Espaces préhilbertiens

Dans tout ce chapitre, le corps de base des espaces vectoriels considérés sera $\mathbb{R}$ (Il est possible de définir des produits scalaires sur les espaces complexes, mais les axiomes sont différents. Cette définition sort du cadre du programme.)

I Rappel sur les produits scalaires

Définition

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$.

I.1 Produits scalaires de référence

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est un espace préhilbertien

Rappelons que le produit scalaire canonique possède une écriture sous forme de produit matriciel. Si X et Y sont deux vecteurs (colonnes) de $\mathbb{R}^n$, $\cancel{XY^T = YX^T}$ est la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ayant comme unique coefficient $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
$\leftarrow X^TY = Y^TX$.

- Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, on pose $\boxed{\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)}$, c'est le produit scalaire canonique.

- $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien, avec :

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}$$

- Plus généralement, si ω est une fonction strictement positive continue, on définit le produit scalaire à poids sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle f|g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t}$$

I.2 Cauchy Schwarz et Inégalité triangulaire

Proposition

$$\boxed{\langle x|y\rangle \leq \|x\|\|y\|}$$

Avec égalité si et seulement si x, y sont positivement liés (resp liée si l'on met une valeur absolue ou un carré)

preuve p. 1

Proposition

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

Avec égalité si et seulement si x, y sont positivement liés

Dans ces deux formules ainsi qu'ensuite, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ la norme de x pour $x \in E$ (norme euclidienne)

I.3 Formules de polarisation

Si $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien,

$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]\end{aligned}}$$

Remarque méthodologique :
On est amené à utiliser une de ces identités de polarisation à chaque fois l'on dispose d'une information relative à la norme et que l'on cherche un renseignement sur le produit scalaire.

I.4 Identité du parallélogramme :

Toute norme préhilbertienne vérifie :

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

Cette formule s'interprète géométriquement : 'la somme des carré des diagonales vaut le double de la somme des carré des côtés',(c'est la formule de la médiane qui n'est pas sans rappeler les cours de collège.)

I.5 Complément 1 : Représentation des formes linéaires

Pour $x_0 \in \mathbb{E}$, l'application $\langle x_0|\cdot\rangle$ définie ci-dessous est une forme linéaire sur E :

$$\langle x_0|\cdot\rangle : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x_0|x\rangle \end{array}\right.$$

Proposition (Théorème de Riesz)

Soit E un espace préhilbertien. On considère l'application ϕ définie ci-dessous :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \langle x|\cdot\rangle \end{array}\right.$$

Si E est de dimension finie, alors c'est un isomorphisme appelé isomorphisme canonique.

À chaque $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $f = \langle x|\cdot\rangle$.

Démonstration.

$\varphi \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ \vec{x_0} \longmapsto f_{\vec{x_0}} = \langle \vec{x_0}, \cdot \rangle \end{array}\right.$ → linéaire ? : $\vec{x_0}, \vec{x_1} \in E$ et $\lambda \in K$.

$f_{x_0+\lambda x_1}(x) = f_{x_0}(x) + \lambda f_{x_1}(x)$ valable $\forall x$.

$\varphi(x_0 + \lambda x_1) = \varphi(x_0) + \lambda\varphi(x_1)$.

Exemple.
À chaque $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe une unique matrice A telle que $f = M \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

Corollaire

Si E est un espace euclidien (préhilbertien de dimension finie), alors tout hyperplan $\mathcal{H}$ de E admet un unique vecteur normal, à un scalaire multiplicatif près.

II Orthogonalité

II.1 Définition

Définition 1

- Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux lorsque $(x|y) = 0$
- Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale lorsque pour tout $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$
- Une famille est dite orthonormale si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

Exemple

Théorème de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, alors $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

La réciproque est vraie seulement dans le cas $n = 2$

Proposition

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

La preuve doit être ~~connue~~. Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ orthogonale et $\vec{e_i} \neq \vec{0}\ \forall i$

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$\langle \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n}, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{e_i} \rangle = 0 \to \sum_{j=1} \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = 0$

$\to \lambda_i,\ \|e_i\| \neq 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0.$

Plus généralement, on définit l'orthogonalité entre sous-espaces

Définition

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels. On dits que A et B sont orthogonaux ($A \perp B$)lorsque pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $(a|b) = 0$ (ce qui équivaut à $A \subset B^\perp$ et à $B \subset A^\perp$).

