Numéro de place: 1 0 9 5 6 0

Numéro d'inscription: 1 4 6 6 5

Signature

Nom: X H O F F R A Y

Prénom: N I L S

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve: Mathématiques 1

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 0 1 / 0 9

I. Inégalité de Knopp

A. Deux inégalités intégrales

1. Inégalité intégrale de Jensen

1. On possède $f : [a,b] \to J$ continue par morceaux ainsi :

$$\frac{b-a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{si } n\in\mathbb{N} :$$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$ et φ convexe sur J donc, si $(x_0, \dots, x_n) \in J^{n+1}$:

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{n+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(x_k)}{n+1}.$$

Mais donc $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}{n+1}$

De plus φ continue donc $\varphi\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi\left(\int_a^b \frac{f(t)}{b-a}\,dt\right)$

et $\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,dt$.

Ainsi d'après l'inégalité précédemment trouvée, on passe à la limite et :

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \int_a^b \frac{\varphi\circ f(t)}{b-a}\,dt.}$$

2. Une autre inégalité intégrale

8. Soit $x>0$: $g(x) = \int_0^x \frac{1}{x} t f(t)\,dt$ on pose le changement de variable C^1 $t = ux$

$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 xu\, f(xu)\, x\,du = x\int_0^1 u\, f(xu)\,du$.

Or si $\varepsilon>0$, $u\in[0,1]$ $x\in[0,\varepsilon]$ $|u f(ux)| \leq \|f\|_{\infty,[0,\varepsilon]}$

et $u \mapsto \|f\|_{\infty,[0,\varepsilon]}$ intégrable sur $[0,1]$. Ainsi étant donné que $x\mapsto u f(xu)$ continue au voisinage de 0 et que $u \mapsto u f(xu)$ continue par morceaux sur $[0,1]$, par continuité sous l'intégrale $\int_0^1 u f(xu)\,du$ continue au voisinage de 0 et

$\int_0^1 u f(xu)\,du \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2} f(0)$.

Alors $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{1}{2}f(0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 0}$

3. Soit $x>0$ $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t f(t)\, 1_{[0,x]}(t)\,dt$

$x \mapsto \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]}(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]}(t)$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Si $x\in\mathbb{R}_+^*$ $t\in\mathbb{R}_+$ $\left|\frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]}\right| \leq \frac{x}{x} f(t)$

or $t\mapsto f(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème de convergence dominée dans le cas continu : $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]}(t)\,dt$

or $\forall t\in\mathbb{R}_+$ $0 \leq \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]} \leq \frac{t f(t)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par encadrement ;

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} t f(t) 1_{[0,x]} = 0$ alors :

$\boxed{g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

4. On vient de montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ donc

$\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt\,dx = \left[-\frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,dt\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, x f(x)\,dx$

puisque $g' : x \mapsto x f(x)$. Ainsi $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \lim_{x\to 0} g(x) - \lim_{x\to+\infty} g(x) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Or f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\boxed{\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx}$

donc $\boxed{\int_0^{+\infty} h(x)\,dx \text{ converge}}$ et on a l'égalité souhaitée.

B. Démonstration de l'inégalité de Knopp

5. $x \mapsto \exp(x)$ continue et convexe sur $\mathbb{R}$ ainsi si $x > 0$:

$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t f(t))\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x \ln(t)\,dt\right)$

$= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t f(t))\,dt\right)\exp(-\ln(x)+1) = \frac{e}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t f(t))\,dt\right)$

or d'après la question 1 : $\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(t f(t))\,dt\right) \leq \frac{1}{x}\int_0^x \exp(\ln(t f(t)))\,dt$.

Donc $\boxed{\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) \leq \frac{e}{x} \times \frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,dt = \frac{e}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt}$

6. $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)$ positive et continue par morceaux, et

$\forall x > 0\ \ 0 \leq \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) \leq \frac{e}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt = e\,h(x)$ (notation précédente)

Or f supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après la question 4 h intégrable

et par comparaison des fonctions positives $\boxed{x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) \text{ également}}$.

puis $\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{e}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt\,dx$ par croissance de

l'intégrale donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) \leq e\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = e\int_0^{+\infty} f(x)\,dx}$

d'après la question 4.

