Rudiments de logique

I. Assertions

Définition. *On appelle proposition ou assertion un énoncé qui ne peut être que vrai ou faux.*

Par exemple, "l'entier n est pair" ou "$2+2=4$" sont des propositions.

Remarque. *Une assertion peut dépendre de certaines variables par exemple "$f(0)=1$"*
Par contre la proposition "Tout entier n est pair" ne dépend pas de n. On dit que n est une variable muette. On peut la renommer.

Remarque. *Deux propositions qui sont simultanément vraies ou fausses sont dites équivalentes.*

1. Négation/ Conjonction/Disjonction

A partir de propositions, on peut en construire de nouvelles.

Définition. *Soit P une proposition. On appelle négation de P et on note "non P" ou "$\overline{P}$" la proposition qui est vraie si, et seulement si, P est fausse. Sa table de vérité est donnée par :*

P	*non* P
vraie	*fausse*
fausse	*vraie*

Proposition. *Soit P une proposition. Les propositions P et $\overline{\overline{P}}$ sont équivalentes.*

Proposition. *Soient P et Q deux propositions. Les propositions P et Q sont équivalentes si, et seulement si, les propositions $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ le sont.*

Définition. *Soient P et Q deux propositions. On appelle conjonction des propositions P et Q et l'on note "P et Q" ou $P \wedge Q$ la proposition qui est vraie si, et seulement si, les propositions P et Q sont vraies. Sa table de vérité est donnée par :*

P	Q	$P \wedge Q$
fausse	*fausse*	*fausse*
fausse	*vraie*	*fausse*
vraie	*fausse*	*fausse*
vraie	*vraie*	*vraie*

Définition. *Soient P et Q deux propositions. On appelle disjonction des propositions P et Q et l'on note "P ou Q" ou $P \vee Q$ la proposition qui est fausse si, et seulement si, les propositions P et Q sont fausses. Sa table de vérité est donnée par :*

P	Q	$P \vee Q$
fausse	*fausse*	*fausse*
fausse	*vraie*	*vraie*
vraie	*fausse*	*vraie*
vraie	*vraie*	*vraie*

Proposition. *Soient P et Q deux propositions.*
– *Les propositions $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ sont équivalentes.*
– *Les propositions $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ sont équivalentes.*

Proposition. *Soient P, Q et R trois propositions.*
– *Les propositions $(P \wedge Q) \wedge R$ et $P \wedge (Q \wedge R)$ sont équivalentes.*
– *Les propositions $(P \vee Q) \vee R$ et $P \vee (Q \vee R)$ sont équivalentes.*
On dit que les lois $\wedge$ et $\vee$ sont associatives. On pourra donc noter $P \wedge Q \wedge R$ et $P \vee Q \vee R$

Proposition. *Soient P, Q et R trois propositions.*
– *Les propositions $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ sont équivalentes.*
– *Les propositions $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ sont équivalentes.*
On dit que la loi $\wedge$ est distributive par rapport à la loi $\vee$ et que la loi $\vee$ est distributive par rapport à la loi $\wedge$.

2. Implication/ Équivalence/ Réciproque

Définition. *Soient P et Q deux propositions. On appelle implication de Q par P et on note "$P \Rightarrow Q$", l'assertion $\overline{P} \vee Q$; elle est donc fausse si, et seulement si, P est vraie et Q fausse.*
Sa table de vérité est donnée par :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
fausse	*fausse*	*vraie*
fausse	*vraie*	*vraie*
vraie	*fausse*	*fausse*
vraie	*vraie*	*vraie*

Lorsque l'assertion "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on dit que la proposition P implique la proposition Q.

Remarque. *La proposition "$1 = 2$" $\Rightarrow$ "$6 = 8$" est donc vraie...*

Remarque. *Pour montrer que la proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on peut commencer par "Supposons P vraie et montrons que Q l'est aussi".*
L'implication $P \Rightarrow Q$ s'écrit indifféremment
– *Si P, alors Q*
– *Si $\overline{Q}$, alors $\overline{P}$*
– *Pour que Q, il suffit que P*
– *Pour que P, il faut que Q*
– *P est une condition suffisante pour que Q*
– *Q est une condition nécessaire pour que P.*

Remarque. *Une implication n'est jamais qu'une disjonction (OU) sa négation est donc une conjonction (ET).*
La négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$.

