

# Physique-Chimie 2

PSI

2016

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Les données numériques utiles sont regroupées en fin d'énoncé.

## II De la cuisson des œufs

Cette partie a pour objet l'étude d'un cuiseur à œufs.

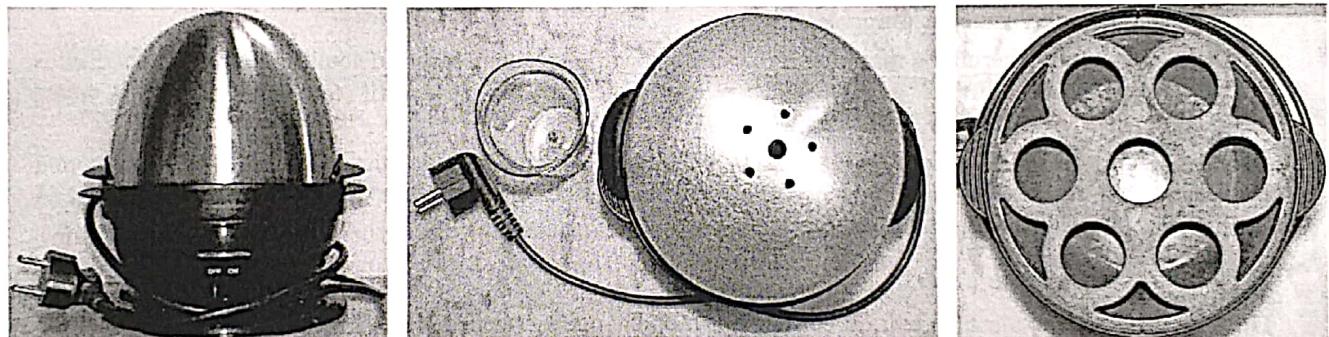


Figure 4 Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille)

Cet appareil cuit des œufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les œufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper.

La puissance électrique consommée par l'appareil est  $P = 350 \text{ W}$ . On considérera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chauffante.

La quantité d'eau placée dans le cuiseur est mesurée à l'aide d'un gobelet gradué selon le nombre d'œufs à cuire et le type de cuisson désirée (voir figure 6). Le fond est bombé à cause de la présence d'une pique sous la base du gobelet permettant le perçage du sommet de l'œuf lors de la cuisson afin d'éviter la rupture de la coquille.

### Problématique

On voit sur les graduations du gobelet que la quantité d'eau nécessaire à la cuisson est d'autant plus grande que le nombre d'œufs à cuire est faible, ce qui est à priori étonnant. Les sous-parties qui suivent vont permettre d'analyser ce phénomène.

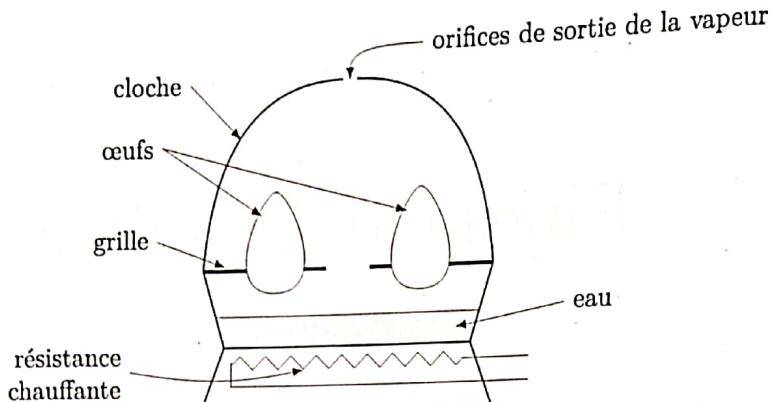


Figure 5 Schéma général du cuiseur

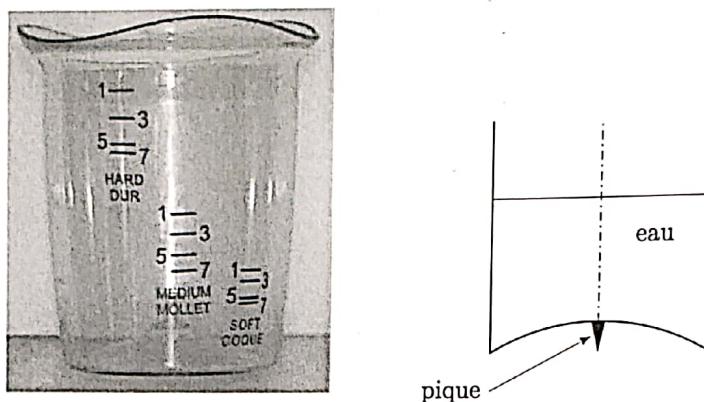


Figure 6 Photo et schéma du gobelet

#### Fonctionnement du cuiseur

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul œuf dur est de 120 mL. Les œufs à la température initiale  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  sont placés dans le cuiseur et la masse d'eau  $m_0$  contenue dans le gobelet (à la même température initiale  $T_0$ ) est versée sous les œufs. Cette eau est portée à ébullition sous  $p = 1$  bar, puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons  $c$  la capacité thermique massique de l'eau liquide,  $T_{eb}$  sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience,  $h \approx 1200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  le coefficient de transfert conducto-convectif (eau  $\leftrightarrow$  œuf) et  $m(t)$  la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant  $t$ .

Soient  $\Delta t_1$  la durée de chauffage de l'eau de  $T_0$  à  $T_{eb}$  et  $\Delta t_2$  la durée de la cuisson des œufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température  $T_{eb}$  sous la pression  $p = 1$  bar.

#### II.A - Chauffage de l'eau

II.A.1) Soit  $m_e$  la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est la masse d'eau ayant même capacité thermique que cet objet). En supposant la transformation adiabatique pendant le chauffage, exprimer  $\Delta t_1$  en fonction des données.

