Numéro de place 1 0 9 5 6 0

Numéro d'inscription 1 4 6 6 5

Signature

Nom XHOFFRAY

Prénom NIZS

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Mathématiques 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 01 / 04

I. Etude de l'opérateur différence finie

1. soit $(P,Q) \in K[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$:

$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X)$

$= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) = \boxed{\lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q)}$.

Donc Δ est une application linéaire de $K[X]$ et si $P \in K[X]$

$\Delta(P) = P_0(X+1) - P(X)$, or $K[X]$ est un espace vectoriel donc $\boxed{\Delta(P) \in K[X]}$

comme ~~différence~~ et composée de polynômes de $K[X]$.

$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } K[X]}$

2. soit $P \in K[X]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $\deg(P) = d$

$\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k\left[(X+1)^k - X^k\right]$

$= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k\right] = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$

donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ (pour $d=0$ soit les polynômes constants on trouve $\Delta(P)=0$ si on considère $\deg(0) = -1$ alors c'est bon).

3. soit $P \in K_d[X]$ $d \in \mathbb{N}^*$, on vient de montrer que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ et dans la question 1 que $\Delta(P) \in K[X]$ donc $\boxed{\forall P \in K_d[X]\ \Delta(P) \in K_d[X]}$

et Δ~~(P)~~ endomorphisme de $K[X]$ qui laisse stable $K_d[X]$ donc Δ induit un endomorphisme sur $K_d[X]$

4. On a déjà montré que si $P \in K[X]$ $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ donc $\Delta(P) \in K_{d-1}[X]$ donc $\mathrm{Im}(\Delta_d) \subset K_{d-1}[X]$

et si $P \in \mathrm{Ker}(\Delta_d)$ alors $\Delta(P) = 0 \Leftrightarrow P(X+1) = P(X) \Leftrightarrow P \in K_0[X]$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta_d) = K_0[X]}$ c'est à dire $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_d)) = 1$ et

d'après le théorème du rang ~~dim (Δ(Δd))~~ $\mathrm{rg}(\Delta_d) = \dim(K_d[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta_d))$

donc $\mathrm{rg}(\Delta_d) = d = \dim(K_{d-1}[X])$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_d) = K_{d-1}[X]}$

5. $\forall d \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{Ker}(\Delta_d) = K_0[X]$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = K_0[X]}$

De même $\forall d \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{Im}(\Delta_d) = K_{d-1}[X]$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = K[X]}$

Ainsi dans le cas où h est polynomiale il existe $P \in K[X]$ tel que $\forall x \in K$ $h(x) = P(x)$ mais alors puisque Δ est surjective il existe un antécédent de P par Δ noté Q et alors E_h possède au moins une solution polynomiale q telle que $\forall x \in K$ $q(x) = Q(x)$.

6. On cherche $P \in K_2[X]$ tel que $\Delta(P)(x) = x$ $\forall x \in K$

si on pose $P(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(X^2 - X + 1)}$ alors $\forall x \in K$

$\Delta(P)(x) = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x = h(x)$.

Etant donné que $\forall P \in K[X]$ $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ et que ici h est une fonction polynomiale de degré 1 alors les solutions de E_h ~~sont au plus de degré 2 et mais elles~~ sont exactement de degré 2. On cherche $(a,b,c) \in K$ tel que $P(X) = aX^2 + bX + c$ soit solution de E_h : soit $x \in K$ $a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = x$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ donc l'ensemble des solutions de E_h est

$\boxed{S = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c \mid c \in K \right\}}$

7. Étant donné que $\forall P \in K_d[X]$ $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ alors $\deg(\Delta_d^{d+1}(P)) = -1$ donc $\forall P \in K_d[X]$ $\boxed{\Delta_d^{d+1}(P) = 0}$ ainsi Δ_d est nilpotent d'indice $d+1$.
Donc $sp(\Delta_d) = \{0\}$ mais $\Delta_d \neq 0$ donc $\boxed{\Delta_d \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

II. Fonctions entières

A. Généralités

8. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, il existe $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Ainsi si on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = \lambda a_n + \mu b_n$ alors par unicité du développement en série entière $\forall z \in \mathbb{C}$ $(\lambda f + \mu g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ donc $\lambda f + \mu g$ est développable en série entière et $R(\lambda f + \mu g) \geq \min(R(\lambda f), R(\mu g))$, or f et g ont tous deux un rayon de convergence infini donc $\lambda f + \mu g$ également et $\boxed{\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}}$

Maintenant si on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ alors puisque f et g possèdent des rayons de convergence infini $\forall z \in \mathbb{C}$ $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ converge absolument donc par produit de Cauchy : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = f(z)g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
donc fg est développable en série entière. Et $R(fg) \geq \min(R(f), R(g))$ donc comme précédemment $\boxed{fg \in \mathcal{E}}$.

