A dénombrable si $\exists\, \varphi$ bijective de A dans $\mathbb{N}$:

$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto \dots$ bijective

dénombrable stable par produit

Union dénombrable

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non dénombrable / $\mathbb{R}$ aussi

cas type $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dénombrable $\exists f$ bij de $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$

$A = \{n \in \mathbb{N},\ n \notin f(n)\}$ $\exists k$

tel que $f(k) = A$ mais si $k \in A$ alors $k \notin f(k) = A$ ... si $k \notin A$ ... $k \in f(k)$

contradiction donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non dénombrable

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

A tribu de Ω si $\Omega \in A$

$a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A$

$(A_n \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in A$

Système complet $A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

$P(\Omega) = 1$, $f : A \to [0,1]$

$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

---

croissance de P : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P\left(\bigsqcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} P\left(\bigcap A_{i_j}\right)$

---

convergence croissante

$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante

$(A_n) \downarrow$ alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$ convergence décroissante

$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Système quasi complet $A_i \cap A_j = \emptyset$

$A_i \neq \emptyset$ et $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ presque sûr

$P\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = 1$, $\sum_{i \in I} P(A_i)$

Proba composée $(A_1 \dots A_n)$ telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)$

Formule totale $(A_1 \dots A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ système complet :

$P(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(B|A_k)P(A_k)$

Bayes $P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ indépendants si

$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Si X variable aléatoire alors $f(X)$ aussi

$P(X,Y = x,y) = P(X=x) \cap (Y=y)$

$P(X=x) = \sum_y P(X=x) \cap (Y=y)$

$P(Y=y) = \sum_x P(X=x) \cap (Y=y)$

proba totales $(X=x)_x$ et $(Y=y)_y$ système quasi complet d'événements

---

$X_1 \dots X_n$ indépendants

$P(X_1 \dots X_n = x_1 \dots x_n)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$

Lemme des coalitions :

$(X_1 \dots X_n)$ indépendants $f(X_1 \dots X_p)$, $\forall k$ $g(X_{p+1} \dots X_n)$

aussi indépendantes

Soit X une loi discrète $\mathcal{B}(n,p)$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $X_n \sim X$ Kolmogorov

---

$X \sim \mathcal{G}(p)$ $P(X=n) = q^{n-1}p$

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $P(X=n) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\lim n p_n = \lambda$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$

$\lim P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

---

si $(n P(X=n))_{n \in X(\Omega)}$ sommable

alors X admet une espérance

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

sur $\mathbb{N}$ $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

$\sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}$

$\sum_{k=0}^{\infty} k \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda$

Formule transfert : $E(f(X))$

$= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

si $(f(x) P(X=x))$ sommable $x \in X(\Omega)$

$V(X) = E((X - E(X))^2)$

$= E(X^2) - E(X)^2$

---

espérance linéaire positive

(si $X \geq 0$ valeurs dans $\mathbb{R}^+$)

croissante : si $0 \leq X \leq Y$

$0 \leq E(X) \leq E(Y)$ et

$|E(X)| \leq E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x)$

---

si X, Y indépendants $X \perp\!\!\!\perp Y$

alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

$= \sum_{x,y} xy P(X=x) P(Y=y)$

$= \sum_{x,y} x P(X=x)\, y P(Y=y)$

$(x P(X=x))$ et $(y P(Y=y))$ sommables

donc finis $E(XY) = E(X)E(Y)$

---

si $X_1 \dots X_n$ indépendants mutuellement

alors $f(X_1) \dots f(X_n)$ aussi et

$E(f(X_1) \dots f(X_n)) = \prod_{i=1}^{n} E(f(X_i))$

$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

$E(\mathbb{1}_{X \in A}) = P(X \in A)$

$V(aX+b) = a^2 V(X) + 0 = a^2 V(X)$

$V(X)\ (X \sim \mathcal{G}(p)) = \dfrac{q}{p^2}$

$V(X)\ (X \sim \mathcal{P}(\lambda)) = \lambda$.

