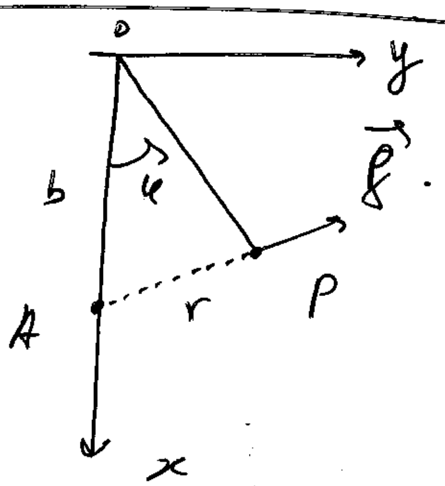
DS07 - correction

Exercice 1 - Électrométrie



1) On a, sur P, l'action d'une force coulombienne, avec :

$$\|\vec{f}\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}.$$

et $\frac{r}{2} = b \sin \varphi/2$, $r = 2b \sin \varphi/2$, alors :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{2^2 b^2 \sin^2 \varphi/2} \quad \text{et} \quad q = Q/2,$$

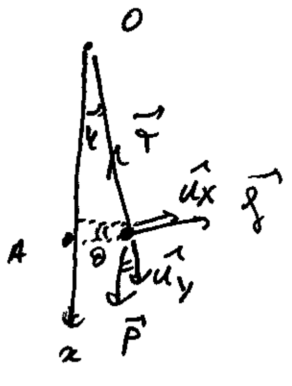
$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{Q^2}{b^2 \sin^2 \varphi/2}.$$

2) On cherche la position d'équilibre, pour cela, on a :

- système : point matériel P,
- référentiel terrestre supposé galiléen,
- actions mécaniques :
  - poids : $\vec{P} = mg\,\hat{u}_x$, Tension du fil $\vec{T}$.
  - force d'interaction coulombienne : $\vec{f}$,

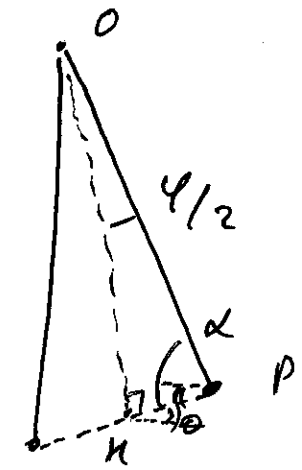
d'où $m\vec{a} \overset{PFD}{=} \vec{f} + \vec{P} + \vec{T}$

$$\vec{0} \overset{eq.}{=} \vec{f} + \vec{P} + \vec{T}.$$



On définit la base locale $(P; \hat{u}_x; \hat{u}_y)$

et l'angle $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \end{cases}$



$\theta = \varphi/2$.

On en déduit, en projetant sur la base locale :

$$\begin{cases} (\hat{u}_x) & 0 = f - mg \sin\theta \quad (1) \\ (\hat{u}_y) & 0 = -T + mg\cos\theta, \quad (2) \end{cases}$$

et en réécrivant (1), avec $\varphi = \varphi_{eq}$,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{16 b^2 \sin^2 \varphi/2} = mg \sin \varphi/2.$$

$$\sin^3 \varphi/2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{16 b^2 mg}.$$

3) On a $\varphi_{eq} = \pi/3$, $\sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{Q^2}{4} = q^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4 b^2 mg \sin^3 \frac{\varphi_{eq}}{2}}\right)^{-1}$$