II.A.2) On place dans le cuiseur une masse d'eau  $m_0 = 125 \text{ g}$ . On mesure alors une durée de chauffage  $\Delta t_0 = 150 \text{ s}$  avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

#### II.B - Détermination de la durée de cuisson $\Delta t_2$

##### II.B.1) Mécanisme de la cuisson des œufs

Un œuf est composé de trois parties :

- une coquille très mince ;
- le blanc d'œuf constituant les deux tiers de l'œuf. C'est un liquide composé à environ 90% d'eau et 10% de protéines, sels minéraux et vitamines ;
- le jaune d'œuf est composé à moitié d'eau, de 15% de protéines et de 30% de lipides.

Lors de la cuisson (type œuf dur) les protéines se déroulent partiellement et se lient pour former un réseau qui piège l'eau : c'est un gel. Les œufs caoutchouteux sont ceux qui ont perdu trop d'eau ; c'est aussi la sur-cuisson du jaune qui le fait devenir sableux. Quand un œuf est cuit à  $100^\circ\text{C}$ , la masse diminue progressivement à mesure que l'eau est éliminée du gel formé. Quand un œuf est cuit à une température peu

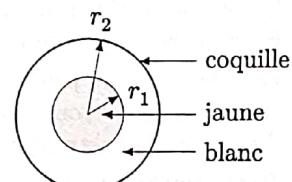


Figure 7 Structure interne d'un œuf

supérieure à la température de coagulation de ses protéines, il coagule en conservant son eau, gage de moelleux. Le jaune d'œuf commence à épaisser à 65 °C. Il coagule totalement à une température de 85 °C.

Justifier l'existence de la pique sous le fond du gobelet.

### II.B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Pour déterminer le temps de cuisson, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur en régime dépendant du temps. On modélise un œuf comme un ensemble de deux sphères concentriques de rayons  $r_1$  et  $r_2$  limitant le jaune et le blanc (figure 7).

Afin de simplifier l'étude, on va négliger l'influence de la coquille et considérer l'intérieur de l'œuf comme homogène et ayant les propriétés thermodynamiques de l'eau : masse volumique  $\mu$ , capacité thermique massique  $c$  et conductivité thermique  $\lambda$ .

a) Établir l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques, en faisant un bilan énergétique sur une couche sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ .

b) On introduit les variables réduites :  $\rho = r/r_2$  et  $\tau = t/\theta$ . Exprimer  $\theta$  en fonction de  $\mu$ ,  $c$ ,  $r_2$  et  $\lambda$  pour que l'équation de la chaleur s'écrive :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau} \quad (\text{II.1})$$

Commenter la dépendance de  $\theta$  par rapport à  $r_2$ .

### II.B.3) Résolution de l'équation de la chaleur

a) Afin de résoudre cette équation *en régime dépendant du temps*, on pose dans un premier temps

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + f(\rho)g(\tau)$$

En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que la composante temporelle  $g(\tau)$  vérifie l'équation

$$\frac{1}{g(\tau)} \frac{dg(\tau)}{d\tau} = \boxed{\pi A^2}$$

où  $A$  est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution.

Donner l'expression de  $g(\tau)$  à une constante multiplicative près et justifier le signe – figurant devant  $A^2$ .

b) Pour trouver la composante spatiale de  $T(\rho, \tau)$ , on pose  $f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho}$ . Montrer alors que  $F(\rho)$  est solution de l'équation

$$\frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + A^2 F(\rho) = 0$$

En déduire l'expression de  $f(\rho)$ .

c) Montrer alors que la solution générale de l'équation II.1 peut s'écrire sous la forme

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(A_i \rho)}{\rho} \exp(-A_i^2 \tau) \quad \text{~~~~~} (\text{II.2})$$

Quelles sont les différentes conditions qui permettent théoriquement de calculer les coefficients  $\beta_i$  et  $A_i$  ?

### II.B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

Dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression II.2 que le terme associé à la constante de temps la plus longue, donc celui correspondant au coefficient  $A_i$  le plus petit (qui sera noté  $A$  dans la suite), car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps :

$$T(\rho, \tau) \approx T_{\text{eb}} + \frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho} \exp(-A^2 \tau)$$

a) On suppose que les échanges thermiques au niveau de la coquille sont donnés par la loi de Newton  $\vec{j}_{\text{th}} = h(T(\rho = 1, \tau) - T_{\text{eb}})\vec{u}_r$ . En écrivant deux expressions permettant d'exprimer le flux thermique entrant dans l'œuf, montrer que  $A$  est solution de l'équation

$$\frac{A}{1 - r_2 h / \lambda} = \tan A$$

b) Pour un œuf moyen, on a  $r_2 = 2,5$  cm. Montrer que dans ces conditions, on peut prendre  $A \approx \pi$  comme première solution de l'équation précédente dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . Évaluer l'erreur commise.

- c) Exprimer alors  $T(\rho, r)$  avec la valeur de  $A$  précédente. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la température à la surface de l'œuf? Montrer que cela revient à considérer une des grandeurs caractéristiques du problème comme infinie.
- d) Calculer  $\beta$  en exprimant la température au centre de l'œuf à  $t = 0$ .

### II.B.5) Calcul de la durée de cuisson $\Delta t_2$ pour un œuf dur

- a) Exprimer en fonction de  $\theta$  et des autres données du problème la durée de cuisson  $\Delta t_2$  à l'état dur d'un œuf de rayon  $r_2$ , pour lequel la température au centre doit atteindre  $T_c = 80^\circ\text{C}$ .
- b) Calculer  $\Delta t_2$  pour un œuf de rayon  $r_2 = 2,5 \text{ cm}$ . Commenter le résultat obtenu.

