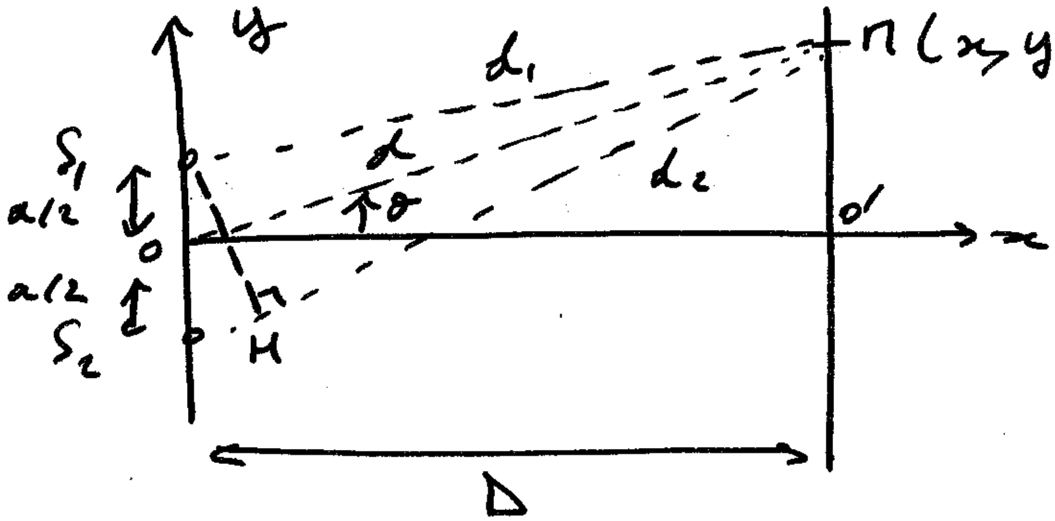
DS01 - correction

Exercice 1. Quelques éléments de cours

1)



2) On cherche à calculer la différence de marche δ, telle que :

$$\delta = d_2 - d_1 = S_2M - S_1M$$

$$= (S_2H + HM) - S_1M.$$

Dans le cas où θ est petit ($a \ll D$, $x \ll D$), $S_1M = HM$, le segment S_1H est l'arc de cercle de centre M et de rayon d_1. Dans ce cas, on a :

$$\delta = S_2H = a\sin\theta,$$

car l'angle $(\overrightarrow{S_1S_2}\,;\overrightarrow{S_1H})$ est environ égal à θ.

Le triangle $OO'M$ fournit la relation

$$\tan\theta = y/D,$$

l'angle θ étant petit, on a :

$$\theta \simeq y/D,$$

$$\theta \simeq \delta/a.$$

d'où $y = \dfrac{\delta D}{a}$.

Pour avoir des interférences constructives il faut que $\delta = p\lambda$, $p \in \mathbb{Z}$, alors :

$$y_p = p\frac{\lambda D}{a}.$$

Entre deux franges brillantes, on a l'interfrange i telle que :

$$\boxed{i = y_{p+1} - y_p = \frac{\lambda D}{a}}.$$

3) On peut faire un lien avec l'expérience des fentes d'Young, pour laquelle on a :

→ $a \sim 0{,}1\,mm$, $D \sim 1\,m$, $y \sim 1\,cm$.

→ $y \ll D$, $a \ll D$,

les approximations sont valides.

Exercice 2 : Autour de la molécule HBr

---

1) On note $\vec{F}_k$, la force élastique s'appliquant sur l'atome d'hydrogène :

$$\vec{F_k} = -k(\ell-\ell_0)\,\hat{u}_{élong}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{k/H}} = -k\,(x-\ell_0)\,\hat{u}_x.}$$

Vecteur force élastique — constante de raideur ($N\cdot m^{-1}$) — élongation du ressort à t et à vide — vecteur unitaire élongation

2) On a, pour l'atome de brome:

$$\overrightarrow{F_{k/Br}} = -k(x-\ell_0)(-\hat{u}_x)$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{k/Br}} = +k(x-\ell_0)\,\hat{u}_x.}$$

On a alors, dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

→ pour le système {Br} :

$$m_{Br}\,\vec{a}_{Br} = \frac{M_{Br}}{N_A}\,\vec{a}_{Br} = \overrightarrow{F_{k/Br}}$$

→ pour le système {H} :

$$m_H\,\vec{a}_H = \frac{M_H}{N_A}\,\vec{a}_H = \overrightarrow{F_{k/H}}$$

or $\|\overrightarrow{F_{k/Br}}\| = \|\overrightarrow{F_{k/H}}\|$, alors:

$$\frac{M_H}{M_{Br}} = \frac{\|\vec{a}_{Br}\|}{\|\vec{a}_H\|} \ll 1,$$

donc l'accélération, les variations de vitesses de l'atome de brome sont négligeables devant celles de l'atome d'hydrogène. On peut alors le considérer comme étant fixe, dès lors qu'il est immobile initialement.

