varphi'(t) = r\varphi(t) \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\lambda''(t) + (2ar + b)\lambda'(t) = 0 \quad \text{car } \varphi(t) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda' \text{ est solution de } ay' + (2ar + b)y = 0 \quad (E') \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} / \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = \alpha\exp\left(-\frac{2ar + b}{a}t\right)
\end{aligned}$$

a. Ce qui signifie que $\lambda$ est deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

**Premier sous-cas : $r$ est racine double de $P$** Alors $b^2-4ac=0$ et $r=-\dfrac{b}{2a}$. On voit que

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} / \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)=\alpha \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est affine : } \lambda : t \longrightarrow \alpha t+\beta \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de $(E)$ est :

$$\mathcal{S}_E=\left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto (\alpha t+\beta)\,\mathrm{e}^{rt} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\right\}$$

**Deuxième sous-cas : $r$ est racine simple de $P$** Alors $b^2-4ac>0$ et $r \neq -\dfrac{b}{2a}$. Notons $s$ l'autre racine de $P$. Alors

$$r+s=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad rs=\frac{c}{a}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} / \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t)=\frac{\alpha}{-\frac{2ar+b}{a}} \exp\left(-\frac{2ar+b}{a} t\right)+\beta \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} / \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t)=\alpha \exp\left(-\frac{2ar+b}{a} t\right)+\beta \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \exp\left(\left(-2r-\frac{b}{a}\right) t\right) \exp(rt)+\beta \exp(rt) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \exp(st)+\beta \exp(rt) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \quad \text{car } s=-\frac{b}{a}-r \end{aligned}$$

**Bilan**

Ainsi, si $P$ admet deux racines distinctes $s$ et $r$,

$$\mathcal{S}_E=\{t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \exp(st)+\beta \exp(rt) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

### 3.1.3 Deuxième cas : $P$ n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$

Alors $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $b^2-4ac<0$. On cherche l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}_E=\left\{f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \mid af''+bf'+cf=0\right\}$$

$P$ admet 2 racines complexes conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Notons

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}=\left\{f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid af''+bf'+cf=0\right\}$$

D'après le cas précédent,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}=\{t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda \exp[(\alpha+i\beta) t]+\mu \exp[(\alpha-i\beta) t] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$$

Il est évident que

$$f \in \mathcal{S}_E \Leftrightarrow f \text{ est réelle et } f \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f : t \longmapsto \lambda \exp[(\alpha+i\beta) t]+\mu \exp[(\alpha-i\beta) t]$. Posons $\lambda=a+ib$ et $\mu=c+id$ donc pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t)=(a+ib)\left(\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\right)+(c+id)\left(\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)\right)$$

Donc
$$\Im\mathrm{m}\left(f\left(t\right)\right)=\mathrm{e}^{\alpha t}\left(a\sin\beta t+b\cos\beta t-c\sin\beta t+d\cos\beta t\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f \text{ est réelle} &\Leftrightarrow \Im\mathrm{m}\left(f\right)=0\\ &\Leftrightarrow a\sin\beta t+b\cos\beta t-c\sin\beta t+d\cos\beta t=0\end{aligned}$$

Il est là nécessaire de prouver le lemme suivant :

**Petit lemme** Pour $\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, on a

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \delta\sin\beta t+\varepsilon\sin\beta t=0\Leftrightarrow\delta=\varepsilon=0$$

En effet, la partie réciproque est évidente. De plus,
- pour $t=0$, on a $\delta\sin 0+\varepsilon\cos 0\Rightarrow\varepsilon=0$
- Pour $r=\dfrac{\pi}{2\beta}$, car $\beta\neq 0$, $\delta\sin\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon\cos\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\delta=0$

Revenons à la résolution de l'équation homogène. Ainsi,

$$f \text{ est réelle } \Leftrightarrow c=a \quad\text{et}\quad b=-d$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto(a+ib)\exp\left[(\alpha+i\beta)\,t\right]+(a-ib)\exp\left[(\alpha-i\beta)\,t\right]|a,b\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\mathrm{e}^{\alpha t}\left(2a\cos\beta t-2b\sin\beta t\right)|a,b\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda\cos\beta t+\mu\sin\beta t\right)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

**Bilan**

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ et si $P$ n'a pas de racines réelles, $P$ admet deux racines complexes conjuguées $\alpha\pm i\beta$ avec $\beta\neq 0$ et
$$\mathcal{S}_E=\left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda\cos\beta t+\mu\sin\beta t\right)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

### 3.1.4 Cas particuliers

- Soit $\omega\in\mathbb{R}$ et $(E)\quad y''+\omega^2y=0$, alors $\alpha_{calS_E=\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\lambda\cos\omega t+\mu\sin\omega t|\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}}$
- Soit $(E_1)\quad y''-\omega^2y=0$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E &= \left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\lambda\mathrm{e}^{\omega t}+\mu\mathrm{e}^{-\omega t}|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{t\in\mathbb{R}\longmapsto\lambda\cosh\omega t+\mu\sinh\omega t|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