C. Application à l'inégalité de Carleman

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$: si $k = 1$ v_1 est constante égale à $\ln(a_1)$ donc est bien minimale pour $x = 1$.

Si $k \neq 1$: v_k de classe C^1 sur $[k-1, k]$ et $v_k' : x \mapsto \ln(a_k)\frac{k-1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)$

or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante donc $-\frac{1}{x^2}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) \leq -\frac{1}{x^2}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_{k-1})$

Et alors $v_k' : x \mapsto \frac{k-1}{x^2}\ln(a_k) - \frac{k-1}{x^2}\ln(a_{k-1}) = \frac{k-1}{x^2}(\ln(a_k) - \ln(a_{k-1})) \leq 0$

donc $\boxed{v_k \text{ décroissante sur } [k-1, k] \text{ et minimale pour } x = k}$

8. Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x \in [k-1, k[$: $\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i} \ln(f(t))\,dt$
$+ \frac{1}{x}\int_{k-1}^{x} \ln(f(t))\,dt = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i-1}^{i} \ln(a_i)\,dt + \frac{1}{x}\int_{k-1}^{x}\ln(a_k)\,dt$
$= \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-k+1)\ln(a_k) = v_k(x)$

ainsi $\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right) \geq \exp(v_k(k))$ (d'après la question précédente)

et $\exp(v_k(k)) = \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{1}{k}\ln(a_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)$

par croissance de l'intégrale : $\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)dx \geq \int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)dx$

$= \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\ln(a_i)}{k}\right)$. On a donc pour $\boxed{k \geq 2 \int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)dx \geq \exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right)}$

si $k = 1$ $\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)dx = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(a_1)\,dt\right)dx = \int_0^1 \exp(\ln(a_1))\,dx$

$= \exp\left(\frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1}\ln(a_i)\right)$ donc $\boxed{\text{vrai pour } k = 1.}$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\right) = \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{k} a_i^{\frac{1}{k}}\right)\right) = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}$

et d'après la question 6 : $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)dx = \int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,dt\right)dx$

$\leq e\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = e\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = e\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Numéro de place: 1 0 9 5 6 0

Numéro d'inscription: 1 4 6 6 5

Nom: J H O F F R A Y

Prénom: N I L S

Signature

Épreuve: Mathématiques 1

Feuille 02 / 03

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

I. Inégalité de Knopp

C. Application à l'inégalité de Carleman

9. On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{a}\int_0^t \ln(g(t))\,dt\right) dt \leqslant e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

donc $\boxed{0 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$.

II. Inégalité de Carleman

A. Inégalité arithmético-géométrique

11. Soit $x \in U_n$ $x = (x_1 \ldots x_n)$ $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \prod_{k=2}^{n} x_k \\ \vdots \\ \prod_{k \neq i} x_k \\ \vdots \\ \prod_{k=1}^{n-1} x_k \end{pmatrix}}$

et $\nabla g_S(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$

12. $X_S = g_S^{-1}(\{0\})$ et g_S continue et $X_S = \{x \in \bar{U}_n \mid \|x\| = S\}$ dans ~~Ef~~ dim $\bar{U}_n = n < +\infty$ donc $\boxed{X_S \text{ compact et fermé}}$ donc $\boxed{\text{th borne atteinte } f \text{ atteint maximum sur } X_S}$

d'après le théorème des extremas liés ~~si~~ f admet un maximum sur ~~X_S~~ $a \in X_S$

il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ à x le point extremal.

Ne rien écrire dans la partie barrée

soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \Rightarrow \begin{cases} \prod_{k=2}^{n} x_k = \lambda \\ \vdots \\ \prod_{k=1}^{n-1} x_k = \lambda \end{cases}$ si $x = 0 = (0, \dots, 0)$ donc $\notin X_S$

~~cette fonction …~~

soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n$

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2$ on a $\frac{\prod_{k \neq i} x_k}{\prod_{k \neq j} x_k} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 = \frac{x_j}{x_i} \Leftrightarrow x_i = x_j$

et $x \in X_S$ donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = S = n x_1$ donc $x_1 = \frac{S}{n} = x_i$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

ainsi $\prod_{k \neq i} x_k = \left(\frac{S}{n}\right)^{n-1}$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ donc $\nabla f(x) = \left(\frac{S}{n}\right)^{n-1} \nabla g(x)$.

