Corrigé du devoir à rendre le 7/12/2020

Dans cet exercice, on étudie une équation différentielle fréquemment rencontrée en physique. On considère deux nombres réels positifs λ et ω_0 ainsi que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

Il s'agit de l'équation générale d'un oscillateur amorti de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement λ.

Étude du régime libre :

1. *Montrer que si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors la quantité $E = (\omega_0^2 y^2 + y'^2)/2$ décroit au cours du temps. Cette quantité est proportionnelle à l'énergie du système.*

   Si y est solution de l'équation différentielle homogène, alors c'est une fonction deux fois dérivable et donc E est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel t, on a

   $$E'(t) = y'(t)y''(t) + \omega_0^2 y(t)y'(t) = -2\lambda y'^2(t) \leq 0$$

   La fonction $E(t)$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. *Donner la forme générale des solution suivant que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :*
   - *$\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique),*
   - *$\lambda = \omega_0$ (régime critique)*
   - *$\lambda > \omega_0$ (régime apériodique).*

   On recherche des solution sous la forme $t \mapsto e^{rt}$. Une telle fonction est solution de l'équation différentielle homogène si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique

   $$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$. On a donc trois éventualités.

   - Si $\lambda < \omega_0$ (régime pseudo-périodique), alors le discriminant Δ est négatif. L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjuguées $r = -\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. L'ensemble des solutions est donc

   $$\{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-\lambda t}\left(A\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t) + B\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t)\right),(A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

   - Si $\lambda = \omega_0$ (régime critique), alors le discriminant Δ est nul et l'équation caractéristique possède une racine double $r = -\lambda$. L'ensemble des solutions est donc

   $$\{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-\lambda t}(A + Bt),(A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

   - Enfin, si $\lambda > \omega_0$ (régime apériodique), alors les deux racines de l'équation caractéristiques notées r_1 et r_2 sont réelles et négatives et l'ensemble des solutions est donc

   $$\{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},(A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

   Remarquons que dans tous les cas, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

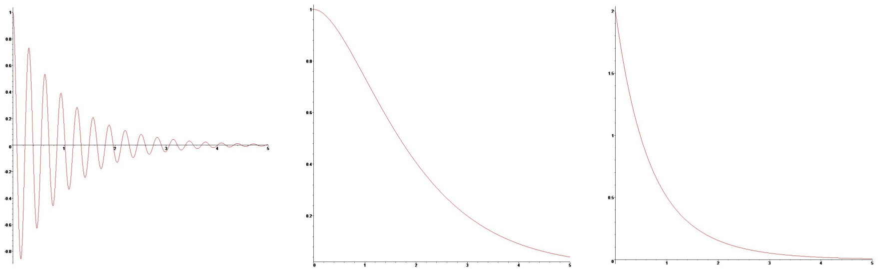

FIGURE 1 – Solution générale en régime pseudo-périodique, apériodique critique et apériodique

On se place maintenant dans le cas $\lambda < \omega_0$ et on note $E_n = E(t_n)$, l'énergie du système à l'instant $t_n = \dfrac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.

3. *Donner et tracez la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.*

   Après calculs, on obtient

   $$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi\right)$$

   où ϕ est un réel (unique modulo 2π tel que

   $$\cos\phi = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}{\omega_0} \text{ et } \sin\phi = -\frac{\lambda}{\omega_0}$$

   par exemple $\phi = \arctan\left(\dfrac{-\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right)$ (car $\cos\phi \geq 0$).

   Le dessin correspond à celui de la question précédente.

4. *Montrer que, pour cette solution,*

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-\delta}$$

avec δ un réel à exprimer en fonction de λ et ω_0. Ce nombre s'appelle le décrément logarithmique. Il mesure à quelle vitesse le système perd de l'énergie.

On commence par remarquer que, pour tout entier naturel n, on a $y'(t_n) = 0$. On a donc

$$E_n = \omega_0^2 y^2(t_n) = \omega_0^2 e^{-2\lambda t_n}$$

Puis

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = e^{-2\lambda(t_{n+1}-t_n)} = e^{-\frac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}}$$

On obtient bien l'écriture demandée avec $\delta = \dfrac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$.

5. *Montrer que δ est une fonction croissante de λ.*

La fonction $\lambda \mapsto \dfrac{4\lambda\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ est une fonction croissante de λ comme quotient d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Ceci montre que plus l'amortissement λ est grand, plus l'énergie décroit vite.

Étude du régime forcé :

On modifie maintenant l'équation différentielle en introduisant un terme de forçage sinusoïdal à la pulsation ω.