X, Y décorrélées si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$
$+ 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \cancel{E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2}$
$\leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$ C-S

est symétrique, bilinéaire, positive

---

si $X \perp\!\!\!\perp Y$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

$= \sum_{x \geq a} x P(X=x) + \sum_{x<a} x P(X=x)$

$\sum_{x \geq a} a P(X=x) \leq E(X)$

$\sum_{x \geq a} a P(X=x) \leq \sum_{x \geq a} x P(X=x) \leq E(X)$

$\sum_{x \geq a} P(X=x) = P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Markov

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

$= P((X-E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X-E(X))^2)}{\varepsilon^2}$

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

$S_n \sim X \in \mathcal{X}^2$ $S_n = \sum X_i$

$P(|\frac{S_n}{n} - E(X)| \geq \varepsilon)$

$P(|\frac{S_n}{n} - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((\frac{S_n}{n} - E(X))^2)}{\varepsilon^2}$

avec $E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\sum E(X_i)$

$= \frac{1}{n} n E(X) = E(X)$ donc

$P(|\frac{S_n}{n} - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2}$

$= \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2}$ et X_i indépendants

donc $\frac{nV(X)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$P(|\frac{S_n}{n} - E(X)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$G_X = t \mapsto E(t^X)$.

$E(X) = G_X'(1)$

	P	E	V
Bernoulli	p si 1, q si 0	p	pq
Binomiale	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
uniforme	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Géo	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

$\sum_{i=1}^{n} F_i$ directe ssi $(x_1, \dots, x_p) \in \prod F_i$
$\sum x_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ x_i = 0$

$\dim \sum F_i \leq \sum \dim F_i$ égalité si somme directe

$\dim F = n-1 \Leftrightarrow F$ noyau d'une forme linéaire, hyperplan.

H hyperplan $\Leftrightarrow$ noyau d'une forme linéaire

X base B et X' base B'

$X = PX'$ ou $X' = P^{-1}X$

$A' = P^{-1}AP$

$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg}(f)$

$(x_1, \dots, x_n) \in E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_n}(u)$

$x_1 + \dots + x_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1^{n-1}x_1 + \dots + \lambda_n^{n-1}x_n = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ Vandermonde

donc système de Cramer et une seule solution $x_1 = \dots = x_n = 0$

$\Rightarrow$ somme directe | ou alors ...

Si $u(F) \subset F$ ... les sep de u

stable par u et u de ...

$u_{E_\lambda(u)}$ dz dans une base ... diag

base de sep de u ...

$B = \bigcup_{\lambda \in sp(u)} B_\lambda$ et B base ...

de u dans B diagonale.

$\mathbb{K}'$ sous corps de $\mathbb{K}$ $sp_{\mathbb{K}'}(u) \subset sp_{\mathbb{K}}(u)$

$sp_{\mathbb{R}}() \subset sp_{\mathbb{C}}()$.

$\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$

$= \det(X\mathrm{Id} - u)$

$A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$

$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$

$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in sp(u)} \lambda$ | $\det(u) = \prod_{\lambda \in sp(u)} \lambda$.

$\lambda \in sp(u)$ ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

$\chi_u = \prod_{\lambda \in sp(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ et

$\sum_{\lambda \in sp(u)} \dim E_\lambda = \dim E$

$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$ avec u dz ssi $\forall \lambda$ $\dim E_\lambda = m_\lambda$ et χ_u scindé

F stable par u donc $\chi_{u|F} \mid \chi_u$

$(X-\lambda)^{\dim E_\lambda} \mid \chi_u \Rightarrow \dim E_\lambda \leq m_\lambda$

---

u dz ssi $E = \bigoplus E_\lambda$

ssi $\sum \dim E_\lambda = \dim E$

ssi χ_u scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$

ssi $\exists P$ sans ... $P(u) = 0$

ssi π_u scindé à racines simples

---

si u dz dans F stable par u, $u|_F$ dz également.

u dz $\Leftrightarrow$ π_u scindé racines simples

$\pi_{u|F} \mid \pi_u$ donc $\pi_{u|F}$ scindé et $u|_F$ dz

---

on pose $F_\lambda = \ker(u - \lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$

$(u - \lambda\mathrm{Id})|_{F_\lambda}$ nilpotent ...

donc $(u - \lambda\mathrm{Id})|_{F_\lambda}$ nilpotent d'indice ...

avec $n = \sum \dim F_\lambda \leq \sum m_\lambda = n$

$\dim F_\lambda = m_\lambda$

lemme des noyaux $\chi_u(u) = 0$

$E = \bigoplus_\lambda \ker(u - \lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$.

