Chapitre 29 : Fractions rationnelles

I - Construction

II - Forme irréductible

III - Degré, zéro, pôles

IV - Décomposition en éléments simples

V - En pratique

I - Construction

$\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Seuls les polynômes csts non nuls sont irréductibles (pour la loi $\times$)

Dans la suite, on notera $\mathbb{K}[X]^* = \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

On définit sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ la relation $\sim$ par :

$$\forall ((P_1, Q_1), (P_2, Q_2)) \in (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*)^2$$

$$(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \iff P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

$\sim$ est une relation d'eq

Dem :

-> Réflexivité

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

$(P, Q) \sim (P, Q) \iff PQ = PQ$

donc $(P, Q) \sim (P, Q)$

-> Symétrie

Soit $((P_1, Q_1), (P_2, Q_2)) \in (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*)^2$ tq $(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2)$

On a donc : $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$

donc $P_2 Q_1 = P_1 Q_2$

donc $(P_2, Q_2) \sim (P_1, Q_1)$

→ Transitivité

Soit $((P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3)) \in (\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*)^3$

tq $\begin{cases} (P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \\ (P_2, Q_2) \sim (P_3, Q_3) \end{cases}$

On a : $\begin{cases} P_1 Q_2 = P_2 Q_1 & L_1 \\ P_2 Q_3 = P_3 Q_2 \end{cases}$

Mq $P_1 Q_3 = P_3 Q_1$

$Q_3 \times (L_1)$ donne : $P_1 Q_2 Q_3 = P_2 Q_1 Q_3$

avec (L_2), on a donc : $P_1 Q_2 Q_3 = P_3 Q_2 Q_1$

$Q_2 (P_1 Q_3 - P_3 Q_1) = 0$

$\mathbb{K}[X]$ intègre

et $Q_2 \neq 0$

$P_1 Q_3 - P_3 Q_1 = 0$

càd $(P_1, Q_1) \sim (P_3, Q_3)$

donc transitive

donc $\sim$ est une relat° d'eq

L'ens des classes d'eq est appelé l'ens des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est donc une classe d'eq càd un ens d'éléments de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ qui possède pls représentants

Par ex:

$(3,2)$ et $(6,4)$ repres la m̂ fract° rationnelle

$(X+1, X-1)$ et (X^2+X, X^2-X) repres la m̂ fract° rationnelle

Not:

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

La fract° rationnelle dont (P,Q) est un repres est noté $\frac{P}{Q}$

Not:

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ens des fract° rationnelles à coeff dans $\mathbb{K}$

A tout polynôme P, on associe la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$

Rq:

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array} \quad \text{est injective}$$

Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$

$(P_1, 1)$ et $(P_2, 1)$ repres donc la même fraction rationnelle

càd $P_1 \times 1 = P_2 \times 1$

càd $P_1 = P_2$

Ex:

Mq $\frac{1}{X} \notin \mathrm{Im}\,\varphi$

Supp $\frac{1}{X} \in \mathrm{Im}\,\varphi$

Il existe alors $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\frac{P}{1} = \frac{1}{X}$

On a alors: $XP = 1$ puis $1 + \underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = 0$ Impossible

Sur $\mathbb{K}(X)$, on définit 2 loi de composition interne

$$+ : \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$$
$$\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}\right) \longmapsto \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$$

$$\times : \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$$
$$\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}\right) \longmapsto \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

Vérifions que cela a du sens càd la somme (resp le pdt) de 2 fractions rationnelles est ind aux représentants choisis

Soit $((P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (P_4, Q_4))$ les éléments de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

tq : $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_3}{Q_3}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_4}{Q_4}$

Mq : $\begin{cases} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \dfrac{P_3 Q_4 + P_4 Q_3}{Q_4 Q_3} & (1) \\[2ex] \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2} = \dfrac{P_3 P_4}{Q_1 Q_4} & (2) \end{cases}$

(2) $\iff P_1 P_2 Q_3 Q_4 = Q_1 Q_2 P_3 P_4$

$\iff (P_1 Q_3)(P_2 Q_4) = (P_3 Q_1)(P_4 Q_2)$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}$$

donc (2)

(1) $\iff (P_1 Q_2 + P_2 Q_1) Q_3 Q_4 = (P_3 Q_4 + P_4 Q_3) Q_1 Q_2$

$\iff P_1 Q_3 Q_2 Q_4 + P_2 Q_4 Q_1 Q_3 = P_3 Q_1 Q_4 Q_2 + P_4 Q_2 Q_1 Q_3$

donc (1)

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps

Dem :

① Mq $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe commutatif

càd $+$ est une $\boxed{\text{lci}}$ $\begin{cases} \text{associative} \\ \text{possède un élément neutre} \\ \text{dont tout élément possède un inverse} \\ \text{commutative} \end{cases}$

② $\times$ est une $\boxed{\text{lci}}$ associative, possédant un élément neutre distributive / $+$

③ $\times$ commutative

tout élément non nul est inversible par $\times$

① → Associativité de $+$

Soit $\boxed{((P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3)) \text{ ds } \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*}$

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} ; \frac{P_3}{Q_3} ; \frac{P_2}{Q_2}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$$

Mq $\left(\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}\right) + \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}\right)$

