Espaces affines euclidiens

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Définitions et faits de base

Un espace affine euclidien est un espace affine X dont la direction E est un espace euclidien, c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Notations Soit (E, X) un espace affine euclidien, pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{u}$: on rappelle $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.

Distance euclidienne Pour $A, B \in X$, on notera $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, et on a les propriétés suivantes :

(1) $\forall A, B \in X,\ AB = BA$;

(2) $\forall A, B \in X,\ AB = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(3) $\forall A, B, C \in X,\ AC \leqslant AB + BC$.

On peut aussi définir une distance sur un ensemble abstrait de la manière suivante.

Soit Ω un ensemble non-vide, une distance sur Ω est une application $\mathrm{d} : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ possédant les propriétés de :

(1) symétrie : $\forall x, y \in \Omega,\ \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$;

(2) séparation : $\forall x, y \in \Omega,\ \mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(3) inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in \Omega,\ \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Ici, $\mathrm{d} : \begin{array}{l} X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) \mapsto AB \end{array}$ est une distance appelée distance euclidienne. On note que $\forall A, B, C \in X$,

$$\begin{aligned} AC = AB + BC &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ / \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow B \in [A, C] \end{aligned}$$

et on a aussi $\forall A, B, C \in X,\ AC \geqslant |AB - BC|$.

Sphères et boules

Pour $A \in X$ et $r > 0$, $\mathcal{S}(A, r) = \{M \in X | AM = r\}$ et $\overline{\mathcal{B}}(A, r) = \{M \in X | AM \leqslant r\}$ sont respectivement la sphère de centre A et de rayon r et la boule fermée de centre A et de rayon r.

On remarque que $\forall r > 0$, $\mathcal{S}(A, r) \neq \varnothing$. En effet, soit $\overrightarrow{u} \in E$ unitaire, alors $A + r\overrightarrow{u} \in \mathcal{S}(A, r)$.

Repères orthonormés Un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est dit orthonormé si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de E.

Si $A \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array} \right.$, alors $\overrightarrow{AB} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) \overrightarrow{e_i}$ donc

$$\boxed{AB = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2}}$$

On en déduit que $\forall r > 0$, $\mathcal{S}(A, r)$ est l'ensemble d'équation cartésienne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)^2 = r^2}$$

Sous-espaces affines orthogonaux et perpendiculaires

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de X de directions E et F.
- On dit que $\mathcal{F}$ est orthogonal à $\mathcal{G}$ si $F \subset G^{\perp}$, ce qui implique $G \subset F^{\perp}$ car on travaille en dimension finie. La relation étant symétrique, on dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux et on notera $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.
- On dira que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont perpendiculaires si $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

Si $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton.
En effet, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors la direction de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est $(F \cap G) \subset \left(G^{\perp} \cap G\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Hyperplans ❐ Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de X, alors il existe $A \in X$ et H un hyperplan vectoriel de E tels que $\mathcal{H} = A \dotplus H$. Or $\exists \overrightarrow{u} \in E \backslash \{0\}$ tel que $H = \{u\}^{\perp}$. Ainsi, pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H} = \left\{M \in X | \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right\}$.

❐ Si on dispose d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et d'un hyperplan affine $\mathcal{H} = A \dotplus \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$, alors $\exists a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tels que $\mathcal{H}$ est l'ensemble d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$. La direction H de $\mathcal{H}$ est alors l'hyperplan d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, c'est donc $\{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$ avec $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i}$ car $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est orthonormée. Pour $A \in X$, on a alors $\mathcal{H} = A \dotplus \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$.

Lignes de niveau Soit $A \in X$ et $\overrightarrow{u} \in E \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Pour $M \in X$, on pose $f(M) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}$. f est surjective : si $t \in \mathbb{R}$, alors

$$t = f\left(A \dotplus t \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, *quid* de $C_\lambda = \{M \in X | f(M) = \lambda\}$? Soit $B \in C_\lambda \neq \varnothing$, pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} M \in C_\lambda &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \lambda = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{u} = 0 \end{aligned}$$

Donc C_λ est toujours un hyperplan affine.

1.1 Distance d'un point à un sous-espace affine

1.1.1 Généralités

Soit $\mathcal{A}$ une partie de X non-vide. Pour $M \in X$, on pose

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{A}) = \inf\{MN | N \in \mathcal{A}\}$$

Prenons maintenant pour $\mathcal{A}$ un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de X dirigé par F et soit p le projecteur orthogonal sur $\mathcal{F}$, c'est à dire le projecteur sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{F}^{\perp}$. Soit $M \in X$, $H = p(M)$, on a alors pour $N \in F$:

$$\overrightarrow{NM} = \underbrace{\overrightarrow{NH}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{HM}}_{\in F^{\perp}}$$

donc $NM^2 = NH^2 + HM^2$, ce qui implique $NM \geqslant HM$ et $NM = HM \Leftrightarrow NH = 0 \Leftrightarrow N = H$. Or $H \in \mathcal{F}$ donc $\mathrm{d}(M, \mathcal{F}) = Mp(M)$ et $\mathrm{d}(M, \mathcal{F})$ est un minimum atteint pour un seul point, H.

Cas d'un hyperplan ❒ Soit $A \in X$, $\overrightarrow{u} \in E \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\mathcal{H} = A \dotplus \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$. On a alors pour $\overrightarrow{x} \in E$,

$$x = \underbrace{\frac{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}}_{\in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})} + \underbrace{x - \frac{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}}_{\in\{\overrightarrow{u}\}^{\perp}}$$

Si on note Π le projecteur orthogonal vectoriel sur $\{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$, alors $\forall \overrightarrow{x} \in E$,

$$\Pi(x) = x - \frac{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$$

Soit $p : X \longrightarrow X$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$, on sait que Π est la partie linéaire de p [a] donc, pour $M \in X$, $p(M) = p(A) \dotplus \Pi\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Or $A \in \mathcal{H}$ donc $p(A) = A$ donc

$$\begin{aligned} p(M) &= A \dotplus \Pi\left(\overrightarrow{AM}\right) \\ &= A \dotplus \left(\overrightarrow{AM} - \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\right) \\ &= M \dotplus \left(-\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M, \mathcal{H}) &= p(M)\,M \\ &= \left\|\overrightarrow{p(M)\,M}\right\| \\ &= \left\|\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}\right\| \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$$

❒ Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère orthonormé de X, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine : $\exists a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\mathcal{H}$ est l'ensemble d'équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$. Soit $A \left|\begin{matrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{matrix}\right. \in \mathcal{H}$, $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i}$, alors $\mathcal{H} = A \dotplus \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$. Pour $M \left|\begin{matrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{matrix}\right. \in X$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M, \mathcal{H}) &= \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} \\ &= \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - \alpha_i)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} \\ &= \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \end{aligned}$$

a. Voir section 27.2.1.5 du cours complet page 533.

Or $A \in \mathcal{H}$ donc $-\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = b$ d'où

$$\boxed{\mathrm{d}\left(M, \mathcal{H}\right) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}}$$

❒ Pour $\dim E = 2$, $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé, $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors pour $M \in X$ de coordonnées (x, y),

$$\boxed{\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Autre cas simple Soit E orienté de dimension 3, $\overrightarrow{u} \in E \backslash \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $A \in X$, $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, $M \in X$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors $\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right) = MH$. Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \overrightarrow{u} \\ &= \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u} \text{ car } \overrightarrow{AH} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right) \end{aligned}$$

D'où $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = HM \left\|\overrightarrow{u}\right\| \sin\varphi$ où φ est l'angle géométrique de $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{u}$. Or $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{u}$ donc $\sin\varphi = 1$ donc $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = HM \left\|\overrightarrow{u}\right\|$ donc

$$\boxed{HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}}$$

1.1.2 Quelques ensembles de points remarquables

Hyperplan médiateur Soient $A, B \in X$, $A \neq B$. *Quid* de $\Delta = \{M \in X | AM = BM\}$? Soit $M \in X$,

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \\ &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) . \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\right) = 0 \end{aligned}$$

Soit $I = \mathrm{mil}\left(A, B\right) = \mathrm{Bar}\left(\left(A, 1\right), \left(B, 1\right)\right)$, alors $\forall M \in X$, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ d'où

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in I \dotplus \left\{\overrightarrow{AB}\right\}^{\perp} \end{aligned}$$

Δ est donc un hyperplan affine, c'est l'hyperplan médiateur. Si $\dim E = 2$, Δ est la médiatrice de A et B, la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de A et B.

Supposons que $\dim E = 2$, soient $A, B, C \in X$ tels que ABC soit un vrai triangle. Alors les médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ sont concourantes.

En effet, soit Δ_1 la médiatrice de B et C, Δ_2 la médiatrice de A et C et Δ_3 la médiatrice de A et B. Soit O le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 [a], alors $O \in \Delta_1 \Rightarrow OB = OC$ et $O \in \Delta_2 \Rightarrow OA = OC$ donc $OA = OB \Rightarrow O \in \Delta_3$.

a. Ce point existe car si $\Delta_1 \mathbin{/\!/} \Delta_2$, ABC ne serait pas un vrai triangle.

Généralisation Soit $k > 0$. *Quid* de $\Gamma_k = \left\{M \in X \backslash \{B\} \,|\, \dfrac{AM}{BM} = k\right\}$? Prenons $k \neq 1$, $M \in X \backslash \{B\}$, alors

$$\begin{aligned} M \in \Gamma_k &\Leftrightarrow AM^2 = k^2 BM^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM}\right).\left(\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{BM}\right) = 0 \end{aligned}$$

Soient $G_1 = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,-k)\right)$ et $G_2 = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,k)\right)$, alors pour $M \in X \backslash \{B\}$, $\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{BM} = (1-k)\overrightarrow{G_1M}$ et $\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM} = (1+k)\overrightarrow{G_2M}$ donc

$$\begin{aligned} M \in \Gamma_k &\Leftrightarrow (1-k)^2\,\overrightarrow{G_1M}.\overrightarrow{G_2M} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$, c'est à dire le cercle de centre $I = \mathrm{mil}\,(A,B)$ et de rayon $\dfrac{G_1G_2}{2}$.

En effet, soient $A, B \in X$ avec $A \neq B$, $\mathcal{S} = \left\{M \in X | \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\right\}$ l'ensemble des $M \in X$ tels que AMB est rectangle en M. Soit $I = \mathrm{mil}\,(A,B)$, alors pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI}.\underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}_{\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}_{-IA^2} \\ &= IM^2 - IA^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} M \in X &\Leftrightarrow IM = IA = \frac{AB}{2} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{S}\left(I, \frac{AB}{2}\right) \end{aligned}$$

Fonctions scalaire de Leibniz Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Pour $M \in X$, on pose

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$$

Il s'agit de décrire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $C_\lambda = \{M \in X | f(M) = \lambda\}$. Soit $f : M \in X \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

❒ Supposons dans un premier temps que $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Alors on peut considérer $G = \mathrm{Bar}\left((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}\right)$ et on a :

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right).\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(MG^2 + GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i}\right) \\ &= MG^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG}.\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right)}_{\overrightarrow{0}} \\ &= sMG^2 + \varphi(G) \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(M) = \lambda \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{\lambda - \varphi(G)}{s} = \omega$.

