Devoir du 18/12/2020

Exercice 1 : On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue au sens de Cesàro** en $a \in \mathbb{R}$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\right) \Longrightarrow \left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\right)$$

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ si f est continue au sens de Cesàro en tout $a \in \mathbb{R}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions continues au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers $a \in \mathbb{R}$.
   Prouver que la suite $\left(y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a.
   On dit alors que x **converge en moyenne** vers a.
   (b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et u la suite définie par $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = x$ et $u_{2p+1} = y$.
   Prouver que la suite u converge en moyenne vers $\dfrac{x+y}{2}$.
   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle continue au sens de Cesàro en a ? La réponse sera justifiée.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.
   (a) On pose $g = f - f(0)$. Prouver que f est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$ équivaut à g est continue au sens de Cesàro sur $\mathbb{R}$.
   On suppose donc désormais que $f(0) = 0$.
   (b) Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$
   (c) En déduire que f est additive, càd que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f(x+y) = f(x)+f(y)$
   (d) Prouver que f est $\mathbb{Q}$-linéaire, càd $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \forall r \in \mathbb{Q}$, $\quad f(rx) = rf(x)$.
   (e) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = xf(1)$.
3. Conclure.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la suite $\left(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite u est convergente.

1. On dit qu'un réel a est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
   (a) Montrer qu'une suite admettant au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est une suite divergente.
   (b) Donner un exemple d'une suite n'admettant pas de valeur d'adhérence et un exemple de suite divergente admettant exactement une valeur d'adhérence.
2. Prouver que u admet une valeur d'adhérence, que l'on notera a.
3. Prouver qu'alors $2(\ell - a)$ est encore une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On considère la suite définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2(l - a_n)$.
   Prouver que pour tout entier n, a_n est une valeur d'adhérence de la suite u.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.
6. Prouver que u admet $\dfrac{2\ell}{3}$ pour unique valeur d'adhérence.
7. Prouver qu'une suite bornée converge si, et seulement si, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.
8. Conclure.

Exercice 3 :

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\ln x + nx = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ a une unique solution que l'on notera u_n.
2. Prouver que la suite u est monotone.
3. Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.
4. On considère la suite $v = (nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Prouver que la suite v tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer un équivalent de $\ln v_n$
   (d) Prouver que $u_n - \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n}$.
   On pourra utiliser le fait que $u_n = -\dfrac{\ln(u_n)}{n}$.
   (e) En déduire un équivalent de $u_n - \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln(\ln n)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 :

1. Déterminer la limite un équivalent et la limite en 0 de $\dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x}}$ et $\ln(1+e^x)-\ln(2)$
2. Déterminer la limite en 1/2 de $(2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$.
3. Déterminer la limite en 1 de $\dfrac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)\tan(2\pi x)}$.