### II.C – Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

#### II.C.1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur $\mathcal{E}_d$

- a) En faisant un bilan énergétique très simple entre l'état final et l'état initial, donner une borne inférieure  $\mathcal{E}_{d,\min}$  de l'énergie de cuisson  $\mathcal{E}_d$  d'un œuf dur. Faire l'application numérique.
- b) De la même façon, donner une borne supérieure  $\mathcal{E}_{d,\max}$  de l'énergie  $\mathcal{E}_d$ . Faire l'application numérique.
- c) Dans la suite, on adoptera comme valeur de l'énergie  $\mathcal{E}_d$  la moyenne arithmétique de  $\mathcal{E}_{d,\min}$  et  $\mathcal{E}_{d,\max}$ . Calculer numériquement cette valeur.

II.C.2) Pendant la phase de cuisson, on peut considérer l'eau contenue dans le cuiseur comme un système ouvert en écoulement permanent, admettant en entrée de l'eau liquide à la température  $T_{eb}$  et en sortie de la vapeur d'eau à  $T_{es}$  (noter que, dans cette modélisation, les œufs font partie de l'extérieur du système).

Soit  $\mathcal{P}$  la puissance thermique fournie par la résistance chauffante,  $\mathcal{P}_f$  la puissance associée aux pertes thermiques dans les différentes parties du cuiseur (socle, cloche...).

On note :

- $D_m$  le débit massique de vapeur en sortie ;
- $n$  le nombre d'œufs dans le cuiseur ;
- $\ell_v$  la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau liquide à  $100^\circ\text{C}$ ,  $\ell_v = 2,26 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$  ;
- $\mathcal{E}(t)$  l'énergie cédée à un œuf entre le début de sa cuisson et l'instant  $t$  ;

- $\mathcal{E}_X$  l'énergie nécessaire à la cuisson d'un œuf dans l'état  $X \equiv \begin{cases} d: & \text{dur} \\ m: & \text{mollet} \\ c: & \text{coque} \end{cases}$ .

En appliquant le premier principe au système ouvert en régime permanent pendant la durée  $dt$ , établir la relation entre  $D_m$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_f$ ,  $\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$  et le nombre d'œufs  $n$ .

II.C.3) On introduit dans le cuiseur une masse  $m_0$  d'eau liquide, qui va donc être vaporisée pendant la phase de cuisson de durée  $\Delta t_2$ . Montrer que

$$m_0 = \frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f)\Delta t_2 - n\mathcal{E}_X}{\ell_v}$$

Justifier alors les graduations du gobelet.

II.C.4) Exprimer la puissance thermique minimale que doit fournir la résistance électrique pour pouvoir cuire 7 œufs durs. Faire l'application numérique en considérant  $\mathcal{P}_f \approx 0$  et en prenant  $\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}$  pour un œuf de  $2,5 \text{ cm}$  de rayon dont le temps de cuisson est d'environ 10 minutes. Comparer à la puissance du cuiseur et commenter.

II.C.5) On donne figure 8 la représentation graphique de la masse d'eau  $m_0$  contenue dans le gobelet en fonction du nombre d'œufs pour les trois degrés de cuisson ( $d, m, c$ ). Analyser ces courbes à la lumière des résultats précédents. En particulier :

- déterminer la taille des œufs (c'est-à-dire leur rayon) qui ont servi à « étalonner » le gobelet ;
- le temps de cuisson d'un œuf dur vous semble-t-il conforme aux résultats obtenus plus haut ?

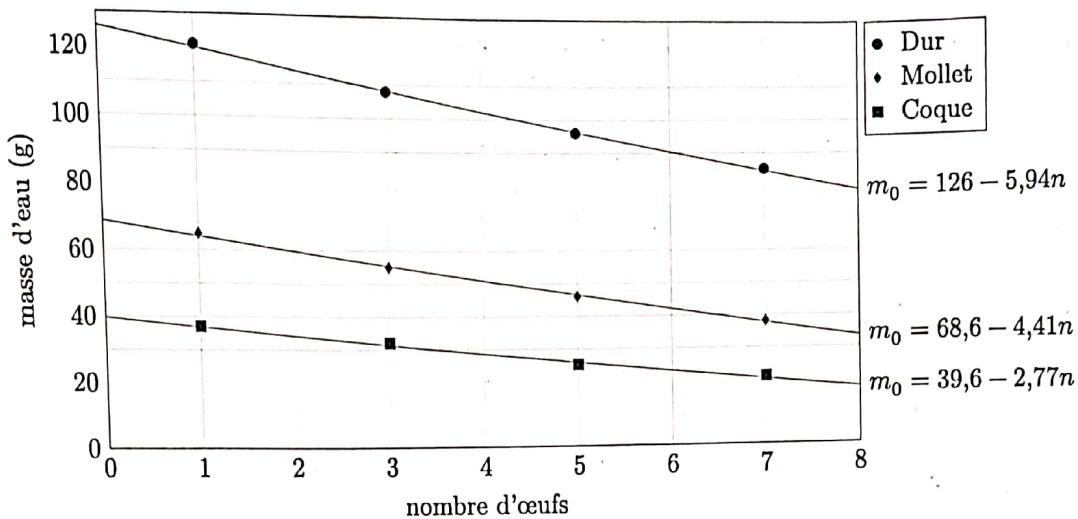


Figure 8 Masse d'eau à introduire dans le cuiseur en fonction du nombre d'œufs, pour les différents choix de cuisson

## Données

Données à 298 K.

