Complexes

Exercice 1 : Résoudre

1. $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$
2. $(1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$
3. $|z| = z + \bar{z}$
4. $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 - z|$
5. $|(1+i)z - 2i| = 2$

Exercice 2 : Déterminer le module et l'argument de

1. $1 + i$.
2. $1 - i\sqrt{3}$
3. $\dfrac{1+i}{1-i}$
4. $\dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$
5. $1 + \cos\theta + i\sin\theta$
6. $\dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$
7. $(1+i)^{20}$

Exercice 3 : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.
2. Caractérisez les cas d'égalité.

Exercice 4 :

1. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$
2. En déduire que $\{z_1 + z_2,\ (z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2\} = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \leq 2\}$
3. Montrer que tout réel peut s'écrire comme la somme d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{U}$.

Exercice 5 :

1. Soient O et A les points d'affixes respectives 0 et 1 ainsi que B et C deux points distincts du cercle trigonométrique
   Montrer, à l'aide des nombres complexes, que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) [2\pi]$.
   Quel résultat bien connu retrouve-t-on ?
2. Soient A, B et C trois points du plan non alignés.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) [\pi]$

Exercice 6 :

1. En calculant $(1+i)^{4n}$ de deux manières différentes, déterminer
$$T_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{4n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{4n}{k} \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{4n} (-1)^{k/2} \binom{4n}{k}$$
2. Que vaut $T_1^2 + T_2^2$?
3. Déterminer
$$S_0 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}, \quad S_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}, \quad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2[4]}}^{4n} \binom{4n}{k} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 3[4]}}^{4n} \binom{4n}{k}$$

Exercice 7 : On considère le polynôme $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

1. Donner les racines de P sous forme trigonométrique.
2. Exprimer $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $u = z + \dfrac{1}{z}$ et en déduire les racines de P sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.