Espaces euclidiens I

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Produit scalaire et généralités

1.1 Faits de base

1.1.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(1) φ est bilinéaire ;

(2) φ est symétrique : $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;

(3) φ est positive ; $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$;

(4) φ est définie : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarques

- Si φ est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note pour $x, y \in E$ $x.y$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $(x \mid y)$ au lieu de $\varphi(x, y)$, qui se lit « x scalaire y ».
- Soit φ une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on sait que $\forall x \in E, \varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$ par bilinéarité. Ainsi, φ vérifie (3) et (4) si et seulement si $\forall x \in E\setminus\{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$. C'est le caractère défini positif de φ. En effet :

  $\Rightarrow$ D'après (4), $\varphi(x, x) \neq 0$ et d'après (3), $\varphi(x, x) \geqslant 0$ d'où $\varphi(x, x) > 0$.

  $\Leftarrow$ Comme $\varphi(0, 0) = 0$ et que $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$, alors $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x \notin E\setminus\{0\} \Leftrightarrow x = 0$.

Exemples

(1) Pour $E = \mathbb{R}^n$, $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ on pose

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

$(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique. On remarque de plus que si $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$.

(2) Pour $E = \mathbb{R}^2$, $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $y = (\beta_1, \beta_2)$, on pose

$$\varphi(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$$

- φ est bilinéaire et symétrique.
- Pour $x = (\alpha_1, \alpha_2) \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, x) &= \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2^2 + 3\alpha_2^2 \\ &= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\alpha_2^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \end{aligned}$$

  et de plus, $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $\alpha_2^2 = 0$ si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. φ est définie positive.

(3) Pour $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $f, g \in E$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$$

- $(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle$ est bilinéaire et symétrique d'après les propriétés de l'intégrale et du produit de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $f \in E, \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_a^b f^2$ or f^2 est continue et positive donc $\displaystyle\int_a^b f^2 \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$; f est définie positive.

(4) Pour $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in E$, on pose

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}AB\right)$$

- $(A,B) \longmapsto \langle A,B\rangle$ est bilinéaire.
- Montrons que cette application est symétrique : soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} \langle B,A\rangle & = & \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}BA\right) \\ & = & \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}BA\right)\right) \text{ car la trace est invariante par transposition} \\ & = & \mathrm{Tr}\left(B^{\mathrm{T}}A\right) \\ & = & \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}AB\right) \text{ car la trace commute} \\ & = & \langle A,B\rangle \end{array}$$

- Montrons maintenant la définition et positivité : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{T}}AA\right) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left({}^{\mathrm{T}}AA\right)[i,j] \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{\mathrm{T}}A[i,j]\,A[j,i] \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(A[j,i]\right)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} \langle A,A\rangle = 0 & \Leftrightarrow & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, A[i,j]^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, A[i,j] = 0 \\ & \Leftrightarrow & A = 0 \end{array}$$

(5) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui s'identifie à $\mathbb{R}^2$. Son produit scalaire standard est défini pour $z, z' \in \mathbb{C}$ pour

$$\left\langle z,z'\right\rangle = \Re\mathrm{e}(z)\,\Re\mathrm{e}\left(z'\right) + \Im\mathrm{m}(z)\,\Im\mathrm{m}\left(z'\right) = \Re\mathrm{e}\left(\overline{z}z'\right)$$

1.1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ [a], $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y si $\langle x,y\rangle = 0$. Le produit scalaire étant symétrique, on dit plutôt que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$. Une famille de vecteurs de $E\setminus\{0\}$ est dite orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

a. C'est donc bien évidemment un espace pré-hilbertien !

Proposition Toute famille orthogonale de vecteurs de E est libre.

Il suffit de le prouver pour une famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de $E\setminus\{0\}$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$.Alors, pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle 0, x_j\rangle \\ & = & \left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, x_j \right\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{\delta_{i,j}\langle x_j,x_j\rangle} \\ & = & \alpha_j \langle x_j, x_j\rangle \end{array}$$

$x_j \neq 0$ donc $\langle x_j, x_j\rangle \neq 0$ donc $\alpha_j = 0$.

Orthogonal d'une partie

> Soit $A \subset E$, l'othogonal de A noté $A^\perp$ est l'ensemble $\{x \in E | \forall a \in A, x \perp a\}$.

Remarques

- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$. Plus spécifiquement, $\text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^\perp$. En effet :
  - $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donc $\text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^\perp$.
  - Si $y \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^\perp$, soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y \rangle \\ &= 0 \text{ car } y \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^\perp \end{aligned}$$

  En particulier, $\text{Vect}\,(x)^\perp = \{x\}^\perp$.
- $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel. En effet :
  - $\forall a \in A$, $\langle a, 0 \rangle = 0$ donc $0 \in A^\perp$.
  - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in A^\perp$, $a \in A$,

$$\begin{aligned} \langle a, \alpha x + y \rangle &= \alpha \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

    $\alpha x + y \in A^\perp$ d'où le résultat.
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$. Pour $x \in E$, $x = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E$, $\langle x, y \rangle = 0$.
- Quel est le rapport entre A et $A^{\perp\perp}$? Montrons que $A \subset A^{\perp\perp}$. En effet, si $a \in A$ alors $\forall x \in A^\perp$, $\langle a, x \rangle = 0$ donc $a \in A^{\perp\perp}$.

  Mais même si F est un sous-espace vectoriel de E, on peut avoir $F \subsetneq F^{\perp\perp}$. Prenons un exemple : soit $E = \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$, F l'ensemble des fonctions polynômiales et pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$. F est un sous-espace vectoriel de E or $F^\perp = \{0\}$.

  En effet, soit $f \in F^\perp$, alors pour tout fonction polynômiale P, $\int_0^1 fP = 0$. On définit les polynômes de Bernstein par

$$B_n(f) : r \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ et on a } \lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - B_n(f)| = 0$$

  Ainsi, $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^2 - \int_0^1 f B_n(f) = \int_0^1 f(f - B_n(f))$. Or

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t)\left(f(t) - B_n(f(t))\right) \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_0^1 |f(t)| \, |f(t) - B_n(f(t))| \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant M_n \int_0^1 |f| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

  La suite $\left(\int_0^1 f(f - B_n(f))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, or cette suite est constante égale à $\int_0^1 f^2$ donc $\int_0^1 f^2 = 0$ or f est continue positive donc $f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

  On a donc $F^{\perp\perp} = \left(F^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = E$ et $F \neq E$ car, par exemple, $\cos_{|[0,1]}$ n'est pas polynômiale.

1.2 Norme euclidienne

1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour $x, y \in E$,
$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$
Il y a égalité si et seulement si (x, y) est liée.

Démonstration
- Si $x = 0$, on trouve $0 = 0$, ce qui est vrai.
- Supposons $x \neq 0$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\langle tx + y, tx + y\rangle \geqslant 0$ or
$$\langle tx + y, tx + y\rangle = t^2 \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = P(t)$$
où P est polynômiale de degré 2, toujours positive dans $\mathbb{R}$. Alors P ne peut pas avoir 2 racines réelles distinctes donc $\Delta(P) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4\left(\langle x, x\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\right) \leqslant 0$ d'où le résultat.