*Extrait du tableau périodique (masses molaires en g·mol<sup>-1</sup>)*

Numéro atomique	1	6	7	8	11	12	17
Symbol	H	C	N	O	Na	Mg	Cl
Masse molaire	1,01	12,0	14,0	16,0	23,0	24,3	35,5

### Rayons ioniques

$$\text{Na}^+ = 97,0 \text{ pm}$$

$$\text{Cl}^- = 181 \text{ pm}$$

### Potentiels standards

$$\text{Na}^+_{(\text{aq})}/\text{Na}_{(\text{s})} = -2,71 \text{ V} \quad \text{H}^+_{(\text{aq})}/\text{H}_2_{(\text{g})} = 0 \text{ V} \quad \text{O}_2_{(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})} = 1,23 \text{ V} \quad \text{Cl}_2_{(\text{g})}/\text{Cl}^-_{(\text{aq})} = 1,36 \text{ V}$$

### Couple acide/base : HClO/ClO<sup>-</sup>

### Données sur NaCl

$$K_s(25^\circ\text{C}) = 36,0$$

solubilité à 100 °C : 391,2 g·L<sup>-1</sup>

température de fusion : 801 °C

### Données sur HCl<sub>(g)</sub>

enthalpie standard de formation : -92,3 kJ·mol<sup>-1</sup>

capacité thermique molaire standard : 29,1 J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup>

### Données sur l'eau

masse volumique : 1000 kg·m<sup>-3</sup>

capacité thermique massique : 4180 J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>

conductivité thermique : 0,6 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>

chaleur latente massique de vaporisation : 2,26 × 10<sup>6</sup> J·kg<sup>-1</sup>

produit ionique :  $K_e = 10^{-14}$

température d'ébullition sous 1 bar : 100 °C

### Constantes

Constante d'Avogadro

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$F = N_A e = 96,5 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

On prendra  $\frac{RT}{F} \ln x \approx 0,06 \log x$  et  $T(\text{K}) = \theta(\text{°C}) + 273$ .

• • • FIN • • •

# Mesure de la conductivité thermique du cuivre

Un dispositif permettant la mesure de la conductivité thermique est constitué par une barre cylindrique AB d'axe Ox, de longueur  $L$  de rayon  $r$  isolée thermiquement sur sa face latérale. La face de droite ( $x_B = L$ ) est au contact de l'air atmosphérique de température  $T^\circ$  et on admettra que sa température reste constamment  $T^\circ$ . La mesure de la température en divers points de la barre est faite à l'aide de petites thermistances dont la résistance  $R$  dépend de la température suivant la loi approchée valide dans la gamme de températures utilisée  $\Delta R = \alpha \Delta T$ . Ces thermistances sont en contact avec la barre et régulièrement espacées selon l'axe Ox. Leur petite taille permet de supposer qu'elles sont en permanence à la même température que la partie de la barre de même abscisse et qu'elles ne perturbent pas la répartition de température. Des ohmmètres indiquent la valeur des résistances. La face de gauche ( $x_A = 0$ ) est en contact avec une résistance chauffante alimentée en courant alternatif par un générateur. La température  $T$  dans la barre ne dépend que de  $x$  et du temps  $t$  et on pose  $\theta(x, t) = T(x, t) - T^\circ$  ( $\theta$  est défini pour  $x \in [0, L]$ ).

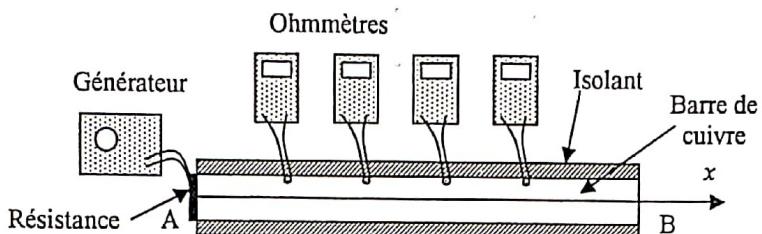


Figure 1 Dispositif expérimental

## I Alimentation en régime sinusoïdal.

1. On note  $D$  la diffusivité thermique du cuivre. Rappeler son expression en fonction de la conductivité thermique  $\lambda$ , de la masse volumique  $\mu$  et de la capacité thermique massique  $c$  du cuivre. Quelle est sa dimension ?

2. On suppose que le cuivre suit la loi de Fourier et que les coefficients  $\lambda$  et  $D$  sont indépendants de la température. Établir l'équation différentielle de diffusion notée (E<sub>1</sub>) vérifiée par  $T(x, t)$  puis par  $\theta(x, t)$ .

Le générateur délivre un signal sinusoïdal. On admet que dans ces conditions, la température en A vérifie  $\theta(0, t) = \theta_1 + \theta_0 \cos \omega t$  de représentation complexe associée  $\tilde{\theta}(0, t) = \theta_1 + \theta_0 e^{i\omega t}$ .

3. Dans le cas où  $\theta_0$  est nul, quelle est l'expression de  $\theta(x, t)$  en régime permanent ? Donner sans calcul une estimation  $\tau_1$  de la durée caractéristique du régime transitoire qui précède ce régime permanent.

4. On s'intéresse maintenant au cas où  $\theta_1$  est nul et  $\theta_0$  non nul et on cherche une solution complexe à (E<sub>1</sub>) sous la forme  $\tilde{\theta} = \tilde{f}(x) e^{i\omega t}$  où  $\tilde{f}$  est une fonction à valeurs complexes. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\tilde{f}$  ? Quelle en est

la solution générale (on posera  $k = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$  et on introduira deux constantes d'intégration) ?

5. Montrer que si  $\exp(kL) \gg 1$  une des deux constantes d'intégration est très petite (en module) devant l'autre. On remplacera pour la suite cette petite constante par 0. Commenter alors l'expression de la fonction réelle  $\theta(x, t)$ .

6. La figure 2 représente l'évolution au cours du temps de la résistance des thermistances placées en  $x = 8$  cm et en  $x = 16$  cm. Laquelle des deux courbes est associée à  $x = 16$  cm ?

7. Première méthode de détermination de  $D$  : on note  $a(x)$  l'amplitude des oscillations de température à l'abscisse  $x$ . Que peut-on dire du graphe de la fonction de  $x$  :  $\log_e(a(x))$  ? On note  $p$  sa pente. Donner l'expression (qui sera notée pour la suite  $D_1$ ) de  $D$  en fonction de  $p$  et de  $\omega$ . Utiliser la figure 2 pour donner la valeur numérique de  $D_1$ .

