Résumé 7 – Réduction d'endomorphismes

Éléments propres

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

→ Généralités

Définition

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u associé au vecteur propre $x \in E$ si :

$$u(x) = \lambda x \quad \text{avec} \quad x \neq 0_E$$

  On appelle spectre de u et on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.
- On appelle sous-espace propre associé à λ l'espace vectoriel $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Théorème

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

→ Polynôme caractéristique

On suppose désormais E de dimension finie n.

Définition

On appelle polynôme caractéristique de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.

M et $M^\top$ ont même polynôme caractéristique.

Définition

On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de toute matrice représentative de u.

Théorème

- Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.
- $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
- La somme des valeurs propres (complexes) vaut $\mathrm{Tr}(u)$ et leur produit $\det(u)$.

Lorsque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, u admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, elle en admet au plus n.

Si F est stable par u, le polynôme caractéristique $\chi_{u_{|F}}$ de l'endomorphisme induit divise χ_u.

Théorème

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$.

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)) \leqslant m(\lambda)$$

Si λ est valeur propre simple, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est une droite vectorielle.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices

→ Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$ (ou $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), on définit :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Vect}}(u^n)$$

$(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$ possède une structure d'algèbre commutative. L'application $P \mapsto P(u)$ définit un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$; son image est $\mathbb{K}[u]$.

Si E est de dimension finie, $\mathbb{K}[u] \subset \mathscr{L}(E)$ l'est aussi.

Proposition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, les sous-espaces $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par u.

→ Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Définition : Polynôme annulateur

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. P est appelé polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

La définition est identique pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

En dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non trivial (donc une infinité).

Si P et Q annulent u, $\mathrm{pgcd}(P, Q)$ annule u (Bézout).

Théorème / Définition : Polynôme minimal

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est non nul et E de dimension finie, il existe un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de u.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u et on le note π_u.

Un endomorphisme en dimension infinie n'admet pas toujours de polynôme minimal.

Proposition

Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Proposition

Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

En particulier, $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

Proposition

Soit F un sous-espace stable par u non réduit à $\{0_E\}$. Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $u_{|F}$ divise celui de u.

Cela fournit un argument utile de diagonalisabilité pour un endomorphisme induit.

→ Polynômes annulateurs et valeurs propres

Théorème

Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x)=\lambda x$, alors $P(u)(x)=P(\lambda)x$.

Attention, l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur contient les valeurs propres mais n'est pas égal, en général, au spectre de u.

→ Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie est un polynôme annulateur. En d'autres termes, si E est de dimension finie,

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \quad \chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(E)}$$

Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise ainsi le polynôme caractéristique. Le degré du polynôme minimal est donc inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Théorème

Les racines du polynôme minimal de u sont exactement ses valeurs propres.

Proposition

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est X^n.

→ Lemme des noyaux

Théorème : Lemme des noyaux

Si $P_1,\dots,P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u))=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}(P_i(u))$$

En particulier, si P annule u, $E=\bigoplus_{i=1}^{r}\operatorname{Ker}(P_i(u))$.

E est alors la somme de sous-espaces stables par u.

Diagonalisation

Définition

- Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endormorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de f. Dans cette base, la matrice de f est diagonale.

Théorème : CNS de diagonalisabilité

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) u est diagonalisable

(ii) $E=\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)} E_\lambda$

(iii) $\dim(E)=\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)}\dim(E_\lambda)$

(iv) χ_u est scindé et, $\forall\lambda\in\operatorname{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda=m(\lambda)$

(v) il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.

(vi) le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

Pour que u soit diagonalisable, π_u ne doit pas contenir de facteur de la forme $(X-\lambda)^\alpha$ avec $\alpha>1$.

Théorème : CS de diagonalisabilité (1)

Si χ_u est scindé et n'admet que des racines simples alors u est diagonalisable.

Théorème : CS de diagonalisabilité (2)

- Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormale de vecteurs propres.
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

Plan de diagonalisation (à l'aide de χ_u) :

- Étude de la diagonalisabilité de u.
  - On détermine χ_u.
  - Si χ_u n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable.
  - Si χ_u est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$.
- Diagonalisation de u lorsque c'est possible.
  On détermine une base de E_λ pour tout $\lambda\in\operatorname{Sp}(u)$ en résolvant $u(x)=\lambda x$ et on concatène les bases obtenues.

Corollaire

Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel F non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

Trigonalisation

Définition : Trigonalisabilité

- Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème : CNS de trigonalisablité

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) u est trigonalisable.

(ii) son polynôme caractéristique est scindé.

(iii) son polynôme minimal est scindé

(iv) u est annulé par un polynôme scindé.

Toute matrice est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. $T = P^{-1}MP$ avec T une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de M.

Lorsque $n=2$ ou $n=3$, on cherchera généralement T sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Si $\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les r valeurs propres distinctes de u,

$$E = \operatorname{Ker}((u-\lambda_1 \mathrm{id}_E)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}((u-\lambda_r \mathrm{id}_E)^{m_r})$$

Définition : Sous-espace caractéristique

On appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ le sous-espace $\operatorname{Ker}((u-\lambda \mathrm{id}_E)^m)$ où $m = m(\lambda)$.

En notant d est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal ($d \leqslant m$),

$$\operatorname{Ker}((u-\lambda \mathrm{id}_E)^m) = \operatorname{Ker}\left((u-\lambda \mathrm{id}_E)^d\right)$$

De plus, $\dim \operatorname{Ker}((u-\lambda \mathrm{id}_E)^m) = m$.

Théorème

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe un polynôme scindé annulant M, alors M est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Si M est annulée par un polynôme scindé, M est semblable à une matrice de la forme $D+N$ où D est diagonale, N est nilpotente et $DN = ND$.