Compléments d'algèbre linéaire

Feuille d'exercices #04

Partie A – Calcul matriciel

Exercice 1 — Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dans cet exercice, I désigne la matrice identité d'ordre 3 et 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières.

1. *Par diagonalisation*

   On pose $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Démontrer que P est inversible puis calculer $D = P^{-1}AP$ et enfin A^n.
   b) Justifier l'inversibilité de A et en déduire alors A^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$.

2. *Par la formule du binôme de Newton*

   a) Soit $B = A - 2I$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B.
   b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I.

3. *Par polynôme annulateur*

   a) Montrer que $A^2 - 3A + 2I = 0_3$.
   b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n, $A^n = a_n A + b_n I$.
   Exprimer a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.
   c) Justifier que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 — Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \neq j \\ \beta & \text{si } i = j \end{cases}$$

1. Calculer A^m pour $m \in \mathbb{N}$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que la matrice A soit inversible et donner alors son inverse.

Exercice 3 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$M = \begin{bmatrix} I_n & A & C \\ 0 & I_n & B \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$$

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 4 — Soit n un entier naturel non nul.

1. Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.
2. a) On note $E_{i,j}$ les matrices constitutives de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer la matrice $E_{a,b}E_{c,d}$, où $a, b, c, d \in [\![1, n]\!]$.
   b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note φ l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi(M) = MA$. Montrer que $\mathrm{Tr}(\varphi) = n\,\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 5 — Déterminer le rang des matrices suivantes : $(\alpha \in \mathbb{C})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} \alpha & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & \alpha \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 — *Matrices de rang* 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = UV^\top$.
2. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, M^p.
3. Montrer que $I_n + M$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$ et déterminer alors $(I_n + M)^{-1}$.

Exercice 7 — *Matrices à diagonale dominante*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. En raisonnant sur l'une des coordonnées de X de plus grand module, montrer par l'absurde que $X = 0$. Qu'en déduire ?

Partie B – Espaces vectoriels

Exercice 8 — Montrer que la famille $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 9 — Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites complexes p-périodiques.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie et préciser celle-ci.
2. Déterminer une base de E formée de suites géométriques.

Exercice 10 — Soit $n\in\mathbb{N}$. On cherche à montrer que la famille $((X+k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. On introduit pour cela $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X+k)^n=0$.

1. Montrer que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X+k)^p=0$ et $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k k^p=0$.
2. Conclure à l'aide des polynômes de Lagrange.

Exercice 11 — Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\mathscr{F}=(x\mapsto\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}\ ;\quad \mathscr{G}=\left(x\mapsto\cos^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\quad \mathscr{H}=\left(x\mapsto e^{\alpha_n x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

où les α_n sont des nombres complexes deux à deux distincts.

Exercice 12 — Soient $E=\mathbb{R}_{n+1}[X]$, $k\leqslant n$, $a,b\in\mathbb{R}$ distincts. On note φ l'application définie sur E par :

$$\varphi(P)=\left(P(a),P'(a),\dots,P^{(k)}(a),P(b),\dots,P^{(n-k)}(b)\right)$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^{n+2}$.
2. En déduire l'existence et l'unicité d'une base $\mathscr{B}=(Q_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$ de E telle que, pour tout $P\in E$, $P=\sum_{i=0}^{k}P^{(i)}(a)Q_i+\sum_{i=0}^{n-k}P^{(i)}(b)Q_{i+k+1}$.

Exercice 13 — On note $E=\mathscr{C}^\infty([-1,1],\mathbb{R})$, $E^*=\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ ainsi que pour tout $n\in\mathbb{N}$, ψ_n l'application définie sur E par $\psi_n(f)=f^{(n)}(0)$.
Montrer que $\left(\psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E^*.

Exercice 14 — Soit $\mathscr{H}=\left\{y\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t=\frac{y(0)+y(1)}{2}\right\}$.
Montrer que $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en donner un supplémentaire.

Partie C – Applications linéaires, représentation matricielle

Exercice 15 — Soient $E=\mathbb{R}^3$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(4x+y-z,2x+3y-z,2x+y+z)$$

1. Montrer que $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ puis construire sa matrice représentative dans la base canonique.
2. Trouver deux réels distincts λ et μ tels que $f-\lambda\mathrm{id}_E$ et $f-\mu\mathrm{id}_E$ ne soient pas des automorphismes.
3. Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)$.
4. Donner la matrice représentative de f dans une base adaptée.

Exercice 16 — *Matrice de Vandermonde*
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}^n$ distincts. On considère la matrice :

$$V=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

Montrer que la matrice V est inversible :

1. en s'intéressant au nombre de racines d'un certain polynôme lors de la résolution de l'équation $VX=0$;
2. en construisant la matrice de passage de la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique.

Exercice 17 —

1. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ distincts et $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{id}_E)=\bigoplus_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{id}_E)$$

2. Montrer que $\left(n\mapsto\lambda_1^n,\dots,n\mapsto\lambda_p^n\right)$ est libre si, et seulement si les λ_i sont tous non nuls et distincts.