Étudions maintenant les cas d'égalité.
- S'il y a égalité, alors $\Delta(P) = 0$ donc P admet une racine double t_0 donc
$$\begin{aligned} 0 = P(t_0) = \langle t_0 x + y, t_0 x + y\rangle &\Leftrightarrow t_0 x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y \text{ est proportionnel à } x \end{aligned}$$
- Réciproquement, si y est proportionnel à x, $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, \alpha x\rangle^2 = \alpha^2 \langle x, x\rangle^2$ mais aussi $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha^2 \langle x, x\rangle^2$; l'égalité est vérifiée.

Remarques
- Pour $E = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ le produit scalaire canonique, alors pour $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)$$
- Pour $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$,
$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$
- Pour $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{T}}AB)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\left(\mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{T}}AB)\right)^2 \leqslant \mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{T}}AA)\,\mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{T}}BB)$$

1.2.2 Norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ possédant les propriétés de :
(1) séparation : $\forall x \in E$, $N(x) = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$;
(2) homogénéité : $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$;
(3) inégalité triangulaire : $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Si N est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on a aussi [a] $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \geqslant |N(x) - N(y)|$.

a. « *Left to the reader !* »

Exemple Pour $E = \mathbb{R}^n$, $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $p \geqslant 2$ on définit les applications suivantes :
- $N_\infty(x) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$;
- $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$;
- $N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

D'après les inégalités de Minkowski[a], N_p est une norme au même titre que N_1 et N_∞.

Théorème et définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Pour $x \in E$ on pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$\|\cdot\|$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle x, x \rangle$.

Montrons de $\|\cdot\|$ est une norme.

(1) Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(2) Pour $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= |\alpha| \, \|x\| \end{aligned}$$

(3) Pour $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 - \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 - \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 - \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= 2\left(\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} - \langle x, y \rangle \right) \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \Rightarrow \langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

D'où $(\|x\| + \|y\|)^2 - \|x + y\|^2 \geqslant 0$, ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

Cas d'égalité $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ Caractérisons maintenant les cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.
- Supposons que $\|x\| + \|y\| - \|x + y\| = 0$ avec $x \neq 0$. On a alors $\langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ d'où, d'après la caractérisation des cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$. Donc $\langle x, y \rangle = \alpha \langle x, x \rangle$ mais aussi $\langle x, y \rangle = |\alpha| \langle x, x \rangle$ d'après la définition de la norme. Ainsi, $|\alpha| = \alpha$ donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
- Réciproquement, si $x = 0$, il y a bien égalité. D'autre part, si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x$, alors $x + y = (1 + \alpha)\, x$ d'où $\|x + y\| = |1 + \alpha|\, \|x\| = (1 + \alpha)\, \|x\|$ car $1 + \alpha > 0$, et de plus $\|x\| + \|y\| = \|x\| + \alpha \|x\| = (1 + \alpha)\|x\|$ d'où le résultat.

a. Voir section 15.3.4 du cours complet page 239.

Finalement, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0_E$ ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x$.
Mieux, de manière plus symétrique, on a [a] :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists u \in E \backslash \{0\}, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ / \begin{cases} x = \alpha u \\ y = \beta u \end{cases}$$

a. « *Left to the reader !* »

On peut réécrire Cauchy-Schwartz avec la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\forall x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$$

1.2.3 Angle géométrique

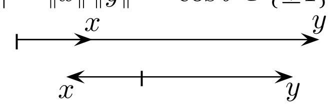
Soient $x, y \in E \backslash \{0\}$, alors $\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$. Par définition, l'angle géométrique de x et y est

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right)$$

On a donc $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ d'où [a] $\langle x, t \rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta$.

a. Ce fut ce moment que choisit M. Sellès pour marquer sa satisfaction de faire de la géométrie sans dessins ni figures, en agrémentant son cours d'un « *niark niark* » jubilatoire.

On a bien $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ et (x, y) liée$\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \cos\theta \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow \theta \in \{0, \pi\}$.
De plus, $\theta = 0 \Leftrightarrow x$ et y sont positivement liés :
De même, $\theta = \pi \Leftrightarrow x$ et y sont négativement liés :



Remarque Pour $x, y \in E \backslash \{0\}$, l'angle géométrique de x et y est égal à celui de $x' = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $y' = \dfrac{y}{\|y\|}$.

On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{\langle x', y' \rangle}{\|x'\| \|y'\|} &= \langle x', y' \rangle \\ &= \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \end{aligned}$$

$u \in E \backslash \{0\}$ est unitaire si $\|u\| = 1$.
Si u et v sont unitaires, alors l'angle géométrique entre les deux est $\beta = \arccos(\langle u, v \rangle)$.

1.2.4 Quelques relations utiles

Règles de calcul Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$. On a alors, par bilinéarité :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \langle x_i, y_j \rangle$$

En particulier, en prenant le même vecteur :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{r}\alpha_j x_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]}\alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \langle x_i, x_i\rangle + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,r]\!]\\ i\neq j}}\alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \quad \text{car } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est symétrique et le produit est commutatif}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\forall (x_1, x_2, \dots, x_r) \in E$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle$$

En particulier, en prenant $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} \langle x_i, x_j\rangle$$

De plus, si les x_i sont orthogonaux deux à deux :

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|x_i\|^2$$

Famille orthonormées

La famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthonormée si $\forall (i, j) \in I$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.
En d'autres termes, les x_i sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Une famille orthonormée est toujours libre. Pour $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ orthonormée, on a toujours

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \text{ et } \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = r$$

Identités remarquable Prenons $r = 2$, pour $x, y \in E$ on a

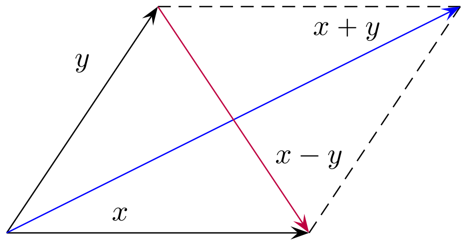
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad (1)$$

mais aussi, en changeant y en $-y$,

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \quad (2)$$

On remarque d'après (1) que $x\perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. De plus, (1) + (2) donne l'identité du parallélogramme :

$$\boxed{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}$$



La somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales. De plus, (1) − (2) donne l'identité de polarisation :

$$\boxed{4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}$$

Normes non euclidiennes

Une norme N sur E est euclidienne s'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E tel que $N(x)=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Si N est une norme euclidienne, alors on doit avoir l'identité du parallélogramme :$\forall x,y\in E$,

$$N(x+y)^2+N(x-y)^2=2\left(N(x)^2+N(y)^2\right)$$

Prenons $E=\mathbb{R}^2$, $x=(\alpha,\beta)$, on pose alors $N_\infty=\max(|\alpha|,|\beta|)$ et $N_1=|\alpha|+|\beta|$. Montrons que N_1 et N_∞ ne sont pas des normes euclidiennes.