les F_λ sont stables par u donc

u dz par bloc $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$

$u|_{F_\lambda} = (u - \lambda\mathrm{Id}) + \lambda\mathrm{Id}$

= nilpotent + diagonal

$u \sim \begin{pmatrix} N_1 + \lambda_1 I_d & & \\ & \ddots & \\ & & N_p + \lambda_p I_d \end{pmatrix}$

$= N + D$

soit N tq $N^p = 0$ $N^{p-1}(x) \neq 0$

$p \le n$ car $(x, \dots, N^{p-1}(x))$ libre

cardinal $N \sim \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

N matrice de B ...

et donc N nilpotente de ...

$p \le n$ car $(x, \dots, N^{p-1}(x))$ libre

$X = \{P \mid P(u) = 0\}$ idéal de $K[X]$

$\exists P_0$ deg $P_0 = \min\{\deg P \mid P \in X\}$

soit $P \in X$ $P = P_0 Q + R$ deg $R < \deg P_0$

$P(u) = 0 = P_0(u)Q(u) + R(u) \Rightarrow R(u) = 0$ absurde

on a $\frac{P_0}{\mathrm{dom}} = \pi_u$ polynôme minimal de u, générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de u

---

$A \sim B \Rightarrow \pi_A = \pi_B$

si $d = \deg \pi_A$ donc $(I, A, \dots, A^{d-1})$ base de $K[A]$ ...

$(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1})$ tel que $\sum \lambda_k A^k = 0$

annulateur donc $\pi_A \mid \sum \lambda_k A^k = 0$

$\sum \lambda_k A^k = \pi_A Q$ mais deg

$\deg P \le d-1$ deg $\pi_A = d$ donc

deg $Q = 0$ ... mais

donc $\lambda_k = 0$

valeur propre $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x)$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda) x$

si P annule u alors $P(\lambda)$ valeur propre

donc pour tout vp $P(u)(x) = P(\lambda)x = 0$

et $P(\lambda) = 0$

---

les racines de π_u sont exactement les valeurs propres de u

si λ racine de π_u, $\pi_u = (X-\lambda)Q$

$(u - \lambda \mathrm{id}) Q(u) = 0$ $Q(u) \neq 0$ donc

$(u - \lambda \mathrm{id})$ ... donc valeur propre

racines de $\pi_u \subset \mathrm{sp}(u)$

---

si $P \wedge Q = 1$ $\ker P Q(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$

$PQ = 1$ Bézout $\exists U, V$

$UP(u) + VQ(u) = \mathrm{id}$

$UP(u)(x) + VQ(u)(x) = x$

... $\ker PQ$ ... $\ker P \oplus \ker Q$

... $UPQ(u)(x)$ ... $VQ(u)(x)$ ...

$UP(u)(x) = x_1$ $VQ(u)(x) = x_2$

$x = x_1 + x_2$ $P(u)(x_1) = 0$

... $x \in \ker P \cap \ker Q$

d'où lemme ... par

récurrence ... que les

lemme $P_i \wedge P_j = 1$ $\forall i,j$

$\Rightarrow \ker \prod_{i=1}^{r} P_i(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$

si f diagonalisable π_u annule $u|_F$

donc $\pi_{u|_F} \mid \pi_u$ $\Rightarrow$ π_u scindé $\Rightarrow$ $\pi_{u|_F}$ scindé

donc $u|_F$ diag.

$\dim E = n < \infty$ donc $\chi_u(u) = 0$

(Cayley Hamilton)

$\pi_u \mid \chi_u$

---

si $(a_n z_0^n)$ bornée donc $|z| < |z_0|$

$\sum a_n z^n$ cv car $a_n z^n = a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$

$\le M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ cv car $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

Lemme d'Abel $R = \sup\{|z| \mid (a_n z^n)$ bornée$\}$

$a_n = O(b_n)$ $R_a \ge R_b$

$\exists M > 0$ $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \le M$ donc $\forall z \in D(0, R_b)$