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}\right) + \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}$$

$$= \frac{P_1 Q_2 Q_3 + P_2 Q_1 Q_3 + P_3 Q_1 Q_2}{Q_1 Q_2 Q_3}$$

et $\frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}\right) = \frac{P_1}{Q_1} \quad \frac{P_2 Q_3 + P_3 Q_2}{Q_2 Q_3}$

$$= \frac{P_1 Q_2 Q_3 + P_2 Q_1 Q_3 + P_3 Q_1 Q_2}{Q_1 Q_2 Q_3}$$

→ + possède un élément neutre

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

$$\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P}{Q} = \frac{0}{1} + \frac{P}{Q}$$

→ tout élément est inversible par +

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

On a : $\begin{cases} \frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ - PQ}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = \frac{0}{1} \\ \frac{-P}{Q} + \frac{P}{Q} = \frac{-PQ + PQ}{Q^2} = \frac{0}{1} \end{cases}$

② → + est associative

Soit $\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}\right) \in \mathbb{K}(X)^2$

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{P_2 Q_1 + P_1 Q_2}{Q_1 Q_2} = \frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_1}{Q_1}$$

→ × associative

$$\frac{P_1}{Q_1}\left(\frac{P_2}{Q_2} \times \frac{P_3}{Q_3}\right) = \frac{P_1}{Q_1}\left(\frac{P_2 P_3}{Q_2 Q_3}\right)$$

$$= \frac{P_1 P_2 P_3}{Q_1 Q_2 Q_3}$$

$$= \left(\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2}\right) \times \frac{P_3}{Q_3}$$

→ × possède un élément neutre

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

$$\frac{P}{Q} \times \frac{1}{1} = \frac{P}{Q} = \frac{1}{1} \times \frac{P}{Q}$$

→ × commutative EVIDENT

→ × distributive

Soit $\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}\right)$ 3 fractions rationnelles

$$\frac{P_1}{Q_1} \times \left(\frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}\right) = \frac{P_1}{Q_1} \times \left(\frac{P_2 Q_3 + P_3 Q_2}{Q_2 \, Q_3}\right)$$

$$= \frac{P_1 P_2 Q_3 + P_1 P_3 Q_2}{Q_1 \, Q_2 \, Q_3}$$

$$= \frac{P_1 P_2 Q_3}{Q_1 Q_2} + \frac{P_1 P_3 Q_2}{Q_1 Q_2 Q_3}$$

$$= \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_3}{Q_3}$$

→ tout élément non nul pour ×

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ tq $\frac{P}{Q} \neq \frac{0}{1}$ càd tq $P \neq 0$

$\frac{Q}{P} \in \mathbb{K}(X)$ car $P \neq 0$

$$\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{P} = \frac{PQ}{PQ} = \frac{1}{1}$$

Rq : $\frac{1}{1}$ est noté 1

$\frac{0}{1}$ " 0

$\frac{P}{1}$ " P

On définit sur $\mathbb{K}(X)$ une lce

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}(X)$$
$$\left(\lambda ; \frac{P}{Q}\right) \longmapsto \frac{\lambda P}{Q}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev

Dem : OK

II - Forme irréductible

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fract° rationnelle

On dit que $\frac{P_1}{Q_1}$ est une écriture irréductible de F lorsque $\begin{cases} P_1 \wedge Q_1 = 1 \\ F = \frac{P_1}{Q_1} \end{cases}$

On dit que $\frac{P_1}{Q_1}$ est une écriture irréductible unitaire de F lorsque :

$$\begin{cases} F = \frac{P_1}{Q_1} \\ P_1 \wedge Q_1 = 1 \\ Q_1 \text{ est unitaire} \end{cases}$$

Toute fraction rationnelle possède une unique écriture irréductible unitaire

Dem :

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

Soit $R = P \wedge Q$

Il existe $(P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $\begin{cases} P = RP_1 \\ Q = RQ_1 \end{cases}$

Donc $\frac{P}{Q} = \frac{RP_1}{RQ_1} \overset{\text{def}}{=} \frac{P_1}{Q_1}$

Or $P_1 \wedge Q_1 = 1$

$Q_1 \neq 0$ car $Q \neq 0$

Son coeff dominant est donc non nul

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{1}{c} \cdot P_1}{\frac{1}{c} \cdot Q_1}$$

En posant $P_2 = \frac{1}{c} P_1$ et $Q_2 = \frac{1}{c} Q_1$

On a : $\begin{cases} P_2 \wedge Q_2 = 1 \\ Q_2 \text{ unitaire} \end{cases}$

$\frac{P}{Q}$ a donc un représentant irréductible unitaire

Soit $(P_3, Q_3) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

tq $\begin{cases} \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3}{Q_3} \\ P_3 \wedge Q_3 = 1 \\ Q_3 \text{ unitaire} \end{cases}$

Mq $\begin{cases} P_2 = P_3 \\ Q_2 = Q_3 \end{cases}$

On a : $P_2 Q_3 = Q_2 P_3$

On a : $Q_2 \mid Q_2 P_3$

donc $Q_2 \mid P_2 Q_3$

Or $Q_2 \wedge P_2 = 1$

donc d'après le lemme de Gauss, $Q_2 \mid Q_3$

De même $Q_3 \mid Q_2$

donc Q_2 et Q_3 sont associés

Comme Q_2 et Q_3 sont unitaires, on a donc $Q_2 = Q_3$

donc $P_2 Q_2 = P_3 Q_3$

Comme $\mathbb{K}[X]$ intègre et $Q_2 \neq 0$, $P_2 = P_3$

Ainsi $((P_2, Q_2) = (P_3, Q_3))$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible unitaire (P_0, Q_0)

