Corrigé du devoir à rendre le 2/11/2020

Exercice 1 : Soit E un ensemble. Pour tout couples (A,B) de parties de E, on pose :

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus (A\cap B)$$

Soient A, B et C des parties de E

1. *Illustrer la définition de $A\Delta B$ par un dessin.*
2. Comme $A\cup B = B\cup A$ et $A\cap B = B\cap A$, on a bien $\boxed{A\Delta B = B\Delta A}$
3. On a $A\cup E = E$ et $A\cap E = A$, on a $\boxed{A\Delta E = E\setminus A = \bar{A}}$

   De même, $A\cup\emptyset = A$ et $A\cap\emptyset = \emptyset$, donc $\boxed{A\Delta\emptyset = A}$

   $A\cup A = A\cap A = A$, donc $\boxed{A\Delta A = \emptyset}$

   $A\cup\bar{A} = E$ et $A\cap\bar{A} = \emptyset$, donc $\boxed{A\Delta\bar{A} = E}$
4. Tout d'abord, on remarque que

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\cup B)\setminus (A\cap B)\\
&= (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}\\
&= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&= \big((A\cup B)\cap\bar{A}\big)\cup\big((A\cup B)\cap\bar{B}\big)\\
&= (B\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A\Delta B = (B\setminus A)\cup(A\setminus B)}$

   Enfin, on a $\bar{A}\setminus\bar{B} = \bar{A}\cap B = B\setminus A$ et, de même $\bar{B}\setminus\bar{A} = A\setminus B$, donc

$$\bar{A}\Delta\bar{B} = (\bar{A}\setminus\bar{B})\cup(\bar{B}\setminus\bar{A}) = (B\setminus A)\cup(A\setminus B) = A\Delta B$$

   Donc $\boxed{A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}}$
5. On a

$$\begin{aligned}
(A\cap B)\Delta(A\cap C) &= [(A\cap B)\cup(A\cap C)]\cap\big(\overline{A\cap B\cap C}\big)\\
&= [A\cap(B\cup C)]\cap\big(\overline{A}\cup\overline{B\cap C}\big)\\
&= \big[A\cap(B\cup C)\cap\overline{A}\big]\cup\big[A\cap(B\cup C)\cap\overline{B\cap C}\big]\\
&= \emptyset\cup[A\cap(B\Delta C)]
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)}$
6. On a

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\cap\overline{B\Delta C})\cup(\overline{A}\cap(B\Delta C))$$

   Or, $B\Delta C = (B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})$ et $\overline{B\Delta C} = (\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap C)$ donc

$$\begin{aligned}
A\Delta(B\Delta C) &= (A\cap((\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap C))\cup(\overline{A}\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})))\\
&= (A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)
\end{aligned}$$

   En échangeant les rôles joués par A et C, on a $A\Delta(B\Delta C) = C\Delta(B\Delta A)$ donc

$$\boxed{A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C}$$

7. Pour tout entier n non nul, on définit l'assertion $H(n)$: "$A_1\Delta A_2...\Delta A_n$ est l'ensemble des éléments de E appartenant Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_n$"

   Les assertions $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies. Supposons $H(n)$ vraie pour un certain entier non nul.

   Soit $x\in A_1\Delta A_2...\Delta A_{n+1} = (A_1\Delta A_2...\Delta A_n)\Delta A_{n+1}$ alors
   - soit $x\in(A_1\Delta A_2...\Delta A_n)$ et $x\notin A_{n+1}$ et dans ce cas x appartient Ã Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_n$ et n'appartient pas Ã A_{n+1} donc x appartient Ã Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_{n+1}$.
   - soit $x\notin(A_1\Delta A_2...\Delta A_n)$ et $x\in A_{n+1}$ et dans ce cas x appartient Ã Ã un nombre pair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_n$ et appartient Ã A_{n+1} donc x appartient Ã Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_{n+1}$.

   Réciproquement, si x appartient Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_{n+1}$ alors
   - soit x appartient Ã A_{n+1} et donc x appartient Ã un nombre pair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_n$ i.e. $x\notin A_1\Delta A_2...\Delta A_n$ d'où $x\in(A_1\Delta A_2...\Delta A_n)\Delta A_{n+1} = A_1\Delta A_2...\Delta A_{n+1}$.
   - soit x n'appartient pas Ã A_{n+1} et donc x appartient Ã un nombre impair de parties parmi $A_1,\ A_2,..,\ A_n$ d'où $x\in(A_1\Delta A_2...\Delta A_n)\Delta A_{n+1} = A_1\Delta A_2...\Delta A_{n+1}$.