$\forall n \ge N_0$

$\sum a_n z^n$ cv donc $R_a \ge R_b$

$a_n \sim b_n$ $R_a = R_b$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $R = \frac{1}{\ell}$

si $\sum a_n z^n$ ... règle de d'Alembert

on utilise ... on applique ... pour les séries entières $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right|$ et on

regarde quand < 1 pour avoir cv

$R\left(\sum a_n b^n + \sum b_n a^n\right) \ge \min R_a, R_b$

$R\left(\sum c_n z^n\right)$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$\ge \min(R_a, R_b)$

$\sum c_n z^n = \sum a_n z^n \sum b_n z^n$

produit de Cauchy on a cv

---

sur les $D(0,r)$ $r < R$

cv $|a_n z^n| \le a_n r^n$ cv

$r < R$ donc cv

donc cv normale sur tout compact

$D(0, r)$ $r < R$ ...

convergence sur $D(0,R)$ ouvert

$\{z \mid |z| < R\}$ donc ...

dérivable / intégrable sur $D(0,R)$

$\sum c_n z^n$ cv dans ... sur le segment $[0, z]$

$|z| = R$ z cv

$(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$

$\sum a_n R^n$ converge donc

continue sur $[0, R]$ ...

... un ... sur $[0, R]$

~~...~~ Abel

$R\left(\sum n a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\right)$

alors $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

si $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$

alors $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = b_k$

---

f_n cv simplement $\forall x$ $f_n(x) \to f(x)$

---

f_n cvu ssi $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n \ge n_0$ $\forall x \in I$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

si il existe (x_n) avec $x_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| \le a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

cv f_n cvu vers f.

si on a (x_n) ...

$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$ donc pas cvu

---

f_n cvu vers f sur I et $a \in I$

dans $\lim_{x \to a} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et

$f(x) \to \ell$ double limite

---

f_n cvu vers f et f_n C^0 sur I

$\Rightarrow f$ C^0 sur I.

---

f_n cvu vers f et f_n C^0 par morceaux sur $[a,b]$

$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

mais ... cvu sur $[a, x]$

$\int_a^x f_n \to \int_a^x f$

$f_n^{(k)}$ cvu vers g sur I

$\forall p \le k$ $f_n^{(p)}$ cvs vers f_p sur I

f_n cv ... vers f_0 et

f de classe C^k $f^{(k)} = g$

Suite $\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ cv simple ssi $S_n(x)$ cv simple vers $S(x)$

---

cvu ssi $\|S_n - S\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

---

non cv ⇔ $\exists x \in I$ tel que $\|R_n(x)\| \leq \varepsilon$ ⇔ $\|U(x) - U_n(x)\| \leq \varepsilon$

---

cv normale ssi $\sum \|f_n\|_\infty$ cv

cv normale ⇒ uniforme ⇒ absolue

$\sum u_n$ cvu sur I vers S, $\forall n$ u_n ... dans S C^0 sur I

$u_n(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell_n$, $b \in \bar{I}$

$\sum u_n$ cvu vers S sur I

⇒ $\sum \ell_n$ cv et $S(x) \xrightarrow[x\to b]{} \sum \ell_n$

---

si $\sum u_n$ cvu sur $[a,b]$

u_n cpm sur $[a,b]$ ⇒

$\int_a^b \sum u_n(t)dt = \sum \int_a^b u_n(t)dt$

$u_n \in C^k(I)$

$\forall i \leq k$ $\sum u_n^{(i)}$ cvs sur I

$\sum u_n^{(k)}$ cv uniformément sur ... segments de I ⇒ S de classe C^k sur I et $S^{(k)} = \sum u_n^{(k)}$.

$\exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions en escaliers tel que e_n cvu vers f continue sur $[a,b]$

---

f continue sur $[a,b]$

$\exists (P_n) \in \mathbb{K}[X]$ suites de polynômes qui cvu vers f.

