TD22 - AL

Ex 1:

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$

Mq tout endomorphisme $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b\bar{z}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

Supp qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tq $f : z \mapsto az + b\bar{z}$

$$\begin{cases} f(1) = a + b & L_1 \\ f(i) = ai + ib & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) - if(i) = 2a & L_1 - iL_2 \\ f(1) + if(i) = 2b & L_1 + iL_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2} \end{cases}$$

Synthèse: On pose

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2} \\ b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2} \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$

Mq $f(z) = az + b\bar{z}$

Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = x + iy$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= f(x) + f(iy) \\ &= x f(1) + y f(i) \end{aligned}$$

De plus
$$\begin{aligned} az + b\bar{z} &= \frac{f(1) - if(i)}{2}(x + iy) + \frac{f(1) + if(i)}{2}(x - iy) \\ &= \frac{f(1)}{2}x + \frac{f(i)}{2}y + \frac{f(1)}{2}x + \frac{f(i)}{2}y \\ &= x f(1) + y f(i) \end{aligned}$$

Réciproquement :

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto az + b\bar{z} \end{array}$

Mq f est $\mathbb{R}$ linéaire

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda z + z') = a \quad (\lambda z + z') + b \quad (\overline{\lambda z + z'})$$

$$\overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} a(\lambda z + z') + b(\lambda \bar{z} + \bar{z}')$$

$$= \lambda(az + b\bar{z}) + (az' + b\bar{z}')$$

$$= \lambda f(z) + f(z')$$

CCl : $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b\bar{z} \end{array}, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

2) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b\bar{z} \end{array}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tq f bijective

On a : $\ker f = \{0\}$

f bij $\Leftrightarrow (f(1), f(i))$ base de $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow (a+b, ai - ib)$ base de $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_a + y_b \\ x_a - x_b \end{pmatrix}$ non colinéaires

$\Leftrightarrow (x_a + x_b)(x_a - x_b) - (y_a + y_b)(-y_a + y_b) \neq 0$

$\Leftrightarrow x_a^2 - x_b^2 + y_a^2 - y_b^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow |a^2| - |b|^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow |a| \neq |b|$

Ex 2:

. Soit $x \in f(\text{Ker}(g \circ f))$

Par hyp il existe $t \in \text{Ker}(g \circ f)$ tq $x = f(t)$

donc $x \in \text{Im} f$

$g(x) = g(f(t)) = g \circ f(t) = 0$

Donc $x \in \text{Ker}\, g$

Donc $f(\text{Ker}(g \circ f)) \subset \text{Ker}\, g \cap \text{Im} f$

. Soit $x \in \text{Ker}\, g \cap \text{Im} f$

Mq $\text{Ker}\, g \cap \text{Im} f \subset f(\text{Ker}(g \circ f))$

Par hyp: $\begin{cases} g(y) = 0 \\ \text{il existe } x \in E \text{ tq } f(x) = y \end{cases}$

On a: $g(f(x)) = 0$

$g \circ f(x) = 0$

donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$

Donc $y \in f(\text{Ker}(g \circ f))$

Donc $\text{Ker}\, g \cap \text{Im} f \subset f(\text{Ker}(g \circ f))$

Donc $\text{Ker}\, g \cap \text{Im} f = f(\text{Ker}(g \circ f))$

Ex 3:

1) $f^{-1}(F) = \{x \in E \,,\, f(x) \in F'\}$

$f(f^{-1}(F')) \subset F' \cap \text{Im} f$

Soit $y \in F' \cap \text{Im} f$

Mq $y \in f(f^{-1}(F'))$

Par def: il existe $x \in E$ tq $y = f(x)$

Comme $y \in F'$ $f(x) \in F'$, alors $x \in f^{-1}(F')$

donc $y \in f(f^{-1}(F'))$

cqfd: $f(f^{-1}(F')) = F' \cap \text{Im} f$

. Soit $x \in E$

$x \in f^{-1}(f(B)) \Leftrightarrow f(x) \in f(B)$ $\quad f(B) = \{f(b),\ b \in B\}$

$\Leftrightarrow \exists\, b \in B$ tq $f(x) = f(b)$ / f lin

$\Leftrightarrow \exists\, b \in B \quad x - b \in \ker f$

$\Leftrightarrow x \in B + \ker f$

Ex4:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 - 4f + 3Id_E = 0$

Mq $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$

. Mq $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 3Id_E) \subset \{0\}$