9. Soit $k \in \mathbb{Z}$: $\int_0^1 f(\omega(t))\,\omega(t)^{-k}\,dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nt} e^{-2i\pi kt}\,dt$

or $f \in \mathcal{E}$ donc rayon de convergence infini et convergence uniforme sur $D(0,1)$ ainsi par interversion série-intégrale : $\int_0^1 f(\omega(t))\,\omega(t)^{-k}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\,dt$

or soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq k$ $\int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\,dt = \left[\frac{e^{2i\pi t(n-k)}}{2i\pi(n-k)}\right]_0^1 = 0$

si $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$ alors $\int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\,dt = \int_0^1 dt = 1$.

donc si $k \notin \mathbb{N}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\,dt = 0$ par unicité du développement en ~~série~~ série entière. si $k \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)}\,dt = a_k$

donc $\boxed{\int_0^1 f(\omega(t))\,\omega(t)^{-k}\,dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

B. Une intégrale

10. soit $t \in [0,1]$ $|\omega(t)| = 1 \neq 0$ donc $\forall t \in [0,1]$ $\omega(t) \neq 0$ ainsi $\forall t \in [0,1]$ $e^{\omega(t)} - 1 \neq 0$.

De plus $\forall p \in \mathbb{Z}$ $t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient et composée de fonctions qui le sont. Donc, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ I_p est bien définie

11. si on pose $\boxed{\beta : \zeta \in U \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+2)!}}$ alors d'après le lemme de d'Alembert puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right| = \frac{1}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $R(\beta) = +\infty$ et β développable en série entière donc $\beta \in \mathcal{C}$.

De plus si $\zeta \in U$: $\frac{e^\zeta - 1 - \zeta}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+2)!} = \beta(\zeta)$

donc $e^\zeta - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta))$, on a donc trouvé une telle fonction β.

on a $\forall \zeta \in U$ $|\beta(\zeta)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\zeta|^n}{n!}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $n! \leq (n+2)!$ donc $|\beta(\zeta)| \leq e$

~~ainsi on pose $\beta' : \zeta \in U \mapsto \frac{1}{e+1}\beta(\zeta)$ et $0 < |\beta'(\zeta)| < 1$ et $\beta' \in \mathcal{C}$~~ (pas la bonne majoration)

12. soit $\zeta \in U$ et $p \in \mathbb{Z}$: $\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \frac{\zeta^p}{\zeta} \times \frac{1}{1 + \zeta\beta(\zeta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^{p-1}(-1)^n \zeta^n \beta(\zeta)^n$

$= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta^{n+p-1} \beta(\zeta)}$ et ce car $|\zeta\beta(\zeta)| \leq C \in]0,1[$

Numéro de place	1 0 9 5 6 0
Numéro d'inscription	1 4 6 6 5
Nom	XHOFFRAY
Prénom	NILS

Signature

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve Mathématiques 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 02 / 04

II. Fonctions entières

B Une intégrale

13. $\forall n \in$ ~~N~~ d'après la question 8 alors $\beta^n \in \mathcal{E}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \, \omega(t)^n \, dt = 0$ car $-n \notin \mathbb{N}$ (question 9)

de plus soit $p \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \, \omega(t)^{n+p} \, dt = 0$

car $-(n+p) \notin \mathbb{N}$ (question 9)

Mais alors $I_0 = \int_0^1 \frac{\omega(t)^0}{e^{\omega(t)}-1} dt$ d'après la question 12 étant donné que

$\forall t \in [0,1]$ $\omega(t) \in U$ $I_0 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \omega(t)^n \beta(\omega(t))^n dt$

or $\sum (-1)^n \omega(t)^n \beta(\omega(t))^n$ converge ~~absolument sur~~ uniformément sur $D(0,1)$

donc par interversion série-intégrale $I_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \omega(t)^n \beta(\omega(t))^n dt$

d'après ce qui vient d'être dit $\boxed{I_0 = (-1)^0 \int_0^1 \omega(t)^0 \beta(\omega(t))^0 dt = 1}$

et si $p \in \mathbb{N}^*$ $I_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \omega(t)^{n+p} \beta(\omega(t))^n dt$ (mêmes arguments)

et d'après ce que l'on vient de dire $\boxed{I_p = 0}$ par unicité du développement en série entière. Ainsi $I_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