Toute écriture irréductible de F est de la forme $\frac{\lambda P_0}{\lambda Q_0}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$

et réciproquement

Toute écriture irréductible de F est de la forme $\frac{R P_0}{R Q_0}$, $R \in \mathbb{K}[X]^*$

et réciproquement

Dem:

Soit $\frac{P}{Q}$ une écriture irréductible de F

On a: $\begin{cases} \frac{P}{Q} = \frac{P_0}{Q_0} \\ P \wedge Q = 1 \end{cases}$

On a : $P Q_0 = Q P_0$

Grâce au lemme de Gauss, $Q \,/\, Q_0$ et $Q_0 \,/\, Q$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tq $Q = \lambda P_0$

puis $P Q_0 = \lambda Q_0 P_0$

Comme $Q_0 \neq 0$ et $\mathbb{K}[X]$ intègre , $P = \lambda P_0$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tq $\frac{P}{Q} = \frac{P_0}{Q_0}$

tq : $\exists R \in \mathbb{K}[X]^* : \begin{cases} P = R P_0 \\ Q = R Q_0 \end{cases}$

On a $P Q_0 = Q P_0$

$\begin{cases} Q_0 \,/\, Q P_0 \\ Q_0 \wedge P_0 = 1 \end{cases}$

donc $Q_0 \,/\, Q$

Il existe $R \in \mathbb{K}[X]$: $Q = Q_0 R$

donc $PQ_0 = Q_0 R P_0$

Comme $Q_0 \neq 0$ et $\mathbb{K}[X]$ intègre, $P = RP_0$

Rq : $\frac{1}{c} \cdot P = \frac{P}{c}$

III - Degré, zéros, pôles

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

On appelle **degré de F**

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Rq : Cette def a un sens càd qu'elle est ind du représentant choisi

Soit (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) des éléments de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

tq : $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$

Mq $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$

On a : $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$

donc $\deg P_1 + \underbrace{\deg Q_2}_{\in \mathbb{N}} = \deg P_2 + \underbrace{\deg Q_1}_{\in \mathbb{N}}$

-> Si $P_1 \neq 0$, alors on a des entiers $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$

-> Si $P_1 = 0$, alors $P_2 = 0$

$\deg P_1 - \deg Q_1 = -\infty = \deg P_2 - \deg Q_2$

Rq :

Si $F \in \mathbb{K}(X)$, alors $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$

et $\deg F = -\infty \iff F = 0$

Rq:

$$\deg\left(\frac{P}{1}\right) = \deg(P)$$

Soit $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2$

$\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

$\deg(F_1 + F_2) \leq \mathrm{Max}(\deg F_1, \deg F_2)$

. Si $\deg F_1 < \deg F_2$, alors $\deg(F_1 + F_2) = \deg F_2$

Dem:

Soit $F_1 = \frac{P_1}{Q_1} \in \mathbb{K}(X)$

$F_2 = \frac{P_2}{Q_2} \in \mathbb{K}(X)$

$$\begin{aligned}
\deg(F_1 F_2) &= \deg\left(\frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}\right) \\
&= \deg(P_1 P_2) - \deg(Q_1 Q_2) \\
&= \deg P_1 + \deg P_2 - \deg Q_1 - \deg Q_2 \\
&= \deg F_1 + \deg F_2
\end{aligned}$$

. Supp $\deg F_1 \leq \deg F_2$

Mq $\deg(F_1 + F_2) \leq \deg F_2$

$$\begin{aligned}
\deg(F_1 + F_2) &= \deg\left(\frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}\right) \\
&= \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) - \deg(Q_1 Q_2) \\
&\leq \mathrm{Max}(\deg(P_1 Q_2), \deg(P_2 Q_1)) - (\deg Q_1 + \deg Q_2) \\
&\leq \mathrm{Max}(\deg P_1 + \deg Q_2, \deg P_2 + \deg Q_1) - \underbrace{\deg Q_1 - \deg Q_2}_{*}
\end{aligned}$$

$\leq \operatorname{Max}(\deg P_1 - \deg Q_1 , \deg P_2 - \deg Q_2)$ ↙ faire entre *

$= \operatorname{Max}(\deg F_1 , \deg F_2)$

. Si $\deg F_1 < \deg F_2$

Pour transformer $\leq$ en $=$, il suffit de mq :

$$\underset{\deg P_1 + \deg Q_2}{\underset{\shortparallel}{\deg(P_1 Q_2)}} \neq \underset{\deg P_2 + \deg Q_1}{\underset{\shortparallel}{\deg(P_2 Q_1)}}$$

Par hyp : $\deg P_1 - \deg Q_1 \leq \deg P_2 - \deg Q_2$

donc $\deg(P_1 Q_2) \leq \deg(P_2 Q_1)$

$$\begin{aligned}\deg(F_1 + F_2) &= \deg(P_2 Q_1) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) \\ &= \deg(P_2) - \deg Q_2 \\ &= \deg(F_2)\end{aligned}$$

On note $\mathbb{K}_0(X)$ l'ens des fractions rationnelles de deg < 0

$\mathbb{K}_0(X)$ est un $\mathbb{K}$ev

Dem :

Mq $\mathbb{K}_0(X)$ est un sev de $\mathbb{K}(X)$

. $\mathbb{K}_0(X) \subset \mathbb{K}(X)$ par def

. $0_{\mathbb{K}(X)} \in \mathbb{K}_0(X)$

. $\mathbb{K}_0(X)$ stable par CL

→ stabilité par somme car $\deg(F_1 + F_2) \leq \operatorname{Max}(\deg F_1 , \deg F_2)$