## 3.2 Cas d'un second membre du type exponentielle-polynôme

On s'intéresse ici à une équation différentielle du type

$$(E)\quad ay''+by'+cy=Q\left(t\right)\exp\left(\omega t\right)$$

Avec $a,b,c\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$, $Q$ une fonction polynômiale et $\omega\in\mathbb{K}$. De plus,

$$Q\left(t\right)=\lambda_0+\lambda_1t+\cdots+\lambda_dt^d$$

### 3.2.1 Forme des solutions particulières

$P(X) = aX^2 + bX + c$ est le polynôme caractéristique de $(E_0)$ : $ay'' + by' + c = 0$. On sait résoudre $(E_0)$. Reste à trouver *une* solution de $(E)$.

On dispose d'une recette, pour laquelle on distingue trois cas :

(1) Si $\omega$ n'est pas racine de $P$, on cherche une solution particulière sous la forme $t \overset{\varphi}{\longmapsto} S(t)\exp(\omega t)$ avec $S$ une fonction polynômiale de même degré que $Q$ à déterminer.

(2) Si $\omega$ est racine simple de $P$ , on cherche une solution particulière de $(E)$ sous la forme

$$t \longmapsto S(t)\exp(\omega t)$$

avec $S$ une fonction polynômiale du type

$$t \longmapsto \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \cdots + \mu_{d+1} t^{d+1}$$

(3) Si $\omega$ est racine double de $P$ , on cherche une solution particulière de $(E)$ sous la forme

$$t \longmapsto S(t)\exp(\omega t)$$

avec $S$ une fonction polynômiale du type

$$t \longmapsto \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3 + \cdots + u_{d+2} t^{d+2}$$

### 3.2.2 Équation différentielle vérifiée par $S(t)$

Soit $S$ polynômiale quelconque et $\varphi : t \longmapsto S(t)\exp(\omega t)$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \big(S'(t) + \omega S(t)\big)\exp(\omega t) \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \big(S''(t) + 2\omega S'(t) + \omega^2 S(t)\big)\exp(\omega t)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = Q(t)\exp(\omega t) \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a\left[\big(S''(t) + 2\omega S'(t) + \omega^2 S(t)\big)\exp(\omega t)\right] + b\left[\big(S'(t) + \omega S(t)\big)\exp(\omega t)\right] \\
&\quad\ +c\left[S(t)\exp\right] = Q(t)\exp(\omega t) \\
&\Leftrightarrow aS'' + P'(\omega)S' + P(\omega)S = Q
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Exemples

(1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ :

$$(E) \quad 2y'' + 2y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$$

On reconnaît là une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants et de second membre de type exponentielle-polynôme. Résolvons $(E_0)$ : $2y'' + 2y' + y = 0$. Alors

$$P(X) = 2X^2 + 2X + 1$$

Donc $\Delta = -4 = (2i)^2$ donc $P$ n'a pas de racines réelles mais possède deux racines complexes conjuguées $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i}{2}$, alors

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\alpha\cos\frac{t}{2} + \beta\sin\frac{t}{2}\right) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Recherchons maintenant une solution particulière de $(E)$. $\omega = -1$ n'est pas racine de $P$ donc on cherche un solution particulière sous la forme $x \in \mathbb{R} \xmapsto{\varphi} (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow P'(-1)\,S'(x) + P(-1)\,S(x) = x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2a + ax + b = x \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b - 2a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $x \longmapsto (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de $(E)$. L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \in \mathbb{R} \longmapsto (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left( \alpha \cos \frac{x}{2} + \beta \sin \frac{x}{2} \right) | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ :

$$(E) \quad y'' - 3y' + 2y = \left(x^2 + 1\right) \mathrm{e}^x$$

On reconnaît là une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants et de second membre de type exponentielle-polynôme. Résolvons $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$. Alors

$$P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

$P$ admet deux racines réelles 1 et 2 donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \mathrm{e}^x + \beta \mathrm{e}^{2x} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

De plus, $\omega = 1$ est racine simple de $P$ donc on cherche une solution particulière de $(E)$ sous la forme $x \in \mathbb{R} \xmapsto{\varphi} \left(ax^3 + bx^2 + cx\right) \mathrm{e}^x$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow S''(x) + P'(1)\,S'(x) = x^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow 6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c = x^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow -x^2 3a + x(6a - 2b) + 2b - c = x^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \\ c = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $x \longmapsto \left( -\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) \mathrm{e}^x$ est solution de $(E)$ donc l'ensemble des solutions de $(E)$ est donc