---

u_n croissante bornée ⇒ cv

$u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \nearrow$ $v_n \searrow$

⇒ $\lim u_n = \lim v_n$

$\forall (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée (Bolzano-Weierstrass)

$\exists \varphi$ tel que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cv

---

$\sum u_n$ cv ⇒ $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sinon divergence grossière

---

u_n cv ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ cv

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ si $\ell < 1$ $\sum u_n$ cv, $\ell = 1$?, $\ell > 1$ dvg

$u_n > 0$

$0 \leq u_n \leq v_n$: $\sum v_n$ cv ⇒ $\sum u_n$ cv

$\sum u_n$ dv ⇒ $\sum v_n$ dv

termes ... positifs

$u_n = o(v_n)$ $\sum v_n$ cv ⇒ $\sum u_n$ cv

$0 \leq u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ $\sum u_n$ cv ⇔ $\sum v_n$ cv

---

$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$

$u_n \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_{n+1}$

$\sum (-1)^n a_n$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ $\searrow \to 0$

alors $\sum (-1)^n a_n$ cv

$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$

$\sum v_n$ cv $(u_n = o(v_n))$

$\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$

$\sum v_n$ cv $u_n \sim v_n$ $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$

$\sum v_n$ dv $u_n = o(v_n)$ ⇒ $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$

$u_n \sim v_n$ ⇒ $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$

f diff ssi $\exists\, \mathcal{L} \in \mathcal{L}(E,F)$ tq

$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}(h) + o(\|h\|)$

---

f diff $\Rightarrow$ f continue (Taylor + continuité de la linéarité)

---

f dérivable sur Ω avec

a selon v si

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \text{fini}$$

dérivée partielle :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \partial_j f(a)$$

---

f diff ssi ses coordonnées le sont (double inclusion)

et

f diff $\Rightarrow$ existence dérivée partielle

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j\, \partial_j f(a)$$

---

f C^1 ssi dérivée partielle continue (ZAF)

$$(J_f(a))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} = \partial_j f_i(a)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$(\nabla f(a) \mid h) = df(a)(h)$

gradient $\neq 0$ donc $\nabla f(a)$ direction

annuler selon lequel df est nulle

$|df(a)(h)| \le \|\nabla f(a)\|$ (CS)

et égalité pour $\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

$$df(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial k}(a)\, e_k \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} h_k e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} h_k\, \partial_k f(a)$$

---

diff stable par combinaison lin, produit, composition.

$d f\circ g(a)(h) = df(g(a)) \circ dg(a)(h)$

(on diff g puis f en $g(a)$ et on compose (chaîne))

---

arc paramétré : $t \mapsto \gamma(a t) + \mu(bt)$

$(f\circ\gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$

$$\partial_i f\circ g(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f(g(a))\, \partial_i g_k(a)$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et f C^1

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt$$

U connexe par arcs et f constante sur U ssi $df = 0$.

$\Leftarrow$ U connexe donc $\exists$ un arc allant de a à x et

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt = 0$$

$f(x) = f(a)$.

---

v tangents si on vecteur dans v

$\exists\, \gamma$: $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$

---

si f C^1, $g(a) = 0$ le plan tangent est $\ker(dg(a))$.

---

f C^2 $\Rightarrow$ $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$

th Schwarz.

$$H_f(a)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$$

$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h \mid h) + o(\|h\|^2)$

---

point critique si $\nabla f(a) = \vec{0}$ et donc $df(a) = 0$.

a extremum $\Rightarrow$ point critique

a nécessairement point critique

coercive $\Rightarrow$ minimum global

---

f et g C^1 $X = \{g(x) = 0\}$

$f|_X$ admet extremum local en a et $dg(a) \neq 0$ donc $df(a)$ & $dg(a)$

$\nabla f(a)$ & $\nabla g(a)$.

---

min local $\Leftarrow$ $H_f \in S_n^{+}$

max local $\Leftarrow$ $H_f \in S_n^{-}$

en général des ASG même signe :

$Tr(A) > 0$ $\Rightarrow$ vp positives donc minimum

$Tr(A) < 0$ $\Rightarrow$ vp neg donc max.

$A \in M_n(K)$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

A inversible / inversible ssi $\det A \neq 0$

$\det(A^T) = \det(A)$

$A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

det pas changé en les coef dans diagonale, colonne

$$\begin{vmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i)$$

$\mathrm{Com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$\mathrm{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$

(à passer dans les cas th démontré)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})\, a_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})\, a_{ij}$$

$(u \wedge v \mid z) = [u, v, z]$

$\exists!\, b \in E^*$, $\exists a \in E$ telle que $f(x) = (x|a)$ si $(e_1 \dots e_n)$ base de E donc $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = (x|a)$ donc $a = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}$ unique