3) Référentiel : d'étude, supposé galiléen
Système : atome d'hydrogène H.
Bilan des forces : $\overrightarrow{F_{R/H}} = -k(x - l_0)\overrightarrow{u_x}$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \overrightarrow{F_{R/H}}$$

On projette cette relation suivant (Ox) :

$$m\ddot{x} = -kx + kl_0,$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} l_0.}$$

4) On la met sous forme canonique et on identifie les constantes :

$$\boxed{\omega_0^2 = k/m \quad , \quad x_{eq} = l_0}$$

On a :
→ ω_0, la pulsation propre de l'oscillateur en $rad \cdot s^{-1}$
→ x_{eq}, la position d'équilibre, en m.

5) On a : $m_H = \frac{M_H}{N_A}$ — $g \cdot mol^{-1}$

g — mol^{-1} !

6) On a : $\boxed{\omega_0 = 2\pi \nu = 5{,}01 \cdot 10^{14}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$.

et $\boxed{k = \omega_0^2 m_H = \omega_0^2 \dfrac{M_H}{N_A} = 417\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}}$.

C'est très proche de la valeur tabulée, c'est cohérent.

7) On a une solution telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{eq} \\ \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

8) On a, d'une part,

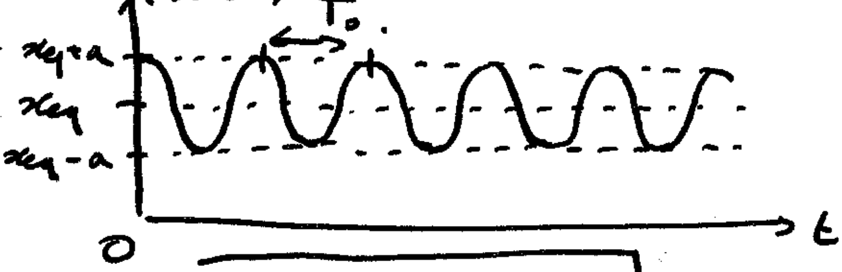
$$\begin{cases} x(0) = x_{eq} + a \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

et d'autre part

$$\begin{cases} x(0) = A \times 1 + B \times 0 + x_{eq} \\ \dot{x}(0) = \omega_0 (B - A) = \omega_0 B, \end{cases}$$

alors $\begin{cases} A = a \\ B = 0 \end{cases}$, $\boxed{x(t) = a\cos\omega_0 t + x_{eq}}$.

9) On représente la solution



10) On a :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_c(t) = \dfrac{1}{2} m_H \dot{x}^2(t) \\ E_{pe}(t) = \dfrac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 + C \end{array}},$$

avec C une constante choisie nulle.

11) On a alors :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_H a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k\, a^2 \cos^2 \omega_0 t,$$

$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k a^2}$, une constante.

12) On peut trouver un temps t où l'atome d'hydrogène est à son maximum d'élongation. On a :

$$E_m = \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} h \nu,$$

$$\boxed{a = \sqrt{h\nu / k} = 1{,}13 \cdot 10^{-11}\, m.}$$

13) De même, on peut avoir un temps où la vitesse est maximale,

$$E_m = \frac{1}{2} m_H v_{max}^2 = \frac{1}{2} h \nu,$$

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{h\nu / m_H} = 5{,}64 \cdot 10^3\, m \cdot s^{-1}.}$$

14) On reprend l'équation de 11) :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2,$$

or, $E_m = cte$, alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m_H \cdot 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k (x - x_{eq}) \cdot \dot{x},$$

or, l'atome d'hydrogène bouge $\dot{x}$ n'est pas uniformément nulle, alors :

$$\boxed{m_H \ddot{x} + k x = k x_{eq},}$$

d'où le résultat.

