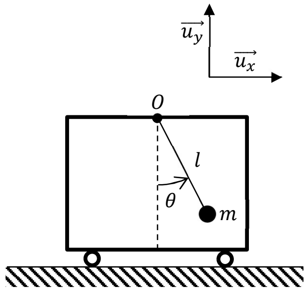
MECANIQUE

Chapitre 1 : Changement de référentiel

Chapitre 2 : Dynamique dans un référentiel non galiléen

Exercice 1 : Pendule soumis à une accélération uniforme

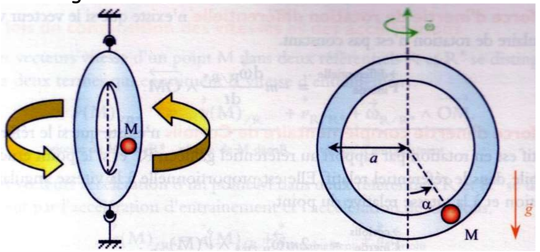
Une masse m est suspendue au plafond d'un train par une ficelle de longueur l. Le train est en mouvement uniformément accéléré, tel que $\vec{a} = a\overrightarrow{u_x}$.



1) Le référentiel du train est-il galiléen ? On se place désormais dans ce référentiel.
2) Montrer que la masse est soumise à des interactions dérivant d'une énergie potentielle. Exprimer cette dernière en fonction de l'angle θ entre la verticale et le fil.
3) Quelle est la position d'équilibre θ_0 de la masse ?
4) Déduire de la conservation de l'énergie mécanique l'équation du mouvement du pendule.
5) Etudier la stabilité autour de l'équilibre. On posera $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll \theta_0$.

Exercice 2 : Equilibre dans un cerceau tournant

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement dans un cerceau de rayon a qui tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel lié au laboratoire et galiléen.

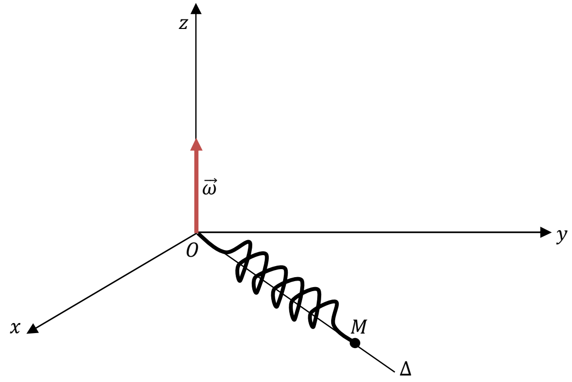


1) Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la bille dans le référentiel $\mathcal{R}$ du cerceau. Déterminer la ou les positions d'équilibre de la bille.
2) Etablir l'expression de l'énergie potentielle de la bille en fonction de l'angle α.
3) Retrouver les positions d'équilibre de la bille et étudier leur stabilité. On posera :
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$
4) On s'intéresse à de petites oscillations de l'anneau. Ecrire l'énergie $E_p(\alpha)$ sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre stable centrale.
5) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique pour ces oscillations puis en déduire l'équation angulaire du mouvement et la pulsation des oscillations.

Exercice 3 : Mouvement guidé d'un anneau

Un anneau glisse sans frottement sur un axe Δ tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega_0\overrightarrow{u_z}$. Il est relié au point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. L'anneau est lâché, à l'instant initial, sans vitesse de la distance r_0 du point O.

1) Quelles sont les forces exercées sur la masse m dans le référentiel tournant ?
2) Etablir le mouvement de l'anneau dans ce référentiel.
3) Existe-t-il une position d'équilibre stable ?



Exercice 4 : Déviation vers l'Est de la chute libre

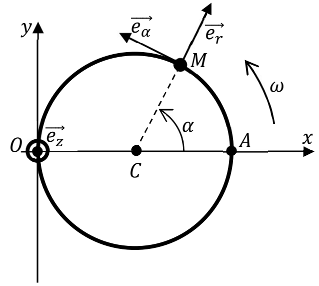
L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T\ (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ en un lieu de latitude λ. L'axe (Ox), tangent au parallèle, est dirigé vers l'Est, (Oy), tangent au méridien, est dirigé vers le Nord et (Oz) est la verticale du lieu.

La vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord est :
$$\Omega = 7{,}29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$$
La vitesse de l'air est négligeable et le champ de pesanteur supposé uniforme :
$$\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$$
Une particule M de masse m est en chute libre, abandonnée sans vitesse initiale à partir d'un point A situé à une hauteur h au dessus du sol.

1) Effectuer le bilan des forces appliquées au point M dans le référentiel terrestre.
2) Etudier le mouvement de M à l'ordre 0 en Ω, c'est à dire en négligeant la force de Coriolis.
3) Montrer que dans l'hémisphère Nord, au premier ordre en Ω, la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité x_1 vers l'Est.
4) Montrer que dans l'hémisphère Nord, au second ordre en Ω, la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité y_1 vers le Sud et d'une quantité x_1 vers l'Est. Qu'en est-il dans l'hémisphère Sud ?
   Exprimer les déviation x_1 et y_1 à l'arrivée au sol en fonction de Ω, h, λ et g.
5) Calculer x_1 et y_1 pour $h = 158\ m$ et $\lambda = 49°$. On prendra $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.
   Etait-il nécessaire de prendre en compte la déviation vers le Sud ?

Exercice Supplémentaire : Oscillations en référentiel tournant

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon R, est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre $\mathfrak{R}_T$ supposé galiléen.
A partir de $t = 0$, on fait tourner cet anneau dans $\mathfrak{R}_T$, à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. A $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$) et sa vitesse dans $\mathfrak{R}_T$ est encore nulle.
On note $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre.



1) Le référentiel $\mathfrak{R}$ lié à l'anneau est-il galiléen ? Faire le bilan des forces s'appliquant sur M et donner leurs composantes dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\alpha}, \overrightarrow{e_z})$.
2) A l'aide d'un principe fondamental de la dynamique, obtenir l'équation différentielle vérifiée par α.
3) Déterminer les positions d'équilibre de M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que leur stabilité.
4) On suppose maintenant qu'on est dans le cadre des petites oscillations. Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
5) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin\alpha$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.
6) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans $\mathfrak{R}$ en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}$ et des paramètres du système.
7) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle du mouvement.