   Ainsi, $H(n+1)$ est vérifiée.

   Par conséquent, pour tout entier n, l'assertion $H(n)$ est vraie.
8. Par définition, $A\Delta B = (A\cup B)\cap\overline{A\cap B}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{A\cup B}\mathbf{1}_{\overline{A\cap B}} = (\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(1-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\\
&= \mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B}$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C-2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C-2\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C-2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C)\\
&= \mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C+2\mathbf{1}_C(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\\
&= \mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C}$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\cap(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_C-2\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C)=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C-2(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C)\\ &= \mathbf{1}_{A\cap B}+\mathbf{1}_{A\cap C}-2\mathbf{1}_{A\cap B}\mathbf{1}_{A\cap C}\\ &= \mathbf{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$

9. On a déjÃ montré que $\emptyset\Delta B=B$.
Réciproquement, supposons que $A\Delta B=B$ et que A soit non vide alors il existe $x\in A$ et
   – soit $x\in B$ et dans ce cas, $x\in A\cap B$ ce qui est impossible car x appartient à $B=A\Delta B$
   – soit $x\in\overline{B}$ donc $x\in A\cap\overline{B}\subset A\Delta B$ puis $x\in B$ ce qui est impossible.

   Par conséquent, $A\Delta B=B\;\Rightarrow\;A=\emptyset$ puis $\boxed{A\Delta B=B\;\Leftrightarrow\;A=\emptyset}$
10. D'après la question précédente et la question 4, on a :
$$A\Delta B=\overline{B}\;\Leftrightarrow\;\overline{A}\Delta\overline{B}=\overline{B}\;\Leftrightarrow\;\overline{A}=\emptyset\Leftrightarrow A=E.$$
Donc
$$\boxed{A\Delta B=\overline{B}\;\Leftrightarrow\;A=E}$$
11. Supposons $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$.
Soit $x\in B\cap\overline{C}$ alors
   – soit $x\in A$ et alors $x\in A\Delta C$ donc $x\in A\Delta B\cap(A\cap B)=\emptyset$
   – soit $x\in\overline{A}$ et alors $x\in A\Delta B$ donc $x\in A\Delta C\cap(\overline{A}\cap\overline{C})=\emptyset$

   Donc $B\cap\overline{C}=\emptyset$ i.e. $B\subset C$. Par symétrie, on a $C\subset B$ puis $B=C$. Ainsi
$$\boxed{A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C}$$

Exercice 2 : Soit $f\in F^E$.

1. *Démontrer que* $\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(F),\;\; f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)=f(A)\cap B$.

   Soit $(A,B)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(F)$.
Soit $y\in f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)$. Par définition, il existe $x\in A\cap f^{-1}(B)$ tel que $y=f(x)$. Comme $x\in A$, $f(x)\in f(A)$ et comme $x\in f^{-1}(B)$, $f(x)\in B$. Ainsi $y\in f(A)\cap B$, ce qui prouve $\boxed{f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)\subset f(A)\cap B.}$

   Réciproquement soit $x\in f(A)\cap B$. Par définition il existe $a\in A$ tel que $x=f(a)$. Comme $f(a)=x\in B$, on a $a\in f^{-1}(B)$ donc $a\in A\cap f^{-1}(B)$. Par suite $x=f(a)\in f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)$, ce qui prouve que $\boxed{f(A)\cap B\subset f\left(A\cap f^{-1}(B)\right).}$

   Par suite $\boxed{\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(F),\;\; f\left(A\cap f^{-1}(B)\right)=f(A)\cap B.}$

2. *Montrer que f est bijective si et seulement si* $\forall A\in\mathcal{P}(E)\,,\; f(\overline{A})=\overline{f(A)}$

   • Supposons f bijective . Soit $A\in\mathcal{P}(E)$, montrons que $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.
Soit $x\in f(\overline{A})$. Il existe donc $b\in\overline{A}$ tel que $x=f(b)$. Pour tout $a\in A$, $b\neq a$, l'injectivité de f implique donc que, pour tout $a\in A$, $f(b)\neq f(a)$. Par suite $x=f(b)\notin f(A)$ c'est-à-dire $x\in\overline{f(A)}$. On a donc prouvé $\boxed{f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}.}$
Soit $x\in\overline{f(A)}$. Comme f est surjective, il existe $t\in E$ tel que $x=f(t)$. Comme $x\notin f(A)$, $t\notin A$ donc $t\in\overline{A}$. Ainsi $x=f(t)\in f(\overline{A})$, ce qui prouve que $\boxed{\overline{f(A)}\subset f(\overline{A}).}$

   • Supposons que $\forall A\in\mathcal{P}(E)\,,\; f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ et montrons que f est bijective.
On a $f(E)=f(\overline{\emptyset})=\overline{f(\emptyset)}=F$ donc f est surjective.
Soit $(x,x')\in E^2$ tel que $x\neq x'$. On a $x'\in\overline{\{x\}}$ donc
$$f(x')\in f(\overline{\{x\}})=\overline{f(\{x\})}=\overline{\{f(x)\}}$$
donc $f(x)\neq f(x')$ ce qui prouve l'injectivité de f.