- Pour N_∞, soient $x=(1,1)$, $y=(1,0)$, alors $x+y=(2,1)$ et $x-y=(0,1)$ d'où

$$N_\infty(x+y)^2+N_\infty(x-y)^2=5 \text{ mais } 2\left(N_\infty(x)^2+N_\infty(y)^2\right)=4$$

- Pour N_1, soient $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$, alors $x+y=(1,1)$ et $x-y=(1,-1)$ d'où

$$N_1(x+y)^2+N_1(x-y)^2=8 \text{ mais } 2\left(N_1(x)^2+N_1(y)^2\right)=4$$

Illustration Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$, u,v, w des vecteurs unitaires de E. On appelle θ, φ et ψ les angles géométriques entre respectivement u et v, v et w, w et u. Alors les trois angles ne peuvenet être tous à la fois strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

En effet, supposons $\theta,\varphi,\psi\in\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ et considérons

$$\begin{aligned}\|u+v+w\|^2&=\|u\|^2+\|v\|^2+\|w\|^2+2(\langle u,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,u\rangle)\\&=3+2(\cos\theta+\cos\varphi+\cos\psi)\\&<3-2\times3\times\frac{1}{2}\\&<0\end{aligned}$$

Ce qui est impossible, bien évidemment.

2 Théorèmes fondamentaux

2.1 Premier théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Alors

$$E = \text{Vect}\,(x) \oplus \{x\}^{\perp}$$

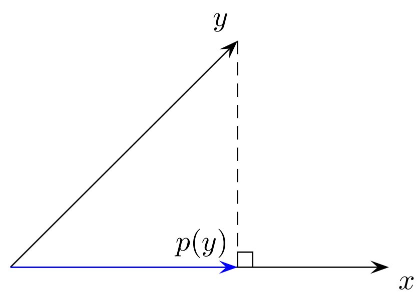
On remarque que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ car si $x \in F \cap F^{\perp}$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Démonstration $\mathbb{R}x \cap (\mathbb{R}x)^{\perp} = \{0\}$ donc la somme est directe. Montrons que $E = \mathbb{R}x + \{x\}^{\perp}$, soit $u \in E$ on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b \in \{x\}^{\perp}$ tels que $u = \alpha x + b$.

- Si α et b existent, alors $\langle u, x \rangle = \langle \alpha x + b, x \rangle = \alpha \left\| x \right\|^2 + \langle b, x \rangle = \alpha \left\| x \right\|^2$. D'où $\alpha = \dfrac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2}$ et nécessairement $b = u - \dfrac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2} x$.
- Écrivons donc
$$u = \underbrace{\frac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2} x}_{a} + \underbrace{u - \frac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2} x}_{b}$$
Il est clair que $a \in \mathbb{R}x$, vérifions que $b \perp x$.
$$\begin{aligned}\langle b, x \rangle &= \left\langle u - \frac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2} x, x \right\rangle \\ &= \langle u, x \rangle - \underbrace{\frac{\langle u, x \rangle}{\left\| x \right\|^2}}_{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Remarque Soit p le projecteur sur $\text{Vect}\,(x)$ parallèlement à $\{x\}^{\perp}$. p s'appelle le projeteur orthogonal sur $\text{Vect}\,(x)$. Alors, d'après ce qui précède, $\forall y \in E$,

$$p\,(y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\left\| x^2 \right\|} x \text{ d'où } p\,(y) = \langle x, y \rangle x \text{ si } x \text{ est unitaire}$$



2.2 Deuxième théorème

2.2.1 Résultat principal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors E admet des bases orthonormées.

Démonstration Soit H_n : « Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors E admet des bases orthonormées ».

- H_1 est vraie : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, $\exists e \in E\setminus\{0\}$ tel que $E = \operatorname{Vect}(e)$. Alors $\dfrac{e}{\|e\|}$ est unitaire et $\left(\dfrac{e}{\|e\|}\right)$ forme une base orthonormée de E.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $a \in E$ unitaire [a], alors , d'après le premier théorème, $E = \operatorname{Vect}(a) \oplus \{a\}^\perp$ et on pose $F = \{a\}^\perp$. La somme est directe donc $\dim F = \dim E - 1 = n$ donc d'après H_n, F admet une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Par recollement, $(e_1, e_2, \dots, e_n, a)$ est une base orthonormée de E.

2.2.2 Processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

C'est une méthode qui permet, à partir d'une famille libre, d'obtenir une famille orthonormée.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $r \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors il existe une famille orthonormée $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ telle que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ et $\langle x_k, y_k\rangle > 0$.

Démonstration On procède par récurrence sur r.

- Pour $r = 1$, soit $x \in E\setminus\{0\}$, on prend $\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ comme base orthonormée.
- Pour $r = 2$, soit (x_1, x_2) libre dans E. On prend $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. Cherchons $t \in \mathbb{R}$ et $y \in E$ tels que $y = x_2 + ty_1$ et $\langle y, y_1\rangle = 0$. On ne peut avoir $y_2 = 0$ car sinon x_2 serait proportionnel à y_1 et donc à x_1. Or

$$\begin{aligned}\langle y, y_1\rangle &= \langle x_2 + ty_1, y_1\rangle \\ &= \langle x_2, y_1\rangle + t\underbrace{\|y_1\|^2}_{1}\end{aligned}$$

  On prend donc $t = -\langle x_2, y_1\rangle$ et on a $\operatorname{Vect}(y_1, y) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2)$ car $y_2 \in \operatorname{Vect}(x_1, x_2)$. En posant $y_2 = \dfrac{y}{\|y\|}$, on a finalement (y_1, y_2) une base orthonormée de E. En effet,

$$\begin{aligned}\langle x_2, y\rangle &= \langle x_2, x_2 + ty_1\rangle \\ &= \|x_2\|^2 + t\langle y_1, x_2\rangle \\ &= \|x_2\|^2 - \langle y_1, x_2\rangle^2\end{aligned}$$

  D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $\langle y_1, x_2\rangle^2 \leqslant \|x_2\|^2\|y_1\|^2$ et $\|y_1\|^2 \neq 0$ car $y_1 \neq 0$ donc $\langle y_1, x_2\rangle < \|x_2\|^2$ donc $\langle x_2, y\rangle > 0$ d'où le résultat.
- Supposons le résultat vrai pour $r \geqslant 2$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ une famille libre de vecteurs de E. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ orthonormée telle que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ et $\langle x_k, y_k\rangle > 0$. Soient maintenant $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = x_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} t_i y_i \in \operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_r) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

  $y \neq 0$ et $\operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_r, y) = \operatorname{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_r, x_{r+1}) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ donc $\forall j \in [\![1, r]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle y, y_j\rangle &= \langle x_{r+1}, y_j\rangle + \sum_{i=1}^{r} t_i\langle y_i, y_j\rangle \\ &= \langle x_{r+1}, y_j\rangle + t_j\end{aligned}$$

[a] Il suffit pour cela de prendre $x \in E\setminus\{0\}$ et $a = \dfrac{x}{\|x\|}$.

