ENS 2019 math C : corrigé (début)

Description

I. Pas difficile, intéressant : manipulations sur les produits scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
II.1. Analyse classique.
II.2. Analyse très classique (on doit normalement avoir l'idée d'une fonction importante).
II.3. Analyse intéressante et simple sur les fonctions polynômes de deux variables.
II.4. Analyse intéressante.
II.5. Analyse intéressante.
II.6. Analyse très intéressante. Savoir rédiger cette question montre une bonne assimilation du théorème de convergence dominée.
III.1.a. Question très intéressante sur les fonctions définies par une intégrale, mais longue. La première partie de la question a été abordée en TD.
III.1.b.,c.,d.,e. A faire ! Elégant, court à rédiger, bonne sensibilisation à l'analyse fonctionnelle.
III.2. Très intéressant aussi, un bon degré de difficulté au-dessus. La question c. n'est pas facile, mais elle est intéressante à chercher.
IV.1a.,b. Excellent travail sur les intégrales dépendant d'un paramètre. Pas de difficulté « essentielle », mais il faut bien connaître les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$. Très bon entraînement.
IV.1.c. Ne pas y passer trop de temps.
IV.2, 3. Intéressant.

I.1. Supposons $v_n \rightharpoonup v$ et $v_n \rightharpoonup w$. Alors, pour tout $z \in H$, par unicité de la limite de $(\langle v_n, z\rangle)_{n\geq 0}$, on a $\langle v, z\rangle = \langle w, z\rangle$. Ou encore $\langle v - w, z\rangle = 0$. En particulier, pour $z = v - w$, on obtient $\|v - w\|^2 = 0$ et donc $v = w$. Donc $\boxed{\text{La limite faible, si elle existe, est unique}}$

I.2. Supposons $v_n \to v$. Pour tout $z \in H$, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$0 \leqslant |\langle v_n, z\rangle - \langle v, z\rangle| = |\langle v_n - v, z\rangle| \leqslant \|v_n - v\|\ \|z\|$$

et comme $(\|v_n - v\|)$ converge vers 0, par comparaison, $(\langle v_n, z\rangle)$ converge vers $\langle v, z\rangle$. Donc $\boxed{\text{La convergence forte implique la convergence faible}}$...vers la même limite.

I.3. On développe :

$$\|v_n - v\|^2 = \|v_n\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle v_n, v\rangle \tag{1}$$

Si $v_n \rightharpoonup v$, alors $(\langle v_n, v\rangle)$ converge vers $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$. Si de plus $(\|v_n\|)$ converge vers $\|v\|$, alors (1) montre que $\left(\|v_n - v\|^2\right)$ converge vers 0, on a donc bien $\boxed{v_n \to v}$

I.4. Soit H de dimension finie, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de H. On suppose que $v_n \rightharpoonup v$, et on décompose v et chaque v_n dans $\mathcal{B}$:

$$v_n = \sum_{i=1}^{p} v_n^{(i)} e_i \qquad , \qquad v = \sum_{i=1}^{p} v^{(i)} e_i$$

On a, pour chaque i, $v^{(i)} = \langle e_i, v\rangle$ et $v_n^{(i)} = \langle e_i | v_n\rangle$ $(n \in \mathbf{N})$, donc par convergence faible

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad v_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v^{(i)}$$

Or $\|v_n - v\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(v^{(i)} - v_n^{(i)}\right)^2$, on conclut bien par opérations que $\|v_n - v\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $v_n \to v$, la réciproque a été montrée en **2.**, donc

$$\boxed{\text{En dimension finie, la convergence faible équivaut à la convergence forte}}$$

I.5. *NB : J'ai passé pas mal de temps sur cette question, car je lisais $w_n \rightharpoonup w$ au lieu de $w_n \to w$. Bien lire l'énoncé, c'est une vigilance constante...d'autant plus lorsqu'il s'agit de ne pas confondre une flèche et une demi-flèche.*
Par inégalité triangulaire,

$$|\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| \leq |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v_n, w\rangle| + |\langle v_n, w\rangle - \langle v, w\rangle|$$