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \in \mathbb{R} \longmapsto \left( -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) \mathrm{e}^x + \alpha \mathrm{e}^x + \beta \mathrm{e}^{2x} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

## 3.3 Cas d'un second membre en exponentielle-cosinus ou sinus

### 3.3.1 Méthode

On considère

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = Q(x)\,\mathrm{e}^{\omega x} \cos \alpha x \quad \text{et} \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = Q(x)\,\mathrm{e}^{\omega x} \sin \alpha x$$

Avec $a, b, c, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$ et $Q$ une fonction polynômiale à coefficients réels. On cherche des solutions particulières de $(E_1)$ et $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$. Soit

$$(E_{\mathbb{C}}) \quad ay'' + by' + cy = Q(x) \exp\left[(\omega + i\alpha)\,t\right]$$

On sait trouver $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ [a]. Si on écrit $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec $\varphi_1$ et $\varphi_2$ réelles, on a $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$a\left(\varphi_1'' + i\varphi_2''\right)(x) + b\left(\varphi_1' + i\varphi_2'\right)(x) + c\left(\varphi_1 + i\varphi_2\right)(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\omega x}\left(\cos\alpha x + i\sin\alpha x\right)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$a\varphi_1''(x) + b\varphi_1'(x) + c\varphi_1(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\omega x}\cos\alpha x$$

Donc $\varphi_1$ est une solution de $(E)$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$a\varphi_2''(x) + b\varphi_2'(x) + c\varphi_2(x) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\omega x}\sin\alpha x$$

Donc $\varphi_2$ est solution de $(E_2)$.

*a.* En effet le second membre de $(E_{\mathbb{C}})$ est du type exponentielle-polynôme : voir page 11 pour la forme des solutions.

### 3.3.2 Exemples

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 5y = 2x\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$$

Résolvons l'équation homogène $(E_0)$ : $y'' + 2y' + 5y = 0$. On reconnaît là une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants dont le polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^2 + 2X + 5$$

$\Delta = -16 = (4i)^2$, donc $P$ admet deux racines complexes conjuguées $-1 \pm 2i$ donc

$$\mathcal{S}_0 = \left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda\cos 2t + \mu\sin 2t\right) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de $(E)$. Soit

$$(E_{\mathbb{C}}) \qquad y'' + 2y' + 5y = 2x\exp\left[(-1+2i)\,x\right]$$

Si $\varphi$ est une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$, alors $\Re\mathrm{e}(\varphi)$ est une solution particulière de $(E)$. Or $-i + 2i$ est une racine simple de $P$ donc on cherche une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ sous la forme $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(ax + bx^2\right)\exp\left[(-1+2i)\,t\right]$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est solution de } (E_{\mathbb{C}}) &\Leftrightarrow S''(t) + P'(-1+2i)\,S'(x) = 2x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 2b + 4i\,(a + 2bx) = 2x \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 4ia = 0 \\ 8ib = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = -\dfrac{i}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(\dfrac{x}{8} - i\dfrac{x^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2ix}$ est solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$. Donc

$$\Re\mathrm{e}(\varphi) : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x\right)$$

est solution de $(E)$. On a donc :

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + \frac{x^2}{4}\sin 2x\right) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = \sin^2 x \Leftrightarrow y'' + 2y' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Résolvons $(E_0)$ : $y'' + 2y' + y = 0$, dont le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X + 1$, $\Delta = 0$ donc $P$ admet une racine double : $-1$. Ainsi,

$$\mathcal{S}_0 = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Recherchons une solution particulière de $(E)$, pour cela utilisons la méthode de superposition [a]. Soit

$$(E_1) : y'' + 2y' + y = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Une solution particulière de $(E_1)$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}$. Cherchons maintenant une solution particulière de $(E_2)$. Soit

$$\left(E_2^{\mathbb{C}}\right) \quad y'' + 2y' + y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2ix}$$

Si $\psi$ est solution de $\left(E_2^{\mathbb{C}}\right)$, alors $\Re\mathrm{e}(\psi)$ est solution de $(E_2)$. On cherche $\psi : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{2ix}$ :

$$\begin{aligned} \psi \text{ est solution de } \left(E_2^{\mathbb{C}}\right) &\Leftrightarrow \lambda(-4 + 4i + 1) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{10} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi : x \longmapsto \left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i\right)\mathrm{e}^{2ix}$ est solution de $\left(E_2^{\mathbb{C}}\right)$ donc $\Re\mathrm{e}(\psi) = \frac{3}{10}\cos 2x - \frac{2}{5}\sin 2x$ est solution de $(E_2)$ donc

$$x \longmapsto \frac{3}{10}\cos 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

est solution de $(E)$ par superposition. Ainsi,

$$\mathcal{S}_E = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{3}{10}\cos 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{2} + (\lambda + i\mu)\,\mathrm{e}^{-x} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

a. Voir 1.2.2 page 3.