On prend donc $t_j = -\langle x_{r+1}, y_j\rangle$ de sorte que $y \in \text{Vect}\,(y_1, y_2, \ldots, y_r)^{\perp}$. On pose alors $y_{r+1} = \dfrac{y}{\|y\|}$ et enfin $(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ est une famille orthonormée. On sait que $\forall k \in [\![1, r+1]\!]$, $\text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \text{Vect}\,(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, reste à voir $\langle x_{r+1}, y_{r+1}\rangle > 0$:

$$\begin{aligned}
\langle y_{r+1}, x_{r+1}\rangle &= \left\langle y_{r+1}, y - \sum_{i=1}^{r} t_i y_i \right\rangle \\
&= \left\langle y_{r+1}, \|y\|\, y_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} t_i y_i \right\rangle \\
&= \|y\| \underbrace{\|y_{r+1}\|^2}_{1} - \sum_{i=1}^{r} t_i \underbrace{\langle y_i, y_{r+1}\rangle}_{0} \\
&= \|y\| > 0
\end{aligned}$$

Illustration Prenons $E = \mathcal{C}\,([0,1]\,, \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$. Soient pour $i \in [\![0, 2]\!]$, $e_i : t \longrightarrow t^i$. On souhaite orthogonaliser (e_0, e_1, e_2) qui est une famille libre de E.

(1) $\|e_0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 e_0\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1$ donc $\|e_0\| = 1$, on prend $\varepsilon_0 = e_0$.

(2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi = e_1 + \alpha\varepsilon_0$, on a donc $\varphi : t \longrightarrow t + \alpha$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \varepsilon_0\rangle &= \langle e_1, \varepsilon_0\rangle + \alpha \underbrace{\|\varepsilon_0\|^2}_{1} \\
&= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \alpha \\
&= \frac{1}{2} + \alpha
\end{aligned}$$

On prend donc $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon_1 = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$. Reste à calculer $\|\varphi\|$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\varphi\| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ donc on prend $\varepsilon_1\,(t) = 2\sqrt{3}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$.

(3) Soient $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\varphi = e_2 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_0\varepsilon_0$. On a donc

$$\begin{cases} \langle \varphi, \varepsilon_0\rangle = \langle e_2, \varepsilon_0\rangle + \alpha_0 \\ \langle \varphi, \varepsilon_1\rangle = \langle e_2, \varepsilon_1\rangle + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -\langle \varepsilon_0, e_2\rangle \\ \alpha_1 = -\langle \varepsilon_1, e_2\rangle \end{cases}$$

Calculons α_0 et α_1 :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= -\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3} \\
\alpha_1 &= -\int_0^1 t^2 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\sqrt{3}\int_0^1 \left(t^3-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\sqrt{3}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{1}{6}t^3\right] \\
&= -2\sqrt{3}\times\frac{1}{12} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

On a donc pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= t^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3} \\
&= t^2 - t + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

On prend maintenant $\varepsilon_2 = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$, mais il reste à calculer $\|\varphi\|$ en passant par $\|\varphi\|^2$. Deux solutions se présentent : la première est d'intégrer brutalement, solution que je laisserai aux futurs PSI le soin de rédiger. Mais le génial M. Sellès nous propose une méthode alternative :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2 &= \|e_2\|^2 + \|\alpha\varepsilon_1+\alpha_0\varepsilon_0\|^2 + 2\langle e_2, \alpha_1\varepsilon_1+\alpha_0\varepsilon_0\rangle \\
&= \|e_2\|^2 + \underbrace{\alpha_1^2+\alpha_0^2}_{\text{car } (\varepsilon_0,\varepsilon_1) \text{ est orthogonale}} + 2\alpha_1\underbrace{\langle e_2,\varepsilon_1\rangle}_{-\alpha_1} + 2\alpha_0\underbrace{\langle e_2,\varepsilon_0\rangle}_{-\alpha_0} \\
&= \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t - \frac{3}{36}-\frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

D'où enfin $\varepsilon_2(t) = 6\sqrt{5}\left(t^2-t+\dfrac{1}{6}\right)$.

Méthode alternative générale pour calculer $\|y_{r+1}\|^2$ Si $y_{r+1} = x_{r+1} + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i$ avec $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\alpha_i = -\langle x_{r+1}, y_i\rangle$, alors

$$\begin{aligned}
\|y_{r+1}\|^2 &= \|x_{r+1}\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i\right\|^2 + 2\left\langle \sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i, x_{r+1}\right\rangle \\
&= \|x_{r+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 + 2\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\underbrace{\langle y_i, x_{r+1}\rangle}_{-\alpha_i} \\
&= \|x_{r+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2
\end{aligned}$$

En effet, à ce stade les α_i ont déjà été calculés.

2.3 Troisième théorème

2.3.1 Résultat principal

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Démonstration On sait déjà que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

D'après le deuxième théorème fondamental, on peut considérer une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de F où $p = \dim F$. Soit $x \in E$, on cherche $y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \in F$ et $z \in F^{\perp}$tels que $x = y + z$.

– Si y et z existent, alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
\langle x, e_j\rangle &= \langle y + z, e_j\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i, e_j \right\rangle + \underbrace{\langle z, e_j\rangle}_{0} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \alpha_j
\end{aligned}$$

D'où $\alpha_j = \langle x, e_j\rangle$ puis nécessairement $z = x - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$.

– Écrivons donc

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i}_{y} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i}_{z}$$

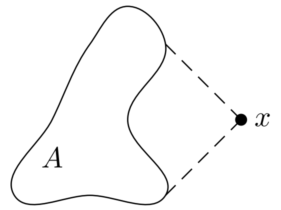
$y \in F$ car $y \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, vérifions que $z \in F^{\perp} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}^{\perp}$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
\langle z, e_j\rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j \right\rangle \\
&= \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{i,j}} \\
&= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remarque Avec les notations du troisième théorème, on peut considérer p_F le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$; c'est le projecteur orthogonal sur F. Si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors pour $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$.

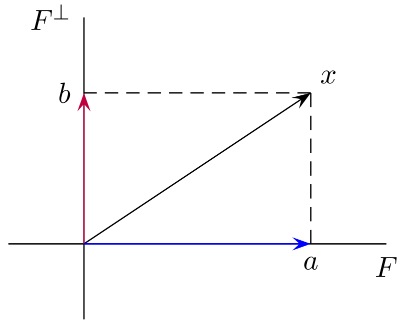
2.3.2 Distance à une partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $A \subset E$. On pose $\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\|x-a\| \,|a \in A\}$.



Supposons maintenant que A est un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = F \oplus F^{\perp}$. C'est en particulier le cas si E est de dimension finie.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$, $x \in E$, x s'écrit $x = a + b$ avec $a \in F$, $b \in F^{\perp}$.



Ainsi, pour $y \in F$,

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|a-y+b\|^2 \\ &= \|a-y\|^2 + \|b\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x-y\| \geqslant \|b\|$ avec égalité si et seulement si $\|a-y\|^2 = 0 \Leftrightarrow y = a$. On alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, F) &= \|b\| \\ &= \|x-a\| \\ &= \|x-p(x)\| \end{aligned}$$

De plus $\forall y \in F \backslash \{p(x)\}$, $\|x-y\| > \mathrm{d}(x, F)$.

D'autre part, si $z \in F^{\perp}$, alors $x - z = a + b - z$ d'où

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|a+b-z\|^2 \\ &= \|a\|^2 + \|b-z\|^2 \end{aligned}$$

D'où $\|x-z\| \geqslant \|a\|$ avec égalité si $z = b$. De plus, $\mathrm{d}\left(x, F^{\perp}\right) = \|a\| = \|p(x)\|$.

3 Espaces euclidiens

Un espace euclidien est un couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E [a].

