

# Cours de mécanique des fluides

Olivier LOUISNARD

15 novembre 2021

---

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de Modification 2.0 France disponible [en ligne](#) ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.





# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Description d'un fluide</b>	<b>7</b>
1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ? . . . . .	7
1.2 Propriétés. . . . .	8
1.3 Description comme un milieu continu. . . . .	8
1.3.1 Séparation des échelles . . . . .	8
1.3.2 Définition de la masse volumique . . . . .	10
1.3.3 Vitesse et quantité de mouvement . . . . .	12
1.3.4 Grandeurs énergétiques . . . . .	12
1.4 Grandeurs locales et globales . . . . .	13
1.5 Volume fixe ou mobile ? . . . . .	14
<b>2 Introduction aux bilans</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction intuitive . . . . .	15
2.2 Transport diffusif et convectif . . . . .	17
2.2.1 Qu'est ce qu'un flux ? . . . . .	18
2.2.2 Transport diffusif (parenthèse) . . . . .	18
2.2.3 Flux convectif . . . . .	19
2.3 Bilan d'une grandeur volumique dans un milieu continu . . . . .	23
2.3.1 Écriture générale . . . . .	23

2.3.2	Une géométrie particulière : le tube de courant . . . . .	24
2.3.3	Une approximation utile : l'écoulement piston . . . . .	25
2.4	Équations de conservation pour un fluide . . . . .	27
2.4.1	Conservation de la masse . . . . .	27
2.4.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	28
2.4.3	Conservation de l'énergie . . . . .	29
2.4.4	Synthèse . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Forces exercées sur un fluide</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Force volumiques . . . . .	31
3.3	Forces de contact : pression . . . . .	32
3.3.1	Origine microscopique. . . . .	32
3.3.2	Equilibre d'une colonne d'eau. . . . .	34
3.3.3	Généralisation. . . . .	36
3.3.4	Loi de l'hydrostatique. . . . .	37
3.3.5	Applications. . . . .	38
3.3.6	Extension en référentiel non galiléen. . . . .	39
3.3.7	Poussée d'Archimède. . . . .	40
3.3.8	Moment des forces de pression. . . . .	41
3.4	Forces de contact : frottement visqueux. . . . .	42
3.4.1	Mise en évidence : expérience de Couette. . . . .	42
3.4.2	La viscosité. . . . .	43
3.4.3	Origine microscopique. . . . .	44
3.4.4	Le nombre de Reynolds. . . . .	44
3.4.5	Le modèle de fluide parfait. . . . .	46

---

3.5	Écriture tensorielle des forces de contact . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Equations du mouvement d'un fluide</b>	<b>51</b>
4.1	Sous forme de bilans volumiques . . . . .	51
4.1.1	Conservation de la masse. . . . .	51
4.1.2	Conservation de la quantité de mouvement. . . . .	52
4.1.3	Conservation de l'énergie. . . . .	54
4.1.4	Complément : théorème de l'énergie cinétique. . . . .	55
4.2	Conditions aux limites. . . . .	56
4.3	Application aux écoulements en tuyauterie. . . . .	57
4.3.1	Préliminaire. . . . .	58
4.3.2	Conservation de la masse. . . . .	58
4.3.3	Conservation de la quantité de mouvement. . . . .	59
4.3.4	Conservation de l'énergie. . . . .	61
4.3.5	Théorème de l'énergie cinétique. . . . .	63
4.4	Équations locales. . . . .	65
4.4.1	Contexte . . . . .	65
4.4.2	Obtention . . . . .	65
4.4.3	Un jeu d'équations complet ? . . . . .	68
4.4.4	Cas du fluide incompressible . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Mouvement du fluide parfait incompressible. Formule de Bernoulli</b>	<b>71</b>
5.1	Rappel des hypothèses et équations . . . . .	71
5.2	Formule de Bernoulli . . . . .	73
5.2.1	Hypothèses-Enoncé . . . . .	73
5.2.2	Démonstration . . . . .	73
5.2.3	Commentaires . . . . .	73

---

5.3	Applications . . . . .	74
5.3.1	Problèmes de vidange . . . . .	74
5.3.2	Pression dynamique. Forces sur un obstacle. . . . .	76
5.3.3	Notion de charge . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Pertes et gains de charge. Formule de Bernoulli généralisée</b>	<b>81</b>
6.1	Formule de Bernoulli généralisée . . . . .	81
6.2	Frottement visqueux : $h_v \neq 0$ . . . . .	83
6.2.1	Pertes de charge régulières . . . . .	83
6.2.2	Pertes de charge singulières . . . . .	86
6.2.3	Exemple . . . . .	86
6.3	Cas des machines tournantes : $h_u \neq 0$ . . . . .	88
6.3.1	Turbines, moulins, éoliennes . . . . .	88
6.3.2	Pompes . . . . .	90
6.4	Applications aux réseaux de fluide . . . . .	91
6.4.1	Circuit fermé . . . . .	91
6.4.2	Caractéristique d'une pompe . . . . .	92
6.4.3	Point de fonctionnement . . . . .	92
6.4.4	Réseaux hydrauliques . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Équations de Navier-Stokes</b>	<b>97</b>
7.1	Le modèle de fluide newtonien . . . . .	97
7.1.1	Approche par l'expérience de Couette . . . . .	97
7.1.2	Équations du modèle newtonien . . . . .	99
7.1.3	Le tenseur gradient de vitesses. . . . .	99
7.2	Équations de Navier-Stokes . . . . .	101
7.2.1	Adimensionnalisation . . . . .	102

---

7.2.2	Classification des écoulements . . . . .	104
7.2.3	Diffusion de quantité de mouvement et viscosité cinématique .	105
7.3	Deux écoulements visqueux unidirectionnels . . . . .	106
7.3.1	Ecoulement de Couette . . . . .	106
7.3.2	Ecoulement de Poiseuille . . . . .	107
7.4	Généralisation : écoulements unidirectionnels . . . . .	111
7.4.1	Mise en équation . . . . .	111
7.4.2	Cas stationnaire. Perte de charge . . . . .	112
7.4.3	Cas instationnaire. Diffusion de quantité de mouvement . . .	112
<b>8</b>	<b>Ecoulements rampants</b>	<b>115</b>
8.1	Equations . . . . .	115
8.2	Propriétés des écoulements rampants . . . . .	116
8.2.1	Réversibilité temporelle . . . . .	116
8.2.2	Réversibilité spatiale . . . . .	117
8.3	Equation de la vorticité . . . . .	117
8.4	Applications . . . . .	119
8.4.1	Force sur un obstacle . . . . .	119
8.4.2	Rhéologie des suspensions . . . . .	120
8.4.3	Micro-fluidique . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Couche limite</b>	<b>123</b>
9.1	Présentation générale. . . . .	123
9.2	Etude “sans équations”. . . . .	125
9.2.1	Observations expérimentales. . . . .	125
9.2.2	Analyse dimensionnelle. . . . .	125
9.2.3	Physique des couches limite. . . . .	126

9.2.4	Frottement à la paroi. Coefficients de trainée . . . . .	128
9.3	Résultats pratiques pour la plaque plane. . . . .	130
9.4	Théorie de Prandtl. . . . .	131
9.4.1	Principe général . . . . .	131
9.4.2	Cas de la plaque plane : solution auto-similaire et équation de Blasius . . . . .	134
9.5	Décollement des couches limites . . . . .	137
9.5.1	Cas d'un profil auto-similaire. Equation de Falkner-Skan . . .	139
9.5.2	Cas d'un profil non auto-similaire. . . . .	142
9.6	Forces de trainée . . . . .	142
9.6.1	Trainée de pression et traînée visqueuse . . . . .	142
9.6.2	Trainée sur différents profils . . . . .	144
<b>A</b>	<b>Puissance du poids et premier principe</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Rappels d'analyse vectorielle</b>	<b>151</b>
B.1	Expressions tensorielles . . . . .	151
B.2	Dérivation de produits . . . . .	151
B.3	Formules intégrales . . . . .	152
B.4	Terme convectif de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	152
B.5	Divergence du tenseur de déformation / Laplacien vectoriel . . . . .	152
B.6	Dérivée particulaire . . . . .	153
B.7	Dérivée temporelles d'intégrales . . . . .	154
B.8	Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques . . . . .	155
<b>C</b>	<b>Rappel sur les forces d'inertie</b>	<b>159</b>
C.1	Rappel : composition des accélérations . . . . .	159
C.2	Forces d'inertie . . . . .	160

---

<b>D Démonstration du théorème de l'énergie cinétique</b>	<b>161</b>
<b>E Diverses formes de l'équation de conservation de l'énergie</b>	<b>163</b>
<b>F Glossaire</b>	<b>167</b>



# Introduction

La mécanique des fluides est une discipline ancienne, d'applications très variées et encore en pleine évolution. Il convient de toujours garder à l'esprit que l'évolution de cette discipline a eu, tout au long de l'histoire de l'humanité, deux moteurs, fortement imbriqués :

- l'explication des phénomènes naturels : les vagues, le vent, la force de résistance sur un corps en mouvement dans l'air ou l'eau, l'aspiration d'une cheminée, le mouvement des bulles, la chute d'objets léger (les feuilles des arbres), les vibrations provoquées par un écoulement...
- l'exploitation des fluides à des fins pratiques : fabrication d'embarcations, pompage de puits, adduction d'eau, application "énergétiques" (moulins à eau ou à vent), propulsion et sustentation des aéronefs, bateaux, sous-marins, forces de frottement sur les véhicules ou sur l'homme dans le domaine du sport (cyclisme, natation)...

La mécanique des fluides a cet avantage sur d'autres disciplines de la physique qu'elle fait partie de notre quotidien. Aussi, il est toujours bon d'appréhender un écoulement de fluide tout d'abord avec sa seule intuition. Les équations de la mécanique des fluides ont une structure mathématique complexe, et doivent être vues comme un ultime recours pour décrire ou quantifier un phénomène, là où l'intuition s'arrête. Les équations ne *sont* pas la mécanique des fluides, elles la décrivent. Cette accessibilité ne doit pas masquer cependant le fait que certains aspects, notamment la turbulence, restent encore mal compris, même si l'astuce des chercheurs et ingénieurs l'ont rendue accessible à la simulation quotidienne.

A titre de préliminaire à ce cours, on pourra par exemple se poser les questions suivantes :

- pourquoi les portes claquent dans un courant d'air ?
- pourquoi les bulles remontent dans l'eau ?
- pourquoi un avion ne tombe-t'il pas sous son propre poids ?
- comment faire monter un fluide d'un point bas à un point haut ?
- la quantité d'eau sortant d'un tuyau par unité de temps est-elle égale à celle qui y rentre ?
- l'eau sortant d'un robinet a-t-elle la même allure selon la valeur du débit ?
- que faut-il faire pour siphonner un récipient ?
- comment fonctionne une centrale hydroélectrique ?

- comment les sportifs donnent-ils de l'effet à des balles, des ballons ?

Toutes ces questions sont généralement posées plutôt par les enfants, parce qu'ils cherchent à comprendre le monde qui les entoure. Avec l'âge, la tendance intellectuelle naturelle est plutôt à l'acceptation du phénomène. Il est donc important de questionner à nouveau sa perception des phénomènes physiques avant de vouloir les modéliser. Complétez donc cette liste de questions par les vôtres en continuant à étudier ce cours. Le cadre forcément restreint de ce dernier ne permettra pas malheureusement de répondre à toutes, mais cette démarche intellectuelle est importante. Pensez également que les scientifiques qui ont établi les équations de la mécanique des fluides sont allés de l'intuition vers le modèle mathématique, et non pas l'inverse.

Quelques conseils de lecture de ce polycopié :

- le **chapitre 1** décrit ce qu'est un fluide et comment on peut le définir par un milieu continu. Sa lecture, bien que conseillée, n'est pas indispensable pour comprendre les chapitres suivants.
- le **chapitre 2** décrit ce qu'est une équation de bilan et définit mathématiquement le terme de flux convectif. Le lecteur familier avec les équations de conservation pourra aisément survoler le début de ce chapitre à l'usage du débutant, et ne retenir que son résultat essentiel (equation 2.6). On y définit également ce volume particulier qu'est le tube de courant. On y expose, ensuite, les équations de conservation pour un fluide sans détailler les forces exercées, et les trois équations de bilan fondamentales pour un fluide sont retrouvées : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Ce n'est finalement qu'un rappel des grands principes de la physique.
- Le **chapitre 3** peut être lu indifféremment avant ou après les deux précédents. Il décrit les forces de volume et de contact exercées sur un fluide. On y déduit les lois de l'hydrostatique. La notion de force de frottement visqueuse y est présentée, à la lumière de l'expérience historique de Couette, et le nombre de Reynolds est introduit. Une discussion sur le modèle du fluide parfait y est finalement proposée.
- Le **chapitre 4** est le coeur de ce document : sur la base des chapitres 2 et 3, les équations du mouvement d'un fluide sont présentées, sous forme globale, dans le cas particulier d'une machine fluide, et enfin sous forme locale. Aucune hypothèse restrictive n'y est effectuée de telle sorte que les équations présentées sont les plus générales possibles, et donc applicables à tout type de fluide ou d'écoulement. L'hypothèse incompressible est discutée à la fin de ce chapitre.
- Le **chapitre 5** présente le modèle du fluide parfait uniquement dans le cas incompressible. La fameuse formule de Bernoulli y est présentée, ainsi que la notion de charge, qui décrit bien la conservation de l'énergie mécanique. Ce chapitre très court est sans doute le plus utile dans la perspective des applications courantes.
- Le **chapitre 6** présente les limites du modèle du fluide parfait et donc de la formule de Bernoulli. On y montre pourquoi les forces visqueuses introduisent toujours une perte d'énergie dans les écoulements en tuyauterie, couramment

appelée perte de charge, dont on donnera les expressions pour des configurations d'écoulement classiques. On y présentera également les échanges d'énergie bidirectionnels possibles entre le fluide et une machine tournante, occasionnant soit un gain de charge pour le fluide (cas de la pompe), soit une perte de charge (cas de la turbine).

- Le **chapitre 7** introduit le caractère visqueux des fluides. Le modèle de fluide dit “newtonien” est introduit sur la base de résultats expérimentaux sur l'expérience de Couette. Les équations de Navier-Stokes en sont déduites et adimensionnalisées pour faire apparaître des nombres adimensionnels, en particulier le nombre de Reynolds. On détaille ensuite les écoulements classiques de Couette et de Poiseuille, avec les importantes conséquences sur la perte de charge en ligne et les modèles de milieux poreux. Quelques résultats généraux sur les écoulements unidirectionnels seront ensuite présentés.
- Le **chapitre 8** traite le cas particulier des écoulements dits “rampants”, c'est-à-dire à très faible nombre de Reynolds, avec pour applications le calcul de la trainée sur des corps sphérique (bulles, gouttes, particules solides), les suspensions.
- Le **chapitre 9** traite le cas particulier des écoulements à Reynolds suffisamment élevés incidents sur un corps solide, pour lesquels les effets visqueux sont confinés dans une zone très fine appelée “couche limite”, et à l'extérieur de laquelle le modèle de fluide parfait est pertinent. Le décollement de cette couche limite et son effet sur les forces hydro- ou aéro-dynamique y est également abordé.
- Enfin nous avons reporté en annexe plusieurs démonstrations calculatoires, dont seul le résultat est important (notamment le théorème de l'énergie cinétique qui valide la notion de perte de charge). Les différentes formes locales possibles de l'équation de conservation de l'énergie y ont également été reléguées, et pourront être abordées par le lecteur soucieux de faire le lien entre ce cours et un cours de transfert thermique. Un glossaire spécialisé anglais-français est également proposé.

Ce polycopié est inspiré de plusieurs présentations différentes de la mécanique des fluides. Citons tout d'abord le livre passionnant de Guyon et al. (2001) qui est à notre connaissance l'ouvrage le plus exhaustif sur le sujet (et en plus en français!). Il est notamment le seul à traiter en détail les fluides non-newtoniens et les effets dans des référentiels tournants. Attention, la seconde édition (couverture verte) est bien plus complète que la première (couverture rouge). Une excellente introduction à la turbulence est également proposée.

On pourra consulter l'excellent livre de Chassaing (2000) (chercheur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), très complet notamment dans le traitement des couches limites, et d'une rigueur mathématique remarquable.

Le livre de Candel (1995), outre sa présentation irréprochable, traite en détail certaines applications inusuelles (éolienne, fusée,...). Il partage avec l'ouvrage de White (1994) et ce polycopié une présentation préférentielle des équations sous forme volumique. Le livre de White (1994) présente par ailleurs un grand nombre de données

technologiques, d'applications pratiques et d'exercices originaux. C'est une source d'information incontournable (mais en anglais) pour tout problème pratique.

# Chapitre 1

## Description d'un fluide

### 1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

En relation avec le cours de thermodynamique, nous incluons dans la notion de fluide les liquides et les gaz. On pourrait tout d'abord demander au lecteur, avant d'aller plus loin, de se questionner sur la définition d'un fluide : le sens commun suggère qu'un fluide, en opposition avec un solide qui sait maintenir sa forme tout seul, nécessite un contenant, sans quoi il “coule” (pour un liquide) ou “s'échappe” (pour un gaz).

Concernant les gaz, on sait qu'ils sont constitués d'atomes ou de molécules en mouvement (dit d'agitation thermique) qui s'entrechoquent en permanence. Cette description a été proposée à l'origine par Boltzmann<sup>1</sup>, et conduit à la fameuse *théorie cinétique des gaz*. Si le gaz est suffisamment dilué (limite du gaz parfait), les molécules n'interagissent pas autrement que par des chocs élastiques, car elles sont en moyenne suffisamment éloignées les unes des autres pour que les forces électrostatiques soit négligeables.

Les liquides nous sont beaucoup plus familiers que les gaz<sup>2</sup>, mais leur structure est pourtant plus complexe. Ils sont l'intermédiaire entre le solide et le gaz. Le solide

---

1. Ludwig Boltzmann (1844-1906) : il est le fondateur de la description microscopique des gaz à partir des principes de la mécanique classique. Il fut notamment le premier à donner une interprétation microscopique de l'entropie et de la notion d'irréversibilité. Ses idées audacieuses, qui constituent le fondement de la thermodynamique moderne, furent vivement contestées de son temps, notamment par Mach et Ostwald, pour qui la science doit se baser sur des observations macroscopiques et ne pas faire appel à des entités microscopiques (l'atome) dont l'existence ne peut être observée. Découragé, il écrivit en 1898 : “je suis conscient de n'être qu'un faible individu luttant contre le courant de l'époque”. Par ailleurs de tendance dépressive, il commit deux tentatives de suicide, dont la seconde lui fut fatale, en 1906. Il ne connut ainsi jamais les conséquences de sa théorie. La preuve de l'existence de la structure atomique de la matière fut apportée deux ans après sa mort.

2. Tout d'abord parce qu'on les “voit”, et que, contrairement aux gaz, on ressent immédiatement leur contact avec la peau (signification du mot “mouillé”). L'air est pourtant en permanence en contact avec notre peau et lui applique une force de 1 kg par cm<sup>2</sup> !

maintient ses atomes fixes, enfermés dans une “cage” constituée par les atomes voisins, à l’exception de vibrations de faible amplitude d’origine thermique. A l’inverse, le gaz contient des atomes ou molécules libres les uns par rapport aux autres, n’interagissant que par des chocs. On retrouve les deux aspects dans un liquide : les molécules sont très peu mobiles, enfermées dans des cages formées par leur voisines, mais ces cages sont temporaires, et, en présence d’une force suffisante, le mouvement relatif des molécules moyen peut devenir non nul. C’est ainsi qu’un liquide s’écoule.

Pour certaines matières, il est parfois difficile de faire la différence entre un comportement liquide et solide. Par exemple le sable peut s’écouler alors qu’il est constitué de particules solides. Pire encore, si l’on tape fortement sur du sable mouillé, on ressent un comportement solide, mais on peut enfoncez lentement sa main dans le sable comme dans un liquide. Les glaciers apparaissent solides à notre échelle, mais s’écoulent sur une échelle de temps de l’ordre du siècle. Certaines pâtes (dont cette fameuse gelée translucide vendue pour amuser les enfants...) apparaissent comme solides lorsque la sollicitation est rapide, mais coulent si on l’étire lentement. Lors du pressage de feuilles métalliques à froid, le solide prend la forme de l’outil et ne revient pas à sa forme initiale (heureusement !) car on dépasse sa limite d’élasticité : pendant un temps très court, il coule (ou parle de comportement plastique).

Il est bon de connaître au moins l’existence de ces fluides “bizarres”, qui ne le sont en réalité que parce que leur comportement dépend de l’échelle de temps considérée. L’étude du comportement d’une substance sous une sollicitation donnée porte le nom de *rhéologie*. Nous nous limiterons à priori dans ce cours à des cas “courants”, bien que certains principes énoncés soient d’une portée plus générale.

## 1.2 Propriétés.

### 1.3 Description comme un milieu continu.

#### 1.3.1 Séparation des échelles

Nous avons mentionné ci-dessus le caractère “granulaire” des fluides : ils sont constitués d’entités élémentaires, atomes ou molécules. On conçoit qu’il serait difficile de prendre en compte les mouvements individuels de toutes ces entités, pour étudier le mouvement d’un liquide dans un tuyau ou de l’air autour d’une aile d’avion... Ce serait de plus contre-intuitif puisqu’à l’échelle humaine, nous ne voyons ni ne sentons pas individuellement les molécules<sup>3</sup>, mais nous savons en revanche appréhender leur mouvement (ou leur non-mouvement) d’ensemble à notre échelle (dite macroscopique).

---

3. Il est intéressant de noter du reste que la mécanique des fluides est bien antérieure à la description atomistique de la matière, et que les premières équations descriptives furent de fait établies à l’échelle macroscopique.

L'idée de l'approche macroscopique est basée sur le fait que des molécules suffisamment voisines ont le même mouvement d'ensemble, et ne diffèrent que par des mouvements d'agitation thermique aléatoires<sup>4</sup>. Dans ces conditions, il est possible de trouver un petit volume spatial  $\epsilon$ , contenant suffisamment de molécules pour pouvoir effectuer une moyenne de grandeurs microscopiques sur ce volume, mais suffisamment petit pour ne pas gommer les variations macroscopiques.

Prenons une analogie : imaginons un embouteillage s'étendant sur plusieurs dizaines de kilomètres que nous regardons depuis un hélicoptère<sup>5</sup> et examinons ce que nous voyons en fonction de la hauteur de l'hélicoptère (Fig. 1.1) :

- si nous sommes proches du sol, nous verrons les déplacements individuels de quelques voitures, mais sans voir l'évolution d'ensemble. Nous avons une **vue microscopique** (Fig. 1.1.c)
- à l'inverse si nous volons très haut, nous verrons plusieurs milliers de voitures et les variations de densité de l'embouteillage (où encore les variations de distances entre deux voitures successives) deviendront visibles : dans certaines zones les voitures seront pare-chocs contre pare-chocs et à l'arrêt, dans d'autres elles seront un peu écartées les unes des autres et en mouvement. C'est une vue **macroscopique** (Fig. 1.1.a). Notons que les variations de densité apparaissent alors comme une fonction continue, voire dérivable<sup>6</sup>
- Si nous volons à une altitude intermédiaire entre ces deux points de vue, nous voyons un grand nombre de voitures (six sur la figure) équidistantes et se déplaçant en gros à la même vitesse : c'est le volume  $\epsilon$  dont nous parlions. Il est très grand à l'échelle de la voiture, mais très petit à l'échelle de l'embouteillage. On parle de volume **mésoscopique** (mésos = du milieu, scopos = observer) ou de méso-échelle (Fig. 1.1.b).

Si cette **séparation des échelles** est possible,<sup>7</sup> nous pouvons assimiler  $\epsilon$  à une variation infinitésimale  $dx$  de longueur macroscopique  $x$  et définir la densité locale de voitures par une fonction continue  $\rho(x)$  (la courbe tracée sur la figure 1.1) telle que le nombre de voitures à l'intérieur de  $dx$  est :

$$dN = \rho(x) dx$$

---

4. Avertissons le lecteur dès maintenant que ces mouvements thermiques sont responsables des phénomènes de transfert de chaleur et de matière, ainsi que du frottement visqueux. L'approche macroscopique ne consiste donc surtout pas à les négliger, mais plutôt à les moyenner pour obtenir des lois sur les grandeurs macroscopiques. On retrouve ainsi les lois de Fourier, Fick, ainsi que la loi de frottement visqueux des fluides dit newtoniens. Mathématiquement ce moyennage est très complexe car les interactions deux à deux entre molécules doivent être considérées.

5. L'analogie du trafic routier avec les fluides n'est pas totalement fortuite. Il existe effectivement des modèles de milieux continus pour ce genre de problème, semblables d'une certaine manière aux équations du mouvement des fluides compressibles.

6. Ce n'est plus vrai en toute rigueur dans le cas important des phénomènes de chocs.

7. Elle ne l'est pas toujours en mécanique des fluides, ou bien dans le cas de milieux trop raréfisés, ou encore dans les phénomènes de chocs, où les grandeurs macroscopiques varient sur quelques longueurs moléculaires. Ce type d'hypothèse est également utilisé pour décrire les milieux diphasiques (liquides à bulle, suspensions,...) comme des milieux monophasiques.

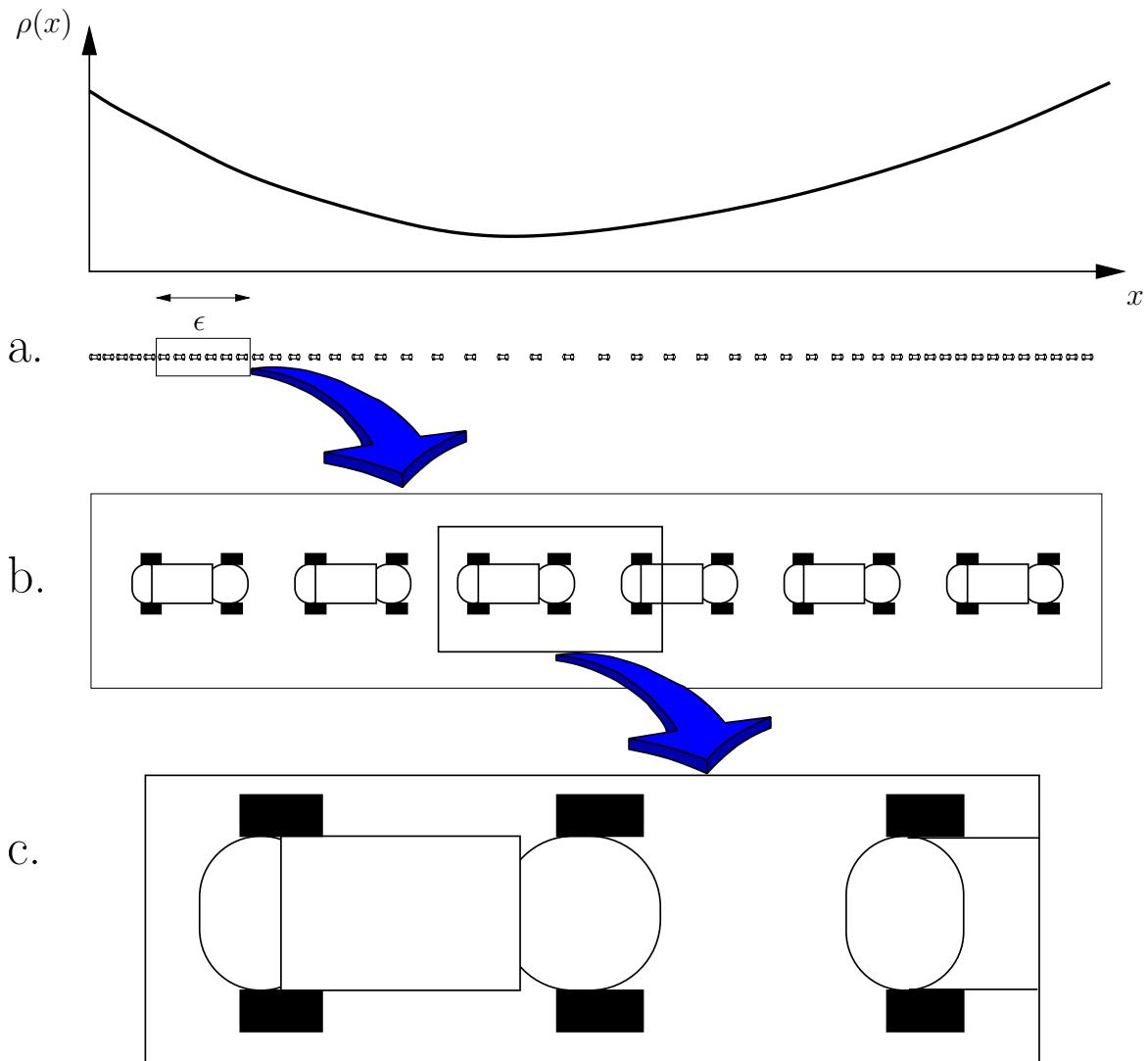


FIGURE 1.1 – Un embouteillage vu depuis trois échelles très différentes : celle de la voiture (en bas), celle de l’embouteillage (en haut), et une échelle intermédiaire contenant beaucoup de voitures, mais où la densité varie peu.

de telle sorte que le nombre de voitures entre les abscisses  $a$  et  $b$  s’écrit :

$$N = \int_a^b \rho(x) dx$$

### 1.3.2 Définition de la masse volumique

C’est ce type d’approche que l’on utilise pour décrire un fluide par un milieu continu (le volume intermédiaire contient dans ce cas plus de 6 “voitures”), sauf que nous avons un milieu tridimensionnel. Le volume  $\epsilon$  est grand par rapport à la molécule (il en contient plein), mais petit par rapport à la longueur caractéristique du phénomène (Figure 1.2) : ce sera donc un élément infinitésimal de volume macroscopique  $dV =$

$dx dy dz$  centré sur le point  $(x, y, z)$ .

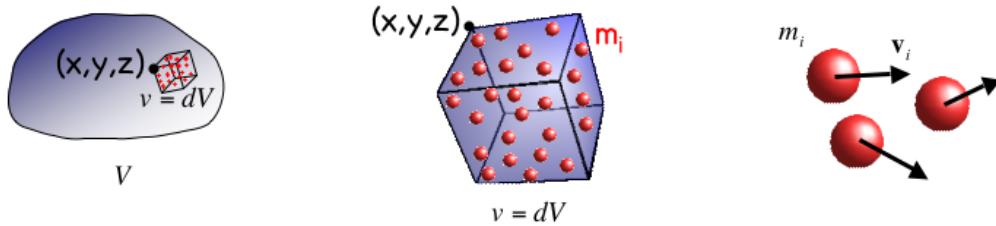


FIGURE 1.2 – De gauche à droite : échelle macroscopique, mésoscopique, microscopique.

La masse de toutes les molécules  $\sum m_i$  contenues dans  $\epsilon$  est aussi, à l'échelle macroscopique, une quantité infinitésimale  $wdM$ . On définira donc **la masse volumique** locale par :

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{\sum_i m_i}{\epsilon} = \frac{dM}{dV} \quad (1.1)$$

dont l'unité S.I. est le  $\text{kg/m}^3$ . Notons que  $\rho$  dépend a priori du temps puisque des molécules peuvent entrer et sortir du volume  $dV$ . Si nous cherchons la masse  $M(t)$  d'un volume  $V$  macroscopique (celui de la figure 1.2 gauche, par exemple), il suffit d'intégrer cette relation sur tout ce volume :

La masse d'un volume de fluide  $V$  s'écrit :

$$M(t) = \iiint_V \rho \, dV \quad (1.2)$$

Remarque : nous prendrons pour habitude de ne pas écrire la dépendance des intégrandes en  $(x, y, z, t)$ , afin d'alléger les écritures, mais il convient de retenir que ceux-ci dépendent à priori des 3 variables d'espace, et ne pas les sortir par erreur des intégrales.

Un cas particulier important sur lequel nous reviendrons souvent est celui où la masse volumique peut être considérée constante à la fois dans l'espace et le temps. On parle alors de *fluide incompressible*. Dans ce cas la masse d'un volume  $V$  est simplement donnée par  $M = \rho V$ . Dans la plupart des applications, les liquides seront considérés incompressibles. Les gaz en écoulement peuvent aussi très souvent être considérés incompressibles. En fait, la validité de cette approximation ne porte pas sur le type du fluide, mais sur la valeur du nombre de Mach (voir section 4.4.4).

### 1.3.3 Vitesse et quantité de mouvement

Comment maintenant définir la vitesse macroscopique du fluide en un point ? Notre but est d'étudier l'écoulement des fluides sous l'influence de forces, qui modifient la quantité de mouvement  $\mathbf{P}$  du fluide. Il est donc pertinent de définir la vitesse moyenne à partir d'une moyenne de la quantité de mouvement, soit :

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{d\mathbf{P}}{\rho dV}, \quad (1.3)$$

où l'on a utilisé le fait que, d'après la section précédente, la masse du volume de moyennage  $\epsilon$  est  $\sum m_i = M = \rho dV$

La quantité de mouvement globale d'un volume  $V$  s'écrit :

$$\mathbf{P}(t) = \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV \quad (1.4)$$

On notera que  $\mathbf{v}_i$ , vitesse des molécules, inclut à la fois le mouvement macroscopique du fluide, mais aussi l'agitation thermique microscopique. L'opération de moyennage de la quantité de mouvement permet de faire disparaître cette dernière contribution. Ainsi dans un fluide au repos,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  mais  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ .

### 1.3.4 Grandeurs énergétiques

Par un processus de moyennage similaire, il nous est possible de moyenner l'énergie cinétique du fluide. La mécanique d'un ensemble de masse ponctuelles fournit le cadre théorique pour ce faire. Nous ne souhaitons pas ici entrer dans le détail, mais il nous paraît important de rappeler un résultat essentiel sous-tendant le premier principe de la thermodynamique. L'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire d'un ensemble de particules en mouvement est égale à :

- l'énergie cinétique de leur centre de masse, où serait concentrée la somme des masses des particules. Cette contribution correspond à l'énergie cinétique macroscopique du fluide en écoulement notée  $K$ . Pour le volume  $dV$  de la figure 1.2, on a donc  $dK = \frac{1}{2}dm v^2 = \frac{1}{2}\rho dV v^2$ . L'énergie cinétique macroscopique d'un volume de fluide  $V$  s'écrit donc :

$$K(t) = \iiint_V \frac{1}{2} \rho v^2 \, dV \quad (1.5)$$

- l'énergie cinétique des particules dans le référentiel du centre de masse. C'est l'énergie d'agitation thermique du fluide, qui contribue à l'énergie interne<sup>8</sup>

Pour cette dernière, il est plus pratique d'utiliser une grandeur massique. Ainsi, pour un gaz parfait (c'est aussi vrai pour un liquide incompressible, cf. cours de thermodynamique), l'énergie interne massique est simplement définie par  $du = C_v dT$ . L'énergie interne par unité de volume est obtenue en multipliant l'énergie massique  $u$  (en J/kg) par la masse volumique  $\rho$  (en kg/m<sup>3</sup>), et l'énergie interne d'un volume de fluide  $V$  sera donc donnée par :

$$U(t) = \iiint_V \rho u \, dV \quad (1.6)$$

## 1.4 Grandeur locales et globales

A ce point, nous avons défini le fluide comme un milieu continu, où toutes les "aspérités" microscopiques sont gommées. Nous savons définir la masse, la quantité de mouvement et les différents types d'énergies d'un volume de fluide  $V$ .

Notons que toutes les grandeurs macroscopiques que nous avons définies ci-dessus ( $M$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $U$  et  $K$ ) sont des grandeurs extensives, c'est-à-dire proportionnelles à la quantité de matière. Ainsi, les relations (1.2), (1.4), (1.6) et (1.5) sont toutes de la forme :

$$G(t) = \iiint_V g \, dV,$$

où  $g$  est une **grandeur volumique**, exprimée en (Unité de  $G$ ) / (Unité de volume). Les grandeurs volumiques associées à  $M$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $U$  et  $K$  sont respectivement  $\rho$ ,  $\rho\mathbf{v}$ ,  $\rho u$  et  $\rho v^2/2$ . Le but des chapitres suivants est de calculer les variations temporelles de ces grandeurs sur la base de grands principes physiques.

Il convient de bien comprendre que  $G$  est une grandeur globale, calculée pour un volume macroscopique  $V$  donné, et ne dépend que du temps. En revanche  $g$  est une grandeur volumique locale, dépendant en plus du point macroscopique  $(x, y, z)$  considéré. Mathématiquement  $G$  est une fonction d'une variable et admet une dérivée temporelle, alors que  $g$  est une fonction de 4 variables et admet des dérivées partielles par rapport à ces 4 variables.

---

8. En fait C'EST l'énergie interne en l'absence d'interactions entre particules. Dans le cas inverse, l'énergie interne comporte aussi une contribution de l'énergie potentielle d'interaction.

## 1.5 Volume fixe ou mobile ?

Notons que dans les définitions ci-dessus, aucune restriction sur le volume  $V$  n'a été énoncée. Aussi le volume  $V$  peut-il être :

- un volume fixe dans le référentiel de l'observateur, et donc continuellement traversé par de nouvelles molécules de fluide. On parle de volume "**Eulérien**". Dans une installation, c'est par exemple le cas d'un récipient, d'une cuve, d'une pompe, d'un tronçon de tuyauterie. Selon la terminologie de la thermodynamique, c'est un système ouvert.
- un volume dont les frontières bougent au cours du temps. En particulier, si ces frontières bougent *avec le fluide*, on parle de volume "**Lagrangien**". Une propriété fondamentale d'un volume lagrangien est qu'il contient toujours les mêmes particules fluides, même si celles-ci se déplacent en son intérieur. C'est un système fermé.

Pour bien différencier les deux, prenons l'image suivante : imaginez une course cycliste (l'écoulement), les coureurs étant les particules fluides :

- le tronçon de route entre deux voitures arrêtées sur le bord est un volume eulérien car des cyclistes toujours différents passent continuellement devant ces voitures.
- le tronçon de route (mobile) compris entre la voiture de tête et la voiture-balai est un volume lagrangien car il contient toujours les mêmes cyclistes. Il se déplace avec les coureurs.

On remarquera deux choses importantes :

- le nombre de cyclistes peut varier dans le volume eulérien (demandez-vous pourquoi) alors qu'il est fixe dans le volume lagrangien. De même la masse de fluide peut varier dans un volume eulérien, mais est constante dans un volume lagrangien.
- le volume du volume eulérien est constant (les voitures-frontière sont arrêtées). En revanche lorsque le peloton s'étire, le volume du volume lagrangien augmente.

La figure 1.3 montre des exemples de volumes eulériens et lagrangiens.

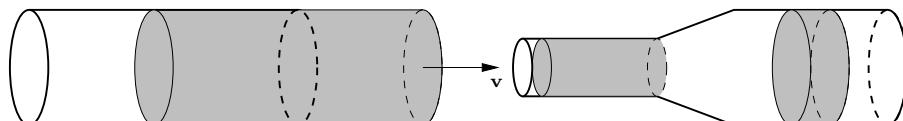


FIGURE 1.3 – En blanc : volume eulérien, en grisé : volume lagrangien

# Chapitre 2

## Introduction aux bilans

### 2.1 Introduction intuitive

Le génie des procédés, et en particulier le mouvement des fluides, est régi par des principes dits “de conservation” ou encore de “bilan” (terminologie chère au génie chimique). Un bilan décrit les variations temporelles d'une grandeur au sein d'un système, que l'on considérera ouvert (au sens de la thermodynamique), c'est-à-dire que la grandeur peut rentrer ou sortir du système.

Tout un chacun sait écrire un bilan, tout au moins lorsque la grandeur fait partie de la vie courante. Prenons par exemple le cas où la grandeur est une quantité d'argent  $A$  et le système mon compte en banque. Pour connaître la quantité d'argent instantanée sur mon compte, j'écris entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\begin{array}{cccc} \text{Mon compte} & \text{Mon compte} & \text{Mes revenus} & \text{Mes dépenses} \\ \text{en banque} & - & \text{en banque} & = (\text{ce qui rentre}) - (\text{ce qui sort}) \\ \text{en banque à } t_2 & & \text{en banque à } t_1 & \text{entre } t_1 \text{ et } t_2 & \text{entre } t_1 \text{ et } t_2 \end{array} \quad (2.1)$$

Pour formaliser plus avant ces variations, appelons :

- $G(t)$  la quantité d'argent instantanée sur mon compte (on supposera à tort que c'est une fonction dérivable du temps...),
- $\Phi_e(t)$  mes revenus instantanés (quantité d'argent qui rentre par unité de temps à l'instant  $t$ ),
- $\Phi_s(t)$  mes dépenses instantanées (quantité d'argent qui sort par unité de temps à l'instant  $t$ ).

Prenons  $t_1$  et  $t_2$  infiniment proches soit  $t_1 = t$  et  $t_2 = t + dt$ . Le bilan s'écrit :

$$G(t + dt) - G(t) = \Phi_e(t)dt - \Phi_s(t)dt$$

soit :

$$\underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Variation de } G \text{ pendant } dt.} = \underbrace{\Phi_e(t)}_{\text{Flux de } G \text{ entrant.}} - \underbrace{\Phi_s(t)}_{\text{Flux de } G \text{ sortant.}} \quad (2.2)$$

Le membre de gauche est une variation (positive ou négative) qu'on appellera **terme d'accumulation** et les termes de droite sont des **termes de flux**, respectivement entrant et sortant. Les trois grandeurs s'expriment par exemple en Euro / jour.

Dans cet exemple, il y a une quantité qui se conserve : l'argent (jusqu'à preuve du contraire...). C'est-à-dire qu'elle ne peut ni disparaître ni apparaître, elle ne fait que s'accumuler dans le système ou entrer / sortir du système. En physique c'est le cas de l'énergie et de la masse.

Prenons un autre exemple : le système est un pays (Fig. 2.1), avec ses frontières, la grandeur est le nombre de personnes instantané  $G(t)$  dans ce pays. Ses variations peuvent provenir de 3 causes :

- des personnes entrent ou sortent du pays en traversant ses frontières,
- des personnes naissent,
- des personnes meurent.

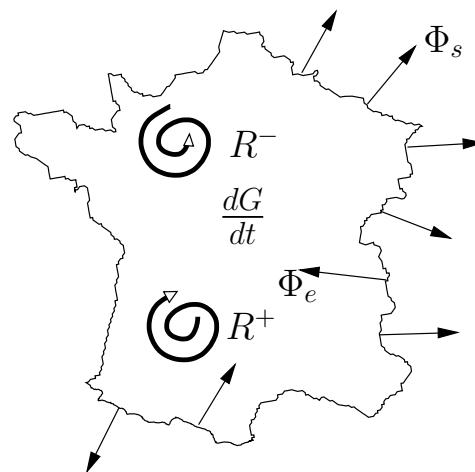


FIGURE 2.1 – Bilan du nombre d'habitants d'un pays

On voit que les deux dernières causes n'existaient pas dans le cas de l'argent<sup>1</sup>. Ici il peut y avoir création ou destruction de la grandeur étudiée. Le bilan s'écrit alors, en reprenant les mêmes notations pour les flux entrant et sortant, et en notant

1. ... bien que l'expression "créer de la richesse" soit désormais passée dans le langage courant. On pourra s'interroger sur la validité de ce genre d'argument à la lumière des principes de conservation, et se demander si cette production ne serait pas associée à une destruction d'un autre côté...

respectivement  $R^+(t)$  et  $R^-(t)$  les nombres de naissances et de décès par unité de temps :

$$\underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Variation de } G \text{ pendant } dt} = \underbrace{\Phi_e(t)}_{\text{Flux de } G \text{ entrant.}} - \underbrace{\Phi_s(t)}_{\text{Flux de } G \text{ sortant.}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Production de } G.} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Destruction de } G.} \quad (2.3)$$

Les termes  $R^+$  et  $R^-$  sont classiquement appelés **terme source** et **terme puit**.

En physique, des grandeurs telles que  $G$  peuvent être par exemple un nombre de moles (par réaction chimique), la quantité de mouvement (à cause des forces extérieures), l'entropie (selon le second principe). Ces quantités ne se conservent pas à proprement parler puisqu'on peut les créer où les détruire<sup>2</sup>, mais on parle malgré tout d'équation de conservation.

Notons que la distinction entre termes sources/puits et termes de flux est claire du point de vue physique, elle peut être arbitraire, mathématiquement parlant, le théorème d'Ostrogradski permettant le passage de l'un à l'autre. Nous verrons par exemple que le premier principe de la thermodynamique, qui ne fait qu'exprimer la conservation de l'énergie peut être énoncé en prenant pour grandeur énergie interne + énergie cinétique et en prenant pour termes sources/puits la puissance des forces extérieure + puissance thermique, ce qui conduit à une équation du type (2.3). Mais la puissance thermique elle-même peut être un flux à travers la frontière du domaine fluide, comme nous le verrons ultérieurement.

## 2.2 Transport diffusif et convectif

Nous avons vu qu'un volume peut se vider ou se remplir par ses frontières d'une grandeur extensive  $G$  : d'argent (flux financier), de personnes (flux migratoire) ... Dans un fluide, les grandeurs extensives sont la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie (cinétique, interne). Lorsque ces grandeurs traversent la frontière du volume, on parle de **transport**.

De façon générale, il convient de bien distinguer deux types de transport :

- le **transport diffusif** intervient même en l'absence de mouvement visible à l'échelle macroscopique.
- le **transport convectif** lié directement au mouvement macroscopique du fluide

---

2. dans le cas de l'entropie, le second principe de la thermodynamique en interdit la destruction...

### 2.2.1 Qu'est ce qu'un flux ?

Il convient tout d'abord de mesurer la “vitesse” à laquelle le volume se remplit ou bien se vide. Par exemple pour un flux migratoire on pourra parler de nombre de personnes qui entrent ou qui sortent du pays par année, ou par toute autre unité de temps. Pour un fluide on cherchera par exemple à connaître la quantité d'eau qui coule d'un robinet par unité de temps. Ce type de grandeur s'appelle un **flux**. Il est homogène à l'unité de la grandeur  $G$  par unité de temps : des kg/s pour un flux massique, des Joule/s (ou Watt) pour un flux d'énergie etc. C'est un vecteur puisque le transport va d'un point vers un autre.

En général la grandeur  $G$  ne rentre (ou sort) pas partout à la même vitesse du volume  $V$ . Pour cela il est intéressant de ramener le flux à une unité de surface. On parle alors de **densité de flux** (qui est aussi un vecteur).

### 2.2.2 Transport diffusif (parenthèse)

Ce type de transport est provoqué par le déséquilibre d'une grandeur au sein du milieu, le système tentant de revenir à l'équilibre. Tout le monde sait par exemple que lorsqu'il existe un point chaud et un point froid dans un corps, la chaleur est transportée du point chaud vers le point froid pour tenter d'homogénéiser les températures : il s'agit d'un flux d'énergie, et l'on parle de **diffusion thermique**. Ce flux d'énergie n'est pas lié à un mouvement global de fluide, mais aux mouvements à l'échelle microscopique. La densité de flux énergétique correspondante est donné par la **loi de Fourier** (cf. cours de transfert de chaleur) :

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad} T.$$

La grandeur  $\lambda$  est appelé conductivité thermique et son unité S.I. est le W/m/K.

De même, si l'on verse du lait dans du café très lentement pour éviter tout mouvement, on constate que les deux finissent par se mélanger parfaitement : dans un mélange de deux espèces A et B, l'espèce A diffuse des régions où elle est la plus concentrée vers celle où elle l'est le moins. Ici encore, ce flux de matière n'est pas transporté par un mouvement global de fluide, mais est lié uniquement aux collisions entre les différentes molécules à l'échelle microscopique. La densité de flux massique de l'espèce A est fournie par la **loi de Fick**<sup>3</sup> (cf. cours de transfert de matière) :

$$\mathbf{j}_A = -D_{AB}\rho \mathbf{grad} \omega_A,$$

où  $\omega_A$  est la fraction massique de A, et  $D_{AB}$  est appelé coefficient de diffusion de A dans B (en m<sup>2</sup>/s).