Comme $v_n \rightharpoonup v$, $\langle v_n, w\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v, w\rangle$. Et par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v_n, w\rangle| &= |\langle v_n, w_n - w\rangle| \\ &\leq \|v_n\|\ \|w_n - w\| \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $(\|v_n\|)$ est bornée, $\|w_n - w\| \to 0$, donc par encadrement
$|\langle v_n, w_n\rangle - \langle v_n, w\rangle| \to 0$ et finalement on obtient bien que $\boxed{\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle}$

I.6. *Le produit scalaire est usuel et annoncé comme produit scalaire, il est évidemment superflu de vérifier que c'en est un.*
I.6.a. On a bien $c_n \in H$. Majorons, si $n \geq 0$,

$$\|c_n\|^2 = \int_0^1 \cos^2(nt)\ \mathrm{d}t \leq 1$$

On peut la calculer…surtout si on sait linéariser $\cos^2 u$… Donc $\boxed{(c_n) \text{ est bornée}}$

Soit $f \in H$. On peut intégrer par parties (*l'indication, particulièrement généreuse, montre que le concepteur de l'énoncé ne veut pas qu'on passe du temps sur cette question…à laquelle assez peu de points seront probablement attribués*) : si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\langle c_n, f\rangle &= \int_0^1 \cos(nt)\ f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin(nt)}{n} f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \sin(nt) f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin(n)}{n} f(1) - \frac{1}{n}\int_0^1 \sin(nt) f'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc

$$|\langle c_n, f\rangle| \leq \frac{|f(1)|}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$$

et donc $\langle c_n, f\rangle \to 0 = \langle 0, f\rangle$ ce pour tout $f \in H$, donc $\boxed{c_n \rightharpoonup 0}$

I.6.b. *Finalement, il va falloir se résoudre à linéariser…*

Supposons $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|c_n\|^2 &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + \cos(2nt))\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin(2n)}{4n}
\end{aligned}$$

Donc $\|c_n\|^2 \to 1/2$, et donc $\boxed{(\langle c_n, c_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}} \text{ ne converge pas vers } 0}$

II.1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$. Soit $t \in \mathbf{R}$ fixé, notons $h\ :\ s \longmapsto f(s,t)$.

Toutes les dérivées partielles de f à tous ordres sont définies et continues sur $\mathbf{R}^2$, en particulier les $\partial^{(n,0)} f$, ce qui implique que toutes les dérivées $h^{(n)}$ sont définies et continues sur $\mathbf{R}$. En effet,

$$\forall s \in \mathbf{R} \qquad \partial^{(n,0)} f(s,t) = h^{(n)}(s)$$

Donc $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Soit $P\ :\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction polynomiale. La fonction $(s,u) \longmapsto P(s)$ est polynomiale sur $\mathbf{R}^2$, donc la fonction

$$(s,u) \longmapsto P(s)\partial^{(n,0)} f(s,u)$$

est bornée sur $\mathbf{R}^2$, a fortiori la fonction $s \longmapsto P(s)h^{(n)}(s)$ obtenue en fixant $u = t$. Et donc $s \longmapsto f(s,t)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On a fixé la deuxième variable, c'est la même chose en fixant la deuxième, donc

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C}), \text{ en fixant une variable on obtient une fonction de } \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})}$$

II.2. La fonction $\boxed{\gamma\ :\ x \longmapsto \exp\left(-x^2\right)}$ ne s'annule en aucun point ; elle est C^∞ sur $\mathbf{R}$ et, par récurrence, on montre qu'il existe une suite de fonctions polynômiales (P_n) telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad \gamma^{(n)}(x) = P_n(x)\gamma(x)$$

donc montrer que $\gamma^{(n)}$ est à décroissance rapide équivaut à montrer que γ l'est.
Par croissances comparées, pour toute fonction polynomiale P,

$$P(x)\gamma(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

ce qui, allié au fait que $P\times\gamma$, continue, est bornée sur tout segment, montre que $P\times\gamma$ est bornée sur $\mathbf{R}$. On en déduit que $\boxed{\gamma \in \mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})}$