8. Seconde méthode de détermination de  $D$  : on note  $v$  la vitesse de phase des ondes thermiques étudiées. Donner l'expression (qui sera notée par la suite  $D_2$ ) de  $D$  en fonction de  $v$  et  $\omega$ . Utiliser la figure 2 pour donner la valeur numérique de  $D_2$ .

9. Commenter les méthodes utilisées et les résultats obtenus.

10. Proposer une méthode expérimentale de détermination de  $c$ . Pour le cuivre  $\mu = 8960 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c = 385 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Donner la valeur de la conductivité thermique  $\lambda$  du cuivre.

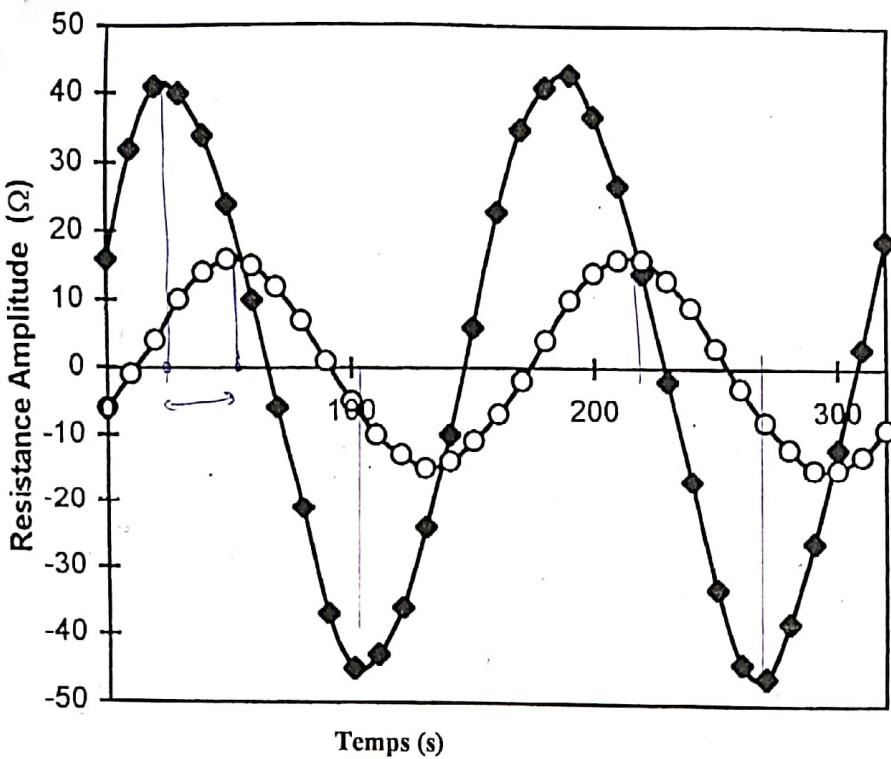


Figure 2 Résultats expérimentaux

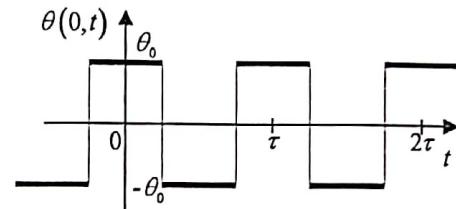


Figure 3 Température en A (Question III.4)

## II Prise en compte des pertes thermiques latérales

L'isolation thermique latérale n'est pas parfaite. On en tient compte en modélisant le flux thermique surfacique cédé par le cuivre à l'extérieur au niveau de sa surface latérale à l'abscisse  $x$  par  $\phi(x,t) = h(T(x,t) - T^{\circ}) = h\theta(x,t)$  où le coefficient conducto-convectif  $h$  est indépendant de  $x$  et de  $t$ .

1. Montrer que l'équation (E<sub>1</sub>) doit être remplacée par (E<sub>2</sub>) de la forme  $\frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha\theta = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  et donner les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $\lambda$ ,  $D$ ,  $h$  et  $r$ .

2. On cherche à cette équation une solution complexe sous la forme  $\tilde{\theta} = \theta_0 e^{i(\omega t - Kx)}$  dans laquelle  $K$  est une constante complexe. Que vaut le produit des parties réelle et imaginaire de  $K$  ?

3. On utilise les méthodes du I pour donner deux estimations  $D_1$  et  $D_2$  de  $D$ . Exprimer  $p$  (voir la définition au I.7) et  $v$  (voir I.8) en fonction des parties réelle et imaginaire de  $K$ . Montrer alors qu'une combinaison bien choisie de  $D_1$  et  $D_2$  (calculés avec les formules du I.7 et du I.8) permet de connaître  $D$  sans avoir à se préoccuper de la valeur non nulle de  $h$ .

## III Réalisation pratique (choix des caractéristiques du dispositif).

1. On désire faire des mesures avec des capteurs répartis tout au long de la barre. On impose alors  $kL \approx 6$ . Pourquoi ne pas choisir  $kL$  plus petit ? Pourquoi ne pas le choisir plus grand ? Écrire la condition en fonction de  $D$ ,  $L$  et  $\omega$ .

2. Les mesures ne peuvent être effectuées qu'une fois le régime forcé établi, donc après la fin du régime transitoire. On considère que c'est le cas au bout d'une durée  $2\tau_1$  (voir I.3) et on accepte d'attendre environ une heure. En déduire une condition portant sur  $D$  et  $L$ .

3. A partir des questions précédentes donner les valeurs recommandées pour  $L$  et la période  $\tau$  du générateur.

4. La valeur trouvée pour  $\tau$  rend difficile l'utilisation d'un générateur sinusoïdal. On préfère fabriquer un oscillateur à relaxation qui engendre une variation de température en A en crêtes d'amplitude  $\theta_0$  (voir figure 3). On rappelle qu'on peut alors écrire  $\theta(x=0,t) = \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1} \cos \frac{2\pi(2q+1)}{\tau} t$  (seuls les harmoniques impairs sont présents).