Définition

Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous espaces vectoriels. On dit qu'ils sont orthogonaux si pour $i \neq j$, $A_i \perp A_j$.

Proposition

Des espaces orthogonaux sont en somme directe

La réciproque fausse.

II.2 Orthogonal d'une partie

Définition

Soit $A \subset E$. On note $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, (x|a) = 0\}$.

Propriétés élémentaires

Proposition

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E $\to A^\perp \neq \emptyset$ (car $\vec{0} \in A^\perp$)
- $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$
- $E^\perp = \{0\}$
- $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- $A \cap A^\perp = \{0\}$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$

TT

Le second point de la proposition précédente fait qu'on s'intéressera presque toujours au cas ou A est un espace vectoriel.

II.3 Propriétés de l'orthogonal $\boxed{\text{en dimension finie}}$ → perfois faux en dim infinie.

Proposition (supplémentaire orthogonal)

- Pour tout sous-espace vectoriel F de E de dimension n, on a :

$$E = F \oplus F^\perp$$

(On dit que $F^\perp$ est $\boxed{\text{le}}$ supplémentaire orthogonal de F.)

- Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$\boxed{F = \left(F^\perp\right)^\perp}$$

- $\dim F^\perp = n - \dim F$

Ce résultat est une conséquence du procédé de Gram Schmidt (voir plus loin).

Voici un exemple d'utilisation de ce résultat :

II.4 Operations algébriques sur l'orthogonal

Proposition (Comportement par intersection et somme)

i. $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$
ii. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

En dimension finie, l'inclusion précédente devient une égalité.

Démonstration. (i) ⇒ (2) Mq $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$.

$F \subset F+G$ ⇒ $G \subset F+G$ Donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$.

$\boxed{2}$ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $z \in F+G$ donc $\exists u \in F,\ v \in G$ tq $z = u+v$

$\langle x|z\rangle = \langle x|u\rangle + \langle x|v\rangle = 0$ ⇒ $x \in (F+G)^\perp$

Donc $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(ii) $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ Soit $x \in F^\perp + G^\perp$. ⇒ $\exists (u,v) \in F^\perp \times G^\perp$

$x = u+v$ Soit $z \in F\cap G$ ⇒ $\langle x|z\rangle = \langle u+v|z\rangle = \langle u|z\rangle + \langle v|z\rangle$

$= 0$ ⇒ $x \in (F\cap G)^\perp$

Un contrexemple en dimension infinie $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \left\{f \in E | f_{|[0,1/2]} = \tilde{0}\right\}$. Trouver $F^\perp$ et vérifier que ce n'est pas un supplémentaire de F.

II.5 Complément 2 : Aspect topologique

Proposition

L'espace $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ hérite d'une structure d'espace vectoriel normé pour la norme $\sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$.

Proposition

L'application qui, à un couple $(x,y) \in E^2$, associe $\langle x|y\rangle$ est continue. Ainsi, $\langle x_0|\cdot\rangle$ est une forme linéaire continue pour tout $x_0 \in E$.

Exercice de cours : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz démontrer que la norme d'opérateur de la forme linéaire $\langle x_0|\cdot\rangle$ vaut $\|x_0\|$.

Voici une intéressante conséquence de ce résultat :

Proposition (topologie et orthogonalité)

i. $F^\perp$ est un fermé

ii. $\left(\overline{F}\right)^\perp = F^\perp$

iii. Si F est dense dans E, alors $F^\perp = \{0\}$

II.6 Rappel sur le procédé de Gram-Schmidt

Proposition (procédé de Gram-Schmidt)

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille de n vecteurs $(w_1, ..., w_n)$ orthonormée de E telle que :

i. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect} < v_1, ..., v_i > = \mathrm{Vect} < w_1, ..., w_i >$

ii. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\langle w_i|v_i\rangle > 0$

Démo Par réc sur n : $n=1$ ⇒ on doit avoir $\mathrm{Vect}(\vec{u_1}) = \mathrm{Vect}\, e_1$

⇒ C.N $e_1 = \lambda u_1$ ⇒ $\|e_1\| = 1 = |\lambda| = \pm\frac{1}{\|u_1\|}$. $\langle e_1|u_1\rangle > 0$ ⇒ $\lambda\langle u_1,u_1\rangle > 0$ ⇒ $\lambda > 0$.

