DM08 – correction

Exercice 1 – Distance de freinage

① distance d'arrêt :
- 6 traits (à gauche), 3 m
- 6 espaces, 3,5 m.

d'où $D = 39$ m.

② Système :
→ Système : Voiture, M, m.
→ Référentiel terrestre supposé galiléen.
→ Bilan des forces :
- Poids, $\vec{P}$
- Réaction normale du support $\vec{R_N}$
- Réaction tangentielle $\vec{R_T}$,

③ Forces et TEC :
Les forces $\vec{P}$ et $\vec{R_N}$ se compensent, et seule la réaction tangentielle du support travaille. On a donc :

$$\|\vec{P}\| = mg = \|\vec{R_N}\|$$

et $\Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} = W_{A \to B}(\vec{R_T})$

avec A le point au début du freinage.

→ B, le point à la fin.

et $\vec{R_T}$ étant une force résistante,

on a : $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -f \|\vec{R_N}\| \cdot D - f mg \cdot D$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2fgD} = 24,7 \text{ m.s}^{-1}}$$

soit environ 90 km.h^{-1}, ce qui est au-dessus de la limitation de vitesse.

Exercice 2 : Modélisation d'une plateforme.

1). Système : Masse m,

· Référentiel terrestre supposé galiléen.

· Bilan des forces, les forces introduites dans l'énoncé : $\vec{R_N}$, $\vec{Fd}$, $\vec{F_k}$, $\vec{P}$, $\vec{f_{exc}}$.

On applique le PFD au système :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Fd \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_k \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{exc} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\vec{F_d}$, $\vec{F_k}$ et F_{exc} sont suivant le sens du mouvement, mais pas $\vec{R_N}$ et $\vec{P}$. Et vu que le mouvement est 1D suivant (Ox), $\ddot{y} = 0$, soit $\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$, $\vec{P}$ et $\vec{R_N}$ se compensent.

2) On pose $\vec{Fd} = \vec{0}$, $\vec{F_{exc}} = \vec{0}$, et suivant

Ox, on a :

$$m\ddot{x} = -kx,$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}}.$$

3) Les solutions sont, pour un oscillateur harmonique :

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ x(0) = x_0 = A \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = B\omega_0 \end{cases},$$

soit $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

4) Il est possible de réécrire cette équation : $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$,

et $C = R_0$, est l'amplitude du signal,

soit : $x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

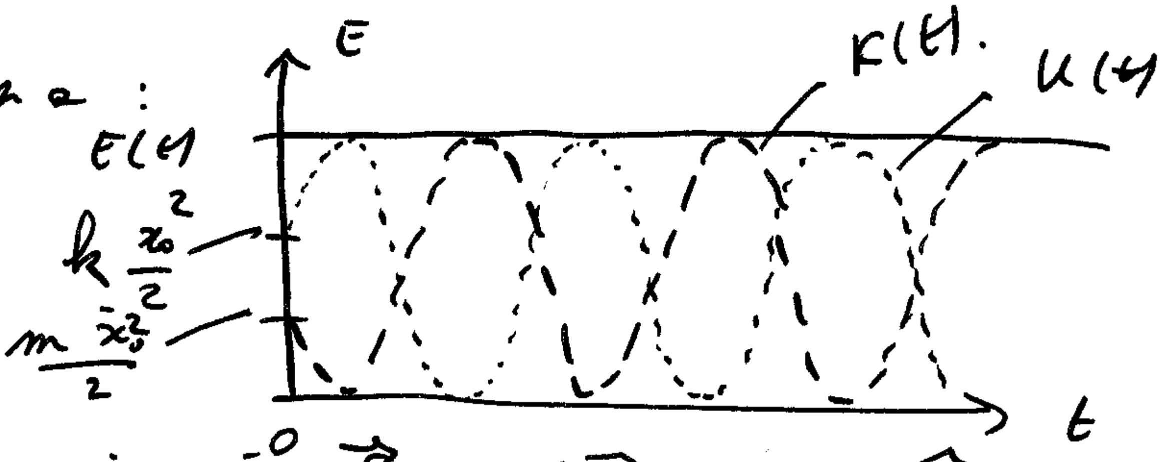
La seule force travaillant étant conservative, l'énergie mécanique se conserve, et lorsque U est minimale, K est maximale et inversement :

$$E(t) = K_{max} + \overset{0}{U_{min}} = \overset{0}{K_{min}} + U_{max}$$

$$\boxed{E(t) = k\frac{x_{max}^2}{2} = k\frac{R_0^2}{2}}$$

C'est cohérent, il n'y a pas de dissipation.

