Fonctions usuelles

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Fonctions trigonométriques réciproques

1.1 Théorème fondamental (admis)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non nul et $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. On a alors les résultats suivants :

(1) $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont on sait préciser la forme en fonction de I. En effet, en supposant f strictement croissante (avec des résultats analogues dans le cas où f est strictement décroissante) :
- Si $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $J = [f(a), f(b)]$.
- Si $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $J = \left]\lim\limits_a f, f(b)\right]$.
- Si $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $J = \left[f(a), \lim\limits_b f\right[$
- Si $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $J = \left]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f\right[$

(2) $\tilde{f}: \begin{array}{l} I \longrightarrow J = f(I) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est bijective et d'application réciproque f^{-1}. De plus f^{-1} est continue et de la même stricte monotonie que f. On dit que f induit une bijection de I sur J.

(3) On suppose que f est dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors $g = f^{-1}$ est dérivable en y_0 et

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

1.2 La fonction Arcsinus

1.2.1 Définition

Soit $f: \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin t \end{array}$ continue et strictement croissante. On a donc $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, ainsi on définit l'application $\varphi: \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \\ t \longrightarrow \sin t \end{array}$ bijective. Par définition,

$$\arcsin = \varphi^{-1}$$

1.2.2 Propriétés

Imparité Soit $x \in [-1, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \sin(-\arcsin(x)) &= -\sin(\arcsin(x)) \quad \text{car sin est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in [-1, 1]$, donc

$$\sin(-\arcsin(x)) = -x \Leftrightarrow -\arcsin(x) = \arcsin(-x)$$

Composition avec sinus
- Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
- Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$ [a].

a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin(x))$ n'est pas toujours égal à x ! En effet,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin \pi) &= \arcsin 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dérivée φ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'(x) = \cos x$. De plus $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x) \neq 0$ donc arcsin est dérivable sur $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, et $y = \sin x$,

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \sin^2(\arcsin(y)) + \cos^2(\arcsin(y)) = 1 &\Leftrightarrow \cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2} \quad \text{car} \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Tableau de valeurs

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Graphe Voir figure 1.

