Calcul de la constante dans la formule de Stirling

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$. On va d'une part chercher une expression de I_n en fonction de n à l'aide de factorielles ; d'autre part chercher un équivalent simple de I_n.

Pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc, pour tout n, $0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$; donc $\boxed{I_{n+1} \leqslant I_n}$.

Soit $n \geqslant 2$: une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos t . \cos^{n-1} t\, dt = [\sin t \cos^{n-1} t]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t . \cos^{n-2} t\, dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t\, dt = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement $\boxed{(1) \quad \forall n \geqslant 2 \quad nI_n = (n-1) I_{n-2}}$

Puisque $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, une récurrence simple fournit $\boxed{(2) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} . \dfrac{\pi}{2}}$

D'autre part, en multipliant la relation (1) par I_{n-1}, on constate que la suite $nI_n I_{n-1}$ est constante ; puisque $I_1 = 1$, on a donc $\boxed{(3) \quad \forall n \geqslant 1 \quad nI_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}}$

La décroissance de la suite (I_n) fournit, pour tout $n \geqslant 2$, $I_{n+1} \geqslant I_n \geqslant I_{n-1}$ d'où $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \geqslant \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \geqslant 1$. Or la relation (1) fournit $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \dfrac{n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Par encadrement, on en déduit que I_n / I_{n-1} tend vers 1, donc que $\boxed{I_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n}$

En substituant dans (3), on en déduit $n{I_n}^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ soit $\boxed{(4) \quad I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$

Constante de Stirling

On a vu en cours qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C n^{n+1/2} e^{-n}$.

En substituant dans (2), on en déduit

$$I_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{C 2^{2p+1/2} p^{2p+1/2} e^{-2p}}{2^{2p} C^2 p^{2p+1} e^{-2p}} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}$$

D'autre part, la relation (4) fournit $I_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. On a donc $\dfrac{\pi}{C\sqrt{2p}} \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$ d'où, en multipliant par $C\sqrt{2p/\pi}$, $C \underset{p \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$.

Puisque ces "suites équivalentes" sont en fait constantes, on a donc $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$