Résumé 11 – Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

- φ est une forme bilinéaire :
  Pour tous $x_1, x_2, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
  $$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$
  Pour tous $x, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
  $$\varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$
- φ est symétrique : $\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est définie positive :
  $$\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0_E$$

(E, φ) est alors appelé espace préhilbertien réel.
Si $\dim E < +\infty$, E est qualifié d'espace euclidien.

Exemples fondamentaux d'espaces préhilbertiens réels :

- $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$.
- $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.
- $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(B^\top A)$.

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. On a alors :
$$\forall x, y \in E, \quad |(x|y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$
Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

L'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)} = \|x\|$ est une norme sur E.

Identités remarquables vérifiées par la norme euclidienne :

Pour tous $x, y \in E$,

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$.
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$.
- Identité du parallélogramme :
  $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
- Identité de polarisation :
  $$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

Orthogonalité

→ Familles orthonormales

Soient $x, y \in E$.

Définition

x et y sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres.

Théorème : Pythagore

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff (x|y) = 0$.

Définition : Familles orthogonales et orthonormales

Soit I un ensemble d'indices fini ou infini.

- Une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ de E est dite orthogonale si :
  $$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow (e_i|e_j) = 0.$$
- Elle est dite orthonormale si ses vecteurs sont de plus unitaires.

Cela revient à dire que pour tout $(i, j) \in I^2$, $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Théorème

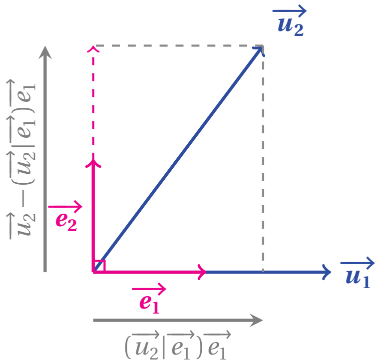
- Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.
- Une famille orthonormale est libre.

Théorème : Décomposition dans une BON

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
$$\forall x \in E,\ x = (x|e_1)e_1 + \cdots + (x|e_n)e_n = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$$

Proposition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On considère $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. On a alors :
$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i) = X^\top Y$$
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = X^\top X$$



Tout espace euclidien admet une base orthonormale, que l'on peut construire à l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On part d'une base $(u_1,\dots,u_n)$ quelconque de E et on construit pas à pas une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ en posant :

$$e'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_k|e_i)e_i \quad \text{puis} \quad e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe alors une famille orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que :

$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$$

→ Orthogonal d'une partie

Définition : Orthogonal

Soit F une partie de E. On appelle orthogonal de F l'ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F \ (x|y) = 0\}$$

$F^\perp$ est un espace vectoriel.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- $u \in F^\perp$ si et seulement si u est orthogonal aux vecteurs d'une base de F.
- Si F est de dimension **finie**, $E = F \oplus F^\perp$.
- Si E est de plus un espace euclidien, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et :

$$\dim F^\perp = \dim(E) - \dim(F)$$

Corollaire : Inégalité de Bessel

Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthonormale de E et $x \in E$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$.
Il y a égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$.

→ Projection orthogonale et distance

Dans toute cette partie, F est supposée de dimension finie. On a $E = F \oplus F^\perp$.

Définition

On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Théorème

On note p la projection orthogonale sur F.

- $p(x)$ est entièrement caractérisé par :

$$p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F^\perp$$

- Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormale de F alors

$$p(x) = (x|e_1)e_1 + \cdots + (x|e_p)e_p$$

Définition

Soit $x \in E$. On appelle distance de x à F le réel

$$d(x,F) = \inf_{u \in F}\|x - u\|$$

Théorème

Soit $x \in E$. $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F.