La quantité de mouvement dans un fluide en mouvement diffuse également, à cause du frottement des couches fluides les unes sur les autres, phénomène appelé **viscosité**. Nous y reviendrons lors de l'étude des forces exercées sur un fluide.

---

3. La relation ci-dessous est la plus générale. On peut l'obtenir en écrivant que le flux diffusif de matière est proportionnel à un gradient de potentiel chimique.

Les transferts diffusifs, et notamment les deux formules ci-dessus, ne nous serviront pas dans le cadre de ce cours car :

- les transferts de matières diffusifs ne concernent que des mélanges de plusieurs fluides, non considérés dans ce cours.
- les transferts de chaleur diffusifs  $\mathbf{q}$  interviendront dans l'expression du premier principe, mais ne seront pas explicités en fonction de la température.
- les transferts diffusifs de quantité de mouvement interviendront implicitement dans les forces appliquées au fluide, considérées comme des sources/puits de quantité de mouvement.

### 2.2.3 Flux convectif

Le flux convectif (du latin *cum* = avec, *vectare* = transporter) est lié au transport d'une quantité par le mouvement du fluide. Tout le monde a un jour ou l'autre remué l'eau dans une baignoire pour transporter l'eau chaude coulant du robinet vers l'autre bout de la baignoire. L'agent de transport est dans ce cas le fluide lui-même et est bien plus rapide que le flux diffusif. C'est pour la même raison que l'on remue son café pour mélanger le sucre ou le lait, sa soupe ou une sauce dans une casserole pour la refroidir, que l'on agite les réacteurs chimiques. Rappelez-vous également combien il est difficile de mélanger deux peintures de couleurs différentes : s'il fallait attendre qu'elle se mélangent par diffusion, il faudrait attendre des années, c'est pourquoi il faut remuer le mélange.

Le but de cette section est de quantifier ce flux convectif pour n'importe quelle grandeur traversant la surface frontière  $S$  d'un volume  $V$  **eulérien, c'est-à-dire fixe dans l'espace**.

Pour illustrer le propos, prenons l'exemple simple suivant : de la fumée sort d'une pièce fermée par une fenêtre à cause d'un vent de vitesse  $v(t)$ , uniforme et perpendiculaire à la fenêtre (Fig. 2.2), par exemple causé par un ventilateur. Intuitivement, on conçoit bien qu'il sortira, pendant un temps donné, d'autant plus de fumée que celle-ci est concentrée d'une part, et que le vent est violent d'autre part.

Passons à l'évaluation de la masse de fumée  $dG$  sortant pendant un temps  $dt$  : c'est celle qui se trouve dans un volume  $S dl$  où  $dl = v dt$  est le trajet parcouru par la fumée pendant un temps  $dt$  (Fig. 2.2), soit, si nous appelons  $g$  la densité de la fumée (la masse de fumée par unité de volume) :

$$\underbrace{dG}_{\text{kg}} = \underbrace{g}_{\text{kg/m}^3} \times \underbrace{S}_{\text{m}^2} \times \underbrace{v}_{\text{m/s}} \times \underbrace{dt}_{\text{s}};$$

Imaginons maintenant que la densité de la fumée  $g$  et/ou la vitesse  $v$  ne soit plus uniforme sur toute la surface de la fenêtre (Fig. 2.3), mais dépende de la position  $(x, y)$  du point de la fenêtre considéré : il faut alors calculer les quantités infinitési-

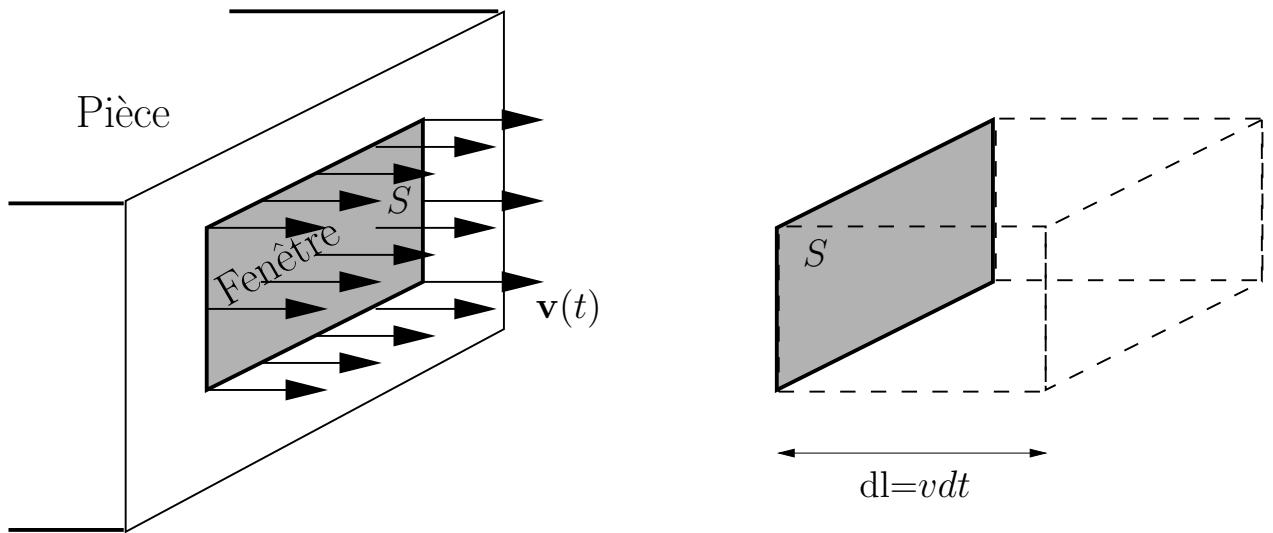


FIGURE 2.2 – Fumée sortant d'une pièce par une fenêtre.

males rentrant par chaque petit élément de surface  $dS = dx dy$  et intégrer sur toute la surface. La quantité de fumée  $d^2G$  sortant de la pièce<sup>4</sup> par  $dS$  pendant  $dt$  est la fumée contenue dans le volume  $dS \times v dt$ , soit :

$$d^2G = gdS \times v dt$$

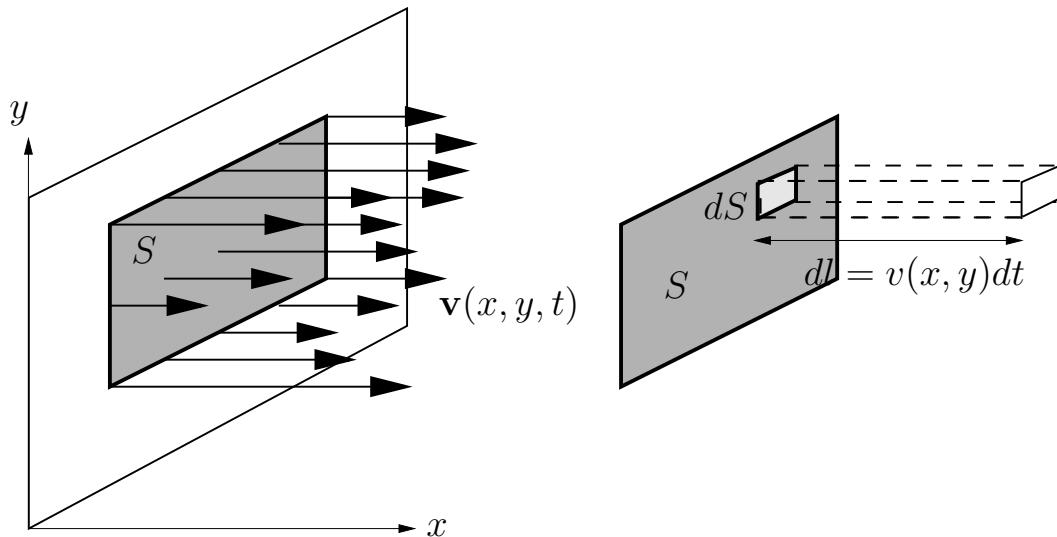


FIGURE 2.3 – Fumée sortant d'une pièce par une fenêtre avec une vitesse non homogène.

soit, en intégrant sur tout la surface de la fenêtre :

$$dG = dt \times \iint_S gv \, dS$$

---

4. On le note ainsi car  $dS$  et  $dt$  étant tous deux infiniment petits,  $d^2G$  est un infiniment petit d'ordre 2.

Notons que cette expression, sous réserve que  $v$  représente la composante (positive ou négative) du vecteur  $\mathbf{v}$  suivant l'axe sortant de la pièce, autorise qu'en certains points de la fenêtre, la fumée re-rentre dans la pièce : l'intégrale ci-dessus est alors le bilan entre la masse sortante et la masse entrante dans la pièce.

Il reste à voir le cas le plus général où la vitesse n'est pas orthogonale à la surface (Fig. 2.4). Considérons un petit élément  $dS$  de la fenêtre et désignons par  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à  $dS$ , orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la pièce (on parlera de vecteur normal sortant).

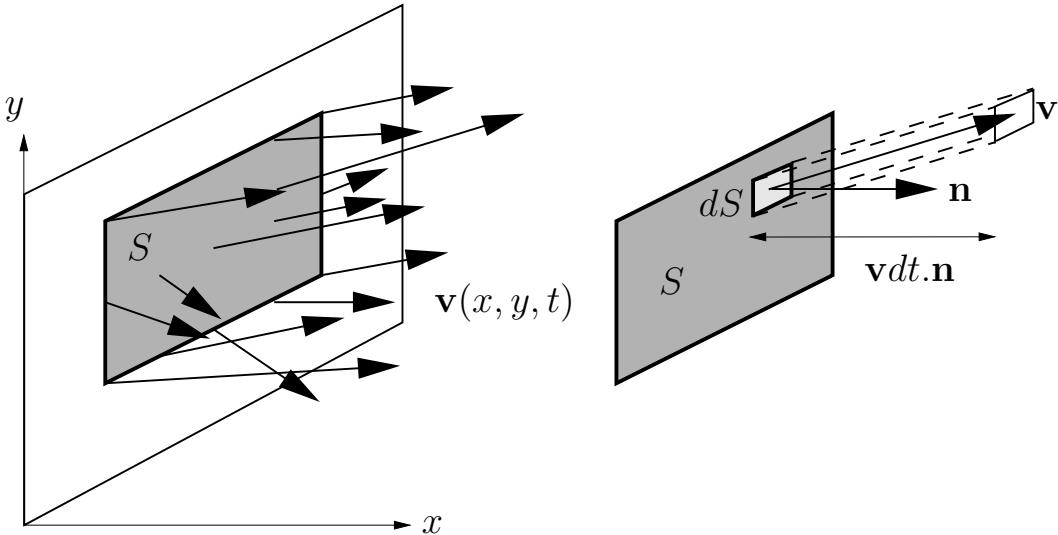


FIGURE 2.4 – Fumée sortant d'une pièce par une fenêtre avec une vitesse non homogène et non perpendiculaire à la fenêtre.

par  $dS$  est la quantité de fumée dans le volume pointillé sur la figure. Ce volume vaut  $dS \times (\mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n})$  et donc :

$$d^2G = gdS \times \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n},$$

et le flux sortant de la pièce pendant  $dt$  est obtenu en intégrant sur tous les éléments de surface  $dS$  :

$$dG = dt \times \iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.4)$$

Rappelons que les grandeurs à l'intérieur de l'intégrale dépendent du point de la surface considérée :  $g$  parce que la concentration de fumée peut varier d'un point à un autre,  $\mathbf{v}$  parce que la vitesse du fluide peut varier d'un point à un autre, et  $\mathbf{n}$  parce que la surface peut être courbe, auquel cas le vecteur normal varie d'un point à un autre.

Notons ensuite que cette définition fonctionnerait aussi si la fumée entrait dans la pièce au lieu d'en sortir : on aurait alors  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$  en tout point, et la quantité de fumée sortant de la pièce  $dG$  est aussi négative. Dans le cas général où la fumée peut entrer en certains points ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ ) et sortir en d'autres ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ ), on voit

que la formule (2.4) **fournit le bilan entre la fumée sortante et la fumée entrante pendant l'intervalle de temps  $dt$** . C'est donc très précisément l'opposé de la grandeur  $dt \times [\Phi_e(t) - \Phi_s(t)]$  intervenant dans l'équation de bilan (2.3), et nous avons donc :

Par unité de temps, un fluide de champ de vitesse  $\mathbf{v}$  transporte à l'intérieur d'un volume  $V$  **fixe dans l'espace** une quantité nette de  $G$  égale à :

$$\Phi_e(t) - \Phi_s(t) = - \iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.5)$$

où  $g$  est la quantité de  $G$  par unité de volume.

Dans le cas où le volume  $V$  verrait ses frontières bouger, au lieu d'être fixes, il est facile de généraliser ce résultat en remplaçant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , où  $\mathbf{w}$  est la vitesse locale en chaque point de la frontière. Dans le cas particulier où  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ , c'est-à-dire quand la frontière bouge avec le fluide ( $V$  est alors un volume Lagrangien), on voit clairement que le flux convectif est nul : le fluide ne peut transporter une grandeur à travers la frontière puisque vu depuis celle-ci, il est immobile.

## 2.3 Bilan d'une grandeur volumique dans un milieu continu

### 2.3.1 Écriture générale

Il suffit maintenant d'introduire ce terme de flux dans le bilan (2.3).

Les variations d'une grandeur volumique  $g$  dans un volume  $V$  limité par une surface  $S$  (Fig. 2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V g \, dV}_{\text{Accumulation de } G} \\ &= - \underbrace{\iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Flux convectif de } G \text{ entrant - sortant}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Production de } G} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Destruction de } G}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

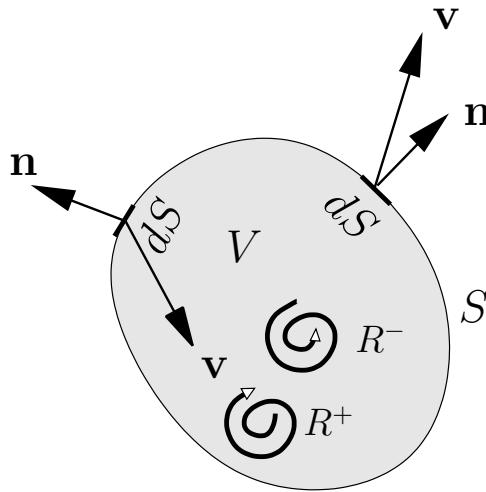


FIGURE 2.5 – Bilan d'une grandeur  $g$  sur un volume  $V$

Rappelons que cette formule est liée à l'orientation du vecteur normal à la frontière **vers l'extérieur**. Si le vecteur normal était pris vers l'intérieur nous aurions un signe + devant l'intégrale de surface.

Les trois équations de bilan régissant le mouvement des fluides sont toutes de ce type, respectivement avec  $g = \rho$  pour la masse,  $g = \rho\mathbf{v}$  pour la quantité de mouvement

et  $g = \rho(e + v^2/2)$  pour l'énergie. Pour chacune d'entre elles, il nous reste juste à spécifier quels sont les termes source et puit. Ces derniers résultent de trois grands principes physiques :

- l'impossibilité de créer ou détruire de la matière (conservation de la masse),
- la loi de la dynamique de Newton (conservation de la quantité de mouvement),
- le premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie).

### 2.3.2 Une géométrie particulière : le tube de courant

Un tube de courant (Fig. 2.6) est un tube fictif dont les parois latérales  $S_{\text{lat}}$  sont en tout point tangentes au vecteur vitesse et comportant une section d'entrée  $S_e$  et une section de sortie  $S_s$ , toutes deux droites. Il peut s'agir par exemple d'un tube réel car la condition d'étanchéité impose que la composante normale de la vitesse sur une paroi solide (immobile) soit nulle (cf. section 4.2).

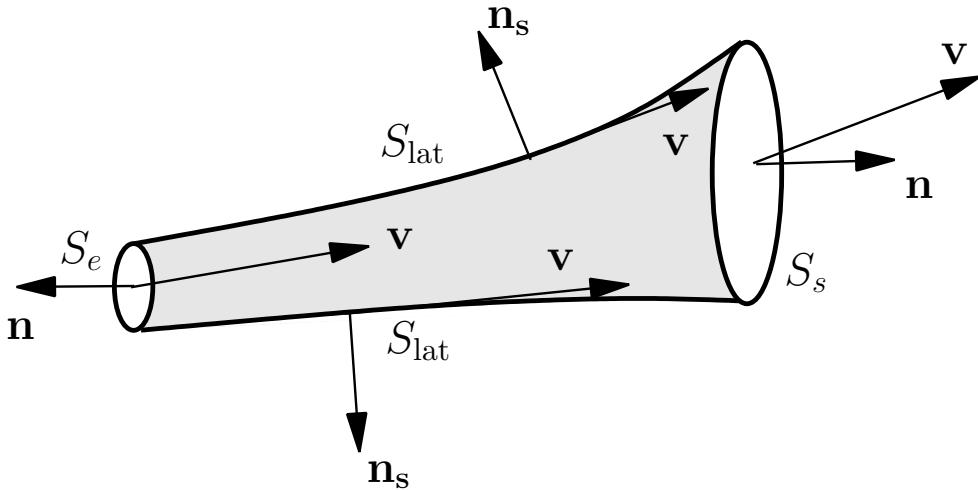


FIGURE 2.6 – Tube de courant.

Dans ces conditions l'intégrale de surface se limite aux sections d'entrée et de sortie, car  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  est nul partout sur la surface latérale  $S_{\text{lat}}$ , et le bilan d'une grandeur  $g$  s'écrit, en décomposant la surface  $S$  en  $S_e + S_s + S_{\text{lat}}$  :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Accumulation de } G} &= - \underbrace{\iint_{S_e} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\dot{G}_e = \text{Quantité } > 0 \text{ de } G \text{ rentrant dans le tube par } S_e \text{ par } s} - \underbrace{\iint_{S_s} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\dot{G}_s = \text{Quantité } > 0 \text{ de } G \text{ rentrant dans le tube par } S_s \text{ par } s} \\
 &\quad + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Taux de production de } G} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Taux de destruction de } G}. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

La première intégrale de surface est négative car  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$  partout sur  $S_e$  et la seconde est positive car  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$  partout sur  $S_s$ . On peut donc les exprimer en fonction des deux grandeurs  $\dot{G}_e$  et  $\dot{G}_s$ , toutes deux positives représentant des débits de  $G$  (masse, énergie,...) respectivement entrants et sortant par le tube.

Le tube de courant est une notion très importante car il permet de représenter, au sein d'un réseau de fluide, n'importe quel système ayant une entrée et une sortie (tronçon de tube, pompe, vanne, coude ...).

Un cas particulier très fréquent est le **régime permanent** où les propriétés de l'écoulement ne dépendent plus du temps. C'est le cas de nombreuses installations industrielles, du circuit de fréon de votre réfrigérateur, de votre cuisinière à gaz etc.... Dans le cas du tube de courant on obtient une expression particulièrement simple du bilan :

$$\underbrace{\dot{G}_s}_{\text{Le } G \text{ qui sort}} = \underbrace{\dot{G}_e}_{\text{Le } G \text{ qui rentre}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Le } G \text{ qui est produit}} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Le } G \text{ qui est détruit}}. \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Une approximation utile : l'écoulement piston

Dans un écoulement en tuyauterie, la quantité  $g$  est généralement quasi-uniforme dans la section. On peut donc écrire alors :

$$\begin{aligned} \iint_{S_e} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS &\simeq g_e \iint_{S_e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ \iint_{S_s} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS &\simeq g_s \iint_{S_s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

On définit alors les modules  $v_e$  et  $v_s$  (positifs) des vitesses moyennées dans les sections d'entrée et de sortie par :

$$\begin{aligned} v_e &= -\frac{1}{S_e} \iint_{S_e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \\ v_s &= -\frac{1}{S_s} \iint_{S_s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{aligned}$$

et les débits d'entrée et de sortie s'écrivent donc simplement.

$$\dot{G}_e = - \iint_{S_e} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = v_e \iint_{S_e} g \, dS = g_e v_e S_e \quad (2.9)$$

$$\dot{G}_s = \iint_{S_s} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = v_s \iint_{S_s} g \, dS = g_s v_s S_s \quad (2.10)$$

On voit que ces expressions seraient celles des débits dans le cas où le champ de vitesse serait uniforme sur les sections d'entrée et de sortie, de module égal à sa valeur moyenne : on parle alors d'**écoulement piston** car tout se passe comme si chaque tranche de fluide se déplaçait comme un piston solide (Fig. 2.7).

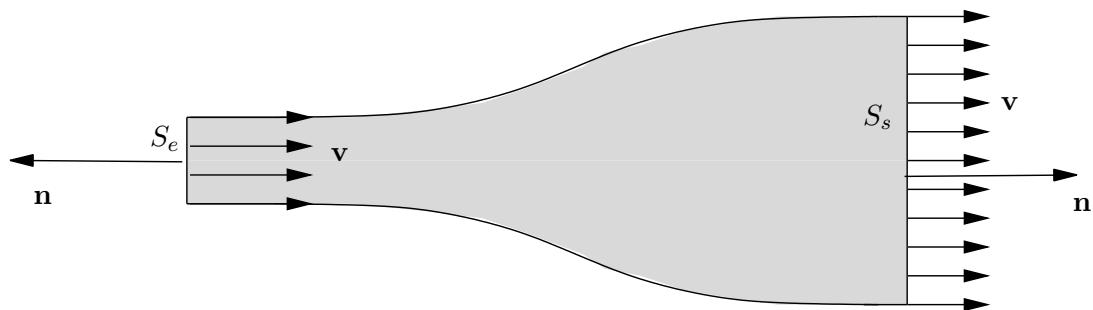


FIGURE 2.7 – Modèle de l'écoulement piston. Le vecteur vitesse est uniforme dans toute section du tube.

On retiendra que :

Dans l'hypothèse de l'écoulement piston, nous pouvons écrire, en tout point du tube le débit d'une grandeur  $g$  sous la forme :

$$\dot{G} = gvS \quad (2.11)$$

où  $v$  est la vitesse moyenne du fluide sur la section considérée,  $S$  la section du tube et  $g$  la valeur locale, supposée constante, de la grandeur volumique  $g$ .

L'intérêt de cette hypothèse est que, dans ces conditions, le bilan (2.7) entre l'entrée et la sortie du système prend une forme particulièrement simple, puisque les intégrales ont disparu, au profit de valeurs moyennées sur les sections. On obtient

Le bilan d'une grandeur  $g$  sur un tube de courant dans l'hypothèse d'un écoulement piston s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} = \underbrace{g_e v_e S_e}_{\dot{G}_e} - \underbrace{g_s v_s S_s}_{\dot{G}_s} + R^+(t) - R^-(t) \quad (2.12)$$

Dans cette équation  $v_e$  et  $v_s$  sont des vitesses moyennes sur les sections d'entrée et de sortie.

Il reste à savoir d'une part si une telle approximation est justifiée ( $g$  constante dans les sections d'entrée et de sortie), et d'autre part comment calculer la vitesse moyenne.

Pour des tuyauteries de tailles restreinte, il est fréquent que, soit la diffusion, soit la turbulence homogénéisent toutes les grandeurs dans la largeur du tube, si bien que l'hypothèse  $g$  uniforme est généralement vérifiée.

Concernant le calcul de la vitesse, comme nous le verrons plus tard, le frottement visqueux du fluide sur la paroi impose que le champ de vitesses est nécessairement nul sur celle-ci. Le champ de vitesse doit donc en réalité passer continument de 0 à la paroi à sa valeur maximale au centre du tube. Selon que l'écoulement est laminaire ou turbulent, le profil de vitesse est soit parabolique (on parle alors d'écoulement de Poiseuille, cf. Sec. 7.3.2), soit aplati (Fig. 2.8).



FIGURE 2.8 – Profils de vitesse dans un tube pour un écoulement laminaire (à gauche), et turbulent (à droite).

Pour un écoulement laminaire, la théorie de Poiseuille montre que cette vitesse moyenne est égale à  $1/2$  de la vitesse max, réalisée au centre du tube. Pour un écoulement turbulent, il existe des corrélations, mais notons que dans ce cas, l'écoulement est quasiment piston par essence, et la vitesse moyenne est proche de la vitesse au centre.

## 2.4 Équations de conservation pour un fluide

### 2.4.1 Conservation de la masse

Le principe physique stipule que (hormis pour des réactions nucléaires), la masse de matière se conserve. Par conséquent un volume  $V$  fixe dans l'espace peut accumuler de la matière ou en échanger avec l'extérieur mais pas en créer ni en détruire. L'équation de bilan de masse d'un fluide ne comporte ni terme source, ni terme puit.

Utilisant les résultats du chapitre précédent, nous avons donc, en prenant  $G = M$  la masse du volume  $V$  et  $g = \rho$  la masse volumique :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.13)$$

## 2.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

### 2.4.2.1 Rappel de mécanique

On peut questionner la pertinence du terme “conservation”. Il convient cependant de se remémorer comment est définie la notion de force en mécanique : une force est associée à l’échange de quantité de mouvement entre deux systèmes. Si ces deux systèmes sont isolés de l’extérieur, la somme de leurs quantités de mouvement reste constante au cours du temps, quelle que soit leur interaction mutuelle. Par exemple un couple de patineurs sur la glace est quasiment isolé de l’extérieur si l’on peut négliger le frottement des patins. S’ils se tiennent par la main, ils interagissent et échangent de la quantité de mouvement, mais la somme des deux reste constante. De même deux boules de billard qui se choquent échangent de la quantité de mouvement lors du choc, mais la somme des deux reste constante.

C’est en ce sens qu’il faut comprendre l’expression “conservation de la quantité de mouvement” : on peut dire que le fluide subit (ou exerce) une force extérieure, mais aussi qu’il échange de la quantité de mouvement avec l’extérieur, de telle sorte que la somme des quantités de mouvement fluide + extérieur reste constante. Il est important de retenir cette notion pour bien comprendre la physique sous-jacente aux équations qui vont suivre.

On retiendra donc :

Une force subie par le fluide correspond à un accroissement de sa quantité de mouvement. Une force exercée par le fluide correspond à une diminution de sa quantité de mouvement

### 2.4.2.2 L’équation générale

On considère toujours le volume  $V$  fixe dans l'espace. Les termes sources  $R^+ - R^-$  sont les forces extérieures  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , et l'équation de bilan (2.6) s'écrit, avec  $G = \mathbf{P}$ , et  $g = \rho \mathbf{v}$  :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV = - \iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.14)$$

Cette relation appelle plusieurs remarques :

1. Le lecteur ayant des notions en mécanique s'étonnera de la différence entre cette équation et la loi de la dynamique bien connue  $d\mathbf{P}/dt = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  : il y a un terme de flux en plus ! Ce terme de flux vient du fait que contrairement aux systèmes étudiés habituellement, ***V est un système ouvert (ou eulérien) qui ne contient jamais les mêmes particules matérielles*** ! Aussi les particules fluides rentrant et sortant du volume  $V$  transportent-elles avec elles leur quantité de mouvement. C'est l'origine du terme de flux. Si nous avions pris un volume  $V(t)$  lagrangien, qui suit le fluide dans son mouvement, et contient donc toujours la "même matière", les termes de flux disparaîtraient (pourquoi ?) et on retrouverait bien la loi de la dynamique dans sa formulation classique.
2. C'est une équation **vectorielle** et ce sont donc en fait trois équations faisant intervenir les trois composantes de la vitesse.
3. Le terme  $\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$  doit être lu comme le "produit scalaire de  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{n}$ , ensuite multiplié par le vecteur  $\rho \mathbf{v}$ ".

### 2.4.3 Conservation de l'énergie

#### 2.4.3.1 Rappel : premier principe en système fermé.

Le premier principe de la thermodynamique stipule que, **pour un système fermé** :

$$\Delta(U + K) = W + Q \quad (2.15)$$

où  $U$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $W$  travail des forces extérieures et  $Q$  la quantité de chaleur échangée (comptée positivement si le système reçoit de la chaleur). Toutes ces grandeurs se comptent en Joule. Écrivons le premier principe pendant un intervalle de temps  $dt$ , nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.16)$$

où  $\dot{W}$  et  $\dot{Q}$  sont respectivement la puissance des forces extérieures et la puissance thermique échangée, comptées en Watt (attention la notation avec un point au-dessus ne signifie pas qu'il s'agisse d'une dérivée temporelle).

#### 2.4.3.2 Adaptation au système ouvert.

Nous ne pouvons appliquer directement ce principe à notre volume  $V$  puisqu'il est traversé continuellement par de la matière différente : c'est un système ouvert. Cette matière entrante et sortante transporte de l'énergie cinétique et interne vers ou hors

du volume  $V$ . Comment appliquer le premier principe à un système ouvert ? Tout simplement en remarquant que l'énoncé en système fermé (2.16) indique que  $\dot{W}$  et  $\dot{Q}$  sont des termes sources/puits pour les variations de la grandeur “énergie interne + énergie cinétique”. Pour exprimer le premier principe en système ouvert, il suffit de rajouter les termes de flux convectif dans l'équation de bilan générique (2.6) avec  $G = U + K$ ,  $g = \rho(u + v^2/2)$  et  $R^+ - R^- = \dot{W} + \dot{Q}$ , soit :

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (2.17)$$

$$= - \iint_S \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.18)$$

Ici comme pour la quantité de mouvement, on remarquera que si le volume  $V$  est un volume matériel, qui suit le fluide dans son mouvement (et est donc un système fermé) le terme de flux disparaît, et l'on retrouve l'expression classique du premier principe en système fermé.

#### 2.4.4 Synthèse

Rappelons les équations de bilan obtenues pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, écrites toutes les trois sous la forme d'un terme d'accumulation, un terme de flux sortant (algébrique, donc négatif pour un flux entrant) et un terme source (également algébrique, c.a.d positif si production, négatif si destruction) :

---

Accumulation	+	Flux sortant	=	Source
	-	Flux entrant		(2.19)

---

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV + \iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.22)$$

Pour détailler plus avant les équations de conservation dans un fluide, il nous manque l'expression des forces extérieures  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  agissant sur le fluide, ainsi que la puissance thermique  $\dot{Q}$ .

Le prochain chapitre décrit l'ensemble des forces (les plus classiques) exercées sur le fluide.

# Chapitre 3

## Forces exercées sur un fluide

### 3.1 Introduction

Nous considérons toujours un volume de fluide  $V$  eulérien.

Il est d'usage de distinguer deux types de forces dans les milieux continus :

- les **forces volumiques** qui s'exercent sur chaque particule fluide interne au volume  $V$ .
- les **forces surfaciques ou de contact** qui s'exercent sur la frontière  $S$  du volume  $V$ .

### 3.2 Force volumiques

Pour un fluide, en voici une liste possible :

- le poids
- les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis en référentiel non-galiléen (importantes pour les mouvements de l'atmosphère par exemple).
- les forces électriques et magnétiques pour les fluides chargés (suspensions de particules magnétiques, magma)<sup>1</sup>.

Nous nous limiterons ici au poids. Exprimons le poids du volume de fluide  $V$  : chaque volume élémentaire  $dV$  a pour poids  $\rho g dV$  de telle sorte que le poids du volume  $V$  s'exprime par :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV \quad (3.1)$$

---

1. Cette discipline complexe porte le nom de “magnétohydrodynamique”

On notera que  $\rho$  et  $\mathbf{g}$  ne peuvent être sortis de l'intégrale dans le cas le plus général :  $\rho$  parce que le fluide peut présenter des variations de masse volumique, et  $\mathbf{g}$  parce qu'à l'échelle d'un océan ou de l'atmosphère,  $\mathbf{g}$  ne garde pas une direction constante.

### 3.3 Forces de contact : pression

#### 3.3.1 Origine microscopique.

Nous avons mentionné en introduction le caractère granulaire des fluides à l'échelle microscopique, et le fait que ces “grains” sont en perpétuel mouvement les uns par rapport aux autres.

Supposons que le fluide est limité par une paroi solide (par exemple celle d'un récipient). A chaque instant, certaines des molécules du fluide, dans leur mouvement désordonné, vont aller taper et rebondir sur cette paroi (imaginez une multitude de balles lancées aléatoirement dans un gymnase) (Fig. 3.1).

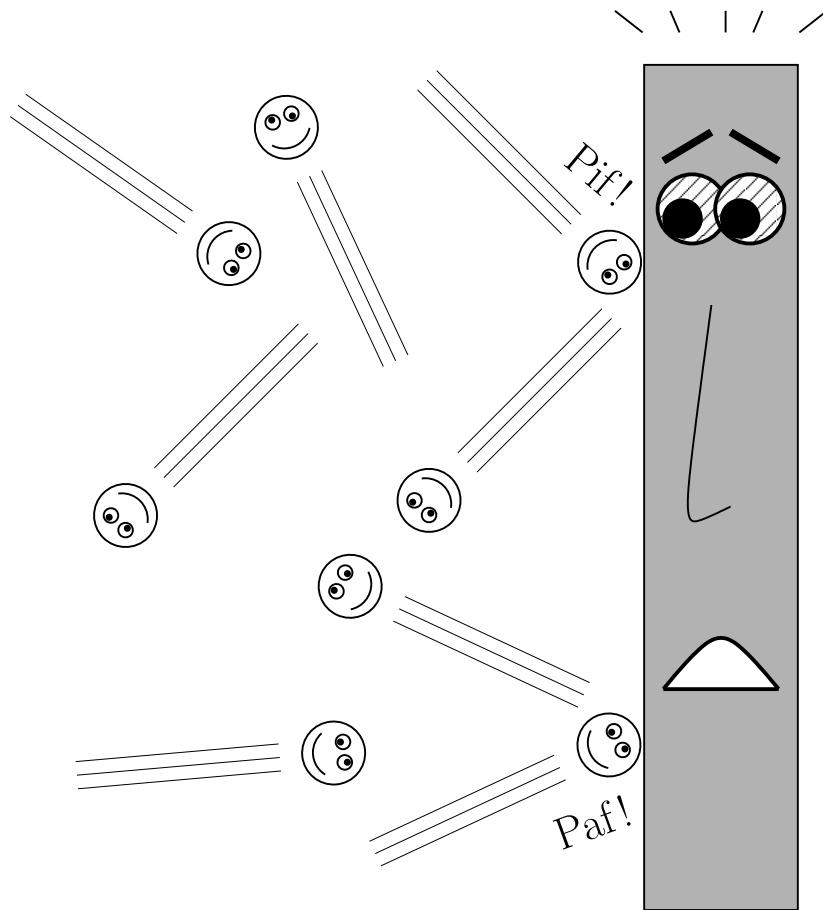


FIGURE 3.1 – Choc de molécules d'un fluide sur une paroi solide.

Lors de ce rebond, conformément aux lois de Newton, la molécule échange de la

quantité de mouvement avec la paroi, et exerce donc sur cette dernière une force proportionnelle à  $\{\text{sa quantité de mouvement avant le choc } \mu\mathbf{v}_1\} - \{\text{celle après le choc } \mu\mathbf{v}'_1\}$ . On voit sur la figure 3.2 que cette force est perpendiculaire à la paroi et dirigée vers son intérieur.

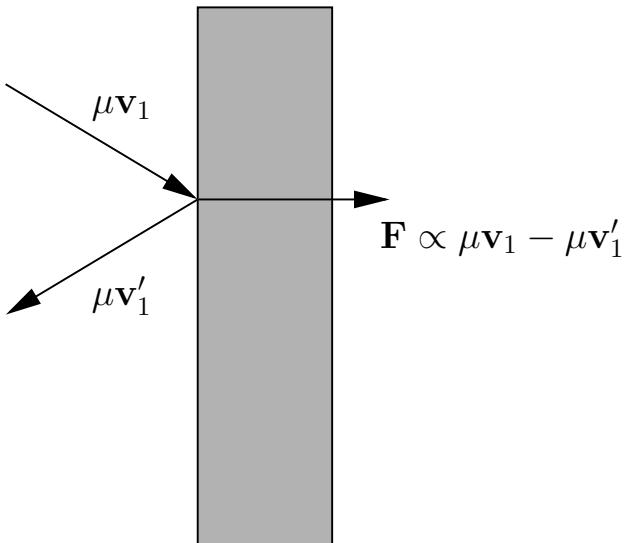


FIGURE 3.2 – Echange de quantité de mouvement lors du choc d'une molécule de fluide de masse  $\mu$  sur une paroi solide.

La force moyenne qu'exerce le fluide sur la paroi, obtenue en comptant tous les chocs de molécules par unité de temps<sup>2</sup> est donc également normale à la paroi et dirigée vers son intérieur. Cette force est une **force de pression**.

Il est bien évident que le nombre de chocs subi est proportionnel à la surface de la paroi. Si l'on considère une surface deux fois plus petite, le nombre de chocs, et donc la force résultante, seront également deux fois plus petits. La force de pression est donc proportionnelle à la surface considérée. Il est donc commode dans ces conditions de définir une force par unité de surface appelée **pression** (l'unité S.I. est le Pascal :  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ ). Comme l'orientation de cette force est parfaitement définie (normale et rentrante dans le système subissant la force de la part du fluide), un scalaire  $p$  suffit pour la définir.

Quotidiennement, notre corps subit les mêmes chocs que la malheureuse paroi de la figure 3.1 de la part des molécules d'air environnant. La pression correspondante, dite pression atmosphérique est égale à 101325 Pa, ce qui correspond grossomodo à une masse de  $1 \text{ kg/cm}^2$  !

Sur les figures 3.1 et 3.2, rien n'empêche de considérer autre chose qu'une paroi solide : on peut aussi bien considérer un volume de fluide identique ou non à celui qui exerce la force. Les molécules du fluide de gauche exercent les mêmes chocs sur le fluide de droite, et donc la même pression. Il est donc possible de la pression en un point dans un fluide. Nous allons éclaircir cette notion dans la section suivante.

2. Un calcul approché simple peut être effectué pour un gaz parfait, et fournit l'équation d'état des gaz parfaits.

### 3.3.2 Equilibre d'une colonne d'eau.

Imaginons 3 cylindres de liquide immobiles empilés les uns sur les autres (Fig. 3.3), que nous nommerons 1, 2 et 3. Le dessus du cylindre 1 est soumis à la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}}$ . Nous allons considérer l'équilibre du cylindre du milieu, pour l'instant *seulement dans la direction verticale*. Il est soumis à son propre poids, à une force de pression  $\mathbf{F}_{1/2}$  de la part du cylindre 1 et d'une force de pression verticale  $\mathbf{F}_{3/2}$  de la part du cylindre 3. L'équilibre s'écrit donc :

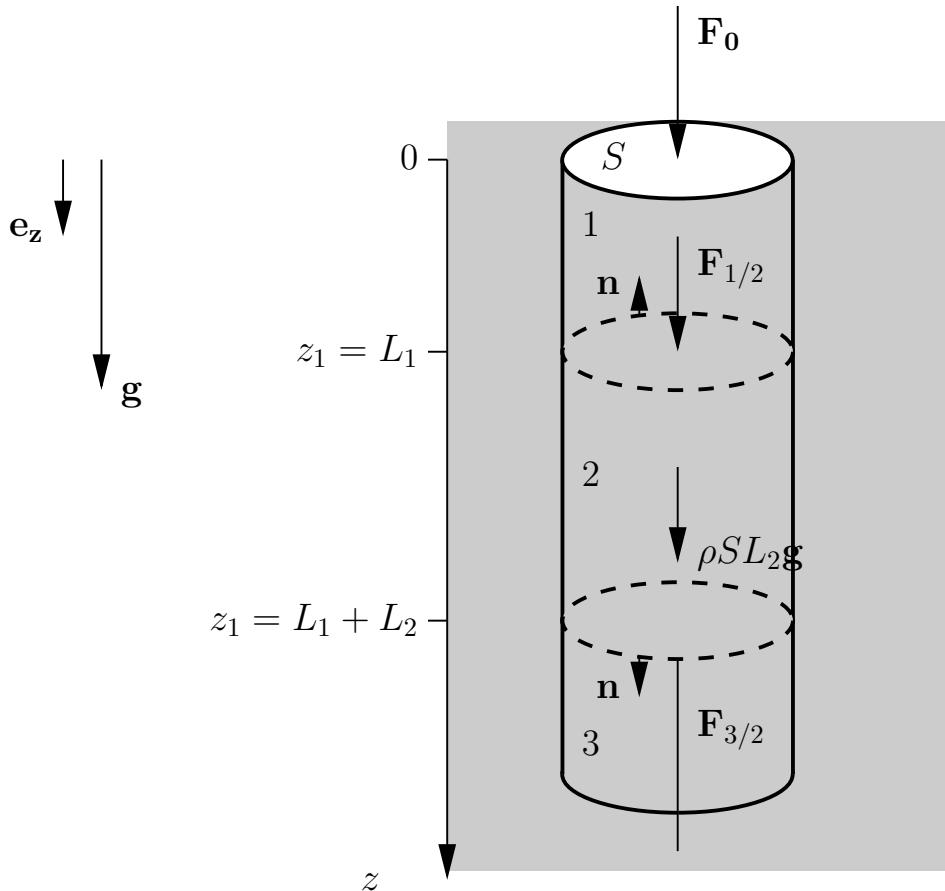


FIGURE 3.3 – Équilibre d'un cylindre de fluide.

$$M_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_{3/2} = \mathbf{0}$$

Considérons maintenant l'équilibre du cylindre 1 : il est soumis à son poids, à la force de pression  $\mathbf{F}_0$  exercée par la pression atmosphérique et à la force  $-\mathbf{F}_{1/2}$  de la part du cylindre 2, d'après la loi de l'action et de la réaction. Son équilibre s'écrit donc :

$$M_1 \mathbf{g} - \mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$$

De ces deux équations, et en remarquant que  $\mathbf{F}_{3/2} = -\mathbf{F}_{2/3}$ , nous déduisons les forces  $\mathbf{F}_{1/2}$  et  $\mathbf{F}_{3/2}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1/2} &= \mathbf{F}_0 + M_1 \mathbf{g} \\ \mathbf{F}_{2/3} &= \mathbf{F}_0 + (M_1 + M_2) \mathbf{g}\end{aligned}$$

ce qui montre que chaque cylindre subit de la part de son supérieur une force égale au poids de toute la colonne le surplombant + la force exercée par l'extérieur sur le cylindre 1 qui se transmet dans toute la colonne.

De plus, appelons  $S$  la section des cylindres,  $\rho$  la masse volumique du fluide, et  $L_1, L_2, L_3$  leurs longueurs respectives. Les deux équations d'équilibres précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{1/2}}{S} &= \frac{\mathbf{F}_0}{S} + \rho L_1 \mathbf{g} \\ \frac{\mathbf{F}_{2/3}}{S} &= \frac{\mathbf{F}_0}{S} + \rho(L_1 + L_2) \mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Mais la force  $\mathbf{F}_0$  exercée par l'atmosphère est liée aux chocs des molécules d'air sur la surface supérieure du cylindre 1, et c'est donc une force de pression, proportionnelle à la surface  $S$  et orientée vers le bas. On peut donc l'écrire sous la forme  $\mathbf{F}_0 = p_{\text{atm}} S \mathbf{e}_z$ . Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{1/2}}{S} &= p_{\text{atm}} \mathbf{e}_z + \rho L_1 \mathbf{g} \\ \frac{\mathbf{F}_{2/3}}{S} &= p_{\text{atm}} \mathbf{e}_z + \rho(L_1 + L_2) \mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ces expressions montrent clairement que si on double ou décuple la section des cylindres, les forces changent certes dans le même rapport, *mais pas le rapport  $F/S$  !* Les forces  $\mathbf{F}_{1/2}$  et  $\mathbf{F}_{2/3}$  sont aussi des forces de pression : elles peuvent ainsi s'exprimer comme le produit de la pression  $p$  locale par la section de contact. On voit de plus d'après les expressions (3.3) que l'amplitude de la force exercée sur la surface supérieure d'un cylindre quelconque ne dépend que de la profondeur  $z$  de cette surface ( $z = L_1$  pour le cylindre 2,  $z = L_1 + L_2$  pour le cylindre 3). La pression ne dépend donc que de la profondeur et l'on peut écrire les formules (3.3) dans une formule unique :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z\tag{3.4}$$

en prenant l'axe  $z$  orienté dans le sens de la pesanteur et le zéro au niveau de la surface. Ce résultat est classique, il indique que la pression augmente avec la profondeur dans un fluide immobile. Nous retrouverons ce résultat plus généralement ci-dessous.

### 3.3.3 Généralisation.

Nous allons récapituler dans une formule ce que nous avons appris dans les sections précédentes : la force de pression exercée sur un système est :

- proportionnelle à la surface
- normale à la surface
- orientée vers l'intérieur du système

Considérons donc un volume  $V$  quelconque de fluide immobile entouré du même fluide (Fig. 3.4). Sur chaque élément  $dS$  de la frontière de  $V$ , le fluide extérieur applique une force normale rentrant dans le volume  $V$ , définie par la pression  $p$  locale (dépendant donc de  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) :

On définit la force de pression sur un élément de surface  $dS$  par

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n} dS \quad (3.5)$$

et donc, pour la surface  $S$  toute entière :

$$\mathbf{F} = \iint_S -p\mathbf{n} dS \quad (3.6)$$

Rappelons que l'unité S.I. pour la pression est le **Pascal** égal à un  $\text{N/m}^2$ . La pression atmosphérique au niveau du sol vaut 101325 Pa, unité appelée aussi atmosphère. Le Pascal est donc une unité très petite. Le **bar**, unité de pression dans le système CGS vaut  $10^5$  Pa (d'où les fameux 1013 mbar de la météo), soit environ une atmosphère.

Le **psi** (Pound per Square Inch) est égal à une livre par pouce-carré, soit  $0.4536 \text{ kg} / (2.54 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \simeq 6897 \text{ Pa}$ . On pourra retenir que 1 bar  $\simeq 14.5$  psi (vérifiez lorsque vous gonflez les pneus de votre voiture :-)). On ajoute généralement une lettre au symbole psi selon ce que l'on mesure :

- **psia** représente une pression absolue ( $p$ )
- **psig** représente une pression relative par rapport à la pression atmosphérique ( $p - p_{\text{atm}}$ )
- **psid** représente une pression différentielle entre deux points ( $p_2 - p_1$ )

On trouve également des unités liées à des hauteurs équivalentes de liquide (voir ci-dessous). Le **torr**, ou mm de mercure est la pression exercée par une colonne d'un millimètre de mercure. Il vaut 133.32 Pa, et on retiendra que 1 atmosphère vaut 760 mm Hg ou 760 torr. Le torr est bien adapté aux systèmes sous vide.

### 3.3.4 Loi de l'hydrostatique.

Nous connaissons maintenant les deux forces exercées sur un fluide immobile : le poids et les forces de pression. Donc :

L'équilibre mécanique d'un volume  $V$  de fluide immobile s'écrit :

$$\iiint_V \rho g \, dV + \iint_S -p\mathbf{n} \, dS = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

La figure 3.4 illustre cette équation : pour que la résultante des forces de pression équilibre le poids, la pression doit être plus élevée dans les parties basses que dans les parties hautes, ce que nous avions démontré pour la colonne de liquide : la pression augmente avec la profondeur.

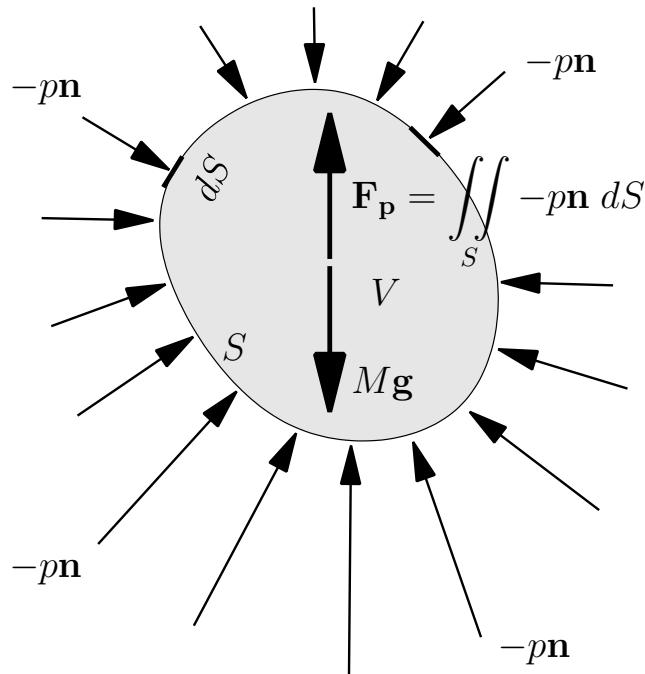


FIGURE 3.4 – Équilibre d'un volume de fluide : la résultante des forces de pression contrebalance le poids.