Remarque. *Pour montrer "P ou Q", on peut montrer la proposition équivalente $\overline{P} \Rightarrow Q$.*

Exercice. *Soient P et Q deux propositions.*
Montrer que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont équivalentes.

Définition. *Soient P et Q deux propositions.*
La proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Remarque. *Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que sa contraposée est vraie. La rédaction sera alors : "Supposons que Q soit fausse et montrons que P l'est aussi".*
On dit que l'on raisonne ***par contraposée***

Définition. *Soient P et Q deux propositions. On appelle équivalence entre P et Q et on note "$P \Leftrightarrow Q$", l'assertion qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou fausses, c'est-à-dire si elles sont équivalentes. Sa table de vérité est donnée par :*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
fausse	*fausse*	*vraie*
fausse	*vraie*	*fausse*
vraie	*fausse*	*fausse*
vraie	*vraie*	*vraie*

Remarque. *L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ s'écrit indifféremment*
– *P si et seulement si Q*
– *Pour que Q, il faut et il suffit que P*
– *P est une condition nécessaire et suffisante pour que Q*

Exercice. *Montrer que les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$" sont équivalentes.*

Remarque. *Pour montrer que les propositions P et Q sont équivalentes, on peut raisonner par* ***double implication*** *en montrant $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.*
La rédaction sera alors : "Raisonnons par double implication.
– *Montrons que $P \Rightarrow Q$ ...*
– *Montrons que $Q \Rightarrow P$*

Définition. *Soient P et Q deux propositions.*
La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée la réciproque de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Remarque. *Attention, si la proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, elle n'est pas équivalente à sa réciproque.*

Exercice. *Montrer qu'une assertion et sa réciproque ne sont pas liées*

3. Exemples de raisonnements

Exercice. *Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que :*

$$\begin{aligned} &(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \\ &((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R \qquad \textit{(Raisonnement par disjonction des cas)} \\ &\big((\overline{P} \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})\big) \Rightarrow P \qquad \textit{(Raisonnement par l'absurde)} \end{aligned}$$

Remarque. *Pour montrer qu'une proposition R est vraie on peut exhiber deux propositions P et Q telles que les propositions $P \vee Q$, $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ soient vraies. On dit que l'on raisonne* ***par disjonction des cas***

Exercice. *(*) Un entier n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.*

Remarque. *Pour montrer qu'une proposition P est vraie on peut exhiber une proposition Q telle que les propositions $\overline{P} \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ soient vraies, c'est-à-dire que l'on suppose $\overline{P}$ et que l'on aboutit à une contradiction. On dit que l'on raisonne* ***par l'absurde***

Exercice. *(*) Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.*

Exercice. *(*) $\sqrt{2}$ est un irrationnel.*

II. Quantificateurs

1. Quantificateur universel et existentiel

Définition. *Soit $P(x)$ une proposition dont la véracité dépend d'un paramètre $x \in E$.*
- *On note "$\forall x \in E,\ P(x)$" la proposition qui est vraie si, pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie.*
- *On note "$\exists x \in E : P(x)$" la proposition qui est vraie s'il existe un élément x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie.*
- *On note "$\exists ! x \in E : P(x)$" la proposition qui est vraie s'il existe un* ***unique*** *élément x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie.*

Exemple. *La proposition $(\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \Rightarrow x \geq 4)$ est vraie (prendre par exemple $x = 5$) alors que les propositions $(\exists ! x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \Rightarrow x \geq 4)$ et $(\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \Rightarrow x \geq 4)$ sont fausses.*

Remarque. *Par convention, si l'ensemble E est vide, alors les propositions "$\exists x \in E : P(x)$" et "$\exists ! x \in E : P(x)$" sont fausses tandis que la proposition "$\forall x \in E, P(x)$" est vraie.*

Proposition. *Soit $P(x)$ une proposition qui dépend d'une variable $x \in E$ et soit $a \in E$. On a*

