

## TD 12 - Suites numériques 2

Ex 1:

$$1) u_{n+1} = 2u_n + 3$$

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\text{Soit } v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tq } v_n = u_n - \frac{3}{1-2} = u_n + 3 \quad \text{On pose } v = (u_n + 3)_{n \in \mathbb{N}}$$

Mq  $v$  est une suite géométrique de raison 2

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 2u_n + 3 + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(v_n + 3) \end{aligned}$$

donc  $v_{n+1} = 2v_n$

Ainsi  $v$  est une suite géométrique de raison 2 tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} v_0 = u_0 + 3 \\ v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 + 3) \end{cases}$$

On a alors :

$$u_n + 3 = 2^n(u_0 + 3)$$

$$u_n = 2^n(u_0 + 3) - 3$$

Faire réciproque en remettant dans l'équation

on

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $v = u + 3$

$u$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3$

$\Leftrightarrow v$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 2v_n$

$\Leftrightarrow u + 3$  est géométrique de raison 2

$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{K} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + 3 = A \times 2^n$

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{K} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \ u_n = A \times 2^n - 3$$

$$S = \left\{ (A \times 2^n - 3)_{n \in \mathbb{N}}, A \in \mathbb{K} \right\}$$

$$2) u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

On a  $P = X^2 - 6X + 9$  le polynôme associé.

$$D = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$$

P a alors une racine double :  $r_0 = \frac{6}{2} = 3$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ ((A_n + B) 3^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A, B) \in \mathbb{C} \right\}$$

$$3) u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

On a  $P = X^2 + X + 1$  le polynôme associé

$$D = 1^2 - 4 \times 1 = -3$$

Donc les solutions sont des suites réelles

P a alors deux racines complexes conjuguées :  $r = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ (A \cos(n \frac{2\pi}{3}) + B \sin(n \frac{2\pi}{3}))_{n \in \mathbb{N}}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$4) u_{n+2} = 2 \sin \theta u_{n+1} - u_n \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

On a  $P = X^2 - 2 \sin \theta X + 1$  le polynôme associé

$$D = (-2 \sin \theta)^2 - 4 \times 1 = 4 \sin^2 \theta - 4 = 4(\sin^2 \theta - 1) = 4 \cos^2 \theta$$

P a alors deux racines :

$$r_1 = \frac{2 \sin \theta + 2 \cos \theta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 \sin \theta - 2 \cos \theta}{2}$$

$$r_1 = \sin \theta + \cos \theta \quad \text{et} \quad r_2 = \sin \theta - \cos \theta$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ (A (\sin \theta + \cos \theta)^n + B (\sin \theta - \cos \theta)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

## Ex 2:

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes de limites  $l_1$  et  $l_2$

Mq  $w = (\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge

Sait  $\varepsilon > 0$

Par hyp:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad |u_n - l_1| \leq \varepsilon \\ \text{il existe } n_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_2 \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

On pose  $n_0 = \max(n_1, n_2)$

\* Si  $l = l_1 = l_2$

alors  $\forall n \geq n_0 \quad l - \varepsilon \leq \max(u_n, v_n) \leq l + \varepsilon$

Donc  $w$  converge

\* Si  $l_1 < l_2$

alors  $l_1 - \varepsilon \leq l_2 + \varepsilon$  (en fixant  $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2} \geq 0$ )

il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq n_0 \quad u_n < v_n$

D'où  $\forall n \geq n_0 \quad l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon \leq l_2 - \varepsilon \leq v_n \leq l_2 + \varepsilon \quad \max(u_n, v_n) = v_n$

Donc  $\forall n \geq n_0 \quad \max(l_1, l_2) - \varepsilon \leq \max(u_n, v_n) \leq \max(l_1, l_2) + \varepsilon$

Donc  $\lim w = l_2$

Donc  $w$  converge

Oublie de  $l_2 < l_1$  De même

Dans les deux cas  $w$  converge.