---

Donc $\forall x,y$ $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$

$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ | $(AB)^T = B^T A^T$

F stable par u donc $F^\perp$ stable par u^* : $\forall x \in F^\perp$ et $y \in F$ $(u^*(x)|y) = (x|u(y)) = 0$

$\det u^* = \det u^T$

$u_{ij} = (u(e_j)|e_i) = (e_j|u^*(e_i)) = u^*_{ji}$

$O \in O_n(\mathbb{R})$ ssi $O^T O = I_n$

$O^T O = (C_i^T C_j) = I_n = (\delta_{ij})$ donc $(C_i)_{i \in [1,n]}$ base orthonormée

idem pour lignes

$(O_n(\mathbb{R}), \times)$ s. groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

$O \in O_n$ ssi O mat de changt de base orthonormée

isométries ; $\|u(x)\| = \|x\|$

$\iff \|u(x+y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2(u(x)|u(y))$

$\iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(u(x)|u(y))$

$\iff (x|y) = (u(x)|u(y))$.

$\iff u^* = u^{-1}$

$\iff \exists$ sev de dim tous stable par u.

$O_n(\mathbb{R})$ compact de $M_n(\mathbb{R})$.

fs $O \mapsto O^T O$ donc $O_n = f^{-1}(\{I_n\})$ donc fermé

$\forall i$ $\sum_{k=1}^n o_{ik}^2 = 1$ donc borné donc espace de dim finie donc compact

---

$SO_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale de det 1 groupe par $\times$.

---

symétrie orthogonale : $s^2 = id$

$\ker(s-id) \perp \ker(s+id)$

---

reflexion : $s^2 = id$ orthogonale et $\dim \ker(s-id) = n-1$

$SO_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$O_2^-(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$u \in O_n(\mathbb{R})$ $\exists B$ orthonormée telle que

$\mathrm{Mat}_B\, u = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$

autoadjoint (symétrique) $u^* = u$

---

p orthogonal $\iff$ p autoadjoint

$\ker p \perp \ker(p - id) \iff p^* = p$

Th spectral :

$u^* = u$ donc $\exists$ base orthonormée de vp donc $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ et D diag telle que $\mathrm{Mat} = O D O^T$

$O \in S_n^+ \mid S_n^{++} \mid S_n^- \mid S_n^{--}$

ssi $(OX|X) \geq 0 \mid > 0 \mid \leq 0 \mid < 0$

ssi $sp(O) \subset \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{R}^{+*} \mid \mathbb{R}^- \mid \mathbb{R}^{-*}$

$O \in S_n^{++}$ unicité de G racine en définit G racine de O de manière unique, racine de ses vp qui sont réelles positives ou nulle.

---

a et b cont. donc

$y' = a(t) y + b(t) \iff$

$y' e^{-A(t)} = a(t) y e^{-A(t)} + b(t) e^{-A(t)}$

$\iff \frac{d}{dt} y e^{-A(t)} = b(t) e^{-A(t)}$

$\iff y(t) = C e^{A(t)} + \int b(u) e^{-A(u)} e^{A(t)} du$

$C \in \mathbb{K}$.

$\begin{cases} a(t) y' + b(t) y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

problème de Cauchy

si a ne s'annule pas donc unicité des solutions.

---

on note $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

matrice compagne de Q donc

$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)} + b(t)$

$X' = C_Q^T X + B(t)$

$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ | $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$

si $X(t_0) = X_0$ donc une seule solution (problème de Cauchy matricielle).

S ensemble des solutions de $x' = a(t)x$ donc $x \mapsto x(t_0)$ isomorphisme donc $\dim S = n$

pour une équa. diff. linéaire n ordre : $\dim S = n$.

---

pour celles avec second membre

$S = \{x_H + x_p \mid x_H \in S_H\}$

affine de direction S_H

$A \mapsto \exp(A)$ continue car

$\forall A \in B(0,R)$ $\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{R^n}{n!}$ converge

donc $\exp(A)$ cv normale sur $B(0,R)$ et vrai $\forall R > 0$ donc cv sur $M_n(\mathbb{K})$

$\begin{cases} x' = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\implies x(t) = \exp((t-t_0)a)\, x_0$

problème de Cauchy

idem par matrice

Si A diag $X' = AX$

$\iff X = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} X_i$

$(X_1 \dots X_n)$ vp de A et $(C_1 \dots C_n) \in \mathbb{K}^n$

$(X_1 \dots X_n)$ base de vp

$X' = AX \iff X(t) = C e^{tA}$

$C = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ décomposée base.

