TD 18 - Arithmétique

Ex 1 :

1) Soit d un diviseur commun de $n+1$ et $2n+1$

On a $d \mid n+1$ et $d \mid 2n+1$

donc d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $n+1$ et $2n+1$

donc $d \mid 2(n+1) - (2n+1)$

donc $d \mid 2n+2-2n-1$

donc $d \mid 1$

donc $d = 1$

CCl : $PGCD(2n+1, n+1) = 1$

Donc $2n+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux

2ème méthode :

Soit $u = 2$ et $v = -1$

On a $2(n+1) - (2n+1) = 1$

donc d'après le th de Bezout : $(n+1) \wedge (2n+1)$

2) On a : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n+1)!\,(n+1)}{(2n+1)(n+1)\,n! \times n!} = \frac{(2n+1)!\,(n+1)}{(2n+1)\,(n+1)!\,n!}$

$$= \frac{(2n+1)!}{(2n+1)} \times \frac{(n+1)}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \binom{2n+1}{n+1} \frac{n+1}{2n+1}$$

d'où $(2n+1)\binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}(n+1)$

Comme $(n+1) \wedge (2n+1) = 1$, on a $n+1 \mid \binom{2n}{n}$ ⊕ Gauss

Ex 2 :

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tq $(*) \begin{cases} a \wedge b = 2 \\ a \vee b = 80 \end{cases}$

→ On pose $a = 2a'$ et $b = 2b'$ avec $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$

On a alors : $(*) : \begin{cases} a = 2a', \quad b = 2b' \\ a' \wedge b' = 1 \\ a \vee b = (2a') \vee (2b') = 2(a' \vee b') = 2|a'b'| = 80 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a', \quad b = 2b' \\ a' \wedge b' = 1 \\ |a'b'| = 40 = 2^3 \times 5 \end{cases}$

$a' = 2^{\alpha} 5^{\beta}$, $\alpha \in [\![0;3]\!]$, $\beta \in [\![0;1]\!]$

Analyse :

Si (a,b) est solution alors $(a,b) \in 2\mathbb{Z}^2$

On peut écrire $a = 2a'$ et $b = b'$

On a : $a \wedge b = (2a') \wedge (2b') = 2(a' \wedge b') = 2$

donc $a' \wedge b' = 1$

$a \vee b = (2a') \vee (2b') = 80$
$\quad = 2(a' \vee b')$

donc $a' \vee b' = 40$

$a' \vee b' = |a'b'| = 40$

$40 = 2^3 \times 5 = a'b'$

Soit $|a'| = 2^3 \times 5$ et $|b'| = 1$
$|a'| = 2^3$ et $|b'| = 5$
$|a'| = 5$ et $|b'| = 2^3$
$|a'| = 1$ et $|b'| = 5 \times 2^3$

Donc $S_{\mathbb{N}} \subset \{(80,2); (16,10); (10,16); (2,80)\}$

↳ $\mathbb{Z}$ ajouter les −

Synthèse : Vérifier les couples

Ex 3:

1) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$ tq $2 \leqslant k \leqslant n$

Mq $n!+k$ n'est pas premier

$n!+k = k(1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n)$

Donc $k \mid (n!+k)$ et $k < n!+k$

Donc $n!+k$ n'est pas premier car il a au moins 3 diviseurs : 1, $n!+k$ et k = possède un diviseur stricte

2) D'après ①, si $n \geqslant 2$, $n!+k$ n'est pas premier avec $2 \leqslant k \leqslant n$

Ainsi $\underbrace{n!+2, n!+3, \dots, n!+n}_{n-1 \text{ entiers consécutifs}}$ ne sont pas premiers.

Ainsi $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+n+1$ sont $n+1$ entiers consécutifs.

Ex 4:

1) Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

Mq $a \wedge b = 1 \iff (a+b) \wedge (ab) = 1$

$\rightarrow$ Supp $a \wedge b = 1$

Mq $(a+b) \wedge a = 1$ et $(a+b) \wedge b = 1$

D'après le th de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq $au+bv=1$

$au + av - av + bv = 1$

$a(u-v) + v(a+b) = 1$

Donc $a \wedge (a+b) = 1$

Donc a et $a+b$ sont premiers entre eux.