Pour mieux quantifier ce résultat, utilisons la formule du gradient (B.6) pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume. Nous obtenons :

$$\iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV + \iiint_V (-\mathbf{grad} p) \, dV = \mathbf{0}$$

qui doit être vraie pour tout volume  $V$  en équilibre, et par conséquent :

En tout point d'un fluide immobile, on a :

$$\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

appelée **loi de l'hydrostatique**.

Une propriété du gradient bien connue est qu'il est orthogonal aux surfaces équivalents, c'est-à-dire que  $f(x, y, z)$  est constant lorsque l'on se déplace perpendiculairement à  $\mathbf{grad} f$ . Nous voyons donc que :

Les surfaces isobares dans un fluide au repos sont perpendiculaires à  $\mathbf{g}$ .

Ce sont donc des surfaces sphériques à l'échelle de la terre (si on oublie les défauts locaux de  $\mathbf{g}$ ) et des plans horizontaux à l'échelle humaine. Nous allons spécifier deux applications pratiques.

### 3.3.5 Applications.

#### 3.3.5.1 Variation de la pression avec la profondeur de liquide

Prenons un axe  $Oz$ , orienté vers le bas (dans le sens de  $\mathbf{g}$ ), et l'origine à la surface du liquide. L'équation (3.8) se décompose alors en trois équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \end{cases}$$

et nous obtenons alors, en supposant le liquide incompressible ( $\rho = C^{\text{te}}$ ) :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z$$

On retrouve le résultat obtenu pour une colonne de fluide. Avec  $p_{\text{atm}} = 101300 \text{ Pa}$ , et  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ , on voit que la pression augmente environ de  $p_{\text{atm}}$  tous les 10 mètres.

### 3.3.5.2 Pression dans l'atmosphère

Prenons maintenant l'axe  $Oz$  vers le haut, et l'origine au niveau de la mer. L'équation de l'hydrostatique s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)g$$

où nous avons écrit  $\rho(z)$  car l'air est compressible et les variations de  $\rho$  ne peuvent être négligées dans l'intégration. Celles sont données par la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho \frac{R}{M_a} T$$

où  $M_a = 28.8 \text{ g/mol}$  est la masse molaire de l'air, et  $R = 8.32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Si nous considérons  $T = T_0$  constant avec l'altitude, on peut intégrer l'équation de l'hydrostatique en :

$$p = p_0 \exp \left( -\frac{M_a g}{RT_0} z \right)$$

En réalité, jusqu'à 11000 m d'altitude (troposphère), la température diminue avec l'altitude, selon une loi approximativement linéaire (si vous avez déjà pris l'avion, vous avez probablement été surpris en entendant le pilote annoncer une température extérieure de l'ordre de -40 °C...). Ainsi, nous avons :

$$T(z) = T_0 - Bz$$

avec  $B \simeq 6.5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ . L'utilisation de cette loi fournit alors, après intégration :

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{Bz}{T_0} \right)^{M_a g / RB}$$

### 3.3.6 Extension en référentiel non galiléen.

Examinons le cas où le fluide est immobile dans un référentiel non galiléen que nous nommerons  $\mathcal{R}'$ . Cela se produit notamment dans des cuves tournantes (miroir liquide), ou par exemple dans un véhicule en accélération.

Puisque le liquide est immobile dans  $\mathcal{R}'$ , il ne subit que la force d'inertie d'entraînement, celle de Coriolis étant nulle (cf. annexe C). La force d'inertie d'entraînement

sur un élément de volume  $dV$  s'écrit  $-\rho dV \mathbf{a}_e$  et il est facile de voir que la loi de l'hydrostatique se généralise en :

$$\rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_e) - \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Nous voyons donc que :

Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , d'accélération  $\mathbf{a}_e$  par rapport à un référentiel galiléen, la loi de l'hydrostatique s'écrit de façon identique, à condition de remplacer  $\mathbf{g}$  par une pesanteur “apparente”  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_e$ .

Les surfaces isobares deviennent normales à  $\mathbf{g}'$ . Ce seront par exemple des plans inclinés dans une voiture en accélération constante, et des paraboles dans les référentiels tournants. Ce résultat est mis à profit pour construire naturellement des miroirs liquides parfaitement paraboliques à partir de cuves de mercure en rotation.

### 3.3.7 Poussée d'Archimède.

Nous avons évalué la force de pression résultante sur un volume  $V$  de fluide immobile, montré qu'elle était dirigée **vers le haut** et que puisqu'il y a équilibre, elle est l'opposée du poids du fluide.

Que se passe-t-il si l'on remplace ce volume fluide  $V$  par un corps étranger (bulle, goutte, corps solide) ? Tant que le fluide est immobile, *le champ de pression dans le fluide reste le même* ( $p = p_{\text{atm}} + \rho g z$ ). Les forces de pression sur la surface  $S$  sont donc les mêmes (celles de la figure 3.4), que  $V$  contienne du fluide ou toute autre matière et leur résultante est donc l'opposée du poids du fluide qui remplirait ce volume  $V$  ! D'où le célèbre principe dû à Archimède<sup>3</sup> :

3. Archimède (287 av. JC - 212 av. JC) : sans doute le plus grand scientifique de l'antiquité. Outre le fameux principe, qu'il aurait découvert en prenant son bain (et le Eurêka consécutif...), on lui doit de nombreuses inventions comme le levier, ou la vis sans fin (qui porte son nom). Il inventa de nombreuses machines de guerre pour défendre Syracuse. Il fut également prolifique dans le domaine des mathématiques : on lui doit notamment la spirale et des estimations assez précises de  $\pi$ . Il fut tué par un soldat romain qui ignorait qui il était.

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée de bas en haut égale au poids du liquide déplacé (c'est-à-dire du fluide qui remplacerait le corps si ce dernier était absent).

Dans le cas le plus courant où la masse volumique *du fluide*  $\rho$  peut être considérée constante (et si  $\mathbf{g}$  uniforme), on obtient :

$$\mathbf{F}_a = -\rho V \mathbf{g} \quad (3.10)$$

Cette force est appelée *force ou poussée d'Archimède*. On retiendra qu'elle est toujours opposée au champ de pesanteur  $\mathbf{g}$  (apparent  $\mathbf{g}'$  dans le cas d'un référentiel non galiléen).

Applications : le corps étranger occupant  $V$  est soumis également à son poids  $\rho_s V \mathbf{g}$ , où  $\rho_s$  est la masse volumique du corps. La résultante de son poids et de la poussée d'Archimède est donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_a + \mathcal{P} &= (\rho_s - \rho) V \mathbf{g} \\ &= (d - 1) \rho V \mathbf{g}\end{aligned}$$

où  $d = \rho_s / \rho$  est un nombre sans dimension, qu'on appelle **densité** lorsque le fluide est de l'eau ( $\rho = 998 \text{ kg.m}^{-3}$ ). La force nette est donc vers le haut si le corps est plus léger que le fluide ( $d < 1$ ), et vers le bas s'il est plus lourd ( $d > 1$ ). On peut aussi interpréter cette formule comme si le corps avait une masse modifiée  $(d-1)\rho V$ . C'est ainsi que l'on se sent "plus léger" dans l'eau (le corps humain a une densité moyenne de l'ordre de 1.07)

La plupart des bois sont plus légers que l'eau et donc y flottent. L'ébène ( $d=1.1$ ) et le chêne rouge d'Australie ( $d = 1.32$ ) sont plus lourds que l'eau (et donc coulent), et l'if a une densité de 1.

L'eau de mer et le lait ont une densité de 1.03 (on flotte mieux dans l'eau de mer), le vin de 1.01 (on y flotterait légèrement mieux aussi :-), et le pétrole de 0.8 (c'est pourquoi on ne doit pas jeter de l'eau pour éteindre un feu d'hydrocarbure, car celui-ci flotte et la masse enflammée se répand encore plus vite).

Remarquons enfin que nous subissons également une poussée d'Archimède dans l'air, et la pression au niveau de nos jambes est effectivement plus élevée que celle au niveau de notre tête. Mais cette poussée est très faible devant notre poids en raison de la faible masse volumique de l'air.

### 3.3.8 Moment des forces de pression.

Le moment d'une force de surface, notamment celle de pression, est obtenu en sommant toutes les contributions de moments élémentaires sur chaque élément de surface. Ainsi le moment en un point A des forces de pression s'écrira :

$$\mathcal{M}_A(\mathbf{F}_p) = \iint_S \mathbf{AM} \wedge -p\mathbf{n} dS \quad (3.11)$$

Le calcul des moments est important par exemple pour les études de stabilité de barrage, de corps flottants, de bateaux .... On peut ainsi définir le **centre de poussée**  $\mathbf{C}$  par :

$$\iint_S \mathbf{CM} \wedge -p\mathbf{n} dS = 0 \quad (3.12)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, il est facile de montrer que :

Le centre de poussée de la force d'Archimède exercée sur un corps est le centre de gravité du fluide déplacé.

Ainsi si le corps est homogène et totalement immergé, centre de poussée et centre de gravité du corps sont confondus. En revanche, si le corps a une partie émergée (notamment les bateaux) ce n'est plus le cas, et la stabilité du corps vis-à-vis de la rotation n'est plus assurée.

## 3.4 Forces de contact : frottement visqueux.

### 3.4.1 Mise en évidence : expérience de Couette.

Lorsque le fluide est en mouvement, on constate expérimentalement qu'il apparaît également une **force tangentielle**, en plus des forces de pression. L'expérience la plus simple permettant de le constater est l'écoulement de Couette (Fig. 3.5) : un canal contenant du fluide initialement immobile est équipée d'une paroi supérieure mobile. Lorsque l'on anime cette dernière d'un mouvement horizontal uniforme à la vitesse  $U_0$  on constate que :

- le fluide est entraîné par la plaque, avec une vitesse horizontale
- la plaque subit une force tangentielle  $\mathbf{F}$  opposée au mouvement.

Au bout d'un temps suffisamment long, la vitesse du fluide devient constante au cours du temps (on est en régime permanent) et on constate qu'elle varie linéairement de 0 à  $U_0$  dans l'épaisseur du fluide.

On peut conclure de cette expérience que :

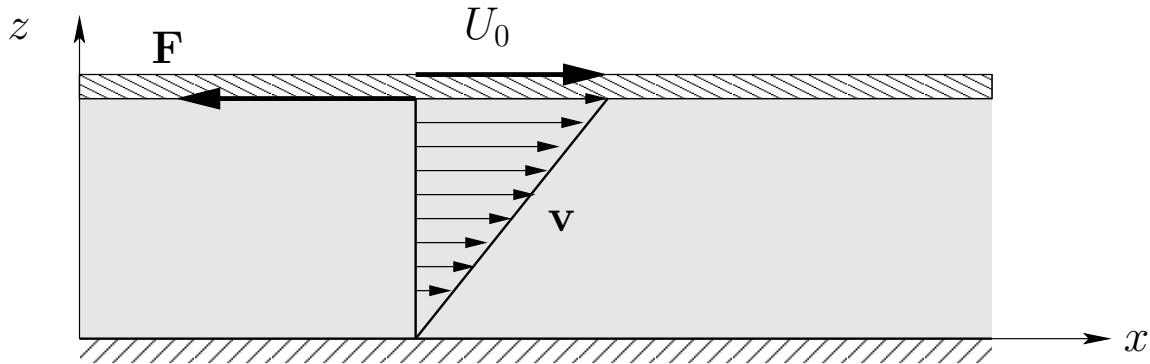


FIGURE 3.5 – Expérience de Couette : la plaque supérieure entraîne le fluide à cause des frottements visqueux. Le profil de vitesse est linéaire en régime permanent.

- la plaque “adhère au fluide” puisqu’elle l’entraîne dans son mouvement.
- les couches horizontales de fluide frottent l’une sur l’autre puisque le mouvement se transmet de la plaque vers les couches plus basses. Cela signifie que chaque “lame” horizontale subit une **force tangentielle** de la part de ses voisines. Cette force tangentielle est appelée **cisaillement**<sup>4</sup>.

Autrement dit cette expérience simple<sup>5</sup> démontre l’existence d’une force tangentielle dans un fluide en mouvement causée par le frottement des couches fluides entre elles. On montre que la force par unité de surface est **proportionnelle au gradient de vitesse** dans la hauteur de l’écoulement :

$$\frac{\mathbf{F}_v}{S} = -\eta \frac{du}{dz} \mathbf{e}_x$$

### 3.4.2 La viscosité.

Le coefficient de proportionnalité  $\eta$  est un paramètre physique du fluide appelé **viscosité dynamique**. Son unité S.I. est le Pa.s ou bien le  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$ , appelé aussi **Poiseuille**<sup>6</sup> et noté Pl. Son unité dans le système CGS s’appelle le **Poise** et est noté Po. On vérifiera que **1 Pl = 10 Po**. La viscosité de l’eau à température et pression

4. Le cisaillement existe aussi dans les solides, par exemple lorsque l’on déplace une surface du solide parallèlement à elle-même. À l’inverse d’un fluide, qui coule lorsqu’il est soumis à du cisaillement externe, un solide tente de reprendre sa forme initiale par une force élastique.

5. On peut la réaliser grossièrement dans une baignoire en posant la main à plat à la surface de l’eau et en décrivant un mouvement circulaire. On sent au bout d’un certain temps que le fluide en profondeur s’anime lui aussi d’un mouvement de rotation

6. Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869) : d’abord élève de polytechnique, il étudie ensuite la médecine. Ses recherches mêlent lois physiques et physiologie, et il étudie notamment l’hémodynamique (la circulation sanguine). Dans la lignée de ces travaux, il étudie le mouvement d’un fluide dans des tubes capillaires, et écrit la fameuse loi de Hagen-Poiseuille (Hagen découvrit la même loi indépendamment), formulée plus rigoureusement un peu plus tard. Cette loi indique que le débit dans un tube est proportionnel à son diamètre, à la différence de pression entre l’entrée et la sortie, et inversement proportionnel à la viscosité du fluide (voir aussi section sur les pertes de charge).

ambiente vaut  $10^{-3}$  Pl, et celle de l'air  $1.85 \cdot 10^{-5}$  Pl. **La viscosité de l'eau vaut donc un CentiPoise** (cPo), et c'est pourquoi cette dernière unité est très populaire.

La viscosité varie notablement avec la température. Elle augmente avec  $T$  dans le cas d'un gaz et diminue dans le cas d'un liquide (vous pourrez vérifier en regardant comment coule l'huile dans une poêle chaude par rapport à une froide). La viscosité des liquides augmente également avec la pression, celle des gaz y est peu sensible.

### 3.4.3 Origine microscopique.

Dans l'expérience précédente, nous voyons des filets de fluides qui se déplacent horizontalement, aucun mouvement vertical n'est visible. Cependant à l'échelle microscopique les molécules se déplacent en tous sens, en plus du mouvement d'ensemble (voir Fig. 3.1). Sur la figure 3.5, une partie des molécules "hautes" et donc rapides vient faire un tour vers le bas. Ce faisant elles choquent les molécules plus lentes et leur transfère de la quantité de mouvement. Réciproquement les molécules basses et lentes vont faire des incursions vers le haut et récupèrent de la quantité de mouvement en choquant des molécules plus rapides. C'est ainsi que le déplacement de la paroi supérieure finit par être "ressenti" par les molécules du bas : de la quantité de mouvement est transférée dans l'épaisseur du fluide par l'agitation microscopique. Notons que ce mouvement vertical des molécules est à moyenne nulle, et donc invisible à l'échelle macroscopique.

### 3.4.4 Le nombre de Reynolds.

Nous verrons ultérieurement que la prise en compte des forces visqueuses introduit une complexité supplémentaire dans les équations du mouvement du fluide. C'est pourquoi il est pertinent de se demander dans quelle mesure on peut les négliger, en ne considérant que les forces de pression. L'expérience montre par exemple que pour un écoulement externe (fluide s'écoulant autour d'un obstacle) les effets de la viscosité sont concentrés dans une fine couche près des parois solides, appelée **couche limite**<sup>7</sup>. Ceci est vrai pourvu que l'écoulement ait une vitesse suffisante et que la viscosité soit suffisamment faible.

En fait, l'épaisseur de la couche limite dépend d'un nombre adimensionnel, appelé **nombre de Reynolds**<sup>8</sup>, fondamental en mécanique des fluides :

---

7. ainsi que, dans une moindre mesure, dans le **sillage** qui est la zone d'écoulement prolongeant la couche limite en aval de l'obstacle

8. Osborne Reynolds (1842-1912) :

sa contribution majeure fut celle qu'il apporta à l'hydrodynamique à partir de 1873. Il établit par une expérience célèbre les conditions de transitions d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent. En 1886, il propose une théorie de la lubrification (écoulements du fluide visqueux dans un espace de petites dimensions dans la direction perpendiculaire à l'écoulement). Trois ans plus tard, il produit le premier modèle mathématique de la turbulence, dont les grands principes ont peu varié depuis (en particulier le fameux tenseur de Reynolds). Il fut le second enseignant

Le nombre de Reynolds est défini par :

$$\text{Re} = \frac{\rho Lv}{\eta} \quad (3.13)$$

C'est une donnée fondamentale d'un écoulement.

Dans cette définition,  $L$  est une longueur caractéristique de l'écoulement (taille d'un obstacle, d'un récipient, diamètre d'un tuyau, épaisseur d'un couche de fluide),  $v$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement. Le Reynolds Re peut être interprété (entre autres) comme le rapport de l'énergie cinétique et du travail des forces visqueuses.

Pour illustrer l'importance de ce nombre, la figure 3.6 présente l'écoulement autour d'un cylindre pour 4 Reynolds différents (1.5, 26, 200 et 8000, respectivement, de gauche à droite et de haut en bas). On voit que l'écoulement, au départ symétrique ( $\text{Re}=1.5$ ), présente ensuite une dissymétrie amont-aval ( $\text{Re} = 26$ ) et des re-circulations. Pour  $\text{Re} = 200$ , l'écoulement se déstabilise et devient instationnaire (au départ périodique), formant des tourbillons se détachant du cylindre alternativement de chaque côté<sup>9</sup>. Enfin pour  $\text{Re} = 8000$ , l'écoulement dans le sillage présente des mouvements erratiques, c'est l'apparition de la turbulence.

De façon générale, lorsque le Reynolds est très petit devant 1, les effets visqueux sont importants dans tout l'écoulement, c'est le cas par exemple des écoulements ou bien très visqueux (huiles, goudron, pâtes, plastique, miel), à très faible vitesse (glaciers, manteau terrestre) ou d'objets microscopiques (bactéries, suspensions de particules). Dans ce cas les forces visqueuses jouent un rôle décisif dans l'écoulement et ne peuvent être négligées.

A l'inverse lorsque le nombre de Reynolds est très grand devant 1, et dans le cas d'un écoulement externe (autour d'un objet, d'un véhicule...) les forces visqueuses seront concentrées au voisinage des parois solides et pourront être négligées hors de cette zone. Dans le cas des écoulements internes, cela est moins clair comme en témoigne clairement l'expérience de Couette : nous avons vu que le frottement visqueux était dans ce cas le moteur du mouvement, et il serait paradoxal de négliger ces frottements, aussi faibles fussent-il !

Pour des écoulements en conduite, le frottement sur les parois du tuyau conduisent à une perte d'énergie mécanique du fluide, ce qui se traduit, pour une tuyauterie de section constante, à une chute de pression dans le sens de l'écoulement. De même, les singularités de la conduite, comme par exemple, un changement brusque de diamètre, un coude, une fente... favorisent localement la dissipation d'énergie par dissipation

---

en ingénierie d'Angleterre et possédait de fermes convictions quant à l'enseignement de cette discipline : tout ingénieur, quel que soit son domaine, devait selon lui avoir une bonne connaissance des mathématiques, de la physique et de la mécanique classique...

9. La photo est prise de plus loin pour visualiser l'extension spatiale des tourbillons. Cette structure est appelée "allée de tourbillons de Von Karman".

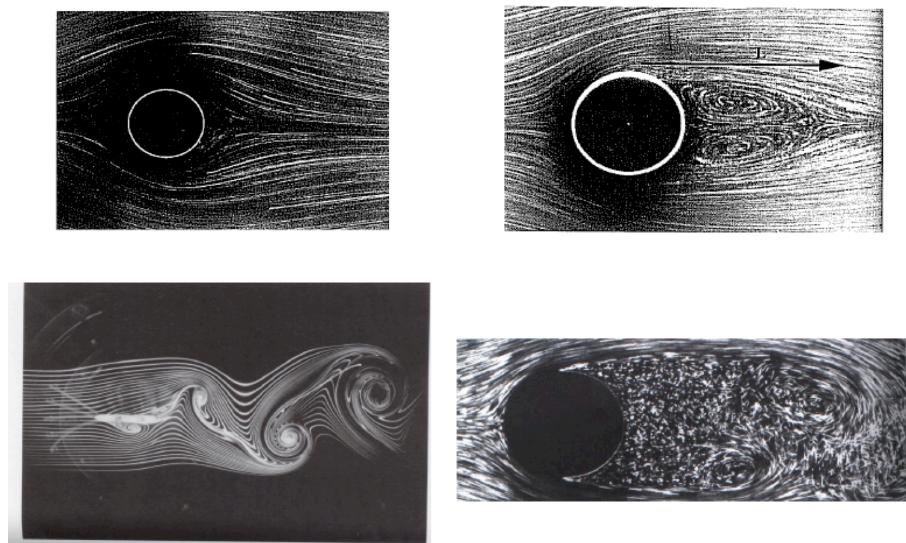


FIGURE 3.6 – Ecoulement autour d'un cylindre pour des Reynolds de 1.5, 26, 200 et 8000, de gauche à droite et de haut en bas (d'après Guyon et al., 2001)

visqueuse et conduite à une perte d'énergie mécanique. Cette perte est appelée **perte de charge**, et sera abordée dans la section 6.2. Comme nous le verrons, le modèle du fluide parfait fournit malgré tout un résultat remarquablement simple, à travers la célèbre formule de Bernoulli, que l'on peut corriger *a posteriori* pour prendre en compte les pertes de charge.

### 3.4.5 Le modèle de fluide parfait.

Le modèle de fluide parfait consiste à négliger l'action des forces visqueuses dans le fluide.

**Il s'agit d'un modèle.** En réalité, tous les fluides sont visqueux <sup>a</sup>.

Il sous-entend un mouvement du fluide non dissipatif.

<sup>a</sup>. Sauf l'hélium superfluide, peu courant en génie des procédés !!

Nous verrons en effet que le modèle de fluide parfait est associé à la conservation de l'énergie totale (cinétique + potentielle) à la manière d'un bille roulant sans frottement sur une glissière. Un fluide parfait, s'il ne subissait aucune force extérieure, coulerait indéfiniment une fois mis en mouvement. Ainsi, ce modèle prédit les comportements suivants :

- un bateau ayant reçu une impulsion de démarrage pourrait traverser l'océan

sans moteur<sup>10</sup> ;

- un planeur planerait indéfiniment même sans courant ascendant ;
- un fluide une fois mis en mouvement dans un tube horizontal pourrait s'écouler sur des milliers de kilomètres ;
- les vagues, le son ne s'amortiraient pas.

Il convient de garder ces exemples à l'esprit lorsque l'on veut faire usage du modèle de fluide parfait, mais il ne faut pas non plus penser que le fluide parfait est un concept inutile. Nous verrons dans la première partie de ce cours un grand nombre d'applications de ce modèle, rendues possibles par la simplification drastique des équations du mouvement. Citons un exemple historique : le modèle de fluide parfait a permis notamment de calculer de façon analytique les forces de portances des ailes d'avion.

Le problème est qu'il est difficile d'établir une règle autorisant ou non son emploi, tout simplement parce que pour un même écoulement, il se justifie ou non selon l'information que l'on cherche à calculer. Ainsi le modèle fluide parfait fournit la portance d'une aile d'avion mais pas sa traînée. Il fournit la vitesse de propagation des vagues ou du son, mais pas leur amortissement. On peut donc énoncer les règles suivantes :

Le modèle de fluide parfait ne peut en aucun cas décrire :

- les mouvements à faible nombre de Reynolds
- les phénomènes dissipatifs, de perte, d'amortissement dans les écoulements.

Enfin, très paradoxalement, il ne peut prédire le phénomène de turbulence, qui pourtant apparaît à très grand nombre de Reynolds ! Plus généralement, la majorité (mais pas tous<sup>11</sup>) des mouvements de fluides tourbillonnaires est provoquée par le frottement visqueux.

## 3.5 Écriture tensorielle des forces de contact

Nous avons vu que tout volume de fluide  $V$  est soumis à des forces de contact de la part du fluide environnant, appliquée sur sa frontière  $S$ . Sur chaque élément de la surface  $dS$  (Fig. 3.7), la force exercée peut être décomposée en une composante normale (de pression) et une composante tangentielle (dite de cisaillement), toutes deux proportionnelles à l'élément de surface<sup>12</sup> :

10. Ce n'est pas tout à fait vrai même si on néglige les forces visqueuses car le bateau perd de l'énergie par les vagues qu'il provoque et qui se propagent loin de lui

11. Les mouvements tourbillonnaires de l'atmosphère sont causés par la force de Coriolis. Des variations de concentrations dans des mélanges peuvent également engendrer des tourbillons.

12. En fait, la compressibilité du fluide engendre aussi une force normale d'origine visqueuse. L'étude détaillée des fluides réels compressibles n'entrant pas dans le cadre de ce cours, nous

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}_n dS + \boldsymbol{\sigma}_t dS \quad (3.14)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\sigma} = d\mathbf{F}/dS$  est appelée **contrainte** (en N/m<sup>2</sup>).

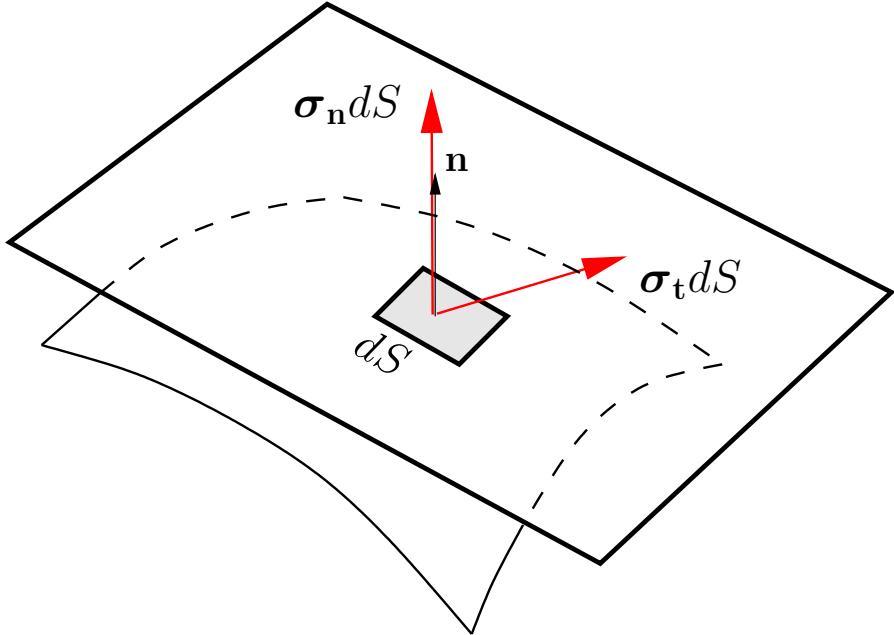


FIGURE 3.7 – Contraintes normale et tangentielle.

Pour décrire la contrainte en un point de la surface  $S$  dans un repère  $(x, y, z)$ , il faut connaître ses trois composantes pour toutes les orientations possible du vecteur  $\mathbf{n}$ . En fait on montre qu'il suffit de connaître  $\boldsymbol{\sigma}$  seulement pour les 3 orientations de  $\mathbf{n}$  selon  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , ce qui fait 9 composantes, que l'on peut organiser en une matrice  $3 \times 3$ , appelée tenseur des contraintes, et notée :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La première colonne est la contrainte lorsque  $\mathbf{n}$  est suivant  $Ox$ , la seconde lorsque  $\mathbf{n}$  est suivant  $Oy$ , etc... Ou encore,  $\sigma_{yx}$  est la composante suivant  $Oy$  de la contrainte sur une surface dont la normale est suivant  $Ox$  (cf. Fig. 3.8)

On notera que  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  représentent les contraintes normales et les termes non diagonaux des contraintes tangentielles. Enfin, et c'est l'intérêt de cette formulation, on peut montrer que la contrainte sur un élément de surface de normale  $\mathbf{n}$  peut s'écrire simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}$$

---

pourrons retenir contrainte normale = pression, contrainte tangentielle = visqueuse.

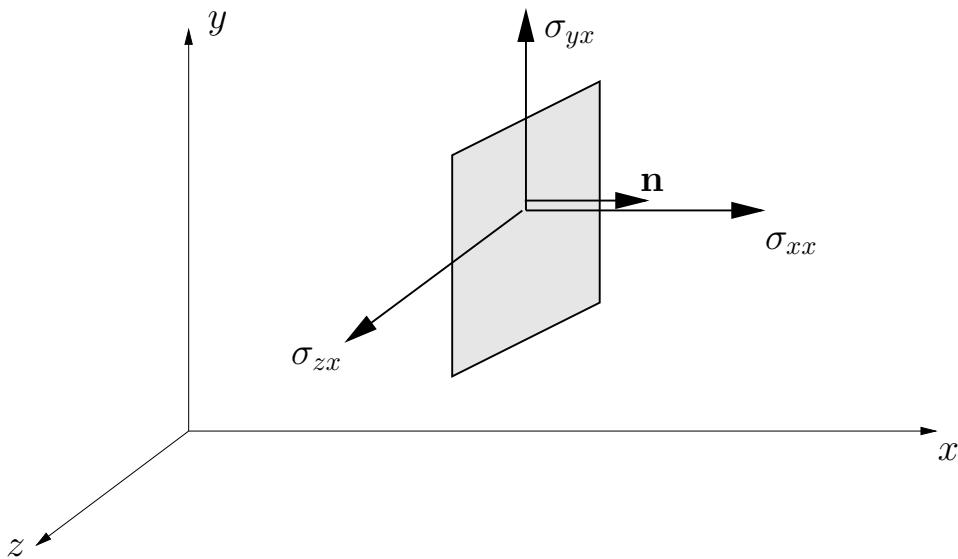


FIGURE 3.8 – Illustration des composantes du tenseur des contraintes.

C'est un produit matrice-vecteur. Dans le cas du fluide, on a pour usage de “sortir” la pression du tenseur des contraintes, et de définir ainsi un tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}_v$  uniquement lié à la présence des forces visqueuses. On aura donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = -p\mathbf{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \quad (3.16)$$

En intégrant sur toute la surface  $S$ , nous pouvons donc énoncer :

La force de contact exercée sur un volume de fluide  $V$  délimité par une surface  $S$  s'écrit :

$$\mathbf{F} = \underbrace{\iint_S -p\mathbf{n} dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\iint_S \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Forces visqueuses}} \quad (3.17)$$

Dans le cadre du modèle dit “de fluide parfait”, on néglige la force visqueuse ( $\bar{\bar{\sigma}}_v = \bar{\bar{0}}$ ).



# Chapitre 4

## Equations du mouvement d'un fluide

Dans le chapitre précédent, nous avons dressé la liste des forces agissant sur un fluide, et il nous est maintenant possible de préciser la forme des équations de bilan de quantité de mouvement. Nous différons volontairement l'expression de la contribution visqueuse, d'une part pour simplifier l'exposé, et d'autre part pour obtenir un jeu d'équations indépendants du modèle de fluide utilisé.

Nous présenterons dans un premier temps les équations de conservation sous forme de bilan volumique, immédiatement déductible de la section 2.4. Ensuite nous présenterons les formes locales de ces équations, sous formes d'équations aux dérivées partielles, traditionnellement exposées dans la plupart des textes de mécanique des fluides. Enfin nous traiterons le cas particulier, mais fondamental des machines fluides, en relation avec le cours de thermodynamique des systèmes ouverts.

### 4.1 Sous forme de bilans volumiques

#### 4.1.1 Conservation de la masse.

L'équation de conservation de la masse ne contient pas de termes source, et a déjà été présentée à la section 2.4.1 (Eq. 2.13 p. 27).

Il est intéressant de rappeler sa forme, ou bien en régime permanent ( $\partial/\partial t = 0$ ) **mais aussi** pour les fluides incompressibles ( $\rho = \text{Cte}$ ) sur lesquels nous reviendrons au chapitre (5). Nous appelons  $S_e$  et  $S_s$  les surfaces par lesquelles le fluide respectivement entre ou sort :

Conservation de la masse en régime permanent d'un fluide dans un volume  $V$  fixe comportant une surface d'entrée  $S_e$  et une surface de sortie  $S_s$  :

$$\underbrace{\iint_{S_e} -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Masse entrante}} = \underbrace{\iint_{S_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Masse sortante}} \quad (4.1)$$

### 4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement.

Nous remplaçons  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  par le poids (3.1) + la force de contact (3.17) dans l'équation de quantité de mouvement (2.14) :

La forme générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour un volume de fluide  $V$  fixe dans l'espace, limité par une surface  $S$  s'écrit :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iint_V \rho \mathbf{v} dV}_{\text{Variation de qdm dans } V} + \underbrace{\iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{qdm sortante - qdm rentrante}} = \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\iint_V \rho \mathbf{g} dV}_{\text{Poids}} \left[ + \underbrace{\iint_S \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Forces visqueuses}} \right] \quad (4.2)$$

La surface  $S$  étant fermée, on peut remplacer  $p$  par  $p - p_{\text{atm}}$  dans l'intégrale de pression si besoin est.

L'intérêt de soustraire  $p_{\text{atm}}$  vient de ce que la pression sur certaines surfaces (latérales ou en sortie) est bien souvent la pression atmosphérique, si bien que les intégrales de pression sur ces surfaces disparaissent de la formulation.

Ici encore il est intéressant de considérer le cas du régime permanent avec une surface d'entrée  $S_e$  et une surface de sortie  $S_s$ . On voit clairement que l'intégrale de flux convectif est limitée aux surfaces d'entrée et de sortie. On a donc :

$$\iint_{S_e+S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iint_S \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} dS + M \mathbf{g} \quad (4.3)$$

La formule ci-dessus est utile en soi dans certains problèmes (notamment les écoulements fluviaux).

Elle a un autre intérêt très important : le calcul des forces exercées par le fluide sur une structure solide avec laquelle elle est en contact. On considère la situation générale représentée figure 4.1 : un volume de fluide est compris entre une surface d'entrée  $S_e$ , une surface de sortie  $S_s$ , et les parois d'un solide, dont les autres faces sont soumises à la pression atmosphérique. On cherche la force exercée par le fluide sur le solide. En vertu de la loi de l'action et de la réaction, elle s'écrit :

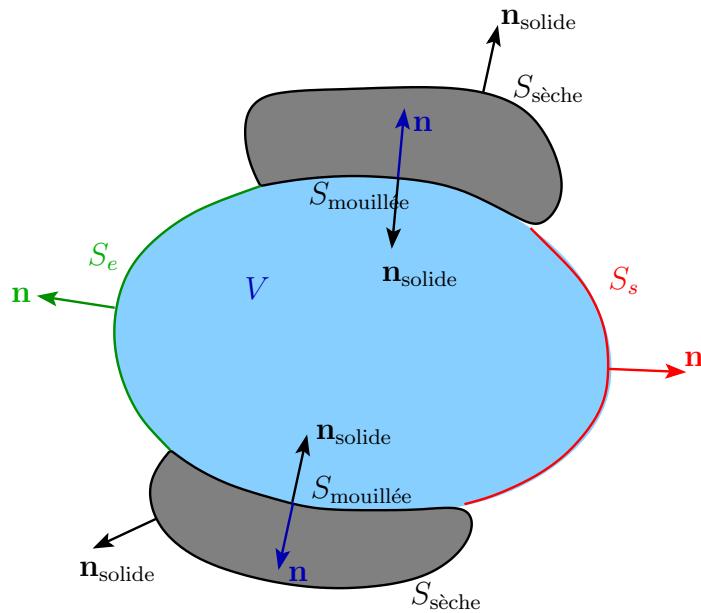


FIGURE 4.1 – Fluide en contact avec un solide.

$$\mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}} = -\mathbf{F}_{\text{Solide/Fluide}} = - \left[ \iint_{S_{\text{mouillée}}} -p\mathbf{n} \, dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} \, dS \right] \quad (4.4)$$

En général, on s'intéresse à la force totale exercée sur le solide, non seulement celle exercée par le fluide, mais aussi celle exercée par l'atmosphère sur ses parois sèches  $S_{\text{sèche}}$ . Cette dernière s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{Air/Solide}} = \iint_{S_{\text{sèche}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS \quad (4.5)$$

Mais en appliquant le théorème de la normale au solide, on peut écrire :

$$\iint_{S_{\text{sèche}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS = \iint_{S_{\text{mouillée}}} p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS = \iint_{S_{\text{mouillée}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n} \, dS \quad (4.6)$$

où la deuxième égalité résulte de  $\mathbf{n}_{\text{solide}} = -\mathbf{n}$  sur  $S_{\text{mouillée}}$ . Physiquement, la relation ci-dessus signifie que le solide répercute sur le fluide la force de pression qui lui est

appliquée par l'air. On en déduit donc la force totale, en sommant (4.4) et (4.5) :

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = - \left[ \iint_{S_{\text{mouillée}}} -(p - p_{\text{atm}})\mathbf{n} \, dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS \right] \quad (4.7)$$

On utilise maintenant le bilan de quantité de mouvement (4.3), en décomposant les intégrales de pression et de frottement sur  $S_e + S_s$  et  $S_{\text{mouillée}}$  :

$$\begin{aligned} \iint_{S_e + S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{S_e + S_s} -(p - p_{\text{atm}})\mathbf{n} \, dS + \iint_{S_e + S_s} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &\quad + \underbrace{\iint_{S_{\text{mouillée}}} -(p - p_{\text{atm}})\mathbf{n} \, dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS}_{- \mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} \text{ d'après (4.7)}} + M\mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.8)$$

On en déduit donc le résultat fondamental :

La force totale exercée sur un solide en contact avec le fluide d'un côté, et l'atmosphère de l'autre s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = \iint_{S_e + S_s} -(p - p_{\text{atm}})\mathbf{n} \, dS + \iint_{S_e + S_s} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_{S_e + S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS + M\mathbf{g} \quad (4.9)$$

En général la contribution visqueuse à l'entrée et à la sortie est négligeable.

Cette formule est très pratique car elle ne fait intervenir que les surfaces d'entrée et de sortie, qui sont en général géométriquement simples, de telles sorte que les intégrales sont faciles à calculer.

### 4.1.3 Conservation de l'énergie.

Pour établir l'équation de conservation de l'énergie d'après (2.17), il nous faut d'abord calculer la puissance des forces extérieures  $\dot{W}$ . La puissance est le produit scalaire de la force par la vitesse et il suffit donc d'intégrer toutes les puissances infinitésimales, sur le volume  $V$  pour les forces de volume et sur la surface  $S$  pour les forces de contact, d'où :

$$\dot{W} = \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV}_{\text{Puissance du poids.}} + \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS}_{\text{Puissance des forces de pression.}} + \underbrace{\iint_S \mathbf{v} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Puissance des forces de frottement visqueux.}} \quad (4.10)$$

La conservation de l'énergie d'un volume de fluide  $V$  fixe dans l'espace s'écrit :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV}_{\text{Variation (E interne + E cinétique)}} + \underbrace{\iint_S \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{(\text{E interne + E cinétique}) \text{ sortante - rentrante}} \\ &= \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV}_{\text{Puissance du poids}} + \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS}_{\text{Puissance des forces de pression}} + \underbrace{\iint_S \mathbf{v} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Puissance des forces visqueuses}} + \dot{Q} \quad (4.11) \\ & \qquad \qquad \qquad \dot{W} \text{ puissance des forces extérieures} \end{aligned}$$

#### 4.1.4 Complément : théorème de l'énergie cinétique.

Il ne s'agit pas d'un principe de conservation en plus, mais d'une conséquence de la conservation de la quantité de mouvement. Nous démontrons dans l'annexe D que :

Le théorème de l'énergie cinétique pour un fluide en écoulement s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{v^2}{2} dV}_{\text{Variation E cinétique}} + \underbrace{\iint_S \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{E cinétique sortante - rentrante}} \\
 &= \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \iint_S \mathbf{v} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) dS}_{\dot{W} \text{ puissance des forces extérieures}} \\
 &+ \underbrace{\iint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \Phi_v}_{\dot{W}_{\text{int}} \text{ puissance des forces intérieures}}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

## 4.2 Conditions aux limites.

La résolution des équations du mouvement nécessitera la connaissance de la vitesse du fluide sur frontières du domaine. Bien souvent ces limites sont des parois solides ou des interfaces avec d'autres fluides (liquides ou gaz).

Nous ne traiterons que le cas le plus courant des parois solides, qui en aucun cas ne peut être traversé par du fluide (à l'exception des parois poreuses dont nous ne parlerons pas ici). Par conséquent la composante normale de la vitesse du fluide sur une paroi solide est toujours égale à la vitesse normale de cette paroi :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}}$$

Cette condition est connue sous le nom de **condition d'étanchéité**.

Dans le cas d'une *paroi fixe*, cette condition devient :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = 0$$

Concernant la composante tangentielle, comme en témoigne par exemple l'expérience de Couette, la composante tangentielle du fluide est égale à la vitesse tangentielle

de la paroi, et donc nulle pour une paroi fixe<sup>1</sup>. En combinant cette condition avec la condition d'étanchéité ci-dessus, on a pour un fluide réel :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{solide}}$$

Cela est dû au fait qu'une paroi solide est constituée au niveau microscopique de petites aspérités qui interdisent un mouvement d'ensemble des molécules. C'est pour cette même raison que le solide subit une force tangentielle de la part du fluide. Aussi cette condition est-elle liée au caractère visqueux du fluide.

Par contre si l'on néglige ces frottements visqueux, il faut être cohérent et laisser le droit au fluide de glisser librement sur la paroi ! Aussi dans le cadre du modèle de fluide parfait, seule la condition d'étanchéité sera écrite.

On retiendra donc :

La condition sur la vitesse au niveau d'une paroi solide est :

- pour le modèle de fluide parfait,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} \quad (4.13)$$

- pour le modèle de fluide réel (avec frottements visqueux)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \quad (4.14)$$

Pour les écoulements externes, on utilisera souvent des conditions rejetées à l'infini de l'obstacle du type :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = U_{\infty} \quad (4.15)$$

où  $r$  est la distance à l'obstacle.  $U_{\infty}$  est par exemple l'opposé de la vitesse d'un véhicule, lorsque l'on étudie l'écoulement dans un référentiel lié à ce dernier.

Pour les écoulements fermés (en général en tuyauterie), on connaît en général la vitesse à l'entrée, et la pression à la sortie (par exemple pression atmosphérique si l'écoulement débouche à l'air libre).

## 4.3 Application aux écoulements en tuyauterie.

---

1. On pourra s'en convaincre en passant sa main par la vitre d'une voiture et en l'approchant lentement de la portière. On sentira une diminution progressive de la vitesse.

### 4.3.1 Préliminaire.

Il est intéressant d'un point de vue pratique, et pour faire le lien avec le cours de thermodynamique, de reprendre les équations de conservation sur un tube de courant, en faisant l'hypothèse d'un écoulement piston, afin de pouvoir supposer les grandeurs homogènes sur les sections d'entrée et sortie. On suppose de plus les parois solides. Le système est représenté figure 4.2), on retrouve la section d'entrée  $S_e$ , la section de sortie  $S_s$  et la surface latérale est constituée par un solide en contact avec le fluide. Nous allons écrire l'expression générale (2.12) rappelée ci-dessous respectivement pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie.

$$\frac{dG}{dt} = \underbrace{g_e v_e S_e}_{\dot{G}_e} - \underbrace{g_s v_s S_s}_{\dot{G}_s} + R^+(t) - R^-(t) \quad (4.16)$$

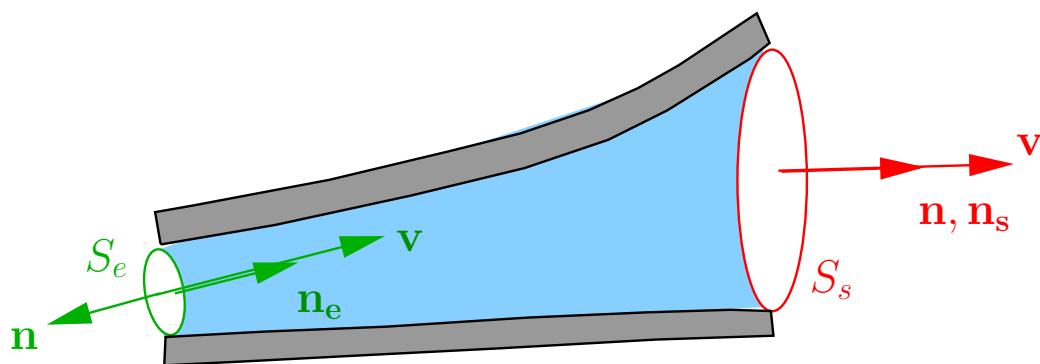


FIGURE 4.2 – Tube de courant.

### 4.3.2 Conservation de la masse.

Il n'y a pas de terme source dans la conservation de la masse ( $R^+ = R^- = 0$ ) et l'équation (2.12) s'écrit donc, avec  $G = M$  et  $g = \rho$  :

La conservation de la masse sur le tube de courant s'écrit alors simplement :

$$\frac{dM}{dt} = \underbrace{\rho_e v_e S_e}_{\dot{M}_e} - \underbrace{\rho_s v_s S_s}_{\dot{M}_s} \quad (4.17)$$

Dans le cas du régime permanent, **le débit massique est conservé** dans le tube de courant :

$$\dot{M}_s = \dot{M}_e \quad (4.18)$$

$$\rho_e v_e S_e = \rho_s v_s S_s \quad (4.19)$$

Par unité de temps, il rentre autant de matière dans le tube qu'il n'en sort, autrement dit le tube n'accumule pas de matière.

Ce résultat très intuitif est l'un des fondements du génie des procédés.

### 4.3.3 Conservation de la quantité de mouvement.

En écrivant (2.12) avec  $G = \mathbf{P}$ ,  $g = \rho \mathbf{v}$ ,  $R^+ - R^- = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , nous obtenons

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \rho_e v_e S_e \mathbf{v}_e - \rho_s v_s S_s \mathbf{v}_s + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.20)$$

$$= \dot{M}_e \mathbf{v}_e - \dot{M}_s \mathbf{v}_s + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.21)$$

On notera que ces relations sont des relations vectorielles, ce qui est important notamment quand les surfaces d'entrée et de sortie sont orientées différemment (voir exemple du tube en U ci-dessous).

On remarquera que puisque  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  est la somme des forces exercées par l'extérieur sur le volume de fluide,  $-\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  est la force exercée par le fluide sur l'extérieur, et apparaît donc comme la différence des flux de quantité de mouvement entrant et sortant. Ce dernier résultat est d'une utilité très pratique, par exemple pour déterminer les efforts exercées par l'écoulement du fluide sur une tuyauterie coudée<sup>2</sup> ou à section variable (voir TD). Il est également à la base du principe de propulsion (réacteur, hélice ...) où l'on accélère le fluide qui rentre grâce un apport d'énergie (en brûlant du combustible).