III. Polynômes de Bernoulli

A. Lien avec l'équation (E_h)

14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)}-1)\,\omega(t)^{n-1}}\,dt = n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \omega(t)^k}{k!\,\omega(t)^{n-1}} \times \frac{dt}{e^{\omega(t)}-1}$$

$$= n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \times \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}\,dt \quad \text{or :}$$

si $k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_0^1 \left| \frac{z^k}{k!} \times \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \right| dt = \frac{|z|^k}{k!} \int_0^1 \left| \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \right| dt$

$= \displaystyle\frac{|z|^k}{k!} \int_0^1 \frac{1}{|e^{\omega(t)}-1|}\,dt = \frac{|z|^k}{k!} I$ avec I bien définie car $t \mapsto \dfrac{1}{e^{\omega(t)}-1}$

est continue sur $[0,1]$.

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \right| dt = I \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = I e^{|z|}$.

$\displaystyle\sum_{k\geq 0} \int_0^1 \left| \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \right| dt$ converge donc par interversion série-intégrale :

$$\boxed{B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}\,dt = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}}$$

or $\forall k > n$ $I_{k-n} = 0$ donc $\boxed{B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}}$

On pose $B_n(X) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} I_{k-n}$, $\boxed{\mathrm{dom}(B_n) = n! \frac{I_{n-n}}{n!} = 1}$

et $\boxed{\deg(B_n) = n}$ donc B_n unitaire de degré n.

15. soit $n \in \mathbb{N}^*$ $B_n'(X) = n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k X^{k-1}}{k!} I_{k-n}$

$= n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} I_{k+1-n} = n(n-1)! \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} I_{k-(n-1)}$.

$= n B_{n-1}(X)$. Donc $\boxed{B_n' = n B_{n-1}}$

16. soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$;

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)w(t)} - e^{zw(t)}}{(e^{w(t)}-1)\, w(t)^{n-1}} dt = n! \int_0^1 \frac{e^{zw(t)}}{w(t)^{n-1}} dt$$

$= n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} w(t)^{k-n+1} dt$ or $\int_0^1 \left| \frac{z^k}{k!} w(t)^{k-n+1} \right| dt = \frac{|z|^k}{k!}$

et $\sum_{k\geq 0} \frac{|z|^k}{k!}$ converge donc par interversion série-intégrale :

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n! \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 e^{2i\pi t(k-n+1)} dt$$

et de manière identique à la question 9 : $\int_0^1 e^{2i\pi t(k-n+1)} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\boxed{B_n(z+1) - B_n(z) = n! \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = n z^{n-1}}$

17. si h est une fonction polynomiale de degré d tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ $h(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$

dans on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

donc $a_n z^n = \frac{a_n}{n+1} \left(B_{n+1}(z+1) - B_{n+1}(z) \right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On pose donc $\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(X)}$ donc P est une combinaison linéaire

de polynômes donc c'est un polynôme et par construction $\forall z \in \mathbb{C}$:

$P(z+1) - P(z) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} \left(B_{k+1}(z+1) - B_{k+1}(z) \right) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k = h(z)$

donc P solution de (E_h).

B. Unicité

18. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telles que :

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad Q_n' = n Q_{n-1} \\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad \int_0^1 Q_n(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

Tout d'abord on a $Q_0 = B_0 = 1$.

Maintenant supposons trouvé $n\in\mathbb{N}$ tel que $B_n = Q_n$.

ainsi on a $Q_{n+1}' = (n+1)Q_n = (n+1)B_n = B_{n+1}'$ et donc $Q_{n+1} = B_{n+1} + C$ $C\in\mathbb{C}$

mais $\int_0^1 Q_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$ donc $C = 0$ et

$Q_{n+1} = B_{n+1}$.

On a ainsi montré que $\forall n\in\mathbb{N}$ $Q_n = B_n$ donc $\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est unique.}}$

19. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, tout d'abord on a $\boxed{H_0 = (-1)^0 B_0(1-t) = 1} = B_0$

puis ~~$H_n' \in \mathbb{C}$~~ $H_n'(x) = (-1)^n (1-x)' B_n'(1-x) = (-1)^n(-1)\, n B_{n-1}(1-x)$

$= n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x) = \boxed{n H_{n-1}(x)}$

et enfin $\int_0^1 H_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,dt$ on pose $u = 1-t$

$\int_0^1 H_n(t)\,dt = (-1)^n \int_1^0 B_n(u)(-du) = \boxed{(-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,du = 0}$

$(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions énumérées à la question précédente donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ H_n = B_n}$

C. Une application analytique

20. $\forall x\neq 0$ on pose $\boxed{\varphi' : x\mapsto \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}}$ $\in C^0(\mathbb{R}_+)$

mais $\dfrac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{\frac{h}{e^h-1} - 1}{h} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{h - e^h + 1}{(e^h-1)h} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{\frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h^2} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2} + o(1)$

donc $\boxed{\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}}$ mais alors on peut itérer ce procédé pour toutes les

dérivées de φ et donc φ est prolongeable ~~en~~ de classe C^∞ ~~sur~~ $\mathbb{R}$.

