Dérivation

Exercice 1 : Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
3. $x \mapsto e^x \sin x$
4. $x \mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 2 : Soit f dérivable n fois dérivable sur $[a,b]$. Monter que si f s'annule $n+1$ fois sur $[a,b]$ alors $f^{(n)}$ s'annule sur $[a,b]$.

Exercice 3 :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $c \in]a,b[$.
En utilisant la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$, montrer qu'il existe η tel que

$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f"(\eta)$$

Exercice 4 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.
En utilisant la fonction

$$\phi : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \lambda(x-a)(x-b)$$

avec λ à déterminer, montrer qu'il existe η tel que

$$f(c) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(\eta)$$