- Si $\omega = 0$, alors $C_\lambda = \{G\}$.
- Si $\omega < 0$, alors $C_\lambda = \varnothing$.
- Si $\omega > 0$, alors $C_\lambda = \mathcal{S}(G, \sqrt{\omega})$.

❒ Si $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors il existe [a] $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\forall M \in X,\ f(M) = \overrightarrow{u}$. Soit $O \in X$, pour $M \in X$, d'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \underbrace{sMO^2}_{0} + \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right)}_{f(O)=\overrightarrow{u}} \\ &= \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

D'où $\varphi(M) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u} = \dfrac{\varphi(O) - \lambda}{2} = \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $C_\lambda = \varnothing$ si $\mu \neq 0$ et $C_\lambda = X$ pour $\mu = 0$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on sait que C_λ est un hyperplan affine dirigé par $\{\overrightarrow{u}\}^\perp$.

1.2 Isométries, déplacements et similitudes

1.2.1 Isométries

Soit X un espace affine euclidien, $f : X \longrightarrow X$ affine. On dit que f est un isométrie si f conserve la distance : $\forall A, B \in X,\ AB = f(A)f(B)$.
On a une définition analogue pour X, Y deux espaces affines euclidiens et $f : X \longrightarrow Y$.

Proposition Soit $f : X \longrightarrow X$ une application affine de partie linéaire φ et E la direction de X. Alors

$$f \text{ est une isométrie} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \mathrm{O}(E)$$

$\Rightarrow$ Soit $\overrightarrow{u} \in E$, $A \in X$, $B = A \dotplus \overrightarrow{u}$, alors

$$\begin{aligned} \|\varphi(\overrightarrow{u})\| &= \left\|\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| \\ &= f(A)f(B) \\ &= AB \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \end{aligned}$$

donc $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

$\Leftarrow$ Soient $A, B \in X$,

$$\begin{aligned} f(A)f(B) &= \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| \\ &= \left\|\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= AB \end{aligned}$$

a. Voir section 27.1.2 du cours complet page 523.

Propriétés ❐ Si f est une isométrie de partie linéaire φ, $\varphi \in \mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ donc f est bijective donc f^{-1} est de partie linéaire $\varphi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$ donc f^{-1} est aussi une isométrie affine.

❐ Si f est une isométrie de partie linéaire φ, alors f est affine donc conserve le parallélisme, l'alignement et le barycentre [a]. f conserve aussi l'orthogonalité.

En effet, si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, alors $\overrightarrow{f(A)f(B)}.\overrightarrow{f(A)f(C)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right).\varphi\left(\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ car φ conserve le produit scalaire.

❐ φ est un isomorphisme donc elle transforme les sous-espaces affines en sous-espaces affines de même dimension.

❐ Soit $O \in X$ et $r > 0$, alors $f(\mathcal{S}(O,r)) = \mathcal{S}(f(O), r)$.

– Soit $M \in \mathcal{S}(O,r)$, alors $f(O)f(M) = r$ donc $f(M) \in \mathcal{S}(f(O), r)$ d'où $f(\mathcal{S}(O,r)) \subset \mathcal{S}(f(O), r)$.

– Soit $M \in \mathcal{S}(f(O), r)$, f^{-1} est une isométrie donc $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}\left(f^{-1}(f(O)), r\right) = \mathcal{S}(O,r)$ et $M = f\left(f^{-1}(M)\right) \in f(\mathcal{S}(O,r))$ donc $\mathcal{S}(f(O), r) \subset f(\mathcal{S}(O,r))$.

1.2.2 Déplacements

Soit $f : X \longrightarrow X$ une isométrie, φ la partie linéaire de f. On dit que f est un déplacement si $\varphi \in \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow \det\varphi = 1$.
Notons $\mathrm{Is}(X)$ l'ensemble des isométries affines de X et $\mathrm{Is}^+(X)$ l'ensemble des déplacements. Alors il est clair que $\mathrm{Is}(X)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GA}(X), \circ)$ et que $\mathrm{Is}^+(X)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Is}(X), \circ)$ tout comme $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$.

Les translations sont des déplacements car $\det \mathrm{I}_n = 1$. Toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine est dans $\mathrm{Is}(X) \backslash \mathrm{Is}^+(X)$.

1.2.3 Similitudes

Soit $k > 0$, $f : X \longrightarrow X$ affine, on dit que f est une similitude de rapport k lorsque $\forall A, B \in X$, $f(A)f(B) = kAB$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et $O \in X$, $h_{O,\lambda}$ est une similitude de rapport $|k|$.

Remarques ❐ Soit $k > 0$, $f : X \longrightarrow X$ affine de partie linéaire φ. Supposons que f soit une similitude de rapport k, et soient $\overrightarrow{u} \in E$, $A \in X$ et $B = A \dotplus \overrightarrow{u}$, alors

$$\begin{aligned} \|\varphi(\overrightarrow{u})\| &= \left\|\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| \\ &= kAB \\ &= k\|\overrightarrow{u}\| \end{aligned}$$

donc $\dfrac{\varphi}{k} \in \mathrm{O}(E)$.

Si $\dfrac{\varphi}{k} \in \mathrm{O}(E)$, alors $\forall A, B \in X$, $f(A)f(B) = \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = k\left\|\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = kAB$ donc

$$f \text{ est une similitude de rapport } k > 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi}{k} \in \mathrm{O}(E)$$

❐ Si $k \neq 0$ et $\psi \in \mathrm{GL}(E)$, alors $k\dfrac{\psi}{k} \in \mathrm{GL}(E)$ et $(k\psi)^{-1} = \dfrac{\psi^{-1}}{k}$ donc si f est une similitude de rapport $k > 0$ et de partie linéaire φ, $\varphi = k\dfrac{\varphi}{k} \in \mathrm{GL}(E)$ car $\dfrac{\varphi}{k} \in \mathrm{O}(E)$ donc f est bijective.

[a]. Comme définit dans la section 27.2.3 du cours complet page 535.

On sait alors que f^{-1} est affine et on a $\forall A, B \in X$,

$$\begin{aligned} AB &= f\left(f^{-1}(A)\right) f\left(f^{-1}(B)\right) \\ &= k f^{-1}(A) f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(A) f^{-1}(B) = \dfrac{1}{k} AB$ donc f^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

❒ Si g est une similitude de rapport k', alors on sait que $f \circ g$ est affine et $\forall A, B \in X$, $f \circ g(A) f \circ g(B) = kg(A) g(B) = kk'AB$ donc $f \circ g$ est une similitude de rapport kk'.

Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Sym}(X)$ des similitudes est un sous groupe de $(\mathrm{GA}(X), \circ)$.

Propriétés ❒ Soit f une similitude de rapport k et de partie linéaire φ, f est affine donc conserve l'alignement, le parallélisme et le barycentre.

❒ f est une bijection donc elle transforme les sous-espaces affines en sous-espaces affines de même dimension.

❒ f conserve l'orthogonalité : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{u}) . \varphi(\overrightarrow{v}) &= k^2 \frac{\varphi}{k}(\overrightarrow{u}) . \frac{\varphi}{k}(\overrightarrow{v}) \\ &= k^2 \overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{u}) \perp \varphi(\overrightarrow{v})$. Pour $A, B, C \in X$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{f(A) f(B)}.\overrightarrow{f(A) f(C)} = 0$.

On dit que f similitude de partie linéaire φ est une similitude directe lorsque $\det \varphi > 0$, c'est à dire si $\dfrac{\varphi}{k} \in \mathrm{SO}(E)$ où k est le rapport de f.

2 Étude de la dimension 2

2.1 Coordonnées polaires

Dans la suite, X est un espace affine de direction E un plan euclidien orienté.

Donnons nous un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de X, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base orthonormée directe de E.

❒ Soit $M \in X \backslash \{O\}$, θ une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$, c'est-à-dire que $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM} = r_\theta(\overrightarrow{e_1})$ et $r_\theta(\overrightarrow{e_1}) = \cos\theta \overrightarrow{e_1} + \sin\theta \overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{OM} = OM \overrightarrow{u_\theta}$ [a] .

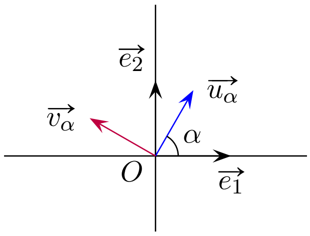
On appelle système de coordonnées polaires de $M \in X$ dans $\mathcal{R}$ tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow M \left| \begin{array}{l} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{array} \right.$.

❒ $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(0, \theta)$ est un système de coordonnées polaires de O. Si $M \neq O$ et si $\theta \in \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$, alors (OM, θ) est un système de coordonnées polaires de M. Les systèmes de coordonnées polaires de M forment alors l'ensemble $\{(OM, \theta + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-OM, \theta + \pi + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

❒ Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est en général un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ est par définition l'image directe de l'application $\theta \longmapsto f(\theta) \overrightarrow{u_\theta}$, c'est-à-dire l'ensemble $\left\{ M \left| \begin{array}{l} f(\theta)\cos\theta \\ f(\theta)\sin\theta \end{array} \right. | \theta \in I \right\}$. Par exemple, pour $R > 0$, le cercle de centre O et de rayon R noté $\mathcal{C}(O, R)$ est l'ensemble d'équation cartésienne $\rho = R$.

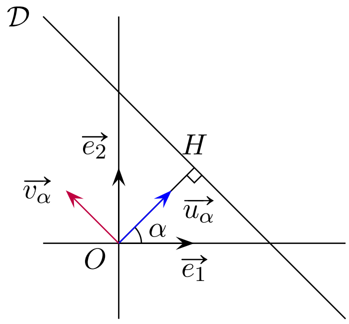
a. Avec les notations de la section 1.1 de Espaces euclidiens II.

Remarque Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\mathcal{R}_\alpha = (O, \overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{v_\alpha})$ où $\overrightarrow{u_\alpha} = \cos\alpha\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha\theta\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v_\alpha} = -\sin\alpha\overrightarrow{e_1} + \cos\alpha\overrightarrow{e_2}$. $\mathcal{R}_\alpha$ est aussi un repère orthonormé direct de X.