II.3. *Une question un petit peu délicate : jusqu'où doit-on justifier la classe et la forme des dérivées partielles ? Le rapport n'étant guère prolixe sur ce point, on peut en rester à un « juste milieu » (pas trop long, pas trop sommaire).*
Pour tout $x_2 \in \mathbf{R}$, la fonction $x \longmapsto f\otimes g(x,x_2)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $x \longmapsto f'(x)g(x_2)$.
On en déduit que $f\otimes g$ est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, et

$$\partial^{(1,0)}(f\otimes g) \ : \ (x_1,x_2) \longmapsto f'(x_1)g(x_2)$$

On travaille symétriquement sur $\partial^{(0,1)}(f\otimes g)$, puis on montre par récurrence sur $\alpha_1+\alpha_2$ que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^2$, $\partial^\alpha(f_1\otimes f_2)$ est définie sur $\mathbf{R}^2$ et que

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad \left(\partial^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f\otimes g)\right)(x_1,x_2) = f^{(\alpha_1)}(x_1)g^{(\alpha_2)}(x_2)$$

Ces dérivées partielles sont donc continues. Et donc $\boxed{f\otimes g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})}$. Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^2$. P est combinaison linéaire de termes $(x_1,x_2) \longmapsto x_1^k x_2^\ell$; en les classant suivant (par exemple) les puissances de x_1, on peut écrire

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad P(x_1,x_2) = Q_0(x_2) + x_1Q_1(x_2) + \cdots + x_1^m Q_m(x_2)$$

où les Q_k sont polynomiales sur $\mathbf{R}$. On peut alors écrire

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad P(x_1,x_2)\left(\partial^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f\otimes g)\right)(x_1,x_2) = \sum_{k=0}^{m}\left(x_1^k f^{(\alpha_1)}(x_1)\right)\left(Q_k(x_2)g^{(\alpha_2)}(x_2)\right)$$

Chaque $x \longmapsto x^k f^{(\alpha_1)}(x)$ et chaque $x \longmapsto Q_k(x)g^{(\alpha_2)}(x)$ est bornée, donc
$(x_1,x_2) \longmapsto P(x_1,x_2)\left(\partial^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f\otimes g)\right)(x_1,x_2)$ l'est. Finalement, $\boxed{f\otimes g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})}$.

II.4. Soit $f \in V$. Déjà, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$. Et, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^2$, $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2} f \in V$ (stabilité par ∂_1 et ∂_2). Donc, pour tout couple $(k,\ell)\in\mathbf{N}^2$, $(M_1^k M_2^\ell)(\partial^\alpha f) \in V$ (stabilité par M_1 et M_2).
Or

$$\forall (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad (M_1^k M_2^\ell)(\partial^\alpha f) \ : \ (x_1,x_2) \longmapsto x_1^k x_2^\ell \partial^\alpha f(x_1,x_2)$$

Comme V est stable par combinaison linéaire, pour toute fonction P polynomiale sur $\mathbf{R}^2$ on a alors $P\partial^\alpha f \in V$. Et comme tous les éléments de V sont bornés, on conclut bien que $\boxed{V \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})}$.

II.5. Soit $V = \mathrm{Vect}\left(\{hf \ ; \ (h,f)\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\times\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C}\}\right)$. Alors V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$.
Soit $(h,f)\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\times\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ et soit P polynomiale de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}^*$ telle que $\dfrac{h}{P}$ soit bornée.
Comme Pf est bornée, $hf = \dfrac{h}{P}\times Pf$ est bornée. Et une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée, donc V est constituée de fonctions bornées.
Soit $(h,f)\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\times\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$; $M_1(hf) = (M_1(h))f \in V$ car $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ est stable par M_1.
Donc V est stable par M_1 (par linéarité de M_1). Et de même V est stable par M_2.
Soit $(h,f)\in\mathcal{O}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\times\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$; $\partial_1(hf) = (\partial_1 h)f + h(\partial_1 f) \in V$ car $\mathcal{O}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ et $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$

sont stables par ∂_1. Donc V est stable par ∂_1 (par linéarité de ∂_1). Et de même V est stable par ∂_2.
Par **II.4.** on a donc $V \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$, ce qui conclut bien que

$$\boxed{\text{si } (h, f) \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C}) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C}), \text{ alors } hf \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})}$$