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

1. *Expliquez pourquoi, le comportement d'une solution de cette équation différentielle lorsque t est suffisamment grand ne dépend pas des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$.*

Une solution de l'équation différentielle linéaire s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la famille des solution de l'équation homogène associée. On a vu que toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 lorsque le temps t tend vers $+\infty$. On peut donc dire que le comportement d'une solution de l'équation avec second membre est celui d'une solution particulière de cette équation, indépendamment des conditions initiales.

2. *Trouvez une solution particulière de la forme $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$.*

On recherche naturellement des solutions de la forme $t \mapsto He^{i\omega t}$. On obtient alors la condition suivante :

$$H(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) = 1$$

soit

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

Pour étudier la fonction $H(\omega)$, on pose $m = \lambda/\omega_0$, $x = \omega/\omega_0$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2 + 2imx}$$

3. *Tracez le graphe de l'argument principal (entre $-\pi$ et π) de f en fonction de x.*

Si on note θ l'application qui à tout réel x positif fait correspondre l'argument principal de $f(x)$, alors $-\theta(x)$ est l'argument principal de $1 - x^2 + 2imx$. Si $x \leq 1$, alors $1 - x^2 \geq 0$ et on a

$$\theta(x) = -\arctan\frac{2mx}{1-x^2}$$

En revanche, si $x > 1$, alors

$$\theta(x) = -\left(\pi - \arctan\frac{2mx}{-1+x^2}\right) = -\pi - \arctan\frac{2mx}{1-x^2}$$

On dit qu'aux basses fréquences, la réponse du système est en phase avec l'excitation tandis qu'aux hautes fréquences, il sont en opposition de phase.

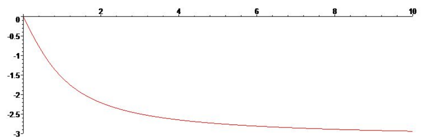

FIGURE 2 – Argument de $f(x)$ en fonction de x.

4. *On suppose que $m < 1/\sqrt{2}$. Étudiez les variations de $g = |f|^2$ et montrer que g possède un maximum global g_m que l'on tracera en fonction de m.*

On a, pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}$

On remarque que g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = -4\frac{(x^2 - (1-2m^2))x}{((1-x^2)^2 + 4m^2x^2)^2}$$

Comme $m < 1/\sqrt{2}$, la fonction g' s'annule en $x_m = \sqrt{1-2m^2}$. Elle est positive pour $x \leq x_m$ et négative pour $x \geq x_m$, ce qui montre qu'elle admet un unique maximum global $g_m = g(x_m)$ donné par

$$g_m = \frac{1}{(1-x_m^2)^2 + 4m^2x_m^2} = \frac{1}{(2m^2)^2 + 4m^2(1-2m^2)} = \frac{1}{4m^2(1-m^2)}$$

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, 1/2]$.
Comme $1/\sqrt{2} < 1/2$, la fonction $m \mapsto g_m$ est décroissante sur l'intervalle $]0, 1/\sqrt{2}[$. Autrement dit, plus l'amortissement est faible et plus le maximum de g est grand.

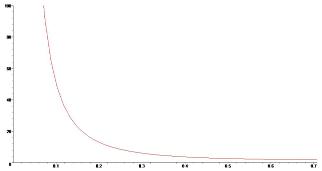

FIGURE 3 – Valeur de g_m en fonction de m.

5. *Tracez le graphe de g en fonction de x. On distinguera les cas $m < 1/\sqrt{2}$ et $m > 1/\sqrt{2}$.*

Il reste à traiter le cas où $m \geq 1/\sqrt{2}$. Dans ce cas, la fonction g est monotone et décroissante.

Ce phénomène s'appelle la résonance. Si le système est peu amorti (m est petit), alors le maximum global g_m est grand. Remarquez que la condition pour observer une résonance est $m < 1/\sqrt{2}$ alors qu'en régime libre, on observe des oscillation si $m < 1$.

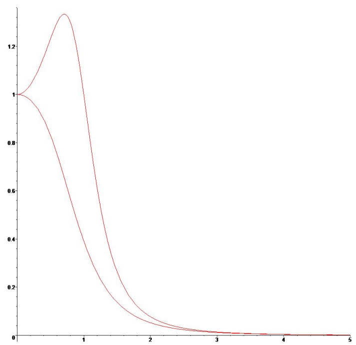

FIGURE 4 – Valeur de $g(x)$ en fonction de x pour $m = 0,5$ et $m = 0,8$.