Exercice 18 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 19 — Soit $n \geqslant 2$. On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que l'application ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 20 — Soient $E = \mathbb{C}[X]$ et φ et ψ les endomorphismes de E définis par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi(P) = XP \quad \text{et} \quad \psi(P) = P'$$

1. Déterminer le noyau et l'image de φ et de ψ.
2. Déterminer le noyau de ψ^n où $n \in \mathbb{N}^*$ et l'image de $\psi - \alpha\mathrm{id}_E$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 21 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $\phi(P) = P(X+a)$. On note T la matrice de coefficients $t_{i,j} = \binom{j}{i}$.
Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$; en déduire l'inverse de T.

Exercice 22 — Soient $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées et l'application $\phi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathcal{B}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 23 — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, u(x))$ est libre.
2. Aboutir à une contradiction. La conclusion tient-elle si E est un $\mathbb{C}$-e.v. ?

Exercice 24 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
2. Interpréter en termes de noyau et d'image l'égalité $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.
4. On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.

Exercice 25 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \iff \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = E$

Exercice 26 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose $\mathrm{Ker}(f)$ de dimension finie.

1. Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, alors $f^{-1}(F)$ est de dimension finie.
2. Prouver que $\mathrm{Ker}(f^n)$ est de dimension finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27 — *Factorisation*
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. On considère deux applications $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que :
$$\exists h \in \mathcal{L}(F, G) \text{ tel que } g = h \circ f \text{ si, et seulement si, } \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$$
2. On considère $n+1$ formes linéaires $\phi_1, \dots, \phi_n$ et φ sur E. Montrer que :
$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\phi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$$

Exercice 28 — *Endomorphismes nilpotents*
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente, d'ordre de nilpotence p, c'est-à-dire que : $f^p = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant la famille $\mathcal{F}$. Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?
3. Que peut-on dire de la suite $(\mathrm{rg}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$?
4. On suppose que $p = n$ et soit $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \in \mathrm{Vect}\big(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{n-1}\big)$.

Exercice 29 — On note $\mathscr{F}$ l'ensemble de endomorphismes φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M^\top) = \varphi(M)^\top$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 30 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que $\left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Exercice 31 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

1. Établir l'encadrement :
$$\left|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)\right| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$
2. Justifier également l'inégalité $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

Exercice 32 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

1. En considérant la restriction de u à $\operatorname{Im}(v)$, démontrer que :
$$\operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(u \circ v) + \dim(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(v))$$
2. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Ker}(v)$.

Exercice 33 — Soit E un espace de dimension finie $2p$ avec $p \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés :

(i) $\varphi^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(\varphi) = p$ (ii) $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$

(iii) $\exists A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soit la matrice de φ dans une certaine base.

Exercice 34 — Soient $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. On suppose que pour tout $f \in E$,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que g est constante.

Exercice 35 — *Noyaux itérés d'un endomorphisme*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$.

1. Montrer que la suite $(\operatorname{Ker}(u^p))_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier r tel que $\operatorname{Ker}(u^r) = \operatorname{Ker}(u^{r+1})$ puis que pour tout $p \geqslant r$, $\operatorname{Ker}(u^p) = \operatorname{Ker}(u^{p+1})$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Im}(u^r) \oplus \operatorname{Ker}(u^r)$.
4. a) Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Im}(u^r)$ et $\operatorname{Ker}(u^r)$ sont stables par u.
   b) En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ où G est inversible et N nilpotente.
5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et F_p un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u^p)$ dans $\operatorname{Ker}(u^{p+1})$.
   a) On note v la restriction de u à F_p. Montrer que v est injective.
   b) Prouver que $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(u^p)$ puis que $\operatorname{Im}(v) \oplus \operatorname{Ker}(u^{p-1}) \subset \operatorname{Ker}(u^p)$.
   c) En déduire que $\left[\dim(\operatorname{Ker}(u^{p+1})) - \dim(\operatorname{Ker}(u^p))\right]_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 36 — *Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

1. a) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $\operatorname{Tr}(AM) = \operatorname{Tr}(BM)$ pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A = B$.
   b) En déduire que pour toute forme linéaire φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$$
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Partie D – Projecteurs et symétries vectoriels

Exercice 37 — Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices :

$$M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Montrer que f est une projection vectorielle et g une symétrie vectorielle ; déterminer leurs caractéristiques géométriques.

Exercice 38 — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$\mathscr{P} : x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan $\mathscr{P}$ parallèlement à la droite $\mathscr{D}$.
2. Faire de même avec la symétrie s par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

Exercice 39 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Exercice 40 — Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^2 = f$ et $g \circ f = 0$.
Montrer à l'aide de la propriété $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ que $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 41 — Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$. On suppose que $f = f \circ g \circ f$ et $g = g \circ f \circ g$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 42 — Soient E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$.
2. Que peut-on en déduire concernant $g \circ f$?
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 43 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère r projecteurs $p_1, \ldots, p_r$ tels que $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer, à l'aide de la trace, que $\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(p_1)) + \cdots + \dim(\operatorname{Im}(p_r))$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_r)$.
3. Montrer que pour tout $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 44 — *Sous-groupes finis de* $\mathrm{GL}(E)$
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $(G, \circ)$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, de cardinal noté n.
On pose $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $g \circ p = p \circ g = p$.
2. Montrer que p est un projecteur dont l'image est $\{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g)$ est un entier multiple de n.

Exercice 45 — Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe un projecteur p vérifiant $u = p \circ u - u \circ p$.