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0}{1} \cdot mg b^2 \cdot 1} \rightsquigarrow \text{odg.}$$

$$= \left(10^{-10} \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-2}\right)^{1/2}$$

$$= 10^{-7} \text{ C}.$$

Exercice 2 : Dépollution automobile

N : $Z = 7$, $1s^2\, 2s^2\, 2p^5$, 5 e^- de valence

O : $Z = 8$, $1s^2\, 2s^2\, 2p^6$, 6 e^- de valence

N_2, 10 e^- de valence :

$$|N \equiv N|$$ linéaire, apolaire,

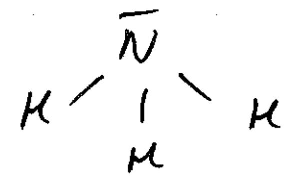
NO, 11 e^- de valence :

$$\dot{N} = \overline{O}$$ linéaire, polaire,

NO_2, 17 e^- de valence :

$$^{\ominus}|\overline{\underline{O}} - \dot{N}^{\oplus} = \overline{O}$$ coudée, polaire.

NH_3, 8 e^- de valence



pyramide à base triangulaire, polaire.

2) On a une réaction redox :

$$8\,NH_3 + 6\,NO_2 = 7\,N_2 + 12\,H_2O.$$

3) On remarque :

→ 1) $T_c < 26°C$, il faut prendre garde à ce que le volume molaire du système dans la bouteille soit inférieur à celui du corps pur dans l'état critique.

→ 2) Si $P_{stock} < 10$ bar, alors le système sera monophasé, diphasé si $P_{stock} = P_{sat}$.

On propose alors un stockage sous forme diphasée, à 26 °C, 1013 kPa, avec V_m (stock) < V_m (critique). Ainsi, en cas d'incendie, l'élévation de la pression sera relativement bien contenue.

Exercice 3 : Satellite de télé détection.

1) Dans la base cylindrique, on note :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r \cdot \hat{u}_r$$

et $\vec{v}(M/R)(t) = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$.

2) Système : satellite M.

Référentiel géocentrique galiléen R.

Action mécanique : interaction gravitationnelle :

$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{r^2}\,\hat{u}_r \text{, attractive.}$$

et sur la surface de la Terre, on note

$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{R_T^2}\,\hat{u}_r = -m g_0 \hat{u}_r = \vec{P}$$

soit $g_0 = \dfrac{G M_T}{R_T^2}$, on en déduit alors :

$$\vec{F} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2}\,\hat{u}_r \text{, dirigée vers le centre de la Terre.}$$

3) On donne $E_p = -\frac{G M_T m}{r} + cte$.

On prend la constante nulle, et :

$$E_p(r) = -\frac{G M_T m}{r} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r}.$$

4) On définit le moment cinétique par rapport à O pour M dans R :

$$\vec{L_0}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R).$$

Appliquons le TMC au mobile :

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{M_0}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0},$$

$\vec{L_0}$ est un vecteur constant. On a :

$$\vec{L_0} = r\hat{u_r} \wedge m(\dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\theta}\hat{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k},$$

d'où $L_0 = mr^2|\dot{\theta}|$.

5) On suppose une trajectoire circulaire, alors :

$$\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\hat{u_\theta},$$

$$\vec{a}(M) = r\ddot{\theta}\hat{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{u_r} = \frac{dv}{dt}\hat{u_\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{u_r}.$$

6) PFD :

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

$$m\begin{pmatrix}-v^2/r \\ dv/dt\end{pmatrix} = -\frac{G M_T m}{r^2}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix},$$

d'où $\frac{dv}{dt} = 0$, le mouvement est uniforme.

On écrit alors :

$$v^2 = \frac{G M_T}{r} = \frac{g_0 R_T^2}{r}.$$

7) On en déduit :

$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r}$

$\rightarrow E_m = \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}, = -\frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r} < 0,$

logique car l'état est lié.

8) AN : $E_m(r_b) = -\frac{4 \cdot 10^3 \times 10 \times (6,4 \cdot 10^6)^2}{2 \times 8 \cdot 10^6} = -2^{10} \cdot 10^8 = -10^{-11}$ J.

$E_m(r_H) = \frac{E_{mb}}{5} = 2 \cdot 10^{10}$ J.

9) TEM : $\frac{dE_m}{dt} = 0$, car aucune force conservative n'est présente, $E_m = cte$.