Donner dans ce cas, en exploitant les résultats du I.5 (c'est-à-dire sans tenir compte des pertes latérales) l'expression  $\theta(x,t)$  de la température en un point quelconque. On note  $a_1(x)$  et  $a_3(x)$  les amplitudes des oscillations de température à l'abscisse  $x$  : des harmoniques de rang 1 ( $q = 0$ ) et 3 ( $q = 1$ ). Calculer le rapport  $\frac{a_3(x)}{a_1(x)}$ . Faire l'application numérique pour  $x = 16$  cm,  $\tau = 160$  s et conclure sur la validité des calculs effectués dans la partie I.

# Centrale-Supélec PSI 2016 Physique-Chimie 2

## Partie II De la cuisson des œufs

### A – Chauffage de l'eau

Le système {eau, cuiseur} se comporte comme une masse  $m_0 + m_c$  d'eau. En lui appliquant le premier principe ( $\Delta H = Q$ ),  $(m_0 + m_c)c(T_{eb} - T_0) = \mathcal{P}\Delta t_1$ . Avec les valeurs numériques de l'énoncé on obtient  $m_c = 32\text{ g}$ .

### B – Détermination de la durée de cuisson $\Delta t_2$

#### B.1) Mécanisme de la cuisson des œufs

L'énoncé semble inciter à répondre que la cuisson libère de la vapeur d'eau dont la pression pourrait faire éclater la coquille. C'est incorrect car la température ne va pas dépasser  $T_{eb}$  donc la pression de la vapeur d'eau ne va pas dépasser 1 bar. Par contre, percer la coquille est utile car l'œuf possède une poche d'air dont la pression, augmentant avec la température (à volume constant) pourrait casser la coquille.

#### B.2) Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Question de cours (à rédiger avec soin)  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$  qui devient, par les changements de variables linéaires proposés,  $\frac{\mu c \frac{\partial T}{\partial t}}{\theta \frac{\partial}{\partial \tau}} = \frac{\lambda}{r_2^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)$ . C'est en accord avec l'énoncé si  $\theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$ .

La dépendance de l'échelle de temps en carré de l'échelle de distance est typique d'un phénomène de diffusion et était prévisible par analyse dimensionnelle.

#### B.3) Résolution de l'équation de la chaleur

a) On reporte l'expression proposée dans l'équation différentielle :  $f(\rho) \frac{dg}{d\tau} = g(\tau) \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right)$ . En divisant par le produit  $fg$  (ce produit sera strictement négatif sauf en  $\rho = 1$ ) on obtient  $\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right)$ . Le membre de gauche ne dépend pas de  $\rho$  et celui de droite ne dépend pas de  $\tau$ . Comme ils sont égaux pour toutes les valeurs de  $\rho$  et  $\tau$ , il ne doivent dépendre de rien. Ils sont constants. Si cette constante était positive, cela conduirait à des températures divergentes au cours du temps, ce qui n'est pas possible dans un problème de diffusion thermique où la diffusion lisse les variations de température. La constante est donc négative. On l'écrit sous la forme  $-A^2$  et, alors, nécessairement, à une constante multiplicative près,  $g(\tau) = \exp(-A^2\tau)$ .

$$b) \rho^2 \frac{df}{d\rho} = \rho^2 \frac{d}{d\rho} \left( \frac{F}{\rho} \right) = \rho \frac{dF}{d\rho} - F \text{ dont la dérivée par rapport à } \rho \text{ est } \rho \frac{d^2F}{d\rho^2}.$$

$$\text{Alors } -A^2 = \frac{1}{f} \frac{1}{\rho^2} \times \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) = \frac{1}{F} \frac{1}{\rho} \times \rho \frac{d^2F}{d\rho^2} = \frac{1}{F} \frac{d^2F}{d\rho^2}. \text{ On obtient bien } \frac{d^2F}{d\rho^2} + A^2 F = 0.$$

La solution générale de cette équation est  $F(\rho) = \alpha \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho)$ . Or  $f = F/\rho$  ne peut pas diverger lorsque  $\rho$  tend vers 0 (le centre de l'œuf n'est pas un point singulier) donc  $F$  doit tendre vers 0 lorsque  $\rho$  tend vers 0.  $\alpha$  est donc nul et, finalement,  $f(\rho) = \beta \frac{\sin(A\rho)}{\rho}$ .

c) On a trouvé, par cette méthode de séparation des variables, une famille de solutions, chaque élément de la famille étant associé à une valeur de la constante  $A$ . Comme l'équation de diffusion est linéaire, la superposition de ces solutions est encore une solution. C'est la forme proposée par l'énoncé.  
Il reste à vérifier les conditions aux limites en  $r = r_2$ , c'est-à-dire pour  $\rho = 1$  et la condition initiale  $T(\rho, \tau = 0) = T_0$ .

#### B.4) Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

a) La continuité du flux surfacique en  $r = r_2$  y impose  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_{eb})$ .

Or  $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r_2} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\beta}{r_2} \left( \frac{A \cos(A\rho)}{\rho} - \frac{\sin(A\rho)}{\rho^2} \right) g(\tau)$  vaut  $\frac{\beta}{r_2} (A \cos A - \sin A) g(\tau)$  en  $\rho = 1$ . La condition est donc  $-\lambda \frac{\beta}{r_2} (A \cos A - \sin A) g(\tau) = h\beta \sin A g(\tau)$  qui conduit effectivement à  $\tan A = \frac{A}{1 - r_2 h / \lambda}$ .