$X(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{tA} X_k$

or $e^{tA} X_k = e^{t\lambda_k} X_k$

donc $X(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{t\lambda_k} X_k$.

$y'' + a(t) y' + b(t) y = 0$

$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ où (y_1, y_2) base de solutions

ssi $W(t) = 0$ ... $\forall t$

pour $y'' + a(t) y' + b(t) y = c(t)$

$\iff \begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c(t) \end{cases}$

où $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ solution de l'équa diff.

N est norme si
$N(x) \geq 0$ | $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
$\forall x,y$ $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y)$

$d : x,y \mapsto \|x-y\|$
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

pr les normes définies par des sup
ex : les $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$
$\forall x,y$
$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
vrai pr tout i ...

$N \sim N'$ si $\exists \alpha, \beta$ $\forall x$ $\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$
en dim $< +\infty$ toutes les normes sont équivalentes.

convexe : $\forall x,y$ $\forall t \in [0,1]$
$tx + (1-t)y \in X$
Connexe par arcs ? $\forall x,y$ $\exists \gamma$
$\gamma(0) = x$ | $\gamma(1) = y$ et
$\forall t \in [0,1]$ $\gamma(t) \in X$.

$f(a)$ pdt scalaire des
norme associée : $x \mapsto \sqrt{(x,x)}$

suite converge vers l ssi
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $\|u_n - l\| \leq \varepsilon$

normes non équi si :
$N \not\sim N'$ si $\exists u_n \neq 0$
$\lim_{n \to \infty} \frac{N(u_n)}{N'(u_n)} = +\infty$

Voisinage de x si $\exists r > 0$
$B(x,r) \subset V$ dans
U ouvert de E si U voisinage de tous ses points : $\forall x \in U$ $\exists r > 0$
$B(x,r) \subset U$.

Fermé si $E \setminus F$ ouvert

Fermé ssi toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l, $l \in F$

Ouvert stable par union quelconque, intersection finie, produit fini
Fermé stable par union finie, intersection quelconque ~~produit~~

$\mathring{A}$ plus grand ouvert inclus dans A

x adhérent si $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
$\bar{A}$ plus petit fermé contenant A.
x adhérent $\Leftrightarrow$ $\exists x_n \in A^{\mathbb{N}}$ $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$
ou $d(x,A) = 0$

A dense dans B si $B \subset \bar{A}$

f continue en a ssi $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \alpha > 0$ $\forall x \in A$ $\|a - x\| < \alpha \Rightarrow$
$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Continues
si f et g coïncident sur une partie D dense dans E alors f et g coïncident sur E : soit $x \in E \setminus D$
$\exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$
$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ $g(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(x)$
par unicité de la limite $f(x) = g(x)$

f continue ssi $\forall \Omega$ ouvert et F fermé
$f^{-1}(\Omega)$ ouvert et
$f^{-1}(F)$ fermé.

f uniformément continue ssi
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$ $\forall (x,y)$ $\|x-y\| < \alpha \Rightarrow$
$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
$\Rightarrow$ continue.
Lip $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue ssi $\exists C$
$\|u(x)\| \leq C\|x\|$

$\sup \left\{ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \neq 0 \right\} = \|u\|_{op}$
$= \sup \{ \|u(x)\| \mid \|x\| = 1 \}$
$\|u(x)\|_F \leq \|u\|_{op} \|x\|_E$

---

dim $E < \infty \Rightarrow \forall F$ sev de E fermé.

A compacte si $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $\exists \varphi$
$(x_{\varphi(n)})$ converge.

$\Rightarrow$ fermé + ~~borné~~ borné et équivalence en dim finie

$(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ compacte converge ssi
$Adh(x_n) = \{l\}$ une valeur.

produit fini de compact = compact

si f continue et K compact f(K) compact

si f continue sur un compact alors f bornée et atteint ses bornes

f continue sur compact alors f uniformément continue.