[a] On dit souvent « soit E un espace euclidien » en sous-entendant le produit.

Dans la suite, E est un espace euclidien dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

3.1 Bases orthonormées et distance à un hyperplan

De l'utilité des bases orthonormées E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, donc E admet une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in E$, on a $\forall j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Si on note $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$, alors on a $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e_j^* = \langle e_j, \cdot \rangle$. On en déduit une expression simple du produit scalaire. En effet, pour $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in E$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée} \end{aligned}$$

En particulier, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$. On remarque que $\langle x, y \rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) . (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ où . est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

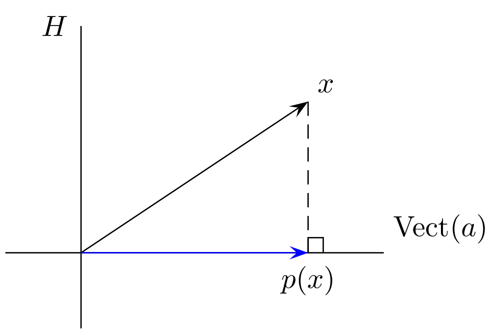
Théorème de la base orthonormée incomplète Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de vecteurs de E, alors $\exists e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

En effet, soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, $\dim F^\perp = n - p$, on peut donc considérer $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. Par recollement, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Expression de la distance à un hyperplan Soit H un hyperplan de E, H admet une équation cartésienne relativement à $\mathcal{B}$: $\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que H est l'ensemble d'équation cartésienne $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$. Notons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ et soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. Alors

$$\langle x, a \rangle = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \text{ car } \mathcal{B} \text{ est orthonormée}$$

Ainsi, $H = \{x \in E | \langle a, x \rangle = 0\} = \{a\}^\perp$. On sait que le projecteur sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à $\{a\}^\perp$ vérifie pour $x \in E$, $p(x) = \dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$ et que $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus \{a\}^\perp$.



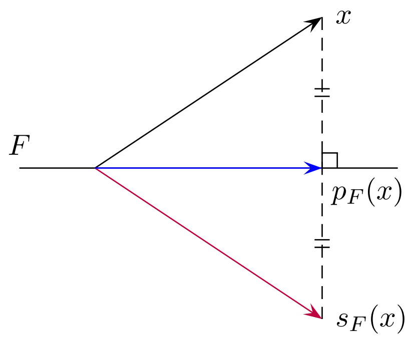
On a vu de plus que $\mathrm{d}(x,H) = \|p(x)\| = \dfrac{|\langle x,a\rangle|}{\|a\|}$ d'où

$$\mathrm{d}(x,H) = \frac{\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3.2 Projecteurs et symétries orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors $F^\perp$ est un supplémentaire de E car F est de dimension finie : $E = F \oplus F^\perp$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
- On appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport F parallèlement à $F^\perp$.



Remarque Soit $x \in E$, $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ et on a même $y = p_F(x)$. Donc, puisque $\langle z,y\rangle = 0$, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ d'où $\|y\| \leqslant \|x\| \Leftrightarrow \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$. On a de plus $\|p_F(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow p_F(x) = x \Leftrightarrow x \in F$.

D'autre part, $s_F(x) = y - z$ d'où $\|s_F(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ donc $\|s_F(x)\| = \|x\|$.

Rappel
- Si a est un vecteur non nul de E et p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a)$, alors [a] pour $x \in E$,

$$p(x) = \frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2} a$$

- Si q est le projecteur orthogonal sur $\{a\}^\perp$, alors $q = \mathrm{Id}_E - p$ d'où

$$q(x) = x - \frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2} a$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F, alors pour $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et on en déduit $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.
  En effet, $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ et $\dim\left(F^\perp\right)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$.

a. Voir page 10.

Illustration Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace euclidien E, montrons que

$$\begin{array}{ll}(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} & (1) \\ (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} & (2)\end{array}$$

(1) – Si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, alors $\forall y \in F$, $\forall z \in G$, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0+0$ donc $\forall u \in F+G$, $\langle x, u\rangle = 0$ donc $x \in (F+G)^{\perp}$.
– $F \subset F+G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$. De même, $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
On remarque que (1) est valable en dimension quelconque.

(2) $F+G = (F+G)^{\perp\perp} = \left(F^{\perp} \cap G^{\perp}\right)^{\perp}$ d'après (1) d'où, puisque ceci est valable pour tous les sous-espaces vectoriels,

$$\begin{aligned} F^{\perp} + G^{\perp} &= \left(F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}\right)^{\perp} \\ &= (F \cap G)^{\perp} \end{aligned}$$

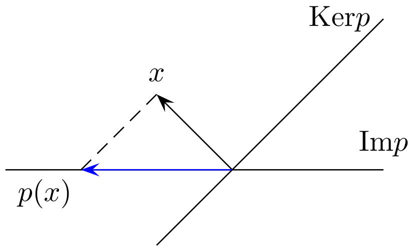
Soit p un projecteur de E, on sait que p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. On dit que p est un projecteur orthogonal si

$$(\operatorname{Im} p)^{\perp} = \operatorname{Ker} p$$

De même, si s est une symétrie de E, on dit que s est une symétrie orthogonale si $(\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E))^{\perp} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.

Remarque Il suffit pour ceci d'avoir $\forall x \in \operatorname{Ker} p$, $\forall y \in \operatorname{Im} p$, $\langle x, y\rangle = 0$. Si cette condition est validée, alors $\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^{\perp}$ mais $\dim \operatorname{Ker} p = \dim E - \dim \operatorname{Im} p = \dim (\operatorname{Im} p)^{\perp}$.

Illustration Soit p un projecteur de E, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.



$\Rightarrow$ Si on pose $F = \operatorname{Im} p$, p est le projecteur orthogonal sur F donc si $x \in E$, $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ donc $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|y\|^2 = \|p(x)\|^2$ d'où $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

$\Leftarrow$ On a $\forall x \in E$, $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, montrons que $\forall z \in \operatorname{Ker} p$, $\forall y \in \operatorname{Im} p$, $\langle y, z\rangle = 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|p(z+ty)\|^2 \leqslant \|z+ty\|^2 &\Leftrightarrow \|p(z) + tp(y)\|^2 \leqslant \|z+ty\|^2 \\ &\Leftrightarrow t^2 \|p(y)\| \leqslant \|z\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t\langle y, z\rangle \text{ car } p(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \|z\|^2 + 2t\langle z, y\rangle \text{ car } p(y) = y \end{aligned}$$

Cette dernière condition portant sur une fonction affine en t, on en déduit que le coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $\langle y, z\rangle = 0$.

On montrerait [a] de même que s est un symétrie orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

a. *« Left to the reader ! »*

3.3 Formes linéaires sur E

Pour $a \in E$, $\langle a, \cdot \rangle$ est un forme linéaire sur E donc $\psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ a \mapsto \langle a, \cdot \rangle \end{array}$ est bien définie. Montrons que ψ est linéaire : soient $a, b \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha a + b)(x) &= \langle \alpha a + b, x \rangle \\ &= \alpha \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle \\ &= \alpha \psi(a) + \psi(b) \end{aligned}$$

Montrons de plus que ψ est injective. Soit $a \in \operatorname{Ker} \psi$, $\langle a, \cdot \rangle = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\forall x \in E$, $\langle x, a \rangle = 0$ donc $\operatorname{Ker} \psi = E^\perp = \{0\}$. $\dim E = \dim E^*$ donc ψ est un isomorphisme [a].