   Ainsi f est bijective si et seulement si $\forall A\in\mathcal{P}(E)\,,\; f(\overline{A})=\overline{f(A)}$

Exercice 3 : Soit $f\;:\;z\mapsto\dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Pour tout complexe z différent de i, le complexe $\dfrac{z+i}{z-i}$ existe.
De plus, pour tout complexe z, on a
$$f(z)=1\Leftrightarrow z+i=z-i$$
donc $f(z)\neq 1$.
L'application f est donc bien définie.
Soit $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a
$$f(z)=Z\Leftrightarrow\frac{z+i}{z-i}=Z\Leftrightarrow z+i=Z(z-i)$$
car $z\neq i$. Ainsi
$$f(z)=Z\Leftrightarrow z(Z-1)=i+iZ\Leftrightarrow z=\frac{i(1+Z)}{Z-1}$$
car $Z\neq 1$.
Par conséquent, tout complexe $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ admet un unique antécédent par f égal à $\dfrac{i(1+Z)}{Z-1}$. Autrement dit, f réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et on a
$$\boxed{f^{-1}\;:\;\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}\setminus\{i\},\; z\mapsto\frac{i(1+Z)}{Z-1}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|f(x)|^2 = \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 1$ donc $|f(z)| = 1$. Ainsi, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U}$.

   Comme f est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a donc $\boxed{f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{U} \setminus \{1\}}$.

   Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors $z = f(t)$ avec $t = \dfrac{i(1+z)}{z-1}$. Il reste à prouver que t est réel.
   Comme z est de module 1, il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Par conséquent :

$$t = \frac{i(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}-1} = \frac{2i\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} \in \mathbb{R}$$

   Par suite, $\boxed{\mathbb{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ différent de 1. On a $f(ix) = \dfrac{ix+i}{ix-i} = \dfrac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset \mathbb{R}.}$

   Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, alors $z = f(t)$ avec $t = \dfrac{i(1+z)}{z-1}$. Comme t est imaginaire pur différent de i, on a donc $\boxed{\mathbb{R} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}).}$

4. Soit z un complexe distinct de i alors

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i} = \frac{|z|^2 + 2i\text{Ré}(z) - 1}{|z-1|^2}$$

   Ainsi,

$$z \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \text{Ré}(f(z)) < 0 \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{Q}^-$$

   Par suite, $\boxed{f(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}^-.}$
   Soit z un complexe distinct de i alors

$$z \in \mathbb{Q}^- \Leftrightarrow \Re(z) < 0 \Leftrightarrow \Im(f(z)) < 0 \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{P}^-$$

   Par suite, $\boxed{f(\mathbb{Q}^-) = \mathbb{P}^-.}$

Complément : On cherche à généraliser les résultats obtenus
Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur birapport par

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

1. Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4.

   L'argument du birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est la différence des angles $\widehat{\overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_1M_3}}$ et $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_2M_3}}$.

   Si les points sont alignés alors ces angles sont tous les deux nuls modulo π et l'argument du birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est lui aussi nul modulo π. Le birapport est donc réel.
   Si les points sont cocycliques et si Ω est le centre du cercle passant par M_1, M_2, M_3 et M_4 alors l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_1M_3}}$ est égal à la moitié de $\widehat{\overrightarrow{\Omega M_4}, \overrightarrow{\Omega M_3}}$ modulo π et il en est de même pour l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_2M_3}}$ Ainsi, l'argument du birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est nul modulo π.
   Ainsi, si les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont alignés ou cocycliques alors birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est réel

   Réciproquement supposons que le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ soit réel.
   Si les points M_1, M_3 et M_4 sont alignés alors $\dfrac{(z_1 - z_4)}{(z_1 - z_3)}$ est réel donc $\dfrac{(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)}$ aussi ce qui prouve que l'angle $\widehat{\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_2M_3}}$ est plat puis que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés.
   Sinon, il existe un unique cercle passant par M_1, M_3 et M_4 constitué des points M_3, M_4 et des points M tels que $\widehat{\overrightarrow{MM_4}, \overrightarrow{MM_3}} \equiv \widehat{\overrightarrow{M_2M_4}, \overrightarrow{M_2M_3}}$ $[\pi]$. Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 son cocycliques.