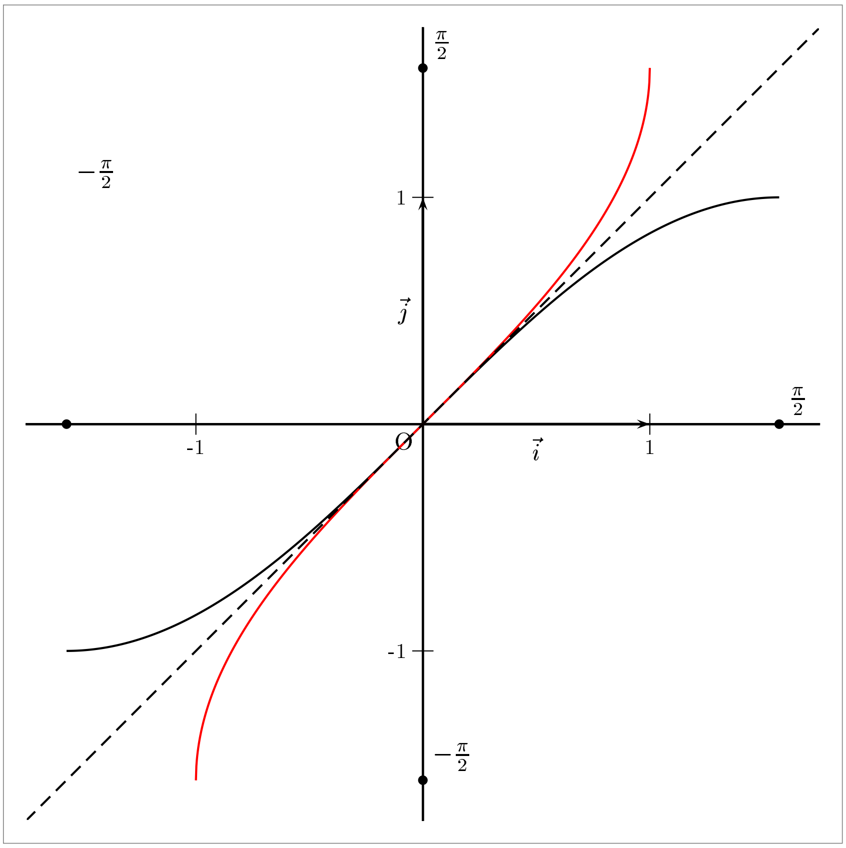

FIGURE 1 – Graphe des fonctions arcsin et sin

1.3 La fonction Arccosinus

1.3.1 Définition

Soit $f: \begin{array}{l}[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \cos t\end{array}$ continue et strictement décroissante. On a donc $f([0,\pi]) = [-1,1]$, ainsi on définit l'application $\varphi: \begin{array}{l}[0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \\ t \longrightarrow \cos t\end{array}$ bijective. Par définition,

$$\arccos = \varphi^{-1}$$

1.3.2 Propriétés

Dérivée φ est dérivable sur $[0,\pi]$ donc $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi'(x) = -\sin x$. De plus $\forall x \in \,]0,\pi[$, $\varphi'(x) \neq 0$ donc arccos est dérivable sur $\varphi(]0,\pi[) = \,]-1,1[$. Pour tout $x \in \,]-1,1[$, et $y = \cos x$,

$$\begin{aligned}\arccos'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos(y))}\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}\sin^2(\arccos(y)) + \cos^2(\arccos(y)) = 1 &\Leftrightarrow \sin^2(\arccos(y)) = 1 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2} \quad \text{car} \arccos(y) \in [0,\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \,]-1,1[$,

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Constance de la somme de arcsin et arccos Soit l'application $g: \begin{array}{l}[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \arccos t + \arcsin t\end{array}$ continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Or

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

donc g est constante sur $]-1,1[$ donc sur $[-1,1]$ par continuité. De plus

$$\begin{aligned}g(0) &= \arcsin(0) + \arccos(0) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \in [-1,1]$,

$$\arccos(t) + \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}$$

Relation particulière Pour $x \in [-1,1]$, soit $\theta = \arcsin(x) \in [0,\pi]$. Donc $\pi - \theta \in [0,\pi]$ et $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -x$. Ainsi,

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

Tableau de valeurs

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

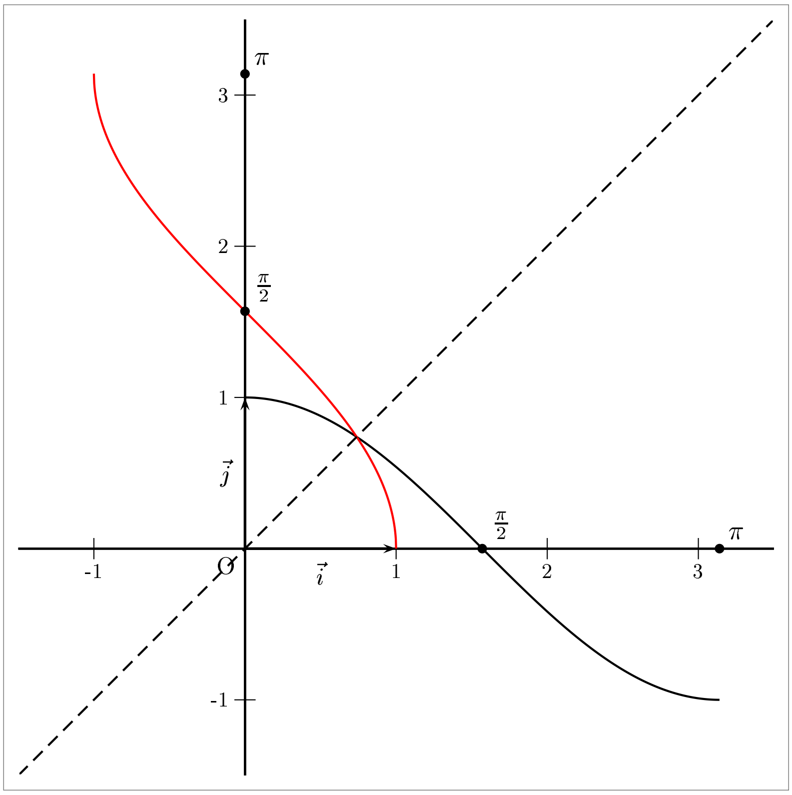

FIGURE 2 – Graphe des fonction cos et arccos

Graphe Voir figure 2

1.4 La fonction Arctangente

1.4.1 Définition

Soit $f : \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \tan t \end{array}$ continue et strictement croissante. Or $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ donc $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, ainsi on définit l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & \tan t \end{array}$ bijective. Par définition,