Ces derniers points peuvent être mis en évidence très simplement en explicitant les intégrales sur  $S_e$  et  $S_s$  dans l'expression de la force totale sur le solide (4.9) obtenue

---

2. On pourra en faire l'expérience avec un tuyau flexible (de douche par exemple) qui a une fâcheuse tendance à se promener lorsque l'on ouvre le robinet

précédemment. En admettant que les forces visqueuses sur les surfaces d'entrée  $S_e$  et de sortie  $S_s$  sont négligeables (elles le sont dans la pratique), on obtient

La force totale exercée par un écoulement permanent + l'air extérieur sur un tube solide s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} &= [\dot{M}_e v_e + (p_e - p_{\text{atm}}) S_e] \mathbf{n}_e - [\dot{M}_s v_s + (p_s - p_{\text{atm}}) S_s] \mathbf{n}_s + M \mathbf{g} \\ &= (\rho_e v_e^2 + p_e - p_{\text{atm}}) S_e \mathbf{n}_e - (\rho_s v_s^2 + p_s - p_{\text{atm}}) S_s \mathbf{n}_s + M \mathbf{g}\end{aligned}\quad (4.22)$$

où  $\mathbf{n}_e$  et  $\mathbf{n}_s$  sont les normales aux surfaces d'entrée et de sortie, **orientées dans le sens de l'écoulement**.

En l'absence de mouvement, la force exercée sur la structure est compensée par le poids du fluide + les forces de pressions à l'entrée et à la sortie. En présence de mouvement, la structure subit une force additionnelle égale à la perte de quantité de mouvement du fluide entre l'entrée et la sortie.

La formulation ci-dessus est particulièrement intéressante lorsque la tuyauterie débouche à l'atmosphère, auquel cas  $p_s = p_{\text{atm}}$ .

**Application** : considérons un tube en U de section  $S$  (Fig. 4.3) dans lequel un écoulement d'air rentre à la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}}$  et à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ . Nous supposerons le fluide incompressible de telle sorte que  $\rho_e = \rho_s = \rho$ .

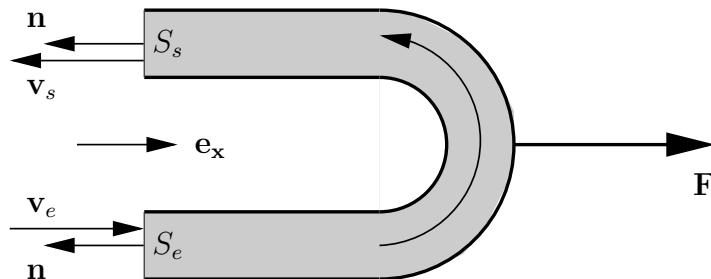


FIGURE 4.3 – Force exercée par un écoulement sur un tube en U

Dans ces conditions, la conservation de la masse en régime permanent impose que la vitesse de sortie soit égale à  $-v \mathbf{e}_x$ . En négligeant le poids de l'air dans le tube, la formule (4.22) fournit :

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = 2\rho v^2 S \mathbf{e}_x$$

et est donc orientée dans le sens de  $\mathbf{e}_x$ .

On voit donc que la force totale exercée sur la tuyauterie est indépendante de la pression atmosphérique. Ce résultat est vrai pour tout écoulement interne pour lequel la paroi du tube est soumise à la pression atmosphérique.

#### 4.3.4 Conservation de l'énergie.

Nous allons écrire (2.12) avec  $G = U + K$ ,  $g = \rho(u + v^2/2)$  et  $R^+ - R^- = \dot{W} + \dot{Q}$ . Le calcul de  $\dot{Q}$  relève du cours de transfert thermique et sera laissé tel quel ici. Nous pouvons en revanche calculer  $\dot{W}$ , puisque nous connaissons les forces extérieures : poids, force de pression et de frottement visqueux. Nous allons généraliser un peu le cas du tube de courant de la façon suivante :

- nous rajoutons une surface  $S_u$  mobile à l'intérieur du tube, correspondant par exemple aux pales d'une hélice ou d'une turbine.
- nous supposons que  $S_{\text{lat}}$  est une paroi solide, qui en vertu de la condition d'adhérence, est bien une ligne de courant.

Ces hypothèses minimales permettent de représenter un grand nombre de composants des réseaux de fluide. Il est facilement vérifiable que l'équation (2.12) reste donc valable en présence de la surface mobile  $S_u$ .

Démonstration : l'ajout de  $S_u$  qui est une surface mobile pose une légère difficulté supplémentaire car nous avons supposé jusqu'alors que le volume de bilan  $V$  était un volume *fixe*, ce qui n'est plus le cas ici. Comme nous l'avons mentionné page 22, le terme convectif  $\iint_S g\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$  doit être généralisé en  $\iint_S g(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS$ , où  $\mathbf{w}$  est la vitesse locale de la surface  $S$ . Ici le problème se pose seulement sur  $S_u$ , qui est la seule surface mobile. Mais cette surface est étanche et par conséquent, nous avons  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  en chaque point de  $S_u$ , et le terme convectif associé est donc nul. On pourra également consulter la section (B.7) pour une démonstration plus formelle.

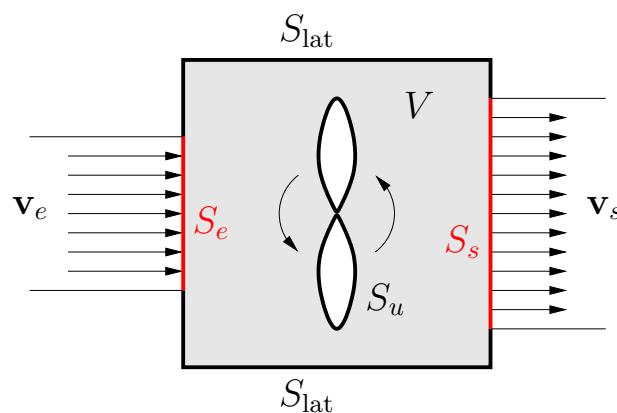


FIGURE 4.4 – Schéma générique d'un machine fluide

En revanche la présence de  $S_u$  influe bien sûr sur le calcul de  $\dot{W}$ , puisque cette pièce mobile est justement présente pour fournir (ou prélever) de l'énergie au fluide.

Nous admettrons de plus que la puissance des forces de frottement visqueux sur les sections d'entrée et de sortie sont négligeables. De plus la puissance des forces de contact sur  $S_{\text{lat}}$  est nulle, puisque la vitesse y est nulle de par la condition d'adhérence (cf. section 4.2). Ensuite, nous notons  $\dot{W}_u$  **la puissance des forces exercées par la pale sur le fluide** et nous supposerons la puissance du poids nulle pour simplifier l'exposé<sup>3</sup>. Dans ces conditions, la puissance des forces extérieures (4.10) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \underbrace{\iint_{S_e} -pv \cdot \mathbf{n} dS}_{= p_e v_e S_e} + \underbrace{\iint_{S_s} -pv \cdot \mathbf{n} dS}_{= -p_s v_s S_s} + \underbrace{\iint_{S_e+S_s} (\bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{\simeq 0 \text{ (admis)}} \\
 &+ \underbrace{\iint_{S_{\text{lat}}} (-p\mathbf{n} + \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{= 0 \text{ car } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } S_{\text{lat}} \text{ (condition d'adhérence)}} + \underbrace{\iint_{S_u} (-p\mathbf{n} + \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{\dot{W}_u \text{ par définition}} \\
 &+ \underbrace{\iiint_V (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} dV}_{\text{supposé nul ici, cf. annexe A}}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

soit

$$\dot{W} = p_e v_e S_e - p_s v_s S_s + \dot{W}_u \tag{4.24}$$

Les deux premiers termes sont les puissances des forces de pression exercées par le fluide à l'entrée et à la sortie sur le fluide interne à la machine. Il est important de bien comprendre que  $\dot{W}_u$  et  $\dot{W}$  diffèrent l'un de l'autre par ces deux termes.

Dans ces conditions, (2.12) s'écrit, avec  $G = U + K$ ,  $g = \rho(u + v^2/2)$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(U + K) &= \rho_e \left( u_e + \frac{v_e^2}{2} \right) v_e S_e - \rho_s \left( u_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s S_s \\
 &\quad + p_e v_e S_e - p_s v_s S_s + \dot{W}_u + \dot{Q}
 \end{aligned}$$

Mais en rappelant que le débit massique s'écrit  $\dot{M} = \rho v S$ , le bilan se ré-écrit :

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{M}_e \left( u_e + \frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} \right) - \dot{M}_s \left( u_s + \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} \right) + \dot{W}_u + \dot{Q}$$

**ce qui fait apparaître l'enthalpie massique**  $h = u + p/\rho$ , d'où finalement :

---

3. ce qui est vrai si les sections d'entrée et de sortie sont de faibles dimensions, à la même hauteur, et que l'extension verticale des pales est petite. On consultera l'annexe A pour la prise en compte de ce terme.

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{M}_e \left( h_e + \frac{v_e^2}{2} \right) - \dot{M}_s \left( h_s + \frac{v_s^2}{2} \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (4.25)$$

Ici nous n'avons pas pris en compte le travail des forces de pesanteur. Dans le cas le plus général où la pesanteur joue un rôle notable, notamment si les sections d'entrée et de sortie sont à des altitudes très différentes, nous montrons en annexe A (la démonstration est sans difficulté particulière mais un peu longue) que ce résultat se généralise en :

Le premier principe en système ouvert s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(U + K + E_p) = \dot{M}_e \left( h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) - \dot{M}_s \left( h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (4.26)$$

où  $E_p$  est l'énergie potentielle de pesanteur du fluide dans la machine.

Insistons sur les points suivants :

- l'enthalpie provient des forces de pression à l'entrée et à la sortie, que nous avons séparé volontairement du travail utile, tout simplement parce que seul ce dernier est intéressant dans ce genre de problème.
- le terme instationnaire  $dU/dt$  est une variation d'**énergie interne** et non pas d'enthalpie comme parfois écrit à tort. A ce titre, il est donc injustifié de parler de "bilan enthalpique", comme c'est malheureusement souvent le cas en génie des procédés.
- la puissance  $\dot{W}_u$  intervenant ici, dite puissance utile, **est la puissance des seules forces** exercées par les pales à l'intérieur de la machine, car les puissances des forces de pression à l'entrée et à la sortie sont déjà intégrées dans les enthalpies.  $\dot{W}_u$  est nulle dans plusieurs cas pratiques (vanne de détente, échangeurs de chaleur), positive si le fluide reçoit du travail de ces pales (compresseur, pompe), négative si le fluide fournit du travail (turbine, éolienne, moulins).

### 4.3.5 Théorème de l'énergie cinétique.

Il est également intéressant d'écrire le théorème de l'énergie cinétique (4.12) dans cette configuration, car il décrit clairement les pertes et/ou gains d'énergie mécanique entre l'entrée et la sortie (nous y reviendrons au chapitre 6). Même en l'absence de surface mobile  $S_u$ , il fournit un résultat important sur la perte d'énergie mécanique entre une entrée et une sortie, à cause des frottements visqueux, appelée communément **pertes de charge**.

Le calcul est assez simple, car nous venons de calculer la puissance des forces extérieures. Nous obtenons d'après (4.12) et (4.23) :

Le théorème de l'énergie cinétique pour une machine fluide s'écrit, dans le cas général :

$$\frac{d}{dt}(K + E_p) = \dot{M}_e \left( \frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) - \dot{M}_s \left( \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) + \dot{W}_u + \underbrace{\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV}_{\text{Puissance des forces intérieures}} - \Phi_v \quad (4.27)$$

Nous voyons que cette équation ressemble beaucoup au premier principe, mais il ne faut cependant pas les confondre. La dernière équation fait intervenir la puissance des forces intérieures, absente dans le premier principe.

- Le premier terme  $\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV$  est la puissance des forces de pression interne (nulle en incompressible) et correspond à de l'énergie élastique emmagasinée par le fluide dans la machine. Il peut être positif (cas d'une détente) ou négatif (pour une compression).
- Le terme  $\Phi_v$  en revanche est toujours positif et représente la puissance des forces de frottement visqueux à l'intérieur du fluide. Il s'agit d'une **dissipation irréversible d'énergie**. Nous verrons ultérieurement que ce terme est fondamental notamment pour décrire les **pertes d'énergie dans les écoulements en conduite**. Il peut être calculé explicitement si l'on connaît le champ de vitesses de l'écoulement.

Il est enfin intéressant de soustraire cette équation au premier principe (4.26) pour obtenir les variations d'énergie interne du fluide :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{M}_e u_e - \dot{M}_s u_s - \iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \Phi_v + \dot{Q} \quad (4.28)$$

Nous voyons que la dissipation irréversible d'énergie  $\Phi_v$ , toujours positive, peut par exemple :

- augmenter l'énergie interne du fluide  $U$  dans la machine (donc sa température)
- être compensée par une cession de chaleur à l'extérieur ( $\dot{Q} < 0$ )
- augmenter l'énergie interne  $u_s$  du fluide sortant (donc sa température)

Ainsi le simple fait de mettre en mouvement un fluide dans un récipient fermé ( $\dot{M} = 0$ ) et calorifugé ( $\dot{Q} = 0$ ) échauffe ce fluide (pensez aux lubrifiants dans une voiture par exemple).

On voit également que la puissance des forces intérieures de pression a le même effet dans le cas d'une compression, et l'effet inverse dans le cas d'une détente. Par exemple dans le détendeur d'un réfrigérateur, qui fonctionne en régime permanent, ce terme est négatif et est partiellement compensé par un  $\dot{Q} > 0$  (le détendeur reçoit de la chaleur du compartiment du réfrigérateur ... et refroidit donc les aliments qui y sont stockés).

## 4.4 Équations locales.

### 4.4.1 Contexte

Jusqu'à présent, nous avons écrit des équations de bilan sur un volume  $V$  macroscopique, fixe dans l'espace. Il est possible d'en déduire des équations aux dérivées partielles, dites **locales**, reliant les grandeurs de l'écoulement en chaque point.<sup>4</sup>

Leur interprétation directe pose souvent des problèmes au débutant, et c'est pourquoi nous avons reporté leur écriture le plus loin possible. Nous verrons que sous certaines conditions, il existe une forme intégrée (sans aucune dérivée ni intégrale !) de ces équations, dite formule de Bernoulli, très pratique dans un certain nombre de cas.

Aussi, les équations locales seront peu utilisées dans cette première partie du cours, sauf :

- pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique énoncé plus haut
- pour démontrer la formule de Bernoulli présentée au chapitre suivant pour un fluide parfait.

Il faut bien comprendre cependant que la majorité des problèmes de mécanique des fluides ne peut être résolu que par les équations locales et elles constituent donc un outil indispensable dans le cas général.

### 4.4.2 Obtention

Leur écriture se déduit des équations précédentes à l'aide des formules d'Ostrogradski (cf. annexe B). Nous détaillons seulement l'équation de conservation de la

---

4. Les cours de mécanique des fluides commencent souvent par développer ces équations. Nous préférions la démarche inverse dans la mesure où les bilans sous forme globale nous paraissent plus intuitifs.

masse : reprenons (4.1) : l'intégrale de surface se transforme par (B.7) et la dérivée  $\frac{\partial}{\partial t}$  commute avec l'intégrale triple car  $V$  est un volume fixe. On obtient donc :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

Cette équation est vraie pour tout volume  $V$ , et par conséquent l'intégrande est nul, d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.29)$$

conservation de la masse sous forme locale.

De la même façon, en utilisant (B.8) on démontre l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dite "sous forme conservative", car elle découle directement du bilan écrit plus haut :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \quad (4.30)$$

On remarquera l'apparition de deux objets mathématiques inusuels :

- le produit  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  est le tenseur de terme principal  $v_i v_j$  (écrivez la matrice à titre d'exercice). On appelle un tel produit *produit dyadique*.
- l'opérateur **div** (qui fournit un vecteur, à ne pas confondre avec **div** d'un vecteur qui fournit un scalaire) s'applique à un tenseur et donne un vecteur dont chaque composante est la divergence de chaque ligne de la matrice.

On utilise plus souvent la forme non conservative de cette équation. On montre que le premier membre peut être transformé, en utilisant la conservation de la masse, par :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \quad (4.31)$$

conservation de la quantité de mouvement sous forme locale.

Le produit  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  est formellement le produit scalaire du vecteur vitesse par le vecteur nabla et est donc (en coordonnées cartésiennes) l'opérateur  $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ . Par conséquent le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  est cet opérateur appliqué à chaque composante de  $\mathbf{v}$ , soit :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le jeu d'équations (4.29), (4.31) sans les forces de frottement visqueux forme les "équations d'Euler<sup>5</sup>".

Enfin l'équation de conservation de l'énergie peut être obtenue à partir du premier principe (4.11), puis par utilisation de la formule (B.7). On obtient, sous forme conservative :

$$\frac{\partial[\rho(u + v^2/2)]}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho(u + v^2/2)\mathbf{v}] = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{v}) + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{q}$  est une densité de flux de chaleur sortant ( $\dot{Q} = -\iint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$ ), dont la spécification est l'objet du **cours de transfert thermique**. Ici encore le membre de gauche peut être transformé pour obtenir :

$$\rho \frac{\partial(u + v^2/2)}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(u + v^2/2) = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{v}) + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}\mathbf{q} \quad (4.33)$$

expression du premier principe sous forme locale.

L'équation de l'énergie peut être écrite sous des formes diverses, Notamment en lui soustrayant, comme nous l'avons fait sous forme globale, le théorème de l'énergie cinétique. Le lecteur intéressé pourra se reporter au livre de Bird et al. (1960), ainsi qu'à l'annexe E.

5. Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse : initialement destiné par sa famille à une carrière ecclésiastique, il se consacrera avec succès aux sciences. Il en effet l'auteur de nombreux ouvrages en mathématiques, astronomie, mécanique, physique, optique ou encore acoustique. Il sera surtout connu pour ses travaux mathématiques, dans le domaine de l'analyse (étude de fonctions et calcul infinitésimal). Il fut l'élève de Jean Bernoulli et ami de son fils Daniel, également à l'origine d'une formule célèbre en mécanique des fluides. Il inspirera de nombreux scientifiques, notamment Lagrange.

### 4.4.3 Un jeu d'équations complet ?

A ce stade il est pertinent de se demander si le jeu d'équations (4.29), (4.31), (4.33) est suffisant pour résoudre un problème pratique. Pour cela comptons les équations et les inconnues<sup>6</sup> :

- nous avons 5 équations : 1 pour la masse, 3 pour la quantité de mouvement car c'est une équation vectorielle, 1 pour l'énergie.
- nous avons 6 inconnues : la masse volumique  $\rho$ , les 3 composantes de la vitesse  $\mathbf{v}$ , la pression  $p$  et l'énergie interne  $u$ .

**Il manque donc une équation !** Cette équation manquante est l'équation d'état reliant par exemple  $u$ ,  $\rho$  et  $p$ .

Les équations de conservation doivent être complétées par une équation d'état du fluide pour que le problème puisse être résolu.

### 4.4.4 Cas du fluide incompressible

Il existe une simplification majeure si l'on suppose le fluide incompressible. Dans ce cas *la masse volumique  $\rho$  est supposée constante au cours du temps et dans tout l'espace*. Cette variable disparaît donc de l'ensemble des inconnues et mieux encore, on voit alors que l'équation de l'énergie est découpée des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Un écoulement de fluide incompressible est défini par :

$$\rho = \text{Cte} \quad \text{dans le temps et l'espace}$$

qui fait office d'équation d'état.

Il peut être décrit uniquement par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

L'équation de conservation de la masse se réduit alors à :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{4.34}$$

Ce découplage de l'équation de l'énergie est en fait vrai dans une classe de problèmes plus large, où l'on peut trouver une relation entre  $p$  et  $\rho$  (on parle de fluides "barotropes"). Par exemple pour un gaz parfait en écoulement isentropique, on pourra écrire  $p/\rho^\gamma = \text{constante}$ .

6. On admettra pour l'instant que le tenseur des contraintes visqueuses  $\bar{\sigma}_v$  et la densité de flux de chaleur  $\mathbf{q}$  n'introduisent pas de variables supplémentaires.

Il reste une question majeure : quand peut-on dire qu'un fluide est incompressible ? Il faut considérer la question avec la même approche que pour la prise en compte ou non des forces visqueuses. **Tous les fluides sont en fait compressibles !**

Ici l'intuition peut être trompeuse : on sent bien qu'un liquide par exemple est moins compressible qu'un gaz, et l'on pourrait être tenté d'appliquer l'approximation incompressible aux liquides mais pas aux gaz. Ce serait une erreur comme en témoignent les exemples suivants :

- l'écoulement d'air autour d'un avion volant à faible vitesse peut être considéré comme incompressible
- l'étude des explosions sous-marines serait grandement faussée par l'hypothèse incompressible
- le son se propagerait à une vitesse infinie dans un fluide incompressible, liquide ou gaz.

De même que la prise en compte des effets visqueux dépend du nombre de Reynolds, la prise en compte de la compressibilité dépend de la valeur d'un nombre adimensionnel :

On définit le **nombre de Mach**<sup>a</sup> par :

$$\text{Ma} = \frac{v}{c} \quad (4.35)$$

où  $v$  est un ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement, et  $c$  la vitesse du son dans le fluide. En général, on pourra raisonnablement considérer qu'un écoulement est incompressible pour :

$$\text{Ma} < 0.3$$

a. Ernst Mach (1838-1916) : scientifique autrichien. Apôtre du positivisme (la science ne doit pas se baser que sur l'observation expérimentale et la sensation des phénomènes), son nom reste célèbre par son approche des écoulements supersoniques ( $\text{Ma} > 1$ ), dont il pressent les propriétés particulières. Avant Einstein, il est le premier à rejeter le caractère absolu du temps et de l'espace, initiant ainsi la théorie de la relativité générale. Il fut également l'un des plus fervents opposants à Boltzmann, et plus généralement à l'existence de l'atome.

Il existe bien sûr des exceptions à cette règle. Par exemple, si l'on veut étudier la propagation du son, on ne pourra pas négliger la compressibilité du fluide, bien que les vitesses mises en jeu soient infimes.

Quelques ordres de grandeurs de la vitesse du son : 340 m/s dans l'air 1500 m/s dans l'eau.

---

# Chapitre 5

## Mouvement du fluide parfait incompressible. Formule de Bernoulli

### 5.1 Rappel des hypothèses et équations

Comme nous l'avons vu aux chapitres précédent :

- le fluide peut en général être considéré **parfait** (les forces de frottement visqueuses sont négligeables) à grand nombre de Reynolds et loin des parois solides. Au niveau des parois, le fluide doit être libre de glisser (vitesse tangentielle non nulle).
- le fluide peut être considéré incompressible pour des nombres de Mach faibles (pratiquement  $< 0.3$ ).

Dans ces conditions les équations du mouvement sont, sous forme globale :

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV + \iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -p \mathbf{n} \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV \quad (5.2)$$

Sur un tube de courant, ces équations deviennent :

$$v_e S_e = v_s S_s \quad (5.3)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = (p_e + \rho v_e^2) - (p_s + \rho v_s^2) - \mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}} + M \mathbf{g} \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{P}$  est la quantité de mouvement totale du tube,  $M$  est la masse de fluide dans

le tube,  $vS = \dot{V}$  est le **débit volumique en  $\text{m}^3/\text{s}$** , et  $\mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}}$  est la force exercée par le fluide sur les parois latérales du tube plus éventuellement les pales dans le cas d'une machine. On comprendra mieux désormais pourquoi les fabricants de pompes (destinées à mouvoir du liquide) parlent plutôt de débit volumique que de débit massique.

Enfin :

Les équations locales du mouvement d'un fluide parfait incompressible s'écrivent :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} \quad (5.6)$$

On remarquera dans les trois jeux d'équations que le terme instationnaire (en  $\partial/\partial t$ ) disparaît de l'équation de conservation de la masse. En regardant par exemple le bilan sur un tube de courant, on voit qu'une différence de débit d'entrée et de sortie ne saurait être compensée par une accumulation de matière dans le tube, puisque le fluide ne peut être comprimé.

Ces équations comportent toujours des dérivées partielles et sont à ce titre, "complexes". Une simplification remarquable, rendant l'hydrodynamique accessible au plus grand nombre en a été proposée Bernoulli<sup>1</sup> au 18<sup>ème</sup> siècle.

---

1. Daniel Bernoulli (1700-1782) : scientifique suisse, appartint à une famille de scientifiques. Son père Jean Bernoulli fut un mathématicien brillant (anecdotalement on lui doit le symbole  $\mathbf{g}$  pour la pesanteur), dont Euler fut l'élève. Son oncle Jacques et son frère Nicolas furent également mathématiciens. Daniel Bernoulli publie ses travaux sur l'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz en 1738 (il donna une version partielle de l'équation de Van der Waals avec un siècle d'avance). Il s'intéresse également à la théorie de l'élasticité et aux vibrations de cordes et de tuyaux avec Euler, dont il fut l'ami proche, et d'Alembert. Il fut également professeur de botanique, d'anatomie et de philosophie (!!).

## 5.2 Formule de Bernoulli

### 5.2.1 Hypothèses-Enoncé

Avec les hypothèses :

- fluide parfait,
- fluide incompressible,
- régime permanent,

la quantité  $\left( p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right)$  est constante *le long d'une ligne de courant.*

### 5.2.2 Démonstration

La démonstration, qu'on pourra oublier, est présentée ci-dessous.

En régime permanent, le terme  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  disparaît de l'équation (5.6). Par ailleurs en utilisant la formule (B.11) de l'annexe B, et en divisant tout par  $\rho$ , on obtient :

$$\mathbf{grad} \frac{v^2}{2} + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = - \frac{\mathbf{grad} p}{\rho} - \mathbf{grad} g z$$

en remarquant de plus que, avec l'axe  $Oz$  orienté vers le haut  $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} g z$ . Effectuons le produit scalaire de cette équation par un élément  $d\mathbf{M}$  de ligne de courant : puisque les lignes de courant sont tangentes à  $\mathbf{v}$ , les deux vecteurs  $d\mathbf{M}$  et  $\mathbf{v}$  sont parallèles, et le produit mixte  $(\mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{M}$  est donc nul. Il reste donc :

$$\mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\mathbf{M} + \frac{\mathbf{grad} p}{\rho} \cdot d\mathbf{M} + \mathbf{grad} g z \cdot d\mathbf{M} = 0$$

Comme le fluide est incompressible,  $\rho$  peut être entré dans  $\mathbf{grad} p$  et nous obtenons :

$$\mathbf{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) \cdot d\mathbf{M} = 0$$

ce qui signifie que l'intérieur du gradient ne varie pas le long de la ligne de courant. CQFD.

### 5.2.3 Commentaires

Cette formule est certainement la plus connue de la mécanique des fluides, la plus pratique, et aussi la plus dangereuse. Elle est pratique car on voit qu'elle ne présente plus aucune dérivée partielle, contrairement aux équations locales. Elle est dangereuse car comme nous le verrons, elle ne s'applique pas dans certaines configurations où les forces de frottement visqueux ne peuvent être négligées, ou encore pour des écoulements quasi permanents avec un travail utile.

Remarques diverses :

- pour un fluide immobile,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  et la formule de Bernoulli redonne la loi de l'hydrostatique.
- la formule de Bernoulli peut être vue comme une loi de conservation de l'énergie mécanique : elle signifie que énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur et pression sont interchangeables, sans pertes.
- la pression apparaît comme une énergie volumique.

## 5.3 Applications

### 5.3.1 Problèmes de vidange

Considérons un château d'eau de section  $\Sigma$  dont le fond est ouvert sur une tuyauterie de section  $S$ , terminée par un robinet (Fig. 5.1). Soit  $h$  la hauteur entre le robinet et la surface libre dans le château d'eau.

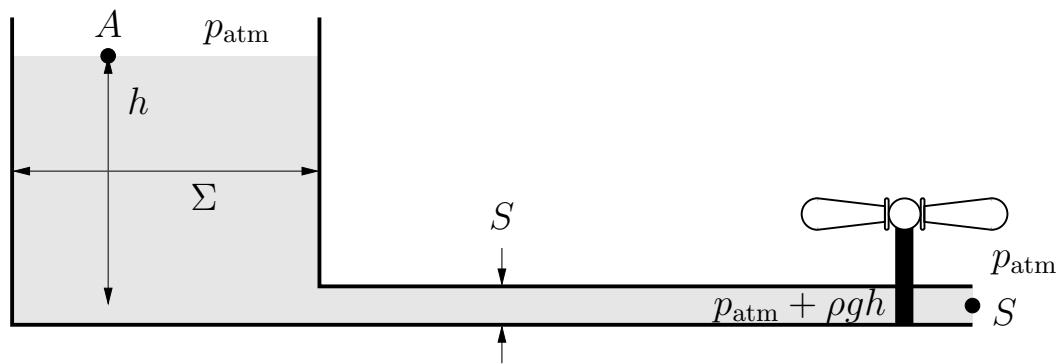


FIGURE 5.1 – Château d'eau connecté à un tuyau fermé

Si le robinet est fermé, la pression  $p$  s'exerçant sur le robinet coté fluide est  $p_{\text{atm}} + \rho gh$  et vaut  $p_{\text{atm}}$  coté air. Le clapet du robinet est donc soumis à une différence de pression nette  $p = \rho gh$ . C'est de cette pression que l'on parle lorsque l'on dit par exemple que ce robinet est à une pression de 8 bars : il s'agit aussi bien d'une hauteur égale à 8 bars / $\rho g$ .

Si on ouvre maintenant le robinet (Fig. 5.2) :

- le fluide dans le tuyau revient à la pression  $p_{\text{atm}}$
- les vitesses aux points A et S sont reliées par  $v_A \Sigma = v_S S$  via la conservation de la masse. En général  $\Sigma \gg S$  et par conséquent  $v_A \ll v_S$
- si le tuyau est à section constante, la vitesse vaut  $v_B$  dans toutes les sections du tube.

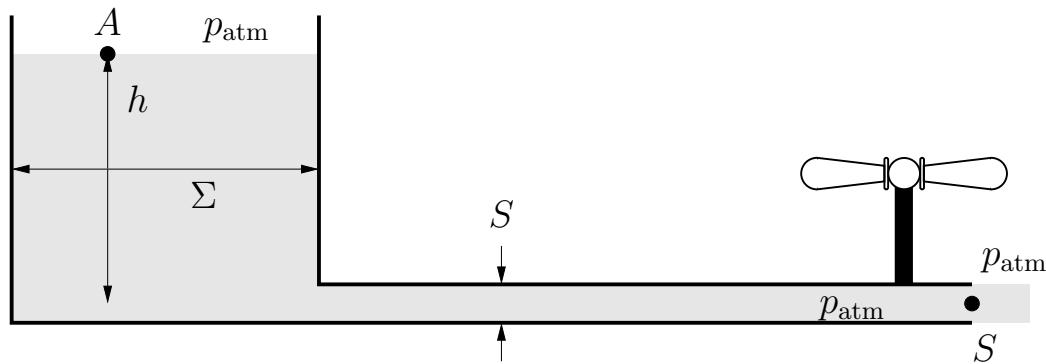


FIGURE 5.2 – Château d'eau connecté à un tuyau ouvert à l'atmosphère

Par conséquent, Bernoulli appliqué entre A et S indique que :

$$p_{\text{atm}} + \rho gh + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_A^2}_{\text{n\'egligeable}} = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_S^2,$$

et l'énergie cinétique du fluide à la sortie est donc  $\frac{1}{2}\rho v_S^2 = \rho gh$ , énergie potentielle de pesanteur.

La relation de Bernoulli indique qu'une hauteur est toujours convertible en pression ou en vitesse. C'est la notion de **charge** que nous définirons un peu plus loin.

Notons également que l'on peut déduire la vitesse de vidange du château d'eau de la formule ci-dessus :

$$v_S = \sqrt{2gh} \quad (5.7)$$

connue sous le nom de **formule de Toricelli**<sup>a</sup>.

---

a. Evangeliste Toricelli (1608-1647) : mathématicien physicien italien qui fut élève, puis secrétaire et compagnon de Galilée pendant les 3 derniers mois de sa vie. Il est l'inventeur de la pression atmosphérique, du baromètre à mercure et a donné son nom au torr unité de pression = 1 mm de Hg. Il expliqua correctement pourquoi les variations de hauteur du baromètre à mercure étaient 14 fois plus petites que celles du baromètre à eau, en terme de densités. Il est le premier à parler de "vide", qu'il obtint en renversant un tube rempli de liquide dans un bain contenant le même liquide. Il a développé également la notion de quantité de mouvement.

Une dernière remarque importante : en un point M quelconque du tuyau horizontal, le fluide se déplace à la vitesse  $v = v_S$ , en raison de la conservation de la masse. La formule de Bernoulli, appliquée entre M et S indique alors que la pression en M

vaut  $p_{\text{atm}}$ , et ce quelle que soit la longueur du tuyau ! Cela signifie que le château d'eau pourrait alimenter une maison distante de plusieurs milliers de kilomètres... Le paradoxe vient bien sûr du modèle de fluide parfait, mis en défaut sur de telles longueurs. Nous y reviendrons dans la section suivante.

### 5.3.2 Pression dynamique. Forces sur un obstacle.

Autre application, cette fois en écoulement externe. Imaginons un écoulement parallèle non perturbé à la vitesse  $U_\infty$  et plaçons un obstacle dans cet écoulement (Fig. 5.3). Les lignes de courant venant de l'infini amont de l'obstacle vont le contourner de chaque côté. Intuitivement on voit qu'il existe une ligne de courant s'arrêtant perpendiculairement sur l'obstacle en un point  $A$  de vitesse nulle, de par la condition d'étanchéité. Un tel point est appelé **point d'arrêt, ou de stagnation** de l'écoulement.

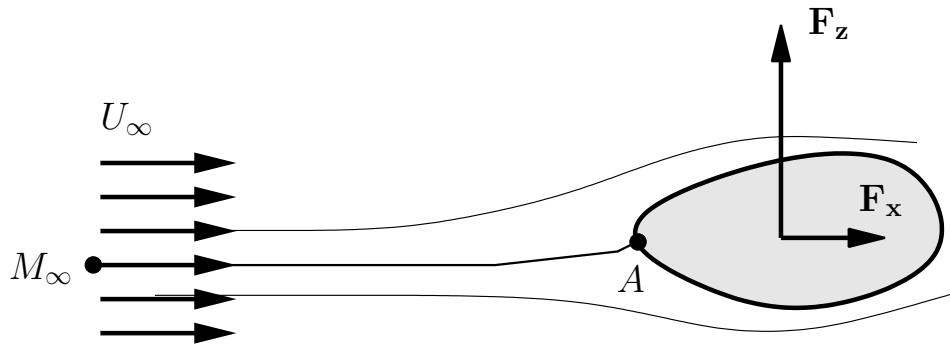


FIGURE 5.3 – Écoulement autour d'un obstacle.  $A$  est le point de stagnation ou d'arrêt. L'obstacle subit une force de traînée  $\mathbf{F}_x$  et une force de portance  $\mathbf{F}_z$ .

Si nous appliquons Bernoulli entre ce point et un point  $M_\infty$  infiniment éloigné de l'obstacle, nous obtenons (en négligeant la pesanteur) :

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_A \quad (5.8)$$

La pression  $p_A$  est appelée **pression de stagnation** ou **pression dynamique**. Elle est nécessairement supérieure à la pression infinie amont, et ce d'autant plus que la vitesse de l'écoulement est élevée. On peut la mesurer avec un **tube de Pitot** dont l'élément principal est un petit tube très fin placé face à l'écoulement. Le fluide ne pénètre pas dans le tube de telle sorte que son extrémité est un point d'arrêt, donc à la pression  $p_A$  de la relation (5.8).

Par ailleurs, on comprend aisément que l'obstacle subit une pression additionnelle, de par le mouvement du fluide, égale à  $1/2\rho U_\infty^2$  (c'est cette force que l'on sent lorsque l'on passe la main par le vitre d'une voiture). La force subie par l'obstacle de la part de l'écoulement sera donc de l'ordre de

$$\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \times S$$

où  $S$  est une section caractéristique de l'obstacle, en général la surface projetée dans un plan perpendiculaire à l'écoulement (par exemple  $\pi R^2$  dans le cas d'un obstacle sphérique).

On décompose usuellement cette force en une composante notée  $\mathbf{F}_X$  ou plus souvent  $\mathbf{F}_D$  (le "D" signifiant "Drag" = trainée en anglais) parallèle à l'écoulement, appelée **traînée**, et une force perpendiculaire  $\mathbf{F}_Z$  ou  $\mathbf{F}_L$  ("L" pour "Lift" = portance en anglais) appelée **portance** (oui, c'est bien celle qui porte les avions ...).

Leur calcul dépasse le cadre de ce chapitre (voir chapitre 9), mais puisque nous avons un ordre de grandeur de ces forces, on les définit par des nombres adimensionnels  $C_X$  ou  $C_D$  et  $C_Z$  ou  $C_L$  appelés respectivement **coefficients de traînée** et **coefficients de portance** :

$$C_X \quad \text{ou} \quad C_D = \frac{F_X}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S}$$

$$C_Z \quad \text{ou} \quad C_L = \frac{F_Z}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S}$$

A titre indicatif le  $C_X$  d'une voiture de course est de l'ordre de 0.3 alors que celui d'une 2 CV atteint 0.6. La notation  $C_X$  a donné son nom à l'une des voitures pionnières en matière d'aérodynamique dans les années 70... La notation  $C_D$  est plus couramment utilisée dans d'autres contextes que les transports.

Le rapport  $C_Z/C_X$  est connu sous le nom de "finesse" en aviation et définit la capacité d'un avion à planer. Elle est de l'ordre de 40 pour un planeur, de 25 pour un gros avion de transport, et de 8 pour un petit avion de tourisme.

Exercice : calculer l'ordre de grandeur des forces aérodynamiques sur un airbus A320 (surface totale des ailes  $122.6 \text{ m}^2$ , masse maximale  $54\ 400 \text{ kg}$ , vitesse de croisière  $955 \text{ km/h}$ , et masse volumique de l'air à  $10000 \text{ m}$  d'altitude =  $0.41 \text{ kg/m}^3$ ). On comparera au poids (masse maximale =  $54\ 400 \text{ kg}$ ). Même calcul sur une voiture de  $1500 \text{ kg}$  à  $100 \text{ km/h}$  (on intuitera les dimensions).

### 5.3.3 Notion de charge

On appelle charge (“head” en anglais) la grandeur

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \quad (5.9)$$

homogène à **une hauteur**

- $\frac{p}{\rho g}$  est appelée **hauteur piézométrique** ou **charge de pression**
- $\frac{v^2}{2g}$  est appelée **hauteur capable** ou **charge dynamique**

On définit aussi parfois la charge sous forme de pression :

$$P = \rho g z + p + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (5.10)$$

Cette définition convertit la pression et la vitesse en une hauteur ou en une pression équivalentes. Ainsi, dans les hypothèses précitées :

La formule de Bernoulli prédit que la charge est constante le long d'une ligne de courant

Cela est bien sûr faux dans l'absolu à cause des frottements visqueux et l'idée d'un château d'eau alimentant une maison distante de plusieurs milliers de kilomètres doit être oubliée dans la pratique.

Les différentes composantes de la charge peuvent être représentées graphiquement. Prenons tout d'abord le cas d'une canalisation de section constante et montante (Fig. 5.4). La section constante impose que la vitesse reste également constante le long du tuyau. Traçons par rapport à une référence arbitraire, les courbes d'évolution de chaque terme de la charge :  $z$  est simplement l'altitude du tuyau,  $z + p/\rho g$  est appelée **ligne piézométrique**,  $H$  est la **ligne de charge** (horizontale si la formule de Bernoulli est applicable), et la charge dynamique  $v^2/2g$  est la différence entre la ligne de charge et la ligne piézométrique. Ici cette dernière est également horizontale, puisque la vitesse est constante.

La figure 5.4 montre les interprétations physiques des lignes piézométriques et de charge. La première est la hauteur d'eau dans un tube connecté sur la paroi du tuyau. La seconde est la hauteur d'eau dans un tube relié à un embout de tube Pitot plongé au coeur de l'écoulement. Ce sont des conséquences de la formule de Bernoulli (on pourra le montrer à titre d'exercice).

Reprendons maintenant l'exemple du château d'eau sur le tuyau ouvert (Fig. 5.5). Nous prenons la référence au niveau du tuyau. La pression est constante égale à

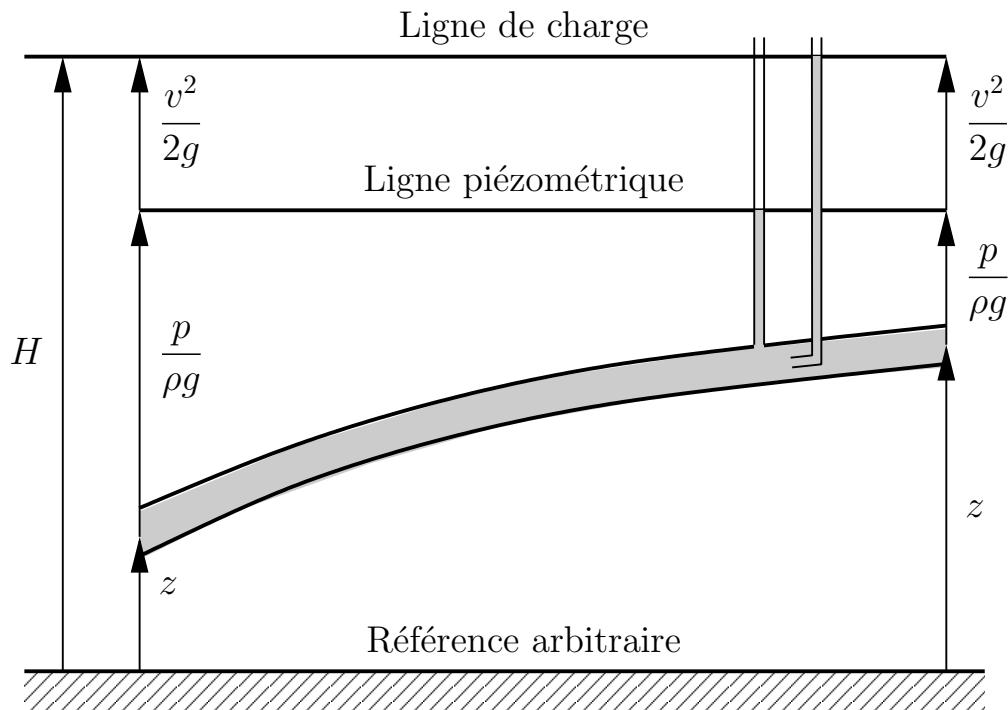


FIGURE 5.4 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour une canalisation de section constante en fluide parfait.

la pression atmosphérique dans tout l'écoulement, et la hauteur  $h$  est entièrement convertie en charge dynamique.

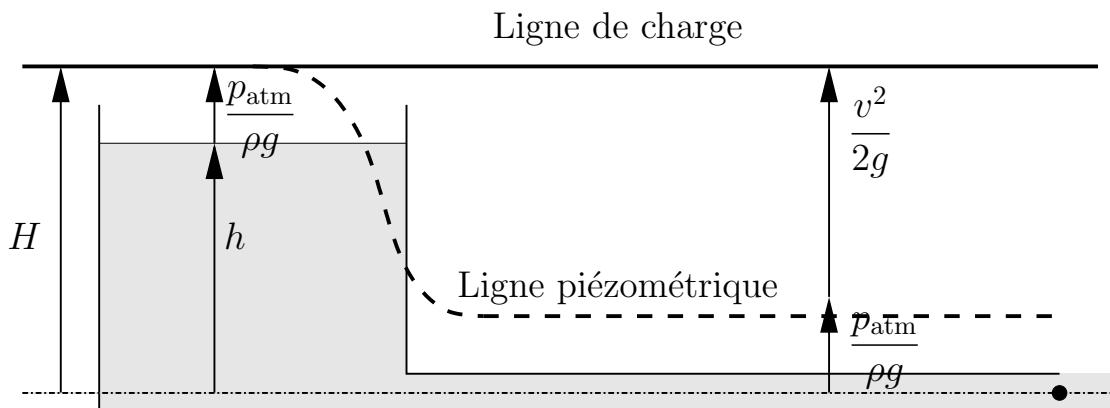


FIGURE 5.5 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour le problème du château d'eau ouvert sur une canalisation à l'atmosphère.



# Chapitre 6

## Pertes et gains de charge. Formule de Bernoulli généralisée

La formule de Bernoulli, mal utilisée, peut fournir des résultats totalement absurdes, confinant parfois au comique. Tout d'abord, dans la mesure où elle décrit un mouvement non dissipatif, il est probablement possible de lui faire inventer le mouvement perpétuel (rappelons le château d'eau alimentant une maison à quelques milliers de km) et de faire plaisir aux pétroliers pour transporter le pétrole dans les oléoducs à peu de frais ! Nous touchons ici aux pertes de charges occasionnées par le caractère visqueux du fluide, qui ne peut être négligé dans certains cas.

La formule de Bernoulli échoue également dans un autre cas fondamental : lorsque l'on prélève ou apporte du travail au fluide en écoulement à l'aide d'une machine tournante. Dans ce cas, ou bien on ajoute de la charge à l'écoulement, ou bien on lui en prélève. Notons que cette configuration est loin d'être anecdotique puisqu'elle est à la base des pompes et des moulins, utilisés depuis l'antiquité.

### 6.1 Formule de Bernoulli généralisée

Il est donc pertinent de mentionner ici les limites de la formule de Bernoulli après l'avoir exposée dans les sections précédentes. Nous allons donc calculer la variation de la charge entre la section d'entrée d'un tube de courant et sa section de sortie dans un cas très général. Elle est définie par :

$$H_s - H_e = \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right)_s - \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right)_e ,$$

Pour calculer cette variation, utilisons le théorème de l'énergie cinétique (4.27) établi dans la section 2.4, écrit ci-dessous en régime permanent, et pour un fluide incompressible ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) :

$$\left( p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right)_s - \left( p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right)_e = \frac{\dot{W}_u}{\dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\dot{V}} \quad (6.1)$$

où  $\dot{V}$  est le débit volumique dans le tuyau,  $\dot{W}_u$  la puissance utile, fournie ou prélevée par les pales et  $\Phi_v$  la puissance des forces intérieures visqueuses. La variation de charge proprement dite s'écrit :

$$\left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_s - \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_e = \frac{\dot{W}_u}{\rho g \dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\rho g \dot{V}} \quad (6.2)$$

Remarques importantes :

- On note que *le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir directement la différence des charges entre la sortie et l'entrée*<sup>1</sup> ! On retrouve donc la formule de Bernoulli *seulement lorsque  $\Phi_v = 0$  (fluide parfait) et  $\dot{W}_u = 0$* .
- Les grandeurs intervenant dans cette équation sont homogènes à des hauteurs. C'est un choix de présentation a priori, et ne pré-suppose en rien une variation de hauteur dans l'écoulement. Elle reste valable pour un écoulement dans un plan horizontal, où la gravité ne joue pas.

On retiendra que :

La différence de charge entre deux sections d'un écoulement en tuyauterie s'écrit :

$$H_s - H_e = \frac{\dot{W}_u}{\rho g \dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\rho g \dot{V}} = h_u - h_v \quad (6.3)$$

où  $h_v > 0$  est liée aux pertes par frottements, et  $h_u > 0$  ou  $< 0$  est liée à la puissance mécanique utile exercée sur le fluide.

En l'absence de machine et en fluide parfait, on retrouve la relation de Bernoulli :

$$H_s = H_e$$

Nous allons examiner individuellement les deux cas.

---

1. Ce qui n'est pas étonnant puisque cette formule, comme celle de Bernoulli, découle de la conservation de la quantité de mouvement.

## 6.2 Frottement visqueux : $h_v \neq 0$

Nous avons déjà mentionné que le terme de puissance  $\Phi_v$  des forces visqueuses intérieures au fluide était toujours positive, et présente dès lors qu'il existe des gradients de vitesse dans le fluide (voir annexe D). Cette énergie, comme nous l'avons vu d'après la formule (4.28) est soit dissipée sous forme de chaleur, soit augmente la température du fluide. Dans tous les cas, c'est une perte d'énergie mécanique pour le fluide, et donc de charge, comme en témoigne l'équation (6.2).