## Ex 3:

1) Mq par récurrence:

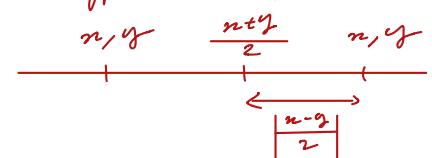
$H(n)$ : "  $u$  est définie par  $u_0 = -1$ "

. Initialisation:  $u_0 = -1$

On a  $-1 + (-1) \geq 0$

donc  $H(0)$  est vraie

② efficace / rapide



$$\max(u, v) = \frac{u+v}{2} - \left| \frac{u-v}{2} \right|$$

$$\text{tend vers } \frac{l_1+l_2}{2} - \left| \frac{l_1-l_2}{2} \right|$$

$$= \max(l_1, l_2)$$

FAUX

Trouver un stable

### Hérité:

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq  $H(n)$

M<sub>1</sub>  $H(n+1)$  l'est aussi

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

On d'après l'HR,  $u_n$  est bien définie

$$\text{donc } u_n + 1 \geq 0$$

Donc  $H(n+1)$  est vraie

### Conclusion:

$u$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tq  $u_0 \geq -1$

2) ~~Si  $u$  converge vers  $\ell$  alors on passe à la limite~~

$$x = \sqrt{1+x}$$

$$x^2 = 1+x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{pt fixe} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ , définie sur  $[-1; +\infty[$

On cherche  $x$  tq  $x = \sqrt{1+x}$

Voir photo

$H(n) :$   $m_n \leq u_n$  et  $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$

I:  $m_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$m_0 \leq m_1 \Leftrightarrow \sqrt{1+u_0} \geq m_0$

. si  $m_0 \leq 0$  alors  $m_0 \leq m_1$

. si  $m_0 > 0$  alors  $m_0 \leq \sqrt{1+u_0} \Leftrightarrow m_0^2 \leq 1+u_0 \Leftrightarrow -m_0^2 + u_0 + 1 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc  $u_0 < u_1$

H: Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq  $H(n)$  M<sub>n</sub> H(n+1) c ad  $u_{n+1} \geq u_{n+2}$

On a  $u_n \leq u_{n+1}$

donc  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$

donc  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

et  $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

donc  $u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\downarrow f \uparrow$  sur  $[1; +\infty]$

$\downarrow f \uparrow$  et  $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi  $u^*$  est majoré donc elle ex

Notons l la limite

$\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

À la limite,  $l = \sqrt{1+l}$

$$l^2 - l - 1 = 0$$

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ car } l \geq 0$$

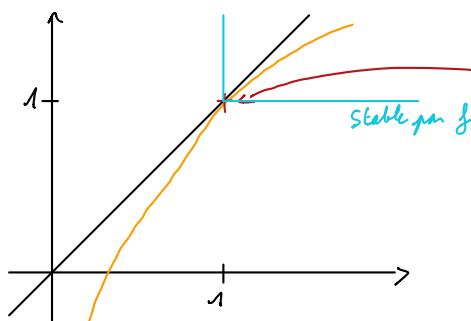
Ex 5:

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

On pose  $f: x \mapsto 1 + \ln(x)$

Rq :  $\ln(1+x) \leq x$

$\ln(y) \leq y-1$



se touche ici

$g: x \mapsto \ln(x) - x$   
 $g \in D(\mathbb{R}^+)$   
 $g': x \mapsto \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 1 & +\infty \\ \hline g' & + & 0 & - \\ \hline \end{array}$$

$$g \leq 0$$

$[1; +\infty]$  est stable par f

En effet, si  $x \geq 1$  alors  $1 + \ln(x) \geq 1$

Donc, u est bien définie et minorée par 1

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} - u_n = 1 + \ln(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$$

donc  $u \downarrow$  et minorée par 1

donc  $u$  av

On note  $l$  la limite de  $u$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$$

### Ex 6: Graphe

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$$

Soit  $f: x \mapsto \sqrt{2-x}$

$[-2, 2]$  est stable pour  $f$

Donc  $u$  est correctement def.

. Supposons  $u_0 \geq 1$

Mais  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $H(n): "u_{2n} \geq 1 \text{ et } u_{2n} \geq u_{2n+2}"$

- I:  $u_0 \geq 1$  par hyp

et  $u_0 \geq u_2 \Leftrightarrow u_0 \geq \sqrt{2-\sqrt{2-u_0}}$   $\geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-u_0} \geq 2-u_0^2$$

. Si  $2-u_0^2 \leq 0$  alors  $u_0 \geq u_2$

. Sinon  $u_0 \geq u_2 \Leftrightarrow 2-u_0 \geq (2-u_0^2)^2$  | corré.