5) On a :



6) On ajoute $\vec{F}_d = -\gamma \vec{v} = -\gamma \dot{x}\, \hat{u}_x$, et l'équation différentielle devient:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x},$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \omega_0^2 = k/m,$$

et $\frac{\gamma}{m} = 2\xi\omega_0$ d'où, $\xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{km}}$

7) De la même manière, on a:

$$A_d = x_0, \quad B_d = \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \xi\frac{\omega_0}{\omega_d}x_0.$$

8) On a alors, à $t=0$,

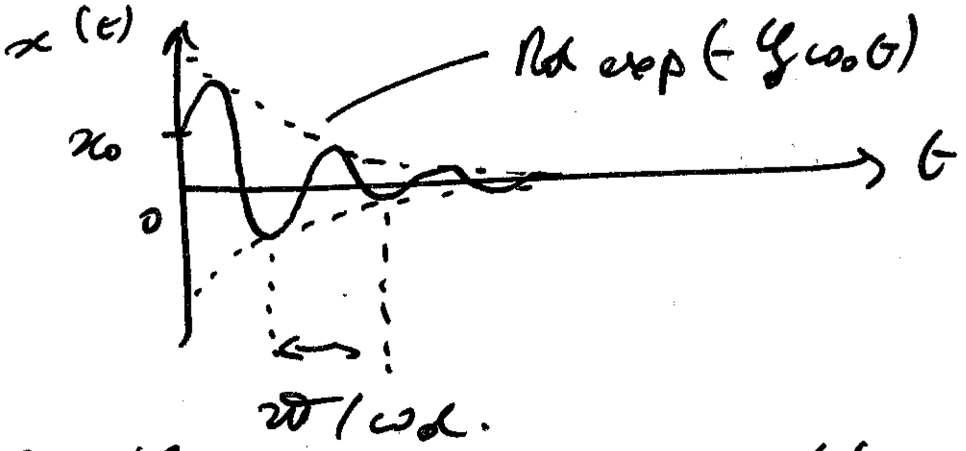
$$x(t=0) = x_0 = R_d\cos(\varphi_d)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -R_d\,\xi\omega_0\cos(\varphi_d) - R_d\,\omega_d\sin(\varphi_d).$$

d'où : $\boxed{R_d = \sqrt{A_d^2 + B_d^2}}$

et $\boxed{\cos(\varphi_d) = \frac{A_d + B_d}{R_d}}$

9) On suppose que $\dot{x}_0$ est positive.



10) Si $\zeta = 0$, on a pas d'amortissement ($\gamma = 0$), on retrouve le cas précédent, et si $\zeta = 1$, le discriminant de l'équation différentielle sera nul, on aura un régime critique.

Dans le premier cas, $E(t) = cte$, et dans le cas général, $E(t) = K(t) + U(t)$ tel qu'exprimé précédemment.

12) On calcule

$$\ln(x_1/x_2) = \ln \frac{\exp(-\zeta\omega_0 t_1) R_d \cos(\omega_d t_1 + \varphi_d)}{\exp(-\zeta\omega_0 t_2) R_d \cos(\omega_d t_2 + \varphi_d)}$$

or, $\cos(\omega_d t_1 + \varphi_d) = \cos(\omega_d t_2 + \varphi_d)$,

d'où $\ln(x_1/x_2) = \zeta\omega_0(t_2 - t_1) = \zeta\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d}$

$$= \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\boxed{\ln(x_1/x_2) \overset{\zeta \ll 1}{=} 2\pi\zeta.}$$

*11) On appelle $E(t)$ l'énergie

mécanique telle que $E(t) = K(t) + U(t)$.

et $K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$= \frac{1}{2} m R_d^2 \exp(-2\xi \omega_0 t) \cdot f(t)$$

et $U(t) = \frac{1}{2} k x^2$

$$= \frac{1}{2} k R_d^2 \exp(-2 \xi \omega_0 t) \cdot g(t)$$

avec $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions sinusoïdales positives,

d'où : $E(t) = \exp(-2\xi\omega_0 t)\left[\frac{1}{2} m R_d^2 f(t) + \frac{1}{2} k R_d\, g(t)\right]$.