Ainsi, si ψ est une forme linéaire sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot \rangle$.

Remarque Si H est un hyperplan de E, $\exists \varphi \in E^* \backslash \{0\}$ tel que $H = \operatorname{Ker} \varphi$ donc φ s'écrit $\langle a, \cdot \rangle$ avec $a \neq 0$. Ainsi, $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \langle a, \cdot \rangle = \{a\}^\perp$.

Réciproquement, si $a \in E \backslash \{0\}$, $\dim \{a\}^\perp = \dim E - 1$ donc $\{a\}^\perp$ est un hyperplan. Tout hyperplan de H est donc du type $\{a\}^\perp$ avec $a \neq 0$ et pour $a, b \in E \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned} \{a\}^\perp = \{b\}^\perp &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^* / \langle b, \cdot \rangle = \alpha \langle a, \cdot \rangle \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^* / \langle b - \alpha a, \cdot \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^* / b = \alpha a \end{aligned}$$

3.4 Adjoint d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un unique $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

g s'appelle l'adjoint de f et se note f^*.

Démonstration

- Si $g, h \in \mathcal{L}(E)$ conviennent, alors $\forall x, y \in E$ $\langle x, g(y) \rangle = \langle x, h(x) \rangle$ d'où $\langle x, g(y) - h(y) \rangle = 0$ donc $g(y) - h(y) = 0$ donc $g = h$.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} M[i,j] e_i$ et, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée,$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $M[i,j] = \langle f(e_j), e_i \rangle$.

a. Ce fut à ce moment là que l'imprudent ML, acolyte de JGC et BBB que nous avons eu l'honneur de présenter précédemment, lança innocemment : *« Mais est-ce qu'il y aurait pas un conflit de notations avec le crochet de dualité ? »*. Alors que l'immense majorité de la classe, qui n'a bien entendu jamais entendu parler des crochets de dualité, continue de somnoler doucement tout en écrivant, bercée par le cours néanmoins passionnant du génial M. Sellès, et cette phrase commence à devenir vraiment longue, vous devriez revenir au début pour vous souvenir de quoi je parle, ce dernier entre dans une furie semblable à celle d'un certain géant vert. Heureusement pour la bienséance, au contraire du géant vert, M. Sellès n'a pas déchiré sa chemise. Cependant ML a subi les frais de son insolence et a été invité à se replonger instamment dans « *les bouquins d'algèbre des années 70 au style pompeux qui font croire qu'on est savant* » dont il avait apparemment tiré l'existence des crochets de dualité. Mais pourquoi les crochets de dualité mettent le pourtant placide M. Sellès dans une humeur pareille ? C'est Girvile, surnommé affectueusement « boule chevelue angevine », qui propose la solution la plus raisonnable : ranger « crochets de dualité » avec les autres mots interdits par M. Sellès : Christophe Maé, Yves Rocher, potimarron, endive, choux de Bruxelles, et j'en passe et des meilleures.

- Supposons que g existe, soit $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On doit alors avoir $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} N[i,j] &= \langle g(e_j), e_i \rangle \\ &= \langle e_i, g(e_j) \rangle \\ &= \langle f(e_i), e_j \rangle \\ &= M[j,i] \end{aligned}$$

  Ainsi, $N = {}^{\mathrm{T}}M$.
- Soit donc $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = {}^{\mathrm{T}}M$. On a alors, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} \langle g(e_j), e_i \rangle &= {}^{\mathrm{T}}M[i,j] \\ &= M[j,i] \\ &= \langle f(e_i), e_j \rangle \end{aligned}$$

  Soient $x, y \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, donc

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta j \langle f(e_i), e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle e_i, g(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_j g(e_j) \right\rangle \\ &= \langle x, g(y) \rangle \end{aligned}$$

Démonstration avec les matrices

– Soient $x, y \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, on a donc

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \\ &= {}^{\mathrm{T}}XY \text{ où } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  On a alors

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= {}^{\mathrm{T}}(MX)\,Y \\ &= {}^{\mathrm{T}}X{}^{\mathrm{T}}MY \\ &= {}^{\mathrm{T}}X\left({}^{\mathrm{T}}MY\right) \\ &= \langle x, g(y) \rangle \end{aligned}$$

Propriétés

(1) Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^{\mathrm{T}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(2) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{**} = f$.
En effet, $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \langle f^*(x), y\rangle &= \langle y, f^*(x)\rangle \\ &= \langle f(y), x\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle \end{aligned}$$

f vérifie la condition de f^{**} donc $f = f^{**}$.

(3) Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*$.
En effet, pour $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \langle(\alpha f + g)(x), y\rangle &= \langle \alpha f(x) + g(x), y\rangle \\ &= \alpha\langle f(x), y\rangle + \langle g(x), y\rangle \\ &= \alpha\langle x, f^*(y)\rangle + \langle x, g^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (\alpha f^* + g^*)(x)\rangle \end{aligned}$$

(4) Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
En effet, pour $x, y \in E$, $=$

$$\begin{aligned} \langle f \circ g(x), y\rangle &= \langle g(x), f^*(y)\rangle \\ &= \langle x, g^* \circ f^*(y)\rangle \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si $f = f^*$, c'est-à-dire si $\forall x, y \in E$, $\langle x, f(x)\rangle = \langle f(x), x\rangle$.

Remarque Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

4 Groupe orthogonal

Dans la suite, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

4.1 Définition, exemples

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est une isométrie ou transformation orthogonale si f conserve la norme, c'est-à-dire si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. On notera $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries.

Exemples
- Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des isométries.
- Toute symétrie orthogonale est une isométrie. En particulier, les réflexions ou symétries orthogonales par rapport à un hyperplan sont des isométries.

Remarque Soit a unitaire, $H = \{a\}^\perp$ et σ_H la réflexion d'hyperplan H. Alors, $\forall x \in E$, $\sigma_H(x) = x - 2\langle x, a\rangle$.
En effet, $x = \underbrace{\langle x, a\rangle a}_{\in \mathrm{Vect}(a)} + \underbrace{x - \langle x, a\rangle a}_{\in H}$ donc $\sigma_H(x) = x - \langle x, a\rangle a - \langle x, a\rangle a$.

4.2 Propriétés

(1) $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.

En effet, soit $f \in \mathrm{O}(E)$, si $x \in \operatorname{Ker} f$, $f(x) = 0$ donc $\|x\| = \|f(x)\| = 0$ donc $x = 0$. E est de dimension finie donc f est un isomorphisme.

(2) $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ donc $(\mathrm{O}, (E) \circ)$ est un groupe : c'est le groupe orthogonal.

En effet, $\mathrm{O}(E) \neq \{0\}$, et soient $f, g \in \mathrm{O}(E)$. Alors pour $x \in E$, $\|f \circ g(x)\| = \|g(x)\| = \|x\|$, et $\|x\| = \|f \circ f^{-1}(x)\| = \|f^{-1}(x)\|$ donc $f \circ g, f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

(3) Si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$. Donc f conserve l'orthogonalité : $x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$.

