# TD : Dimensions, unités et résultats

## 1 Chiffres significatifs

Faire un calcul en physique, c'est manipuler des grandeurs physiques qui ont une certaine précision. Ainsi, il est important d'exprimer ces résultats avec le bon nombre de chiffres significatifs.

On rappelle que :
— pour une somme, le résultat sera exprimé avec le même nombre de décimales que le nombre qui en a le moins ;
— pour un produit, le résultat aura autant de chiffres significatifs que le terme qui en a le moins.

| | | |
|---|---|---|
| $0,1+0,055$ | $1033/3,0$ | $1{,}03\cdot 10^5 - 3\cdot 10^3$ |
| $10/\pi$ | $(1,1\times 0,4)/(1,1+0,4)$ | $3{,}25\cdot 10^{-6}+1\cdot 10^{-9}$ |
| $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ | $mv^2/2$ avec $m = 90{,}0\,\mathrm{kg}$ et $v = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ | |

## 2 Homogénéité

Une équation inhomogène est nécessairement fausse. Une équation homogène n'est pas nécessairement juste, mais c'est une vérification à faire lorsqu'on obtient un résultat.

Contrôler l'homogénéité des expressions suivantes :

— Évolution d'une tension : $u(t) = E(1-\exp(-t/RC))$ ;
— Longueur d'onde d'une onde de vitesse $v$ et de fréquence $f$ : $\lambda = v/f$ ;
— Résistance équivalente de deux résistances en parallèle : $R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$
— Abscisse d'un objet en chute libre : $x(t) = gt^2/2 + v_0t + 2$.

## 3 Analyse dimensionnelle pour un poulet

Le temps de cuisson d'un poulet dépend de la possibilité pour la chaleur de se propager à travers celui-ci. Pour cela, il existe un paramètre physique qui dépend du matériau appelé diffusivité thermique et qui s'exprime en $\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$.

**1.** Par quelle forme géométrique simple est-il possible de modéliser le poulet ?

**2.** On suppose que le temps de cuisson ne dépend que de la diffusivité thermique et du volume du poulet. S'il faut 1h30 pour cuire un poulet de 2 kg, combien de temps faut-il pour cuire un poulet de 3 kg ?

## 4 Intégrales et dérivées

**1.** Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{4x + 9x^2}$
- $g(x) = \tan(x^2 + 1)$
- $h(t) = 3\sin(5t)$
- $i(x) = (1 + x^{12})^4$

**2.** Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

- $f(y) = \displaystyle\int \frac{4\exp(y)}{\exp(y)+1}\mathrm{d}y$
- $g(x) = \displaystyle\int 10\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{d}x$
- $h(x) = \displaystyle\int 3x(1-4x^2)^5\,\mathrm{d}x$
- $i(x) = \displaystyle\int \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$
- $j(t) = \displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$
- $k = \displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\mathrm{d}x$
- $l = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$

## 5 Un peu de calcul

Mettre les fractions ci-dessous sous leur forme irréductible.

- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$
- $\dfrac{\dfrac{5}{2}+\dfrac{6}{5}}{\dfrac{4}{7}}$
- $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{6}{7}-\dfrac{4}{7}$

## 6 Calculs complexes

**1.** Soient $A \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Donner la partie imaginaire des nombres complexes suivants (avec $j^2 = -1$) :

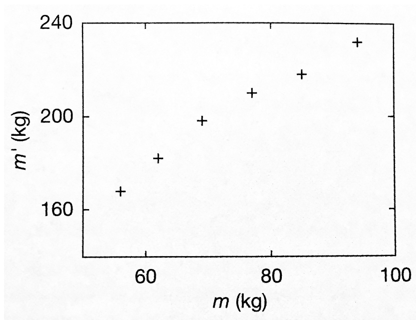
- $-2 + 3j$
- $\dfrac{1}{j}$
- $A\exp(j\varphi)$
- $\exp(-j/\pi)$
- $\exp(-j\pi)$
- $(1+3j) + (2-j)$
- $(1+3j) \times (2-j)$

**2.** Donner le module et l'argument des nombres complexes ci-dessous. On les placera sur un graphique à deux dimensions représentant le plan complexe. On prend $a$ et $b$ deux réels positifs.

