devoir à faire

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Prouver que la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.
   (b) Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

      On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$.

      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      iii. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(X, MX, M^2X\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
      v. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
   (c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
      i. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      ii. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
   (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.