II.6. *Ici le rapport est un petit peu difficile à comprendre. L'énoncé rappelant la continuité des intégrales, il est évident qu'elle n'est pas à redémontrer. Tout au plus doit-on la mentionner.*
Soit $(f_n) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ convergeant simplement vers 0 sur $\mathbf{R}^2$, et soit $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$ une fonction dominante : pour tout n, $|f_n| \leq g$ sur $\mathbf{R}^2$. Soit M tel que

$$\forall (s,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad g(s,t) \leq \frac{M}{(1+s^2)(1+t^2)}$$

Définissons, pour tout $s \in \mathbf{R}$,

$$h_n(s) = \int_{\mathbf{R}} f_n(s,t)\ \mathrm{d}t$$

On fixe $s \in \mathbf{R}$. On a, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_n(s,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et d'autre part

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad |f_n(s,t)| \leq \frac{M}{(1+s^2)(1+t^2)}$$

et la fonction $t \longmapsto \dfrac{M}{(1+s^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbf{R}$, intégrable, indépendante de n. On en déduit, par théorème de convergence dominée,

$$h_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite (h_n) converge donc simplement vers 0 sur $\mathbf{R}$, et c'est une suite de fonctions continues comme rappelé dans l'énoncé (application du théorème de continuité sous le signe $\int$). La majoration, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{R}$,

$$|h_n(s)| \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{M}{(1+s^2)(1+t^2)} \mathrm{d}t = \frac{M\pi}{1+s^2}$$

avec $s \longmapsto \dfrac{M\pi}{1+s^2}$ intégrable, indépendante de n, permet encore par théorème de convergence dominée de conclure que

$$\int_{\mathbf{R}} h_n(s)\ \mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui exprime bien que $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

III.1.a. *Question pas si difficile, mais mal posée, ce qui explique probablement qu'elle ait été assez mal réussie par les candidats (voir rapport). Elle demande des développements beaucoup plus longs que les questions rencontrées jusqu'à présent, il n'est donc pas très judicieux de l'avoir mise en sous-question. De plus, le lien entre intégrale et primitive est rarement vu par les candidats comme une « formule de Taylor », même s'il s'agit bien d'une formule de Taylor avec reste-intégrale. L'indication risque donc d'être mal comprise. Vu en exercice pendant l'année sous le nom de « division des fonctions C^p », à la fin d'un TD qui commence par le lemme de Riemann-Lebesgue...dans lequel figure d'ailleurs l'idée de l'intégration par parties de la fin du* **I**.
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. En particulier $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et on peut écrire

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'(v)\mathrm{d}v$$

On a $f(a) = 0$, et on fait le changement de variable

$$v = a + u(s-a)$$

On obtient

$$f(s) = (s-a)\int_0^1 f'(a+u(s-a))\mathrm{d}u$$

On définit donc $g \ : \ s \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f'(a+u(s-a))\mathrm{d}u$ (définie sur $\mathbf{R}$). Soit

$$h \ : \ (s,u) \longmapsto f'(a+u(s-a))$$

définie sur $\mathbf{R} \times [0,1]$.
Pour tout $s \in \mathbf{R}$, $u \mapsto h(s,u)$ est continue, intégrable donc sur $[0,1]$.
On peut dériver indéfiniment h par rapport à sa première variable, et, pour tout $j \geq 0$,

$$\frac{\partial^j h}{\partial s^j} \ : \ (s,u) \longmapsto u^j f^{(j+1)}(a+u(s-a))$$

Soit K un segment, $K \subset \mathbf{R}$. Soit $M \geq 0$ tel que $K \subset [a-M, a+M]$. Alors

$$\forall (s,u) \in K \times [0,1] \qquad a+u(s-a) \in K$$

et donc

$$\forall (s,u) \in K \times [0,1] \qquad \left|\frac{\partial^j h}{\partial x^j}(s,u)\right| \leq \|f^{(j+1)}|_K\|_\infty$$

or la fonction $u \longmapsto \|f^{(j+1)}|_K\|_\infty$ est indépendante de s, intégrable sur $[0,1]$. En appliquant le théorème de classe C^∞ des intégrales dépendant d'un paramètre on conclut que $\boxed{g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})}$.
De plus, pour tout j,

$$g^{(j)} \ : \ s \longmapsto \int_0^1 f^{(j+1)}(a+u(s-a))\mathrm{d}u$$

Mais en fait ça ne sert à rien : sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$, $g^{(j)}$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$\phi_{k,\ell} \ : \ s \longmapsto (s-a)^{-k} f^{(\ell)}(s) \qquad , \ (k,\ell) \in \mathbf{N}^2$$