TVI : continue sur intervalle I alors f(I) est un intervalle
$y \in [f(a), f(b)]$ $\exists x \in (a,b)$
$f(x) = y$.

f continue strict monotone sur I dans f(I) et f est ... réciproque de f.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[$
$f'(c) = 0$

si f' bornée alors
$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f'\|_\infty \|x-y\|$

T. Laplace
$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

T. Lagrange
$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

TY :
$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$

Convexe : $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$
$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\sum \lambda_i = 1$
$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$

Riemann ∃ subdivision tel que fonction en escalier plus proche de la subdivision.

$\int$ linéaire $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$

Chasles $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$

$0 \leq f \leq g$ $\int f \leq \int g$

$|\int f| \leq \int |f|$

$f \geq 0$ cv ssi $\int_{a}^{x} f$ bornée sur $\mathbb{R}_+$

donc si $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^x g$ cv donc par limite monotone $\int^x f$ converge aussi donc cv.

si $0 \leq f \leq g$ et $\int f$ div alors $\int g$ div.

f cpm sur $[a,b]$

$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)dt$

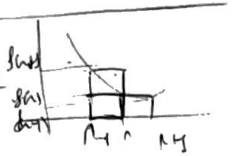
changement variable C^1	ipp	Règles d'intégrabilité
fonctions usuelles (f'/f ...) f', $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Bertrand: ...	prolongement par continuité, ces termes ...

$f = o(g)$ g intégrable $\Rightarrow \int f$ intg

$f = O(g)$ également

$f \sim g$ donc f intg ssi g intg

$f \searrow$ positive



$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$

$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$

ie $\sum \left(\int_{n-1}^{n} f - f(n)\right)$ cv

$\sum (f(n) - f(n+1)) \geq \sum \left(\int_{n-1}^{n} f - f(n)\right) \geq 0$

cv car f positive décroissante

$f = o(g)$ f intg $\int_x^\infty f = o\left(\int_x^\infty g\right)$

$\int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right)$

$f \sim g \Rightarrow \int_x^\infty f \sim \int_x^\infty g$

g non intg $f = o(g) \Rightarrow \int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$

$f \sim g \Rightarrow \int_a^x f \sim \int_a^x g$

TCD: f_n cpm sur I

$f_n \to f$ cpm et $|f_n| \leq \varphi$ intg sur I

f intg sur I et $\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f$

TCD continu: $f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to a]{} f$ cpm

f_λ cpm sur I $|f_\lambda| \leq \varphi$ intg sur I

$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to a]{} \int_I f$ et f intg sur I

$x \mapsto f(x,t)$ continue sur J

$t \mapsto f(x,t)$ cpm sur I

$\forall [a,b] \subset I$ $\forall x \in J$

$|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ intg sur J

continuité des intégrales: si f continue sur tous segments de I donc sur I.

$x \mapsto f(x,t)$ C^k sur I

$\forall k \leq n$ $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ intg sur J

$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$ intg sur J

$g: x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ C^n sur I et

$g^{(n)}: x \mapsto \int_I \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t)dt$

$\sum \left(\int_I |f_n|\right)$ cv et $\sum f_n$ cvs vers f

$\sum f_n$ intégrable sur I et

$\sum_n \int_I f_n = \int_I \sum_n f_n$

f_n positive et $I \subset [a, +\infty[$

$\sum_{n\geq 0} \int_a^{+\infty} f_n(t)dt = \int_a^{+\infty} \sum_{n\geq 0} f_n(t)dt$

Beppo Levi

$\sum f_n$ cvu sur $[a,b]$ | f_n cpm

$\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$.

(x,y) produit scalaire si:

φ bilinéaire | symétrique | positive | définie

$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x,y)$

$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

pythagore $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi $(x,y) = 0$

famille orthogonale non nulle $\Rightarrow$ libre

Gram Schmidt:

$(u_1, \dots, u_n)$ une base

on pose $e_1 = u_1$ et

$e_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(u_k,e_i)}{\|e_i\|^2} e_i$

(on enlève les composantes selon ... u_k)

puis on normalise $e_k = \frac{e_k}{\|e_k\|}$

$(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de Schmidt unique

F sev donc $F^\perp$ sev

en dim finie $F \oplus F^\perp = E$

$(F^\perp)^\perp = F$ égalité si $\dim E < \infty$

$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$