Lycée Buffon — DM 11
MPSI — Année 2020-2021

devoir à rendre le 15/03/2021

Pour tout entier n, on définit le polynôme $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$

1. Déterminer le degré de Q_n.
2. Pour tout entier naturel r, montrer que

$$(1)\ :\qquad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{2r+1}{2p+1} X^{2r-2p}$$

3. (a) Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles.
   (b) En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Pour tout entier naturel r, montrer que

$$(2)\ :\qquad Q_{2r} = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)\right)$$

5. En utilisant (1) et (2), établir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right) = \frac{r(2r-1)}{3}$$

6. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

7. (a) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, établir les inégalités :

$$\operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

   (b) En déduire un encadrement de

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$$

   (c) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.