Si un au plus des x_i est nul alors le système ne possède pas de solution ~~autre~~ que $0 \notin X_S$

les extremums sont dans $X_S \cap U_n$, maximum égal à $\boxed{\left(\frac{S}{n}, \dots, \frac{S}{n}\right) = a}$

soit $\varepsilon > 0$ tel que $S > (n-1)\varepsilon$ alors $x = (S - (n-1)\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon) \in X_S \cap U_n$

et $f(x) = (S - (n-1)\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n$ donc $\boxed{a \text{ est un maximum de } f \text{ restreinte à } X_S}$

13. D'après la question précédente f restreinte à X_S admet un maximum sur $X_S \cap U_n$ égale à a et $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ $\lambda > 0$ donc si $k \in [\![1, n]\!]$

$\prod_{i \neq k} a_i = \lambda \Leftrightarrow a_k \prod_{i \neq k} a_i = a_k \lambda \Leftrightarrow \boxed{a_k = \frac{f(a)}{\lambda}}$ avec $\lambda = \left(\frac{S}{n}\right)^{n-1}$

14. Soit $x \in U_n \cap X_S$ d'après ce que l'on vient de montrer $f(x) \leq f(a)$

et $\sum_{k=1}^{n} a_k = S = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(a)}{\lambda}$ donc $f(a) = \frac{1}{n} S \lambda \leq S\lambda$

donc $f(x) \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n$ puis par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$: $f(x)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{S}{n}$

mais $x \in U_n \cap X_S$ donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$ et alors $f(x)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \boxed{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$

pour $x \in \overline{U}_n \cap X_S$ tel que $\exists i \in [\![1,n]\!]$ $x_i = 0$ $f(x) = 0 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

est vrai pour tout $S \in \mathbb{R}_+^*$ donc étant donné que $(\mathbb{R}_+)^n = \bigcup_{S>0} \overline{U}_n \cap X_S$

donc le résultat reste vrai sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$: $\forall x = (x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

B. Démonstration de l'inégalité de Carleman

15. Soit $x \in U_n$ $\nabla f_n(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} x_1^{\frac{1}{i}-1} \prod_{k\neq 1}^{i} x_k^{\frac{1}{i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} x_j^{\frac{1}{i}-1} \prod_{k\neq j}^{i} x_k^{\frac{1}{i}} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} x_n^{\frac{1}{n}-1} \prod_{k=1}^{n-1} x_k^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}}$

et $\nabla h_n(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$

16. On constate que $x \in \overline{U}_n$ $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} x_i$

ainsi $\overline{U}_n \cap H_n = \{(x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$

$= \{(x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \|x\| = 1\}$ donc $\overline{U}_n \cap H_n$ borné et

$\overline{U}_n \cap H_n = h_n^{-1}\{0\}$ avec $\{0\}$ fermé et h_n polynomiale donc continue

Ainsi $\overline{U}_n \cap H_n$ est un fermé, borné d'un espace de dimension finie donc $\boxed{\overline{U}_n \cap H_n \text{ compact}}$. et f_n continue donc $f_n|_{H_n \cap \overline{U}_n}$ admet un maximum sur $H_n \cap \overline{U}_n$ d'après le $\boxed{\text{théorème des bornes atteintes}}$.

17. d'après le théorème des extrema liés si $(a_1 \dots a_n)$ maximum de f_n sur $\overline{U}_n \cap H_n$ alors il existe $\lambda > 0$ tel que $\nabla f_n(a) = \lambda \nabla h_n(a)$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} a_1^{\frac{1}{i}-1} \prod_{k\neq 1}^{i} a_k^{\frac{1}{i}} = \lambda \\ \quad \vdots \\ \frac{1}{n} a_n^{\frac{1}{n}-1} \prod_{k=1}^{n-1} a_k^{\frac{1}{n}} = \lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \prod_{k=1}^{i} a_k^{\frac{1}{i}} = \lambda a_1 \\ \quad \vdots \\ \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}} = \lambda a_n \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{i} = \lambda a_1 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \end{array} \right.$ et $a \in \mathcal{H}_n$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{i} = \lambda a_1 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{array} \right.}$$