On écrit alors :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}.$$

10) On identifie alors une énergie potentielle effective : $E_{p\,eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$.

11) Une trajectoire elliptique correspond à un état lié, $E_m < 0$, $r \in [r_{min} ; r_{max}]$, c'est E_{m2}.

12) La trajectoire est circulaire si $E_p = cte$, soit $E_m = E_{min}$, $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = 0$, $E_{p\,eff} = cte$.

13) En A et P, le mouvement est orthoradial, le rayon y est extrémal, $\dot{r} = 0$. On peut alors écrire : $2a = r_H + r_b$.

14). On a établi que $E_m = cte$, soit

$$E_m(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r_h}$$
$$= \frac{1}{2} m v_P^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r_b} = E_m(P).$$

et $v_A = r_h \dot\theta_A$, $v_P = r_b \dot\theta_P$, et on a montré que $\mathcal{L}_0 = cte$, $\mathcal{L}_0(A) = m r_h^2 \dot\theta_A = m r_b^2 \dot\theta_P = \mathcal{L}_0(P)$,

alors : $\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_0^2}{m r_h^2} - m g_0 \frac{R_T^2}{r_h} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_0^2}{m r_b^2} - m g_0 \frac{R_T^2}{r_b} = E_m$.

On observe que r_h et r_b sont les solutions du polynome : $E_m r^2 + m g_0 R_T^2 r - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_0^2}{m} = 0$,

soit $r^2 + m g_0 \frac{R_T^2}{E_m} r - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_0^2}{m E_m} = 0$.

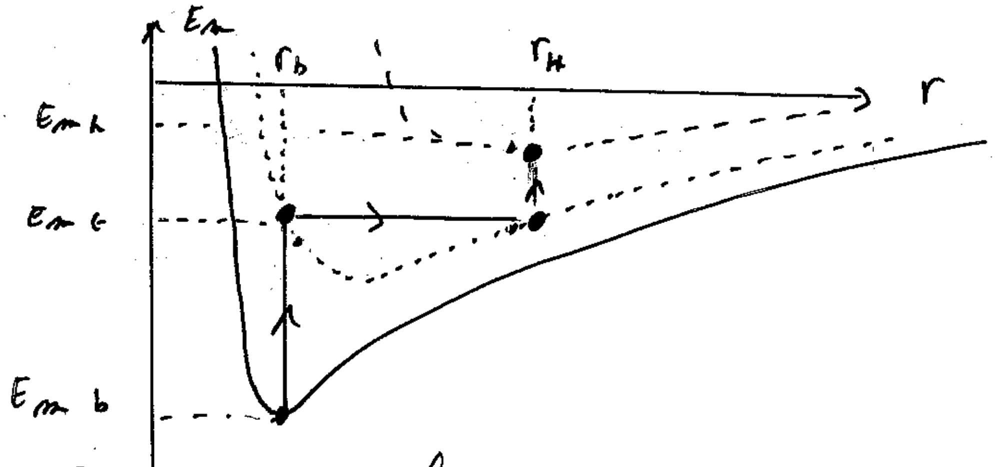
et on identifie : $\alpha = m g_0 \frac{R_T^2}{E_m}$, $\beta = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_0^2}{m E_m}$.

15) On a alors les racines :

$$r_\pm = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \quad \text{d'où } r_+ + r_- = r_h + r_b = -\alpha,$$

$$2a = -m g_0 \frac{R_T^2}{E_m}, \quad E_m = -m g_0 \frac{R_T^2}{2a}.$$

16)



Pour faire le changement d'orbite, on passe par l'orbite de transfert d'énergie (.....), et on lit $E_{m\,t} = -35$ GJ.

17) De même, on relève $E_{m\,b} = -100\,GJ$, $E_{m\,h} = -20\,GJ$.
On retrouve les mêmes grandeurs qu'en 7.

18) En P, il faut alors communiquer $+65\,GJ$.