→ stabilité par multiplication par scalaire : $\deg(\lambda F) = \begin{cases} \deg F & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_0(X)$

$= \left\{ \frac{P}{1},\ P \in \mathbb{K}[X] \right\}$

Dem :

Soit $F \in \mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_0(X)$

Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $F = \frac{P}{1}$

donc $\deg F = \deg P$

Or $\deg F < 0$

donc $\deg P < 0$

càd $P = 0$

puis $F = 0$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \frac{P}{Q}$

On effectue la division euclidienne, il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ tq :

$$\begin{cases} P = AQ + R \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$$

$$F = \frac{AQ+R}{Q} = \frac{A}{1} + \frac{R}{Q} = \underbrace{A}_{\in \text{"}\mathbb{K}[X]\text{"}} + \underbrace{\frac{R}{Q}}_{\in \mathbb{K}_0(X)}$$

de degré $\deg R - \deg Q < 0$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible (P, Q)

On appelle zéros de F les racines de P et pôles de F les racines de Q

Rq :

Cette déf est indépendante du représentant choisi.

Il est indispensable de travailler sur une écriture irréductible

Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$ alors l'ens des pôles de F est inclus dans l'ens des racines de Q_1 car il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} P_1 = RP \\ Q_1 = RQ \end{cases}$

donc toute racine de Q est racine de Q_1

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

Si a est une racine de Q et si a n'est pas racine de P, alors a est un pôle de F

Dem :

Soit $\frac{P_0}{Q_0}$ une écriture irréductible (unitaire) de F

Ainsi les pôles sont par déf les zéros de Q_0

Il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} P = RP_0 \\ Q = RQ_0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} Q(a) = 0 \\ P(a) \neq 0 \end{cases}$

donc $R(a)\, Q_0(a) = 0$

$R(a) \neq 0$ (car sinon $P(a) = 0$)

donc $Q_0(a) = 0$

Ex : $\frac{X^2}{X} = \frac{1}{X}$

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ et a racine de Q

Alors : a est un pôle de F ssi $\underbrace{m_P(a)}_{n_1} < \underbrace{m_Q(a)}_{n_2}$

multiplicité de a en tant que racine de P

Dem :

Soit $\frac{P_0}{Q_0}$ une écriture irréductible de F

Ainsi les pôles sont par def les zéros de Q_0

Il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} P = R P_0 \\ Q = R Q_0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} P = (X-a)^{m_1} P_1 & \text{avec } P_1(a) \neq 0 \\ Q = (X-a)^{m_2} Q_1 & \text{avec } Q_1(a) \neq 0 \end{cases}$

. Si $m_1 < m_2$ alors : $F = \frac{(X-a)^{m_1} P_1}{(X-a)^{m_2} Q_1} = \frac{P_1}{(X-a)^{m_2-m_1} Q_1}$

Comme $\begin{cases} P_1(a) \neq 0 \\ \left((X-a)^{m_2-m_1} Q_1\right)(a) = 0 \quad \text{car } m_1 < m_2 \end{cases}$

. Si $m_1 \geqslant m_2$

alors : $F = \frac{(X-a)^{m_1} P_1}{(X-a)^{m_2} Q_1} = \frac{(X-a)^{m_1-m_2} P_1}{Q_1}$ $\quad m_1 - m_2 \geqslant 0$

contraposée pour l'autre sens

donc les pôles de F sont des racines de Q_1

Or $Q_1(a) \neq 0$

donc a n'est pas pôle de F

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Alors : une fonct° rationnelle "est" un polynôme

ssi elle n'a pas de pôle

Dem :

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\frac{P}{Q}$ son écriture irréductible unitaire

F n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ Q n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$

d'Alembert - Gauss

$\Leftrightarrow$ Q cst non nul

$\Leftrightarrow$ $Q = 1$

$\Leftrightarrow$ F est un polynôme

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\mathcal{P}$ l'ens des pôles de F

On note :

$$\widetilde{F} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \frac{\widetilde{P}(t)}{\widetilde{Q}(t)}$$

à $\frac{P}{Q}$ est une écriture irréductible de F

Ex : $F = \frac{X^2}{X^3}$

$$\widetilde{F} : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \frac{1}{t}$$

Ex : $F = \frac{X^3}{X^2(X-1)^2} = \frac{X}{(X-1)^2}$

alors : $\widetilde{F} : \mathbb{K} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$t \longmapsto \frac{t}{(t-1)^2}$$

IV - Décomposition en éléments simples

<u>Rappel</u> : $\mathbb{K}(X) = \text{``}\mathbb{K}[X]\text{''} \oplus \mathbb{K}_0(X)$