En effet, pour $x \in E$, d'après l'identité de polarisation [a],

$$\begin{aligned}
4\langle f(x), f(y)\rangle &= \|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 \\
&= \|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\
&= 4\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

(4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée.

$\Rightarrow$ Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ donc $f(\mathcal{B})$ est une famille orthonormée donc libre de longueur n donc c'est une base.

$\Leftarrow$ Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. $\mathcal{B}$ est orthonormée donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$. Or $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$ et $f(\mathcal{B})$ est orthonormée donc $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$. $\|x\| = \|f(x)\|$ donc $f \in \mathrm{O}(E)$.

Remarque

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ conserve le produit scalaire, alors $f \in \mathrm{O}(E)$. On pourrait même montrer [b] que ce résultat est valide en ne supposant pas f linéaire au départ.
  En effet,
  $$\begin{aligned}
  \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x)\rangle \\
  &= \langle x, x\rangle \\
  &= \|x\|^2
  \end{aligned}$$
- Si $f \in \mathrm{O}(E)$ et $x, y \in E \backslash \{0\}$, alors l'angle géométrique de x et y est égal à l'angle géométrique de $f(x)$ et $f(y)$.
  En effet,
  $$\frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{\|f(x)\|\,\|f(y)\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

Caractérisation de l'orthogonalité par l'adjoint

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors on a

$$\begin{aligned}
f \in \mathrm{O}(E) &\Leftrightarrow f^* \circ f = \mathrm{Id}_E \quad (1) \\
&\Leftrightarrow f \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } f^{-1} = f^* \quad (2)
\end{aligned}$$

a. Pour ceux dont la mémoire serait défaillante, se reporter à la page 9.

b. « *Left to the reader !* »

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ f conserve le produit scalaire donc, pour $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^* \circ f(y)\rangle$ donc $\langle x, y\rangle - \langle x, f^* \circ f(y)\rangle = 0$ donc, cette égalité étant valable $\forall x \in E$, $f^* \circ f(y) - y = 0$ d'où le résultat.

$\Leftarrow$ Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x)\rangle \\ &= \langle x, f^* \circ f(x)\rangle \\ &= \langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

f conserve la norme donc $f \in \mathrm{O}(E)$.

(2) $\Rightarrow$ $f \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow f \in \mathrm{GL}(E)$ et $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc $f^* \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} \Rightarrow f^* = f^{-1}$.

$\Leftarrow$ On a donc $f^* \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc, d'après (1), $f \in \mathrm{O}(E)$.

Corollaire $f \in \mathrm{O}(E) \Rightarrow \det f \in \{\pm 1\}$. On remarque de plus que $f \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \det f^* = \det f$.
En effet, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E,

$$\begin{aligned} \det f^* &= \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) \\ &= \det {}^{\mathrm{T}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= \det f \end{aligned}$$

Ici, $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E \Rightarrow (\det f)^2 = 1 \Leftrightarrow \det f \in \{\pm 1\}$.

Groupe spécial orthonormé Il existe toujours des isométries de déterminant 1, ainsi que de déterminant -1.

En effet, $\det \mathrm{Id}_E = 1$ et toute réflexion admet -1 pour déterminant : soit $a \in E$ unitaire, $H = \{a\}^\perp$, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base de H, σ_H la réflexion par rapport à H, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de E par recollement et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_H) = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1)$ est de déterminant -1.

On note $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries de déterminant 1. $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ (et de $\mathrm{O}(E)$) comme intersection de sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$: $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{O}(E)$. $(\mathrm{SO}, (E) \circ)$ est donc un groupe appelé groupe spécial orthogonal.

Les ensembles $\mathrm{SO}(E)$ et $\mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$ sont en bijection : soit σ une réflexion, alors

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathrm{SO}(E) \longrightarrow \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E) \\ u \longmapsto \sigma \circ u \end{array} \quad \text{et } \psi : \begin{array}{l} \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E) \longrightarrow \mathrm{SO}(E) \\ v \longmapsto \sigma \circ v \end{array}$$

sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Piège ! Si $f \in \mathrm{GL}(E)$ est telle que $\det f \in \{\pm 1\}$, alors on a pas forcément $f \in \mathrm{O}(E)$.

En effet, pour $\dim E = n \geqslant 2$, considérons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et l'application définie par $\forall k \neq 2$, $f(e_k) = e_k$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det f = 1$ mais $f \notin \mathrm{O}(E)$ car $\|f(e_1)\| = \sqrt{2} \neq \|e_1\|$.

4.3 Matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est orthogonale si l'endomorphisme f_M de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors M est orthogonale si et seulement si $(\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M))$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$.

En effet, soit $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, c'est bien une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ donc par conséquent, avec les notations de la définition,

$$\begin{aligned} M \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow f_M \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow (f_M(e_1), f_M(e_2), \dots, f_M(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Groupe des matrices orthogonales On remarque que $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_n}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$ vers $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi(\mathrm{O}(\mathbb{R}^n))$. L'image d'un sous-groupe par un morphisme de groupes étant un sous-groupe, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Description des éléments de $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On a, puisque $((a,b),(c,d))$ est orthonormée,

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ et } c^2 + d^2 = 1 \text{ et } ac + bd = 0$$

Il existe donc $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\varphi$ et $d = \sin\varphi$. On a alors, d'après la dernière égalité,

$$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) = 0$$

D'où deux cas :
- $\varphi \in \theta + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\cos\varphi = -\sin\theta$ et $\sin\varphi = \cos\theta$;
- $\varphi \in \theta - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ donc $\cos\varphi = \sin\theta$ et $\sin\varphi = -\cos\theta$.

Ainsi, $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } M = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Réciproquement, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, R_θ et S_θ sont orthogonales. De plus, $\det R_\theta = 1$ et $\det S_\theta = -1$ donc les ensembles $\{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\{S_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ sont disjoints.

On possède donc une description très précise de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Proposition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow {}^{\mathrm{T}}MM = \mathrm{I}_n \\ & \Leftrightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } M^{-1} = {}^{\mathrm{T}}M \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \\ & \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (\mathrm{C}_i(M) | \mathrm{C}_j(M)) = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Or $(\mathrm{C}_i(M) | \mathrm{C}_j(M)) = \sum_{k=1}^{n} M[k,i] M[k,j] = \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathrm{T}}M[i,k] M[k,j] = ({}^{\mathrm{T}}MM)[i,j]$ d'où le résultat.

On voit donc que $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^{\mathrm{T}}M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En effet :

$\Rightarrow$ $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ${}^{\mathrm{T}}M = M^{-1}$ d'où ${}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}M)\,{}^{\mathrm{T}}M = M\,{}^{\mathrm{T}}M = MM^{-1} = \mathrm{I}_n$.