On voit alors que $E(t)$ décroît et tend vers 0.

13) On suppose $\xi \ll 1$, soit, d'après 12),

$$\ln x_1/x_2 = 2\pi \xi, \quad \xi = \frac{\ln x_1/x_2}{2\pi} = 0{,}050$$

et $\omega_d \simeq \omega_0$, $\omega_d = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} = 1{,}57 \text{ rad}\cdot s^{-1}$.

et $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $k = m\,\omega_d^2 = 173000 \text{ N}\cdot m^{-1}$.

et $\xi = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}$, $\gamma = 2\xi\sqrt{km} = 14 \cdot 10^{+3}$.

14) On ajoute la nouvelle force, et on obtient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t).$$

On a, en RSF :

$$-\omega^2 \underline{x} + 2\xi\omega_0 j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m}\exp(j\omega t)$$

d'où $\underline{x} = \dfrac{\frac{F_0}{m}\exp(j\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)+2j\xi\omega_0\omega}$.

En posant $\underline{x} = X\exp(j(\omega t+\varphi))$, on a :

$$X = |\underline{x}| = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_0^2\omega^2}}$$

et $\varphi = \arg\left(\dfrac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega^2)+j2\xi\omega_0\omega}\right) = 0 - \arg\left((\omega_0^2-\omega^2)+j2\xi\omega_0\omega\right)$

$\tan\varphi = \dfrac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$.

16) On a : $A = \dfrac{Xk}{F_0} = \dfrac{k}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega_0\omega)^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$, c'est un "gain".

17) A est maximal si $r=1$, soit $\omega=\omega_0$.

18) On calcule $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 0{,}78\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

d'où $\omega < \omega_0$, $r^2 \ll 1$, soit :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2r^2}},$$

et dans l'hypothèse où $\xi^2r^2 \ll 1$, on peut dire que $M = 1$, la plateforme va suivre le mouvement de la houle.

Exercice 3 : L'homme-canon.

---

1) Si l'homme n'a pas de forts mouvement de rotation toute l'énergie cinétique est "contenue" dans le mouvement de translation, ce qui est équivalent au mouvement d'un point matériel M.

2) L'accélération ($\vec{g}$) est constante, et on définit un plan avec les vecteurs $(\vec{g}\,;\vec{v}_0)$, $\vec{v}_0$ étant la vitesse initiale. A l'instant "$t = 0 + dt$", $d\vec{OM}$ est contenue dans ce plan, donc $\vec{v}$ est contenue dans ce plan, et cela est vrai à tout instant, le mouvement s'inscrit dans un plan.

3). Système : M

. Référentiel : terrestre supposé galiléen

. Force : poids $\vec{P}$.

On applique le PFD :

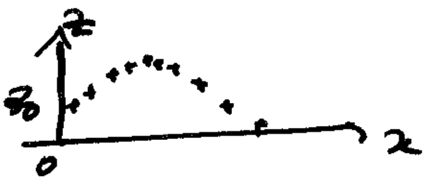
$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{z} = -g\end{cases}, \quad \begin{cases}\dot{x} = x_0 \cos\alpha\\ \dot{z} = -gt + x_0 \sin\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = x_0 t \cos\alpha\\ z = -\frac{g}{2}t^2 + x_0 t \sin\alpha + z_0 .\end{cases}$$

4) On en déduit que :

$\alpha = 45°$, $z_0 = 7,5$ m et $v_0 = 28\ m.s^{-1}$.

5) On a une parabole, et 

6) et on en déduit que $z_{matelas} \simeq 8,4$ m..