<u>Ex:</u> $\dfrac{X^4}{(X-1)^2(X-2)}$

$$(X-1)^2(X-2) = (X^2-2X+1)(X-2)$$
$$= X^3-2X^2-2X^2+4X+X-2$$
$$= X^3-4X^2+5X-2$$

$$X^4 = X(X^3-4X^2+5X-2) + 4X^3-5X^2+2X$$
$$= X(X^3-4X^2+5X-2)+4(X^3-4X^2+5X+2)+11X^2-18X+8$$

$$F = X+4+\underbrace{\frac{11X^2-18X+8}{(X-1)^2(X-2)}}_{\mathbb{K}_0(X)}$$

$$\tilde{F}(t) = t+4+\frac{11t^2-18t+8}{(t-1)^2(t-2)}$$

$$\underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^2\times(-1)} = \frac{-1}{(t-1)^2}$$

$$\underset{t\to 2}{\sim} \frac{16}{t-2}$$

$$\frac{11X^2-18X+8}{(X-1)^2(X-2)} - \frac{-1}{(X-1)^2} - \frac{16}{X-2} = \frac{*}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{-5}{(X-1)}$$

$$* = 11X^2-18X+8+X-2-16(X-1)^2$$
$$= -5X^2+15X-10 = -5(X-1)(X-2)$$

$$F = X+4-\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{5}{X-1}+\frac{16}{X-2}$$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et a un pôle de F

On dit que a est un pôle de F d'ordre m lorsque:

a est racine de Q de multiplicité m

où $\frac{P}{Q}$ est une écriture irréductible de F

Ex: $F = \frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)}$ a un pôle simple : 2

double : 1

$F = \frac{P}{(X-a)^3}$ a est un pôle de F d'ordre au plus 3

(a peut ne pas être un pôle)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $a \in \mathbb{K}$ un pôle d'ordre m

Il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ n'ayant pas a comme pôle et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tq:

$$F = G + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m} + \dots + \frac{\alpha_1}{X-a}$$

De plus, cette écriture est unique et $\alpha_m \neq 0$

Dem:

Unicité:

Supp qu'il existe G_1 et G_2 deux fractions rationnelles n'ayant pas a comme pôle et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ tq

$$F = G_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i}$$

$$= G_2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{(X-a)^i}$$

$$G_1 - G_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i - \alpha_i}{(X-a)^i}$$

Rq :

Si F_1 et F_2 n'ont pas a ĉ pôle

Alors $F_1 F_2$ et $\lambda F_1 + \mu F_2$ n'ont pas a ĉ pôle

En effe $F_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ $\quad F_2 = \frac{P_2}{Q_2}$

avec $Q_1(a) \neq 0$

$Q_2(a) \neq 0$

donc $F_1 F_2 = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$

$(Q_1 Q_2)(a) \neq 0$

donc a n'est pas pôle de $F_1 F_2$

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = \frac{\lambda P_1}{Q_1} + \frac{\mu P_2}{Q_2}$$

$$= \frac{\lambda P_1 Q_2 + \mu P_2 Q_2}{Q_1 Q_2}$$

De m̂ $\lambda F_1 + \mu F_2$ n'a pas a ĉ pôle

Rq :

Si F_1 a a comme pôle

F_2 n'a pas a comme pôle

alors : $F_1 F_2$ on ne sait pas $\quad$ / $\frac{1}{X+1}$ $\frac{1}{X}$ a 0 ĉ pole

$\lambda F_1 + \mu F_2$ avec $\lambda \neq 0$ aura a ĉ pôle $\quad$ $\frac{X}{X+1}$ $\frac{1}{X}$ n'a pas 0 ĉ pôle

$$F_1 = \frac{P_1}{(X-a)^m Q_1} \quad \text{avec} \begin{cases} P_1(a) \neq 0 \\ Q_2(a) \neq 0 \end{cases}$$

$$F_2 = \frac{P_2}{Q_2} \qquad Q_2(a) \neq 0$$

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = \frac{\lambda P_1 Q_2 + \mu (X-a)^m Q_1 \ P_2}{(X-a)^m Q_1 Q_2}$$

$$N(a) = \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \underbrace{P_1(a)}_{\neq 0} \underbrace{Q_1(a)}_{\neq 0} \neq 0$$

donc a est un pôle

$$G_1 - G_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i - \alpha_i}{(X-a)^i}$$

n'a pas a c pôle

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta_i - \alpha_i)(X-a)^{m-i}}{(X-a)^m}$$

Donc $(X-a)^m$ divise $\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \alpha_i)(X-a)^{m-i}$

Pour des raisons de degré, $\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \alpha_i)(X-a)^{m-i} = 0$

Or $((X-a)^{m-i})_{1 \leq i \leq n}$ libre car échelonnée

donc : $\forall i \in [\![1, n]\!].\ \alpha_i = \beta_i$

puis $G_2 = G_1$

Existence :

Comme a est un polynôme d'ordre n de F, il existe $(P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X]^2$

tq $F = \dfrac{P_1}{(X-a)^m Q_1}$ avec $\begin{cases} Q_1(a) \neq 0 \\ P_1(a) \neq 0 \end{cases}$

Comme $Q_1 \wedge (X-a)^m = 1$, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq :

$$U Q_1 + (X-a)^m V = 1$$

Donc :

$$F = \frac{P_1}{(X-a)^m Q_1} = \frac{P_1 \left(U Q_1 + (X-a)^m V \right)}{(X-a)^m Q_1}$$

$$= \frac{PU}{(X-a)^m} + \underbrace{\frac{P_1 V}{Q_1}}_{\text{n'a pas a c pôle}}$$

On effectue la div euclidienne de $P_1 U$ par $(X-a)^m$

On a l'existence de $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$

tq : $\begin{cases} P_1 U = Q(X-a)^m + R \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$

$$F = \underbrace{Q + \frac{P_1 V}{Q_1}}_{\text{n'a pas a c pôle}} + \frac{R}{(X-a)^m}$$

$$\frac{R}{(X-a)^m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(X-a)^k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_k (X-a)^{m-k}}{(X-a)^k}$$