(application par exemple de la formule de Leibniz, qui permet d'être plus précis mais ce n'est pas utile).
Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$. On a

$$\forall s \in \mathbf{R} \setminus [a-1, a+1] \qquad |P(s)\phi_{k,\ell}(s)| \leq |P(s)| \ |f^{(\ell)}(s)|$$

et donc, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, $P\phi_{k,\ell}$ est bornée sur $\mathbf{R}\setminus[a-1,a+1]$. Elle l'est sur le segment $[a-1,a+1]$ car continue, elle est donc bornée sur $\mathbf{R}$. Une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée, on peut donc conclure que $\boxed{g \in \mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})}$.
Remarque : la deuxième partie de la question (bornitude) peut être traitée en admettant la première partie (classe). Et elle n'est pas inintéressante.
Remarque encore : on pouvait dominer sans se restreindre à tout segment : j'avais oublié que f et toutes ses dérivées étaient à décroissance rapide, a fortiori bornées.

III.1.b. On suppose $f(a)=0$. Par la question précédente, on peut écrire $f=(M-a\mathrm{I})(g)$ où I est l'identité de $\mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $g\in\mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Comme $LM=ML$, *on a le droit d'oublier le* $\circ$, on a

$$L(f)=(M-a\mathrm{I})\,(L(g))$$

ce qui donne bien $\boxed{L(f)(a)=0}$
Question intéressante d'analyse fonctionnelle.

III.1.c. $f(a)g-g(a)f$ est nulle en a, donc, par **III.1.b.**, $L\left(f(a)g-g(a)f\right)$ aussi, ce qui, par linéarité de L, donne bien $\boxed{f(a)L(g)(a)=g(a)L(f)(a)}$

III.1.d. Prenons $g=\gamma$ du **II.2.** On a alors, pour tout $\mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et $a\in\mathbf{R}$,

$$L(f)(a)=\frac{L(\gamma)(a)}{\gamma(a)}f(a)$$

ce qui donne bien, en posant $\boxed{\psi=\dfrac{L(\gamma)}{\gamma}}$, ψ est une fonction de classe C^∞ (quotient de telles fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas), et $\boxed{L(f)=\psi f}$

III.1.e. On a de plus $DL=LD$. Donc, si $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$,

$$(L(f))'=L(f')$$

ce qui, avec la question précédente, donne $\psi'\ f+\psi\ f'=\psi\ f'$, donc $\psi' f=0$. Ce en particulier pour $f=\gamma$. Donc $\psi'=0$, et donc ψ est constante, $\boxed{\text{Il existe } \alpha\in\mathbf{C} \text{ telle que } L(f)=\alpha f}$

III.2.a. Le **II.1.** montre que si $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$, alors $\mu_a(f)\in\mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
Et $\mu_a(\alpha f+\beta g)=\alpha\mu_a(f)+\beta\mu_a(g)$ pour tous $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}^2$ et $(f,g)\in\big(\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\big)^2$.
Soit $h\in\mathcal{S}(\mathbf{R},\mathbf{C})$. On cherche $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ telle que

$$\forall t\in\mathbf{R}\qquad f(t,a)=h(t)$$

Considérons

$$f\ :\ (t,s)\longmapsto h(t)e^{-(s-a)^2}$$

Par **II.3.** et l'exemple de **II.2.**, $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$, et on a bien $\mu_a(f)=h$, donc

$$\boxed{\mu_a \text{ est une surjection linéaire}}$$

III.2.b. Si $f\in\mu_a^{-1}(h)$, alors $\mu_a^{-1}(h)=f+\mathrm{Ker}(\mu_a)$
(car alors $g\in\mu_a^{-1}(h)\iff\mu_a(g)=\mu_a(f)\iff g-f\in\mathrm{Ker}(\mu_a)$).
Soit $f\in\mathrm{Ker}(\mu_a)$. Alors $f\in\mathrm{Im}(M_2-aI)$ (admis). Donc il existe $g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ tel que $f=(M_2-aI)g$. Mais alors

