Équations différentielles linéaires

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Premier exemple

Soit $a \in \mathbb{K}$. On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = af(t)$$

On dit que l'on résout l'équation différentielle $y' = ay$.

Théorème. *(*) Soit $a \in \mathbb{K}$. Les solutions dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions*

$$t \mapsto \lambda e^{at} \quad \textit{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

2. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On cherche les fonctions f dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = 0.$$

On dit que l'on résout l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 $y' + a(x)y = 0$ ou $y' + ay = 0$. Le caractère homogène signifie que le second membre de l'équation différentielle est nul.
L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sera noté $\mathcal{S}_0$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \ : \ \forall t \in I, \ f'(t) + a(t)f(t) = 0\}$$

où $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition. *(*) L'ensemble $\mathcal{S}_0$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire i.e.*

$$\forall (f_1, f_2) \in {\mathcal{S}_0}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{S}_0$$

Remarque : L'ensemble $\mathcal{S}_0$ a une structure d'espace vectoriel

Théorème. *(*) Si l'on note A une primitive de la fonction a sur I, alors*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

On dit que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle.

Remarque : Une solution de l'équation différentielle est donc identiquement nulle si et seulement si elle s'annule en un point.

Exercice. *Résoudre* $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$ *sur* $]-1, 1[$.

3. Equations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$(E)\ :\ y' + ay = b$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Résoudre cette équation différentielle consiste à déterminer les fonctions f dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sera noté $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})\ :\ \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = b(t)\}$$

L'équation $y' + ay = 0$ est appelée l'équation homogène associée et l'on note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble de ses solutions.

Proposition. *(*) L'ensemble $\mathcal{S}$ vérifie la propriétés suivantes :*

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{S}^2,\ f_1 - f_2 \in \mathcal{S}_0$$

De plus, si $f \in \mathcal{S}$, alors

$$\mathcal{S} = \{f + f_0,\ f_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Remarque : Pour déterminer $\mathcal{S}$, il suffit donc de déterminer $\mathcal{S}_0$ et une solution particulière.
On dit que $\mathcal{S}$ a une structure d'espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.

Exercice. *Résoudre $y' + \dfrac{y}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]1, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 1[$.*

Proposition (Principe de superposition)**.** *Si f_1 est solution de $y' + ay = b_1$ et si f_2 est solution de l'équation $y' + ay = b_2$, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y' + ay = b_1 + b_2$*

Proposition. *Lorsque a est constante et que b est de la forme $t \mapsto Be^{\lambda t}$, où $(B, \lambda) \in \mathbb{K}^2$, l'équation admet une solution particulière de la forme*

- *$t \mapsto Ae^{\lambda t}$ si $\lambda + a \neq 0$.*
- *$t \mapsto Ate^{\lambda t}$ si $\lambda + a = 0$.*

Remarque : Pour résoudre $y' + ay = C\cos(\omega x)$ avec a, C et ω des réels, on trouve une solution de $y' + ay = Ce^{i\omega x}$ et on en prend la partie réelle.
Remarque : Lorsque a est constante on peut montrer que l'équation $y' + ay = P(t)e^{\lambda t}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et P est un polynôme de degré d, admet une solution particulière de la forme $t \mapsto e^{\lambda t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré :

- d si $\lambda + a \neq 0$.
- $d + 1$ si $\lambda + a = 0$.

Si $\lambda + a = 0$, alors le polynôme Q n'est pas unique car tout polynôme de la forme $Q + \alpha$ avec α une constante convient. On peut donc chercher un polynôme Q de la forme $XR(X)$, c'est-à-dire de coefficient constant nul.

Exercice. *Résoudre $y' + 2y = t^3e^t$ et $y' + 2y = te^{-2t}$*

Théorème. *(*) L'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide.*

Remarque : Pour trouver une solution particulière lorsque le second membre n'est pas "simple" et que l'on ne trouve pas de solution "évidente", on utilise la méthode de la variation de la constante.
On cherche une solution de la forme $f\ :\ x \mapsto g(x)f_0(x)$ avec g dérivable sur I et $f_0 \in \mathcal{S}_0$ non nulle. On vérifie alors que f est solution si, et seulement si, g est une primitive de $x \mapsto \frac{b(x)}{f_0(x)}$.

Exercice. *Résoudre* $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x+3}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

Théorème (Problème de Cauchy). *(*)*
Pour tout $t_0 \in I$ *et* $x_0 \in \mathbb{K}$, *il existe une unique solution de* (E) *telle que* $f(t_0) = x_0$.

Exercice. *On suppose* a *et* b T*-périodiques et on considère* f *une solution de* $y' + ay = b$. *Montrer que* f *est* T*-périodique si, et seulement si,* $f(0) = f(T)$.

II. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{C}$

On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 :

$$(E_0) \; : \; y'' + ay' + by = 0$$

où a et b sont deux nombres complexes. On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

Proposition. *(*) Soit* $r \in \mathbb{C}$. *La fonction* $t \mapsto e^{rt}$ *est solution de* (E_0) *si et seulement si :*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette dernière équation est appelée équation caractéristique du problème.