Donc $\vec{e_1} = \frac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|}$.

On supp vrai pour n vecteurs. Considérons $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_{n+1}})$ libre ⇒ $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$ libre ⇒ $\exists!(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ vérifie les hypothèses au rang n. On cherche par analyse : $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tq $\vec{v_{n+1}} = \vec{u_{n+1}} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e_j}$ est orthogonal à $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ ⇒ $\langle \vec{v_{n+1}}|\vec{e_i}\rangle = 0$ $\forall i$.

⇒ $\langle u_{n+1}|e_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle e_j|e_i\rangle = 0$ ⇒ $\forall i$, $\alpha_i = \langle u_{n+1}|e_i\rangle$ (suite p. 1)

II.7 Conséquences directes du procédé de Gram-Schmidt en dimension finie

Proposition

Soit E un espace euclidien.

E possède des bases orthonormées.

Plus précisément : toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée (théorème de la base orthonormée incomplète), de plus

Pour tout sous espace vectoriel F si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base orthonormée de F, et si on complète en $(v_1, \ldots, v_n)$ orthonormée, alors $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$

~~Exemples~~ Démo th de la BON incomplète :

Si $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$ est une famille orthonormée, on peut la compléter avec $\vec{u_{p+1}}, ..., \vec{u_n}$ en une base. $\mathcal{F} = (\vec{e_1}, ..., \vec{e_p}, \vec{u_{p+1}}, ..., \vec{u_n})$.

En appliquant Gram Schmidt à $\mathcal{F}$, on obtient $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, ..., \vec{e_p}, \vec{e_{p+1}}, ..., \vec{e_n})$ une BON.

Mq $F^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{e_{p+1}}, ..., \vec{e_n})$.

Soit $x \in F$. $\exists (\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ tq $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{e_i}$

⇒ par P.S, on obtient que $\mathrm{Vect}\langle \vec{e_{p+1}}, ..., \vec{e_n}\rangle \subset F^\perp$. Puis, $\dim F^\perp = n-p$.

Un égalité des dimensions ⇒ égalité.

II.8 Propriétés des bases orthonormées

Les bases orthonormées existent toujours en dimension finie et parfois en dimension infinie. Elles jouent un rôle crucial.

Soit $B = (e_i)_i$ une base de E.
B est orthonormée si et seulement si l'une des propriétés suivante est vérifiée :

- **expression des coordonnées :**
  Pour tout x et pour tout i, $e_i^*(x) = < e_i|x >$
  (les coordonnées sont les projections sur les vecteurs de base)
- **expression du produit scalaire :**
  pour tout x, y dont les coordonnées dans B sont $(x_i)_i$ et $(y_j)_j$ on a $< x, y >= \sum_i x_i y_i$ (la somme est forcément finie !!)

Cette dernière propriété explique l'importance du produit scalaire canonique

II.9 Traduction matricielle

Matriciellement, le procédé de Gram Schmidt se traduit de la façon suivante :

Proposition

Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs et O une matrice orthogonale telles que $M = OT$. Il y a unicité des matrices O et T.

Démonstration.

II.10 Polynômes orthogonaux

Le procédé de Gram Schmidt est valable dand $\mathbb{R}[X]$.

Proposition (Gram-Schmidt, cas dénombrable)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre. Alors il existe une unique famille orthonormée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

i. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\, v_1, \ldots, v_i = \mathrm{Vect}\, e_1, \ldots, e_i$

ii. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_i|v_i\rangle > 0$

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence.

Cas des polynômes

Le théorème précédent se traduit de la façon suivante :

Proposition

Pour tout produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, il existe une base orthonormée échelonnée en degré. Cette base est unique si l'on impose que les coefficients dominants des vecteurs de base soient positifs.