$R \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\left((X-a)^k\right)_{1 \leq j \leq m-1}$

donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$

tq $R = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i (X-a)^i$

$$\frac{R}{(X-a)^m} = \sum^{n} \alpha_i (X-a)^{m-i}$$

$$= \frac{\lambda_0}{(X-a)^m} + \frac{\lambda_1}{(X-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{\lambda_{m-1}}{X-a}$$

On a : $F = \underset{\text{n'a pas a c racine}}{G} + \frac{\lambda_0}{(X-a)^m} + \cdots + \frac{\lambda_{m-1}}{X-a}$

Si $\lambda_0 = 0$

alors $F = G + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \frac{\alpha_i}{(X-a)^i}$

$$= G + \frac{1}{(X-a)^{m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \alpha_i (X-a)^{i-m}$$

puis a serait un pôle d'ordre au plus n-1

Ccl : $\lambda_0 \neq 0$

De plus : $\tilde{F}(t) \underset{t \to a}{\sim} \frac{\lambda_0}{(t-a)^m}$

$$\frac{\tilde{F}(t) - \frac{\lambda_0}{(t-a)^m}}{\frac{1}{(t-a)^{m-1}}} \longrightarrow \lambda_1$$

$$F = \frac{X^3}{(X-1)^3(X-2)} \qquad \tilde{F}(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{-1}{(t-1)^3}$$

$$= \underbrace{G}_{\text{a pas pôle}} + \underbrace{\frac{a}{(X-1)^3}}_{\text{simple avec } \tilde{F}(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{-1}{(X-1)^3}} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1}$$

$$\tilde{F}(t) = \tilde{G}(t) + \frac{a}{(t-1)^3} + \frac{b}{(t-1)^2} + \frac{c}{t-1}$$

$$(t-1)^3\tilde{F}(t) = \underbrace{\tilde{G}(t)}_{O(1)} + a + b(X-1) + c(X-1)^2$$

DL

$$(t-1)^3\tilde{F}(t) = \frac{t^2}{(t-2)} \qquad t = h+1$$

$$= \frac{(1+h)^2}{h-1}$$

$$= -\frac{(1+h)^2}{1-h}$$

DL ici $= -(1+2h+h^2)(1+h+h^2+o(h^2))$

$$= -(1+3h+4h^2+o(h^2))$$

Donc $a = -1$ $b = -3$ et $c = -4$

$$F = \underbrace{P}_{\in \mathbb{K}[X]}^{\text{partie entière}} + \underbrace{G}_{\in \mathbb{K}_0(X)}$$

$$= \underbrace{G}_{\text{n'a pas a } \hat{c} \text{ pôle}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i}$$

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ ayant ĉ pôle $a_1, \dots, a_d$ de multiplicité resp. $m_1, \dots, m_d$

Il existe un polynôme P et des scalaires $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq m_i}}$

tq $F = P + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$

De plus cette écriture est unique

P est la partie entière de F

et pour tout $i \in [\![1, d]\!]$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$ est la partie polaire de F associée au pôle a_i

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Dem:

Analyse:

Supp qu'une telle écriture existe

$$F = \underbrace{P}_{\mathbb{K}[X]} + \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}}_{\in \mathbb{K}_0(X)}$$

Par unicité $(\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_0(X))$, P est la partie entière de F

Soit $i_0 \in [\![1, d]\!]$

$$F = \underbrace{\underbrace{P}_{\text{n'a pas } a_{i_0} \text{ ĉ pôle}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}}_{\text{n'a pas } a_{i_0} \text{ ĉ pôle}}}_{\text{n'a pas } a_{i_0} \text{ ĉ pôle}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_{i_0}} \frac{\alpha_{i_0 j}}{(X-a_{i_0})^j}$$

Donc $\sum_{j=1}^{m_{i_0}} \frac{\alpha_{i_0 j}}{(X-a_{i_0})^j}$ est la partie polaire de F associée au pôle a_{i_0}

Synthèse :

Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on note : $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$ la partie polaire de F associée au pôle a_i

Posons :

$$G = F - \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$$

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

G est une CL de fractions rationnelles dont les pôles appartiennent à $\{a_1, \dots, a_d\}$

Les seuls pôles possibles de G sont $a_1, \dots, a_d$

Mq a_1 n'est pas pôle de G

$$G = F - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\alpha_{1j}}{(X-a_1)^j} - \sum_{i=2}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$$

n'a pas a_1 c pôle par def de la partie polaire

n'a pas a_1 c pôle

Donc G n'a pas a_1 comme pôle

De même, $a_2, \dots, a_d$ ne sont pas pôle de G

Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, G est un polynôme

Ex : $\frac{1}{X^2+1}$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{(X-i)(X+i)} = \frac{\frac{-i}{2}}{X-i} + \frac{\frac{i}{2}}{X+i}$$

$$F(t)\,(t-i) = \frac{1}{t+i} \underset{t\to i}{\sim} \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$F(t)\,(t+i) = \frac{1}{t-i} \underset{t\to -i}{\sim} \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

Sert pas pour primitiver, dériver

Ici reconnait dériv de arctan

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et z un pôle de F d'ordre m

alors $\bar{z}$ est un pôle de $\bar{F} = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$ d'ordre m

Mieux si $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{(X-z)^i}$ est la partie polaire de F associée à z

alors $\sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\alpha_i}}{(X-\bar{z})^i}$ et la partie polaire de $\bar{F}$ associée à $\bar{z}$