Les frottements visqueux impliquent que  $h_v > 0$ . C'est la *perte de charge*.

Les pertes de charges sont de deux types :

### 6.2.1 Pertes de charge régulières

Appelées aussi pertes de charge linéaires, elles sont liées aux gradients de vitesse occasionnés par l'adhérence du fluide sur les parois de la tuyauterie.

Un raisonnement dimensionnel simple montre que la seule grandeur homogène à une hauteur que l'on peut construire à partir de la vitesse est  $v^2/2g$ . Par ailleurs la perte d'énergie est clairement proportionnelle à la longueur  $L$ , ce qui doit être traduit dans l'expression de  $h_v$ . Il faut donc diviser par  $D$  pour obtenir une grandeur sans dimension. Au final :

Une perte de charge régulière peut s'exprimer en fonction d'un facteur adimensionnel  $f$  appelé **coefficient de frottement**<sup>a</sup> :

$$h_v = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (6.4)$$

où  $L$  est la longueur entre section d'entrée et de sortie, et  $D$  diamètre du tube. Ce n'est qu'une définition pour définir la perte de charge régulière  $h_v$  de façon adimensionnelle, qui reporte le calcul de cette dernière sur le calcul de  $f$ .

a. appelé dans la littérature *factor of friction de Darcy-Weisbach*

Le coefficient de frottement  $f$  est fonction du nombre de Reynolds  $Re = \rho v D / \eta$ , et éventuellement de la rugosité du tuyau pour des écoulements turbulents. En régime laminaire ( $Re < 2000$ ), on montre que (voir section 7.3.2)

$$f = \frac{64}{Re}, \quad (6.5)$$

Pour des nombres de Reynolds plus élevé l'écoulement devient turbulent. Pour calculer des ordres de grandeurs lorsque l'on a des Reynolds élevés, *et un tube lisse*, on pourra utiliser la formule de Blasius (Bird et al., 1960) :

$$f = \frac{0.3164}{\text{Re}^{1/4}} \quad \text{pour } 2.1 \times 10^3 < \text{Re} < 10^5 \quad (6.6)$$

Toujours pour des régimes turbulents, en tube lisse ou rugueux, on pourra utiliser la formule implicite, dite de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}} + \frac{\epsilon/D}{3.7} \right), \quad (6.7)$$

où  $\epsilon$  est la taille caractéristique des aspérités du tube. Cette formule présente l'inconvénient d'être implicite, mais est valide quasiment sur l'ensemble du domaine turbulent ( $\text{Re} > 4000$ ).

Si le caractère implicite de la dernière formule pose un problème, on pourra utiliser la formule de Haaland, légèrement moins précise, mais explicite :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log_{10} \left[ \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right] \quad (6.8)$$

Dans le cas de tube de section non-circulaire, on remplace usuellement  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$  défini par :

$$D_h = \frac{4A}{P} \quad \text{où} \quad A = \text{Section et } P = \text{Périmètre}$$

De façon générale, on pourra utiliser le célèbre **diagramme de Moody** (Fig. 6.1) qui fournit le coefficient de perte de charge linéaire dans tous les cas. Il est tracé à partir de (6.5) pour un écoulement laminaire ( $\text{Re} < 2300$ ), et de (6.7) pour un écoulement turbulent. Dans ce dernier cas, la rugosité relative du tuyau  $\epsilon/D$  influe et il y a donc plusieurs branches, chacune correspondant à une valeur de  $\epsilon/D$  (à lire sur l'axe vertical de droite, en bleu Fig.6.1 ).

On retiendra enfin que la perte de charge régulière est proportionnelle à la longueur de tube considérée.<sup>2</sup> Cela signifie que l'on a pas intérêt à utiliser des longueurs de tuyaux trop élevées si possible. De même, des tuyaux trop fins sont à déconseiller. Dans tous les cas, augmenter la perte de charge revient au final à dépenser plus d'énergie (et donc plus d'argent) dans le système moteur du fluide (typiquement une pompe)

---

2. Certains goutteurs pour l'arrosage sont basés sur ce principe : plusieurs dizaines de mètres de tuyau fin sont enroulés sur eux mêmes, de telle sorte que l'eau sort à très faible vitesse.

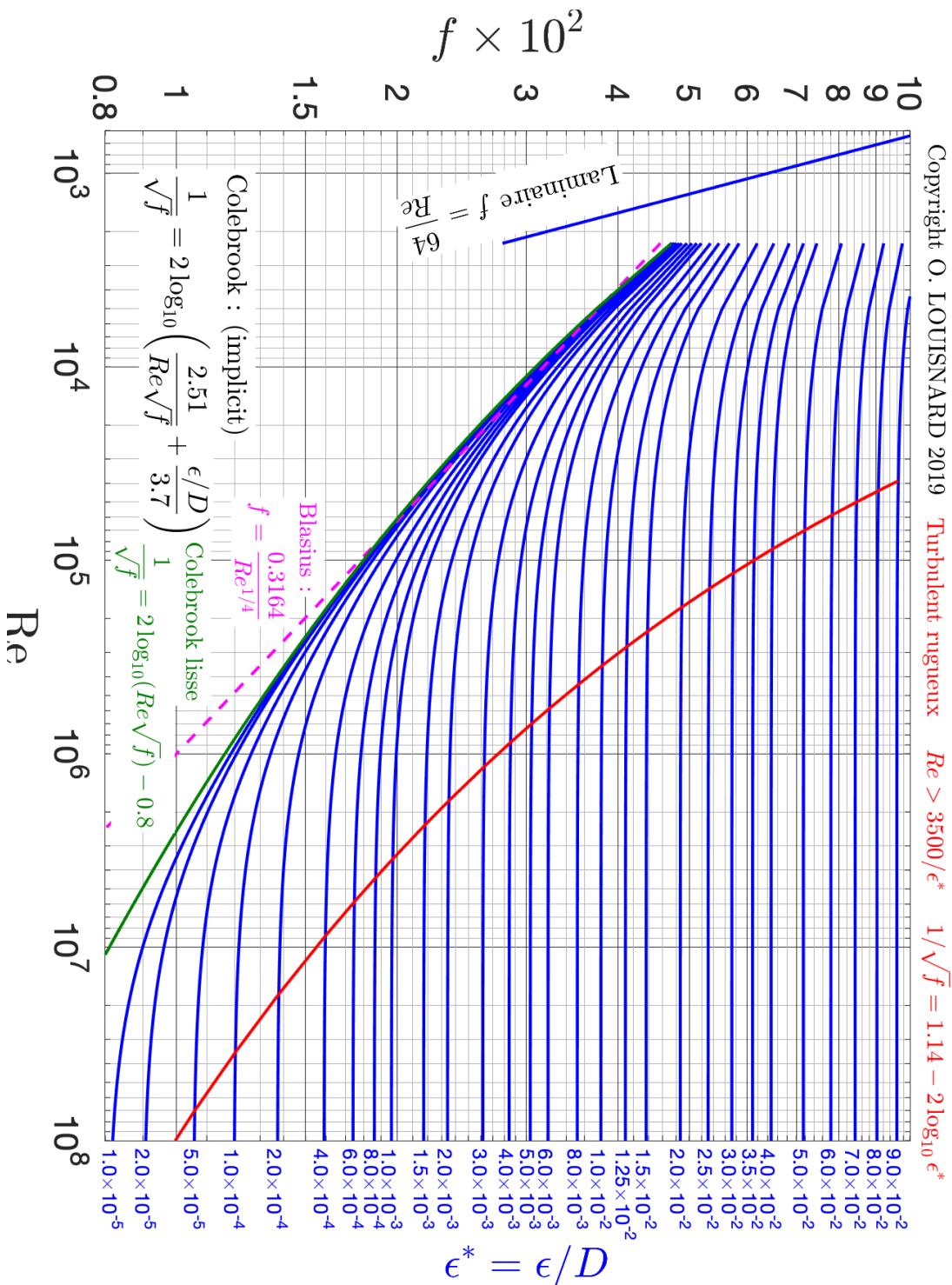


FIGURE 6.1 – Diagramme de Moody  $f(Re)$  pour les pertes de charge résulaires. Dans le régime turbulent, chaque courbe correspond à une valeur donnée de la rugosité relative du tube  $\epsilon/D$ .

### 6.2.2 Pertes de charge singulières

Elles sont liées à des “accidents” ponctuels sur la tuyauterie : élargissements ou rétrécissements brusques, coudes, changements de direction (en U ou en L), vannes, robinets, clapets, tés. Par le même raisonnement dimensionnel que précédemment :

Les pertes de charge singulières s’expriment à partir d’un coefficient de perte de charge adimensionnel  $e_v$  :

$$h_v = e_v \frac{v^2}{2g} \quad (6.9)$$

Le facteur  $e_v$  peut être calculé explicitement dans quelques cas peu nombreux, mais on a généralement recours à des formules empiriques ou à des abaques (Idelcik, 1969). On pourra aussi consulter le livre de White (1994) qui compile de nombreux résultats.

On pourra retenir les ordres de grandeurs suivants :

- Elargissement brusque :  $e_v = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$ , en référence à la vitesse amont dans (6.9),
- Rétrécissement brusque :  $e_v = 0.45 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$ , en référence à la vitesse aval,
- Tube plongeant dans un bac,  $e_v = 1$ ,
- Coude,  $e_v = 0.8$ ,
- Vanne ouverte,  $e_v = 1.2$ ,

### 6.2.3 Exemple

Nous allons reprendre l’exemple du château d’eau en prenant en compte les pertes de charge linéaires : pour cela remarquons que la perte de charge impose une décroissance linéaire de la ligne de charge (Fig. 6.2). Comme altitude et vitesse sont constantes le long du tuyau, c’est la pression qui chute le long de l’écoulement : ainsi, la ligne piézométrique reste parallèle à la ligne de charge dans toute la conduite. La pression à l’entrée du tuyau est donc supérieure à  $p_{\text{atm}}$  : le fluide est retenu par cet excès de pression. Il apparaît donc clairement sur la figure (Fig. 6.2) que la charge dynamique, et donc la vitesse, est plus faible en présence de pertes de charges.

Cette perte de vitesse peut être évaluée en écrivant les variations de charge entre les différents points de l’écoulement (Fig. 6.2).

Entre A et B, il n’ya pas de pertes donc  $H_A = H_B$ . Entre B et C, on a la perte de charge linéaire donc  $H_S - H_B = -h_v$  soit par conséquent

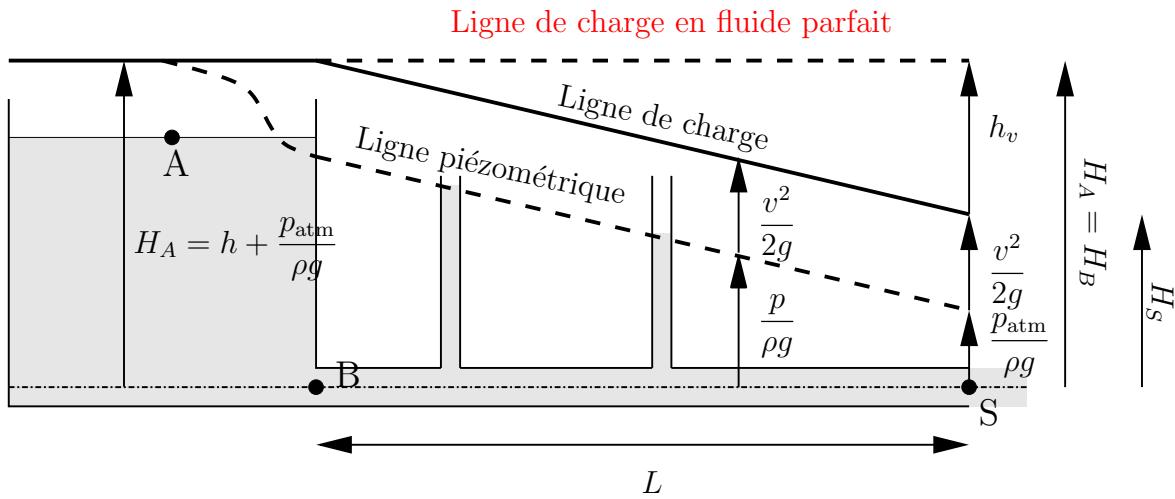


FIGURE 6.2 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour le problème du château d'eau ouvert sur une canalisation à l'atmosphère, en présence de pertes de charge.

$$H_S = H_A - h_v$$

soit :

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h - h_v \quad (6.10)$$

et la vitesse d'écoulement s'écrit donc :

$$v = \sqrt{2g(h - h_v)}$$

On constate bien qu'elle est plus faible que la vitesse prédictive par la formule de Toricelli (5.7). En comparant cette dernière à l'expression (5.7), on voit que tout se passe comme si le niveau dans le château d'eau était diminué de la hauteur  $h_v$ . On remarquera que si la perte de charge atteint la hauteur  $h$  du château d'eau, le fluide ne peut plus s'écouler.<sup>3</sup> la perte de charge étant proportionnelle à  $L$ , ceci se produira si la tuyauterie dépasse une certaine longueur, ce qui montre bien l'impossibilité pour un réservoir d'alimenter des maisons trop distantes.

Remarque importante : il convient de bien comprendre que ce n'est pas la vitesse (ou le débit) qui chute le long de la conduite, mais la pression ! En revanche la perte de charge conduit bien à une diminution de vitesse par rapport au fluide parfait.

3. Comment y remédier ? indice : lire la section suivante et/ou regarder la formule (6.2).

## 6.3 Cas des machines tournantes : $h_u \neq 0$

Lorsqu'une machine contenant des pales tournantes est placée entre l'entrée et la sortie, elle fournit de la puissance utile au fluide ( $\dot{W}_u > 0$ , pompe, ventilateur) ou en reçoit ( $\dot{W}_u < 0$ , éolienne, moulin à eau, turbine hydroélectrique). Dans le premier cas, la charge augmente, dans le second, elle diminue. Ainsi, une pompe permettra par exemple de monter du fluide d'une hauteur  $z_e$  à une hauteur  $z_s$  en augmentant sa charge. À l'inverse, une turbine hydroélectrique prélève une partie de l'énergie potentielle de pesanteur du fluide pour faire tourner une dynamo. La charge restante est essentiellement une charge dynamique (les cascades généralement visibles sous les barrages). Il est important de comprendre que cette perte ou ce gain de charge n'est pas lié aux frottements visqueux dans le fluide, mais uniquement à l'échange d'énergie effectué entre le fluide et l'extérieur, à travers un système mécanique en mouvement (pales, aubes, engrenages, piston ...).

### 6.3.1 Turbines, moulins, éoliennes

Les turbines prélèvent de l'énergie mécanique à un écoulement ( $\dot{W}_u < 0$ ), pour la convertir en électricité ou en une autre forme d'énergie mécanique (pour effectuer des opérations de broyage dans l'exemple historique des moulins). L'énergie prélevée peut être présente sous forme d'énergie potentielle de pesanteur (barrages hydroélectriques), ou bien sous forme d'énergie cinétique (éoliennes, moulins à vent).

Les figures 6.3, 6.4 montrent des exemples de roues de moulins à eau, de turbines de barrages hydroélectriques et de pompes.

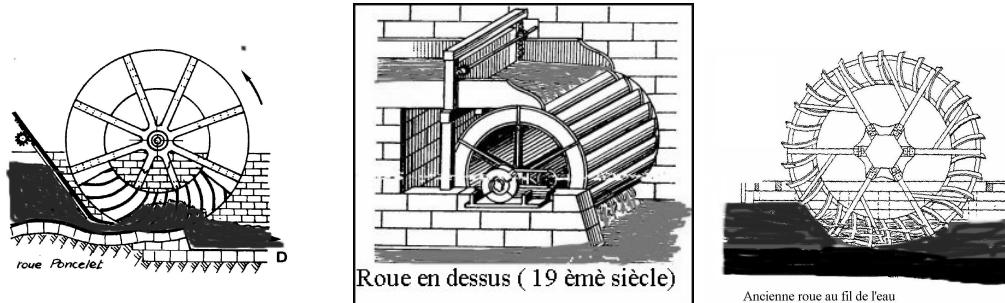


FIGURE 6.3 – Exemples de roues de moulins à eau.

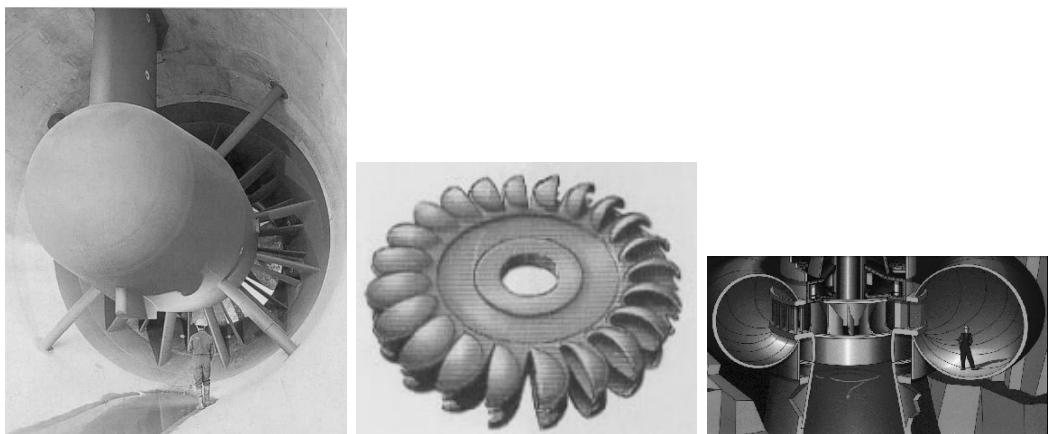


FIGURE 6.4 – Exemples de turbines de barrages.

### 6.3.2 Pompes

A l'inverse, les pompes augmentent l'énergie mécanique d'un écoulement de liquide (dans le cas des gaz, on parle de compresseurs). Les principaux types de pompes sont présentés Fig. 6.5.

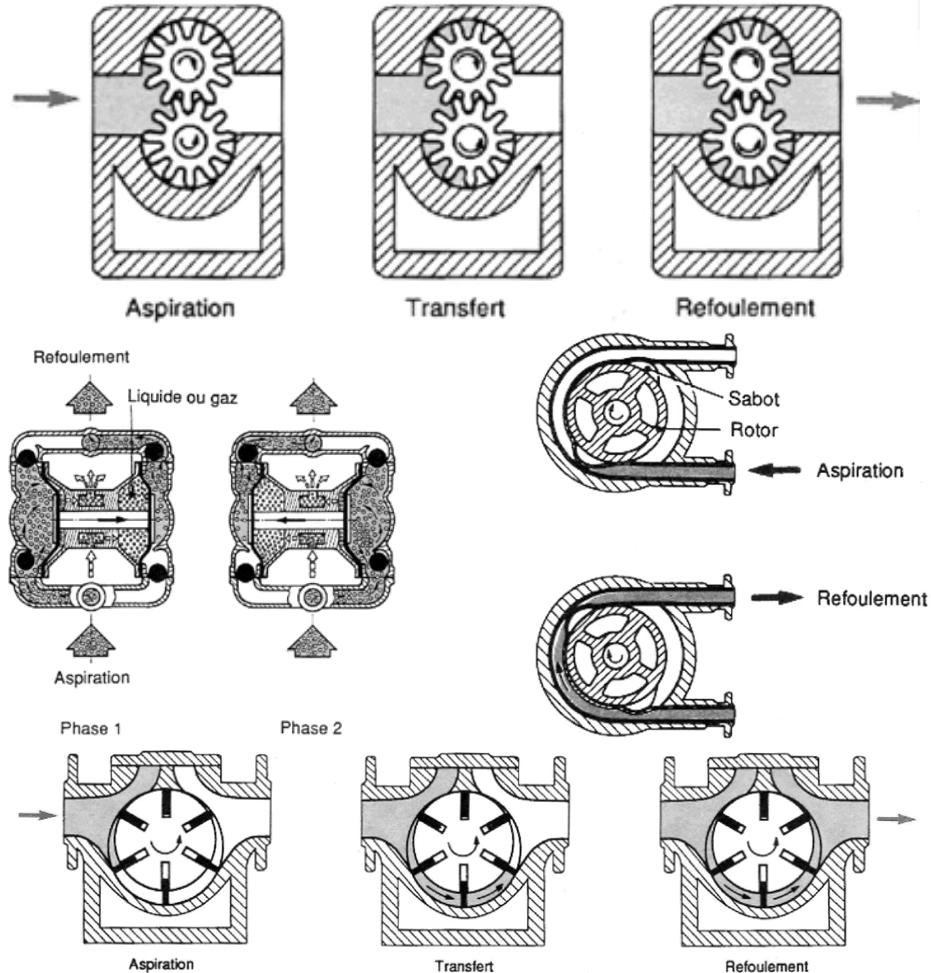


FIGURE 6.5 – Exemples de pompes volumétriques : de haut en bas et de gauche à droite : pompe à engrenages extérieurs ; pompe à membranes ; pompe péristaltique ; pompe à palettes libres (source : Techniques de l'ingénieur, BM 4320)

Le schéma de base est présenté Fig. 6.6 : on place une pompe ( $\dot{W}_u > 0$ ) entre deux tuyauteries de même section, le fluide circulant avec un débit volumique  $Q$ .

En utilisant l'expression (6.3), la différence de charge entre entrée et sortie s'écrit<sup>4</sup> :

$$H_s - H_e = \frac{\dot{W}_u}{\rho g Q} = h_u \quad (6.11)$$

avec  $h_u > 0$ . De plus, la conservation du débit implique que les vitesses sont égales en entrée et en sortie (la charge dynamique est donc constante). De plus, entrée et

4. Exercices de réflexion : pourquoi la formule de Bernoulli classique ( $H_s = H_e$ ) appliquée sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie d'une machine n'est-elle pas applicable ?

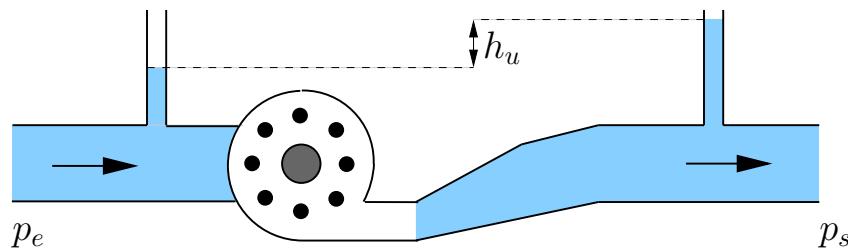


FIGURE 6.6 – Augmentation de la pression dans un écoulement de même section en entrée et en sortie avec une pompe.

sortie sont à la même altitude et l'équation de charge s'écrit donc :

$$\frac{p_s - p_e}{\rho g} = \frac{\dot{W}_u}{\rho g Q} = h_u$$

ce que reflète bien la différence d'élévation dans les deux tubes piezométriques. Conclusion : on a augmenté la pression dans l'écoulement. Cette augmentation de pression peut ensuite être exploitée pour éléver le fluide ( $\dot{W}_u = \rho g \dot{V}(z_s - z_e) > 0$ , c'est le cas du pompage dans un puit par exemple), ou bien tout simplement pour le faire couler à l'horizontale en compensant la perte de charge par un apport d'énergie ( $\dot{W}_u = \Phi_v > 0$ ). C'est par exemple le cas du transport de pétrole sur des milliers de km dans les oléoducs.

## 6.4 Applications aux réseaux de fluide

### 6.4.1 Circuit fermé

Considérons un circuit en boucle alimenté par une pompe (Fig. 6.4.1).

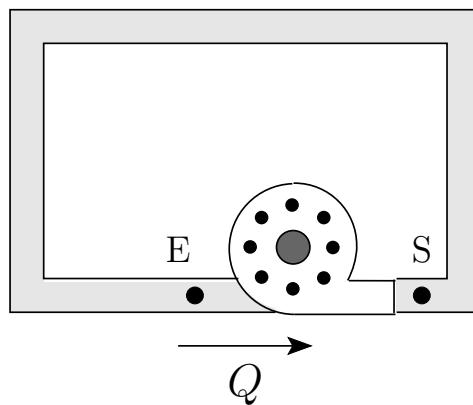


FIGURE 6.7 – Circuit fermé alimenté par une pompe

En appliquant la formule de Bernoulli généralisée entre E et S, on obtient  $H_S - H_E = h_u$  et en l'appliquant entre S et E, on obtient  $H_E - H_S = -h_v$ . On en déduit donc

que  $h_u = h_v$ , c'est-à-dire que l'énergie apportée par la pompe compense exactement la perte de charge dans le circuit fermé. La puissance que doit délivrer la pompe vaut donc  $\dot{W}_u = \rho g Q h_v$ , ou encore, si on exprime la perte de charge en variation de pression  $\Delta p_v$ ,  $\dot{W}_u = \Delta p_v Q$

La puissance que doit délivrer la pompe à un circuit fermé de perte de charge totale mesuré par une hauteur  $h_v$  ou une variation de pression  $\Delta p_v$  s'écrit :

$$\dot{W}_u = \rho g Q h_v = Q \Delta p_v \quad (6.12)$$

### 6.4.2 Caractéristique d'une pompe

La simplicité de l'équation (6.11) cache une complication que l'on peut résumer par la question suivante : une pompe fournit-elle toujours la même puissance  $\dot{W}_u$  au fluide quel que soit le débit ? La réponse est non, et on peut s'en convaincre en imaginant ce qui se passe pour un débit quasiment nul : la vitesse du fluide tend vers 0, et la puissance fournie par les aubes au fluide tend forcément vers 0. A l'inverse, les aubes ne peuvent fournir de puissance au fluide pour des débits très grands. La puissance fournie au fluide dépend donc du débit, de par la conception même de la pompe, et la courbe  $\dot{W}_u(Q)$  doit s'annuler pour  $Q = 0$  et pour  $Q = Q_m$  débit maximal (Fig. 6.8). Elle passe par un maximum pour un débit  $Q^* = 0.6 Q_m$ , appelé *point de fonctionnement idéal* (Best Efficiency Point = BEP).

A partir de la donnée  $\dot{W}_u(Q)$  on en déduit par l'équation de charge (6.11) la variation du gain de charge :

$$h_u(Q) = \frac{\dot{W}_u(Q)}{\rho g Q}$$

qui a l'allure typique représentée sur la figure 6.8. Il existe parfois une zone où la charge augmente avec le débit, qui est déconseillée car elle entraîne des instabilités, suivie d'une partie décroissante, jusqu'à atteindre  $h_u = 0$  pour le débit maximal.

Un exemple issu d'une documentation commerciale est illustré Fig. 6.9. Souvent la caractéristique  $h_u(Q)$  peut être décrite par une parabole :

$$h_u = h_{u0} \left[ 1 - \left( \frac{Q}{Q_m} \right)^2 \right]$$

### 6.4.3 Point de fonctionnement

Prenons un exemple simple où l'on pompe du liquide dans un bac pour l'elever dans un autre avec un certain débit  $Q$  (Fig. 6.10)

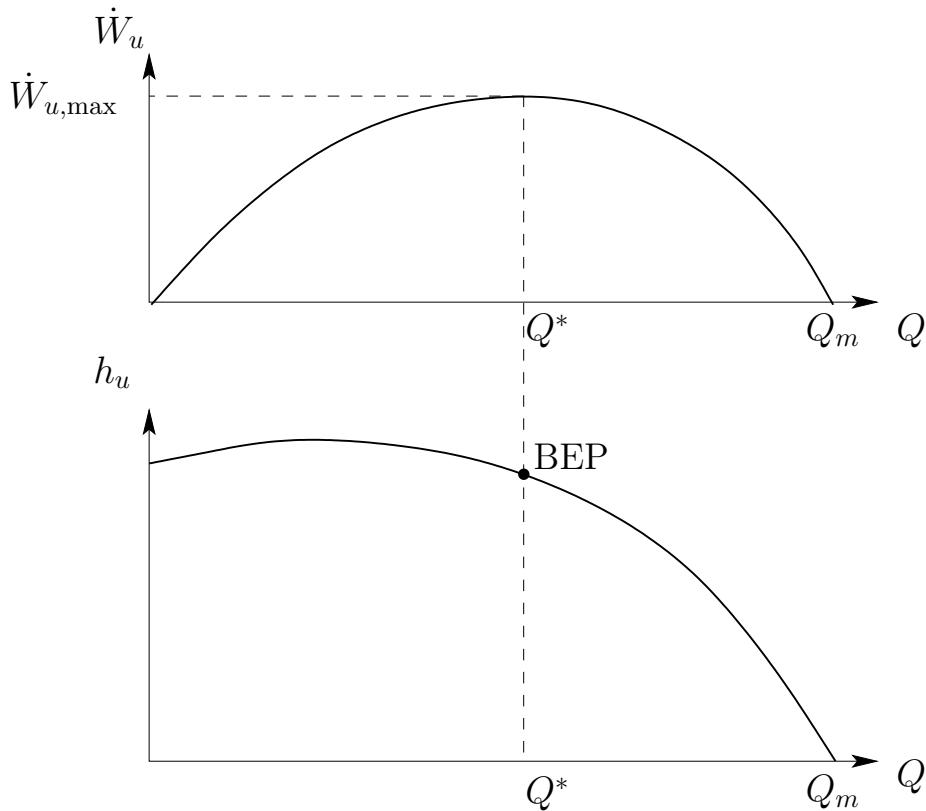


FIGURE 6.8 – En haut : puissance délivrée au fluide par la pompe en fonction du débit. En bas, hauteur de charge fournie par la pompe en fonction du débit. BEP signifie *Best Efficiency Point*, et correspond au point de fonctionnement optimal.

En écrivant la formule de Bernoulli généralisée entre la surface du bac et la sortie, on obtient, en notant  $h_v$  la hauteur totale de pertes de charge :

$$\left( \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} \rho + h \right) - \left( \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} \right) = h_u - h_v$$

La grandeur  $h_v$  est calculable en sommant toutes les pertes de charge singulières (ici un prélèvement dans un bac + 3 coude) et linéaires de l'installation. C'est donc une fonction connue  $h_v(Q)$  du débit  $Q$ . Par ailleurs  $v_s = Q/S$ , et l'on doit donc avoir :

$$h_u = h_v(Q) + h + \rho \frac{Q^2}{2\rho g S^2} \quad (6.13)$$

Il suffit ensuite de trouver une pompe pouvant fournir cette hauteur de charge pour le débit  $Q$  recherché. Le point de fonctionnement est obtenu à l'intersection de la courbe définie par (6.13) et de la caractéristique de la pompe. La puissance fournie au fluide est donnée par  $\dot{W}_u = \rho g Q h_u$ .

A l'échelle d'une installation en génie des procédés, il est important de **prendre en compte toutes les pertes de charge, linéaires et singulières** et de bien dimensionner la ou les pompes pour faire circuler le fluide avec le débit voulu.

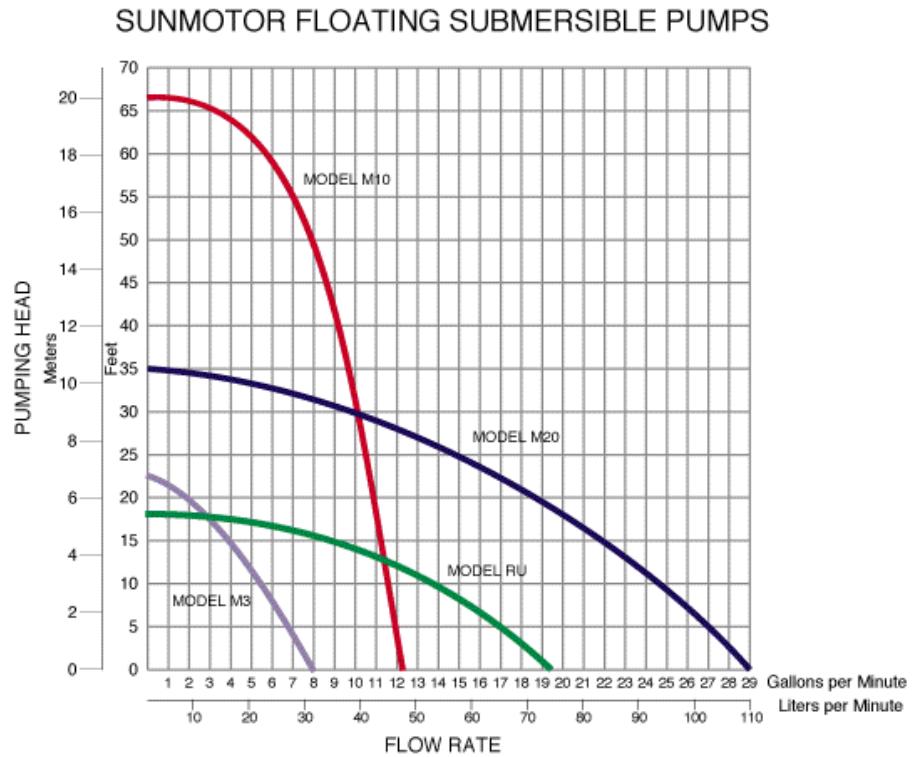


FIGURE 6.9 – Courbe débit-hauteur de charge pour une série de pompes flottantes (d'après <http://www.utilityfree.com/solar/waterpumping/floatingsub.html>)

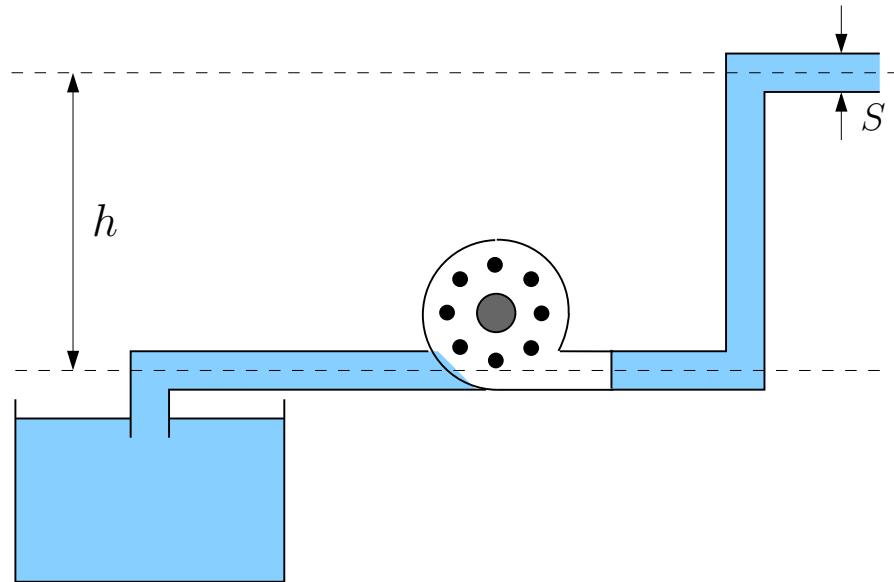


FIGURE 6.10 – Exemple de pompage de fluide dans un bac pour illustrer le calcul du point de fonctionnement

Lorsque la pompe est sous-dimensionnée, la pompe peut s'endommager, et on obtient en général un échauffement notable du fluide. Le fluide peut même revenir de la sortie vers l'entrée de la pompe. On dit alors qu'elle **refoule**.

### 6.4.4 Réseaux hydrauliques

Souvent l'écoulement se sépare en plusieurs branches (par exemple des douches en parallèle dans des vestiaires). Imaginons par exemple deux tuyaux en parallèle branchés sur une pompe. Comment calculer le débit dans chaque branche ? Les règles sont les suivantes :

Dans un réseau hydraulique :

1. la charge  $H$  est définie de façon unique en chaque noeud du réseau.
2. Si on a plusieurs branches  $1, 2 \dots N$  reliant deux noeuds A et B, en notant  $Q_i$  le débit dans la branche  $i$ , on écrit la relation de Bernoulli généralisée sur chaque branche :

$$\begin{aligned} H_B - H_A &= h_u(Q_1) - h_v(Q_1) \\ &= h_u(Q_2) - h_v(Q_2) \\ &\dots \\ &= h_u(Q_N) - h_v(Q_N) \end{aligned}$$

3. la somme des débits arrivant en un noeud est égal à la somme des débits qui en repartent (loi de Kirchhoff). <sup>a</sup>

*a.* C'est une conséquence de la conservation de la masse

Remarques : *en aucun cas on ne somme les pertes de charge des branches en parallèle.* Ce point, ainsi que le point 1. ci-dessus est souvent mal compris. Pour le clarifier, revenons à la définition de la charge (5.9) :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

qui rappelons-le mesure l'énergie mécanique du fluide. Ainsi, la quantité  $w = gH$  est l'énergie mécanique du fluide par unité de masse. Considérons alors le cas de deux tuyaux (Fig. 6.11).



FIGURE 6.11 – Séparation d'un écoulement en deux tuyaux.

Si l'écoulement se sépare en deux au point A, le fluide part *avec la même énergie massique*  $w_A$  dans les deux branches. Le débit d'énergie mécanique  $\dot{m}w_A$  se coupe

donc en un débit d'énergie mécanique  $\dot{m}_1 w_A$  dans la branche 1 et  $\dot{m}_2 w_A$  dans la branche 2. L'énergie mécanique est bien conservée à la séparation<sup>5</sup>. En A, il n'y a pas une partie du fluide qui a une charge  $w_1$  et une autre  $w_2$ , mais il y a une partie du fluide qui va passer par la branche 1 et une autre par la branche 2, et les deux ont la même énergie massique  $w_A$ .

Ensuite le fluide va dissiper *la même énergie massique* dans les deux branches, de telle sorte que son énergie massique en B devienne  $w_B$ . Comment ? Tout simplement en ajustant  $\dot{m}_1$  (et donc  $\dot{m}_2 = \dot{m} - \dot{m}_1$ ) de telle sorte que la perte de charge soit la même dans les deux branches.

Il y a une analogie directe avec l'électricité. Comme  $gH$  en mécanique des fluides, le potentiel électrique (qui est une énergie par unité de charge) est défini de façon unique en chaque point du réseau. Si un circuit se coupe en deux branches en parallèle, les intensités dans chaque branche sont telles que la chute de potentiel dans les deux branches soit la même.

Finissons sur un exemple, sur lequel tout problème raisonnablement simple peut être calqué : on considère deux branches en parallèle de diamètres et longueur différentes, la première comportant  $N$  coudes identiques. L'ensemble est connecté à une pompe de caractéristique  $h_u(Q)$  connue. On cherche les débits dans les deux branches.

Les équations, d'inconnues  $Q_1$  et  $Q_2$  sont<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} h_u(Q) &= \frac{L_1}{D_1} \frac{\mathbf{v}_1^2}{2g} f\left(\text{Re}_1, \frac{\epsilon_1}{D_1}\right) + N \frac{\mathbf{v}_1^2}{2g} e_v \\ h_u(Q) &= \frac{L_2}{D_2} \frac{\mathbf{v}_2^2}{2g} f\left(\text{Re}_2, \frac{\epsilon_2}{D_2}\right) \\ Q &= Q_1 + Q_2 \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{Q_1}{S_1} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{Q_2}{S_2} \quad \text{Re}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 D_1}{\nu} \quad \text{Re}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 D_2}{\nu} \end{aligned}$$

Notons que ce type de système d'équations est en général insolvable analytiquement, et une résolution numérique est requise. Il existe quelques exceptions, notamment lorsque les branches sont identiques, et que les Reynolds sont suffisamment élevés pour pouvoir considérer les  $f$  constants.

---

5. En réalité les séparations ou raccordements de tubes dissipent de l'énergie, et occasionnent une perte de charge singulière...

6. Les variables liées aux inconnues  $Q_1$  et  $Q_2$  sont indiquées en bleu et vert, respectivement, pour mieux apprécier la forme du système d'équations.

# Chapitre 7

## Equations de Navier-Stokes

Ce chapitre explicite la contrainte visqueuse dans le cas des fluides dits “newtoniens”. Sous cette hypothèse et celle d’incompressibilité, les équations du mouvement prennent la forme des équations dites de “Navier-Stokes”. Ces équations peuvent être résolues analytiquement dans plusieurs configurations classiques où l’écoulement s’effectue dans une direction privilégiée, notamment l’écoulement de Couette, mentionné précédemment, et celui de Poiseuille, le long d’un tube. Les écoulements unidirectionnels ont quelques propriétés générales intéressantes, sur lesquelles nous clorons ce chapitre.

### 7.1 Le modèle de fluide newtonien

#### 7.1.1 Approche par l’expérience de Couette

Reprenons l’expérience de Couette décrite page 42. Rappelons que l’expérimentation montre l’apparition d’un profil de vitesse linéaire au bout d’un certain temps, et que la force qu’il faut exercer sur la plaque pour la déplacer à une vitesse constante  $U_0$  est proportionnelle à la variation de la vitesse dans la hauteur du fluide :

$$\frac{\mathbf{F}_v}{S} = -\eta \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_x$$

Puisque la plaque bouge à vitesse constante, cette force est donc opposée à celle qu’exerce le fluide sur la plaque. Effectuons maintenant le bilan des forces sur une tranche de fluide comprise entre la plaque supérieure et une ordonnée  $z$  quelconque. On voit que :

- suivant  $z$ , il n’y a pas de mouvement, les seules forces sont les forces de pression, nous allons retrouver la loi de l’hydrostatique, comme si le fluide était immobile.

- l'accélération du fluide étant nulle (nous y reviendrons), la force tangentielle exercée par la plaque sur la tranche de fluide est égale à celle qu'exerce cette tranche de fluide sur la couche de fluide inférieure. Par conséquent, la contrainte tangentielle exercée en tout point par le fluide supérieur sur le fluide inférieur est constante dans l'épaisseur et vaut :

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_x$$

La contrainte normale exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure est celle de pression et nous pouvons donc écrire la contrainte totale sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_x - p \mathbf{e}_z$$

Remarquons que le vecteur normal sortant à la couche de fluide inférieure est  $\mathbf{e}_z$ , et la relation ci-dessus nous fournit la troisième colonne du tenseur des contraintes (qui rappelons-le, est la force exercée par unité de surface normale à Oz). De plus nous savons que la force de pression est isotrope (elle est toujours orthogonale à la surface considérée). Le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -p & ? & \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ ? & -p & 0 \\ ? & ? & -p \end{bmatrix}$$

Dans la direction  $y$ , il n'existe pas d'autre force que celle de pression (par symétrie de l'écoulement), par conséquent la deuxième colonne est nulle en dehors du terme  $-p$ . Enfin examinons la force tangentielle exercée sur une surface perpendiculaire à l'écoulement : l'existence d'une composante suivant  $y$  imposerait un mouvement dans cette direction, et n'existe donc pas, par conséquent  $\sigma_{xy} = 0$ . Enfin, on peut démontrer très généralement que le tenseur des contraintes est forcément symétrique, et nous obtenons finalement :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & -p & 0 \\ \eta \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

que nous pouvons décomposer en une partie liée aux forces de pressions et l'autre aux forces visqueuses :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

### 7.1.2 Equations du modèle newtonien

L'expérience de Couette nous montre que la force visqueuse naît de l'existence de couches de fluide voisines se déplaçant à des vitesses différentes. L'expression  $\partial u / \partial z$  dans (7.1) est une dérivée spatiale d'une composante de la vitesse. Voyons combien de dérivées spatiales de la vitesse nous pouvons définir dans le cas général : il y a trois composantes  $u, v, w$  que nous pouvons chacune dériver par rapport aux trois variables d'espace  $x, y, z$ , ce qui fait 9 dérivées. On les regroupe dans le **tenseur gradient de vitesses**, qui s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

En examinant le deuxième terme du tenseur (7.2) obtenu pour l'expérience de Couette, nous voyons qu'il fait bien intervenir des termes antidiagonaux en  $\partial u / \partial z$ , mais qu'il est symétrique ce qui n'est pas le cas de  $\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v}$ . Il faut donc "symétriser" ce dernier. Il est facile de voir que la relation générale entre  $\bar{\bar{\sigma}}$  et  $\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v}$ , se réduisant à (7.1) dans le cas de l'écoulement de Couette, est :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{I}} + \underbrace{\eta \left( \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} + {}^T \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} \right)}_{\bar{\bar{\sigma}}_v}, \quad (7.4)$$

tenseur des contraintes dans l'écoulement d'un *fluide newtonien*, où  $\bar{\bar{I}}$  est le tenseur identité.

### 7.1.3 Le tenseur gradient de vitesses.

Nous allons donner ici un sens au tenseur symétrique  $\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} + {}^T \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v}$  construit ci-dessus. Pour simplifier nous allons travailler en 2D, l'extension en 3D étant immé-

diate. On voit facilement que l'on peut décomposer le tenseur gradient de vitesses en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\Omega} \quad (7.5)$$

où

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Le tenseur  $\overline{\overline{D}}$  est appelé **tenseur vitesse de déformation**, et décrit comment un cube de fluide se déforme dans le mouvement. On peut encore le décomposer en sa partie diagonale et sa partie antidiagonale. Les termes diagonaux traduisent un allongement ou une contraction du cube de fluide dans une direction donnée (voir Fig. 7.1), sans changement de forme, tandis que les termes antidiagonaux expriment une distortion de la forme du cube : les arêtes ne restent pas parallèles à elles-mêmes

La partie antisymétrique  $\overline{\Omega}$  correspond à une rotation pure, sans déformation, du cube de fluide (Fig. 7.1). Elle est liée au rotationnel du vecteur vitesse.

On trouvera une démonstration détaillée de ces différents points dans Guyon et al. (2001); Chassaing (2000)

On peut donc maintenant réécrire le tenseur des contraintes d'un fluide newtonien sous la forme :

$$\overline{\sigma}_v = 2\eta \overline{\overline{D}} \quad (7.8)$$

Cette relation tensorielle n'exprime rien de plus physiquement que le fait que la force tangentielle dans l'écoulement de Couette est proportionnelle à  $\partial u / \partial z$ . Ce n'en est qu'une généralisation. Le point fondamental est que la force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse de déformation, ou encore aux gradients de vitesse. *C'est la définition d'un fluide dit newtonien.*

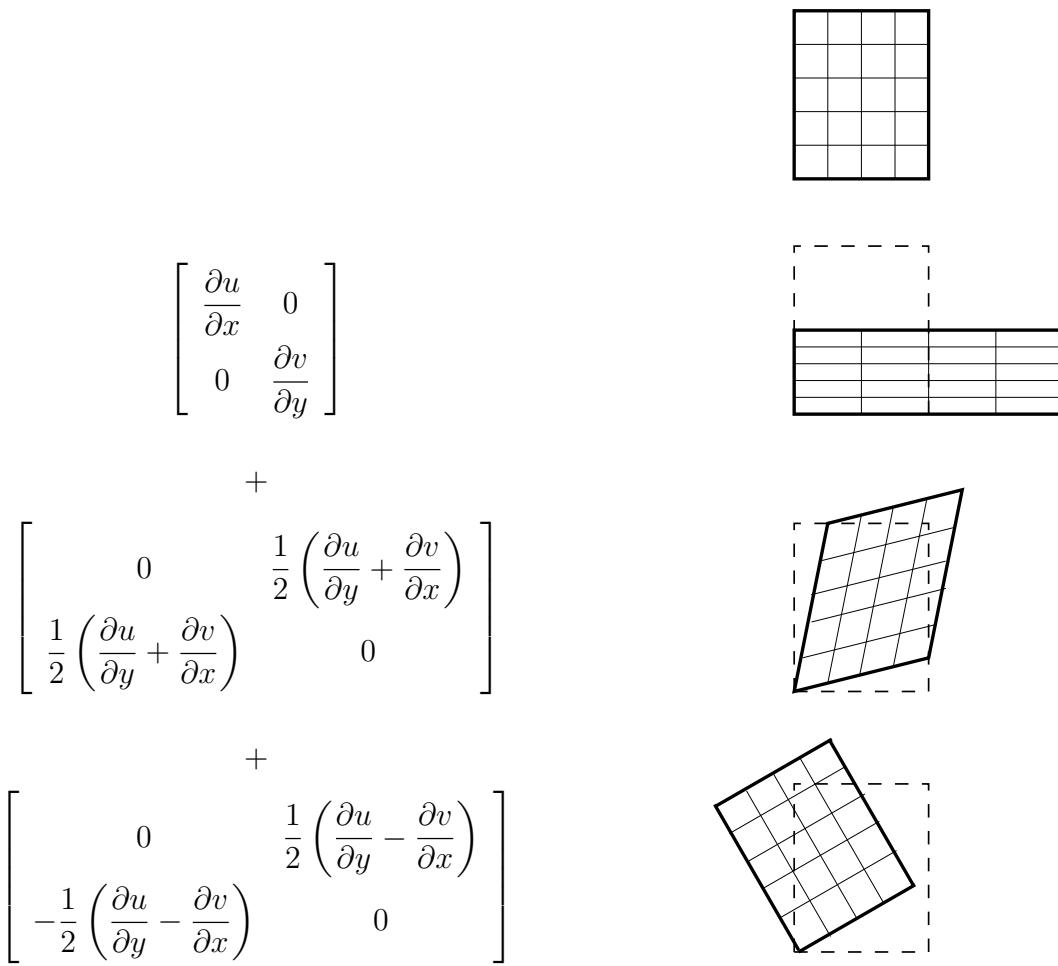


FIGURE 7.1 – Evolution infinitésimale d'un “cube” de fluide au cours du mouvement, par les différentes contributions du tenseur gradient de vitesses. Les deux premières parties constituent le tenseur vitesse de déformation qui est la partie symétrique, tandis que la troisième, partie antisymétrique représente une rotation pure.