Soit Λ l'ensemble d'équation cartésienne $\rho = f(\theta)$ dans $\mathcal{R}_\alpha$, c'est l'image directe de $\theta \longmapsto f(\theta)(\cos\theta\overrightarrow{u_\alpha} + \sin\theta\overrightarrow{v_\alpha}) = r_\theta(\overrightarrow{u_\alpha}) = \overrightarrow{u}_{\theta+\alpha}$. Ainsi, Λ a pour équation cartésienne $\rho = f(\theta - \alpha)$ relativement à $\mathcal{R}$.

Équation polaire d'une droite Soit $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par O, et $H \neq O$ le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$, $\alpha \in \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OH}}\right)$ et $d = OH = \mathrm{d}(O, \mathcal{D})$.



Dans $\mathcal{R}_\alpha$, $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $x = d$. Soit $M \in X\setminus\{O\}$, (r, θ) un système de coordonnées polaires de M dans $\mathcal{R}_\alpha$. Alors, pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow r\cos\theta = d \\ &\Leftrightarrow r = \frac{d}{\cos\theta} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est l'ensemble d'équation polaire $\rho = \dfrac{d}{\cos\theta}$ dans $\mathcal{R}_\alpha$, c'est donc l'ensemble d'équation polaire

$$\rho = \frac{d}{\cos(\theta - \alpha)} \text{ dans } \mathcal{R}$$

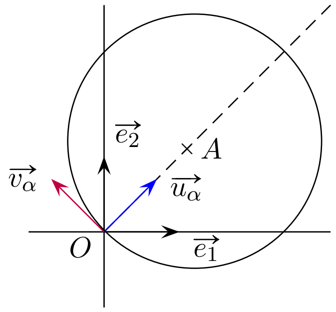
On remarque que $\mathcal{D}$ admet dans $\mathcal{R}$ admet une équation cartésienne du type $ax + by = c$ donc pour $M \in X\setminus\{O\}$ un système de coordonnées polaires (r, θ),

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta} \end{aligned}$$

donc $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ donc

$$r = \frac{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{\mathrm{d}(O, \mathcal{D})}{\cos\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OH}}\right)}$$

Cercle passant par O



Soit $\mathcal{C}$ un cercle qui passe par O, $\mathcal{C} = (A, R)$, $\alpha \in \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}}\right)$. Plaçons nous dans $\mathcal{R}_\alpha$, soit $M \in X \backslash \{O\}$, (r, θ) un système de coordonnées polaires de M dans $\mathcal{R}_\alpha$. Dans $\mathcal{R}_\alpha$, $A \left| \begin{array}{l} R \\ 0 \end{array} \right.$ donc pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (r\cos\theta - R)^2 + r^2\sin^2\theta = R^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 - 2rR\cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 2R\cos\theta \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathcal{C}$ a pour équation polaire $\rho = 2R\cos\theta$ dans $\mathcal{R}_\alpha$, donc $\mathcal{C}$ a pour équation polaire

$$\rho = 2R\cos(\theta - \alpha) \text{ dans } \mathcal{R}$$

Soit un ensemble $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ et de centre A tel que $\overrightarrow{OA} = R\overrightarrow{u_\alpha}$.

2.2 Utilisation des nombres complexes

2.2.1 Théorie

Soit $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère cartésien orthonormé direct de X, on munit $\mathbb{C}$ de sa structure affine naturelle : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de direction $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 orienté par le choix de la base canonique $(1, i)$. Soit alors

$$\begin{aligned} \psi : \ \mathbb{C} &\longrightarrow X \\ z &\mapsto M \left| \begin{array}{l} \Re\mathrm{e}(z) \\ \Im\mathrm{m}(z) \end{array} \right. = O \dotplus (\Re\mathrm{e}(z)\,\overrightarrow{e_1} + \Im\mathrm{m}(z)\,\overrightarrow{e_2}) \end{aligned}$$

ψ est affine : $\psi(0_\mathbb{C}) = 0_X$ et pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\psi(z) = \psi(0_\mathbb{C}) + \underbrace{(\Re\mathrm{e}(z)\,\overrightarrow{e_1} + \Im\mathrm{m}(z)\,\overrightarrow{e_2})}_{\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}\left(\overrightarrow{0_\mathbb{C} z}\right)}$$

$\widetilde{\psi}$ est unique application linéaire de $\mathbb{C}$ dans Z qui envoie 1 sur $\overrightarrow{e_1}$ et i sur $\overrightarrow{e_2}$ donc c'est un isomorphisme, ainsi ψ est affine de partie linéaire $\widetilde{\psi}$. De plus, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\psi}(z)\right\|^2 &= \left\|\Re\mathrm{e}(z)\,\overrightarrow{e_1} + \Im\mathrm{m}(z)\,\overrightarrow{e_2}\right\|^2 \\ &= \Re\mathrm{e}^2(z) + \Im\mathrm{m}^2(z) \\ &= |z|^2\end{aligned}$$

où $|z|$ est la norme associée au complexe z. ψ est donc une isométrie. De plus, $\widetilde{\psi}$ transforme une base directe en une base directe donc $\widetilde{\psi}$ préserve l'orientation.

Tout problème de géométrie euclidienne possède un équivalent dans $\mathbb{C}$, et le résoudre dans $\mathbb{C}$ revient à le résoudre dans E.

Vocabulaire et faits de base ❒ Pour $z \in \mathbb{C}$, $M = \psi(z)$ est l'image de z et pour $M \in X$, $\psi^{-1}(z)$ est l'affixe de M.

❒ Soit M d'affixe z, $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.Alors (r,θ) est un système de coordonnées polaires de M si et seulement si $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire si (r,θ) est une écriture trigonométrique de z.

❒ Si $M \neq 0$, $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right) = \arg(z)$. Soient alors A d'affixe a, B d'affixe B et $M \notin \{A,B\}$ alors l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ est $z-a$, celle de $\overrightarrow{BM}$ est $z-b$ et

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{e_1}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}}\right) \\ &= -\arg(z-a) + \arg(z-b) \\ &= \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\end{aligned}$$

2.2.2 Illustrations

Généralisation de la définition du cercle Soient $A, B \in X$, $A \neq B$ et $\alpha \in [0,\pi[$. *Quid* de $C_\alpha = \left\{M \in X \backslash \{A,B\} \,|\, \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \alpha + \pi\mathbb{Z}\right\}$?

❒ Il est clair que $C_0 = (AB) \setminus \{A,B\}$.

❒ Supposons $\alpha \neq 0$, soit $I = \mathrm{mil}(A,B)$, $a = \dfrac{AB}{2}$, $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{IB}}{\left\|\overrightarrow{IB}\right\|}$ et $\overrightarrow{e_2} = \wedge\overrightarrow{e_1}$, on se place dans le repère $(I, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on utilise les complexes. On note $M(z)$ le point M d'affixe z. On a alors $A(-a)$, $B(a)$, et pour $M(z) \in X$ avec $z \notin \{\pm a\}$,

$$\begin{aligned}M \in C_\alpha &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-z}{-a-z}\right) = \alpha + \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-z}{-a-z}\right) - \alpha = \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-z}{-a-z}\mathrm{e}^{-i\alpha}\right) = \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{a-z}{-a-z}\mathrm{e}^{-i\alpha} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \Im\mathrm{m}\left(\frac{a-z}{-a-z}\mathrm{e}^{-i\alpha}\right) = 0\end{aligned}$$

Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{a-z}{-a-z}\mathrm{e}^{-i\alpha} &= \frac{a-x-iy}{-a-x-iy}\mathrm{e}^{-i\alpha} \\
&= \frac{(a-x-iy)(-a-x+iy)}{(a+x)^2+y^2}\mathrm{e}^{-i\alpha} \\
&= \frac{-(a-x)(a+x)+y^2+i\left[(a+x)y+(a-x)y\right]}{(a+x)^2+y^2}\mathrm{e}^{-i\alpha} \\
&= \frac{\left(y^2+x^2-a^2+2iay\right)\mathrm{e}^{-i\alpha}}{(a+x)^2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Im\mathrm{m}\left(\frac{a-z}{-a-z}\mathrm{e}^{-i\alpha}\right) = 0 &\Leftrightarrow 2ay\cos\alpha - \sin\alpha\left(y^2+x^2-a^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-2ay\,\mathrm{cotan}\,\alpha = a^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+(y-a\,\mathrm{cotan}\,\alpha)^2 = a^2+a^2\,\mathrm{cotan}^2\,\alpha \\
&\Leftrightarrow x^2+(y-a\,\mathrm{cotan}\,\alpha)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} \\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(\Omega, r)
\end{aligned}$$

où $\Omega \left| \begin{array}{l} 0 \\ a\,\mathrm{cotan}\,\alpha \end{array} \right.$ et $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. C_α est donc un cercle passant par A et B mais privé de A et B.

Caractérisation de points alignés ou cocycliques Soient $A, B, C, D \in X$ des points distincts d'un plan euclidien. Alors A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si et seulement si $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right)\ [\pi]$.

Petit lemme On remarque que si A, B et C ne sont pas alignés, alors il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant part A, B et C.

- En effet, si un tel cercle existe, soit O son centre. On a donc $OA = OB$ donc O est sur la médiatrice de A et B, et de même $OA = OC$ donc O est sur la médiatrice de A et C. Les deux médiatrices n'étant pas parallèles à cause du non-alignement des points, O est bien définit ainsi que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, OA)$.
- Soit O le point d'intersection des médiatrices de A et B d'une part, et de A et C d'autre part. Alors $OA = OB = OC$ donc $A, B, C \in \mathcal{C}(O, OA)$.

$\Rightarrow$ Si A, B, C, D sont alignés ,alors $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = 0\ [\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) = 0\ [\pi]$ d'où le résultat.

Supposons A, B, C et D cocycliques, et soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par les quatre points. Alors A, B, C ne sont pas alignés et soit $\alpha \in\ ]0, \pi[$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \alpha\ [\pi]$. Alors on a vu que $\left\{M \in X | \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \alpha\ [\pi]\right\}$ est un cercle $\mathcal{C}'$ passant par A et B privé de A et B. Comme $A, B, C \in \mathcal{C}'$, c'est l'unique cercle qui passe par A, B, C donc, d'après le petit lemme, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ donc $D \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) = \alpha\ [\pi]$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right)\ [\pi] = \alpha\ [\pi]$ avec $\alpha \in [0, \pi[$.

- Si $\alpha = 0$, A, B, C et D sont alignés.
- Si $\alpha > 0$, alors l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in X | \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \alpha\ [\pi]\right\}$ est un cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B privé des points A et B. Or $C, D \in \Gamma$ donc $A, B, C, D \in \mathcal{C}$.