Dem :

$$F = G + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{(X-z)^i}$$

n'a pas z c pôle

Rq :

$$\overline{F_1+F_2} = \overline{F_1} + \overline{F_2} \quad \text{car} \quad \overline{\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}} = \overline{\left(\frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}\right)}$$

$= \;\vdots$ Calcul à faire

$= \overline{F_1} + \overline{F_2}$

De m̃ $\overline{F_1F_2} = \overline{F_1}\;\overline{F_2}$

$$\overline{F} = \overline{G} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\alpha_i}}{(X - \overline{z})^i}$$

$G = \frac{P}{Q}$ avec $Q(z) \neq 0$

$\overline{G} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$ et $\overline{Q}(\overline{z}) = \overline{Q(z)} = 0$

$\overline{G}$ n'a pas $\overline{z}$ ĉ pôle

Comme $\alpha_m \neq 0$, $\overline{\alpha_m} \neq 0$ et $\overline{z}$ est donc un pôle de $\overline{F}$ d'ordre m

car si $F \in \mathbb{R}(X)$ et si $z \in \mathbb{C}$ est un pôle de F

et si $\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{(X-z)^i}$ ($\alpha_i \in \mathbb{C}$) est la pt polaire associée à z

alors $\sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\alpha_i}}{(X-\overline{z})^i}$ n à $\overline{z}$

Ex:

$F \in \mathbb{R}(X)$ ayant i ĉ pôle double

$$F = \frac{\alpha_1}{X-i} + \frac{\alpha_2}{(X-i)^2} + \frac{\overline{\alpha_1}}{X+i} + \frac{\overline{\alpha_2}}{(X+i)^2}$$

$$\frac{\alpha_1}{X-i} + \frac{\overline{\alpha_1}}{X+i} = \frac{a+ib}{X-i} + \frac{a-ib}{X+i} = \frac{2aX - 2b}{X^2+1}$$

$$\frac{\alpha_2}{(X-i)^2} + \frac{\overline{\alpha_2}}{(X+i)^2} = \frac{c+id}{(X-i)^2} + \frac{c-id}{(X+i)^2}$$

$$= \frac{2cX^2 - 4dX - 2c}{(X+1)^2}$$

$$= \frac{2c(X^2+1)^2 + AX + B}{(X+1)^2}$$

prim OK

OK

$$\int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$t = sh\,u$$

$$= \int_0^{sh^{-1}(x)} \frac{1}{1+sh(u)}\,ch(u)\,du$$

$$= \int_0^{sh^{-1}(x)} \frac{1}{ch\,u}\,du$$

$$= \int_0^{-1} \frac{2}{e^{u}+e^{-u}}\,du$$

$$= \int_0^{sh^{-1}(x)} \frac{2e^{u}}{(e^{u})^2+1}\,du$$

$$= \left[2\arctan(e^{u})\right]_0^{sh^{-1}(x)}$$

$$= 2\arctan\left(\exp\left(sh^{-1}(x)\right)\right) - \frac{\pi}{2}$$

décomposition en éléments simples

Soit $F \in \mathbb{R}[X]$ d'écriture irréductible unitaire $\frac{P}{Q}$

Si $Q = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{p} \underbrace{(X^2 + \alpha_j X + \beta_j)}_{(X - z_i)(X - \overline{z_i})}^{n_j}$

avec $x_1, \dots, x_d$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, $\beta_1, \dots, \beta_p$ réels

$m_1, \dots, m_d, n_1, \dots, n_p$ dans $\mathbb{N}^*$

tq : $\forall j \in [\![1, p]\!]$ $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$

d = nombre de racines réelles distinctes de Q

$2p$ = nbres de racines complexes non réelles distinctes de Q

Alors : il existe un polynôme réel R et des réels C_{ij} avec $\begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq m_i \end{cases}$

A_{ij} et B_{ij} avec $\begin{cases} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i \end{cases}$

$$F = R + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{ij}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij} X + B_{ij}}{(X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^j}$$

Cette décomposition est unique.

Dem :

D'après la décomp dans $\mathbb{C}$,

Il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ et des complexes c_{ij} avec $\begin{cases} 1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq m_i \end{cases}$

et a_{ij}, b_{ij} avec $\begin{cases} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i \end{cases}$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\overline{a_{ij}}}{(X - \overline{z_i})^j} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{ij}}{(X - \overline{z_i})^j}$$

$\Rightarrow b_{ij} = \overline{a_{ij}}$

tq $F = \underbrace{R}_{\in \mathbb{R}[X]} + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\overbrace{c_{ij}}^{\in \mathbb{R}}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{a_{ij}}{(X - z_i)^j} + \frac{\overset{\overline{a_{ij}}}{b_{ij}}}{(X - \overline{z_i})^j} \right)$

où $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $\quad X^2 + \alpha_{ij} X + \beta_{ij} = (X - z_i)(X - \overline{z_i})$

Rq :

→ R est la partie entière de F dans $\mathbb{C}[X]$ $\qquad$ quotient pas reste $\quad R = P \,//\, Q$

→ $\displaystyle \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(X - x_i)^j}$

$\underbrace{\text{est la partie polaire de } F \text{ associé au pôle } x_i}_{\text{conjugué de la partie polaire de } \overline{F} = F \text{ associée à } \overline{x_i} = x_i}$

$$\text{Donc} \quad \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(X - x_i)^j} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\overline{c_{ij}}}{(X - x_i)^j}$$