(15) On a :

a) graphe 2, c'est le seul graphe où $x(0)=0$,

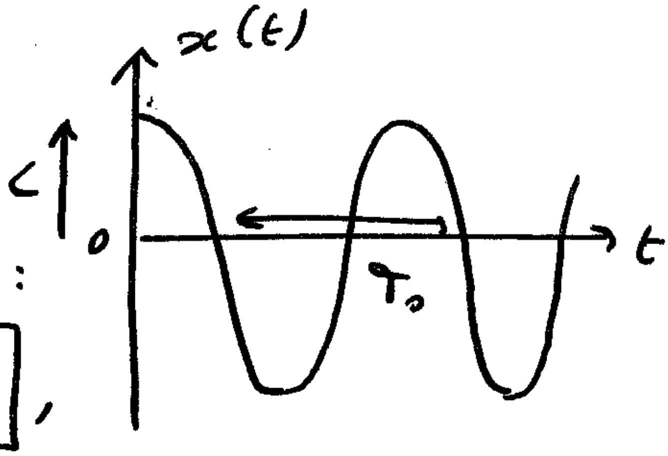
b) graphe 4, à $t=0$, $x(0)>0$ et la tangente à la courbe en ce point est une droite de pente positive.

c) graphe 3, idem, mais la pente est négative

d) graphe 1, c'est le seul graphe avec $\dot{x}(0)=0$.

(16) On a l'amplitude :

$$\boxed{C = 3\,\text{cm}.}$$



et la pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1{,}57\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}},$$

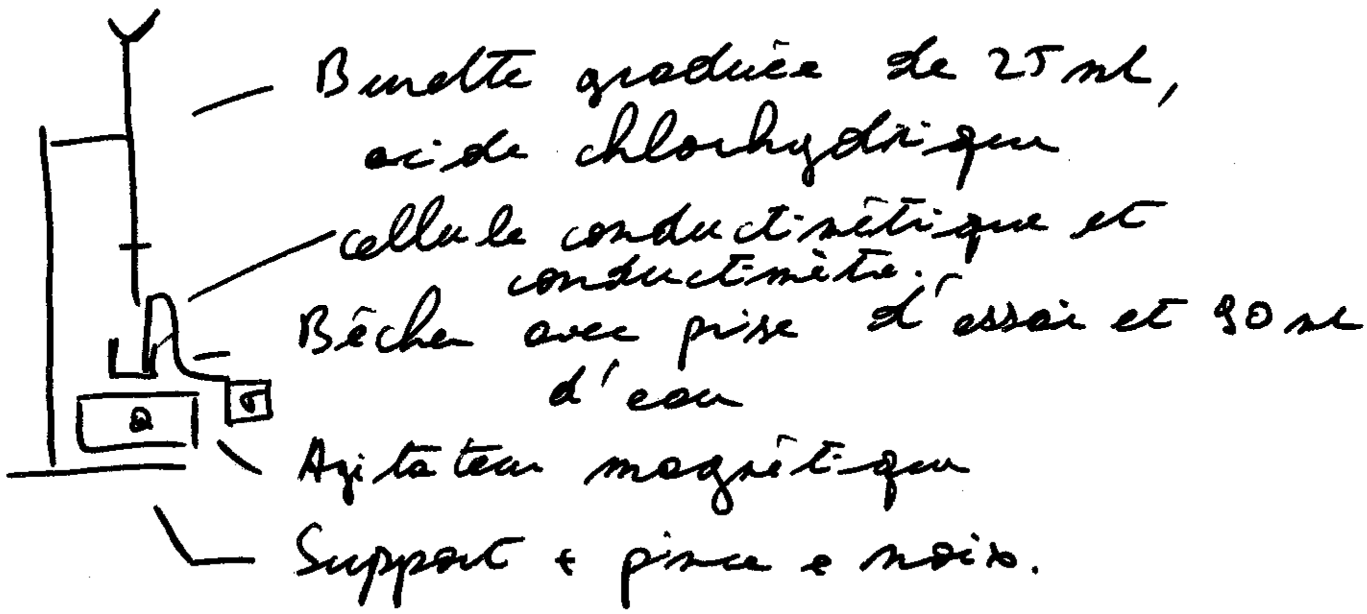
$T_0 = 4\,\text{s}.$

(17) Le retard du signal $x(t)$ sur le graphique 4 est de 0,65 s, alors :

$$\boxed{\varphi_0 = -\omega_0 \times \Delta t = 1{,}0\,\text{rad}.}$$

On a également la possibilité de mesurer $\cos\varphi$ à $t=0$.