Avec les complexes Soit $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère cartésien orthonormée de X, $A, B, C, D \in X$ d'affixes respectives a, b, c et d. On a alors

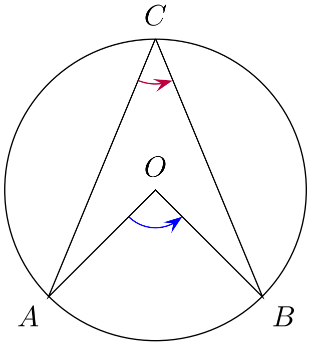
$$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) = \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) = \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{\frac{c-b}{c-a}}{\frac{d-b}{d-a}}\right) = \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{c-b}{c-a}}{\frac{d-b}{d-a}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On appelle ce dernier quotient le birapport de A, B, C et D.

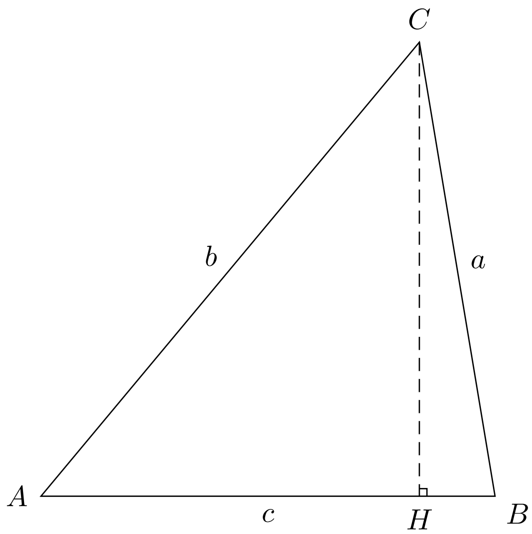
Théorème de l'angle au centre



Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, R)$ un cercle, $A, B, C \in \mathcal{C}$ distincts. Alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$. La preuve est laissé au courageux lecteur !

2.3 Autour du triangle

Soient $A, B, C \in X$ formant un vrai triangle, on note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\widehat{A}$ l'angle géométrique de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\widehat{B}$ l'angle géométrique de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\widehat{C}$ l'angle géométrique de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.



Relations d'Al Kashi On a :

$$\begin{array}{rcl} c^2 & = & AB^2 \\ & = & \left\| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \right\|^2 \\ & = & AC^2 + BC^2 - 2\underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}} \\ & = & b^2 + a^2 - 2ab\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \text{ par définition de l'angle géométrique} \end{array}$$

On a donc dans le triangle les relations suivantes :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \text{ et } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \text{ et } b^2 = a^2 + c^2 - 2ca\cos\widehat{B}$$

Définition géométrique de sinus et cosinus On a d'une part $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{A}$ mais aussi, avec H le projeté orthogonal de C sur (AB),

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \\ & = & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} \text{ car } \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB} \\ & = & AB \cdot AH \text{ si on suppose } H \in [AB] \end{array}$$

Ainsi,

$$\cos\widehat{A} = \frac{AH}{AC}$$

D'autre part, d'après l'identité de Lagrange [a],

$$\begin{array}{rcl} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] + \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2 \cdot AC^2 & \Rightarrow & \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]^2 = AB^2 \cdot AC^2\left(1 - \cos^2\widehat{A}\right) \\ & \Rightarrow & \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{A} \end{array}$$

Or $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right] + \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HC}\right] = \pm AB \cdot HC$ d'après les propriétés du produit mixte donc

$$HC = AC\sin\widehat{A} \Leftrightarrow \sin\widehat{A} = \frac{HC}{AC}$$

Somme des angles d'un triangle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est libre, c'est un base de la direction E de X. On choisit cette base pour définir une orientation sur E. Soit $\theta \in \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, on sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta$ et $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = AB \cdot AC \cdot \sin\theta$. On a d'autre part $\cos\widehat{A} = \cos\theta$ d'après la définition du produit scalaire, et $\sin^2\widehat{A} = \sin^2\theta$ or ici $\sin\theta = \dfrac{\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]}{AB \cdot AC} \geqslant 0$ car $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est directe d'où $\sin\theta = \sin\widehat{A}$ car $\widehat{A} \in [0,\pi]$. Ainsi, $\theta = \widehat{A}\ [2\pi] \Rightarrow \widehat{A} \in \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

De plus,

$$\begin{array}{rcl} \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right] & = & \left[\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right] \\ & = & \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right] \\ & = & \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] \geqslant 0 \end{array}$$

a. Voir section 26.1.1 du cours complet page 503.

et de même $\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right] \geqslant 0$ d'où, avec le même raisonnement que précédemment, $\widehat{B} \in \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\widehat{C} \in \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}\right) \\
&= \pi + 2\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

D'où $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ or $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \in \left]0, \pi\right[$ donc

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$

3 Coniques

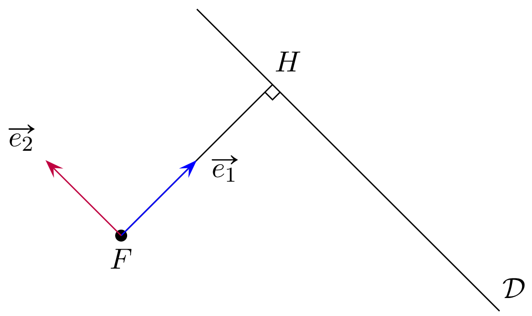
3.1 Définition par foyer et directrice

Soit $F \in X$ où X est un plan euclidien, $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par F et $e > 0$. La conique Γ de foyer F, de direction $\mathcal{D}$ et d'excentricité e est l'ensemble de points

$$\{M \in X | MF = e\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right)\}$$

- Si $e = 1$, on dit que Γ est une parabole.
- Si $e < 1$, on dit que Γ est une ellipse
- Si $e = 1$, on dit que Γ est une hyperbole.

On cherche une équation cartésienne réduite de cet ensemble. Soit donc $F \in X$, $\mathcal{D}$ une droite telle que $F \notin \mathcal{D}$, $e > 0$ et Γ la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.



Soit H le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, $d = FH = \mathrm{d}\left(F, \mathcal{D}\right)$, $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{FH}}{FH}$ et $\overrightarrow{e_2} = \wedge\overrightarrow{e_1}$. Plaçons nous tout d'abord dans le repère orthonormé $(F; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans lequel $F \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = d$. Pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \in X$, on a

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow MF = e\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = e\left|x - d\right| \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2\left(x - d\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \left(1 - e^2\right)x^2 + 2e^2dx + y^2 = e^2d^2
\end{aligned}$$

3.1.1 Cas de la parabole : $e = 1$

❒ On a dans ce cas

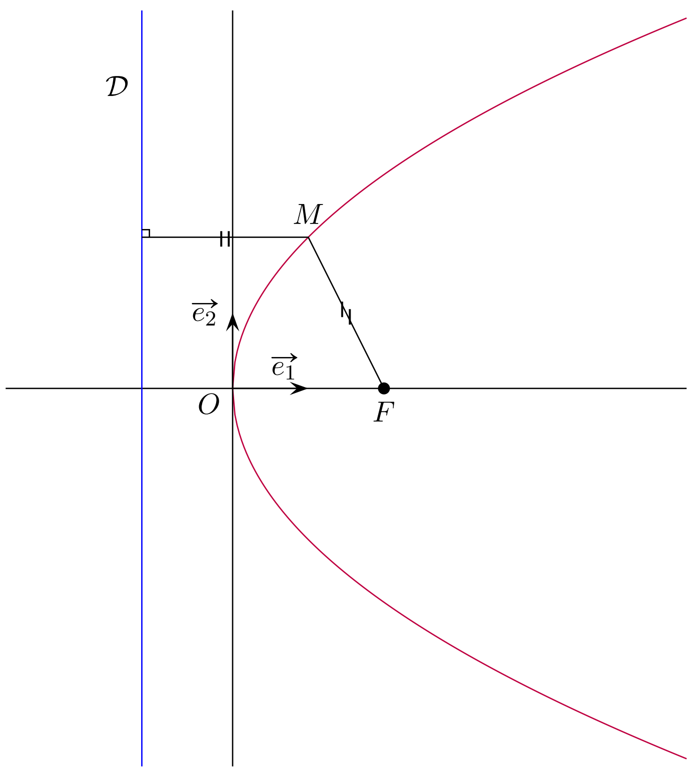
$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow 2dx + y^2 = d^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = d^2 - 2dx = 2d\left(\frac{d}{2} - x\right) \end{aligned}$$

Soit $O \left| \begin{array}{l} d/2 \\ 0 \end{array} \right.$ dans $(F; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, plaçons nous dans le repère $(O; -\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Si $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ dans $(F; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $M \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$ dans $(O; -\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, alors $\overrightarrow{FM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OF} + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\ &= -\frac{d}{2}\overrightarrow{e_1} + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\ &= \left(\frac{d}{2} - x\right)(-\overrightarrow{e_1}) + y\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

d'où $x' = \dfrac{d}{2} - x$ et $y' = y$.

Alors Γ est l'ensemble d'équation cartésienne $\boxed{y^2 = 2dx}$ dans $(O; -\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. O est le sommet de Γ qui est symétrique par rapport à (Ox).



❒ Réciproquement, soit $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé de X, $d > 0$ et Γ l'ensemble d'équation cartésienne $y^2 = 2dx$. Alors Γ est la parabole de foyer $F \left| \begin{array}{l} \frac{d}{2} \\ 0 \end{array} \right.$ et admet pour directrice la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{d}{2}$.