Soit $x \in \ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 3Id_E)$

$$\begin{cases} (f - Id_E)(x) = f(x) - x) = 0 \\ (f - 3Id_E)(x) = f(x) - 3x = 0 \end{cases}$$

$f(x) - x = f(x) - 3x$

$2x = 0$

donc $x = 0$

donc $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f - 3Id_E) = \{0\}$

Donc $\ker(f - Id_E) + \ker(f - 3Id_E) = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$

. Mq $E \subset \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$

Soit $x \in E$

$x = x_1 + x_2$

$(f - Id_E)(x) = (f - Id_E)(x_1 + x_2) = (f - Id_E)(x_2) = 2x_2$

$(f - 3Id_E)(x) = (f - 3Id_E)(x_1 + x_2) = (f - 3Id_E)(x_1) = -2x_1$

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}(f - 3Id_E)(x) \\ x_2 = \frac{1}{2}(f - Id_E)(x) \end{cases}$$

Mq $\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E) \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3Id_E) \\ x_1 + x_2 = x \end{cases}$

$\cdot\ (f - Id_E)(x_1) = (f - Id_E)\left(-\frac{1}{2}(f - 3Id_E)(x)\right)$

$= (f - Id_E)\left(-\frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2}x\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(f^2(x) - 4f(x) + 3x\right)$

$= 0$

$f(x_1) - x_1 = f(x) - f(x_2) - x + x_2$

$= f(x) - x - 2x_2$

$= 0$

donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$

$\cdot\ (f - 3Id_E)(x) = (f - 3Id_E)\left(\frac{1}{2}(f - Id_E)(x)\right)$

$= (f - 3Id_E)\left(\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}x\right)$

$= \frac{1}{2}\left(f^2(x) - 4f(x) + 3x\right)$

$= 0$

donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$

$\cdot\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\left(-(f - 3Id_E)(x) + (f - Id_E)(x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-f(x) + 3x + f(x) - x\right)$

$= x$

Donc $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$

2) Soient F et G tq $F \oplus G$

Mq il existe un unique endomorphisme g de E tq $F = \mathrm{Ker}(g - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(g - 3Id_E)$

Mettre en relation avec symétrie / projection

Ex 6:

1) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ⊛

Mq $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{K}}$

$\lambda_0 Id_E + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$

On compose par f

$\lambda_0 f + \lambda_1 f^2 + \dots + \cancel{\lambda_{n-1} f^n} = 0$

On compose ⊛ par f^{n-1} permet de tuer tout le monde sauf le 1er

On obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{n-1+k} = 0$ (I)

Or $f^n = 0$

donc $f^{n+1} = 0$ ...

donc $\forall p \geq n \quad f^p = 0$

Ainsi on a : $\underbrace{\lambda_0}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{f^{n-1}}_{\in \mathcal{L}(E)} = 0$

Or $f^{n-1} \neq 0$

donc $\lambda_0 = 0$

On a donc $\lambda_1 f + \lambda_2 f^2 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$

On compose par f^{n-2} et on obtient $\lambda_1 = 0$

et ainsi de suite

Rédaction 1: Récurrence finie et fort

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $H(k)$: "$\lambda_k = 0$"

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$

I: ici (I)

H: Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tq $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Mq $\lambda_{k+1} = 0$

On a (*) $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i f^k = 0$

donc $\sum_{i=k+1}^{n-1} \lambda_i f^i = 0$

On compose par $f^{\overbrace{n-k-2}^{\in \mathbb{N}}}$ pour obtenir $\lambda_{k+1} f^{n-1} = 0$

puis $\lambda_{k+1} = 0$

Rédaction 2:

Supp par l'absurde qu'il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\lambda_{k_0} \neq 0$

Considérons : $P = Min \{\underbrace{k \in [\![0, n-1]\!] \quad \lambda_k \neq 0}_{\text{partie finie non vide}}\}$

(*) devient $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^k = 0$

On compose par f^{n-1-p} pour obtenir $\lambda_p f^{n-1} = 0$

puis $\lambda_p = 0$ ABSURDE

CCL: $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \lambda_k = 0$

2) $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe $x_0 \in E$ tq $f^{n-1}(x_0) \neq 0$