   Par conséquent,

   $\boxed{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \text{ ssi les points d'affixes } z_1,\ z_2,\ z_3 \text{ et } z_4 \text{ sont alignés ou cocycliques.}}$

Soient a, b, c et d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc$ soit non nul.
On définit la fonction

$$f \,:\, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

2. Soit z et z' deux complexes tels que $z \neq -d/c$. On a

$$f(z) = z' \Leftrightarrow (cz+d)z' = az + b \Leftrightarrow z(cz' - a) = b - dz'$$

   Ainsi, si $z' \neq a/c$ alors z' admet un unique antécédent $\dfrac{b - dz'}{cz' - a}$
   Si $z' = a/c$ alors il admet un antécédent si et seulement si $b - dz' = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $ad - bc \neq 0$.
   Par conséquent, si c est non nul alors f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ dont la réciproque est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{a/c\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ z & \mapsto & \dfrac{b - dz}{cz - a} \end{array}}$$

Si $c = 0$ alors ad est non nul et f réalise une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même d'inverse

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \dfrac{dz-b}{a} \end{array}}$$

3. Si c est nul alors f est une similitude directe.
Sinon,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \qquad f(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}\frac{bc-ad}{z+d/c}$$

Ainsi, $f = \phi \circ i \circ \psi$ où

$$\psi : z \mapsto z + d/c \quad \text{et} \quad \phi : z \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} z$$

4. Montrons que les similitudes directes et i conservent le birapport.
Soient A et B deux complexes avec A non nul et $g : z \mapsto Az + B$.
Pour tous complexes distincts z_1, z_2, z_3 et z_4, on a :

$$[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = \frac{(Az_1 - Az_3)(Az_2 - Az_4)}{(Az_1 - Az_4)(Az_2 - Az_3)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Si les complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont non nuls alors

$$[z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}, z_4^{-1}] = \frac{(z_1^{-1} - z_3^{-1})(z_2^{-1} - z_4^{-1})}{(z_1^{-1} - z_4^{-1})(z_2^{-1} - z_3^{-1})} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Comme composée de fonctions conservant le birapport, f conserve le birapport.

5. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{D}$ d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, on a

$$z \in D \Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z)] \in \mathbb{R}$$

Comme f est bijective les points d'affixes respectives $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ sont distincts.
S'ils sont alignés alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant ces points, alors on a

$$\boxed{f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\} : M(z) \in \mathcal{D}'\}}$$

Sinon, il existe un unique cercle $\mathcal{C}'$ passant pas ces trois points et on a

$$\boxed{f(D) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\} : M(z) \in \mathcal{C}'\}}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour être dans le premier cas est donc l'alignement des points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$.

6. Les points d'affixe $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$ sont alignés si et seulement si le rapport

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{f(z_1) - f(z_3)} = \frac{(z_2 - z_1)(cz_3 + d)}{(z_3 - z_1)(cz_2 + d)}$$

est réel donc si et seulement si le birapport $[z_1, z_2, z_3, -d/c]$ est réel donc si, et seulement si, les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et $-d/c$ sont alignés ou cocycliques.

7. On a

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), a/c] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

donc le birapport $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), a/c]$ est réel donc si, et seulement si, les points d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés.

8. Soit I le point d'affixe $-d/c$ et J celui d'affixe a/c
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par les points distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 différente de $-d/c$.
   - Si I appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celle-ci passe par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \setminus \{-d/c\} : M(z) \in \mathcal{D}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \in \mathcal{D}' \setminus \{J\}\}$$

   - Si I n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$ alors si on appelle $\mathcal{C}'$ le cercle passant par les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celui-ci passe par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} : M(z) \in \mathcal{D}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \in \mathcal{D}' \setminus \{J\}\}$$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par les points distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 différente de $-d/c$.
   - Si I appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors si on appelle $\mathcal{D}'$ la droite reliant les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celle-ci ne passe pas par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} \setminus \{-d/c\} : M(z) \in \mathcal{C}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \in \mathcal{D}'\}$$

   - Si I n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$ alors si on appelle $\mathcal{C}'$ le cercle passant par les points d'affixes $f(z_1)$, $f(z_2)$ et $f(z_3)$, celui-ci ne passe pas par J et on a :

$$f\left(\{z \in \mathbb{D} : M(z) \in \mathcal{C}\}\right) = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \in \mathcal{C}'\}$$