18)



19) Dans un dosage conductimétrique, si on veut obtenir des morceaux de droite sans calculs additionnels, il faut travailler dans un grand volume de solution à titrer, pour pouvoir négliger les effets de dilution. Dans le cas contraire, il faudrait étudier la conductivité corrigée. Cela permet aussi d'assurer l'immersion complète de la sonde dans le liquide

20) On a :

$$\boxed{H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2H_2O_{(\ell)}}.$$

21) On relève $\boxed{V_{eq} = 11\ mL.}$

22) Avant l'équivalence :

→ $[Br^-] \simeq cte$, $[Na^+] \simeq cte$

→ $[HO^-]$ diminue

→ $[H_3O^+] \simeq 0$
→ $[Cl^-]$ augmente.
Or, d'après les données, on a :

$$\lambda_{Cl^-} < \lambda_{HO^-},$$

donc la conductivité totale de la solution diminue.

23) On écrit alors le tableau d'avancement :

	$H_3O^+_{(aq)}$ +	$HO^-_{(aq)}$ =	$2H_2O_{(l)}$
E. initial	0	$n^0_{HO^-}$	—
E. intermédiaire	$Ca \cdot V - \xi$	$n^0_{HO^-} - \xi$	—
E. final	0	$n^0_{HO^-} - CaV$	—

On a alors :

$$\sigma = \lambda_{Br^-} \cdot [Br^-] + \lambda_{Na^+} [Na^+] + \lambda_{HO^-} [HO^-] + \lambda_{Cl^-} [Cl^-].$$

$$\boxed{\sigma = \lambda_{Br^-} \cdot \frac{n^0_{Br^-}}{V_S + V} + \lambda_{Na^+} \frac{n^0_{Na^+}}{V_S + V} + \lambda_{HO^-} \frac{n^0_{HO^-} - CaV}{V_S + V} + \lambda_{Cl^-} \frac{CaV}{V_S + V}}$$

Il faut faire attention aux ions spectateurs et au fait que $V << V_S$, on peut alors simplifier l'expression :

$$\sigma = \frac{1}{V_S}\left(\lambda_{Br^-} n^0_{Br^-} + \lambda_{Na^+} n^0_{Na^+} + \lambda_{HO^-} n^0_{HO^-} + CaV(\lambda_{Cl^-} - \lambda_{HO^-})\right),$$

or, $\lambda_{Cl^-} - \lambda_{HO^-} < 0$, on a alors l'équation d'une droite de pente négative. Ici,

$n^0_{Br^-}$, $n^0_{HO^-}$ sont inconnues, mais on pourrait déterminer $n^0_{Na^+}$.

24) Après l'équivalence, on a :

→ $[Br^-] \simeq cte$, $[Na^+] \simeq cte$,

→ $[HO^-] \simeq 0$

→ $[H_3O^+]$ augmente, $[Cl^-]$ augmente,

donc σ, la conductivité augmente.

25) On a : $n^0_{HO^-} = C_a V_{eq}$,

$$\boxed{C^0_{HO^-} = \frac{C_a V_{eq}}{V_S} = 0{,}83 \text{ mol}\cdot L^{-1}}$$

26) On a :

$\Delta V_S = 0{,}1$ mL, $\Delta C_a = 0{,}02$ mol$\cdot L^{-1}$

et on va prendre, pour l'incertitude sur la lecture du graphique :

$\delta V_{eq} = \frac{0{,}3}{\sqrt{3}} = 0{,}2$ mL, $\Delta V_{eq} = 2 \cdot \delta V_{eq} = 0{,}3$ mL.

et la formule de propagation des incertitudes est :

$$\Delta C^0_{HO^-} = C_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta V_S}{V_S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_a}{C_a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{eq}}{V_{eq}}\right)^2}$$

$$\boxed{\Delta C^0_{HO^-} = 0{,}04 \text{ mol}\cdot L^{-1}}$$

On réécrit alors le résultat :

$$C^0_{HO^-} = 0{,}83 \pm 0{,}04 \text{ mol}\cdot L^{-1}$$

27/ On en déduit que le liquide du réservoir a été contaminé, c'est un mélange aqueux d'ions :

→ Br^- à la concentration $0{,}18\ mol.L^{-1}$

→ Na^+ à la concentration $1{,}0\ mol.L^{-1}$.

→ HO^- à la concentration $0{,}83\ mol.L^{-1}$.

Dans les 100 litres, 17,5 mol de bromure d'hydrogène ont été dissout.