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow P(a) \Rightarrow (\exists x \in E : P(x))$$

2. Rédaction

Quantificateur universel :
Pour montrer la proposition "$\forall x \in E, P(x)$", une rédaction est :
"Soit $x \in E$. Montrons que $P(x)$ est vraie"
Si $E \subset \mathbb{N}$, on peut procéder **par récurrence** (cf fin de chapitre)

Quantificateur existentiel :
Pour montrer la proposition "$\exists x \in E : P(x)$". On peut exhiber un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.
La rédaction est alors "L'élément $x = ...$ appartient à E et vérifie $P(x)$. En effet, ..."

S'il n'est pas évident à trouver, on peut commencer par une phase d'analyse. L'idée est de supposer qu'un tel élément x existe, d'en déduire certaines de ces propriétés pour déterminer un élément qui convient. Cette phase d'analyse peut rester au brouillon. On se contente alors d'exhiber un élément trouvé et de vérifier que $P(x)$ est vraie.

Si cette phase d'analyse conduit à un unique élément, on aura montré l'unicité sous réserve d'existence. Il n'y aura plus qu'à vérifier que l'élément en question convient. C'est le principe du raisonnement par analyse synthèse.
Lorsque l'on veut montrer l'existence et l'unicité de cette manière, l'analyse doit être rédigée.

Analyse-synthèse
Pour montrer la proposition "$\exists ! x \in E : P(x)$". On peut procéder par analyse-synthèse.
Analyse : On suppose qu'un tel élément x existe. On en déduit l'expression de x.
Synthèse : On vérifie que l'élément x trouvé appartient à E et que $P(x)$ est vraie.
La rédaction est la suivante :
" Analyse : Soit $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie, on a alors .... donc ... puis ... d'où $x = (*)$. On a donc montré l'unicité de x sous réserve d'existence.
Synthèse : L'élément $x = (*)$ appartient à E et vérifie $P(x)$. En effet, ... "
Si l'on doit prouver "$\exists ! x \in E : P(x)$" et que l'on est capable d'exhiber facilement un élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit vrai. Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité.
Pour cela, on considère $x \in E$ tel que $P(x)$ et l'on prouve que $x = x_0$.

Exercice. *(*) Soient a, b, c et d quatre réels tels que $a \neq b$.*
Montrer qu'il existe une unique fonction affine f telle que $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Exercice. *(*) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ impaire$\}$ et $P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ paire$\}$. Montrer que :*

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \exists!(f_1, f_2) \in I \times P\ :\ f = f_1 + f_2$$

3. Négation de quantificateurs

Proposition. *Si $P(x)$ est une proposition qui dépend d'une variable $x \in E$, alors on a*

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E : \overline{P(x)})$$
$$\overline{\exists x \in E : P(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E, \overline{P(x)})$$

Remarque. *La négation d'une proposition sous la dépendance du quantificateur $\exists!$ est plus complexe à rédiger car elle fait intervenir deux éventualités : ou bien il n'existe pas de variable qui convient, ou bien il en existe au moins deux.*

4. Action des quantificateurs sur une conjonction ou une disjonction

Proposition. *Soient $P(x)$ et $Q(x)$, deux propositions dépendant d'une variable $x \in E$, alors on a les équivalences suivantes :*

$$(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$$
$$(\exists x \in E : P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E : P(x)) \vee (\exists x \in E : Q(x))$$

Proposition. *Soient $P(x)$ et $Q(x)$, deux propositions dépendant d'une variable $x \in E$, alors on a les implications suivantes :*

$$(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x \in E : P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E : P(x)) \wedge (\exists x \in E : Q(x))$$

mais leurs réciproques ne sont pas forcément vraies.

5. Inversion de quantificateurs

Proposition. *Soient E et F deux ensembles et $P(x, y)$ une proposition dont la véracité dépend de deux variables $x \in E$ et $y \in F$. On a alors les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))\\ (\exists x \in E : \exists y \in F : P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F : \exists x \in E : P(x, y))\end{aligned} \tag{1}$$

On dit que deux quantificateurs $\forall$ successifs commutent. Il en est de même de deux quantificateurs $\exists$ successifs.