$$\arctan = \varphi^{-1}$$

1.4.2 Propriétés

Limites arctan est continue et strictement croissante donc $\arctan\left(\left]-\infty, +\infty\right[\right) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Or $\left]-\infty, +\infty\right[= \left]\lim\limits_{-\infty} \arctan, \lim\limits_{+\infty} \arctan\right[$ donc :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Imparité Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(-\arctan(x)\right) &= -\tan\left(\arctan(x)\right) \quad \text{car tan est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in \mathbb{R}$, donc

$$\tan(-\arctan(x)) = -x \Leftrightarrow -\arctan(x) = \arctan(-x)$$

Dérivée f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \tan x$,

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{f'(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Somme d'arctangentes $\forall x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

En effet ,soit $\varphi(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = 0$ donc φ est une fonction constante. Or

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 2\arctan 1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Graphe Voir figure 3 page ci-contre.

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Théorème : fonctions impaires et paires

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f s'écrit de manière unique $f = g + h$ avec g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que g est paire et h est impaire. On a aussi :
- g est la partie paire de f ;
- h est la partie impaire de f.

Démonstration

Unicité Supposons que $f = g + h$ avec g paire et h impaire, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$. Alors $f(-x) = g(x) - h(x)$, d'où

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Donc g et h sont uniques.

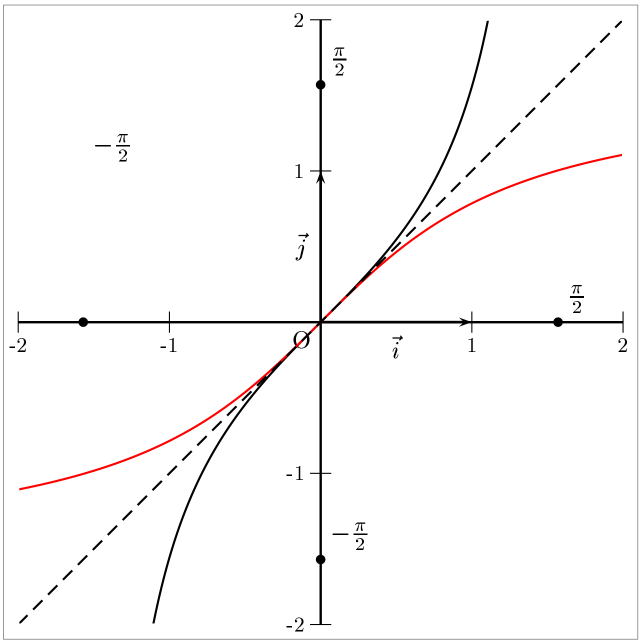

FIGURE 3 – Graphe des fonctions tan et arctan

Existence Prouvons que g et h existent. Posons donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$ donc g est paire et h est impaire. Or $g(x) + h(x) = f(x)$ donc g et h existent bien avec les propriétés susmentionnées.

2.2 Définition des fonctions hyperboliques

- cosh est la partie paire de exp.
- sinh est la partie impaire de exp.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

De plus,
- $\exp(t) = \cosh(t) + \sinh(t)$
- $\exp(-t) = \cosh(t) - \sinh(t)$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On a $\forall t \in \mathbb{R}$,
-

$$\begin{aligned} 1 = e^t e^{-t} &\Leftrightarrow \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t) \geqslant 1 \end{aligned}$$