Attention ! beaucoup de fluides de grande importance pratique ne sont pas newtoniens. Citons en vrac les pâtes et suspension de façon générale, la plupart des fluides alimentaires (crème, yaourt, ketchup), le sang, les polymères à l'état liquide ...

## 7.2 Equations de Navier-Stokes

Il nous est maintenant possible d'expliquer le terme visqueux dans toutes les équations présentées jusqu'alors. Nous nous cantonnerons au fluide incompressible. Ainsi l'équation locale (4.31) devient, en écrivant  $\operatorname{div} \bar{\sigma}_v$  à l'aide des formules d'analyse vectorielle rappelées en annexe B :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.9)$$

Cette équation, associée à la conservation de la masse

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7.10)$$

constitue les **équations de Navier-Stokes incompressible**.<sup>1</sup>

### 7.2.1 Adimensionnalisation

Dans tout écoulement, on peut trouver une longueur de référence : le diamètre d'un tuyau, la longueur d'une plaque, le diamètre d'une sphère, la dimension transverse moyenne (perpendiculaire à l'écoulement) d'un véhicule. De même, on peut trouver une vitesse de référence : vitesse incidente sur un obstacle, vitesse calculée à partir d'un débit.... Posons  $L$  cette longueur et  $V$  cette vitesse, et rapportons toutes les variables spatiales ainsi que le champ de vitesse respectivement à la longueur et la vitesse de référence (on notera les variables adimensionnelles avec une étoile) :

$$\begin{aligned} x &= Lx^* & y &= Ly^* & z &= Lz^* \\ u &= Vu^* & v &= Vv^* & w &= Vw^* \end{aligned}$$

On rapporte également le temps à un temps de référence  $T$  : ce peut être par exemple une période pour un écoulement oscillant ou un temps caractéristique de l'application d'une contrainte externe à un fluide. On pose

$$t = Tt^*$$

Concernant la pression, notons qu'elle intervient dans un gradient et on peut donc lui ajouter ou soustraire une constante  $p_0$  arbitraire (nous l'avons déjà vu lorsque nous avons soustrait la pression atmosphérique pour calculer les forces). Il est fréquent

1. Qui constitue le modèle théorique de base pour la plupart des écoulements. La plupart des écoulements compressibles peuvent être traités par les équations d'Euler, en négligeant donc le caractère visqueux du fluide. Les équations de NS compressibles sont utilisées dans un nombre de cas assez réduit. Notons par ailleurs que l'existence et l'unicité de solutions aux équations de NS constituent l'objet de l'un des dix problèmes proposés par la fondation Clay, récompensé par un million de dollars... ce qui n'empêche pas le chercheur et l'ingénieur d'utiliser ces équations au quotidien dans un large éventail d'applications. Il est intéressant de noter qu'il s'agit pourtant d'un problème de mécanique classique, qui n'a pas encore livré tous ses mystères.

par ailleurs que le mouvement résulte d'une différence de pression motrice  $\Delta p$  (aux bornes d'un tube par exemple), engendré par une pompe ou bien une hauteur de stockage. On notera donc dans le cas général

$$p^* = \frac{p - p_0}{\Delta p},$$

En remplaçant les variables originales par ces variables dans l'équation de Navier-Stokes (7.9), on obtient

$$\rho \frac{V}{T} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho \frac{V^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta p}{L} \mathbf{grad}^* p^* + \rho \mathbf{g} + \frac{\eta V}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*,$$

soit, en multipliant toute l'équation par  $L/V^2$ ,

$$\text{St} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\text{Eu} \mathbf{grad}^* p^* + \frac{1}{\text{Fr}^2 g} \mathbf{g} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \quad (7.11)$$

avec les nombres adimensionnels :

Reynolds	$\text{Re} = \frac{\rho L V}{\eta}$	$\frac{\text{Inertie du fluide}}{\text{Forces visqueuses}}$
Strouhal	$\text{St} = \frac{L}{V T}$	$\frac{\text{Temps caractéristique du mouvement du fluide}}{\text{Temps caractéristique de la sollicitation}}$
Euler	$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$	$\frac{\text{Pression statique}}{\text{Pression dynamique}}$
Froude	$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$	$\frac{\text{Inertie}}{\text{Poids}}$

Ces nombres adimensionnels sont très importants car leur calcul fournit déjà des informations très importantes sur l'écoulement, sans avoir à résoudre les équations de NS. De plus, lorsque l'un de ces nombres est très petit, on peut éventuellement négliger le terme qui lui est multiplié. Le plus important de tous est le nombre de Reynolds qui quantifie l'importance de l'inertie du fluide par rapport aux forces visqueuses. Les autres sont plus anecdotiques, et certains disparaissent par un choix des échelles choisies en accord avec la configuration étudiée.

Par exemple, dans certains cas, notamment les écoulements autour d'un obstacle, on prendra comme pression de référence  $\Delta p = \rho V^2$ , soit le double de la pression d'arrêt (voir le chapitre sur Bernoulli). Dans ce cas, le nombre d'Euler devient égal à 1 et disparaît donc.

Autre exemple important, lorsque le nombre de Reynolds est très petit, on voit en multipliant les deux membres de l'équation que le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  peut être négligé. C'est le domaine des écoulements rampants qui sera étudié au chapitre 8.

### 7.2.2 Classification des écoulements

Les écoulements se comportent de façon très différente selon la valeur du nombre de Reynolds.

- Pour des nombres de Reynolds très faibles, l'écoulement est dominé par les forces visqueuses. Visuellement, on observe un écoulement très “pénible”, que l'on imagine difficile à mettre en mouvement, et facile à arrêter. Ce type d'écoulement est le moins fréquent dans la nature, mais intervient par exemple dans des problèmes de lubrification, dans des suspensions de petites particules. On parle **d'écoulement de Stokes** ou **écoulement rampant**. Nous verrons que ce type d'écoulement est prévu par la réduction des équations de Navier-Stokes dans la limite  $\text{Re} \ll 1$ . Cette hypothèse permet de simplifier considérablement les équations de Navier-Stokes : le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  est négligeable et disparaît, ce qui rend les équations linéaires, et permet le calcul analytique de certains écoulements, ainsi que celui des forces hydrodynamiques. On trouve de tels écoulements dans la théorie des suspensions, les milieux poreux...
- Pour des Reynolds de l'ordre de l'unité ou de quelques dizaines, l'écoulement reste laminaire, mais se “complique”. Par exemples des recirculations apparaissent en aval des obstacles ou dans les singularités d'une tuyauterie (coudes, rétrécissements, ...).  
L'écoulement reste malgré tout stationnaire et laminaire sauf bien sûr s'il est sollicité de façon instationnaire. Pour des écoulements autour d'obstacles symétriques, on note une dissymétrisation amont-aval.  
Pour des obstacle profilés (type aile d'avion), les effets visqueux restent concentrés dans une fine couche proche de la paroi, dite couche limite laminaire. Cela permet de trouver des solutions analytiques approchées de l'écoulement et permet de calculer notamment les forces exercées sur l'obstacle.
- Pour des Reynolds encore supérieurs, des variations temporelles périodiques apparaissent dans le champ de vitesse.
- Pour des Reynolds très grands, l'écoulement est complètement déstabilisé , soit dans une certaine zone de l'espace (dans la couche limite et le sillage des obstacles), soit dans tout l'espace (dans un tube) et au champ de vitesses principal (observable macroscopiquement) se superposent des fluctuations aléatoires à plusieurs échelles : c'est la turbulence.

Nous traiterons donc ces problèmes séparément. Notons tout d'abord qu'un certain nombre de problèmes “classiques” peuvent se résoudre analytiquement, en raison du caractère unidirectionnel de l'écoulement et de la simplicité de la géométrie. Nous allons aborder certains de ces problèmes dans la section suivante.

### 7.2.3 Diffusion de quantité de mouvement et viscosité cinématique

Examinons l'équation dimensionnelle (7.9), supposons l'absence de pesanteur et de gradient de pression, et de plus que le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  disparaît (nous verrons que ce sera le cas pour des écoulements unidirectionnels). Il reste alors l'équation :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

On reconnaît l'équation de la chaleur avec un coefficient de diffusion égal à  $\eta/\rho$ .

On appelle **viscosité cinématique** la grandeur

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Elle est homogène à  $L^2 T^{-1}$  comme tout coefficient de diffusion.

Cela signifiera que la vitesse “diffuse” des zones où elle est forte vers les zones où elle est faible. C'est bien une réalité, bien que ce soit en toute rigueur la quantité de mouvement<sup>2</sup> qui a bien en partie un comportement diffusif. On peut s'en convaincre en examinant l'évolution du profil de vitesses dans les premiers instants de l'expérience de Couette : dans un premier temps, seules les parties hautes acquièrent une vitesse significative, puis le profil évolue vers un profil linéaire avec un temps caractéristique dont on pourrait mesurer qu'il est de l'ordre de  $h^2/\nu$ . Ce n'est pas sans rappeler l'établissement du profil de température dans un mur d'épaisseur  $e$ , sur une paroi duquel on a imposé un échelon de température, avec une constante de temps de l'ordre de  $e^2/a$ , où  $a$  est la diffusivité thermique.

On peut comprendre facilement pourquoi le coefficient de diffusion de quantité de mouvement est  $\eta/\rho$ , en cherchant le temps d'établissement du régime permanent dans l'expérience de Couette : la viscosité dynamique  $\eta$  mesure la force donc le transfert de transfert de quantité de mouvement entre deux couches voisines. Plus ce transfert est efficace plus le régime permanent sera atteint rapidement. Le temps de mise en régime permanent est donc d'autant plus faible que la viscosité  $\eta$  est élevée. Mais sous l'action de la force tangentielle exercée par sa voisine, le fluide tarde d'autant plus à se mettre en mouvement qu'il est inerte, donc que  $\rho$  est élevée. On conçoit par ailleurs aisément que ce temps augmente avec la profondeur du canal. On doit donc avoir  $\tau = \rho^a h^b / \eta^c$ , et une analyse dimensionnelle élémentaire montre que  $\tau = \rho h^2 / \eta$ .

L'origine microscopique de ce phénomène a été mentionnée à la section 3.4.3 et tient au mouvement thermique des atomes ou molécules composant le fluide, également

2. Cela revient au même en incompressible mais une seule une grandeur extensive peut en principe diffuser.

responsable des transferts thermiques et de matière diffusif. L'analogie avec la thermique n'est donc pas fortuite, et est liée à l'origine microscopique commune des trois types de transfert. Il faut pourtant se garder de conclure hâtivement sur le caractère purement diffusif des transferts de quantité de mouvement. Ce n'est vrai que dans deux cas :

- les écoulements unidirectionnels (voir section 7.4)
- les écoulements rampants, c.a.d. à très faible Reynolds (voir chapitre 8)

## 7.3 Deux écoulements visqueux unidirectionnels

### 7.3.1 Ecoulement de Couette

Nous sommes désormais familiers avec cet écoulement. Essayons de retrouver les résultats précédents d'après les équations de Navier-Stokes.

Notons tout d'abord que le champ des vitesses est orienté suivant  $x$ . On a donc  $\mathbf{v} = [u(x, y, z), 0, 0]$ . L'équation de conservation de la masse fournit alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Donc  $u$  ne dépend que de  $y$  et  $z$ . On suppose l'écoulement d'extension infinie suivant  $y$  et par conséquent  $u$  est indépendant de  $y$ . Le champ de vitesse s'écrit donc finalement  $\mathbf{v} = (u(z), 0, 0)$ .

Remarquons alors que le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  est identiquement nul. En effet le produit scalaire formel  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  se réduit à  $u \frac{\partial}{\partial x}$  et la vitesse ne dépend pas de  $x$ . Ce terme disparaît donc à priori tant que l'écoulement reste dans la direction  $x$ , sans hypothèse sur le nombre de Reynolds. L'écoulement étant stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit donc à :

$$0 = -\mathbf{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (7.12)$$

soit en projection sur les 3 axes :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (7.13)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.14)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (7.15)$$

où nous avons écrit un  $d$  droit dans la première équation, puisque  $u$  ne dépend que de  $z$ . La deuxième équation nous indique que  $p$  ne dépend que de  $x$  et  $z$ . La troisième équation s'intègre simplement en

$$p(x, z) = -\rho g z + K(x)$$

qui indique que la pression varie comme en hydrostatique suivant la direction de la pesanteur, indépendamment de l'écoulement. Par ailleurs, aucun gradient de pression parallèlement aux plaques n'est appliqué à l'écoulement, et la pression est donc indépendante de  $x$ ,<sup>3</sup> donc  $K(x) = K$ . La première équation s'écrit donc

$$\eta \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (7.16)$$

et on obtient donc, avec les conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $u(h) = U_0$ , un profil de vitesses linéaire :

$$u(z) = U_0 \frac{z}{h} \quad (7.17)$$

### 7.3.2 Ecoulement de Poiseuille

#### 7.3.2.1 Calcul de l'écoulement

Dans cet écoulement, le moteur de l'écoulement n'est plus un cisaillement (donc la force visqueuse), mais un gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. On peut par exemple imposer une surpression à l'entrée avec une pompe ou un château d'eau, ou une dépression à la sortie par une aspiration. Dans tous les cas on notera  $p_e$  et  $p_s$  les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie de la conduite de longueur  $L$ .

Nous traiterons directement le cas d'un tuyau cylindrique d'axe  $z$ . On note  $r$  et  $\theta$  les directions radiales et orthoradielles. Le champ de vitesse est dirigée uniquement suivant  $z$  donc  $v_\theta = 0$  et  $v_r = 0$  et donc  $\mathbf{v} = [0, 0, v_z(r, \theta, z)]$ .

L'équation de conservation de la masse  $\text{div } \mathbf{v}$  fournit alors

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

---

3. Les écoulements de Couette réels sont réalisés dans des canaux annulaires. Dans ce cas on conçoit aisément que la pression ne puisse pas varier le long de l'écoulement, puisque ce dernier se referme sur lui-même...

On suppose de plus que l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe du tube et donc  $v_z$  ne dépend finalement que de  $r$ . Il est facile de voir que comme pour l'écoulement de Couette, le terme  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  est identiquement nul, et en négligeant de plus la pesanteur, les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (7.18)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (7.19)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (7.20)$$

La pression ne dépend donc que de  $z$ , et la troisième équation s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Dans cette équation le membre de gauche est une fonction de  $z$  seulement, et celui de droite est une fonction de  $r$  seulement. Leur égalité  $\forall r, \forall z$  indique donc que les deux termes sont indépendants de  $r$  et de  $z$ , et sont donc égaux à une constante  $A$ . L'équation (7.16) revient donc à un système de deux équations différentielles :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = A, \quad (7.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{A}{\eta}. \quad (7.22)$$

La pression varie donc linéairement le long de l'écoulement, et avec les conditions aux limites en pression à l'entrée et à la sortie, on obtient la constante  $A$  :

$$A = \frac{p_s - p_e}{L} \quad (7.23)$$

Une première intégration de l'équation (7.22) fournit alors

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{A}{2\eta} r + \frac{B}{r} \quad (7.24)$$

la constante d'intégration  $B$  est forcément nulle sans quoi la vitesse deviendrait infinie sur l'axe du tube. En utilisant ensuite la condition d'adhérence sur la paroi du tube  $v_z(R) = 0$ , l'intégration de (7.24) fournit :

$$v_z(r) = \frac{A}{4\eta} (r^2 - R^2)$$

soit en explicitant la constante  $A$  grâce à (7.23) :

$$v_z(r) = \frac{p_e - p_s}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (7.25)$$

On voit donc que le profil de vitesses est parabolique, maximum sur l'axe, et que  $v_z > 0$  si  $p_e > p_s$ . L'écoulement est donc orienté des fortes pressions vers les faibles.

### 7.3.2.2 Calcul du débit. Perte de charge en ligne

On peut en déduire le débit à travers le tube en intégrant le profil de vitesse sur la section droite :

$$Q = \int_0^R v_z(r) 2\pi r \, dr = \frac{p_e - p_s}{4\eta L} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr$$

L'intégrale se calcule facilement avec le changement de variable  $y = (R^2 - r^2)/R^2$  :

$$\int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr = \int_1^0 R^2 y \left( -\frac{1}{2} R^2 \right) dy = \frac{R^4}{4}$$

On obtient donc finalement le débit, en fonction du rayon ou de la section du tube :

$$Q = \frac{(p_e - p_s) \pi R^4}{8\eta L} = \frac{(p_e - p_s) S^2}{8\pi\eta L} \quad (7.26)$$

On peut en déduire la vitesse moyenne :

$$v_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(p_e - p_s) R^2}{8\eta L} \quad (7.27)$$

Pour une vitesse moyenne donnée  $v_m$ , on peut donc en déduire la chute de pression le long de l'écoulement, qui est aussi la perte de charge en ligne pour un tuyau horizontal de section constante :

$$p_e - p_s = \frac{8\eta Lv_m}{R^2}$$

En ramenant cette chute de pression à la pression dynamique  $1/2\rho v_m^2$ , et en introduisant le nombre de Reynolds  $\text{Re} = \rho v_m D / \eta$  on obtient :

$$\frac{p_e - p_s}{\frac{1}{2}\rho v_m^2} = 16 \frac{\eta L}{\rho R^2 v_m} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D}$$

On voit donc, comme annoncé dans la section 6.2, que la perte de charge en ligne est donnée par :

$$\Delta p = f \frac{1}{2} \rho v_m^2 \frac{L}{D}$$

avec  $f$  coefficient de frottement =  $64/\text{Re}$ . Ce dernier résultat est valable tant que l'hypothèse de mouvement seulement suivant  $z$  est vérifiée, autrement dit que le mouvement est laminaire. Dans la pratique, cela est vérifié pour  $\text{Re} < 2000$ , valeur au-delà de laquelle des fluctuations turbulentes apparaissent.

### 7.3.2.3 Application aux milieux poreux

La seconde expression du débit dans (7.26) est intéressante et permet de répondre à la question suivante : pour un même gradient de pression imposé, vaut-il mieux utiliser une conduite de section  $S$  ou 2 conduites de section  $S/2$  (de façon à garder une section totale constante) ? La réponse est dans l'exposant 2 de la surface  $S$  : dans le premier cas on trouve un débit total  $Q_1$  donné par (7.26), dans le second un débit total  $Q_2 = Q_1/4 + Q_1/4 = Q_1/2$ , donc deux fois inférieur. Si on prend  $n$  tuyaux de section  $S/n$ , on obtiendra un débit  $Q_n = Q_1/n^2 + Q_1/n^2 \cdots + Q_1/n^2 = Q_1/n$ . Il est donc plus difficile de faire couler un fluide dans plusieurs petits tuyaux que dans un gros, à section totale constante.

Calculons la vitesse moyenne  $v_m = Q_n/S$  pour  $n$  tuyaux de section  $S_n = S/n$  à partir de (7.26) :

$$v_m = \frac{Q_n}{S} = \frac{Q_1}{nS} = \frac{(p_e - p_s) S}{8\pi\eta L} \frac{1}{n} = -\frac{S_n/8\pi}{\eta} \frac{(p_s - p_e)}{L} \quad (7.28)$$

La dernière expression est à la base de la loi de Darcy, qui décrit de façon simplifiée l'écoulement dans le milieux poreux, qui à l'échelle microscopique peut être vu comme un empilement de petits tuyaux de sections individuelles  $S_n$ . Dans ces conditions  $(p_s - p_e)/L$  est le gradient de pression local, et la loi de Darcy s'écrit :

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\eta} \mathbf{grad} p \quad (7.29)$$

En comparant cette expression à (7.28), on voit que  $k$  correspond à  $S_n/8\pi$  et est homogène à une surface. Cette grandeur s'appelle la perméabilité du milieu poreux.

## 7.4 Généralisation : écoulements unidirectionnels

### 7.4.1 Mise en équation

Prenons le cas général d'un écoulement unidirectionnel, appelons  $x$  l'axe de l'écoulement,  $y$  l'axe perpendiculaire au plan formé par  $x$  et la pesanteur et  $z$  de façon à former un trièdre direct. L'équation de conservation de la masse fournit alors  $\partial u/\partial x = 0$  et  $u$  ne dépend donc que de  $y$  et  $z$ .

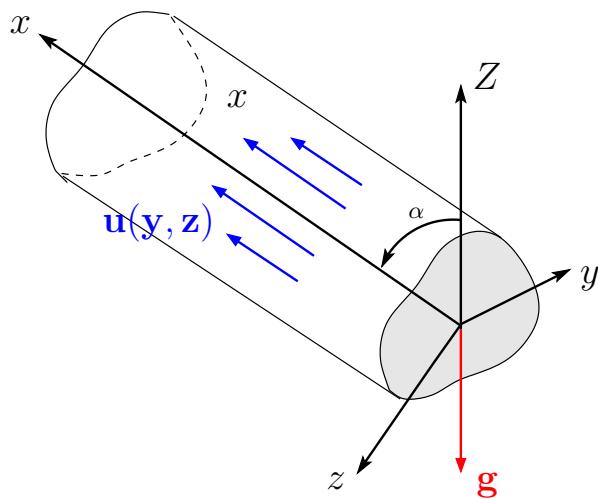


FIGURE 7.2 – Schéma d'un écoulement unidirectionnel orienté de façon quelconque.

Il est facile de voir que, dans ces conditions, comme pour les écoulements de Couette et de Poiseuille, le terme en  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  de l'équation de Navier-Stokes est identiquement nul, et l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7.30)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.31)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (7.32)$$

où,  $g_x$  et  $g_z$  sont les projections du champ de pesanteur  $\mathbf{g}$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On remarque, d'après les équations suivant  $y$  et  $z$ , que **dans les deux directions perpendiculaires au mouvement, le champ de pression varie de façon hydrostatique**. Dans ces directions, tout se passe comme si le fluide était immobile.

### 7.4.2 Cas stationnaire. Perte de charge

Maintenant, simplifions en supposant un écoulement stationnaire, et notons  $\alpha$  l'angle que fait la direction de l'écoulement avec un axe  $Z$  orienté vers le haut. La première équation devient<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho g \cos \alpha + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &= -\rho g \frac{\partial Z}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g Z) = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (7.33)$$

De même que  $u$ , le membre de droite est indépendant de  $x$ . Le membre de gauche l'est donc forcément aussi, et c'est donc une constante  $K$  par rapport à  $x$ , ce qui implique que  $p + \rho g Z$  est une fonction linéaire de  $x$ .

Si le membre de droite de l'équation (7.33) était nul (viscosité nulle donc fluide parfait) on retrouverait que  $p + \rho g Z$  est constante le long de l'écoulement, ce que prédit Bernoulli pour un écoulement dans une conduite de section constante. En fait le terme de droite est strictement négatif car le profil des vitesses dans une conduite est toujours convexe, à cause de la condition d'adhérence aux parois (on s'en convaincra d'après la figure 2.8). Le résultat ci-dessus prédit donc que  $p + \rho g Z$  diminue linéairement le long de l'écoulement, ce qui est bien le résultat obtenu en appliquant la formule de Bernoulli généralisée (6.1) à une conduite de section constante. On retrouve donc bien les résultats de la section 6.1 sur les pertes de charge.

### 7.4.3 Cas instationnaire. Diffusion de quantité de mouvement

Maintenant revenons sur un écoulement instationnaire. L'équation (7.33) se généralise en

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g Z) = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.34)$$

et selon le même raisonnement, le membre de droite n'est pas fonction de  $x$ , et la conclusion  $\partial(p + \rho g Z)/\partial x = K$  reste valable. On voit que l'équation (7.34) est donc du type équation de la chaleur avec terme source en 2D dans le plan  $(y, z)$ . Le coefficient de diffusion est  $\eta/\rho = \nu$ . On retrouve le fait que les frottements visqueux, sont, tout au moins en partie, des transferts diffusifs de quantité de mouvement avec une diffusivité qui n'est autre que la viscosité cinématique  $\nu$ .

Cela reste bien sûr vrai en régime stationnaire, et on pourra vérifier que les problèmes de Couette (stationnaire ou instationnaire), de Poiseuille, ou de ruissellement sur

---

4. On se convaincra que  $\partial Z/\partial x = \cos \alpha$  en faisant un dessin...

un plan incliné constituent des problèmes de diffusion formellement semblables à des problèmes de diffusion de chaleur ou de matière. Il faut y voir plus qu'une coïncidence : cela traduit de façon profonde le fait que les trois phénomènes de transport ont la même origine microscopique.



# Chapitre 8

## Ecoulements rampants

### 8.1 Equations

En prenant la limite  $Re \ll 1$  dans l'équation (7.11), le terme  $(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^*$  devient négligeable, et on obtient :

$$\text{Re St} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -\text{Re Eu} \mathbf{grad}^* p^* + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \frac{\mathbf{g}}{g} + \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \quad (8.1)$$

Dans la plupart des problèmes, l'écoulement est permanent et le terme instationnaire disparaît. Si l'écoulement n'est pas permanent, par exemple si une sollicitation extérieure est périodique (plaqué vibrante ou glissante périodiquement), on peut quand même négliger le terme instationnaire à condition que le produit  $\text{Re St}$  soit très petit devant 1, soit  $\text{St} \ll 1/\text{Re}$ , ou bien  $T \gg L^2/\nu$ . Pour que le terme instationnaire soit négligeable, le temps caractéristique  $T$  de la sollicitation doit donc être très supérieur au temps de relaxation visqueux.

On peut imaginer par exemple un écoulement de Couette de hauteur  $h$ , où la plaque supérieure oscille au lieu de se mouvoir à vitesse constante, et on prend donc  $L = h$ . Si la période d'oscillation est très grande devant le temps de diffusion de la quantité de mouvement  $h^2/\nu$ , le régime permanent a le temps de s'établir en temps réel en réponse aux oscillations lentes de la plaque, et il s'agit bien approximativement d'un problème stationnaire. Dans le cas inverse, la plaque change de sens avant que le régime permanent n'ait eu le temps de s'établir. Il s'agit alors d'un vrai problème transitoire.

Par ailleurs, si besoin est, la pesanteur peut être intégrée au terme de pression en posant  $\tilde{p} = p + \rho g z$ . De façon générale, sous forme dimensionnelle, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (8.2)$$

appelée *équation de Stokes*, dans laquelle on néglige ou non le terme instationnaire.

Cette équation est beaucoup plus simple que l'équation originale, car le terme non-linéaire  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  a disparu. Les équations aux dérivées partielles linéaires possèdent de nombreuses propriétés mathématiques importantes, et un grand éventail d'outils mathématiques est utilisable pour leur résolution.

## 8.2 Propriétés des écoulements rampants

La linéarité de l'équation de Stokes entraîne un certain nombre de propriétés intéressantes, dont on trouvera la démonstration par exemple dans les livres de Chassaing (2000) ou Guyon et al. (2001).

### 8.2.1 Réversibilité temporelle

Si le fluide est amené d'un état A à un état B en lui appliquant une sollicitation extérieure (par exemple en mettant en mouvement une hélice, une pale ...), il peut être ramené de l'état B à l'état A en inversant la sollicitation.

Une expérience spectaculaire démontrant cette propriété est présentée Fig. 8.1. Un fluide très visqueux remplit l'espace entre deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur pouvant être mis en rotation à l'aide d'une manivelle. On introduit une goutte de colorant, et on effectue un certain nombre de tours de manivelle. La goutte est déplacée par le mouvement du fluide et forme une trace torique. Si on tourne la manivelle exactement du même nombre de tours dans l'autre sens, la goutte revient dans sa forme initiale, à peine déformée.<sup>1</sup> Il va de soi que cela n'est possible que si le mouvement de rotation est très lent pour assurer un Reynolds très inférieur à 1, dans la pratique de l'ordre de 1.

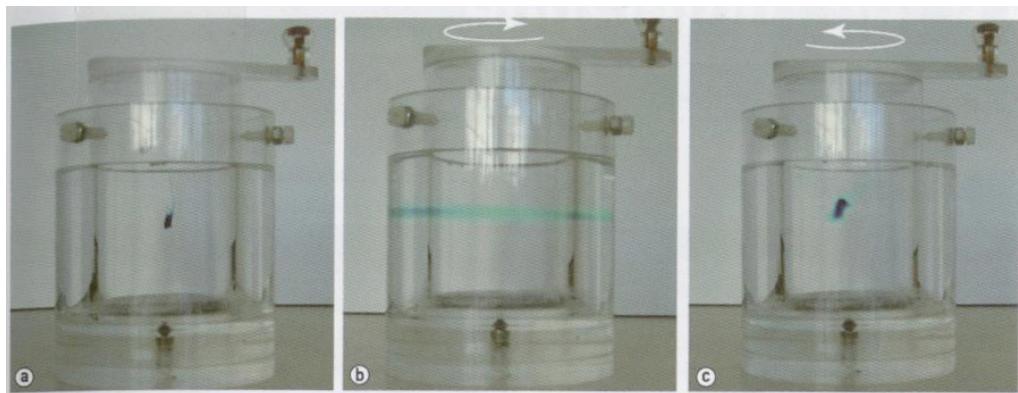


FIGURE 8.1 – Mise en évidence de la réversibilité temporelle des écoulements rampants (d'après (Guyon, Hulin, and Petit, 2001))

1. la diffusion moléculaire l'a quand même un peu étalée...

### 8.2.2 Réversibilité spatiale

Cette propriété peut être illustrée facilement en examinant l'écoulement autour d'un cylindre (Fig. 3.6). Il apparaît que pour le Reynolds le plus faible, l'examen des lignes de courant ne permet pas de distinguer l'amont de l'aval. L'écoulement est symétrique. On voit par contre que cela n'est plus vrai pour des Reynolds notablement supérieurs à 1.

On retrouve la même constatation pour un écoulement dans un élargissement brusque (Fig. 8.2). Pour des Reynolds faibles (figure de gauche), on pourrait interchanger l'entrée et la sortie et retrouver les mêmes lignes de courant. Pour des Reynolds bien supérieurs à 1 (figure de droite), ce n'est plus vrai, les recirculations n'auraient pas la même forme.

Enfin, la figure 8.3 montre les lignes de courant de l'écoulement dans un coude. A faible Reynolds, il est impossible de distinguer l'entrée de la sortie du coude. L'écoulement est réversible. En revanche pour des Reynolds plus grands, il apparaît une recirculation dans la branche aval du coude, dont la taille augmente avec le Reynolds. Cette recirculation, à l'instar de l'élargissement brusque, entraîne une perte de charge singulière.

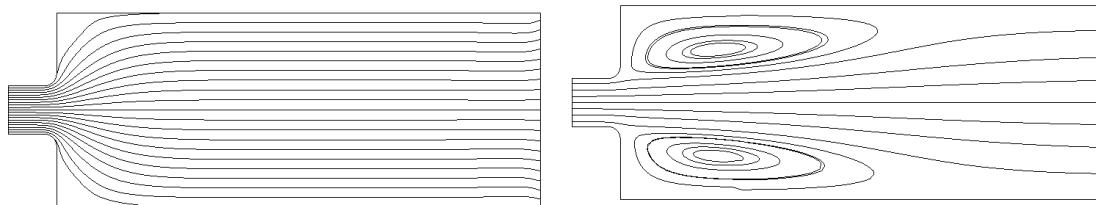


FIGURE 8.2 – Lignes de courant de l'écoulement dans un élargissement brusque simulé par COMSOL. A gauche,  $Re = 2$ , à droite  $Re = \approx 60$ . L'écoulement de gauche est spatialement réversible et seul ce dernier peut être considéré comme un écoulement rampant.

## 8.3 Equation de la vorticité

On définit la vorticité par

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (8.3)$$

C'est une mesure locale de la vitesse angulaire du fluide. En prenant le rotationnel de l'équation (8.2), les gradients disparaissent et on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (8.4)$$

Dans le cas d'un écoulement rampant, les composantes de la vorticité vérifient donc une équation de diffusion, le coefficient de diffusion étant la viscosité cinématique  $\nu$ .

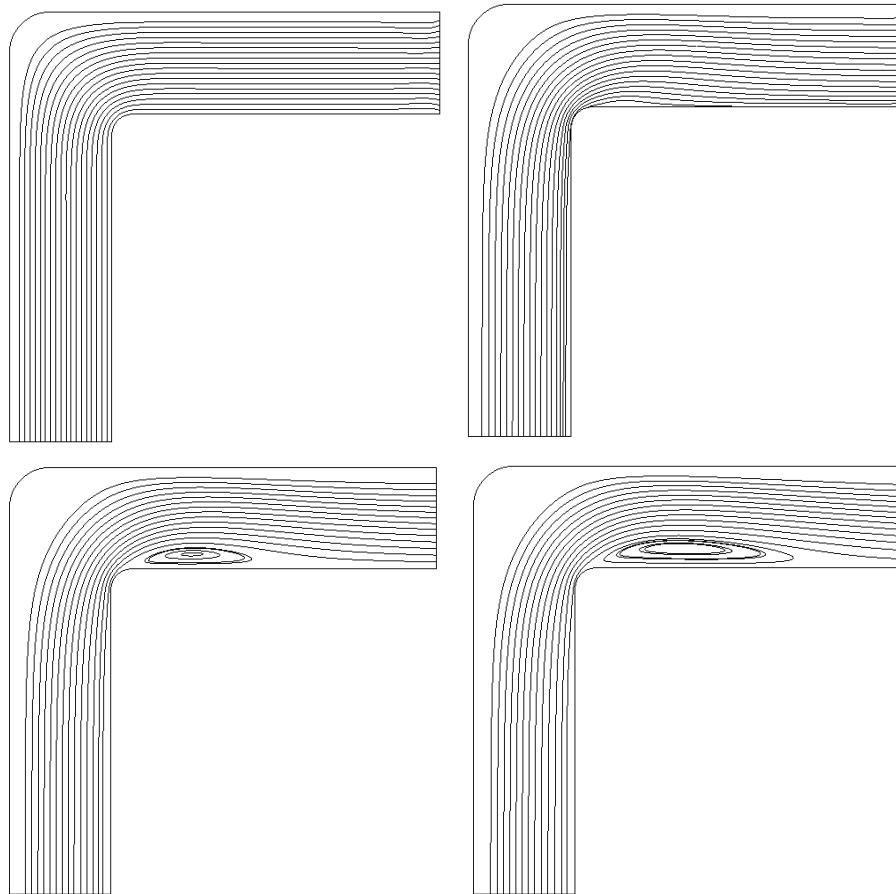


FIGURE 8.3 – Lignes de courant de l’écoulement dans un coude simulé par COM-SOL. De haut en bas et de gauche à droite,  $\text{Re} = 1, 100, 200, 300$ .

On retrouve un résultat obtenu précédemment (sections 7.2.3 et 7.4.3). Ici, cela est vrai dans n’importe quelle géométrie d’écoulement, pourvu que le Reynolds soit faible.

La vorticité est en général créée par l’adhérence du fluide aux parois solides, et, dans le cas des écoulements rampants, elle diffuse dans l’ensemble du fluide. Dans le cas général, l’équation de la vorticité que l’on peut tirer de l’équation de Navier-Stokes complète comporte des termes en plus des termes diffusifs, qui traduisent des étirements et replisements des tourbillons, liés à l’apparition de la turbulence. On retiendra donc que l’approximation d’écoulement rampant est totalement incompatible avec le phénomène de turbulence.

## 8.4 Applications

### 8.4.1 Force sur un obstacle

Le calcul des forces exercées par un écoulement rampant sur un obstacle (qu'il soit solide, liquide ou gazeux), est facilité par la linéarité de l'équation de Stokes. On peut montrer très généralement que le module de la force exercée sur un corps de forme quelconque est toujours de la forme<sup>2</sup> :

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\eta LV \quad (8.5)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du corps,  $V$  le module de sa vitesse par rapport au fluide, et  $\mathbf{C}$  un vecteur Guyon et al. (2001). On retiendra par exemple les résultats importants suivants (démonstration dans Guyon et al. (2001); Chassaing (2000)) :

La force de trainée exercée par un écoulement rampant est :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta R\mathbf{v} \quad (8.6)$$

sur une particule solide sphérique, et

$$\mathbf{F}_D = -4\pi\eta R\mathbf{v} \quad (8.7)$$

sur une bulle sphérique.

La différence entre les deux résultats tient aux conditions frontière différente sur un corps solide et sur une bulle : le fluide adhère à la particule solide tandis qu'il glisse quasi-librement sur la paroi de la bulle.

Plus généralement, on montre que la force exercée sur une particule sphérique constituée par un fluide de viscosité  $\eta_p$  s'écrit :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta R\mathbf{v} \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{\eta}{\eta_p}}{1 + \frac{\eta}{\eta_p}} \quad (8.8)$$

---

2. La force n'est pas forcément colinéaire à la vitesse relative du corps par rapport au solide. Elle peut comporter une composante perpendiculaire (portance) en l'absence de symétrie ou si la particule tourne sur elle-même. On trouvera un traitement détaillé de ces problèmes dans Guyon et al. (2001)

Ce résultat inclut les deux précédent, respectivement pour  $\eta_p \rightarrow 0$  (bulle) et  $\eta_p \rightarrow \infty$  (particule solide), et l'étend aux gouttes en suspension dans un autre liquide (émulsions).

Ces expressions permettent, en les équilibrant avec la poussée d'Archimède et le poids, de calculer la vitesse terminale de chute d'une particule plus lourde que le fluide, ou ascensionnelle d'une particule plus légère, notamment une bulle. La mesure de ces vitesses est encore souvent utilisée pour mesurer la viscosité d'un fluide, notamment lorsque ce dernier est "difficilement accessible" (sous haute pression par exemple).

On trouvera des extensions de ces formules, généralisées au voisinage d'une paroi solide ou d'une autre sphère dans Guyon et al. (2001).

### 8.4.2 Rhéologie des suspensions

Une suspension est un fluide constitué par une phase continue (liquide ou gazeuse) dans laquelle baignent des particules (liquide ou solide ou bulles) en grand nombre. Par exemple, les émulsions sont des suspensions liquide-liquide (lait, vinaigrette), les aérosols sont des suspensions gaz-liquide ou gaz-solide (brouillards, nuages, fumées). Les liquides à bulles en sont également un exemple. Les suspensions liquide-solide (boues) sont appelées simplement "suspensions".

La rhéologie globale des ces milieux diphasiques, c'est à dire la déformation qu'elles subissent sous l'action d'une contrainte, est liée à la force exercée par le fluide sur une particule, à la concentration en particules, et à la taille et la forme de ces dernières.

Il y a normalement une grande distinction entre des particules très petites agitées par un mouvement brownien (sensibles à l'agitation thermique des molécules), et des particules plus grandes sensibles uniquement aux effets hydrodynamiques. Toutefois, pour des suspensions suffisamment diluées de particules sphériques, si l'écoulement du fluide autour des particules est rampant, Einstein a montré que :

Une suspension de concentration volumique  $\Phi$  (volume des sphères sur volume total) dans un fluide de viscosité  $\eta_0$  est assimilable à un fluide homogène de viscosité équivalente :

$$\eta = \eta_0 (1 + 2.5\Phi)$$

indépendamment du caractère brownien ou non des particules.

Cette expression fonctionne jusqu'à des concentrations de l'ordre de quelques %. Cela signifie qu'une suspension est d'autant moins visqueuse qu'elle est moins concentrée.

C'est pourquoi les expériences de sédimentation dans un tube conduisent à la formation de "fronts de sédimentation" (Fig. 8.4). Les particules tombent plus vite dans

les zones où elles sont peu concentrées puisque la viscosité y est plus faible. Elles rattrapent donc les particules du bas qui sédimentent moins vite, et on assiste à une concentration en particules passant brusquement d'une valeur quasi-nulle en haut du tube à une valeur élevée en bas. Ce phénomène est similaire aux ondes de chocs dans les fluides compressibles et aux formations de bouchons dans les problèmes de traffic routier.

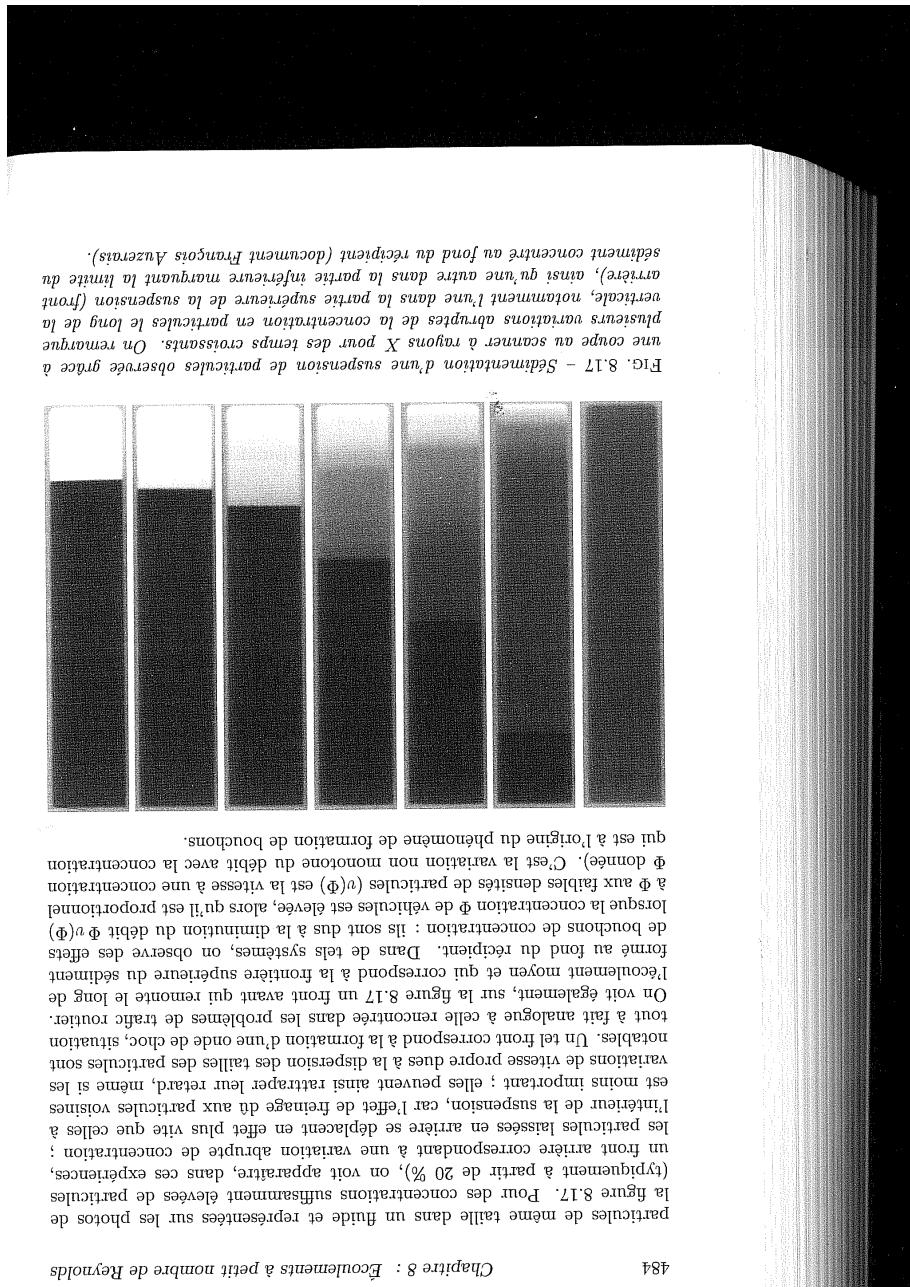


FIGURE 8.4 – Evolution temporelle du profil de concentration dans une expérience de sédimentation de particules (d'après Guyon et al. (2001))

### 8.4.3 Micro-fluidique

La micro-fluidique concerne les écoulements dans des canaux microscopique, généralement gravés avec les mêmes technologies que les puces de circuits intégrés. Un écoulement d'eau dans un canal de largeur  $100 \mu\text{m}$  aura par exemple un Reynolds de 1 pour une vitesse de 1 cm/s. On peut donc obtenir facilement des écoulements laminaires, voire rampants dans ce type de géométrie microscopique, ce qui permet d'éviter la turbulence et de pouvoir y effectuer des mesures précises, les conditions d'écoulement étant bien contrôlées et aisément calculables.

# Chapitre 9

## Couche limite

### 9.1 Présentation générale.

On s'intéresse dans cette partie à des écoulements pour lesquels  $\text{Re} \gg 1$ . Il s'agit donc en quelque sorte du cas complémentaire du chapitre précédent, mais essentiellement restreinte aux écoulements externes, pour lesquels un écoulement unidirectionnel doit contourner un obstacle, en général solide. Expérimentalement, on constate que si la courbure de l'obstacle est modérée, les lignes de courant suivent la surface (Fig 9.1), et les variations spatiales de vitesse interviennent dans la direction normale à la surface, et sont concentrées dans une couche de faible épaisseur.

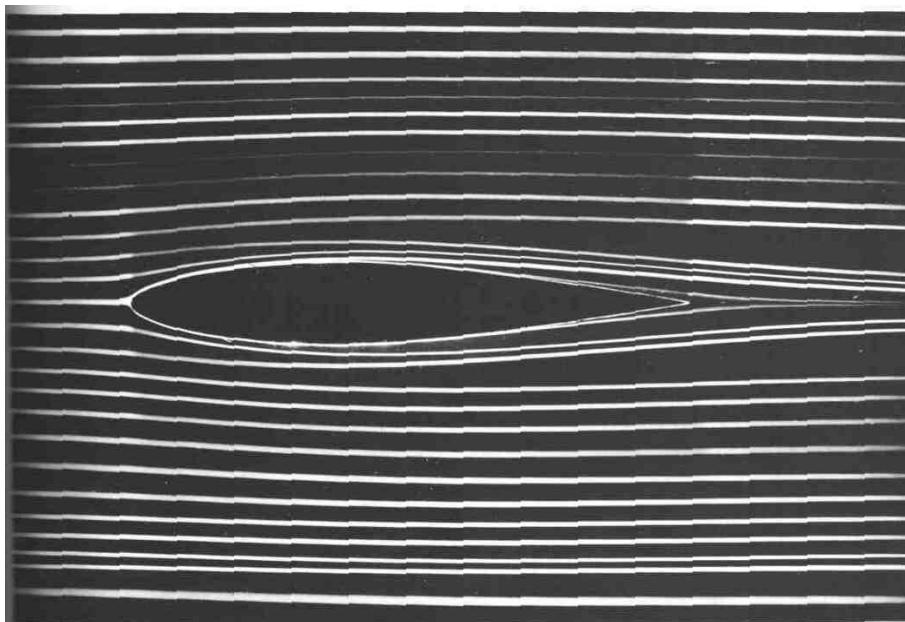


FIGURE 9.1 – Ecoulement autour d'un profil d'aile non décollé (Copyright H. Werlé - ONERA)

C'est la **couche limite**. La mise en équations de ce type d'écoulement est simpli-

fiée, car ce dernier est localement unidirectionnel, et la concentration des gradients de vitesse dans une fine couche permet d'envisager des approximations. Ce type de méthode a été initiée par Prandtl et prolongée par son élève Blasius en 1908. L'étude des couches limites permet de calculer relativement simplement la force de trainée d'origine visqueuse exercée par l'obstacle (rappel : si on connaît le champ de vitesses, on peut en déduire le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien, Sec. 7.1). C'est d'ailleurs l'origine de l'intérêt pour ces configurations, contemporaine aux débuts de l'aéronautique.