Ce résultat important permet de définir les familles de polynômes orthogonaux.
Nous en verrons des exemples

II.11 Projections orthogonales

Définition

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur orthogonal lorsque $\ker p \perp \operatorname{Im} p$. Ker p ⊥ Im p et p projecteur

Remarque. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\ker p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} p = E$
- $(\ker p)^\perp = \operatorname{Im} p$
- $(\operatorname{Im} p)^\perp = \ker p$

Proposition

Les projecteurs orthogonaux ont les propriétés suivantes :

i. p est un projecteur orthogonal

ii. $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$

iii. $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x|p(y)\rangle = \langle p(x)|y\rangle$

Il s'agit d'un exercice classique, il faut savoir le refaire.

Le résultat suivant est souvent utilisé en sciences (notamment en physique et en mécanique) : il faut savoir s'en servir.

Projection sur un vecteur et sur un hyperplan

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire. La projection othogonale sur la droite $\mathbb{R}\vec{n}$ est l'application p définie par :

$$p(x) =< \vec{n}, x > \vec{n}$$

La projection sur un hyperplan H est l'application $x \mapsto x- < \vec{n}, x > \vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à H.
Exemple : Trouver la matrice du projecteur orthogonal sur le plan $ax + by + cz = 0$.

II.12 Le théorème des projections

TD

Théorème de la projection orthogonale

$\to F$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors :

i. Le projecteur orthogonal sur F existe

ii. $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$

iii. Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de F alors $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | x_i \rangle \, e_i$

iv. (propriété de minimisation)Pour tout x de E, on a :
pour tout $y \in F$ l'inégalité :

$$\|x - p(x)\| \leqslant \|x - y\|$$

avec égalité si et seulement si $y = p(x)$.

v. Pour tout x on a $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.

La propriété de minimsation est l'un des aspects les plus intéressants, en voici des exemples.

II.13 Exemples d'application à des problèmes de minimisation

Exemple. Déterminer $\inf\limits_{A \text{ symétriques}} \|M - A\|^2$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple. Un exemple à base d'intégrales (classique ! !)

III Annexe 1 : Déterminants et matrices de Gram

Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. On note $g(x_1, ..., x_n)$ la matrice :

$$(\langle x_i | x_j \rangle)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

$g(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle la matrice de Gram des vecteurs x_i .

Son déterminant $G(x_1, ..., x_n)$ est appelé le déterminant de Gram de $(x_1, ..., x_n)$.

Les determinants de Gram ont des propriétés remarquables :

Proposition

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. On note $\widetilde{x_n} = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$. Alors :

$$G(x1, ..., x_{n-1}, \widetilde{x_n}) = G(x_1, ..., x_n)$$

Démonstration. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{x_n} | x_j \rangle &= \left\langle x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \middle| x_j \right\rangle \\ &= \langle x_n | x_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle x_i | x_j \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on note $C_1, ..., C_n$ les colonnes et $L_1, ..., L_n$ les lignes de $G(x_1, ..., x_n)$, on applique les transformations :

$$C_n \longleftarrow C_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$$

puis :

$$L_n \longleftarrow L_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i L_i$$

et l'on obtient $G(x_1, ..., \widetilde{x_n})$

Proposition

Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, on a :

$$G(x_1, ..., x_n) = G(x_1, ..., x_{n-1}) \, d(x_n, F_{n-1})^2$$

avec $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$.

Démonstration. On pose $\widetilde{x_n} = x_n - p_{F_{n-1}}(x_n)$. D'après la propriété précédente, puisque $p_{F_{n-1}}(x_n) \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$, $G(x_1, ..., x_{n-1}, \widetilde{x_n}) = G(x_1, ..., x_n)$. Or :

$$G(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1 | x_{n-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{n-1} | x_1 \rangle & \cdots & \langle x_{n-1} | x_{n-1} \rangle & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle \widetilde{x_n} | \widetilde{x_n} \rangle \end{vmatrix}$$

On obtient $G(x_1, ..., x_n) = G(x_1, ..., x_{n-1}) \|\widetilde{x_n}\|^2$ en développant.