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \frac{1}{2}\left(e^{a+b}+e^{-a-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{a}e^{b}+e^{-a}e^{-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[(\cosh a+\sinh a)(\cosh b+\sinh b)+(\cosh a-\sinh a)(\cosh b-\sinh b)\right]\\ &= \cosh a\cosh a+\sinh b\sinh b\end{aligned}$$

- $$\cosh(a-b) = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b$$

- $$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= \frac{1}{2}\left(e^{a+b}-e^{-a-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{a}e^{b}-e^{-a}e^{-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[(\cosh a+\sinh a)(\cosh b+\sinh b)-(\cosh a-\sinh a)(\cosh b-\sinh b)\right]\\ &= \cosh a\sinh b+\cosh b\sinh a\end{aligned}$$

- $$\sinh(a-b) = \cosh a\sinh b - \cosh b\sinh a$$

- $$\begin{aligned}\cosh(2a) &= \cosh^2 a+\sinh^2 a\\ &= 1+2\sinh^2 a\\ &= 2\cosh^2 a-1\end{aligned}$$

- $$\sinh(2a) = 2\cosh a\sinh a$$

- [a]

$$\dots$$

2.4 Étude des fonctions hyperboliques

2.4.1 Sinus hyperbolique

Dérivée

sinh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de plus
$$\sinh' = \cosh$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sinh'(t) \geqslant 1$.

Limites On a par retour à la définition de la fonction,

$$\lim_{+\infty} \sinh = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \sinh = -\infty$$

a. Vous pourrez faire le reste si ça vous chante.

Tableau de variation

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sinh'(t)$		$+$		$+$	
$\sinh(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que :
- $\forall t < 0$, $\sinh(t) < 0$
- $\forall t > 0$, $\sinh(t) > 0$

2.4.2 Cosinus hyperbolique

Dérivée

cosh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de plus
$$\cosh' = \sinh$$

Limites On a par retour à la définition de la fonction,
$$\lim_{+\infty} \cosh = \lim_{-\infty} \cosh = +\infty$$

Tableau de variations

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh'(t)$		$-$	0	$+$	
$\cosh(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $\cosh(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

2.4.3 Tangente hyperbolique

Dérivée

tanh est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2}$$

Limites Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (1) \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (2) \end{aligned}$$

- $(1) \Rightarrow \lim_{+\infty} \tanh = 1$
- $(2) \Rightarrow \lim_{-\infty} \tanh = -1$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\tanh'(x)$		$+$		$+$	
$\tanh(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

