Exponentielle de Matrice

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme 2 usuelle.

On lui associe la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$|||A||| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

On admet que l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet : c'est à dire que pour toute suite de matrices (A_n) , si la série $\sum |||A_n|||$ est convergente, alors la série $\sum A_n$ l'est aussi.

1. Montrer que pour toute matrice A la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est convergente. On note exp$A$ sa somme.
$$\exp(A) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$
2. Comparer $||| \exp A|||$ et $\exp ||A|||$.
3. Montrer que si P est une matrice on a
$$P \exp A = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}PA^n$$
4. En déduire que pour toute matrice P inversible,
$$P \exp AP^{-1} = \exp(PAP^{-1})$$
5. On suppose que A est triangulaire, montrer que $\exp A$ est triangulaire et déterminer les coefficients diagonaux.
6. En déduire les faits suivants :
   (a) Si A est diagonalisable, alors $\exp A$ l'est aussi.
   (b) $\exp(A)$ est toujours inversible et $\det(\exp A) = e^{trA}$.
7. Soient A, B deux matrices qui commutent.
   (a) Montrer que la famille $\left(\frac{A^n B^m}{n!m!}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$ est sommable.
   (b) En déduire que dans ce cas $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.
   (c) retrouver que $\exp A$ est inversible et préciser son inverse.
8. Soient D, E et F les matrices suivantes :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer les exponentielles de ces trois matrices et comparer $\exp(D+F)$ et $\exp D \exp F$
Pour le calcul de $\exp E$ *on pourra trouver d'abord un polynôme annulateur pour calculer les puissances de* E.
9. On pose $f_A(x) = \exp(xA) = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}A^n$.
Démontrer que cette série de fonction converge normalement sur les segments de $\mathbb{R}$. En déduire que f_A est dérivable et calculer sa dérivée en fonction de A et f_A.