$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Ainsi $x\mapsto u(x,t)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions C^∞ et

Numéro de place 1 0 9 8 6 0

Numéro d'inscription 1 4 6 6 8

Signature

Nom XHOFFRAY

Prénom NILS

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve Mathématiques 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 03 / 04

III. Polynômes de Bernoulli

C Une application analytique

80. $t \mapsto u(x,t)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, les applications coordonnées de u sont de classe C^∞ donc $\boxed{u \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

81. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = x\,\varphi(x)e^{tx} = x\,u(x,t)}$ et ~~$n \in \mathbb{N}^*$~~ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{tx}\left(\varphi'(x) + t\varphi(x)\right)\right)$$

$$= x e^{tx}\varphi'(x) + e^{tx}\varphi(x)(tx+1) = x e^{tx}\left(\varphi'(x) + t\varphi(x)\right) + e^{tx}\varphi(x)$$

$= x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 1 \times \frac{\partial^0 u}{\partial x^0}(x,t)$ donc vrai pour $n = 1$.

Maintenant supposons trouvé $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)$

ainsi $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t)\right) = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\right)$ or u est de classe C^∞ donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ de classe C^2 et donc d'après le théorème de Schwarz :

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\right)\right)$ par hypothèse de récurrence :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)\right) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)$$

$$+ x\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t) + n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(x,t) + (n+1)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)$$

et vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\right) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)}$

22. Tout d'abord $A_0(t) = u(0,t) = \psi(0)e^0 = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{A_0 = 1}$

puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A_n'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)\right) = n \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(0,t) = n A_{n-1}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

d'après la question précédente donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad A_n'(t) = nA_{n-1}(t)}$

Tout d'abord on a $A_1(1) - A_1(0) = 0$ (*) supposons trouvé $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$A_n(1) = A_n(0)$ et $\int_0^1 A_n(t)\,dt = 0$ donc

$A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = \int_0^1 A_{n+1}'(t)\,dt = \int_0^1 (n+1) A_n(t)\,dt = 0$

et $\int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(0,t)\,dt = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,1) - \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) = A_n(1) - A_n(0) = 0$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^1 A_n(t)\,dt = 0}$ $\left(* \int_0^1 A_n(t)\,dt = u(0,1) - u(0,0) = 0\right)$

IV. Solution entière de l'équation (E_h)

A. Une inégalité de contrôle

24. $\forall p \in \mathbb{N}$ $|z_p| = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} = (2p+1)\pi \Rightarrow b_p = \sqrt{(2p+1)^2\pi^2 - a_p^2}$

donc $e^{a_p + i\sqrt{(2p+1)^2\pi^2 - a_p^2}} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1 \Rightarrow a_p + ib_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 2ik\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{a_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0}$ et $|a_p| = |z_p - b_p| \geq \left||z_p| - |b_p|\right| \geq 0$ donc comme

$a_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ par encadrement $\boxed{|z_p| - |b_p| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0}$.

B. Une solution à (E_h)

86. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$Q_n(z) = n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \gamma_n(t)^k}{k!} \times \frac{dt}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n(t)^{n-1}}$$

or
$$\int_0^1 \left| \frac{z^k \gamma_n(t)^k}{k!} \times \frac{1}{\gamma_n(t)^{n-1}(e^{\gamma_n(t)}-1)} \right| dt = \int_0^1 \frac{|z|^k}{k!} \left| \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)}-1} \right| dt$$

d'après la partie A il existe $c > 0$ tel que, étant donné que $|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$,
$|e^{\gamma_n(t)} - 1| \geq c$ donc $\frac{1}{|e^{\gamma_n(t)}-1|} \leq c$ et donc

$$\int_0^1 \left| \frac{z^k \gamma_n(t)^{k-n+1}}{k!(e^{\gamma_n(t)}-1)} \right| dt \leq c\frac{|z|^k}{k!}\int_0^1 |\gamma_n(t)^{k-n+1}| dt = \frac{|z|^k}{k!}(2n+1)^{k-n+1}\pi^{k-n+1}$$