18 a) d'après le système précédemment trouvé :

$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{\gamma_i}{i} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda$ donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \lambda = f(a) = R_n}$

b) $\frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n$ donc $\gamma_n = \lambda n a_n = \lambda w_n a_n$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $\gamma_i = \lambda w_i a_i \; \forall i \geq k$

$\frac{\gamma_{k-1}}{k-1} + \sum_{i=k}^{n} \frac{\gamma_i}{i} = \lambda a_{k-1} \Leftrightarrow \frac{\gamma_{k-1}}{k-1} + \sum_{i=k}^{n-1} \lambda (a_i - a_{i+1}) + \lambda a_n = \lambda a_{k-1}$

$\Leftrightarrow \frac{\gamma_{k-1}}{k-1} + \lambda a_k - \lambda a_n + \lambda a_n = \lambda a_{k-1} \Leftrightarrow \gamma_{k-1} = (k-1)\lambda(a_{k-1} - a_k)$

$(\Leftrightarrow) \; \gamma_{k-1} = \lambda w_{k-1} a_{k-1}$

et vrai pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ donc par récurrence on a montré que :

$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \gamma_k = \lambda w_k a_k}$

19. $\ell \leq e$ donc pour $k = 0$ $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{\ell}$:

on pose $g : n \mapsto \exp\left((n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\right)$ avec $k \in \mathbb{N}$ $g(k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$

donc $g(n) \underset{n \to +\infty}{=} \exp\left((n+1)\left(-\frac{1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} \exp\left(-\frac{n+1}{n+2} + o(1)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e}$

Numéro de place	1 0 3 5 6 0
Numéro d'inscription	1 4 6 6 5
Nom	X H O F F R A Y
Prénom	N I L S
Épreuve	Mathématiques 1

Signature

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 0 3 / 0 3

II. Inégalité de Carleman

B. Démonstration de l'inégalité de Carleman

19. et $g' : x \mapsto \left(\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{x+2}\right)\exp\left((x+1)\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)\right)$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{x+2} \leq 0$ (concavité du ln)

donc g est décroissante de limite $\frac{1}{e}$ ~~dans~~ $\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $g(0) \geq \frac{1}{e}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) \geq \frac{1}{e}$ c'est-à-dire $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad g(k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \geq \frac{1}{e}}$

20. si $w_1 > \frac{1}{e}$ alors $x_1 = \lambda w_1 a_1 > a_1$ donc $a_1 > a_1$ absurde

ainsi $\boxed{w_1 \leq \frac{1}{e}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$ d'après la question précédente.

On supposera avoir montré que $\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad w_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda} w_k^k \left(1-\frac{w_k}{k}\right)^{-k}$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $w_k \leq \frac{k}{k+1}$ alors

$w_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda} w_k^k \left(1-\frac{w_k}{k}\right)^{-k} \leq \frac{1}{\lambda}\frac{k^k}{(k+1)^k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-k} = \frac{1}{\lambda}\frac{k^k}{(k+1)^k}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{1}{\lambda}$

Or on a supposé $\lambda > e$ donc $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$

et $w_{k+1}^{k+1} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$ donc $w_{k+1} \leq \frac{k+1}{k+2}$ est vrai pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

donc $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!] \quad w_k \leq \frac{k}{k+1}}$

21. D'après la question précédente on aurait $a_n \le \frac{n}{n+1} \le 1$ si $w_n = n \geq 1$
donc dérivable ainsi $\lambda \le e$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ $x_1 + \dots + x_n = 1$ d'après la question 18.a)

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 \dots x_k)^{\frac{1}{k}} = f_n(x) \le f_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \lambda$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_1 \dots x_k)^{\frac{1}{k}} \le \lambda \le e}$.

22. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$
$x_1 + \dots + x_n = 1$ $\sum_{k=1}^{n} (x_1 \dots x_k)^{\frac{1}{k}} \le e = e \sum_{k=1}^{n} x_k$

Alors pour $\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} x_i = 1 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (x_1 \dots x_k)^{\frac{1}{k}} \le e \sum_{k=1}^{n} x_k}$
$\in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$

Maintenant soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\sum a_n$ converge on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{a_n}{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}$

alors $\sum_{n \ge 0}^{+\infty} x_n = \frac{\sum_{n \ge 0}^{+\infty} a_n}{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k} = 1$ et d'après ce qui précède :

(on pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$) $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_1 \dots x_k)^{\frac{1}{k}} \le e \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{S^k}\right)^{\frac{1}{k}} \le \frac{e}{S} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \le e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$$

III. Propriété de Carleman-Yang

A. Un développement en série entière.

83. $\varphi(t) = (1-t)^{1-\frac{1}{t}} = \exp\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\ln(1-t)\right) = \exp\left(\frac{t-1}{t}\ln(1-t)\right) \underset{t\to 0}{=}$

$\exp\left(\frac{t-1}{t}(-t+o(t))\right) \underset{t\to 0}{=} \exp(1-t+o(t)) \underset{t\to 0}{=} \exp(1+o(t))$

donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} e$ on peut donc prolonger φ en 0 avec :

$$\boxed{\varphi : t \mapsto \begin{cases} (1-t)^{1-\frac{1}{t}} & \text{si } t\neq 0 \\ e & \text{si } t = 0 \end{cases}}$$

84. $|b_0| = 1$ donc supposons trouvé $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall i\leq k\ |b_i|\leq 1$

dans ce cas $|b_{k+1}| = \left|-\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j+1}b_{k+1-j}\right| \leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j+1}|b_{k+1-j}|$

$\leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{2(k+1)}\sum_{j=1}^{k+1} 1 = \frac{1}{2} < 1$ donc $|b_{k+1}|\leq 1$.

et vrai pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\ \ |b_k|\leq 1}$

On note R_b le rayon de convergence de $\sum_{k\geq 0} b_k t^k$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n = 1$

on note R_a le rayon de convergence de $\sum_{k\geq 0} a_k t^k = \sum_{k\geq 0} t^k$.

d'après d'Alembert $R_a = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ |b_n|\leq 1$ donc $b_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n)$

ainsi par théorème de comparaison $\boxed{R_b \geq 1}$

85. Soit $t\in\,]-1,1[\,\setminus\{0\}$ $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t}\ln(1-t)\right)e^{\frac{t-1}{t}\ln(1-t)}$

$= \left(\frac{t-(t-1)}{t^2}\ln(1-t) - \frac{t-1}{t}\frac{1}{1-t}\right)\varphi(t) = \left(\frac{\ln(1-t)}{t^2} + \frac{1}{t}\right)\varphi(t)$

$= \left(-\frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n} + \frac{1}{t}\right)\varphi(t) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{n} + \frac{1}{t}\right)\varphi(t) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^{n-2}}{n}\varphi(t)$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[\setminus \{0\} \quad \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+2}\,\varphi(t) = \psi(t)\varphi(t)}$$

et $\psi(0)\varphi(0) = -\frac{e}{2}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\exp\left(\frac{h-1}{h}\ln(1-h)\right) - e\right) = -\frac{e}{2}$

donc $\varphi'(0) = \psi(0)\varphi(0)$ et donc $\boxed{\forall t \in]-1,1[\quad \varphi'(t) = \psi(t)\varphi(t)}$

puis $\varphi^{(n)}(t) = \left(\varphi'(t)\right)^{(n-1)} = \left(\varphi(t)\psi(t)\right)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi^{(k)}(t)\,\varphi^{(n-k-1)}(t)$
$\forall t \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

donc $\varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi^{(k)}(0)\,\varphi^{(n-k-1)}(0)$

et $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \psi^{(k)}(0) = \frac{k!}{k+2}$ (on pose $\psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$
donc $\psi^{(k)}(0) = k!\, c_k$)

et ainsi $\boxed{\varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{k!}{k+2}\,\varphi^{(n-k-1)}(0)}$

26. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ donc $c_0 = e = -e b_0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $c_n = -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0)$

$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(n-k-1)}(0)}{(n-k-1)!} \times \frac{1}{k+2} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} c_{n-k-1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} c_{n-k}$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{c_n = -e b_n}$ ainsi $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$

$= e + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k t^k = e - e\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k = \boxed{e\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right) \quad \forall t \in]-1,1[}$