- b)  $r_2 h / \lambda = 50 \gg 1$ . L'équation est  $\tan A = -\frac{A}{49}$ . Le membre de droite est sans doute petit devant 1 donc  $\tan A$  est proche de 0. La plus petite valeur de  $A$  associée est donc proche de  $\pi$ . On peut alors estimer que le membre de droite est  $-\pi/49 = -6,3 \times 10^{-2}$  et la condition  $\tan A \simeq -6,3 \times 10^{-2}$  mène à  $A \simeq \pi - 6,3 \times 10^{-2}$  rad.
- c) En prenant  $A = \pi$ ,  $T = T_{\text{eb}} + \beta \frac{\sin(\pi\rho)}{\rho} \exp(-\pi^2\tau)$  qui vaut  $T_{\text{eb}}$  à la surface de l'œuf. Le contact conducto-conductif avec la vapeur d'eau est parfait. Cela revient à prendre  $h = \infty$ .
- d) Si on veut qu'au centre de l'œuf la température donnée par cette formule soit égale à  $T_0$  à l'instant initial il faut prendre  $\beta = (T_0 - T_{\text{eb}})/\pi$  et alors  $T = T_{\text{eb}} + (T_0 - T_{\text{eb}}) \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} \exp(-\pi^2\tau)$ .

### B.5) Calcul de la durée de cuisson $\Delta t_2$ pour un œuf dur

La température au centre atteint  $T_c$  si  $T_c = T_{\text{eb}} + (T_0 - T_{\text{eb}}) \exp(-\pi^2\tau)$  donc  $\Delta t_2 = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda \pi^2} \ln \left( \frac{T_0 - T_{\text{eb}}}{T_c - T_{\text{eb}}} \right)$ .  $\Delta t_2 = 612 \text{ s} \approx 10 \text{ min}$ . Cela correspond tout à fait avec la durée usuelle de cuisson d'un œuf dur.

## C – Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

### C.1) Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur

- a) À la fin de la cuisson, tous les points de l'œuf sont au moins à la température  $T_c$ . L'énergie à fournir pour arriver à cet état est donc supérieure à  $\mathcal{E}_{d \text{ min}} = C(T_c - T_0)$ .  $\mathcal{E}_{d \text{ min}} = 16,4 \text{ kJ}$ .
- b) À la fin de la cuisson, tous les points de l'œuf sont à une température inférieure à  $T_{\text{eb}}$ . L'énergie à fournir pour arriver à cet état est donc inférieure à  $\mathcal{E}_{d \text{ max}} = C(T_{\text{eb}} - T_0)$ .  $\mathcal{E}_{d \text{ max}} = 21,9 \text{ kJ}$ .
- c)  $\mathcal{E}_d = 19,2 \text{ kJ}$ .

**C.2)** Ici, il n'y a pas de pièces mobiles dans le cuiseur donc pas de travail reçu.  $h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}} = \ell_v$ . Les transferts thermiques *massiques* à prendre en compte sont :

- de la part du cuiseur (résistance et socle) :  $(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) / D_m$ ,
- de la part des  $n$  œufs :  $-\frac{n}{D_m} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ .

Le premier principe  $h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}} = q$  conduit donc à  $D_m \ell_v = \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ .

**C.3)** On suppose  $\mathcal{P} - \mathcal{P}_f$  constant et on intègre la relation de la question précédente par rapport au temps du début à la fin de la cuisson :  $m_0 \ell_v = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - n \mathcal{E}_X$ . La masse d'eau nécessaire pour la cuisson des œufs est donc plus petite si le nombre d'œufs est plus grand ! La cuisson d'un plus grand nombre d'œufs accapare une plus grande partie de la puissance de la résistance ce qui diminue le débit de vaporisation d'eau. Comme la durée de cuisson est indépendante du nombre d'œufs, la consommation d'eau est alors plus faible.

**C.4)** Pour 7 œufs durs, la puissance minimale est telle que  $(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 - 7 \mathcal{E}_X > 0$ . Ici,  $\mathcal{P} > \frac{7 \mathcal{E}_X}{\Delta t_2} = 220 \text{ W}$ . La puissance  $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$  de l'appareil semble suffisante mais il ne faut pas oublier qu'une partie de la puissance doit être associée à l'énergie  $m_0 \ell_v$  (voir C.3).

**C.5)** La masse est bien fonction affine de  $n$ . La pente (en valeur absolue) des droites devrait être  $\mathcal{E}_X / \ell_v$ . Elle est effectivement plus faible pour dans le cas mollet ou coque. Pour les œufs durs  $\mathcal{E}_X = 5,94 \text{ g} \times \ell_v = 13,4 \text{ kJ}$ . Cette valeur est proportionnelle au cube du rayon donc  $r = 2,5 \text{ cm} \sqrt[3]{13,4/19} = 2,2 \text{ cm}$ . Il faut une masse plus faible pour les œufs à la coque car la durée de cuisson est nettement plus faible alors que l'énergie  $\mathcal{E}_X$  n'est pas beaucoup plus faible.

L'ordonnée à l'origine devrait être  $\frac{(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2}{\ell_v}$ . En prenant  $\Delta t_2 = 10 \text{ min}$  (qui est la durée de cuisson usuelle des œufs durs) et l'ordonnée 126 g cela conduit à  $\mathcal{P} - \mathcal{P}_f = 475 \text{ W}$ . La puissance donnée en début d'énoncé semble incorrecte. 500 W serait plus cohérente.

La durée de cuisson est proportionnelle à l'ordonnée à l'origine. Avec le graphe, la durée de cuisson « à la coque » serait  $\frac{39,6}{126} \times 10 \simeq 3 \text{ min}$ . C'est la valeur usuelle. De même on trouve 5,5 min pour l'œuf mollet.

## Mesure de la conductivité thermique du cuivre : corrigé

I.1  $D = \frac{\lambda}{\mu c}$      $[D] = [L]^2 [T]^{-1}$

I.2 En dimension 1  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  (E1)

I.3 En régime permanent,  $\theta$  est fonction affine de  $x$ . Avec les conditions aux limites en 0 et  $L$ ,  $\theta = \theta_1(1 - x/L)$ . Le temps caractéristique cherché dépend de  $D$  et  $L$ . Par analyse dimensionnelle  $\tau_i = L^2/D$ .