Par unicité : $c_{ij} = \overline{c_{ij}} \in \mathbb{R}$

→ $\displaystyle \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(X - z_i)^j}$ est la partie polaire associée au pôle z_i

→ $\underbrace{\sum \frac{b_{ij}}{(X - \overline{z_i})^j} \quad F \ldots \quad \overline{z_i}}$

= conjugué de la partie polaire de $\overline{F}$ associée à $\overline{z_i}$

Traitons :

$$F_i = \sum_{j=1}^{n_i} \underbrace{\left(\frac{a_{ij}}{(X-z_i)^j} + \frac{\overline{a_{ij}}}{(X-\overline{z_i})^j} \right)}_{\in \mathbb{R}(X)} \in \mathbb{R}(X)$$

$$F_i \in \mathbb{R}_0(X)$$

et il existe $R_i \in \mathbb{R}[X]$ tq $F_i = \dfrac{R_i}{(X-z_i)^{n_i}(X-\overline{z_i})^{n_i}}$

$$= \frac{R_i}{(X^2+\alpha_{ij}X+\beta_{ij})^{m_i}}$$

$\deg R_i < 2n_i$

$$R_i \in \mathrm{Vect}\Big(1, X, X^2+\alpha_i X+\beta_i, X(X^2+\alpha_i X+\beta_i), (X^2+\alpha_i X+\beta_i)^2, X(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^2, \dots, X(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{n_i-1}\Big)$$

car $\left((X^2+\alpha_i X+\beta_i)^k, X(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^k\right)_{0\leq k\leq n_i-1}$

est une base de $\mathbb{R}_{2n_i-1}[X]$

Il existe des réels $\gamma_0, \dots, \gamma_{n_i-1}$, $\delta_0, \dots, \delta_{n_i-1}$ tq : $R_i = \sum_{k=0}^{n_i-1} (\gamma_k + \delta_k X)(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^k$

Donc $F_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{\gamma_k + \delta_k X}{(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{n_i-k}}$

où $a_{i1} = \delta_{n_i-1}$

$b_{i1} = \gamma_{n_i-1}$

$a_{i2} = \delta_{n_1-2}$

$b_{i2} = \gamma_{n_i-2}$

$\vdots$

$a_{i,n_i} = \delta_0$

$b_{i,n_i} = \gamma_0$

V - En pratique

Ex: $F = \dfrac{X^4}{X^3 - 1}$ à décomposer dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$$\frac{X^4}{X^3-1} = \underbrace{P}_{\in \mathbb{R}[X]} + \frac{a}{X-1} + \frac{b^{\in \mathbb{C}}}{X-j} + \frac{c^{\in \mathbb{C}}}{X-\bar{j}}$$

de degré 1 car les autres réels

"j^2"

$$X^4 = X(X^3-1) + X$$

$$P = X$$

Pas trop suivis mais idée : DL | équivalent ou identifier

$$F(t) = \frac{t^4}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$\underset{t \to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1) \times 3}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$F(t) = \frac{t^4}{(t-j)(t-1)(t-\bar{j})}$$

$$\underset{t \to j}{\sim} \frac{j}{(t-j)(j-1)(j-\bar{j})}$$

$$b = \frac{j}{(j-1)(j-j^2)} = \frac{j}{j^2-j^3-j+j^2} = \frac{1}{2j^2-j-1} = \frac{j}{3j^2} = \frac{1}{3j} = \frac{\bar{j}}{3}$$

j pôle simple :

$$F = \frac{P}{(X-j)\,Q_1}$$

$$F(t) \underset{t \to j}{\sim} \frac{P(j)}{(t-j)\,Q_1(j)}$$

$$Q = (X-j)Q_1$$
$$Q' = (X-j)Q_1' + Q_1$$
$$Q'(j) = Q_1(j)$$

$$a = \frac{P(j)}{Q(j)}$$
$$a = \frac{P(j)}{Q'(j)}$$

Ex:

$$F = \frac{X}{X^4-1} \qquad \deg = -3 < 0$$

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d = \bar{c}}{X+i}$$

$$a = \frac{1}{4} \qquad b = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \qquad c = \frac{i}{4i^3} = -\frac{1}{4} \qquad d = \frac{-1}{4}$$

Autre :

F est impair

$$-F(-X) = F(X)$$

$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\bar{c}}{X+i}$$

$$= \frac{-a}{-X-1} + \frac{-b}{-X+1} + \frac{-c}{-X-i} + \frac{-\bar{c}}{-X+i}$$

Par unicité de la décomp en éléments simple $a = b$ et $c = \bar{c}$

Si a est un pôle simple de $F = \underbrace{\frac{P}{Q}}_{\text{écriture irréductible}} = \frac{P}{(X-a)Q_1}$

Alors : la partie entière de F associé à a est $\frac{c}{X-a}$

où $c = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$

Dem:

$$F = \underbrace{G} + \frac{c}{X-a}$$

G n'a pas
a comme pôle

$$F(t)(t-a) = G(t)(t-a) + c$$

$$\frac{P(t)}{Q_1(t)} \xrightarrow[t \to a]{} c$$

$$\xrightarrow[t \to a]{} \frac{P(a)}{Q_1(a)} \qquad c = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

De plus : $Q = (X-a)\,Q_1$

$$Q' = (X-a)\,Q_1' + Q_1$$

$$Q'(a) = Q_1(a)$$

Donc $c = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$