Exercice 4 : Un oscillateur.

1) On calcule le travail élémentaire apporté par une force élastique $\vec{F}$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$
$$= -k\,(l - l_0)\,\hat{u}_{el} \cdot d\vec{OM}$$
$$= -k\,(l - l_0) \cdot dl,$$
$$= -k(l - l_0) \cdot d(l - l_0)$$
$$= -d\left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C\right) = -dE_p,$$

on identifie $E_p(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C$.

2) Système : M, de masse m.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Forces : . Poids : $\vec{P} = -mg\,\hat{u}_z$ (ne travaille pas).
. Réaction : $\vec{R} = R\,\hat{u}_z$ (ne travaille pas)
. Force élastique : $\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\hat{u}_{el}$.

Ici, $E_p = \frac{1}{2}k\,(l - l_0)^2 + C,$
$$= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0\right)^2 + C$$
et $E_p(x = 0) = 0$, $C = -\frac{1}{2}k(-l_0 + d)^2$, soit :
$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\,(d - l_0)^2.$$

3) Une position d'équilibre est définie par

un extremum d'énergie potentielle. C'est une position où, si le système y est sans vitesse initiale, il y reste durablement.

4) On cherche $\frac{dE_p}{dx} = 0$ pour $x = x_e$, position d'équilibre.

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_e} = \frac{1}{2} k \cdot 2 \cdot \frac{2x_e}{2\sqrt{d^2+x_e^2}} \cdot \left(\sqrt{d^2+x_e^2} - l_0\right).$$

$$= \frac{k x_e}{2\sqrt{d^2+x_e^2}} \cdot \left(\sqrt{d^2+x_e^2} - l_0\right),$$

d'où, deux cas :

ou $\begin{cases} x_e = 0 \\ \sqrt{d^2+x_e^2} = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_e = 0 \\ x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}. \text{ si } d > l_0. \end{cases}$

Ainsi, si $d > l_0$, on a une unique position d'équilibre $(x_e = 0)$

si $d < l_0$, on en a 3 $(x_e = 0, x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2})$.

5) Ainsi, la courbe .... correspond à $d < l_0$,

et — correspond à $d > l_0$.

6) Une position d'équilibre (in) stable correspond à un (éloignement) rapprochement de la position x de la position d'équilibre x_e lorsque le mobile est légèrement écarté. L'énergie potentielle y est (maximale) minimale.

7) Si $d > l_0$, $x_e = 0$ est stable,

si $d < l_0$, $x_e = 0$ est instable

$x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$ sont stables.

8) Si $E_m < 0$, on aura des oscillations autour des deux positions d'équilibre stable, mais on ne peut pas franchir la barrière de potentiel, si $E_m > 0$, on peut la franchir.

9) On peut passer la barrière si $E_m \geq 0$, soit :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} k (d - l_0)^2 \geq 0,$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{k}{m}} (l_0 - d)$$

10) On effectue un développement de Taylor au voisinage de x_e.

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_e} (x - x_e) + \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_e} \frac{(x - x_e)^2}{2}$$

or, $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_e} = 0$, position d'équilibre,

$x_e = 0$, soit :

$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2} x^2 \left.\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right|_{x=0}, \quad E_p(0) = 0,$$

et

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(k\left(x - l_0 \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)\right)$$

$$= k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2+x^2}} + l_0 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}^3}\right) = k\left(1 - \frac{l_0}{d}\right),$$

la position est stable si $d > l_0$, instable sinon.

On en déduit alors que :

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2} k x^2 \left(1 - \frac{l_0}{d}\right).$$

11) On utilise le TEM,

$$\frac{dE_m}{dt} = m \ddot{x} \dot{x} + \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{l_0}{d}\right) \dot{x} x, \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \left(1 - \frac{l_0}{d}\right) x = 0,$$

On identifie un oscillateur harmonique, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{d}\right)}$, $l_0 < d$