$$(\mu_a\circ T)(f)=(\mu_a\circ T\circ(M_2-aI))(g)$$

Mais $T \circ (M_2 - aI) = (M_2 - aI) \circ T$, donc

$$(\mu_a \circ T)(f) = (\mu_a \circ (M_2 - aI) \circ T)(g)$$

Mais on a $\mu_a \circ (M_2 - aI) = 0$ (propriété admise, ou vérification immédiate). Donc

$$(\mu_a \circ T)(f) = 0$$

Et donc $\mu_a \circ T$ <u>est nulle sur</u> $\mathrm{Ker}(\mu_a)$. Or on a vu, si $f \in \mu_a^{-1}(h)$, que $\mu_a^{-1}(h) = f + \mathrm{Ker}(\mu_a)$. Donc $\boxed{\text{Si } h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C}),\ \mu_a \circ T \text{ est constante sur } \mu_a^{-1}(h)}$

III.2.c. L_a est bien une application de $\mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ sur lui-même, μ_a étant à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$, $(h_1, h_2) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})^2$. Soit, pour $k = 1, 2$, $f_k \in \mu_a^{-1}(h_k)$. Alors $\alpha f_1 + f_2 \in \mu_a^{-1}(\alpha h_1 + h_2)$ (car $\mu_a(\alpha f_1 + f_2) = \alpha\mu_a(f_1) + \mu_a(f_2) = \alpha h_1 + h_2$). Et donc

$$L_a(\alpha h_1 + h_2) = (\mu_a \circ T)(\alpha f_1 + f_2) = \alpha(\mu_a \circ T)(f_1) + (\mu_a \circ T)(f_2) = \alpha L_a(h_1) + L_a(h_2)$$

(car μ_a et T sont linéaires). Donc $\boxed{L_a \in \mathcal{L}\left(\mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})\right)}$. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, et soit $f \in \mu_a^{-1}(h)$:

$$\mu_a(f) = h$$

donc, en dérivant,

$$h' = (\mu_a(f))' = \mu_a(\partial_1 f)$$

(en effet, la dérivée de $t \longmapsto f(t, a)$ est $t \longmapsto \partial_1 f(t, a)$). Donc

$$\begin{aligned} L_a(h') &= L_a\left(\mu_a(\partial_1 f)\right) \\ &= (\mu_a \circ T)(\partial_1 f) \\ &= (\mu_a \circ T \circ \partial_1)(f) \\ &= (\mu_a \circ \partial_1 \circ T)(f) \end{aligned}$$

car $T \circ \partial_1 = \partial_1 \circ T$. D'autre part,

$$\begin{aligned} (L_a(h))' &= ((\mu_a \circ T)(f))' \\ &= \left[\mu_a\left(T(f)\right)\right]' \\ &= \mu_a\left(\partial_1(T(f))\right) \end{aligned}$$

en appliquant le calcul $D \circ \mu_a = \mu_a \circ \partial_1$ fait plus haut, qu'on aurait dû davantage formaliser. Finalement, $D\left(L_a(h)\right) = (\mu_a \circ \partial_1 \circ T)(f) = L_a\left(D(h)\right)$. Et donc $\boxed{L_a \circ D = D \circ L_a}$
Remarquant maintenant que $M \circ \mu_a = \mu_a \circ M_1$, on montre de même, si $h = \mu_a(f)$,

$$L_a\left(M(h)\right) = L_a\left(\mu_a\left(M_1(f)\right)\right) = (\mu_a \circ T \circ M_1)(f)$$

et

$$M\left(L_a(h)\right) = (M \circ \mu_a \circ T)(f) = (\mu_a \circ M_1 \circ T)(f)$$

et comme $M_1 \circ T = T \circ M_1$, on obtient bien $\boxed{L_a \circ M = M \circ L_a}$.
Remarque : tout repose sur trois identités : $L_a \circ \mu_a = \mu_a \circ T$, $D \circ \mu_a = \mu_a \circ \partial_1$, $M \circ \mu_a = \mu_a \circ M_1$. *Mais si on va vite, on a des chances de rater l'élégance d'une preuve commençant par mettre en valeur ces identités.*