$$\Leftrightarrow 0 \geq 2 + u_0 - 4u_0^2 + u_0^4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (u_0-1)(u_0+2)(u_0^2 - u_0 - 2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (u_0-1)(u_0+2)(u_0^2 - u_0 - 2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \underbrace{(u_0-1)}_{\geq 0} \underbrace{(u_0+2)}_{\geq 0} \underbrace{(u_0 - \frac{1+\sqrt{5}}{2})}_{\leq 0} \underbrace{(u_0 - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}_{\geq 0}$$

$$u_0 \leq \sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

DS tt le cas  $u_0 > u_2$

H: Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq  $H(u_n)$

Mq  $H(u_{n+1})$

On a d'après HK

$$u_{2n} \geq 1 \text{ et } u_{2n} \geq u_{2n+2}$$

On f ↴ sur  $[-2; 2]$  et f laisse stable  $[-2; 2]$

Dans  $f \circ f$  et P sur  $[-2; 2]$

$$f \circ f(u_{2n}) \geq 1 \text{ et } f \circ f(u_{2n}) > f \circ f(u_{2n+2})$$

On a alors  $u_{2n+2} \geq 1$  et  $u_{2n+2} \geq u_{2n+4}$

Dans H( $u+1$ )

Ainsi  $u$  est ↴ et min par 1

On note l sa limite

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - u_n}}$$

Comme  $u$  est à valeurs de  $[-2; 2]$ ,  $l \in [-2; 2]$

$$\text{dans } \sqrt{2 - \sqrt{2 - u_n}} \rightarrow \sqrt{2 - \sqrt{2 - l}}$$

Par unicité de la lim,  $u = a$ .

$$l = \sqrt{2 - \sqrt{2 - l}}$$

$$\sqrt{2 - l} = 2 - l^2$$

$$l \in \left\{ 1; -2; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Comme  $l \leq \sqrt{2}$  donc  $l \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  d'où  $l = 1$

$$\text{Pour tt } n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+1} = \sqrt{2 - u_{2n}}$$

$$\text{On } u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\text{donc } u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\text{Ainsi } u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

• Supp  $u_0 \leq 1$  alors  $2 - u_0 \geq 1$  pris  $u_1 \geq 1$

Dans  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 1 càd  $\lim u = 1$

Ex 7:

$$3) \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$4) \sin(2^{-n}) \sim 2^{-n}$$

$$5) \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{n-n-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$\underset{\text{orange}}{= \sqrt{n} + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \sim -\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$6) \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n(1+\frac{1}{n})} = \sqrt[3]{n} \left( 1 - \underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}_{\sim -\frac{1}{3n}} \right) \sim -\frac{\sqrt[3]{n}}{3n} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \rightarrow 0$$

$$7) \underbrace{\ln n}_n e^{-n} \sim n e^{-n}$$

$$8) \ln \underbrace{(n^2+2)}_{\sim n^2} = \ln \left( n^2 \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) \right)$$

$$= \ln(n^2) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right)$$

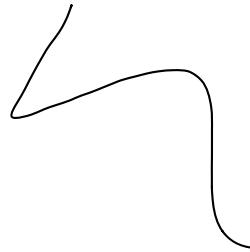
$\underset{\text{orange}}{= o(\ln(n^2))}$

$$\sim \ln n^2 = 2 \ln n$$

$$9) \ln(n \ln(n)) = \ln n + \ln(\ln n) = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n$$

$$\left( 1 + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \exp \left( n \ln \left( 1 + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right)$$

$$\ln \left( 1 + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$



Ex 9:

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Mq } \exists ! u_n \in \left[ -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right] : \tan u_n = n$$

$\tan$  réalise une bijection de  $\left[ -\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right]$  dans  $\mathbb{R}$

2) Mq  $u_n \sim n\pi$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{\pi}{2} + n\pi < u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{n\pi} < \frac{u_n}{n\pi} < \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{n\pi}$$

Par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n\pi} = 1$$

Donc  $u_n \sim n\pi$

3) Mq  $u_n - n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

$\tan$  

4) Posons  $w = (u_n - n\pi - \frac{\pi}{2})_{n \in \mathbb{N}}$

On a déjà  $\lim w = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \arctan n - \frac{\pi}{2}$$

$$= -\arctan \frac{1}{n}$$

$$\sim -\frac{1}{n}$$

Exo :

$u \downarrow$

$$u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$u \downarrow$  elle a une limite si  $\lim u = -\infty$  alors  $\lim u_{n+1} + u_n = -\infty$

Donc  $\lim u \neq -\infty$

Ainsi  $u$  a une limite finie  $l$

Ainsi  $u_{n+1} + u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2l$

$$\text{Or } \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$$\text{donc } l = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$2u_n \leq u_{n+1} + u_n \leq 2u_n$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Donc } \frac{u_{n+1} + u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{2u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{u_{n-1} + u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow 1$$

$$\text{Par encadrement: } \frac{2u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim 1$$

$$\text{Donc } u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$