$\Leftarrow$ D'après le sens précédent, ${}^{\mathrm{T}}M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \underbrace{{}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}M)}_{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow (\mathrm{C}_1(M), \mathrm{C}_2(M), \dots, \mathrm{C}_n(M)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \\ & \Leftrightarrow (\mathrm{L}_1(M), \mathrm{L}_2(M), \dots, \mathrm{L}_n(M)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Corollaire $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det M \in \{\pm 1\}$. On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

En effet, ${}^{\mathrm{T}}MM = \mathrm{I}_n$ d'où

$$\begin{aligned} 1 & = \det \mathrm{I}_n \\ & = \det({}^{\mathrm{T}}MM) \\ & = \det {}^{\mathrm{T}}M \det M \\ & = (\det M)^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$f \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{O}(E) & \Leftrightarrow (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E \\ & \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Soit maintenant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\forall l \in [\![1,n]\!]$, $f(e_l) = \sum_{k=1}^{n} M[k,l] e_k$. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée donc

$$\begin{aligned} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle & = \left\langle \sum_{k=1}^{n} M[k,i] e_k, \sum_{k=1}^{n} M[k,j] e_k \right\rangle \\ & = \sum_{k=1}^{n} M[k,i] M[k,j] \\ & = (\mathrm{C}_i(M) | \mathrm{C}_j(M)) \end{aligned}$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux bases orthonormées de E. Alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

En effet, soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, alors pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, car $\mathcal{C}$ est une base orthonormée,

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \left\langle \mathrm{C}_i\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right), \mathrm{C}_j\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[k,i]\, b_k, \sum_{m=1}^{n} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[m,j]\, b_m \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[k,i]\, \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[k,j] \\
&= \left(\mathrm{C}_i\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) | \mathrm{C}_j\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)\right)
\end{aligned}$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est orthonormée si et seulement si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Illustration Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, montrons que

$$\left|\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} M[i,j]\right| \leqslant n$$

On pose $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à M, $\mathrm{BC}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $M[i,j] = \langle f(e_j), e_i\rangle$ d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} M[i,j] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle f(e_j), e_i\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} f(e_j), \sum_{i=1}^{n} e_i \right\rangle \\
&= \langle f(a), a\rangle
\end{aligned}$$

où $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
|\langle f(a), a\rangle| &\leqslant \|a\|\,\|f(a)\| \\
&\leqslant \|a\|^2 \text{ car } f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \\
&\leqslant n \text{ car } \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = n \text{ car } \mathrm{BC}_n \text{ est orthonormée}
\end{aligned}$$

On pourrait aussi montrer [a] que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |M[i,j]| \leqslant n^{3/2}$.

a. « *Left to the reader !* »

5 Orientation, produit mixte

5.1 Orientation

Il était une fois un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible dont $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^*$.

Soit Ω l'ensemble des bases de E. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur Ω par $\forall \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \Omega$, $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{C} \Leftrightarrow \det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

- Pour $\mathcal{B} \in \Omega$, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$ et $\det \mathrm{I}_n = 1 > 0$ donc $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}$.
- Pour $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \Omega$, on sait que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \det \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = 1$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $\det \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ont le même signe d'où $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{B}$.
- Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \Omega$, on considère le diagramme suivant :

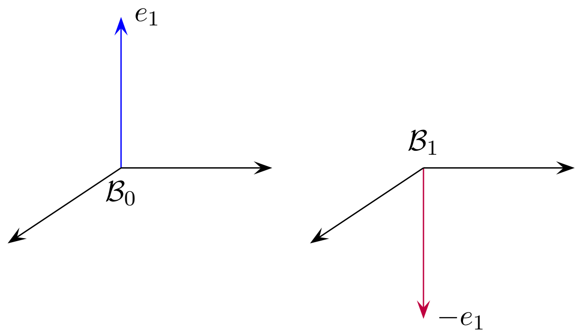
$$\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{\mathrm{Id}_E} \underset{\mathcal{C}}{E} \xrightarrow{\mathrm{Id}_E} \underset{\mathcal{D}}{E}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}} \left(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E\right) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}} \left(\mathrm{Id}_E\right) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \left(\mathrm{Id}_E\right) \\
&= \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{D}$, $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0$ et $\det \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} > 0$ d'où $\det \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} > 0$ donc $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{D}$.

Soit maintenant $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_1 = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} = \mathrm{Diag}\,(-1, 1, \ldots, 1)$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} < 0$ donc $\mathcal{B}_0$ n'est pas en relation avec $\mathcal{B}_1$. Soit $\Lambda = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}_0)$ [a] et $\Gamma = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}_1)$.



Pour $\mathcal{C} \in \Omega$, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}} \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_1}$ d'où $-1 = \det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}} \det \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_1}$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}}$ et $\det \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_1}$ n'ont pas le même signe ; $\mathcal{C} \in \Lambda$ ou $\mathcal{C} \in \Gamma$.

Il y a donc exactement deux classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Orienter E, c'est choisir l'une de ces deux classes, dont on dira des bases qui la composent qu'elles sont directes. L'autre classe d'équivalence sera par définition l'ensemble des bases indirectes. Classiquement, on oriente $\mathbb{R}^n$ par le choix de la base canonique.

5.2 Produit mixte

Petite histoire Dans la suite, E est un espace euclidien orienté. On peut donc parler de bases orthonormées directes ou indirectes.

Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On sait que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de E également, et que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{f(\mathcal{B})} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Ainsi, $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{f(\mathcal{B})} = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \det f$. Ainsi, si $\det f > 0$, $\mathcal{B}$ et $f(\mathcal{B})$ ont la même orientation, et si $\det f < 0$ alors $\mathcal{B}$ et $f(\mathcal{B})$ ont des orientations opposées.

Prenons maintenant $f \in \mathrm{O}(E)$, alors f transforme toute base orthonormée en base orthonormée donc, d'après le cas précédent :

a. Λ est la classe d'équivalence de $\mathcal{B}_0$ pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

– si $\det f = 1$, alors f conserve l'orientation des bases ;
– si $\det f = -1$, alors f change une base directe en base indirecte et vice-versa.

Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E [a] et $f \in \mathcal{L}(E)$, supposons que $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe. f transforme une base orthonormée en une base orthonormée donc $f \in \mathrm{O}(E)$. De plus, $\det f = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{f(\mathcal{B})} > 0$ donc $\det f = 1$ donc $f \in \mathrm{SO}(E)$.

On montre de même que si $f \in \mathcal{L}(E)$ transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée indirecte, alors $f \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E, $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$f \in \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée directe}$$

$$f \in \mathrm{O}(E) \backslash \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée indirecte}$$

Vers le produit mixte Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormées de E, on sait que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ avec $n = \dim E$ donc $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \{\pm 1\}$. On a de plus les règles suivantes :
– si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont même orientation, alors $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 1$;
– si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont des orientations opposées, alors $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = -1$.

Soient alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormées directes de E, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc

$$\det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}_{1} \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$, le produit mixte de $x_1, x_2, \dots, x_n$ noté $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est définit par

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Remarque Si $\mathcal{C}$ est une base orthonormée indirecte et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\det_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ainsi, si l'on choisit l'autre orientation, le produit mixte est changé en son opposé.

On a immédiatement, d'après les propriétés du déterminant :
– $[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée ;
– $[x_1, x_2, \dots, x_n] \neq 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E ;
– $[x_1, x_2, \dots, x_n] > 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base directe de E.

[a] Il en existe toujours, ainsi que des bases orthonormées indirectes car si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors $\mathcal{C} = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ est aussi une base orthonormée et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ n'ont pas la même orientation.