I.4 En reportant dans (E1) on obtient  $i\omega \tilde{f} = D \frac{d^2 \tilde{f}}{dx^2}$ . La solution générale en est  $\tilde{f}(x) = \alpha \exp(i\omega t + kx) + \beta \exp(-i\omega t - kx)$ .

I.5 En  $x = L$ ,  $\tilde{f}$  doit être nul donc  $\alpha/\beta = -\exp(2i\omega t + 2kL)$  d'où  $|\alpha/\beta| = \exp(-2kL) \ll 1$ . En prenant  $\alpha$  nul,  $\beta$  vaut  $\theta_0$  pour respecter la condition aux limites en  $x = 0$  et  $\theta(x, t) = \theta_0 \exp(-kx) \cos(\omega t - kx)$ . Il s'agit d'une onde thermique progressive harmonique, atténuee exponentiellement au cours de sa propagation.

I.6 Les points blancs sont associés à une amplitude plus faible donc à  $x = 16$  cm.

I.7  $a(x) = \theta_0 \exp(-kx)$ . Le graphe demandé est donc un segment de droite de pente  $p = -k$ . On en déduit  $D_1 = \frac{\omega}{2p^2}$ . Sur la figure 2 on lit la période des oscillations : 160 s et le rapport des amplitudes 0,35 dont le logarithme vaut 1,04. On obtient alors  $p$  puis  $D_1 = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

I.8 La vitesse de phase est  $v = \omega/k = \sqrt{2D\omega}$  donc  $D_2 = v^2/2\omega$ . Sur la figure 2 on lit le retard associé au passage de 8 cm à 16 cm : 26 s. La vitesse de phase est donc de  $3,1 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $D_2 = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

I.9 La seconde méthode est ambiguë car on détermine le retard modulo la période du signal. Il faut donc connaître un ordre de grandeur de ce retard pour lever l'ambiguité ou utiliser plus de points de mesure (ce qui est de toute façon également indispensable avec l'autre méthode pour améliorer la précision des mesures). L'accord entre les deux résultats est très bon et on peut estimer que  $D = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

I.10 Calorimétrie : on peut plonger un bloc de cuivre chaud dans de l'eau froide et mesurer la température finale du système global (isolé thermiquement) ou mesurer l'élévation de température d'un bloc de cuivre isolé dans lequel passe un courant (on mesure courant, tension et durée  $\Rightarrow mc\Delta T = UIt$ )  $\lambda_{Cu} = \mu c D = 410 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Cette valeur est très proche de la valeur trouvée dans les tables :  $\lambda_{Cu} = \mu c D = 400 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . L'écart peut facilement être justifié par le peu de précision des valeurs lues sur la figure et l'emploi de seulement deux points de mesure.

II.1 Un bilan énergétique portant sur une tranche de longueur  $dx$ , de section  $\pi r^2$  et d'aire latérale  $2\pi r dx$  s'écrit :

$$\pi r^2 dx \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \pi r^2 (\phi(x) - \phi(x+dx)) - 2\pi r dx h \theta. \quad \text{En combinant avec la loi de Fourier } \phi = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \text{ on trouve} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2h}{r\mu c} \theta \text{ ce qui est de la forme attendue avec } \alpha = \frac{2hD}{\lambda r} \text{ et } \beta = D.$$

II.2 En reportant l'expression proposée dans (E2) on obtient la condition  $K^2 = -(i\omega + \alpha)/\beta$  donc le produit des parties réelle et imaginaire de  $K$  est  $K_r K_i = -\omega/2\beta$  (puisque  $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ ).

II.3 La valeur réelle de  $\theta$  est alors  $\theta = \theta_0 \exp(K_r x) \cos(\omega t - K_r x)$  donc  $p = K_r$  et  $v = \omega/K_r$ . Alors  $D_1 = \omega/2K_r^2$  et  $D_2 = \omega/2K_r^2$  et, grâce à la question II.2 on obtient  $D_1 D_2 = \omega^2/4K_r^2 K_r^2 = \beta^2 = D^2$  soit  $D = \sqrt{D_1 D_2}$ . Il suffit donc d'utiliser les deux méthodes de la partie I sans tenir compte des pertes latérales. Les deux valeurs trouvées sont différentes de la diffusivité du cuivre mais leur moyenne géométrique est égale à la diffusivité cherchée.

III.1 Il faut prendre  $kL$  assez grand pour respecter la condition du I.5 et donc travailler avec des ondes progressives. Mais si il est trop grand, l'atténuation le long de la barre sera trop forte et il sera impossible de mesurer les oscillations de température sauf pour les points très proches de A. La condition s'écrit  $\omega L^2 = 72D$ .

III.2  $L^2 \approx 1800 D$      $L \approx 50 \text{ cm}$      $\omega \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$  donc une période  $\tau \approx 160 \text{ s}$  ce qui correspond à la valeur expérimentale utilisée.

III.4 L'équation de diffusion étant linéaire, la réponse à une superposition de sinusoïdes est la somme des réponses à chaque

sinusoïde donc  $\theta(x, t) = \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1} \exp(-k_q x) \cos\left(\frac{2\pi(2q+1)}{\tau} t - k_q x\right)$ ,  $k_q$  étant calculé à partir de la pulsation associé au terme de rang  $q$ :  $k_q = \sqrt{\frac{\pi(2q+1)}{D\tau}}$ . Alors,  $\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{3} \exp((k_0 - k_1)x) = \frac{1}{3} \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{D\tau}}(1 - \sqrt{3})x\right)$ . Pour  $x = 16 \text{ cm}$  on obtient

$a_3/a_1 = 8\%$ . L'influence des harmoniques est faible mais non négligeable. Cette influence étant plus importante à 8 cm de A, les résultats du I sont sans doute imprécis. Il serait préférable d'utiliser les mesures effectuées pour de plus grandes valeurs de  $x$ .