Cette force de trainée visqueuse est prédominante lorsque le corps est bien profilé, par exemple pour des ailes d'avion ou des hélices. En revanche pour des corps dits "épais" ou des profils minces avec un angle d'incidence trop élevé, les lignes de courant se séparent de la surface du corps avant le point aval (on dit que l'écoulement "décolle", voir Fig. 9.2) et un sillage de forte épaisseur se forme en aval, dans lequel la pression est très faible. Cette chute de pression conduit à une brusque augmentation de la force de trainée totale. La théorie de la couche limite n'est plus valable dans cette zone, mais elle permet de déterminer les conditions de décollement.

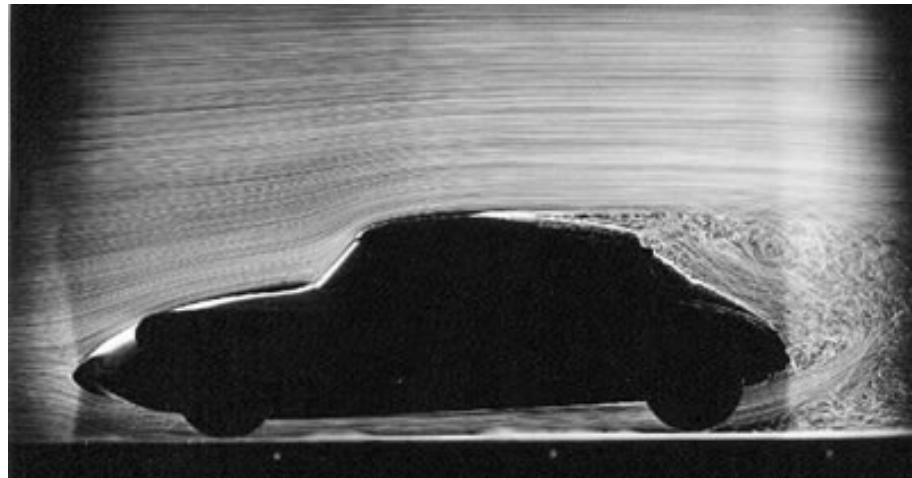


FIGURE 9.2 – Ecoulement autour d'une DS Citroën (Copyright H. Werlé - ONERA)

On voit donc l'intérêt fondamental de ce chapitre : le calcul de la trainée sur un corps, problème fondamental s'il en est, ne serait-ce que parce que la puissance de cette force est essentiellement celle que l'on compense en brûlant du carburant<sup>1</sup>, que ce soit le sucre pour le coureur cycliste ou l'essence d'une automobile.

---

1. L'énergie fournie par le carburant compense également les frottements au niveau des pneus, appelée trainée de roulement. Son amplitude est généralement considérée proportionnelle au poids, le facteur de proportionnalité variant inversement avec la qualité et de l'état des pneus (typiquement entre 1/100 et 1/1000...)

## 9.2 Etude “sans équations”.

### 9.2.1 Observations expérimentales.

Observons l’écoulement incident à une vitesse infinie amont  $U$  arrivant parallèlement à une plaque plane d’épaisseur n’égaleable au bord d’attaque (Fig. 9.3). La mesure du champ de vitesses au-dessus de la plaque montre que la vitesse vaut  $U$  dans presque tout l’écoulement (zone bleue), sauf dans une zone d’épaisseur faible s’élargissant progressivement lorsque l’on s’éloigne du bord d’attaque. C’est la couche limite. On sait que la vitesse est nulle sur la surface de la plaque, et on comprend donc que la vitesse passe de 0 à  $U$  lorsque l’on se déplace dans cette fine couche perpendiculairement à la plaque. *La couche limite est donc le lieu où sont concentrés les gradients de vitesse près d’une paroi solide.*

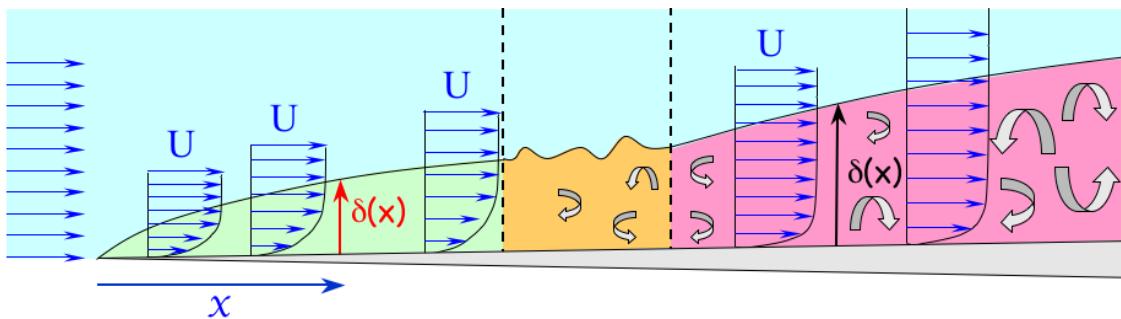


FIGURE 9.3 – Schématisation d’une couche limite

On peut constater (avec les moyens expérimentaux nécessaires) que cette couche limite n’a ni le même aspect, ni la même évolution selon la distance au bord d’attaque. Dans la zone proche de ce dernier, l’écoulement est laminaire, la couche limite augmente en épaisseur à mesure que l’on s’en éloigne, mais assez lentement. Après une zone (orange) de transition dans laquelle l’écoulement est instable spatialement et temporellement, on trouve une couche limite turbulente, dont l’épaisseur augmente plus rapidement avec la distance au bord d’attaque.

### 9.2.2 Analyse dimensionnelle.

Elle est intéressante dans ce problème car la seule longueur caractéristique du problème est  $x$  distance au bord d’attaque.

#### 9.2.2.1 Localisation de la transition laminaire-turbulent

On peut commencer par chercher à quelle distance  $x_T$  s’effectue la transition. Les paramètres du problèmes sont  $x_T$ ,  $U$ ,  $\eta$  la viscosité du fluide et  $\rho$  sa densité. La

méthode de  $\Pi - Buckingham$  montre que l'on ne peut former qu'un nombre adimensionnel avec ce jeu de variables, qui n'est autre que le Reynolds de transition  $Re_T = \rho U x_T / \eta$ . La transition s'effectue donc pour :

$$Re_T = \frac{\rho U x_T}{\eta} = C^{\text{te}} \quad (9.1)$$

Cette constante vaut  $3 \times 10^6$  pour une plaque très propre et dont l'état de surface a fait l'objet d'un soin particulier. Dans le cas inverse, l'expérience montre que la transition est observée pour un Reynolds de l'ordre de  $5 \times 10^5$ .

L'équation ci-dessus permet donc, pour un fluide donné et une vitesse incidente donnée, de déduire l'abscisse de la transition laminaire-turbulent. Si celle-ci est très courte, on considérera que l'écoulement est turbulent sur la plaque

### 9.2.2.2 Epaisseur de la couche limite

Les variables sont  $\delta$  épaisseur,  $x$  abscisse, et à nouveau  $\eta$ ,  $\rho$  et  $U$ . Le théorème de  $\Pi - Buckingham$  montre alors que :

$$\frac{\delta}{x} = f \left( \frac{\rho U x}{\mu} \right) = f(Re_x)$$

où  $Re_x$  est le nombre de Reynolds basé sur  $x$ . L'expérience montre que  $f$  est une **fonction décroissante** : plus le Reynolds est élevé, moins vite la couche limite augmente avec  $x$ . La forme la plus simple pour  $f$  est a priori :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{K}{Re_x^b} \quad (9.2)$$

où  $b$  est un nombre positif, et  $K$  une constante.

- Nous allons voir par un raisonnement physique simple que  $b = 1/2$  en laminaire,
- Pour le cas turbulent, on trouvera  $b \simeq 1/7$ , qu'il est difficile de justifier facilement. L'observation expérimentale (voir zone rouge sur la figure Fig. 9.3) nous en donne malgré tout un ordre de grandeur :  $\delta$  doit augmenter à peu près comme  $x$  et donc  $b$  doit être proche de 0 (plus exactement très inférieur à 1).

Question de réflexion : que se passe-t'il pour  $Re$  de l'ordre de 1 ou inférieur ?

### 9.2.3 Physique des couches limite.

#### 9.2.3.1 Laminaire

Il convient de bien comprendre physiquement le mécanisme de formation de la couche limite, dans laquelle le fluide est ralenti par rapport au fluide en amont de la plaque.

Ce qui ralentit le fluide, c'est l'adhérence de ce dernier à la plaque, qui lui impose une vitesse nulle. Donc, de proche en proche dans la direction perpendiculaire à la plaque, le fluide est ralenti par le frottement visqueux : le fluide “lent” près de la plaque ralentit les couches supérieures, et ainsi de suite. Pour savoir avec quelle dynamique ce déficit de quantité de mouvement évolue suivant  $y$ , il faut se souvenir que **dans un écoulement unidirectionnel** (ce qui est presque le cas ici), **la quantité de mouvement diffuse dans la direction perpendiculaire avec un coefficient de diffusion égal à  $\nu$  viscosité cinétique** (voir Sec. 7.2.3). Ces rappels étant posés, nous pouvons désormais analyser le phénomène.

Au bord d'attaque de la plaque, le gradient de vitesse est infini et concentré en un point : le profil de vitesses  $u(y)$  est donc un pic de Dirac centré en  $y = 0$ . Ce profil va être transporté par convection suivant  $x$ , à la vitesse  $U$ , et s'étaler latéralement par diffusion suivant  $y$ , avec un coefficient de diffusion  $\nu$ . Cet étalement est responsable de l'augmentation de la couche limite.

Raisonnons sur un intervalle de temps  $\Delta t$  :

- pendant  $\Delta t$  le profil de vitesses au bord d'attaque est transporté suivant  $x$  sur une longueur  $x \simeq U\Delta t$ ,
- pendant  $\Delta t$ , il s'étale par diffusion dans la direction  $y$  sur une épaisseur  $\delta \simeq \sqrt{\nu\Delta t}$ .

Eliminons  $\Delta t$  entre les deux équations, on obtient :

$$\frac{\delta}{\sqrt{\nu}} \sim \sqrt{\frac{x}{U}} \quad \text{soit} \quad \frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

On trouve bien le résultat annoncé plus haut. Il est important de noter que ce résultat est obtenu sur la base d'un raisonnement physique simple, sans aucun calcul. La contrepartie est qu'on n'obtient qu'une loi d'échelle (l'exposant  $-1/2$  du Reynolds) mais pas le coefficient du numérateur (qui vaut environ 5).

### 9.2.3.2 Turbulente

En régime turbulent, on peut obtenir une approximation similaire, en remarquant physiquement que le transport de quantité de mouvement dans la direction  $y$  se fait bien plus efficacement par les tourbillons que par diffusion. Or la vitesse du fluide dans ces tourbillons est à peu près proportionnelle à la vitesse de l'écoulement soit  $kU$ , où  $k$  est typiquement de l'ordre de 5 à 10 %. On refait le même type de raisonnement :

- pendant  $\Delta t$  le profil de vitesses au bord d'attaque est transporté suivant  $x$  sur une longueur  $x \simeq U\Delta t$ ,
- pendant  $\Delta t$ , il est convecté par les tourbillons dans la direction  $y$  sur une épaisseur  $\delta \simeq kU\Delta t$ ,

et on voit donc que l'élimination de  $\Delta t$  donne dans ce cas :

$$\frac{\delta}{x} \sim K$$

indépendant du Reynolds, qui montre bien une croissance environ linéaire de  $\delta$  en fonction de  $x$ . En réalité, comme indiqué plus haut, la loi d'échelle en turbulent est  $\delta/x \sim 1/\text{Re}_x^{1/7}$ . Cela montre les limites de notre raisonnement simple pour approcher une physique aussi complexe que celle de la turbulence, mais qui fournit quand même une approximation réaliste.

### 9.2.4 Frottement à la paroi. Coefficients de trainée

On note  $\tau_w$  la contrainte de frottement visqueux à la paroi. Dans le cas laminaire, on rappelle que la contrainte de frottement à la paroi s'écrit :

$$\tau_w(x) = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (9.3)$$

On montre que c'est vrai aussi dans le cas turbulent.

Cette contrainte dépend de  $x$  puisque le gradient de vitesses évolue le long de la plaque. On adimensionnalise la contrainte locale à la paroi par  $\frac{1}{2}\rho U^2$ , ce qui définit :

$c_w(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (9.4)$

coefficient de frottement local.

La valeur de la contrainte  $\tau_w(x)$  est reliée au mode de transport de quantité de mouvement dans la couche limite, et même si l'expression (9.3) est valable dans les 2 cas,  $\tau_w$  est fortement dépendante du caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement dans la couche limite.

Dans le cas laminaire, le transport de quantité de mouvement est assuré par le frottement visqueux **dans toute la couche limite**. Le gradient de vitesses  $\partial u / \partial y$  y est partout d'ordre de grandeur  $U/\delta(x)$ , et on a donc :

$$\tau_w(x) \simeq \eta \frac{U}{\delta(x)}.$$

Sachant que  $\delta(x) \sim x/\text{Re}_x^{1/2}$ , on trouve donc que le coefficient de frottement local s'écrit approximativement :

$$c_w(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \simeq \frac{\eta}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{U}{x/\text{Re}_x^{1/2}} = 2 \frac{\text{Re}_x^{1/2}}{\text{Re}_x} = \frac{2}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

En laminaire, le coefficient de frottement local  $c_w(x) = \tau_w(x)/\frac{1}{2}\rho U^2$  varie en  $1/\text{Re}_x^{1/2}$ , et la contrainte tangentielle locale diminue donc à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque de la plaque.

En turbulent, on ne peut pas faire le même raisonnement car le transport de QDM n'est assuré par le frottement visqueux **qu'à l'intérieur** d'une sous-couche très fine  $\ll \delta$  appelée **sous-couche laminaire**. Le terme  $\partial u / \partial y$  est donc  $\gg U / \delta(x)$ . En revanche on sait que le transport de quantité de mouvement est assuré par des fluctuations turbulentes latérales, de vitesses de l'ordre de  $kU$ . Dimensionnellement, on voit que ce transport de QDM est associé à une contrainte<sup>2</sup> de l'ordre de  $kU \times U$  et on en déduit donc :

$$\tau_w \simeq KU^2 \quad \text{soit} \quad c_w(x) \sim K$$

En turbulent, le coefficient de frottement local est quasiment indépendant de la position sur la plaque.

Le calcul de la trainée sur une plaque de longueur  $L$  et de largeur  $b$  est uniquement lié à la contrainte de cisaillement (les forces de pression étant perpendiculaires à l'écoulement dans le cas de la plaque plane), et se déduisent donc simplement de la connaissance de la contrainte  $\tau_w$  par :

$$F_D = \int_0^L \tau_w(x) b \, dx = \frac{1}{2} \rho U^2 b \int_0^L c_w(x) \, dx$$

Pour calculer le coefficient de traînée, on divise la force de trainée par  $1/2\rho U^2 S$  où  $S = bL$  est la surface de la plaque ( $b$  est sa largeur) :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = \frac{1}{L} \int_0^L c_w(x) \, dx$$

coefficient de traînée de la plaque plane.

En intégrant les lois d'échelle précédentes pour  $c_w(x)$ , on en déduit aisément que :

Les lois d'échelle pour le coefficient de traînée sur une plaque plane sont :

$$C_D \sim \frac{1}{Re_L^{1/2}} \quad \text{laminaire} \quad C_D \sim C^{te} \quad \text{turbulent}$$

*On obtient donc le résultat remarquable indiquant que le coefficient de traînée est indépendant du Reynolds en turbulent, ce qui signifie que la force de traînée varie comme  $U^2$ , résultat généralement connu du grand public. Nous verrons que ce résultat se généralise à tout obstacle à un écoulement pourvu que le Reynolds soit suffisamment grand.*

2. Cet argument peut être rendu rigoureux par l'écriture d'équations moyennées, dites de Reynolds, qui sortent du cadre de ce cours.

### 9.3 Résultats pratiques pour la plaque plane.

Le lecteur féru de physique aura constaté que des raisonnements simples “avec les mains” nous ont permis de déterminer des lois d’échelle, c’est-à-dire la façon dont varient les grandeurs d’intérêt exprimées sous forme adimensionnelle en fonction d’une puissance du Reynolds. Malheureusement, ces lois d’échelles sont valables à un coefficient près. Nous donnons maintenant des expressions utiles pour les applications :

Les épaisseurs de couche limites sont données par

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad \text{en laminaire} \quad \frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.16}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad \text{en turbulent}$$

En ce qui concerne le coefficient de trainée  $C_D$ , on peut donner le résultat en laminaire :

Le coefficient de trainée sur une plaque de longueur  $L$  est donné par

$$C_D = \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} \quad \text{en laminaire}$$

En turbulent, les choses sont plus complexes, car d’une part, comme dans le cas pertes de charge dans les tubes, la rugosité de la plaque joue un rôle. D’autre part, la partie laminaire de la couche limite près du bord d’attaque, ainsi que la zone de transition, contribuent à la force totale si la plaque n’est pas trop longue. L’abaque de la figure 9.4 résume les résultats. La rugosité relative est mesurée par  $L/\epsilon$ , où  $L$  est la taille des aspérités.

- La zone dite “de transition” correspond au cas où les contributions laminaires et turbulentes sont de même ordre de grandeur. Comme le Reynolds de transition est mal défini, on peut avoir plusieurs courbes, toutes contenues dans la zone blanche.
- Dans la zone la plus à droite dite “turbulent rugueux”,  $C_D$  est indépendant du Reynolds mais dépend de la rugosité de la plaque.
- Dans la zone intermédiaire,  $C_D$  dépend à la fois de  $\text{Re}$  et de  $L/\epsilon$ .
- La courbe “turbulent lisse” est pertinente lorsque  $L/\epsilon \gg 1$ .

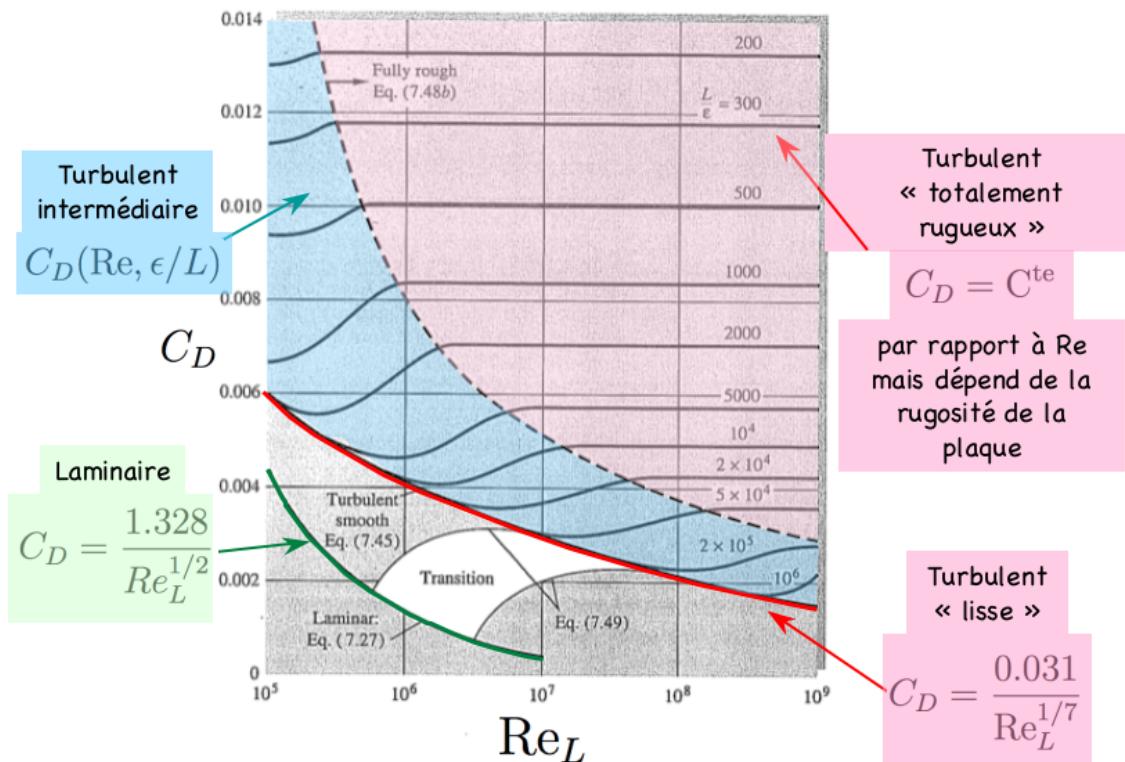


FIGURE 9.4 – Coefficient de trainée sur une plaque plane. D’après White (1994)

## 9.4 Théorie de Prandtl.

### 9.4.1 Principe général

Il s’agit de calculer le profil des vitesses dans la **couche limite laminaire**, et de retrouver les résultats énoncés précédemment. La grande force de la théorie est de rester valable pour des profils présentant un rayon de courbure très grand devant l’épaisseur de la couche limite. Nous présenterons d’abord cette théorie pour la plaque plane, puis nous verrons comment l’étendre à des géométries quelconques.

La résolution exacte des équations de Navier-Stokes est impossible, mais Prandtl en a trouvé une solution approximative, en remarquant deux choses :

- l’écoulement est quasiment uni-directionnel, donc  $v \ll u$ ,
- la couche limite est très fine, donc toutes les grandeurs varient beaucoup plus suivant  $y$  que suivant  $x$ , soit  $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$ .

Dans ces conditions, on montre que les équations de NS se réduisent à

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{9.5}$$

La démonstration est proposée ci-dessous. Le lecteur pourra s'en affranchir lors d'une première lecture<sup>3</sup>

On voit que ces équations sont assez similaires à celles des écoulements unidirectionnels, sauf que la conservation de la masse reste inchangée car  $v$  n'est pas nulle en toute rigueur, et, bien que  $v \ll u$ , ses variations selon  $y$  sont du même ordre de grandeur que celles de  $u$  suivant  $x$ . La même remarque peut être faite concernant la non-disparition du terme inertiel dans la deuxième équation.

Le point fondamental est la troisième équation : **la pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement**, et  $p$  ne dépend donc que de  $x$ . Le raisonnement est donc le suivant :

- En tout point de la couche limite, la pression est égale à la pression en un point de même abscisse, mais placé à l'extérieur de la couche limite (Fig. 9.5)
- Or, à l'extérieur de la couche limite, le fluide peut être considéré parfait puisque les gradients de vitesse  $y$  sont très faibles. La vitesse dans cette zone ne dépend pas  $y$ , notons la  $U(x)$ .<sup>4</sup>
- On peut donc utiliser la formule de Bernoulli le long des lignes de courant à l'extérieur de la couche limite<sup>5</sup> :

$$p(x) + \frac{1}{2} \rho U(x)^2 = C^{\text{te}} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \rho U(x) \frac{dU}{dx} = 0$$

- En remplaçant cette expression de  $\partial p / \partial x$  dans (9.5), on obtient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x) \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

---

3. Ce genre de raisonnement est classique en mécanique des fluides, et il est conseillé de l'étudier au moins une fois. Il intervient également entre autres dans les problèmes de lubrification, de jets, de sillage.

4. Dans le cas de la plaque plane c'est simple  $U = C^{\text{te}} \dots$

5. Dans le cas de la plaque plane,  $p$  est donc aussi indépendante de  $x$

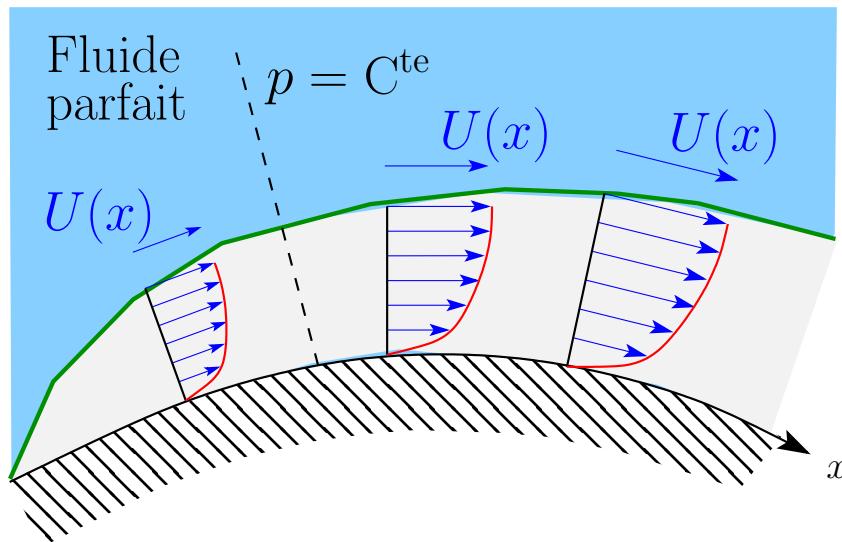


FIGURE 9.5 – Principe de la théorie de Prandtl. A l’extérieur de la couche limite, le fluide peut être considéré comme parfait. La théorie des écoulements irrotationnels y est applicable. Comme la pression est environ constante perpendiculairement à l’écoulement, elle peut être calculée sur l’écoulement de fluide parfait à l’extérieur de la couche limite  $p(x) + 1/2\rho U^2(x) = C^te$ .

En présence d’une couche limite **laminaire**, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Prandtl :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U(x) \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (9.7)$$

où  $U(x)$  est le champ des vitesses à l’extérieur de la couche limite, calculable par le modèle du fluide parfait. En injectant le résultat dans les équations de Prandtl, on peut les intégrer pour trouver le champ de vitesses  $(u, v)$  dans la couche limite.

**Démonstration des équations de Prandtl :** Nous fournissons ci-dessous seulement les grandes lignes du raisonnement. Il est instructif de reprendre soigneusement les calculs soi-même... Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9.9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9.10)$$

On considère un point  $(x, y)$  dans la couche limite. Montrons tout d'abord que  $u \ll v$ . On sait que  $u(0, y) = U$  (point amont), et que  $u(x, y)$  est de l'ordre de  $U$ . Par conséquent la variation de  $u$  suivant  $x$  intervient sur une distance de l'ordre de  $x$  (courbe bleue sur la figure 9.6). Concernant la composante verticale  $v$ , on sait qu'elle s'annule en  $x = 0$  (condition d'adhérence) ainsi qu'en  $x = \delta(x)$  (puisque par définition de la couche limite, au bord de cette dernière, le champ de vitesse est environ parallèle à la plaque). Par conséquent, la variation de  $v$  le long de  $y$  intervient sur une distance de l'ordre de  $\delta(x)$  (courbe rouge sur la figure 9.6). On a donc et  $\partial v / \partial y \sim v / \delta(x)$

En utilisant la conservation de la masse (9.8), on en déduit que

$$\left| \frac{v(x, y)}{u(x, y)} \right| \sim \left| \frac{\delta(x)}{x} \right| = O(\text{Re}_x^{-1/2}) \ll 1$$

ce qui prouve que  $u \ll v$ .

Ensuite, par le même type de raisonnement, on peut aisément vérifier que les dérivées  $\partial / \partial x$  sont de l'ordre de  $1/x$  et celles suivant  $y$  de l'ordre de  $1/\delta(x)$ . En utilisant de plus la conservation de la masse, on obtient :

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Il en est de même pour les dérivées secondes  $\partial^2 / \partial x^2 \ll \partial^2 / \partial y^2$ . En introduisant ces ordres de grandeur dans les équations (9.9) et (9.10), on obtient la deuxième équation de Prandtl (9.6). La troisième, (9.7) est obtenue en remarquant que tous les termes contenant la vitesse dans (9.10) sont très faibles devant celui négligé dans (9.9).

#### 9.4.2 Cas de la plaque plane : solution auto-similaire et équation de Blasius

Si le raisonnement précédent permet de simplifier les équations, cela reste un système d'équations aux dérivées partielles. Leur résolution demande une astuce supplémentaire. L'analyse dimensionnelle est particulièrement efficace dans ce cas.

On cherche le profil de vitesses  $u(x, y, \nu, U)$  et  $v(x, y, \nu, U)$ . Commençons par le premier. Seules les dimensions  $L$  et  $T$  interviennent dans les variables pertinentes, et le théorème de Buckingham fournit alors (par exemple) :

$$\frac{u}{U} = f \left( \frac{y}{x}, \text{Re}_x \right) \quad (9.11)$$

Mais on sait que cette solution doit satisfaire, à toute abscisse  $x$ , la condition

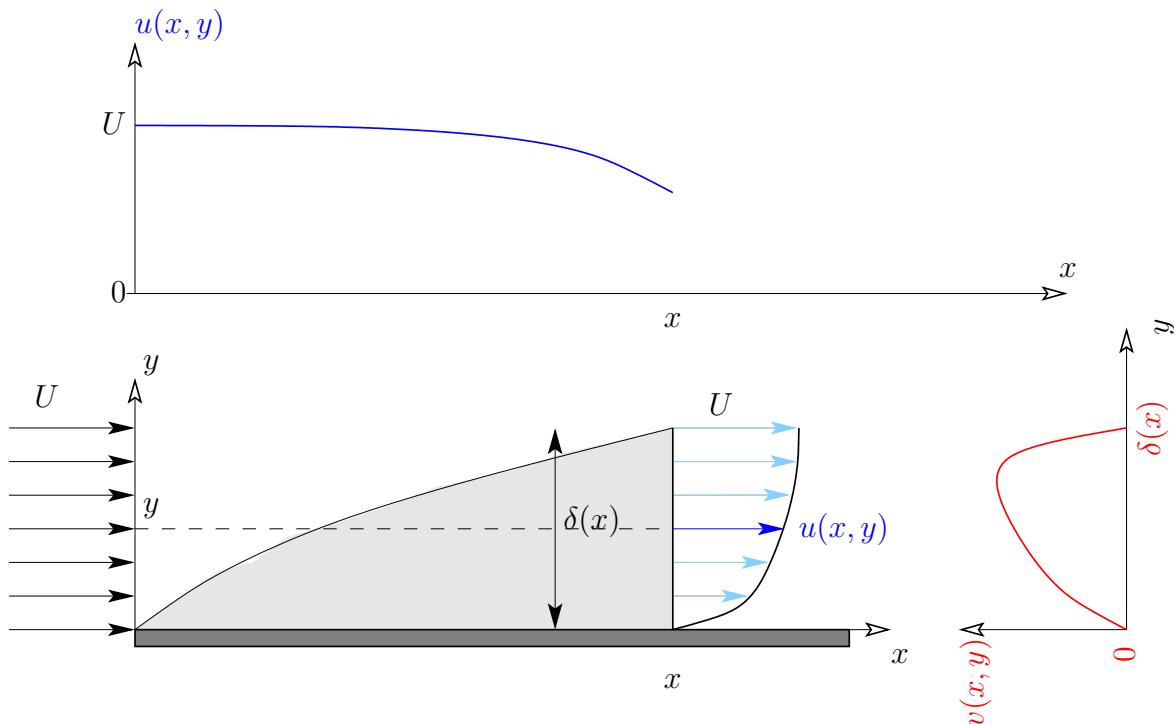


FIGURE 9.6 – Variations des composantes de la vitesse suivant  $x$  et  $y$  dans une couche limite.

$u(x, \delta(x)) = 0.99 U$ , et l'on doit donc avoir<sup>6</sup> :

$$f\left(\frac{\delta(x)}{x}, \text{Re}_x\right) = 0.99, \quad \forall x$$

et on sait que  $\delta(x)/x$  est une fonction donnée du Reynolds  $A(\text{Re}_x) = K/\text{Re}_x^b$ , et la condition ci-dessus s'écrit donc :

$$f(A(\text{Re}_x), \text{Re}_x) = 0.99, \quad \forall x$$

La seule possibilité que la condition ci-dessus soit vérifiée pour tout  $x$  est que  $f$  soit de la forme :

$$f(z_1, z_2) = g\left(\frac{z_1}{A(z_2)}\right)$$

et par conséquent, d'après (9.11),  $u(x, y)$  doit être de la forme :

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y/x}{A(\text{Re}_x)}\right) = g\left(\frac{\delta(x)}{x}\right)$$

soit, avec  $A(\text{Re}_x) = K/\text{Re}_x^{1/2}$

$$\frac{u}{U} = F\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \tag{9.12}$$

6. le choix particulier de la constante multiplicative 0.99 ne modifie pas la généralité du raisonnement...

Cette relation est celle qui va permettre de résoudre les équations de Prandtl : elle prouve que la composante  $u$  du champ de vitesse ne peut dépendre des coordonnées  $x, y$  qu'au travers de la variable  $\theta = y\sqrt{U/\nu x}$ . Remarquons que nous avons écrit aussi ce résultat sous la forme

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (9.13)$$

Un tel profil est dit **autosimilaire**. La vitesse varie selon  $y$  toujours selon le même profil (donné par la fonction  $F$ ), au coefficient d'échelle  $\delta(x)$  près.

On peut enfin remarquer que :

- Le raisonnement continue de fonctionner si la vitesse  $U$  dépend de  $x$ , ce qui est le cas de champs de vitesses auto-similaires plus complexes, par exemple les écoulements dans un dièdre (voir plus loin)
- Le résultat (9.13) est encore valable si l'épaisseur de la couche limite varie autrement qu'en  $\text{Re}_x^{1/2}$ , par exemple en régime turbulent. On peut donc chercher aussi des solutions auto-similaires dans ce dernier cas, à condition de savoir représenter l'influence des tourbillons sur l'écoulement moyen par des termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes moyennées. Ce thème sort du cadre de ce cours.

On peut en déduire  $v$  en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( \theta F(\theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} F(s) ds \right)$$

où  $\theta_0$  est une constante, qui doit être nulle car  $v(x, y=0) = 0, \forall x$ .

Exercice : le démontrer. On remarquera que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

on en déduira une expression de  $\partial v / \partial \theta$  en fonction de  $x$  et  $\theta$ , puis on intégrera par partie à  $x$  constant.

Il reste à reporter ces expressions de  $u$  et  $v$  dans l'équation (9.6), et l'on obtient finalement :

$$F''(\theta) = -\frac{1}{2}F'(\theta) \int_0^\theta F(s) ds, \quad (9.14)$$

équation de Blasius.

il reste à écrire les conditions frontières que doit vérifier  $F(\theta)$  :

$$\begin{aligned} u(x, y = 0) &= 0 \quad \text{soit} \quad F(0) = 0 \\ u(x, y \rightarrow \infty) &= U \quad \text{soit} \quad F(+\infty) = 1 \\ v(x, y = 0) &= 0 \quad \text{soit} \quad \int_{\theta_0}^0 F(s) \, ds = 0 \quad \text{donc} \quad \theta_0 = 0 \end{aligned}$$

La résolution numérique des équations de Blasius permet d'obtenir la fonction  $F$  et donc le profil de vitesses autosimilaire (9.12). Le résultat est représenté figure 9.7

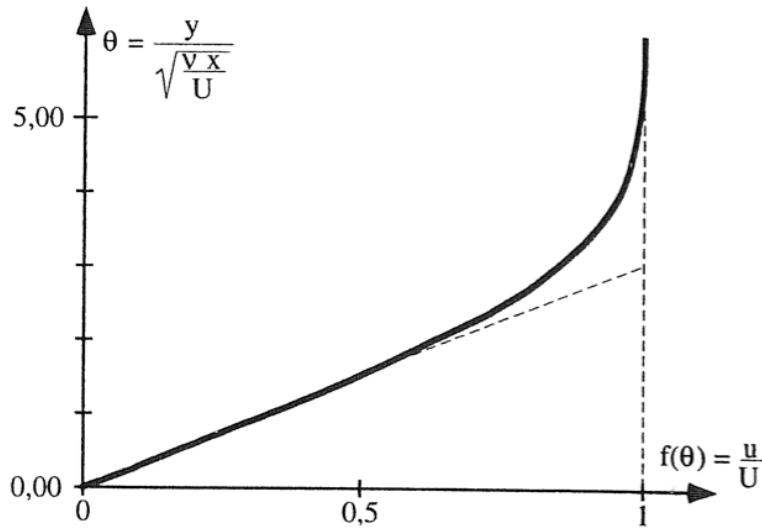


FIGURE 9.7 – Profil de vitesses autosimilaire obtenu par la résolution de l'équation de Blasius (d'après Guyon et al., 2001).

## 9.5 Décollement des couches limites

Le phénomène de décollement de couche limite est clairement visible sur les figures 3.6, 9.2 et 9.8. Dans ces derniers cas, les lignes de courant longent la surface du solide jusqu'à un point donné, où elles en “décollent”. La zone formée en aval est le sillage et donne lieu à une forte dissipation d'énergie, et par conséquent engendre une force de trainée conséquente.

Dans d'autres cas, typiquement les plaques inclinées, le décollement a lieu toujours au bord d'attaque au-delà d'un certain angle d'incidence (voir section 9.5.1 ci-dessous).

Le décollement ne peut se produire que lorsque la pression à l'extérieur de la couche limite augmente dans le sens de l'écoulement ( $dp/dx > 0$ ). On parle de **gradient de pression adverse** ou **défavorable**. Ce gradient de pression renverse localement le sens de l'écoulement.

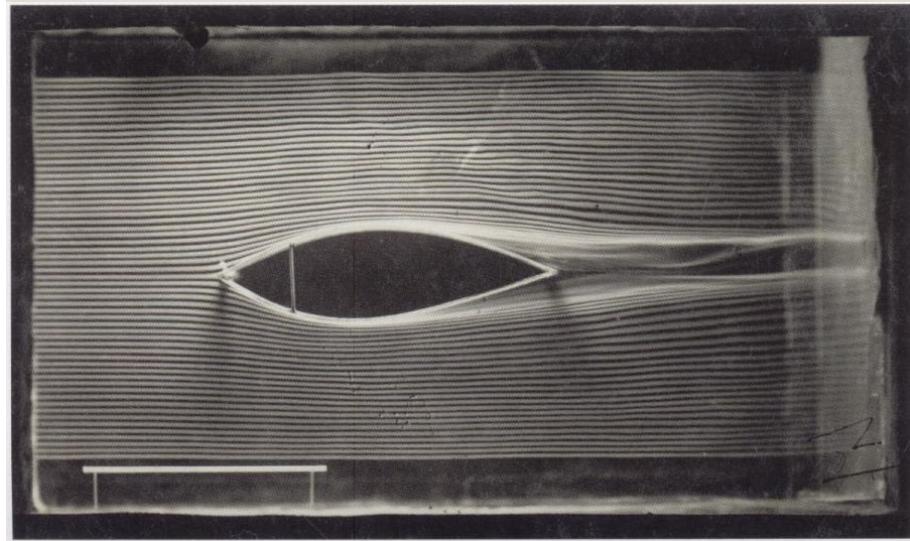


FIGURE 9.8 – Ecoulement autour d'un corps profilé

Dans ce cas les éléments de fluide proches de la surface solide subissent deux actions opposées : le gradient de pression positif les freinent, tandis que les éléments de fluide des zones de plus grande vitesse les accélèrent. On peut le voir simplement en écrivant l'équation (9.5) au niveau de la paroi : on a

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

qui décrit l'équilibre local entre les forces de pression et le frottement visqueux. On voit que la convexité du profil des vitesses au niveau de la paroi est définie par le signe de  $dp/dx$ . Or, au bord de la couche limite, le profil est nécessairement convexe, pour se raccorder à la condition  $u(x, \delta(x)) \simeq U(x)$ . Donc :

- si  $dp/dx < 0$ , le profil est partout convexe, la couche limite est stable (Fig. 9.9 gauche).
- si  $dp/dx > 0$ , le profil est convexe au bord de la couche limite et concave au niveau de la paroi (les 3 schémas les plus à droite sur la figure 9.9). Il présente donc un point d'inflexion quelque part dans la couche limite. Le décollement sera effectivement observé lorsque le profil de vitesse arrive avec une pente nulle à la paroi (3ème schéma). Pour un gradient de pression légèrement plus positif, le sens de l'écoulement s'inverse au niveau de la paroi (4ème schéma).

Maintenant, dans quelles conditions obtient-on un gradient de pression favorable ou défavorable ? On a vu que la pression suivait la loi de Bernoulli à l'extérieur de la couche limite, et donc que  $dp/dx = -\rho U dU/dx$ . Un gradient de pression adverse apparaît donc si la vitesse diminue dans le sens de l'écoulement, autrement dit dans un élargissement. C'est pourquoi les diffuseurs (élargissements de tuyauterie) doivent être conçus avec un angle le plus faible possible.

Dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle, la situation est décrite sur la figure 9.10. Dans la partie montante, le fluide accélère et le gradient de pression est

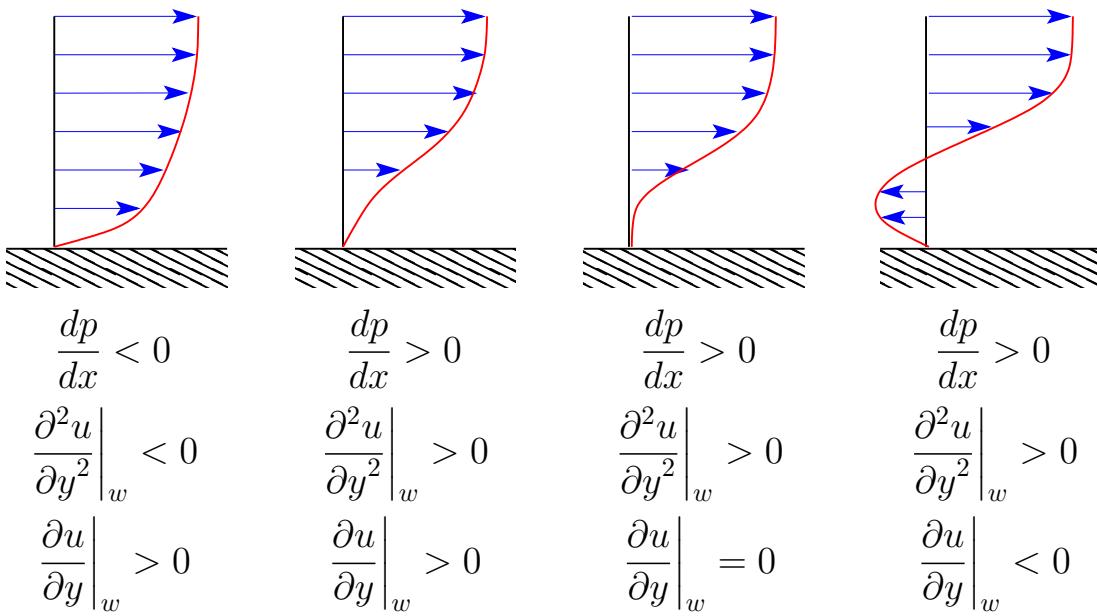


FIGURE 9.9 – Profil des vitesses dans la couche limite pour différents gradients de pression. Les 3 figures de droite présentent un gradient de pression adverse. Le point critique de décollement est obtenu lorsque  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0) = 0$  (3ème figure). Pour un gradient de pression plus positif (4ème figure), il y a retournement de l'écoulement au voisinage de la paroi, et la couche limite décolle.

favorable. En revanche dans la partie descendante, le fluide ralentit et on obtient un gradient de pression adverse. Ce sera le cas pour un corps épais mal profilé (c'est le cas de la voiture Fig. 9.2), où d'un corps bien profilé (une aile d'avion) mais avec une trop grande incidence.

Pour dépasser ces considérations qualitatives, un traitement analytique du problème est requis. Il nécessite déjà la connaissance du champ de vitesses en fluide parfait  $U(x)$ , ce qui peut être fourni par la théorie des écoulements potentiels<sup>7</sup>. Ensuite ce champ de vitesse doit être introduit dans les équations de Prandtl et ces dernières résolues. Un cas simple, constitue une extension directe de la théorie de Blasius pour la plaque plane : les écoulements dans un dièdre dont on peut montrer qu'ils sont aussi auto-similaires.

### 9.5.1 Cas d'un profil auto-similaire. Equation de Falkner-Skan

On montre par la théorie des écoulements potentiels que l'écoulement en fluide parfait autour d'un dièdre d'angle  $\theta$  (fig. 9.11) est défini, sur l'axe  $x$  de sortie du dièdre, par la vitesse

$$U(x) = Cx^{m+1} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{\pi}{m+1} \quad (9.15)$$

7. non décrite dans ce cours...

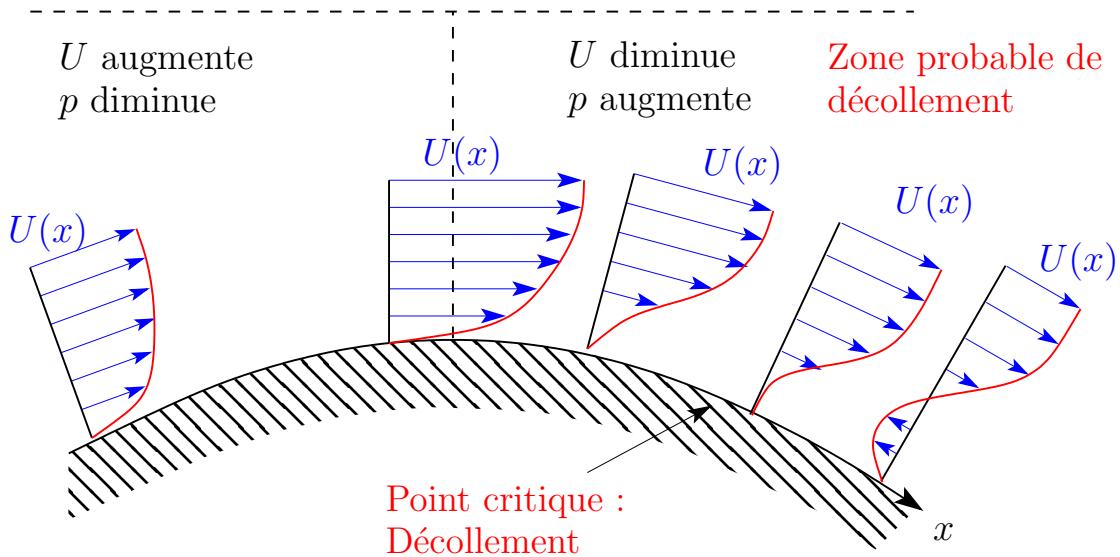


FIGURE 9.10 – Evolution de la vitesse et de la pression autour d'un obstacle. Dans la partie gauche, par conservation du débit entre le profil et une ligne imaginaire suffisamment éloignée, la vitesse augmente, donc la pression diminue dans le sens de l'écoulement. Inversement la pression augmente avec  $x$  dans la partie droite, favorisant le phénomène de décollement.