Corollaire

On déduit des deux dernières propriétés les conséquences suivantes :

i. $G(x_1, ..., x_n) \geqslant 0$

ii. $G(x_1, ..., x_n) = \|x_1\|^2\|\widetilde{x_2}\|^2 \cdots \|\widetilde{x_n}\|^2$ avec $\widetilde{x_i} = x_i - p_{F_{i-1}}(x_i)$

iii. Soient F un sous-espace vectoriel de E, $(x_1, ..., x_n)$ une base quelconque de F, et $x \in E$. Alors :

$$\mathrm{d}(x, F) = \sqrt{\frac{G(x_1, ..., x_n, x)}{G(x_1, ..., x_n)}}$$

Proposition

Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. $\operatorname{rg} g(x_1, ..., x_p) = \operatorname{rg}(x_1, ..., x_p)$

Démonstration. Soit $(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \in \ker g(x_1, ..., x_n) &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ (y|x_i) \\ &\iff y \in \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_n)^\perp \\ &\iff \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \end{aligned}$$

On considère alors ϕ :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \end{array} \right.$$

Alors $n - \operatorname{rg}(x_1, ..., x_n) = \dim \ker \phi = n - \operatorname{rg} \phi = n - \operatorname{rg}(x_1, ..., x_n)$, d'où le résultat.

Expression à l'aide des coordonnées dans une BON

On suppose que E est de dimension finie p. On munit E d'une base orthonormée $B = (e_1, ..., e_p)$. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs, et $A = \operatorname{Mat}_B(x_1, ..., x_n)$.

On a l'égalité $g(x_1, ..., x_n) = {}^tAA$.

(exercice : vérifier cette formule, en regardant notamment soigneusement les tailles des matrices......)

On en déduit le résultat géométrique suivant :

Inégalité de Hadamard

Proposition (Inégalité de Hadamard, HP)

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs. Alors :

$$|\det(\operatorname{Mat}_B(x_1, ..., x_n))| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$$

Il y a égalité si et seulement si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale.

Démonstration. $|\det(\operatorname{Mat}_B(x_1, ..., x_n)| = \sqrt{\det {}^tAA} = \sqrt{G(x_1, ..., x_n)}$, or :

$$G(x_1, ..., x_n) = \|x_1\|^2\|\widetilde{x_2}\|^2 \cdots \|\widetilde{x_n}\|^2 \leqslant \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$$

Il y a égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\|x_i - p_{F_{i-1}}(x_i)\| = \|x_i\|$, autrement dit si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale.

IV Annexe 2 : Inégalité de Bessel egalité de Parseval

Dans cette section on se propose d'examiner les conséquences du théorème des projections dans des espaces de dimension infinie (principalement des espaces de fonctions).

IV.1 Inégalité de Bessel finie

Proposition

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien et $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormée. Alors, pour $x \in E$:

$$\sum_{i=1}^n (e_i|x)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Il y a égalité si et seulement si $x \in \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_n)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème des projections, puisque la somme de gauche est la norme du projeté orthogonal.

IV.2 Inégalité de Bessel, cas général

Théorème

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit $x \in E$, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. La série de terme général $(e_n|x)^2$ est convergente et de plus :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (e_n|x)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n (e_k|x)^2$. La suite (S_n) est croissante et $S_n \leqslant \|x\|^2$ par le cas fini. Ainsi, (S_n) converge, et sa limite est inférieure à $\|x\|^2$.

Le théorème suivant caractérise l'égalité dans l'inégalité de Bessel.

Théorème

On garde les notations précédentes On pose $F_n = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_n)$ et p_n le projecteur orthogonal sur F_n. On note $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \operatorname{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Il y a égalité dans l'inégalité de Bessel si et seulement si $p_n(x)$ converge vers x (pour la norme associé au produit scalaire), quand n tend vers l'infini.

Il y a égalité si et seulement x est dans l'adhérence de F (pour cette norme).

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - S_n &= \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 \\ &\|x - p_n(x)\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x\|^2 \iff \|x - p_n(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Proposition (égalité de Parseval)

On suppose que le sous espace F engendré par les (e_n) est dense dans E alors on a :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x|e_i \rangle^2$$

(égalité de Parseval)

Ce résultat est très utile pour les séries trigonométriques et pour les polynômes orthogonaux.