or $\frac{1}{(2n+1)^{n-1}\pi^{n-1}}\sum_{k\geq 0} \frac{(|z|(2n+1)\pi)^k}{k!}$ converge donc par interversion série intégrale :

$$\boxed{Q_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)}-1} dt} = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}(2n+1)^{k-n+1}\pi^{k-n+1} \int_0^1 \frac{e^{2i\pi t(k-n+1)}}{e^{\gamma_n(t)}-1} dt$$

or
$$\left| \int_0^1 \frac{e^{2i\pi k t(k-n+1)}}{e^{\gamma_n(t)}-1} dt \right| \leq \int_0^1 c\, dt = c$$

donc $|Q_n(z)| \leq n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}(2n+1)^{k-n+1}\pi^{k-n+1} c$ or

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{(2n+1)^{k+1}\pi^{k+1} c}{(k+1)!} \times \frac{k!}{(2n+1)^k \pi^k c} \right| = \frac{(2n+1)\pi}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

donc la série entière $n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}(2n+1)^{k-n+1}\pi^{k-n+1} c$ a un rayon de convergence

infini et $R(Q_n)$ supérieur ou égal au rayon de cette série donc $\boxed{R(Q_n) = +\infty}$

ainsi Q_n est développable en série entière et $R(Q_n) = +\infty$ donc $Q_n \in \mathcal{E}$

et vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ Q_n \in \mathcal{E}}$

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ $\quad Q_n(z+1) - Q_n(z) = n! \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}\left(e^{\gamma_n(t)}-1\right)}{\left(e^{\gamma_n(t)}-1\right)\gamma_n(t)^{n-1}}\,dt$

$$= n! \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k \gamma_n(t)^k}{k!\,\gamma_n(t)^{n-1}}\,dt$$

or $\displaystyle\int_0^1 \left| \frac{z^k}{k!} \gamma_n(t)^{k-n+1} \right| dt = \frac{|z|^k}{k!} \left((2n+1)\pi\right)^{k-n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{|z|^k}{k!} (2n+1)\pi^{k-n+1}$

converge donc par interversion série - intégrale :

$$Q_n(z+1) - Q_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \gamma_n(t)^{k-n+1}\,dt = n! \sum_{k=0} \frac{z^k}{k!} (2n+1)^{k-n+1} \pi^{k-n+1} \int_0^1 e^{2i\pi t(k-n+1)}\,dt$$

et $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi t(k-n+1)}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ par unicité du développement en série entière on a

donc $\boxed{Q_n(z+1) - Q_n(z) = n! \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} (2n+1)^{n-1-n+1} \pi^{n-1-n+1} = n z^{n-1}}$

Q28. d'après la partie A il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{|e^{\gamma_n(t)}-1|} \leq C$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|Q_n(z)| \leq n!\,C \int_0^1 \left| \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{\gamma_n(t)^{n-1}} \right| dt \leq n!\,C \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k |\gamma_n(t)|^k}{k!\,|\gamma_n(t)^{n-1}|}\,dt$$

on a déjà montré que l'interversion était possible à la question précédente donc

$$|Q_n(z)| \leq n!\,C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} (2n+1)^{k-n+1} \pi^{k-n+1} \int_0^1 \left| e^{2i\pi t(k-n+1)} \right| dt$$

$$= \frac{n!\,C}{(2n+1)^{n-1}\pi^{n-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k (2n+1)^k \pi^k}{k!} \leq \frac{n!\,C}{(2n+1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(|z|(2n+1)\pi\right)^k}{k!}$$

$\leq C e^{|z|(2n+1)\pi} \leq \boxed{C e^{2n\pi|z|}}$ car $\cancel{n! < (2n+1)^{n-1}}$ $n! < n^{n-1}$

donc $n! < (2n+1)^{n-1}$.

Numéro de place 109560 | Numéro d'inscription 14665 | Signature

Nom XHOFFRAY | Prénom NILS

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve Mathématiques 2

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille 04/04

IV. Solution entière de l'équation (E_h)

B. Une solution à (E_h)

Q9. si $h \in \mathcal{E}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dès on pose :

$$\boxed{E : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(Q_{k+1}(z) \right)}$$

E est une combinaison linéaire de série entière de $\mathbb{C}$ donc d'après la question 8 $E \in \mathcal{E}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$

$$E(z+1) - E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} \left(Q_{k+1}(z+1) - Q_{k+1}(z) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = h(z)$$

Ne rien écrire dans la partie barrée