Mq $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ libre

A Finir comme $\boxed{Q1}$

Ex 7 :

1) On pose $\mathcal{C}(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E) : f \circ g = g \circ f \}$

Mq $\mathcal{C}(f)$ est un $\mathbb{K}$ev

Mq $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ 自己做

Rq : $Id_E \in \mathcal{C}(f)$

$f \in \mathcal{C}(f)$

$f^2 \in \mathcal{C}(f)$

$\forall k \in \mathbb{N}\ f^k \in \mathcal{C}(f)$

$P(f) \in \mathcal{C}(f)$

$\sum_{k=0}^{d} a_k f^k$

3) On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tq $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Mq $\forall g \in \mathcal{C}(f), \exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \quad g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$

S'il $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

On a : $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

Les a_k sont donc les coordonnées de $g(x_0)$ dans $\mathcal{B}$

Comme $\mathcal{B}$ est la base de E et $g(x_0) \in E$, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$

tq $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

Mq $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$

$g \circ f^p = f^p \circ g$

On a : $g(f^p(x_0)) = f^p(g(x_0)) = f^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right)$

$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)(f^p(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{\cancel{k+1}\, k+p}(x_0)$

Comme f^p est linéaire, $f^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+p}(x_0)$

Donc g et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur une base

donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

Ex 8 :

E, F, G 3 $\mathbb{K}$ev

On suppose que tout sev possède un supplémentaire

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$

Mq $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \iff \exists h \in \mathcal{L}(F,G) \quad g = h \circ f$

$\boxed{\Leftarrow}$ évident

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$

Mq $\exists h \in \mathcal{L}(F,G)$: $g = h \circ f$

On veut h linéaire et $\forall x \in E \quad g(x) = h(f(x))$

Soit $y \in f(E)$

Il existe $x \in E$: $y = f(x)$

On doit avoir $h(y) = g(x)$

Supp $f(E) = F$

On posserait : $h : F \to G$
$y \mapsto g(x)$
où x est un antécédent de y par f
l'existence d'un tel x est assurée car on a supp f surj

Pour que h soit correctement définie, il faut s'assurer que si un élément $y \in F$ a au moins deux antécédents par f

x_1 et x_2, alors $g(x_1) = g(x_2)$

Sous ces hyp, $f(x_1) = f(x_2)$ càd $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$

Or par hyp $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$

donc $g(x_1) = g(x_2)$

Ainsi h est bien définie

Il reste à mq :
① * $h \in \mathcal{L}(F,G)$
② * $h \circ f = g$

② Soit $x \in E$

Mq $(h \circ f)(x) = g(x)$

$h(f(x)) = g(x)$ par déf de h car un antécédent de $f(x)$ par f est x

① Mq h est linéaire

Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Mq $h(\lambda y_1 + y_2) = \lambda h(y_1) + h(y_2)$

Comme f est surj, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tq $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases}$

on a alors $\lambda y_1 + y_2 = f(\lambda x_1 + x_2)$

Par déf de h : $h(y_1) = g(x_1)$
$h(y_2) = g(x_2)$

$$\begin{aligned} h(\lambda y_1 + y_2) &= g(\lambda x_1 + x_2) \\ &= \lambda g(x_1) + g(x_2) \\ &= \lambda h(y_1) + h(y_2) \end{aligned}$$

Ainsi $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tq $g = h \circ f$

Cas général :

Par hyp : $\mathrm{Im} f$ possède un supplémentaire S dans F

On pose :

$$h : \begin{array}{l} F \to G \\ y \mapsto g(x) \text{ où } y = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{s}_{\in S} \end{array}$$

Soit $y \in F$

S'il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tq $f(x_1) = f(x_2) = y_{\mathrm{Im} f}$ où $y = \underbrace{y_{\mathrm{Im} f}}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{s}_{\in S}$

Mq $g(x_1) = g(x_2)$

On a $x_2 - x_1 \in \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}\, g$

donc $g(x_1) = g(x_2)$

① et ② se prouvent de la même façon au cas où f surj

2) $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, h \iff \exists f \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $g = h \circ f$

$$h(\underbrace{f(x)}_{\text{antécédent ...}}) = g(x)$$