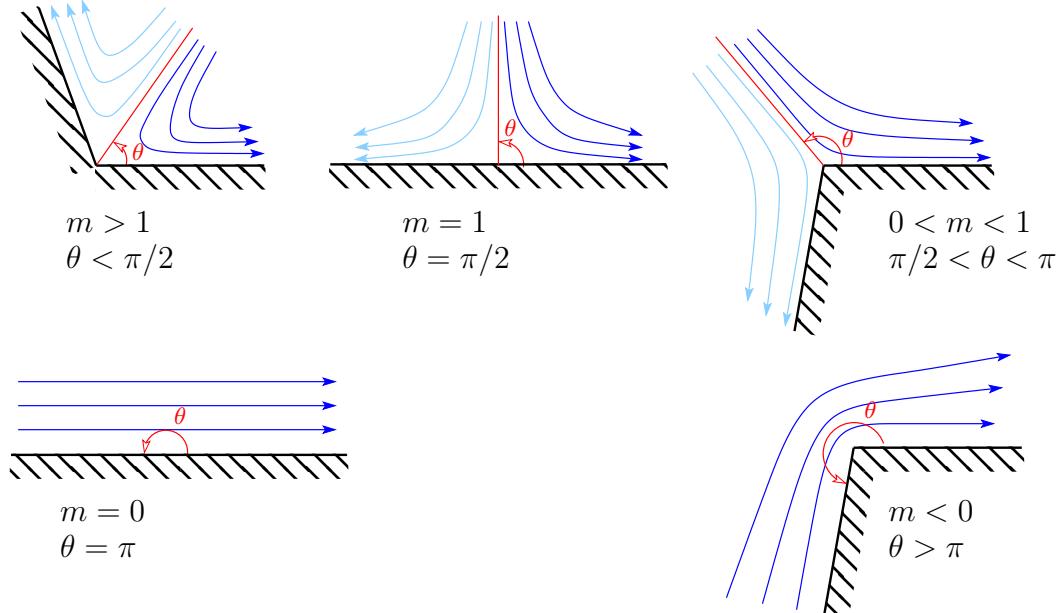


FIGURE 9.11 – Ecoulements autour de dièdres d'angle d'ouverture  $\theta$ , prédict par la théorie potentielle. Les lignes de courant représentent l'écoulement théorique à l'extérieur de la couche limite, tant qu'il n'y a pas de décollement de cette dernière. Dans les trois cas du haut, l'écoulement peut être symétrisé (ligne rouge) pour représenter l'écoulement autour d'un point d'arrêt.

On trouve alors que comme pour la plaque plane, l'écoulement est auto-similaire en posant  $u(x, y)/U = F(\theta)$ , où  $\theta = y\sqrt{U(x)/\nu x}$ . L'équation remplaçant (9.14) est

alors :

$$m(1 - F^2(\theta)) + F''(\theta) = -\frac{1}{2}F'(\theta) \int_0^\theta F(s) ds, \quad (9.16)$$

équation de Falkner-Skan.

La résolution numérique de cette équation permet de déterminer les profils des vitesses auto-similaires pour diverses valeurs de  $m$  (Fig. 9.12). On montre que la couche limite décolle partout à partie du point anguleux du dièdre dès que  $m = -0.0905$ , ce qui correspond à un angle  $\theta_c = 198^\circ$ . Le décollement de la couche limite pour l'angle critique et pour un angle supérieur est illustré sur la figure 9.13.

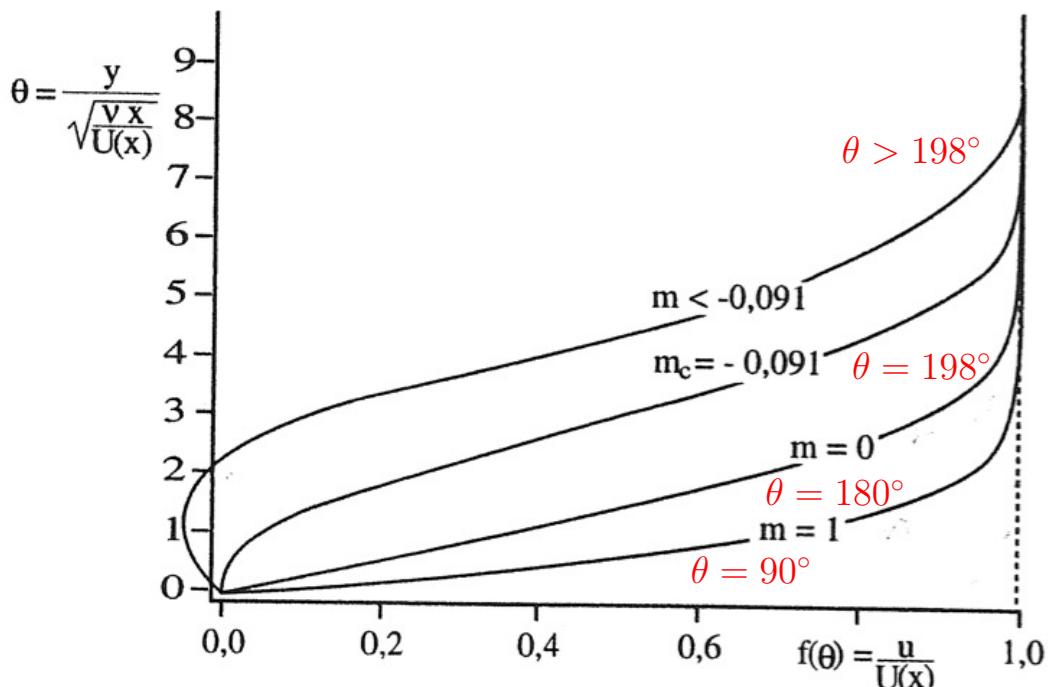


FIGURE 9.12 – Profils de vitesses autosimilaire obtenu par la résolution de l'équation de Falkner-Skan (d'après Guyon et al., 2001). Le cas de la plaque plane est obtenu pour  $m = 0$ . Pour la valeur critique  $m = m_c = -0.091$ , la pente du profil de vitesses sur le profil devient nulle, il y a décollement de la couche limite.

Ce type de comportement peut être rencontré dans des élargissements trop brusques en tuyauteries. Le décollement de la couche limite à pour conséquence une forte augmentation de la perte de charge.

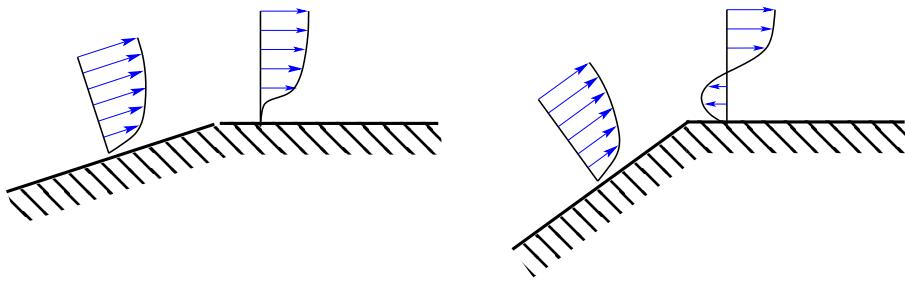


FIGURE 9.13 – Décollement de la couche limite lorsque l’angle du dièdre atteint la valeur critique  $\theta_C = 198^\circ$  (à gauche) ou la dépasse (à droite)

### 9.5.2 Cas d'un profil non auto-similaire.

C'est le cas général (voir par exemple Fig. 9.2). La couche limite décolle en point bien particulier de la surface de l'obstacle. Il existe un certain nombre de méthodes analytiques approchées pour prédire le point de décollement, notamment la méthode de similitude locale, qui généralise le formalisme menant à l'équation de Falkner-Skan, et la théorie intégrale de Von-Karman (White, 1994). Elles dépassent le cadre de ce cours. Ces méthodes permettent de trouver par exemple le point de décollement sur un cylindre avec une précision raisonnable.

Notons que la position du point de décollement est déterminée essentiellement par le profil de vitesses à l'extérieur de la couche limite  $U(x)$ , prédit par la théorie du fluide parfait. Comme cet écoulement est quasiment indépendant du nombre de Reynolds (si celui-ci est assez élevé), le point de décollement l'est aussi. (Guyon et al., 2001)

Le point de décollement sur un obstacle est peu dépendant du nombre de Reynolds.

## 9.6 Forces de trainée

### 9.6.1 Trainée de pression et traînée visqueuse

La force totale exercée sur un obstacle dans un écoulement peut être projetée sur la direction de l'écoulement, c'est la force de **trainée**. La projection sur la direction perpendiculaire est la **portance**.

La force totale traînée + portance résulte de deux contributions :

$$\mathbf{F} = \underbrace{\iint_S -pn \, dS}_{\text{Forces de pression } \mathbf{F}_p} + \underbrace{\iint_S \bar{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Forces visqueuses } \mathbf{F}_v}$$

A Reynolds élevé, l'importance respective de ces deux contributions sur la trainée dépend essentiellement du profil du corps. La contribution visqueuse est dominante dans la couche limite, où le cisaillement est important. Par ailleurs, le sillage constitue une zone de dépression, et par conséquent plus son extension spatiale est grande, plus la contribution de la force de pression sera importante (Fig. 9.14). Un décollement prématûr de la couche limite engendre donc une diminution de la force visqueuse, mais aussi une forte augmentation de la force de pression, qui augmente considérablement la trainée. La tendance générale peut donc être résumée par :

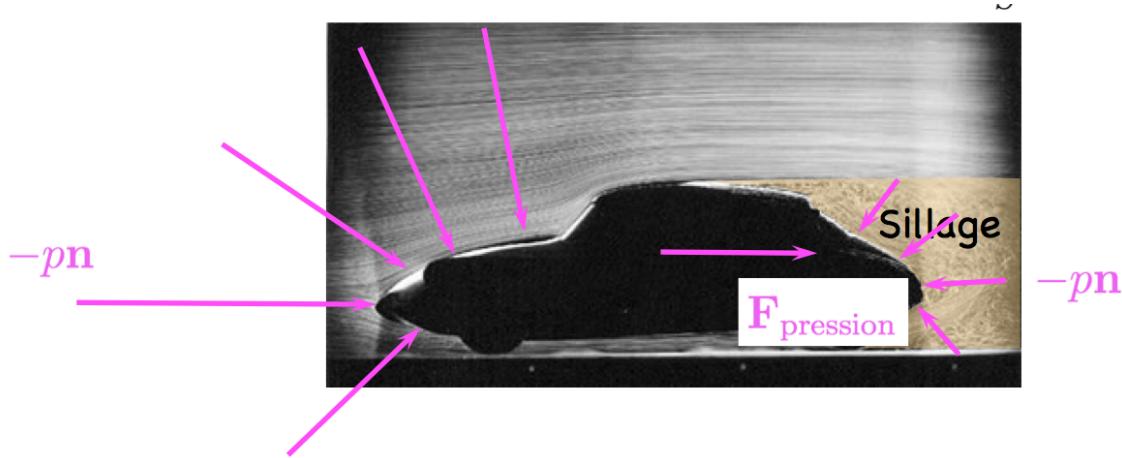


FIGURE 9.14 – Distribution des forces de pression en présence d'un sillage. Plus le sillage est épais moins les forces de pression exercée dans cette zone sont importantes. La résultante dans le sens de l'écoulement a donc une amplitude importante.

La trainée sur un corps mal profilé est beaucoup plus grande que sur un corps bien profilé, à cause du décollement de la couche limite. La trainée de pression est prépondérante sur un corps mal profilé, alors que la trainée visqueuse est prépondérante pour un corps bien profilé.

Ce dernier point est crucial par exemple pour les véhicules automobiles. On s'arrange pour que la couche limite décolle le plus tard possible, ce qui impose une lunette arrière très inclinée<sup>8</sup>. Les véhicules types monospace, camionnette etc présentent ainsi un coefficient de trainée important, car leur arrière presque vertical engendre un sillage épais. Les cabines de camion sont ainsi équipées de déflecteurs pour retarder le décollement sur la remorque.

Le calcul des forces de trainée est effectuée sous forme adimensionnelle par le **coefficient de trainée**, noté  $C_x$  dans le monde des transports, ou plus généralement  $C_D$  (le “D” signifiant “Drag”=trainée en anglais). Il est défini par :

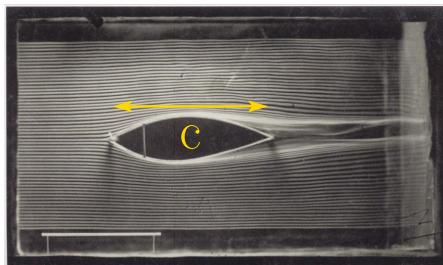
$$C_D = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S} \quad (9.17)$$

8. On remarquera que cette condition n'est pas suffisante en examinant l'écoulement autour du véhicule de la figure (9.14)

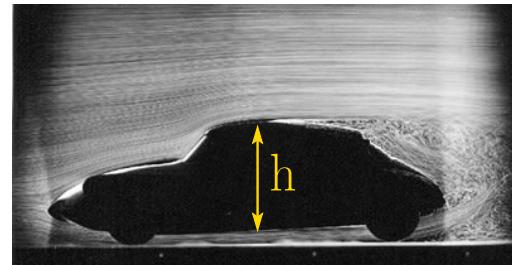
où  $\mathbf{e}_x$  est un vecteur unitaire dans le sens de l'écoulement,  $U_\infty$  la vitesse infinie amont, et  $S$  une section caractéristique de l'obstacle.

**Attention :** le choix de  $S$  est différent selon que l'on a à faire à un corps bien profilé (type aile, avion, foils), ou un corps mal profilé (tous les autres + projectiles).

- Pour un corps mal profilé, ou épais, on choisit pour  $S$  la section projetée vue par l'écoulement, dite “section frontale”, par exemple  $h \times 2R$  pour un cylindre, ou  $\pi R^2$  pour une sphère.
- Pour un corps bien profilé, ou mince, on choisit pour  $S$  la section projetée vue de dessus.
- Dans le cas particulier des bateaux et des corps flottants, on considère l'aire mouillée, en contact avec l'eau.



$$S = cb$$



$$S = hb$$

FIGURE 9.15 – Choix de la section de référence pour le calcul du coefficient de trainée, à gauche dans le cas d'un corps mince, à droite dans le cas d'un corps épais. On note  $b$  l'extension de l'obstacle dans la direction perpendiculaire à la figure.

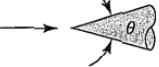
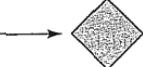
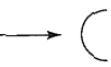
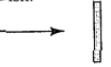
Ces choix sont dictés par les considérations précédentes : pour un corps épais, la contribution majeure à la traînée est la force de pression. Cette dernière résultant de la différence entre surpression amont et de la dépression dans le sillage, elle s'exerce sur une surface de l'ordre de grandeur de la section frontale. À l'inverse, pour un corps mince, la contribution majeure est la contrainte visqueuse dans la couche limite. Cette dernière couvre toute la surface mouillée par le fluide. L'aire projetée vue de dessus fournit un bon ordre de grandeur (à un facteur 1/2 près) de cette surface.

### 9.6.2 Trainée sur différents profils

Pour les profils épais, nous avons vu que le point de décollement étant peu dépendant du nombre de Reynolds. Comme dans ce cas le coefficient de trainée est essentiellement lié au sillage, on en conclut que

Le coefficient de trainée des profils épais est peu dépendant du nombre de Reynolds, si ce dernier est suffisamment élevé.

Cette dernière propriété permet de tabuler des valeurs du coefficient de trainée sur des profils classiques pour des Reynolds suffisamment élevés. Les figures 9.16 et 9.17 en sont un exemple, valables pour  $\text{Re} > 10^4$ .

Body	$C_D$ based on frontal area	Body	$C_D$ based on frontal area																					
Cube:	1.07	Cone:	$\theta:$ <table border="1"><tr><td>10°</td><td>20°</td><td>30°</td><td>40°</td><td>60°</td><td>75°</td><td>90°</td></tr><tr><td>0.30</td><td>0.40</td><td>0.55</td><td>0.65</td><td>0.80</td><td>1.05</td><td>1.15</td></tr><tr><td><math>C_D:</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15	$C_D:$						
10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°																		
0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15																		
$C_D:$																								
																								
	0.81	Short cylinder, laminar flow:	$L/D:$ <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>20</td><td>40</td></tr><tr><td>0.64</td><td>0.68</td><td>0.72</td><td>0.74</td><td>0.82</td><td>0.91</td><td>0.98</td></tr><tr><td><math>C_D:</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	10	20	40	0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98	$C_D:$						
1	2	3	5	10	20	40																		
0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98																		
$C_D:$																								
	1.4	Porous parabolic dish [23]:	$\text{Porosity:}$ <table border="1"><tr><td>0</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0.4</td><td>0.5</td></tr><tr><td>1.42</td><td>1.33</td><td>1.20</td><td>1.05</td><td>0.95</td><td>0.82</td></tr><tr><td><math>C_D:</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82	$C_D:$								
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5																			
1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82																			
$C_D:$																								
	0.4	Average person:	$C_D A = 0.84 \text{ m}^2$																					
	1.17		$C_D A = 0.11 \text{ m}^2$																					
Parachute (Low porosity):	1.2	Pine and spruce trees [24]:	$U, \text{m/s:}$ <table border="1"><tr><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td></tr><tr><td>1.2 ± 0.2</td><td>1.0 ± 0.2</td><td>0.7 ± 0.2</td><td>0.5 ± 0.2</td></tr><tr><td><math>C_D:</math></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	10	20	30	40	1.2 ± 0.2	1.0 ± 0.2	0.7 ± 0.2	0.5 ± 0.2	$C_D:$												
10	20	30	40																					
1.2 ± 0.2	1.0 ± 0.2	0.7 ± 0.2	0.5 ± 0.2																					
$C_D:$																								
	$C_D A \approx 8.5 \text{ m}^2$	Tractor-trailer truck:																						
Bicycle:		Without deflector: 0.96; with deflector: 0.76																						
Upright: $C_D A \approx 0.51 \text{ m}^2$ ; Racing: $C_D A \approx 0.30 \text{ m}^2$																								

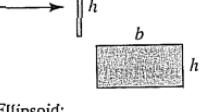
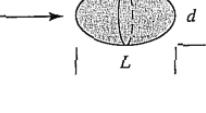
Body	Ratio	$C_D$ based on frontal area	Body	Ratio	$C_D$ based on frontal area
Rectangular plate:	$b/h$	1 1.18	Flat-faced cylinder:		
	5	1.2			
	10	1.3			
	20	1.5		$L/d$	0.5 1.15
		2.0		1	0.90
Ellipsoid:	$L/d$	0.5 0.5		2	0.85
	1	0.47		4	0.87
	2	0.27		8	0.99
	4	0.25	Buoyant rising sphere [50],		
	8	0.2	$C_D \approx 0.95$		
		0.08	$135 < \text{Re}_d < 1E5$		

FIGURE 9.16 – Coefficients de trainée sur différents profils pour  $\text{Re} > 10^4$  (d'après White, 1994)

Les coefficients de trainée sur un profil donné peuvent être mesurés en soufflerie en utilisant les lois de similitude fournies par l'analyse dimensionnelle. Le coefficient de

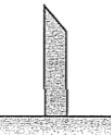
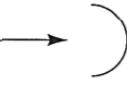
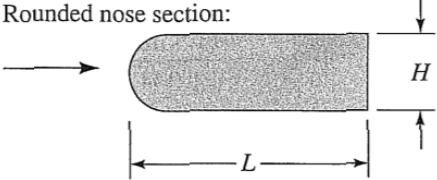
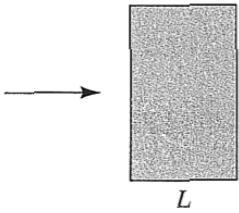
Shape	$C_D$ based on frontal area	Shape	$C_D$ based on frontal area	Shape	$C_D$ based on frontal area																		
Square cylinder:		Half cylinder:		Plate:																			
	2.1		1.2		2.0																		
	1.6		1.7		1.4																		
Half tube:		Equilateral triangle:		Hexagon:																			
	1.2		1.6		1.0																		
	2.3		2.0		0.7																		
<hr/>																							
Shape	$C_D$ based on frontal area																						
Rounded nose section:																							
	<table border="1"> <tr> <td><math>L/H:</math></td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>2.0</td> <td>4.0</td> <td>6.0</td> </tr> <tr> <td><math>C_D:</math></td> <td>1.16</td> <td>0.90</td> <td>0.70</td> <td>0.68</td> <td>0.64</td> </tr> </table>					$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0	$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64						
$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0																		
$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64																		
Flat nose section:																							
	<table border="1"> <tr> <td><math>L/H:</math></td> <td>0.1</td> <td>0.4</td> <td>0.7</td> <td>1.2</td> <td>2.0</td> <td>2.5</td> <td>3.0</td> <td>6.0</td> </tr> <tr> <td><math>C_D:</math></td> <td>1.9</td> <td>2.3</td> <td>2.7</td> <td>2.1</td> <td>1.8</td> <td>1.4</td> <td>1.3</td> <td>0.9</td> </tr> </table>					$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0	$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9
$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0															
$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9															
Elliptical cylinder:	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Laminar</th> <th>Turbulent</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1:1 <math>\longrightarrow</math></td> <td>0.2</td> <td>0.3</td> </tr> <tr> <td>2:1 <math>\longrightarrow</math></td> <td>0.6</td> <td>0.2</td> </tr> <tr> <td>4:1 <math>\longrightarrow</math></td> <td>0.35</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td>8:1 <math>\longrightarrow</math></td> <td>0.25</td> <td>0.1</td> </tr> </tbody> </table>						Laminar	Turbulent	1:1 $\longrightarrow$	0.2	0.3	2:1 $\longrightarrow$	0.6	0.2	4:1 $\longrightarrow$	0.35	0.15	8:1 $\longrightarrow$	0.25	0.1			
	Laminar	Turbulent																					
1:1 $\longrightarrow$	0.2	0.3																					
2:1 $\longrightarrow$	0.6	0.2																					
4:1 $\longrightarrow$	0.35	0.15																					
8:1 $\longrightarrow$	0.25	0.1																					

FIGURE 9.17 – Coefficients de trainée sur différents profils pour  $Re > 10^4$  (d'après White, 1994)

trainée ne dépend que du Reynolds et pourvu que ce dernier soit maintenu constant, on peut réaliser des maquettes à échelle réduite.

Il faut noter enfin que pour des vitesses très élevées, le coefficient de trainée dépend aussi du nombre de Mach. Des corrections au cas incompressible sont alors souvent fournies sous forme d'abaques. Le livre de [White \(1994\)](#) discute ce genre de données, et est un bon point de départ vers des ouvrages plus spécialisés.



## Annexe A

# Puissance du poids et premier principe

Il s'agit d'évaluer l'intégrale :

$$I = \iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV,$$

sur un tube de courant contenant éventuellement une surface mobile.

Remarquons que la pesanteur  $\mathbf{g}$  dérive d'un gradient. Si l'on oriente l'axe  $0z$  vers le haut, nous avons  $\mathbf{g} = \mathbf{grad}(-gz)$ . En utilisant de plus la formule  $\operatorname{div}(a\mathbf{u}) = a \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{grad} a) \cdot \mathbf{u}$ , nous avons :

$$\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -\operatorname{div}(\rho g z \mathbf{v}) + gz \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Utilisons de plus l'équation de conservation de la masse pour évaluer  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$  :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} &= -\operatorname{div}(\rho g z \mathbf{v}) - gz \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\operatorname{div}(\rho g z \mathbf{v}) - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t}, \end{aligned}$$

en remarquant que  $gz$  n'est pas une fonction du temps. Par conséquent l'intégrale  $I$  devient :

$$I = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho g z \mathbf{v}) \, dV - \iiint_V \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t} \, dV.$$

La première intégrale peut être transformée en intégrale de surface par la formule d'Ostrogradski ; dans la seconde, dérivation par rapport à  $t$  et intégration sur  $V$  ne commutent pas s'il existe une surface en mouvement (dans le cas d'une machine). On doit donc utiliser le théorème de transport et on obtient :

$$\begin{aligned}
I &= - \iint_S \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dV - \iiint_V \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t} \, dV \\
&= - \iint_S \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dV - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho g z \, dV + \iint_S \rho g z \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&= - \iint_S \rho g z (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, dV - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho g z \, dV.
\end{aligned}$$

L'intégrale de surface est nulle sur toutes les parois solide en raison de la condition d'étanchéité, et elle se réduit aux surfaces d'entrée  $S_e$ , de sortie  $S_s$ . En supposant que sur les surfaces d'entrée et sortie,  $z$ ,  $\rho$  et  $\mathbf{v}$  sont à peu près constants, on obtient :

$$I = \rho_e g z_e v_e S_e - \rho_s g z_s v_s S_s - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho g z \, dV.$$

En introduisant le débit massique  $\dot{M} = \rho v S$ , on obtient :

$$I = \dot{M}_e g z_e - \dot{M}_s g z_s - \frac{dE_p}{dt},$$

et la formule (4.25) s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt}(U + K + E_p) = \dot{M}_e \left( h_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) - \dot{M}_s \left( h_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (\text{A.1})$$

# Annexe B

## Rappels d'analyse vectorielle

### B.1 Expressions tensorielles

Le *produit tensoriel*  $\overline{\overline{\mathbf{A}}} : \overline{\overline{\mathbf{B}}}$  est le scalaire  $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ . C'est une généralisation aux tenseurs du produit scalaire de deux vecteurs. Il est invariant par rapport au choix des axes dans lesquels on exprime le tenseur.

Le *tenseur gradient* s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ \frac{\partial w_z}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Son utilisation est détaillée dans la section [B.6](#).

La *divergence d'une tenseur* est le vecteur défini, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\text{div} \overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Dérivation de produits

$$\text{div}(a\mathbf{u}) = a \text{ div } \mathbf{u} + \text{grad } a \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{grad}(ab) = a \mathbf{grad} b + b \mathbf{grad} a \quad (\text{B.4})$$

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}\cdot\mathbf{u}) = (\operatorname{div}\overline{\overline{\mathbf{T}}})\cdot\mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{T}}} : \overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{u} \quad (\text{B.5})$$

### B.3 Formules intégrales

Si  $S$  représente une surface fermée limitant un volume  $V$ , on a :

$$\iiint_V \mathbf{grad} a \, dV = \iint_S a \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.6})$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.7})$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \, dV = \iint_S \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.8})$$

Conséquences :

$$\iint_{S_{\text{fermée}}} \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (\text{B.9})$$

que l'on obtient à partir de (B.6) avec  $a = 1$ , et, si  $M$  est un point quelconque de  $S$ , on a aussi :

$$\iint_{S_{\text{fermée}}} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (\text{B.10})$$

### B.4 Terme convectif de l'équation de Navier-Stokes

La notation formelle  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  ne fonctionne qu'en coordonnées cartésiennes, pas en curvilignes. En voici 2 définitions plus générales, valables quel que soit le système de coordonnées.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.11})$$

$$= \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} + \mathbf{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \quad (\text{B.12})$$

### B.5 Divergence du tenseur de déformation / Laplacien vectoriel

L'obtention des équations de Navier-Stokes passe par le calcul de la divergence du tenseur des contraintes donc, pour un fluide Newtonien, de la divergence de

$\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} +^T \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v}$ . On montre aisément que :

$$\text{div} \left( \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} +^T \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} \right) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{B.13})$$

qui se réduit au seul laplacien de  $\mathbf{v}$  dans le cas incompressible. Dans le cas inverse, d'autres écritures sont possibles grâce à l'identité :

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{B.14})$$

Cette écriture est utilisée notamment lorsque l'on s'intéresse à l'écriture d'une équation régissant la vorticité  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Le terme  $\text{grad}(\text{div } \mathbf{v})$  revêt une importance particulière pour les fluides visqueux compressibles, pour lesquels une seconde viscosité est nécessaire pour décrire complètement la rhéologie, et est importante dans l'étude de l'atténuation des ondes acoustiques. On pourra se référer au livre de Chassaing (2000).

## B.6 Dérivée particulaire

La variation d'une grandeur locale  $g(x, y, z, t)$  associée à un petit volume de fluide se déplaçant d'un point de coordonnées  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  à un point  $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$  pendant un intervalle de temps  $dt$  est :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \overline{\overline{\text{grad}}} g \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{B.16})$$

Mais on a  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  et par conséquent :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}}} g \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.17})$$

On voit que la variation de  $g$  est liée à deux causes : sa variation temporelle intrinsèque  $\partial g / \partial t$  (par exemple l'échauffement lié à une compression locale) et sa variation à cause du déplacement de la particule fluide dans un champ inhomogène (la particule chauffe parce qu'elle voyage d'une zone froide vers une zone chaude par exemple). La grandeur ci-dessus est appelée dérivée particulaire. On la note souvent  $Dg/Dt$  pour bien spécifier que  $g$  est une fonction de plusieurs variables, et ne pas la confondre avec la dérivée classique d'une fonction d'une variable.

Si on applique l'équation (B.17) aux 3 composantes d'un vecteur  $\mathbf{w}$  il est facile de voir que la relation se généralise en :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.18})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement utilise une telle relation où le vecteur  $\mathbf{w}$  n'est autre que la vitesse  $\mathbf{v}$ .

Si  $g$  est une grandeur extensive massique, on démontre facilement l'identité suivante, en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$\rho \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho g \mathbf{v}) \quad (\text{B.19})$$

Cette formule est utile pour exprimer les équations sous forme dite "conservative", en particulier pour la conservation de l'énergie. On reconnaît, dans l'intérieur de l'opérateur divergence, l'expression d'un flux convectif.

## B.7 Dérivée temporelles d'intégrales

On rappelle que lorsque l'on dérive une intégrale sur un volume  $W(t)$  quelconque dépendant du temps, il faut écrire la règle de Leibniz :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W(t)} \xi \, dV = \iiint_{W(t)} \frac{\partial \xi}{\partial t} \, dV + \iint_{S_{W(t)}} \xi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.20})$$

où  $\mathbf{w}$  est la vitesse locale de la surface  $S$ . Si cette dernière est immobile,  $\iiint$  et  $\partial/\partial t$  commutent.

Si le volume  $V(t)$  suit le fluide dans son mouvement, (volume lagrangien, qui contient alors toujours les mêmes particules), on remplace  $\mathbf{w}$  par  $\mathbf{v}$  dans l'équation ci-dessus. Dans ce cas, si  $\xi$  est une grandeur massique, on peut utiliser de plus les relations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \xi \, dV = \iiint_{V(t)} \rho \frac{D\xi}{Dt} \, dV \quad (\text{B.21})$$

$$= \iiint_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho \xi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \xi \mathbf{v}) \right] \, dV \quad (\text{B.22})$$

où  $D$  est la dérivée particulaire définie dans la section B.6, et la deuxième égalité découle de la relation (B.19). On peut retrouver toutes les équations de conservation mentionnées dans ce document à partir de l'équation (B.22), en appliquant les lois physiques (conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique et premier principe) sur le système fermé  $V(t)$ . Le terme de transport  $\operatorname{div}(\rho \xi \mathbf{v})$  apparaît alors naturellement.

On peut enfin appliquer la règle de Leibniz à la machine fluide, dont le volume  $W(t)$  n'est ni lagrangien (les entrées et sorties sont traversées par du fluide), ni eulérien (à

cause de l'hélice, le volume change de forme au cours du temps). Supposons qu'une grandeur massique  $g$  suive la loi de conservation locale générale :

$$\frac{\partial \rho g}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho g \mathbf{v}) = r \quad (\text{B.23})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{W(t)} \rho g \, dV &= \iiint_{W(t)} \frac{\partial \rho g}{\partial t} \, dV + \iint_{S_W(t)} \rho g \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{d'après (B.20)} \\ &= \iiint_{W(t)} -\operatorname{div}(\rho g \mathbf{v}) + r \, dV + \iint_{S_W(t)} \rho g \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{d'après (B.23)} \\ &= \iint_{S_W(t)} -\rho g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_{W(t)} r \, dV + \iint_{S_W(t)} \rho g \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{Ostrogradski}) \\ &= \iint_{S_W(t)} -\rho g (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_{W(t)} r \, dV \end{aligned}$$

Sur la surface de l'hélice  $S_u$ , on a  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  à cause de la condition d'adhérence, et il ne reste que les contributions sur la surface d'entrée  $S_e$  et la surface de sortie  $S_s$ , qui sont fixes donc sur lesquelles  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Le bilan sur le volume  $W(t)$  s'écrit donc :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{W(t)} \rho g \, dV}_{\text{Variation de } G \text{ dans } W} + \underbrace{\iint_{S_e+S_s} \rho g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{g sortant - g rentrant}} = \underbrace{\iiint_{W(t)} r \, dV}_{\text{Production - Destruction de } g}$$

qui est bien le bilan écrit sous la forme (2.12), ce qui justifie l'argument utilisé Sec. 4.3.4. On voit donc que le bilan obtenu est le même que si nous avions considéré un volume  $W$  eulérien en l'absence d'hélice. Physiquement cela tient au fait que bien que l'hélice tourne, elle est imperméable au fluide et ne génère aucun terme de transport dans le bilan.

## B.8 Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

On notera les composantes du vecteur vitesse  $(v_r, v_\theta, v_z)$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{grad} s = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\nabla^2 s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

### Attention aux formules suivantes !

1. Le Laplacien d'un vecteur **n'est pas** le vecteur formé par le Laplacien des composantes du vecteur en coordonnées curvilignes.
2. La notation formelle  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  **ne fonctionne pas** en coordonnées curvilignes.

Leurs expressions sont :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

Tenseur des vitesses de déformation :

$$2\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} & 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Divergence d'un tenseur <sup>1</sup> :

$$\text{div } \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) & + & \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} & - & \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{\theta r}) & + & \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} & + & \frac{1}{r}(\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r}) \\ \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r} & + & \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} & + & \frac{1}{r}\tau_{zr} \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

---

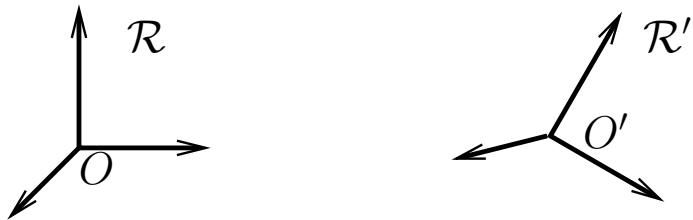
1. Présentation intelligente empruntée au [cours en ligne de de Daniel Choï](#) de l'Université de Caen



# Annexe C

## Rappel sur les forces d'inertie

### C.1 Rappel : composition des accélérations



On considère un repère  $\mathcal{R}'$  lié à  $O'$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  lié à  $O$ . On veut écrire une relation entre les accélérations dans ces deux référentiels. On montre que pour un point  $A$  en mouvement quelconque :

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = \mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c, \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{a}_e$  est l'accélération d'entraînement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{A} + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{A}). \quad (\text{C.2})$$

Le premier terme est lié à la translation, le second à l'accélération angulaire, le troisième à la rotation, de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . L'accélération de Coriolis  $\mathbf{a}_c$  s'écrit :

$$\mathbf{a}_c = 2\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}'} . \quad (\text{C.3})$$

*Remarque importante* : pour un point  $A$  immobile dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , l'accélération de Coriolis est nulle. Ce sera le cas d'un fluide immobile dans  $\mathcal{R}'$ .

## C.2 Forces d'inertie

On cherche à voir dans quelle mesure on peut écrire la loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen. Commençons par l'écrire dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  pour un point A de masse  $m$  :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = \Sigma\mathbf{F}, \quad (\text{C.4})$$

soit en vertu de (C.1) :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} = \Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c. \quad (\text{C.5})$$

On voit donc que la loi de la dynamique est transposable dans  $\mathcal{R}'$  sous réserve de prendre en compte deux forces supplémentaires  $\mathbf{f}_{i_e}$  et  $\mathbf{f}_{i_c}$  dites ■d'inertie d'entraînement■ et ■d'inertie de Coriolis■. La force d'entraînement est couramment ressentie dans une voiture qui freine ou qui prend un virage, dans un manège forain, dans un ascenseur au démarrage ou à l'arrêt. Elle est également mise à profit dans les vols paraboliques, où elle compense exactement la pesanteur à l'intérieur de la cabine de l'avion.

La force d'inertie de Coriolis est responsable notamment de la déviation vers l'est (pendule de Foucault) et du mouvement des masses nuageuses. En revanche, contrairement à une idée reçue *elle n'est pas* responsable du tourbillon de vidange dans un lavabo, et dont le sens de rotation serait prétendument opposé dans les deux hémisphères.

## Annexe D

# Démonstration du théorème de l'énergie cinétique

Reprendons l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement (4.31) en utilisant la formule (B.11) et faisons-en le produit scalaire par le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ . Nous obtenons (en remarquant que le produit mixte  $(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$  est nul :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot \mathbf{v} = - \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}_v) \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{D.1})$$

Examinons tout d'abord le premier membre. Nous avons :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nous avons également, en utilisant (B.3) :

$$\rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{div} \left( \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) - \frac{v^2}{2} \mathbf{div} (\rho \mathbf{v}),$$

et le premier membre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{div} \left( \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) - \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \mathbf{v}) \right)}_{= 0 \text{ d'après l'équation de conservation de la masse (4.29)}} \frac{v^2}{2}. \end{aligned}$$

Examinons maintenant le second membre de (D.1). On a en utilisant (B.3) et (B.5) :

$$-\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}_v) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{div} (p \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{div} (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{v}) + p \mathbf{div} \mathbf{v} - \bar{\bar{\sigma}}_v : \overline{\mathbf{grad}} \mathbf{v}$$

L'équation (D.1) s'écrit donc finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left( \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{v}) + p \operatorname{div} \mathbf{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v}. \quad (\text{D.2})$$

En intégrant cette équation sur tout le volume  $V$ , en utilisant les formules de Green-Ostrogradski (B.7), (B.8), et en rappelant que le tenseur  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est symétrique, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \frac{v^2}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \underbrace{\iint_S -p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces extérieures} \\ W}} + \underbrace{\iint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces extérieures} \\ W}} + \underbrace{\iint_S (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces extérieures} \\ W}} \\ &+ \underbrace{\iint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces intérieures} \\ \text{de pression}}} - \underbrace{\iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}_v : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces visqueuses} \\ \text{intérieures} \\ = -\Phi_v}}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

qui est bien l'équation (4.27). Nous savons d'après le cours sur les fluides visqueux que

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v = \eta \left( \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} + {}^T \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} \right)$$

et le produit  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_v : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v}$  vaut donc

$$\eta \left( {}^T \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} + \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} \right) : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} = 2\eta (\overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v})^2$$

Il est donc toujours positif, si bien que la puissance des forces visqueuses intérieure est toujours négative. C'est donc un puit d'énergie cinétique pour le fluide.

## Annexe E

# Diverses formes de l'équation de conservation de l'énergie

En soustrayant le théorème de l'énergie cinétique (D.2) du premier principe sous forme locale (4.32), on obtient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_v : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (\text{E.1})$$

Les deux premiers termes du membre de droite représentent la puissance des forces intérieures, respectivement de pression (réversible) et visqueuses (irréversible). Comme indiqué dans l'annexe précédente, la puissance des forces visqueuses intérieures  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_v : \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \mathbf{v}$  est toujours positive, et nous le noterons désormais  $\phi_v$ . Ce terme contribue toujours à une augmentation de l'énergie interne du fluide, ce qui se traduit par exemple de l'échauffement des fluides de lubrification, cisailé entre deux pièces mobiles.

Le membre de gauche peut être également écrit  $\rho Du/Dt$ , où  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}$  est la dérivée particulière, d'où :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (\text{E.2})$$

ou encore, sous forme conservative, en utilisant (B.19) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{v}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (\text{E.3})$$

Les équations qui suivent sont toutes issues de cette dernière, mais utilisent des fonctions d'état autres que l'énergie interne. On peut par exemple utiliser l'enthalpie,

donnée sous forme différentielle par :

$$h = u + \frac{p}{\rho}, \quad (\text{E.4})$$

et par conséquent

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (\text{E.5})$$

La conservation de la masse s'écrit par ailleurs

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

et l'équation (E.5) s'écrit donc également

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (\text{E.6})$$

En remplaçant cette expression dans (E.2), on obtient donc :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (\text{E.7})$$

ou encore, sous forme conservative, en utilisant (B.19) :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{v}) = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (\text{E.8})$$

Il convient de noter ici une simplification importante de cette équation, avec les hypothèses suivantes :

- pour un gaz parfait ou un liquide incompressible  $dh = c_p dT$ ,
- le flux de chaleur conductif est donné par la loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ .

L'équation (E.8) s'écrit alors :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v} - \lambda \operatorname{grad} T) + \frac{Dp}{Dt} + \phi_v. \quad (\text{E.9})$$

L'expression à l'intérieur de l'opérateur  $\operatorname{div}$  contient deux flux : le flux convectif  $\rho c_p T \mathbf{v}$  et le flux conductif  $-\lambda \operatorname{grad} T$ . Le terme en  $Dp/Dt$  est négligeable lorsque les variations spatiales et temporelles de la pression sont faibles, c'est souvent le cas pour des liquides. La puissance des forces intérieures  $\phi_v$  est souvent négligeable pour les gaz, et également dans de nombreux cas pour les liquides. C'est en revanche ce terme qui produit un échauffement du fluide dans les écoulements de lubrification.

La conductivité thermique peut être sortie de l'opérateur divergence si les variations de température au sein de l'écoulement sont faibles. En effet, en général  $\lambda$  varie avec  $T$ , et il augmente notablement pour les gaz chauds.

On notera enfin que si la vitesse est nulle (fluide au repos ou solide),  $\mathbf{v}$ ,  $\phi_v$  et  $DP/Dt$  sont identiquement nul, et on retrouve l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T. \quad (\text{E.10})$$

Enfin, il est intéressant de déduire des équations précédentes une équation pour l'entropie massique  $s$ , par exemple à partir de  $dh = dp/\rho + Tds$  et de (E.8). On obtient aisément l'équation locale :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{\phi_v}{T},$$

où l'on peut reformuler le premier terme du membre de droite pour obtenir :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \operatorname{div} \left( -\frac{1}{T} \mathbf{q} \right) + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T} + \frac{\phi_v}{T}.$$

En intégrant cette relation sur le volume de fluide, on obtient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho s \, dV}_{\text{Accumulation d'entropie}} = \underbrace{- \iint_S \rho s \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Entropie entrante - sortante}} + \underbrace{\iint_S \frac{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\dot{S}_e \text{ variation d'entropie réversible}} \\ + \underbrace{\iiint_V \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T} \, dV}_{\dot{S}_T \text{ variation d'entropie irréversible liée aux flux de chaleur}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\phi_v}{T} \, dV}_{\dot{S}_V \text{ variation d'entropie irréversible liée aux flux de QDM}}$$

La variation réversible d'entropie  $\dot{S}_e$  n'est autre que le  $Q/T$  de la thermodynamique ramené par unité de temps, et en prenant en compte le fait que la température n'est pas nécessairement homogène sur la frontière du domaine fluide.

Le terme de la seconde ligne s'identifie donc avec la variation irréversible d'entropie  $\dot{S}_i = \dot{S}_T + \dot{S}_V$  (le  $\Delta_i S$  ou  $\Delta S_P$  ou  $\Delta S_C$  de la thermodynamique, selon les notations). Le premier terme est lié aux gradients de température, tandis que le second est lié à la puissance dissipée par les forces visqueuses internes. On peut ré-exprimer  $\dot{S}_T$  en utilisant la loi de Fourier  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$  :

$$\dot{S}_T = \lambda \frac{\|\operatorname{grad} T\|^2}{T^2}$$

ce qui montre qu'il est bien toujours positif, tandis que le terme mécanique vaut, pour un fluide newtonien :

$$\dot{S}_V = \frac{2\eta \|\overline{\operatorname{grad} \mathbf{v}}\|^2}{T}$$

et est bien également positif. Ce résultat démontre l'origine des irréversibilités mises en jeu dans le mouvement d'une fluide., et fait le lien avec le cours de thermodynamique.



## Annexe F

### Glossaire

Français	English
Mécanique des fluides	Fluid mechanics, fluid dynamics
Hydrodynamique	Hydrodynamics
Ecoulement	Flow
Couche limite	Boundary layer
Sillage	Wake
(Coefficient de) Trainée	Drag (coefficient)
(Coefficient de) Portance	Lift (coefficient)
Ecoulement laminaire	Laminar flow
Ecoulement rampant	Creeping flow
Turbulence, écoulement turbulent	Turbulence, turbulent flow
Tourbillon	Eddy
Amont	Upstream
Aval	Downstream
Ligne de courant	Streamline
Tube de courant	Stream tube
Point d'arrêt	Stagnation point
Ecoulement en conduite, en tuyauterie	Pipe flow
Ecoulement fluvial, écoulement en canal	River flow, open channel flow
Ecoulement piston	Plug flow
Nombre adimensionnel	Dimensionless number

Français	English	Notation
Débit volumique	Volumetric flow rate, flow rate	$\dot{V}, Q$
	Volume flow rate	
Débit massique	Mass flow rate	$\dot{m}, \dot{M}, q$
Débit molaire	Molar flow rate	$\dot{n}, \dot{N}, F$
Pression	Pressure	$p$
(Champ de) vitesse	Velocity (field)	$\mathbf{v}, \mathbf{u}$
Quantité de mouvement	Momentum	
Masse volumique	Density	$\rho$
Densité	Specific density	$d$
Viscosité dynamique	Dynamic viscosity	$\eta$ (french), $\mu$
Viscosité cinématique	Kinematic viscosity	$\nu$
Conductivité thermique	Thermal conductivity	$\lambda$ (french), $k, K, \kappa$
Diffusivité thermique	Thermal diffusivity	$\alpha, \chi, \kappa$
Déformation	Strain	
Vitesse de déformation (scalar <sup>a</sup> )	Strain rate	$\gamma, \dot{\gamma}$
	Shear rate	
Vitesse de déformation (tenseur)	Strain rate (tensor)	$\overline{\overline{D}}, \overline{\overline{E}}, \overline{\overline{S}}, \overline{\overline{\epsilon}}$
Contraintes	Stress	$\overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{\Sigma}}, \overline{\overline{\tau}}$
(tenseur des)	(tensor)	
Contraintes visqueuses	Viscous stress	$\overline{\overline{\sigma_v}}, \overline{\overline{\Sigma_v}}, \overline{\overline{\tau}}$
(tenseur des)	(tensor)	
Produit vectoriel	Cross product, vector product	$\wedge$ (french), $\times$
Vorticité	Vorticity	$\boldsymbol{\omega}$
Gradient	Gradient	$\mathbf{grad} s$ (french), $\nabla s$
Divergence	Divergence	$\text{div } \mathbf{v}$ (french), $\nabla \cdot \mathbf{v}$
Rotationnel	Curl	$\mathbf{rot} \mathbf{v}$ (french) $\mathbf{curl} \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{v}^b$

<sup>a</sup> when the velocity is directed along a constant direction, as in Couette flow or in purely sheared flow.

<sup>b</sup> Note that anglo-saxon notation for vector product is  $\times$ , not  $\wedge$ , see “produit vectoriel”

Français	English
Hauteur	Height
Charge <sup>c</sup>	Head <sup>c</sup>
Charge de pression	Pressure head
Charge dynamique	Velocity head
Perte de charge <sup>d</sup>	Head loss <sup>d</sup>
Perte de charge régulière, linéique	Major head loss, major loss
Perte de charge singulière	Minor head loss, minor loss, local loss
Coefficient de perte de charge	Loss factor, friction factor, loss coefficient
Abaque ou diagramme de Moody	Moody chart or diagram
Diamètre hydraulique	Hydraulic diameter
Equivalent diameter	
Tuyau, conduite, tuyauterie	Pipe, duct
Elargissement brusque	Sudden expansion
Rétrécissement brusque	Sudden contraction
Venturi	Venturi
Fente	Slit
Coude	Elbow
Tube coudé	Bend pipe
Séparation, collecteur <sup>e</sup>	Manifold
distributeur	
Pompe	Pump
Pompe centrifuge	Centrifugal pump
Puissance utile	Shaft power
Hauteur utile	Pump head, pumping head
Cuve, réservoir	Tank
Buse	Nozzle
Vanne	Valve
Clapet anti-retour	Check valve

<sup>c</sup> In both languages, the term describes the mechanical energy of the fluid expressed either in height or in pressure.

<sup>d</sup> Same remark as note c.

<sup>e</sup> In the sense of the reunion of several tubes into a single one, or the opposite.

## Références bibliographiques

- R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport phenomena*. John Wiley and sons, 1960.
- S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- P. Chassaing. *Mécanique des fluides. Eléments d'un premier parcours*. Cepaduès, 2000.
- E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences/CNRS Editions, 2001.
- I. E. Idelcik. *Memento des pertes de charge : Coefficients de pertes de charge singulières et de pertes de charge par frottement*. Eyrolles, 1969.
- F. M. White. *Fluid Mechanics*. Mc Graw-Hill, 1994.