3.1.2 Cas de l'ellipse : $e < 1$

❒ On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2e^2 d}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{1-e^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^4d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{e^2d^2}{1-e^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}
\end{aligned}$$

Soit $O \left| \begin{array}{l} -\dfrac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{array}\right.$, alors $\overrightarrow{FO} = -\dfrac{e^2d}{1-e^2}\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{FM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ d'où

$$\overrightarrow{OM} = \left(x - \frac{e^2d}{1-e^2}\right)\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$$

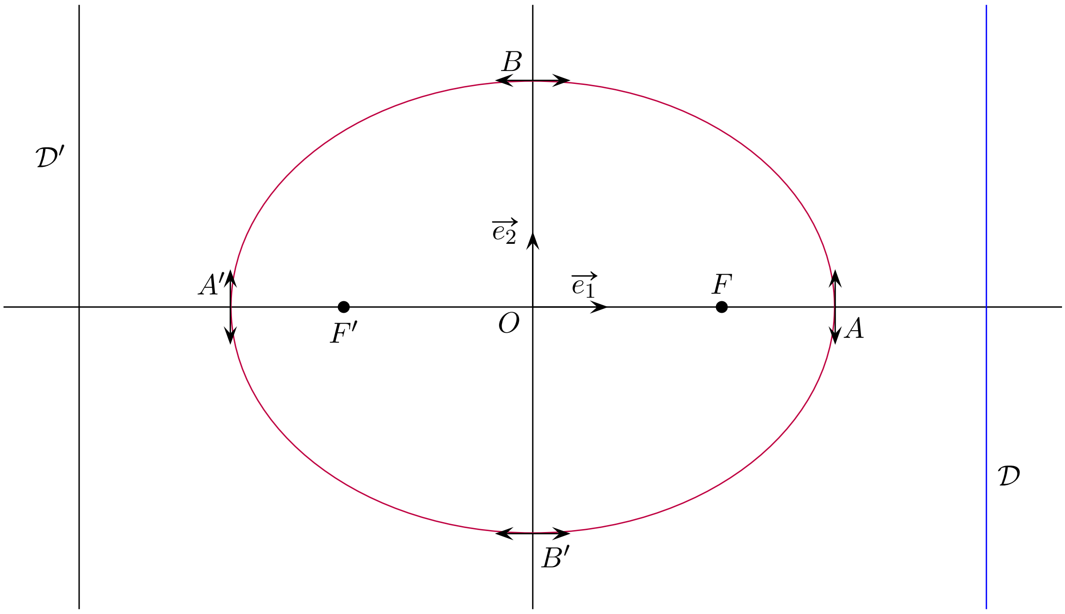
Pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ dans $(F;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $M \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array}\right.$ dans $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on a donc $x' = x - \dfrac{e^2d}{1-e^2}$ et $y' = y$. Plaçons nous maintenant dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ dans lequel $F \left| \begin{array}{l} \dfrac{e^2d}{1-e^2} \\ 0 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{e^2d}{1-e^2} + d = \dfrac{d}{1-e^2}$, on a pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ dans le nouveau repère :

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

C'est un équation cartésienne du type $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ avec $a = \dfrac{ed}{1-e^2}$, $b = \dfrac{ed}{\sqrt{1-e^2}}$.

On a donc $b = \sqrt{1-e^2}a < a$ et $b^2 = \left(1-e^2\right)a^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = e^2a^2$ d'où, en posant $c = \sqrt{a^2-b^2}$, $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$. On a alors, dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, $F \left| \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array}\right.$ car $\dfrac{e^2d}{1-e^2} = ea = c$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{d}{1-e^2} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$. Γ est symétrique par rapport à O, (Ox) et (Oy). O est le centre de Γ et pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \in X$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ ce qui impose } x \leqslant a\\
&\Leftrightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}
\end{aligned}$$



$A\left|\begin{array}{l}a\\0\end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l}0\\b\end{array}\right.$, $A'\left|\begin{array}{l}-a\\0\end{array}\right.$ et $B'\left|\begin{array}{l}0\\-b\end{array}\right.$ sont les sommets de l'ellipse, $[AA']$ est le grand axe et $[BB']$ le petit axe. On remarque que Γ est aussi l'ellipse de foyer $F'\left|\begin{array}{l}-c\\0\end{array}\right.$, de directrice $\mathcal{D} : x = -\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité e.

❒ Réciproquement, soit $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé et Γ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Alors Γ est l'ellipse de foyer $F\left|\begin{array}{l}c\\0\end{array}\right.$, de directrice $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

❒ Calculons l'aire de l'ellipse :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 4\int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 4ba\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{1 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \text{ en posant } x = a\sin t \\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4ab\left(\frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

3.1.3 Cas de l'hyperbole : $e > 1$

❒ On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 - \frac{2e^2 d}{e^2 - 1} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = -\frac{e^2 d^2}{e^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{e^2 d}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^4 d^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{e^2 d^2}{e^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{e^2 d}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^2 d^2}{(e^2 - 1)^2} = a^2 \text{ avec } a = \frac{ed}{e^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{e^2 d}{e^2 - 1}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(e^2 - 1)\,a^2} = 1
\end{aligned}$$

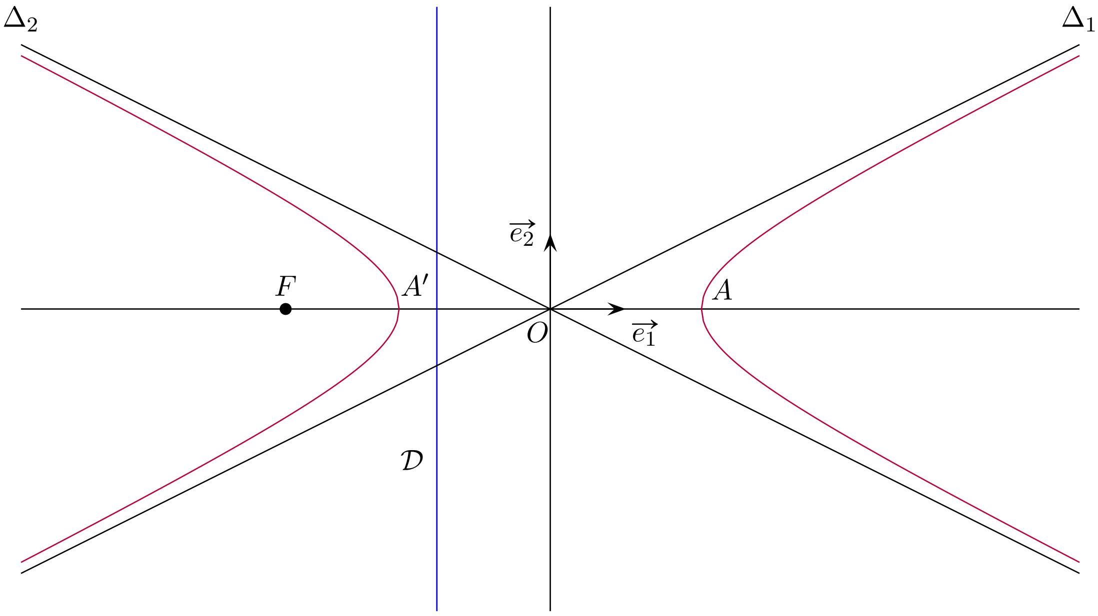
On pose $b = a\sqrt{e^2-1}$ et $O\left|\begin{array}{l}\frac{e^2d}{e^2-1}\\0\end{array}\right.$. Dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, $F\left|\begin{array}{l}-\frac{e^2d}{e^2-1}\\0\end{array}\right.$ et on remarque que $b^2 = a^2e^2 - a^2$ d'où $a^2+b^2 = a^2e^2$ d'où, en posant $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $e = \dfrac{c}{a}$, $F\left|\begin{array}{l}-c\\0\end{array}\right.$ et $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $x = d - \dfrac{e^2d}{e^2-1} = -\dfrac{d}{e^2-1} = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{a^2}{c}$.

Dans la repère cartésien $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, Γ est l'ensemble d'équation cartésienne $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$. C'est l'équation réduite de l'hyperbole.

O est le centre de l'hyperbole, qui est symétrique par rapport à O, (Ox) et (Oy). Les hyperboles sont ,comme les ellipses, des coniques à centre.

Soit $M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right. \in X$ avec $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \text{ ce qui impose } x \geqslant a\\
&\Leftrightarrow \quad y = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}
\end{aligned}$$



Γ est aussi l'hyperbole de foyer $F'\left|\begin{array}{l}c\\0\end{array}\right.$ et de directrice $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$. Si on pose pour $x \geqslant a$, $f(x) = b\sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 1}$, alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}\\
&= \frac{b}{a}x\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \frac{b}{a}x - \frac{ba}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $f(x) - \frac{b}{a}x \underset{+\infty}{\sim} -\frac{ba}{2x}$ donc $\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à Γ pour $x \to +\infty$ et est au dessus de Γ. De même, $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ est asymptote à Γ. $A \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$ et $A \left| \begin{array}{l} -a \\ 0 \end{array} \right.$ sont les sommets de l'hyperbole.

❒ Réciproquement, si on se donne un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors Γ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'hyperbole de foyer $F \left| \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array} \right.$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, de directrice $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Mais où est passé le $\frac{1}{x}$? $\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ admet $\overrightarrow{u_1} \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$ pour vecteur directeur, $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ admet $\overrightarrow{u_2} \left| \begin{array}{l} a \\ -b \end{array} \right.$ pour vecteur directeur. Dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}}{2a}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}}{2b}$ donc pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in X$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\
&= \frac{x}{2a}(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) + \frac{y}{2b}(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \\
&= \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b}\right)\overrightarrow{u_1} + \left(\frac{x}{2a} - \frac{y}{2b}\right)\overrightarrow{u_2}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans $(O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$,

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b}\right)\left(\frac{x}{2a} - \frac{y}{2b}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ dans $(O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$,

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow xy = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{4x}
\end{aligned}$$

On dira que Γ est équilatère si $a = b$. Dans ce cas, $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$ et $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

3.2 Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

Ellipse

Soient $F, F' \in X$ tels que $F \neq F'$, on note $FF' = 2c$ avec $c > 0$. Soit $a > c$ et $\Gamma = \{M \in X | FM + FM' = 2a\}$, alors Γ est une ellipse de foyers F et F'.

Soit $O = \operatorname{mil}(F, F')$, $\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{OF}}{OF}$, $\overrightarrow{e_2} = \wedge\overrightarrow{e_1}$. Plaçons nous dans le repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on a alors $F \left| \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array} \right.$ et $F' \left| \begin{array}{l} -c \\ 0 \end{array} \right.$. Soit $M \in X$, alors

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\
&\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = 4a^2
\end{aligned}$$

On pose alors $b = \sqrt{a^2 - c^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$ donc

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 + c^2 + y^2 + \sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = 2a^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = a^2 + b^2 - \left(x^2 + y^2\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2 & (1) \\ \left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right] = \left(a^2 + b^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right)^2 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow x^4 + c^4 - 2c^2x^2 + 2y^2\left(x^2 + c^2\right) + y^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \\
&\Leftrightarrow 2x^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right) + 2y^2\left(c^2 + a^2 + b^2\right) = \left(a^2 + b^2\right)^2 - c^4 \\
&\Leftrightarrow 4b^2x^2 + 4a^2y^2 = 4a^2b^2 \text{ d'après } b^2 + c^2 = a^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Et on a même $(2) \Rightarrow (1)$. En effet, si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, alors $1 - \dfrac{x^2}{a^2} \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant a^2$ et de même, $y^2 \leqslant b^2$ d'où $x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$. Donc enfin,

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Γ est bien une ellipse de foyer $\left|\begin{matrix} c' \\ 0 \end{matrix}\right.$ et $\left|\begin{matrix} -c' \\ 0 \end{matrix}\right.$ avec $c'^2 = a^2 - b^2 = c^2$ donc les foyers sont bien F et F'.