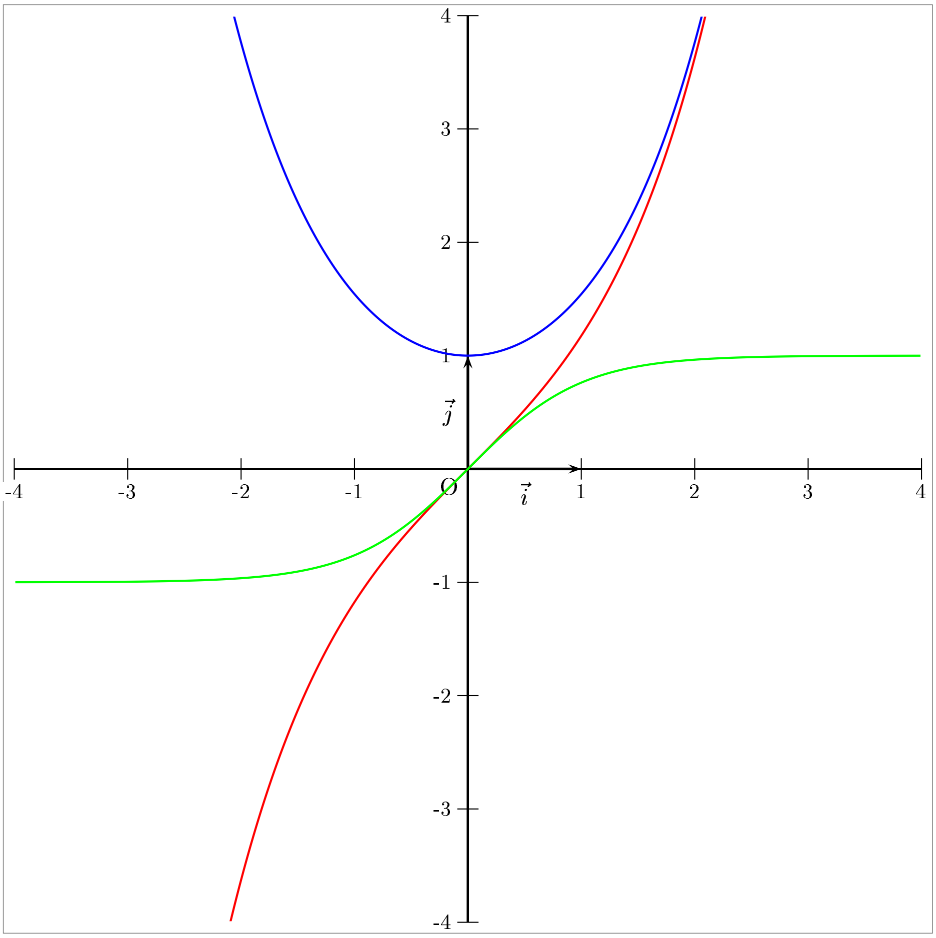

FIGURE 4 – Graphe des fonctions sinh, cosh et tanh

2.5 Fonctions hyperboliques inverses

2.5.1 Sinus hyperbolique inverse

On a vu que sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on note

$$\operatorname{argsinh} = \sinh^{-1}$$

De plus on montre en résolvant l'équation $x = \sinh(y)$ que

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Dérivée sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) \neq 0$ donc, après le théorème fondamental, argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(y))} \\ &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh}(y))}\end{aligned}$$

Or $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cosh^2(\operatorname{argsinh}(y)) &= 1+\sinh^2(\operatorname{argsinh}(y)) \\ &= 1+y^2\end{aligned}$$

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) > 0$ donc

$$\operatorname{argsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

2.5.2 Cosinus hyperbolique inverse

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \cosh t \end{array}$, alors f est dérivable et $f'(t) = \sinh t \geqslant 0$. De même $\forall t > 0$, $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle établit une bijection $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{+\infty} f\right[= [1, +\infty[$. Par définition,

$$\operatorname{argcosh} = \tilde{f}^{-1}$$

Dérivée Ainsi, argcosh : $[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est aussi continue et strictement croissante. $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{f}(t) > 0$ donc argcosh est dérivable sur $\tilde{f}\left(\mathbb{R}_+^*\right) =]1, +\infty[$ et $\forall y > 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{argcosh}'(y) &= \frac{1}{\tilde{f}'(\operatorname{argcosh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{argcosh}(y))}\end{aligned}$$

Or pour $y \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sinh^2(\operatorname{argcosh}(y)) &= \cosh^2(\operatorname{argcosh}(y)) - 1 \\ &= y^2 - 1 \geqslant 0\end{aligned}$$

Pour $y \geqslant 1$, $\operatorname{argcosh}(y) \geqslant 0$ donc $\sinh(\operatorname{argcosh}(y)) \geqslant 0$ donc $\sinh(\operatorname{argcosh}(y)) = \sqrt{y^2-1}$ donc $\forall y > 1$,

$$\operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Expression de la fonction Soit $y \geqslant 1$, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\cosh x = y &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \text{ est racine du polynôme } P(X) = X^2 - 2yX + 1\end{aligned}$$

Or $\Delta(P) = 4\left(y^2-1\right) \geqslant 0$:

- Pour $y = 1$, $\Delta(P) = 0$ donc l'unique racine de P est 1 donc

$$\begin{aligned} \cosh x = y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

- Pour $y > 1$, $\Delta(P) > 0$ donc P admet pour racine

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ et on a

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 &\Leftrightarrow y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2 < y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow y > 1 \quad \text{ce qui est vrai} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \text{ est racine de } P &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

Pour $y \geqslant 1$, l'équation $f(x) = y$ admet donc comme unique solution $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

Or cette unique solution est par définition $\tilde{f}^{-1}(y)$ donc pour $y > 1$,

$$\operatorname{argcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Cette expression est *a posteriori* valable pour $y = 1$.