III.2.d. Appliquons **III.1.** : pour tout $a \in \mathbf{R}$ il existe une constante $k(a)$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \qquad L_a(h) = k(a)h$$

Mais alors
$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C}) \qquad (\mu_a \circ T)(f) = (L_a \circ \mu_a)(f) = k(a)\mu_a(f)$$
ce qui signifie
$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C}) \qquad \forall (a,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad T(f)(t,a) = k(a)f(t,a)$$
Renommons $k(a) = \beta(a)$. Prenant en particulier $f = \gamma \otimes \gamma$ qui d'après **II.3.** est un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ qui ne s'annule pas, on obtient
$$\forall (a,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{T(f)(t,a)}{\gamma(t)\gamma(a)} = \beta(a)$$
ce qui montre que β est C^∞ sur $\mathbf{R}$ ($T(f)$ l'est sur $\mathbf{R}^2$, γ l'est sur $\mathbf{R}$).
Mais le même travail en échangeant les deux variables montre l'existence d'une fonction α, C^∞ sur $\mathbf{R}$, telle que
$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C}) \qquad \forall (s,a) \in \mathbf{R}^2 \qquad T(f)(a,s) = \alpha(a)f(a,s)$$
et donc
$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C}) \qquad \forall (t,a) \in \mathbf{R}^2 \qquad T(f)(t,a) = \alpha(t)f(t,a)$$
Prenant de nouveau pour f une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ qui ne s'annule pas, on obtient
$$\forall (t,a) \in \mathbf{R}^2 \qquad \alpha(t) = \beta(a)$$
et donc β est constante. Donc $\boxed{T \text{ est une homothétie}}$

IV.1.a. Définissons
$$\xi \ : \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ ((z,t),s) & \longmapsto & e^{-isz}f(t,s) \end{array}$$
Pour tout $s \in \mathbf{R}$, la fonction $(z,t) \longmapsto f((z,t),s)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$, par continuité de $(z,t) \longmapsto f(t,s)$ (f est continue) et de $(z,t) \longmapsto e^{-isz}$.
Pour tout $(z,t) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $s \longmapsto f((z,t),s)$ est continue sur $\mathbf{R}$ (continuité de f, continuité de l'exponentielle).
On reprend la majoration du **II.6.** : la fonction $(x_1,x_2) \longmapsto (1+x_1^2)(1+x_2^2)f(x_1,x_2)$ est bornée sur $\mathbf{R}^2$, soit M tel que
$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad (1+x_1^2)(1+x_2^2)|f(x_1,x_2)| \leq M$$
Alors
$$\forall ((z,t),s) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \qquad |\xi((z,t),s)| = |f(t,s)| \leq \frac{M}{(1+s^2)(1+t^2)} \leq \frac{M}{1+s^2}$$
et la fonction majorante est indépendante de (z,t), intégrable sur $\mathbf{R}$. Par théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, on déduit que $\boxed{\Gamma(f) \text{ est bien définie et continue sur } \mathbf{R}^2}$

IV.1.b. Fixons $z \in \mathbf{R}$. La fonction $(t,s) \longmapsto \xi((z,t),s)$ est dérivable par rapport à sa première variable, de dérivée $(t,s) \longmapsto e^{-isz}\partial_1 f(t,s)$.
Pour tout $t \in \mathbf{R}$, la fonction $s \longmapsto \xi((z,t),s)$ est continue, intégrable sur $\mathbf{R}$.
La fonction $(t,s) \longmapsto e^{-isz}\partial_1 f(t,s)$ est continue par rapport à chacune de ses deux variables sur $\mathbf{R}^2$, et la domination
$$\forall (s,z) \in \mathbf{R}^2 \qquad \left|e^{-isz}\partial_1 f(t,s)\right| \leq \frac{M}{1+s^2}$$
montre, par théorème de dérivation sous le signe $\int$, que $\partial_2\Gamma$ est définie sur $\mathbf{R}^2$, et que
$\boxed{\partial_2\Gamma(f) \ : \ (z,t) \longmapsto \int_{\mathbf{R}} e^{-isz} \ \partial_1 f(t,s)\mathrm{d}s}$. Comme $\partial_1 f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$, on déduit de **a.** que