Hyperbole

Soient $F, F' \in X$ tels que $F \neq F'$, $2c = FF'$, $0 < a < c$, et $\Gamma = \{M \in X | MF - MF' = 2a\}$ est une hyperbole dont F et F' sont les foyers.

Soit $I = \operatorname{mil}(F, F')$, $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{IF}}{IF}$, $\overrightarrow{e_2} = \wedge\overrightarrow{e_1}$, on se place dans $(I; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $M \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in X$n

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a \\
&\Leftrightarrow (x-c)^2 + (x+c)^2 + 2y^2 - 2\sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = 4a^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right]} = x^2 + y^2 + \left(b^2 - a^2\right) \text{ en posant } b = \sqrt{a^2 - c^2} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \left(b^2 - a^2\right) \geqslant 0 & (1) \\ \left[(x-c)^2 + y^2\right]\left[(x+c)^2 + y^2\right] = (x+y)^2 + (b-a)^2 + 2\left(x^2 + y^2\right)\left(b^2 - a^2\right) & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow\quad x^4+c^4y^4-2x^2c^2+2y^2x^2+2y^2c^2 = x^4+y^4+2x^2y^2+\left(b^2-a^2\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)\left(b^2-a^2\right)\\
&\Leftrightarrow\quad c^4-\left(b^2-a^2\right)^2 = 2x^2\left(b^2+a^2+c^2\right)+2y^2\left(b^2-a^2-c^2\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left(c^2-b^2+a^2\right)}_{2a^2}\underbrace{\left(c^2+b^2-a^2\right)}_{2b^2} = 2x^2\underbrace{\left(b^2-a^2+c^2\right)}_{2b^2}+2y^2\underbrace{\left(b^2-a^2-c^2\right)}_{-2a^2}\\
&\Leftrightarrow\quad 4a^2b^2 = 4x^2b^2-4y^2a^2\\
&\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}
\end{aligned}$$

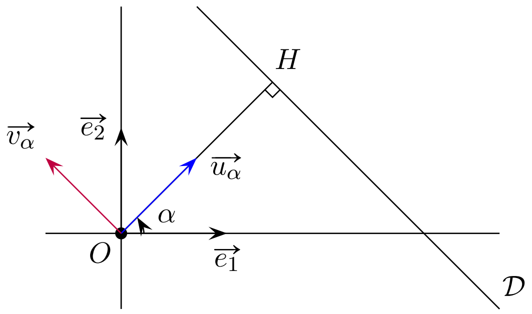
Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, on a alors $\dfrac{x^2}{a^2}\geqslant 1 \Leftrightarrow x^2\geqslant a^2 \Leftrightarrow x^2-a^2$ d'où $x^2+y^2+b^2-a^2\geqslant 0$. Ainsi,

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donc $\mathcal{G}$ est une hyperbole dont les foyers sont $\left|\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2}\\ 0\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2}\\ 0\end{array}\right.$, c'est-à-dire F et F'.

3.3 Équations polaire avec origine au foyer

Soit $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct de X, $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par O et $e>0$. On considère la conique Γ de foyer O, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.



❒ Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$, $\alpha\in\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OH}}\right)$, $d=OH=\mathrm{d}\left(O,\mathcal{D}\right)$. On se place dans le repère $\mathcal{R}_\alpha=(O;\overrightarrow{u_\alpha},\overrightarrow{v_\alpha})$ [a]. Soit $M\neq O$, (r,θ) avec $r>0$ un système de coordonnées polaires de M dans $\mathcal{R}_\alpha$ d'où $M\left|\begin{array}{l}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{array}\right.$ dans $\mathcal{R}_\alpha$. Alors

$$\begin{aligned}
M\in\Gamma \quad&\Leftrightarrow\quad OM = e\mathrm{d}\left(M,\mathcal{D}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad |r| = e\left|r\cos\theta-d\right|\\
&\Leftrightarrow\quad r=e\left(r\cos\theta-d\right) \text{ ou } r=-e\left(r\cos\theta-d\right) \text{ car } r>0\\
&\Leftrightarrow\quad r=-\frac{ed}{1-e\cos\theta} \text{ ou } r=\frac{ed}{1+\cos\theta}
\end{aligned}$$

Soit Λ_1, l'ensemble d'équation polaire $\rho=-\dfrac{ed}{1-e\cos\theta}$, Λ_2 l'ensemble d'équation polaire $\rho=\dfrac{ed}{1+e\cos\theta}$ et $M\in\Lambda_1$. Alors $\exists\theta\in\mathbb{R}$ [b] tel que $\left(-\dfrac{ed}{1-e\cos\theta},\theta\right)$ est un système de coordonnées polaires de M, au même titre que $\left(\dfrac{ed}{1-e\cos\left(\theta+\pi\right)},\theta+\pi\right)=\left(\dfrac{ed}{1+e\cos\theta},\theta\right)$ donc $M\in\Lambda_2$.

a. Voir la section 26.1.1 du cours complet page 502 pour un éclairage sur ces notations.
b. Modulo les valeurs interdites dont on ne s'embarrassera pas ici.

De même, $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ donc $\Lambda_1 = \Lambda_2$ et Γ est l'ensemble d'équation polaire

$$\rho = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \text{ dans } \mathcal{R}_\alpha \text{ ou } \rho = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \alpha)} \text{ dans } \mathcal{R}$$

❒ Souvent, on pose $p = ed$ le paramètre de la conique et Γ admet alors une équation polaire du type

$$\rho = \frac{1}{c + a\cos\theta + b\sin\theta} \text{ avec } (a,b) \neq (0,0) \text{ et } c \neq 0$$

❒ Réciproquement, soient $c \neq 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$, on a alors pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} c + a\cos\theta + b\sin\theta &= c\left(1 + \frac{a}{c}\cos\theta + \frac{b}{c}\sin\theta\right) \\ &= c\left[1 + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|c|}\left(a'\cos\theta + b'\sin\theta\right)\right] \end{aligned}$$

avec $a' = \dfrac{\frac{a}{c}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2}}$ et $b' = \dfrac{\frac{b}{c}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2}}$, on a donc $a'^2 + b'^2 = 1$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$c + a\cos\theta + b\sin\theta = c\left[1 + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|c|}\cos(\theta - \alpha)\right]$$

Ainsi, l'ensemble d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{c + a\cos\theta + b\sin\theta}$ est la conique de paramètre $p = \dfrac{1}{c}$, d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|c|}$, de foyer O et de direction $\mathcal{D} = H \dotplus \{\overrightarrow{u_\alpha}\}^\perp$ où $H = O \dotplus d\overrightarrow{u_\alpha}$ et $d = \dfrac{p}{e}$.

3.4 Définition analytique étendue des coniques

Si Γ est une conique, on peut trouve un repère orthonormé et $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ tels que Γ est l'ensemble d'équation cartésienne

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0$$

Réciproquement, soit $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé dont on note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ et Γ l'ensemble d'équation cartésienne

$$\underbrace{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{\delta x + \epsilon y}_{\text{partie linéaire}} + \eta = 0$$

Soit $l = \delta e_1^* + \epsilon e_2^*$ où (e_1^*, e_2^*) est la base duale de $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ [a]. Pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in X$, on a donc $\delta x + \epsilon y = l\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$. f est un endomorphisme symétrique de E car $\mathcal{B}$ est orthonormée et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique. Pour $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \in X$, calculons la quantité

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{OM} &= f(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}).(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) \\ &= [x(\alpha\overrightarrow{e_1} + \theta\overrightarrow{e_2}) + y(\beta\overrightarrow{e_1} + \gamma\overrightarrow{e_2})].(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) \\ &= [(\alpha x + \beta y)\overrightarrow{e_1} + (\beta x + \gamma y)\overrightarrow{e_2}].(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) \\ &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned}$$

a. Voir section 22.1.2.6 du cours complet page 409 pour un rappel de ce qu'est l'espace dual d'un espace vectoriel.

Ainsi, pour $M \in X$, et ce indépendamment de tout repère,

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow f\left(\overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{OM} + l\left(\overrightarrow{OM}\right) + \eta = 0$$

Lemme Montrons qu'il existe une base orthonormée $(\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})}(f)$ est diagonale.

❒ En effet, commençons par montrer que f admet au moins une valeur propre, c'est à dire un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\exists \lambda \in \mathbb{R}/f(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\overrightarrow{e_2}$. Il s'agit de montrer que $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{u_\theta}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_\theta})$. Posons pour $\theta \in \mathbb{R}$ $\varphi_\theta = \det_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}(f(\overrightarrow{u_\theta}), \overrightarrow{u_\theta})$, on a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \begin{vmatrix} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta & \cos\theta \\ \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \alpha\cos\theta\sin\theta + \beta\sin^2\theta - \theta\cos^2\theta - \gamma\cos\theta\sin\theta \\
&= \frac{\alpha-\gamma}{2}\sin(2\theta) - \beta\cos(2\theta)
\end{aligned}$$

Soit $z = -\beta - \dfrac{\alpha-\gamma}{2}i \in \mathbb{C}$, alors $\varphi(\theta) = \Re\mathrm{e}\left(ze^{i2\theta}\right)$, et si on écrit $z = \rho\mathrm{e}^{i\psi}$ avec $\psi \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \Re\mathrm{e}\left(\rho\mathrm{e}^{i(2\theta+\psi)}\right) \\
&= \rho\cos(2\theta + \psi)
\end{aligned}$$

Il est clair que cette fonction s'annule, ainsi $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{u_\theta}) = 0 \Leftrightarrow (f(\overrightarrow{u_\theta}), \overrightarrow{u_\theta})$ liée, c'est-à-dire $f(\overrightarrow{u_\theta})$ proportionnel à $\overrightarrow{u_\theta}$.

❒ Ainsi $\exists\theta, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(\overrightarrow{u_\theta}) = \lambda\overrightarrow{u_\theta}$. Soit $\overrightarrow{v_\theta} = \wedge\overrightarrow{u_\theta}$, On a

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{v_\theta}).\overrightarrow{u_\theta} &= \overrightarrow{v_\theta}.f^*(\overrightarrow{u_\theta}) \\
&= \overrightarrow{v_\theta}.f(\overrightarrow{u_\theta}) \text{ car } f \text{ est symétrique} \\
&= \lambda\overrightarrow{v_\theta}.\overrightarrow{u_\theta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $f(\overrightarrow{v_\theta}) \in \{\overrightarrow{u_\theta}\}^\perp = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_\theta})$ donc $\exists\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{v_\theta}) = \mu\overrightarrow{v_\theta}$. En prenant $\overrightarrow{\epsilon_1} = \overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{\epsilon_2} = \overrightarrow{v_\theta}$, $(\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$ est une base orthonormée directe de E et

$$\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Plaçons-nous donc dans $(O; \overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$, l s'écrit alors $l = \delta'\epsilon_1^* + \epsilon'\epsilon_2^*$ avec $\delta', \epsilon' \in \mathbb{R}$ donc si $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in X$ dans $(O; \overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$, alors $l\left(\overrightarrow{OM}\right) = \delta'x + \epsilon'y$ et $f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \lambda x\overrightarrow{\epsilon_1} + \mu y\overrightarrow{\epsilon_2}$ d'où $f\left(\overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{OM} = \lambda x^2 + \mu y^2$. Ainsi,

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 + \delta'x + \epsilon'y + \eta = 0$$

À partir de cette expression, il est aisé de déterminer Γ [a].

