Théorème de Weierstrass
Démonstration par les polynômes de Bernstein

On va ici établir le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit f une fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; alors, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge vers f uniformément sur $[a,b]$.*

Tout d'abord, on peut toujours se ramener au cas où $[a,b]=[0,1]$ à l'aide d'un changement de variable affine : poser $g(t)=f\big(a+t(b-a)\big)$ pour $t\in[0,1]$, c'est-à-dire $f(x)=g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$. Le même changement, appliqué aux polynômes d'approximation, transformera bien les fonctions polynômes en fonctions polynômes.

On suppose désormais f définie et continue sur $[0,1]$. On lui associe les **polynômes de Bernstein** $B_n(f)$, définis par

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall t\in[0,1]\quad B_n(f)(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)t^k(1-t)^{n-k}$$

Dans la proposition suivante, on identifie comme d'habitude polynômes abstraits et fonctions polynômes associées :

Proposition 2. **i.** $\forall n\in\mathbb{N}\quad B_n(1)=1$.
ii. $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad B_n(X)=X$.
iii. $\forall n\geqslant 2\quad B_n(X^2)=X^2+\dfrac{X(1-X)}{n}$.

Le point **i.** est immédiat : $\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall t\in[0,1]\quad B_n(1)(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\big(t+(1-t)\big)^n=1$.

Pour le point **ii.**, on utilise l'identité $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, valable si $1\leqslant k\leqslant n$: pour tout $n\geqslant 1$ et tout $t\in[0,1]$, le terme d'indice $k=0$ étant nul,

$$\begin{aligned}B_n(X)(t)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}t^k(1-t)^{n-k}\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}t^{j+1}(1-t)^{n-1-j}=t\big(t+(1-t)\big)^{n-1}=t\end{aligned}$$

en posant $j=k-1$.

Le point **iii.** découle d'un calcul analogue : on décompose k^2 en $k(k-1)+k$, le terme $k(k-1)\binom{n}{k}$ devient $n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ en appliquant deux fois l'identité précédente.

Proposition 3. $\forall n\geqslant 2\quad\forall t\in[0,1]\quad \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-t\right)^2 t^k(1-t)^{n-k}\right|\leqslant\dfrac{1}{4n}$.

Soient $n\geqslant 2$ et $t\in[0,1]$. En développant le carré, la somme sous la valeur absolue devient

$$B_n(X^2)(t)-2tB_n(X)(t)+t^2B_n(1)(t)=t^2+\frac{t(1-t)}{n}-2t^2+t^2=\frac{t(1-t)}{n}$$

Une étude de fonction rapide montre que $t(1-t)$ est positive sur $[0,1]$ et atteint son maximum en $1/2$, maximum égal à $1/4$, ce qui donne la majoration annoncée.

Revenons à la fonction f : pour simplifier les écritures, on notera désormais, pour tout n, f_n la fonction polynôme $B_n(f)$. On veut démontrer que (f_n) converge vers f uniformément sur $[0,1]$. On se donne donc un réel $\varepsilon>0$, et on va établir l'existence d'un rang n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0\quad\forall t\in[0,1]\quad |f_n(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon$.

Notons déjà que, puisque f est continue sur un segment, elle est bornée sur ce segment : on peut donc poser

$$M=\sup\big\{|f(t)|\ ;\ t\in[0,1]\big\}$$

De plus, f est uniformément continue sur ce segment, ce qui justifie la définition de α dans la proposition suivante :

Proposition 4. *Soit* $\alpha > 0$ *vérifiant* $\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad \Big(|u-t| \leqslant \alpha \Longrightarrow \big|f(u) - f(t)\big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \Big).$ *Alors :*

$$\forall (t,u) \in [0,1]^2 \quad \big|f(u) - f(t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2}(u-t)^2$$

Il suffit de discuter suivant la valeur de $|u-t|$. Si $|u-t| \leqslant \alpha$, alors, par définition de α, $\big|f(u)-f(t)\big| \leqslant \varepsilon/2$, et donc le résultat est établi.

Si $|u-t| > \alpha$, alors $\big|f(u) - f(t)\big| \leqslant \big|f(u)\big| + \big|f(t)\big| \leqslant 2M \leqslant 2M \dfrac{(u-t)^2}{\alpha^2}$ puisque $\dfrac{(u-t)^2}{\alpha^2} \geqslant 1$, et donc le résultat est encore vrai.

On peut maintenant majorer efficacement $|f_n(t) - f(t)|$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. Puisque $B_n(1) = 1$, on peut écrire

$$f_n(t) - f(t) = f_n(t) - f(t) B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] t^k (1-t)^{n-k}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \big|f_n(t) - f(t)\big| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 t^k (1-t)^{n-k} \qquad \text{(Prop. 4)} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\alpha^2 n} \end{aligned}$$

en utilisant $B_n(1) = 1$ et la proposition 3.

Il ne reste plus qu'à choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\dfrac{M}{2\alpha^2 n_0} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$; on aura alors bien

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall t \in [0,1] \quad \big|f_n(t) - f(t)\big| \leqslant \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.