- $a + jb$
- $-a + jb$
- $-a - jb$
- $a + b$
- $a - b$
- $\dfrac{ja}{1+b}$
- $-\dfrac{a}{jb}$
- $\dfrac{1+ja}{1-ja}$
- $(1+ja) \times (1+2ja)$

## 7 Haltérophilie

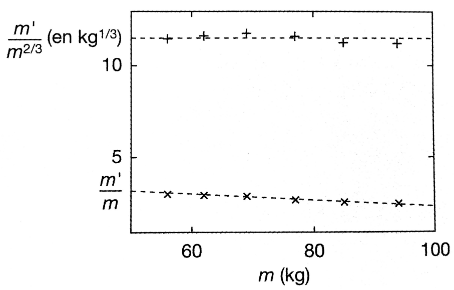
La courbe ci-dessous présente les records du monde en 2012 de masses $m'$ soulevées à l'épaule-jeté par les haltérophiles en fonction de leur masse $m$ (donc pour différentes catégories sportives). On note $L$ la taille typique de l'haltérophile.




**1.** Supposons que la force $F$ développée par un haltérophile est proportionnelle au volume de la personne. Comment dépend-telle de la masse ?

**2.** Supposons que la force $F$ est proportionnelle à la section d'un membre de l'athlète. Comment dépend-elle de sa masse ?

**3.** On trace ensuite la masse totale soulevée par la masse de l'athlète à la puissance $\alpha$ ($\alpha = 1$ en bas et $\alpha = 2/3$ en haut) en fonction de la masse de l'athlète. Qu'en conclure ? Essayer d'interpréter en supposant que les muscles sont constitués de fibres de taille fixée.




**4.** En déduire que les géants ne peuvent pas exister.

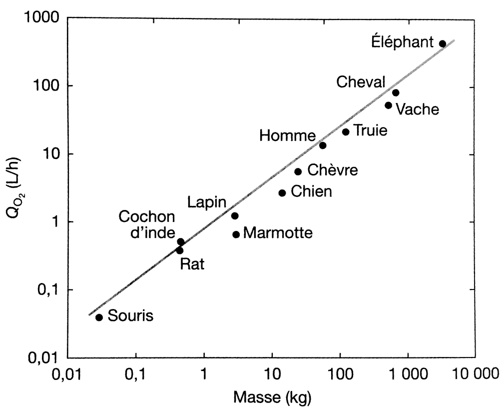
## 8 Estimations d'ordre de grandeur

Donner les ordres de grandeur suivants, à l'aide d'un calcul et sans donnée supplémentaire :

— Quel est le nombre de cheveux sur une tête (diamètre d'un cheveu : 20 µm) ?
— La circonférence de la Terre est d'environ 40 000 km. Estimer le rayon et la masse de la Terre.
— Achetez-vous une montre précise à 99,9 %.
— Quelle est la vitesse de marche normale d'un être humain ?

## 9 De la souris à l'éléphant

On dira qu'une fonction $y(x)$ vérifie une loi d'échelle d'exposant $\alpha$ si $y$ est proportionnel à $x^\alpha$. De nombreux paramètres physiologiques concernant les espèces animales d'un même groupe zoologique obéissent à de telles lois. Ainsi, les mammifères terrestres ayant une température corporelle de 37 °C vérifient assez bien la relation $Q_{O_2} = 0,68 M_c^{3/4}$, où $M_c$ désigne la masse corporelle en kilogramme et $Q_{O_2}$ la consommation en litre par heure au repos, dans des conditions expérimentales précises non détaillées ici. Cette loi, découverte en 1932 par M. Kleiber, peut être mise en rapport avec la puissance thermique dégagée par le métabolisme de l'animal.




**1.** Les morphologies des animaux d'un même groupe étant voisines, le volume de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de cœur est à peu près proportionnel à la masse corporelle $M_c$. Sachant que pour un homme de 70 kg, la fréquence cardiaque est d'environ 70 battements par minute, déterminer la loi d'échelle exprimant la fréquence cardiaque $f_c$ d'un animal, en battements par minute, en fonction de sa masse corporelle $M_c$ en kilogramme.

**2.** Étudier la validité de la loi précédente pour la souris, le lapin et l'éléphant à l'aide du tableau ci-dessous.

| | Souris | Lapin | Renard | Éléphant |
|---|---|---|---|---|
| $M_c$ (kg) | 0,015 | 2,0 | 3,0 | 3000 |
| $f_c$ (batt/min) | 620 | 210 | | 37 |
| $\tau_{vie}$ (années) | 3,5 | | 14 | 80 |

**3.** Le tableau précédent donne également la durée de vie moyenne $\tau_{vie}$ de quelques mammifères terrestres.

**3.a.** À l'aide de ces valeurs numériques, déterminer l'exposant de la loi d'échelle $\tau_{vie}(M_c)$.

**3.b.** Proposer une interprétation de cette loi.

**3.c.** Le cas de l'homme vérifie-t-il cette loi ? Commenter.