Proposition.
La proposition $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ est équivalente à $\forall (x, y) \in E \times F,\ P(x, y)$.
La proposition $\exists x \in E : \exists y \in F : P(x, y)$ est équivalente à $\exists (x, y) \in E \times F,\ P(x, y)$.

Remarque. *L'équivalence $(\exists! x \in E : \exists! y \in F : P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists! y \in F : \exists! x \in E : P(x, y))$ n'est pas forcément vraie. La proposition $\exists! x \in E : \exists! y \in F : P(x, y)$ n'est pas non plus forcément équivalente à*

$$\exists!(x, y) \in E \times F,\ P(x, y).$$

Remarque. *En général, on a pas le droit d'intervertir deux quantificateurs différents. Plus précisément, les implications suivantes sont vraies mais leurs réciproques ne le sont pas forcément.*

$$(\exists x \in E : \forall y \in F : P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in E : \exists x \in E : P(x, y))$$
$$(\exists! x \in E : \forall y \in F : P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F : \exists x \in E : P(x, y))$$
$$(\exists! x \in F : \exists y \in F : P(x, y)) \Rightarrow (\exists y \in E : \exists! x \in E : P(x, y))$$

III. Raisonnements par récurrence

Dans cette partie, on considère une proposition $P(n)$ qui dépend d'une variable n qui est un entier positif. Le raisonnement par récurrence permet de montrer la proposition $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$. Pour cela, on peut montrer :
- $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Récurrence simple)
- $P(0)$, $P(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (Récurrence double)
- $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \leq n : P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (Récurrence forte).

La rédaction d'une récurrence simple est la suivante :
- Pour tout entier n, on note $P(n)$: "$\cdots$".
- Initialisation : la proposition $P(0)$ est vraie. En effet, ...
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $P(n)$ soit vraie. Montrons que la proposition $P(n+1)$ l'est aussi.

La rédaction d'une récurrence double est la suivante :
- Pour tout entier n, on note $P(n)$: "$\cdots$".
- Initialisation : les propositions $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. En effet, ...
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propositions $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies. Montrons que la proposition $P(n+2)$ l'est aussi.

La rédaction d'une récurrence forte est la suivante :
- Pour tout entier n, on note $P(n)$: "$\cdots$".
- Initialisation : la proposition $P(0)$ est vraie. En effet, ...
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propositions $P(0)$,...$P(n)$ soient vraies. Montrons que la proposition $P(n+1)$ l'est aussi.

Remarque. *Il arrive que l'on ait à faire une récurrence à partir d'un certain rang, on que l'on souhaite démontrer une récurrence sur un ensemble $[\![n_1, n_2]\!]$. Dans ce cas, il faut adapter.*

Si l'on veut montrer, par récurrence simple la proposition $\forall n \geq n_0,\ P(n)$", on prouve $P(n_0)$ et $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$; ce qui se rédige :
- Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $P(n)$: "$\cdots$".
- Initialisation : la proposition $P(n_0)$ est vraie. En effet, ...
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$ tel que la proposition $P(n)$ soit vraie. Montrons que la proposition $P(n+1)$ l'est aussi.

Si l'on veut montrer, par récurrence simple la proposition $\forall n \in [\![n_1, n_2]\!],\ P(n)$", on prouve $P(n_1)$ et $\forall n \in [\![n_1, n_2 - 1]\!] : P(n) \Rightarrow P(n+1)$; ce qui se rédige :
- Pour tout entier $n \in [\![n_1, n_2]\!]$, on note $P(n)$: "$\cdots$".
- Initialisation : la proposition $P(n_1)$ est vraie. En effet, ...
- Hérédité : Soit $n \in [\![n_1, n_2 - 1]\!]$ tel que la proposition $P(n)$ soit vraie. Montrons que la proposition $P(n+1)$ l'est aussi.

Exercice. *Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer qu'il existe un unique couple (A, B) de réels tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(-1)^n + B2^n$.*

Exercice. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!(p, k) \in \mathbb{N}^2 : n = 2^p(2k+1)$.*