Théorème. *(*)*
Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 *et* r_2, *alors*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, *alors*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t},\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

2. Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$

On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 :

$$(E_0) \; : \; y'' + ay' + by = 0$$

où a et b sont deux nombres réels. On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

Théorème. *(*)*
Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 *et* r_2, *alors*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, *alors*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t},\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, *alors*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) e^{rt},\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. Résolution avec second membre

On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 :

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = c(x)$$

avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et c est une fonction continue sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Proposition. *(*) L'ensemble $\mathcal{S}$ vérifie la propriétés suivantes :*

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{S}^2,\ f_1 - f_2 \in \mathcal{S}_0$$

De plus, si $f \in \mathcal{S}$, alors

$$\mathcal{S} = f + \mathcal{S}_0 = \{f + f_0,\ f_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

Proposition. *(*) Soit f une solution de l'équation différentielle avec second membre. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est composé de la somme de f et d'une solution quelconque de l'équation homogène associée i.e.*

$$\mathcal{S} = \{f + g,\ g \in \mathcal{S}_0\}$$

Proposition (Principe de superposition)**.** *(*)*
Si f_1 est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y''+ay'+by = c_1$ et si f_2 est solution de l'équation $y'' + ay' + by = c_2$, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = c_1 + c_2$.

Proposition. *Lorsque c a la forme particulière $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et P est un polynôme de degré n, l'équation admet toujours une solution particulière de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ où Q est un polynôme de degré*

- *n si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique,*
- *$n + 1$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique,*
- *$n + 2$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.*

Remarque : Le polynôme Q introduit ci-dessus n'est pas forcément unique.
Par exemple, si λ est racine simple de l'équation caractéristique, alors tout polynôme de la forme $Q + \alpha$ avec α une constante convient. On recherche donc un polynôme Q de la forme $XR(X)$, c'est-à-dire de coefficient constant nul.
De même, si λ est racine double de l'équation caractéristique, alors tout polynôme de la forme $Q(X) + \alpha X + \beta$ convient.On recherche donc un polynôme Q de la forme $X^2R(X)$.

Remarque : Si a, b, λ sont des réels et si le second membre est de la forme $t \mapsto P(t)\cos(\lambda t)$, alors on cherche une solution de $y'' + ay' + by = P(t)e^{\lambda t}$ et on en prend sa partie réelle.

Théorème. *(*) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle avec second membre $\mathcal{S}$ est non vide.*

Théorème (Problème de Cauchy)**.** *(*)*
Pour tout triplet $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$, qui vérifie

$$\begin{cases} \forall t \in I\ :\ f''(t) + af'(t) + bf(t) & = c(t) \\ f(t_0) & = x_0 \\ f'(t_0) & = v_0 \end{cases}$$

III. Exemples fréquents en Sciences Physiques

Terminons par une liste non exhaustive d'équations différentielles classiques rencontrées dans les autres matières scientifiques.

1. Equations d'ordre 1

L'équation d'ordre un la plus fréquente est

$$y' + \frac{1}{\tau} y = \frac{C}{\tau}$$

dans laquelle τ a la dimension d'un temps. La constante C dépend du problème considéré. Ce peut être une vitesse limite dans le cas de la chute d'un corps, une intensité électrique dans le cas de l'établissement du courant dans un circuit LR...
Dans le cas où la constante C est nulle, on s'intéresse à la solution qui vérifie $y(0) = y_0$, celle-ci est de la forme :

$$y \,:\, t \mapsto y_0 e^{-t/\tau}$$

Elle tend vers 0 avec un temps caractéristique τ. Dans le cas où $C \neq 0$, on s'intéresse à la solution qui vérifie $y(0) = 0$. Celle-ci est de la forme :

$$y \,:\, t \mapsto C(1 - e^{-t/\tau})$$

Cette fois, la limite en $+\infty$ est C.

2. Equations d'ordre 2

Les équation d'ordre deux se rencontrent majoritairement lors de l'étude des phénomènes oscillants. L'exemple fondamental est l'équation homogène

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

dans laquelle $\omega_0 \in \mathbb{R}$ est homogène à une pulsation. La solution générale est de la forme :

$$y \,:\, t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes qui doivent être déterminées à partir des conditions initiales du problème.
Lorsque le modèle physique prend en compte une perte d'énergie, par exemple dans le cas d'un oscillateur amorti, on rencontre l'équation plus complexe suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

avec $\lambda > 0$ homogène à l'inverse d'un temps appelé coefficient d'amortissement.
On dit que le régime est pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$. Dans ce cas, la solution générale est de la forme :

$$y \,:\, t \mapsto e^{-\lambda t} \left(A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right)\right)$$

On dit que le régime est critique lorsque $\lambda = \omega_0$. Dans ce cas, la solution générale est de la forme :

$$y \,:\, t \mapsto e^{-\lambda t}\,(At + B)$$

On dit que le régime est apériodique lorsque $\lambda > \omega_0$. Dans ce cas, la solution générale est de la forme :

$$y\,:\,t \mapsto Ae^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)\,t} + Be^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)\,t}$$

Dans tous les cas, la solution tend vers 0 en $+\infty$ en raison de l'amortissement représenté par λ.