1^er^ cas : $\lambda\mu > 0$, supposons par exemple que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
M \in \Gamma &\Leftrightarrow \lambda\left(x^2 + \frac{\delta'}{\lambda}x\right) + \mu\left(y^2 + \frac{\epsilon'}{\mu}y\right) = -\eta \\
&\Leftrightarrow \lambda\left(x^2 + \frac{\delta'}{2\lambda}x\right)^2 + \mu\left(y^2 + \frac{\epsilon'}{2\mu}y\right)^2 = \omega \text{ où } \omega = -\eta + \lambda\frac{\delta'^2}{4\lambda^2} + \mu\frac{\epsilon'^2}{4\mu^2}
\end{aligned}$$

Soit $\Omega\left|\begin{matrix} -\dfrac{\delta'}{2\lambda} \\ -\dfrac{\epsilon'}{2\mu} \end{matrix}\right.$, alors dans $(\Omega, \overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$, M est l'ensemble d'équation cartésienne $\lambda x^2 + \mu y^2 = \omega$:

a. Pas pour vous ?

- si $\omega < 0$, $\Gamma = \varnothing$;
- si $\omega = 0$, $\Omega = \{\Omega\}$;
- si $\omega > 0$, $M \in \Gamma \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\lambda}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\mu}\right)^2} = 1$;
  - si $\lambda = \mu$, Γ est un cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{\omega}}{\lambda}$,
  - si $\lambda \neq \mu$, Γ est un ellipse.

2^e^ cas : On pourra examiner le cas où $\lambda\mu < 0$.

3^e^ cas : Et enfin le courageux lecteur étudiera la situation où x ou y est nul.

4 Déplacements et similitudes

4.1 Étude en dimension 2

Soit X un plan affine euclidien orienté de direction E. On rappelle que pour $f : X \longrightarrow X$ affine de partie linéaire φ, f est un déplacement si $\varphi \in \mathrm{SO}(E)$.

Les translations sont de manière évidente des déplacements car leur partie linéaire est $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{SO}(E)$.

4.1.1 Description des déplacements

❒ Montrons que les rotations sont aussi des déplacements. Soit $\Omega \in X$, $\theta \in \mathbb{R}$, r_θ la rotation vectorielle de E d'angle θ. Pour $M \in X$, on pose $\mathcal{R}_{\Omega,\theta} = \Omega + r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right)$. $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}$ s'appelle la rotation de X de centre Ω et d'angle θ. Montrons que $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}$ est affine. On remarque que $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}(\Omega) = \Omega$ et pour $M \in X$, on a donc $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}(M) = \mathcal{R}_{\Omega,\theta}(\Omega) + r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right)$ donc $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}$ est affine de partie linéaire r_θ. $r_\theta \in \mathrm{SO}(E)$ donc $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}$ est un déplacement de X.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $r_\theta = \mathrm{Id}_E$ et $\mathcal{R}_{\Omega,\theta} = \mathrm{Id}_X$.
- Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, montrons que Ω est le seul point fixe de $\mathcal{R}_{\Omega,\theta}$. En effet, pour $M \in X$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\Omega,\theta}(M) = M \quad &\Leftrightarrow \quad \Omega + r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right) = M \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M} = r_\theta\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M} \in \mathrm{Ker}\left(r_\theta - \mathrm{Id}_E\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\det\left(r_\theta - \mathrm{Id}_E\right) &= \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\left(1 - \cos\theta\right) \neq 0 \text{ car } \cos\theta \neq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $r_\theta - \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{Ker}\left(r_\theta - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\Omega,\theta}(M) = M \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \Omega
\end{aligned}$$

❒ Réciproquement, soir f un déplacement de X de partie linéaire $\varphi \in \mathrm{SO}(E)$. Si $\varphi = \mathrm{Id}_E$, f est une translation. Supposons $\varphi \neq \mathrm{Id}_E$, on sait que $\exists \theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\varphi = r_\theta$. Montrons que f admet un point fixe. D'après le calcul précédent, $r_\theta - \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$. Soit $O \in X$, on a alors pour $M \in X$, $f(M) = f(O) + r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right)$ d'où

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow M = f(O) \dotplus r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)} + r_\theta\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ &\Leftrightarrow (r_\theta - \mathrm{Id}_E)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O)O} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (r_\theta - \mathrm{Id}_E)^{-1}\left(\overrightarrow{f(O)O}\right) \\ &\Leftrightarrow M = O \dotplus (r_\theta - \mathrm{Id}_E)^{-1}\left(\overrightarrow{f(O)O}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un unique point fixe Ω et, pour $M \in X$, $f(M) = f(\Omega) + r_\theta\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \Omega + r_\theta\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \mathcal{R}_{\Omega,\theta}(M)$ donc $f = \mathcal{R}_{\Omega,\theta}$.

Les déplacements du plan sont :
– les translations ;
– les rotations d'angle $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

4.1.2 Description des antidéplacements

En dimension 2, l'isométrie affine $f : X \longrightarrow X$ de partie linéaire φ est un antidéplacement si $\varphi \in \mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$, c'est-à-dire si φ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.

Si $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est une droite affine, la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ de partie linéaire σ par rapport à $\mathcal{D}$ est un antidéplacement dont la partie linéaire est la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. $\mathcal{D}$ est même l'ensemble des points invariants par $\mathcal{S}_\mathcal{D}$.

❒ Soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$, $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{S}_\mathcal{D}$ est aussi un antidéplacement de partie linéaire $\mathrm{Id}_E \circ \sigma = \sigma$ qui ne possède aucun point fixe si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, et on a aussi $f = \mathcal{S}_\mathcal{D} \circ t_{\overrightarrow{v}}$.

En effet, pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mathcal{D} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) &= \mathcal{S}_\mathcal{D}(M \dotplus \overrightarrow{v}) \\ &= \mathcal{S}_\mathcal{D}(M) \dotplus \sigma(\overrightarrow{v}) \\ &= \mathcal{S}_\mathcal{D}(M) \dotplus \overrightarrow{v} \text{ car } \overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) \\ &= t_{\overrightarrow{v}} \circ \mathcal{S}_\mathcal{D}(M) \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ est l'unique droite de X globalement invariante par f, c'est-à-dire telle que $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. f s'appelle la symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.

❒ Réciproquement, soit f un antidéplacement de partie linéaire $\varphi \in \mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$: $\exists \overrightarrow{u} \in E\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ tel que φ est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

(1) Supposons que f admette un point fixe $A \in X$, et soit $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. Pour $M \in X$, $f(M) = f(A) \dotplus \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) = A \dotplus \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{AH} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{HM} \in \{\overrightarrow{u}\}^\perp$ donc $\varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HM}$ donc

$$\begin{aligned} f(M) &= A \dotplus \left(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{HM}\right) \\ &= A \dotplus \left(-\overrightarrow{HM}\right) \\ &= \mathcal{S}_\mathcal{D}(M) \end{aligned}$$

donc $f = \mathcal{S}_\mathcal{D}$.

(2) De retour au cas général, soient $M, N \in X$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u} &= \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right).\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \text{ car } \varphi \text{ conserve le produit scalaire} \\ &= \overrightarrow{f(M)f(N)}.\overrightarrow{u} \\ &= \overrightarrow{f(M)M}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{Nf(N)}.\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Nf(N)}.\overrightarrow{u}$ donc $\forall M, N \in X$,

$$\frac{\overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} = \frac{\overrightarrow{Nf(N)}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$$

On retrouve l'expression du projeté orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ [a]. Soit pour $M \in X$, $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$, si on pose $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, alors $\forall M \in X$, $\overrightarrow{v}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

- Supposons que $\overrightarrow{v} = 0$ et montrons que f admet un point fixe. On a donc $\forall M \in X$, $\overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{u} = 0$, montrons d'abord que $f \circ f(M) = M$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f\circ f(M)f(M)} &= \varphi\left(\overrightarrow{f(M)M}\right) \\ &= -\overrightarrow{f(M)M} \text{ car } \overrightarrow{f(M)M} \in \{\overrightarrow{u}\}^{\perp} \\ &= \overrightarrow{Mf(M)} \end{aligned}$$

  ainsi, $f \circ f(M) = M$ donc $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit maintenant $M \in X$, $I = \mathrm{mil}(M, f(M))$. f conserve le milieu donc $f(I) = \mathrm{mil}(f(M), f \circ f(M)) = \mathrm{mil}(f(M), M) => I$ donc I est un point fixe de I. D'après le cas précédent, f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D} = I + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$.
- Supposons maintenant $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Soit $g = t_{-\overrightarrow{v}} \circ o f$, g est affine de partie linéaire $\psi = \mathrm{Id}_E \circ \varphi = \varphi$ donc g est aussi un antidéplacement et pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mg(M)}.\overrightarrow{u} &= \left(\overrightarrow{Mf(M)} - \overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{u} \\ &= \overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  d'après le calcul précédent. Selon le cas ci-dessus , g est une symétrie $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ par rapport à une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g$ est une symétrie glissée.

4.1.3 Similitudes directes planes

Retour sur les déplacements dans le plan complexe ❐ Plaçons nous dans le cas où $X = \mathbb{C}$ muni de sa structure affine euclidienne naturelle. Les déplacements de X sont les applications du type $z \longmapsto z\mathrm{e}^{i\theta} + b$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$. En effet, $\mathrm{SO}(\mathbb{C}) = \left\{z \longmapsto z\mathrm{e}^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\right\}$ donc si f est un déplacement de partie linéaire $\varphi \in \mathrm{SO}(\mathbb{C})$, $\exists \theta \in \mathbb{R} / \varphi : z \in \mathbb{C} \longrightarrow z\mathrm{e}^{i\theta}$ donc pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \varphi(z - 0) \\ &= \underbrace{f(0)}_{b} + \mathrm{e}^{i\theta} z \end{aligned}$$

❐ Réciproquement, si $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors $z \longmapsto z\mathrm{e}^{i\theta} + b$ est affine de partie linéaire $z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(0) + \mathrm{e}^{i\theta}(z - 0)$.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, f est la translation de vecteur b.

a. Voir section 25.3.2 du cours complet page 488.

– Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$ donc pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{i\theta} z + b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{b}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}} \end{aligned}$$

L'unique point fixe de f est $\omega = \dfrac{b}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$ et, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(\omega) + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) = \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$. f est la rotation de centre ω et d'angle θ.

Description des similitudes directes ❒ Soit g une similitude directe de partie linéaire ψ et de rapport $k > 0$. On sait que $\dfrac{\psi}{k} \in \mathrm{SO}(\mathbb{C}) : \exists \theta \in \mathbb{R}/\psi : z \longrightarrow z\mathrm{e}^{i\theta}$ et pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(z) &= g(0) + \psi(z - 0) \\ &= g(0) + k\mathrm{e}^{i\theta} z \end{aligned}$$

g est donc une application du type $z \longmapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

❒ Réciproquement, soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $g : z \in \mathbb{C} \longrightarrow az + b$. $g(0) = b$ donc, pour $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = g(0) + a(z - 0)$ donc g est affine de partie linéaire $z \longmapsto az$. De plus, pour $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{g(z)\, g(z')}\right\| &= \left|g(z') - g(z)\right| \\ &= \left|a(z' - z)\right| \\ &= |a|\,|z' - z| \end{aligned}$$

Ainsi g est une similitude de rapport $|a|$. Si ψ est la partie linéaire de g, alors pour $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\psi(z)}{|a|} = \dfrac{a}{|a|} z$ donc $\psi \in \mathrm{SO}(\mathbb{C})$, g est effectivement une similitude directe.

Finalement, l'ensemble des similitudes directes du plan complexe est

$$\{z \longmapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$$

Étude plus précise ❒ Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \in \mathbb{C} \longrightarrow az + b$. Si $a = 1$, f est une translation de vecteur b. Supposons $a \neq 1$, montrons que f admet un unique point fixe. Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow z = az + b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ est l'unique point fixe de f et, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(\omega) + a(z - \omega) \Leftrightarrow f(z) = \omega + a(z - \omega)$. Puisque $a \in \mathbb{C}^*$, on écrit $a = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit h l'homothétie de centre ω et de rapport ρ, r la rotation de centre ω et d'angle θ. On a donc pour $z \in \mathbb{C}$: $h(z) = \omega + \rho(z - \omega)$ et $r(z) = \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$ d'où

$$\begin{aligned} h \circ r(z) &= h\Big(\omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)\Big) \\ &= \omega + \rho\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) \\ &= f(z) \\ &= r \circ h(z) \end{aligned}$$

Ainsi, f est composée commutative de l'homothétie de centre ω et rapport ρ et de la rotation de centre ω et d'angle θ.

❒ Réciproquement, soit $\omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$, h l'homothétie de centre ω et de rapport λ, r la rotation de centre ω et d'angle θ, alors $h \circ r = r \circ h$ et pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} h \circ r\,(z) &= \omega + \lambda \mathrm{e}^{i\theta}\,(z - \omega) \\ &= \lambda \mathrm{e}^{i\theta} z + \omega \left(1 - \lambda \mathrm{e}^{i\theta}\right) \end{aligned}$$

Ainsi f est une similitude directe de rapport $|\lambda|$. $h \circ r$ s'appelle la similitude directe de centre ω, de rapport λ et d'angle θ.

Retour au cas général

Soit X un espace euclidien de dimension 2 quelconque muni d'un repère orthonormé direct. En utilisant les affixes, on voit que les similitudes directes de X sont les translations et les composées commutatives $h_{\Omega,\lambda} \circ r_{\Omega,\theta}$ où h est une homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ et $r_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Soient $A, B, C, D \in X$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.

En effet, il suffit de résoudre le problème dans $\mathbb{C}$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et $c \neq d$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $f : z \longrightarrow \lambda z + \mu$ qui vérifie $f\,(a) = c$, $f\,(b) = d$. On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} f\,(a) = c \\ f\,(b) = d \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a + \mu = c \\ \lambda b + \mu = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{c-d}{a-b} \\ \mu = \frac{ad-bc}{a-b} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 Déplacements en dimension 3

4.2.1 Analyse

Il était un fois un espace affine X de direction E orientée telle que $\dim E = 3$... L'objectif est de décrire les déplacements de E, c'est-à-dire les applications affines $f : X \longrightarrow X$ de partie linéaire $\varphi \in \mathrm{SO}\,(E)$.

❒ Les translations sont des déplacements.

❒ Étudions les rotations axiales. Soit $A \in X$, $\overrightarrow{a} \in E$ unitaire, $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$. On note $R_{\overrightarrow{a},\theta}$ la rotation vectorielle d'axe orienté et dirigé par $\overrightarrow{a}$ et d'angle θ. Pour $M \in X$ on pose, en notant H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta} = H \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{HM}\right)$. On remarque que pour $M \in \mathcal{D}$, $H = M$ donc $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}\,(M) = M$. Pour $M \in X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}\,(M) &= H \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{HM}\right) \\ &= A \dotplus \left(\overrightarrow{AH} + r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{HM}\right)\right) \\ &= A \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \text{ car } \overrightarrow{AH} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a}) \\ &= A \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{AM}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}\,(M) = \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}\,(A) + r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{AM}\right)$ donc $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}$ est affine de partie linéaire $r_{\overrightarrow{a},\theta} \in \mathrm{SO}\,(E)$ donc $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}$ est un déplacement appelé rotation d'axe $\mathcal{D}$ dirigé et orienté par $\overrightarrow{a}$ et d'angle θ.

❒ Plus généralement, soit $\overrightarrow{b} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$, $f = t_{\overrightarrow{b}} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}$. f est aussi un déplacement comme composée de deux déplacements. On a aussi $f = \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta} \circ t_{\overrightarrow{b}}$ car pour $M \in X$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta} \circ t_{\overrightarrow{b}}(M) &= \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}\left(M \dotplus \overrightarrow{b}\right) \\
&= \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}(M) + r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{b}\right) \\
&= \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}(M) + \overrightarrow{b} \text{ car } \overrightarrow{b} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right) \\
&= t_{\overrightarrow{b}} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}
\end{aligned}$$

On dit que f est le vissage d'axe $\mathcal{D}$ dirigé et orienté par $\overrightarrow{a}$, de vecteur $\overrightarrow{b}$ et d'angle θ. Si $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, f n'admet aucun point fixe et si $\overrightarrow{b} = 0$, $\mathcal{D}$ est globalement invariante par f, c'est-à-dire $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

4.2.2 Synthèse

Réciproquement, soit f un déplacement de X de partie linéaire φ. Si $\varphi = \text{Id}_E$, f est une translation. Supposons $\varphi \neq \text{Id}_E$, on sait que $\exists \theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\overrightarrow{a} \in E$ unitaire tels que $\varphi = r_{\overrightarrow{a},\theta}$.

❒ Supposons que f admette un point fixe A, soit $\mathcal{D} = A \dotplus \mathbb{R}\overrightarrow{u}$, si $M \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
f(M) &= f(A) \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{AM}\right) \\
&= A \dotplus \overrightarrow{AM} \text{ car } \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right) \\
&= M
\end{aligned}$$

Pour $M \in X$, soit H le projeté orthogonal de m sur $\mathcal{D}$, alors

$$\begin{aligned}
f(M) &= f(H) + r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{HM}\right) \\
&= H \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{HM}\right) \text{ car } H \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

Ainsi, $f = \mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}$ donc f est la rotation d'axe $\mathcal{D}$ dirigé et orienté par $\overrightarrow{a}$ et d'angle θ.

❒ Dans le cas général, $\forall M, N \in X$, $\overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{Nf(N)}.\overrightarrow{a}$ car $\varphi\left(\overrightarrow{MN}\right).\varphi\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{a}$. On note alors $\lambda = \overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{a}$ pour $M \in X$. λ ne dépend pas de M et soit $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$: $\overrightarrow{b}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{Mf(M)}$ sur $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$ indépendamment de $M \in X$.

(1) Si $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow \forall M \in X, \overrightarrow{Mf(m)}.\overrightarrow{a} = 0$, prenons $O \in X$ et $\mathcal{P}$ le plan $O \dotplus \{\overrightarrow{a}\}^{\perp}$. Si $M \in \mathcal{P}$, $f(M) \in \mathcal{P}$ car $\overrightarrow{Mf(M)} \in \{\overrightarrow{a}\}^{\perp} \Rightarrow f(M) \in M \dotplus \{\overrightarrow{a}\}^{\perp} = \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ est stable par f. De plus, pour $M \in \mathcal{P}$, $f(M) = f(O) + r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\Leftrightarrow M = f(O) \dotplus r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right) \\
&\Leftrightarrow r_{\overrightarrow{a},\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)}
\end{aligned}$$

On sait que $P = \{a\}^{\perp}$ est stable par $r_{\overrightarrow{a},\theta}$ et le restriction ψ de $r_{\overrightarrow{a},\theta}$ à P est la rotation de P d'angle θ. Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\psi - \text{Id}_P \in \text{GL}(P)$ car

$$\begin{aligned}
\det\left(\psi - \text{Id}_P\right) &= \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} \\
&= 2(1 - \cos\theta) \neq 0
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{OM} \in P$ et $\overrightarrow{Of(O)} \in P$,

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\Leftrightarrow \left(\psi - \text{Id}_P\right)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{Of(O)} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\psi - \text{Id}_P\right)^{-1}\left(\overrightarrow{Of(O)}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui détermine un unique point $M \in \mathcal{P}$ donc f admet un unique point fixe sur $\mathcal{P}$. D'après le cas précédent, f est la rotation axiale d'angle θ et d'axe orienté et dirigé par $\overrightarrow{a}$.

(2) Si $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, soit $g = t_{-\overrightarrow{b}} \circ f$, alors la partie linéaire de g est $\mathrm{Id}_E \circ r_{\overrightarrow{a},\theta}$ et pour $M \in X$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Mg(M)}.\overrightarrow{a} &= \left(\overrightarrow{Mf(M)} - \overrightarrow{b}\right).\overrightarrow{a}\\ &= \overrightarrow{Mf(M)}.\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}\\ &= 0 \text{ d'après le cas précédent}\end{aligned}$$

Toujours d'après le cas précédent, g est une rotation axiale $\mathcal{R}_{\mathcal{D},\theta}$ où $\mathcal{D}$ est oritné et dirigé par $\overrightarrow{a}$ donc $f = t_{\overrightarrow{b}} \circ g$ est un vissage.

Bilan

Les déplacements de l'espace X sont : – les translations ; – les rotations axiales d'angle $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$; – les vissages d'angle $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et de vecteurs non nuls.