De même $(a+b) \wedge b = 1$

$\boxed{\text{Donc } (a+b) \wedge (ab) = 1}$

$\rightarrow$ Supp $(a+b) \wedge (ab) = 1$

Mq $a \wedge b = 1$

D'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq :

$$(a+b)u + ab\,v = 1$$

On a alors : $au + bu + abv = 1$

$$a(u + bv) + bu = 1$$

On pose $v' = u + bv$ et $u+bv \in \mathbb{Z}$

Donc $a \wedge b = 1$

$\boxed{\text{ou:}}$ Supp $(a+b) \wedge (ab) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} (a \wedge b) \mid (a+b) \\ (a \wedge b) \mid (ab) \end{array}\right\} a \wedge b \mid \underbrace{(a+b) \wedge ab}_{=1}$$

donc $a \wedge b = 1$

$\rightarrow$ Supp $a \wedge b = 1$

Soit $p \in \mathcal{P}$ tq $p \mid a+b$ et $p \mid ab$

Comme $p \in \mathcal{P}$, $p \mid a$ ou $p \mid b$

Par symétrie on supp $p \mid a$

Comme $p \mid (a+b)$, $p \mid b$

Donc $p \mid a \wedge b$ <u>Absurde</u>

Ainsi $a+b$ et ab n'ont pas de diviseur commun premier

puis $(a+b) \wedge (ab) = 1$

2) D'après 1 si $a \wedge b = 1$ alors $(a+b) \wedge (ab) = 1$

càd $(a+b) \wedge (a \vee b) = 1$

Dans le cas général : $\left(\frac{a}{a \wedge b} + \frac{b}{a \wedge b}\right) \wedge \left(\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}\right) = 1$

càd $\left(\frac{a+b}{a \wedge b}\right) \wedge \left(\frac{a \vee b}{a \wedge b}\right) = 1$

càd $\frac{(a+b) \wedge (a \vee b)}{a \wedge b} = 1$

càd $(a+b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$

3). $n \vee (n+1) = n(n+1)$ car $n \wedge (n+1) = 1$

. $(n(n+1)) \vee (n+2)$?

$n(n+1) \wedge (n+2)$?

$(n+2) \wedge (n+1) = n(n+2)$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $n(n+1) \vee (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1)) \wedge (n+2)}$

$$= \begin{cases} \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n(n+1)(n+2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex: Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$

Supp $a \wedge b = 1$ Quel est le lien entre $a \wedge c$ et $a \wedge bc$?

$\left.\begin{array}{l}(a \wedge c) / a \\ (a \wedge c) / bc\end{array}\right\}$ donc $(a \wedge c) / (a \wedge (bc))$

$(a \wedge (bc)) / a$

$(a \wedge (bc)) / bc$

$\boxed{\left.\begin{array}{l}a \wedge b = 1 \\ a' / a\end{array}\right\} \Rightarrow a' \wedge b = 1}$

donc $(a \wedge (bc)) \wedge b = 1$

D'après le lemme de Gauss, $(a \wedge (bc)) / c$

puis $(a \wedge (bc)) / (a \wedge c)$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $(2n+1) \wedge (n^3+n) = (2n+1) \wedge (n(n^2+1))$ Or $n \wedge (2n+1) = 1$

$$\begin{aligned}
&= (2n+1) \wedge (n^2+1) \\
&= (2n+1) \wedge (n^2 - 2n) \\
&= (2n+1) \wedge (n(n-2)) \\
&= (2n+1) \wedge (n-2) \\
&= 5 \wedge (n-2)
\end{aligned}$$

$a \wedge b = a \wedge (b+a)$

$= a \wedge (a-b)$

$$= \begin{cases} 5 & \text{si } n \equiv 2 [5] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{ n \in \mathbb{Z},\ n \not\equiv 2 [5] \}}$$