Applications linéaires

Exercice 1 : On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev.

1. Prouver que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b\bar{z}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$
2. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E' un sev de E et F' un sev de F.

1. Exprimer $f\left(f^{-1}(F')\right)$ en fonction de F' et $\mathrm{Im} f$.
2. Exprimer $f^{-1}\left(f(E')\right)$ en fonction de E' et $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 4 :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E = 0$.
   Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.
2. Soient F et G tels que $E = F \oplus G$. Prouver qu'il existe un unique endomorphisme g de E tel que $F = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(g - 3\mathrm{Id}_E)$.
   Vérifier que $g^2 - 4g + 3\mathrm{Id}_E = 0$.

Exercice 5 : Soit p un projecteur de E et $q = \mathrm{Id}_E - p$.
Soit $F = \{f \circ p,\ f \in \mathcal{L}(E)\}$ et $G = \{f \circ q,\ f \in \mathcal{L}(E)\}$
Prouver que $\mathcal{L}(E) = F \oplus G$.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

1. Prouver que la famille $\left(f^k\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre.
2. Prouver qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ soit libre.

Exercice 7 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)\ :\ f \circ g = g \circ f\}$ est un $\mathbb{K}$-ev.
2. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $(a_0, ..., a_r) \in \mathbb{K}^r$, on a :
$$a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + ... + a_r f^r = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k \in \mathcal{C}(f).$$
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E. Prouver que $\mathcal{C}(f) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k,\ (a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\right\}$

Exercice 8 : Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que tout sous-espace vectoriel de l'un de ces espaces possède un supplémentaire.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g) \ \Leftrightarrow\ \exists h \in \mathcal{L}(F,G)\ :\ g = h \circ f$.
2. Soient $h \in \mathcal{L}(F,G)$ et $g \in \mathcal{L}(E,G)$.
   Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h) \ \Leftrightarrow\ \exists f \in \mathcal{L}(E,F)\ :\ g = h \circ f$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Montrer qu'il existe un projecteur p de E et un isomorphisme g de E tels que $f = g \circ p$.
   Montrer qu'il existe un projecteur q de E et un isomorphisme h de E tels que $f = q \circ h$.