Exercice 3 : Propagation d'une onde

---

1) On a, pour l'Homme, l'intervalle de fréquence audible :

$$\boxed{20 - 20000\ Hz},$$

soit, pour une vitesse d'une onde sonore de l'ordre de $340\ m.s^{-1}$, un intervalle en longueur d'onde :

$$\boxed{0{,}017 - 17\ m}$$

2/3) cf. dernière page du pdf.

2) L'onde se propage à $c = 3{,}4\ m.s^{-1}$, elle parcourt 8,5 m en 2,5 s, on a alors :

→ une forme de l'onde non modifiée

→ le front de l'onde se trouve à la côte $8,5 + 8 = 16,5$ m

→ la fin du phénomène ondulatoire à $8,5 + 2 = 10,5$ m

3) Pour une bouée placée à 5 m du point de référence, on a :

→ à $t = 0$ s, $y = -15$ cm.

→ $y = 0$ cm (début du phénomène ondulatoire) à $t = \frac{d}{c} = -\frac{3}{3,4} = -0,88$ s.

→ $y = +20$ cm à $t = \frac{d}{c} = \frac{2}{3,4} = +0,59$ s

→ $y = 0$ cm (fin du phénomène) à $t = \frac{d}{c} = \frac{3}{3,4} = +0,88$ s.

4) Une onde se propageant dans le sens des x décroissant peut se mettre sous la forme d'une fonction de variable $x - ct$ ou $t - \frac{x}{c}$.

5) Les grandeurs pertinentes sont ici :

→ c, la vitesse des vagues ($m.s^{-1}$)

→ ℓ, la profondeur de l'eau (m)

→ g, le champ de pesanteur ($m.s^{-2}$).

On suppose que :

$$c = k\, l^{\alpha} g^{\beta}, \quad k \in \mathbb{R}, [k] = 1,$$

alors $[c] = L \cdot T^{-1}$

et $[c] = [l^{\alpha}] \cdot [g^{\beta}] = L^{\alpha+\beta}\, T^{-2\beta}$

donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -2\beta = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$,

alors $\boxed{c = k\sqrt{lg}}$.

6) On suppose que $k = 1$, alors :

$$\boxed{l = \frac{c^2}{g} = 1{,}2\ m}$$

7) Ici, on raisonne avec les unités pour plus de praticité :

-> le produit $\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$ s'exprime en $s^2 \cdot m^{-2}$,

-> alors c est en $m \cdot s^{-1}$, c'est OK.

8) On trouve $l = a \cdot t + b$,

avec :

-> $a = c$, la célérité de l'onde dans le milieu,

-> b, l'ordonnée à l'origine.

On obtient : $\begin{cases} a = \boxed{c = 1{,}78 \cdot 10^{8}\ m \cdot s^{-1}} \\ b = 22\ m \\ r^2 = 0{,}9996. \end{cases}$

On a effectivement une droite, cela justifie le fait qu'on soit en raison de faire une régression linéaire.

En revanche, b n'est pas proche de 0. Cela veut dire qu'une erreur systématique : le câble de 100 m fait, dans la pratique, 78 m.

9) On a : $\boxed{\varepsilon_r = \dfrac{1}{c^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0} = 2{,}8.}$

On peut alors conclure qu'on a, dans le câble, un diélectrique polymère soit du PET (c'est le cas généralement) ou du PMMA.

Un expérimentateur cherche à déterminer la vitesse d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial en émettant des impulsions à l'aide d'un GBF (générateur basses fréquences). Il les détecte à l'entrée et à la sortie du câble respectivement sur les voies 1 et 2 de l'oscilloscope. Il peut alors, connaissant la longueur du câble et le temps de propagation de l'onde, remonter à la vitesse de l'onde dans le milieu. Il commence avec un câble de 80 m, et ajoute successivement des sections de 10 m. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Mesure	1	2	3	4	5
d (cm)	80	95	110	125	140
t (ns)	5,51	6,35	7,23	8,02	8,91

8. Déterminer la vitesse de l'onde dans le milieu en unités SI et interpréter soigneusement le résultat.

9. Déterminer la permittivité relative du milieu présent dans le câble. Comparer ce résultat aux données pour déterminer le matériau diélectrique se trouvant dans ce type de câble.

Données : permittivité relative :

- acide tartrique : 4,3 ;
- dioxyde d'uranium : 24 ;
- verre Corning 0080 : 6,75 ;
- silicium : 11,9 ;
- polyéthylène : 2,3 ;
- polyméthacrylate de méthyle : 3,12 ;

Annexe, questions 2 et 3