$\boxed{\partial_2\Gamma(f) \text{ est continue sur } \mathbf{R}^2}$.
Fixons maintenant $t \in \mathbf{R}$. La fonction $(z,s) \longmapsto \xi((z,t),s)$ est dérivable par rapport à sa première variable, de dérivée $(z,s) \longmapsto -ise^{-isz}f(t,s)$.
Pour tout $z \in \mathbf{R}$, la fonction $s \longmapsto \xi((z,t),s)$ est continue, intégrable sur $\mathbf{R}$.
La fonction $(z,s) \longmapsto -ise^{-isz}f(t,s)$ est continue par rapport à chacune de ses deux variables sur $\mathbf{R}^2$, et la domination

$$\forall (s,z) \in \mathbf{R}^2 \qquad \left|e^{-isz}\partial_1 f(t,s)\right| \leq \frac{M's}{1+s^4}$$

où M est un majorant de la fonction bornée $(x_1,x_2) \longmapsto (1+x_1^4)(1+x_2^4)|f(x_1,x_2)|$ sur $\mathbf{R}^2$ montre, par théorème de dérivation sous le signe $\int$, que $\partial_1\Gamma$ est définie sur $\mathbf{R}^2$, et que
$\boxed{\partial_1\Gamma(f) \ : \ (z,t) \longmapsto -i\int_{\mathbf{R}} e^{-isz} \ sf(t,s)\mathrm{d}s}$. Comme $M_2 f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$, on déduit de **a.** que
$\boxed{\partial_2\Gamma(f) \text{ est continue sur } \mathbf{R}^2}$.
Conclusion : $\boxed{\Gamma(f) \in C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})}$, $\boxed{\partial_1\Gamma(f) = -i\Gamma(M_2 f)}$ et $\boxed{\partial_2\Gamma(f) = \Gamma(\partial_1 f)}$.

IV.1.c. On vient de vérifier la propriété pour $\alpha = (1,0)$ et $\alpha = (0,1)$, et ce qu'on vient de faire montre également (via le théorème de Schwarz) que si la propriété est vraie pour tous les α tels que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq m$, alors $\Gamma(f)$ est de classe C^m et la propriété est vraie pour les α tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = m+1$. Le résultat s'en déduit, ainsi que la classe C^∞ de $\Gamma(f)$.
Question un peu délicate car on ne peut pas tellement échapper à Schwarz, vu qu'il faut envisager toutes les dérivées partielles, pas seulement les ∂^α. Par exemple, $\partial_1\partial_2\partial_1$ n'est pas $\partial(2,1)$ tant qu'on n'a pas montré la classe C^3. Ce n'est pas le bout du monde, mais ça complique la rédaction, pas sûr vu le rapport que les concepteurs du sujet aient trop fait attention à ce point. Je n'insiste donc pas non plus !

IV.2. La linéarité de Γ ne faisant pas de doute, $V = \Gamma\left(\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})\right)$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$. Ne contenant que des fonctions bornées, car si

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad (1+x_1^2)(1+x_2^2)|f(x_1,x_2)| \leq M$$

alors
$$\forall (z,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad |\Gamma(f)(z,t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t,s)|\mathrm{d}s \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{M}{1+s^2}\mathrm{d}s \leq M\pi$$

IV.1.b. allié à la stabilité de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ par les M_k et ∂_k montre la stabilité de V par ∂_1 et ∂_2. De $M_2\left(\Gamma(f)\right) = \Gamma\left(M_1(f)\right)$ on déduit la stabilité de V par M_2 de celle de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ par M_1.
Enfin, une intégration par parties donne

$$z\Gamma(f)(z,t) = \int_{\mathbf{R}} ze^{-isz}f(t,s)\mathrm{d}s = -i\int_{\mathbf{R}} e^{-isz}\partial_2 f(t,s)\mathrm{d}s$$

qui donne la stabilité de V par M_1 du fait de celle de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$ par ∂_2.
On peut donc appliquer **II.4.** et conclure que $\boxed{\Gamma(f) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})}$

IV.3. Application pas trop méchante de **II.5.**

Le rapport semble indiquer que si on arrive là on a largement 20/20, et que les questions suivantes ont été peu abordées.