Intégrales curvilignes et formule de Green-Riemann

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Champ de vecteurs

1.1 Faits de base

❒ Un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
❒ Pour $n = 2$, si F est un champ de vecteurs sur U, pour $(x, y) \in U$ on note $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.
❒ Soit $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on dit que F dérive d'un potentiel s'il existe $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $F = \operatorname{grad} V$ [a]. On dit alors que F est un champ de gradient.

a. Voir section 31.2.2.2 du cours complet page 632.

Exemple Pour $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

$$F(x, y, z) = -\frac{k}{r^3(x, y, z)}\overrightarrow{OM}$$

où $M = (x, y, z)$ et $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On reconnaît ici le champ gravitationnel, et le courageux lecteur saura retrouver l'énergie potentielle dont il est l'opposé du gradient.

Remarque Soit

$$F : \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$. Si F dérive d'un potentiel V, alors V est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $P = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ donc

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

On doit donc avoir $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

1.2 Théorème de Poincaré

Ouvert étoilé

Un ouvert U est dit étoilé s'il existe un $A \in U$ tel que $\forall B \in U$, $[AB] \subset U$.

Tout ouvert convexe est étoilé par rapport à n'importe lequel de ses points [a].

Théorème de Poincaré

Si U est un ouvert étoilé et

$$F : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)) \end{array}$$

est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, alors F est un champ de gradient.

a. En effet, un ouvert est convexe si $\forall A, B \in U$, $[AB] \subset U$.

Remarque Soit U un ouvert quelconque,

$$
\begin{aligned}
F:\ & U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
& (x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))
\end{aligned}
$$

de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Si $A \in U$, U est ouvert donc $\exists R > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}(A,R) \subset U$ or $\overline{\mathcal{B}}(A,R)$ est convexe donc étoilé donc localement, F dérive d'un potentiel.

Résultats sur les intégrales à paramètres Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on pose

$$
\begin{aligned}
f:\ & I \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (x,t) \mapsto f(x,t)
\end{aligned}
$$

(1) Si f est continue, alors $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue.

(2) Si f est continue et si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [a,b]$ [a], alors $\varphi : x \in I \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable et

$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

En effet, démontrons le dernier résultat. Soit $x_0 \in I$, $h \neq 0$ voisin de 0, posons

$$
\begin{aligned}
\Delta(h) &= \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right] \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

et montrons que $\Delta(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Supposons que $x_0 \in \operatorname{Int} I$, soient $c, d \in I$ tels que $c < x_0 < d$ et $\varepsilon > 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[c,d] \times [a,b]$ qui est compact donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall (u,v), (u',v') \in [c,d] \times [a,b]$, $|u - u'| \leqslant \alpha$ et $|v - v'| \leqslant \alpha \Rightarrow \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(u',v') \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Soit maintenant $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [c,d] \subset I$, on peut supposer que $|h| \leqslant \alpha$. $t \in [x_0, \underset{\leftrightarrow}{x_0} + h] \longmapsto f(x,t)$ est dérivable donc ,d'après le théorème des accroissements finis, $\exists \omega(h,t) \in [x_0, \underset{\leftrightarrow}{x_0} + h]$ tel que $f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = h \dfrac{\partial f}{\partial x}(\omega(h,t), t)$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
|\Delta(h)| &= \left| \int_a^b \left[\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right] \mathrm{d}t \right| \\
&= \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\omega(h,t), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Or pour $t \in [a,b]$, $N_\infty((\omega(h,t), t) - (x_0,t)) = |\omega(h,t) - x_0| \leqslant |h| \leqslant \alpha$ donc

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\omega(h,t), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |\Delta(h)| \leqslant \varepsilon$$

---

a. On définit alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par $\forall (x,t) \in I \times [a,b]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$$

Démonstration du théorème de Poincaré Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ étoilé par rapport à $(0,0)$, $F : M = (x,y) \in U \longrightarrow (P(M), Q(M)) \in \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Montrons que F dérive d'un potentiel, on cherche donc $V \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ tel que $P = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $Q = \dfrac{\partial V}{\partial y}$.

Soit $M = (x,y) \in U$, U est étoilé par rapport à $O = (0,0)$ donc $[OM] \subset U$: pour $t \in [0,1]$, $(tx,ty) \in [OM] \subset U$ donc $\varphi : t \in [0,1] \longrightarrow tP(tx,ty)$ est définie et dérivable. Pour $t \in [0,1]$, on a

$$\varphi'(t) = P(tx,ty) + t\left(x\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty)\right)$$

Pour $x,y \in U$, on pose $V(x,y) = x\displaystyle\int_0^1 P(tx,ty)\ \mathrm{d}t + y\int_0^1 Q(tx,ty)\ \mathrm{d}t$. Montrons que $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ existe et est continue sur U.

Soit $(x_0,y_0) \in U$, il existe deux segments I et J de $\mathbb{R}$ tels que $(x_0,y_0) \in I \times J$. L'application $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(tx,ty)\ \mathrm{d}t$ est dérivable et si on pose pour $(x,t) \in I \times [0,1]$, $f(x,t) = P(tx,ty)$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [0,1]$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\dfrac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)$. De même, $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_0^1 Q(tx,ty)\ \mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty)\ \mathrm{d}t$ donc $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ existe et $\forall (x,y) \in U$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 P(tx,ty)\ \mathrm{d}t + x\int_0^1 t\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)\ \mathrm{d}t + y\int_0^1 t\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[P(tx,ty) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty)\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[P(tx,ty) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty)\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= P(x,y)
\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ existe et vaut P. De même, $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ existe et vaut Q.

2 Intégrales curvilignes

2.1 Circulation

Soit $\gamma : t \in [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, qu'on appellera aussi un chemin. Posons $\Gamma = \gamma([a,b])$, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Gamma \subset U$,

$$\begin{array}{rl} F: & U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y)) \end{array}$$

un champ de vecteur continu. On appelle intégrale curviligne ou circulation de F le long de γ et on note $\displaystyle\int_\gamma F$ l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma F = \int_a^b \left[x'(t)\,P(x(t), y(t)) + y'(t)\,Q(x(t), y(t))\right]\ \mathrm{d}t$$

Remarques ❒ Cette intégrale est aussi notée $\displaystyle\int_\gamma (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$. Pour $t \in [a,b]$, on remarque que

$$\begin{aligned} x'(t)\,P(x(t),y(t)) + y'(t)\,Q(x(t),y(t)) &= \left\langle \gamma'(t), F(\gamma(t))\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}, F(\gamma(t))\right\rangle \end{aligned}$$

❒ Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $\delta = \gamma\circ\varphi$, alors

$$\begin{aligned} \int_\delta F &= \int_\alpha^\beta \left\langle (\gamma\circ\varphi)'(u), F(\gamma\circ\varphi(u))\right\rangle \mathrm{d}u \\ &= \int_\alpha^\beta \varphi'(u)\left\langle \gamma'(\varphi(u)), F(\gamma(\varphi(u)))\right\rangle \mathrm{d}u \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \left\langle \gamma'(t), F(\gamma(t))\right\rangle \mathrm{d}t \text{ en posant } t = \varphi(u) \end{aligned}$$

– Si φ est croissante, alors $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ donc $\displaystyle\int_\delta F = \int_\gamma F$.
– Si φ est décroissante, alors $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$ donc $\displaystyle\int_\delta F = -\int_\gamma F$.

Ainsi, si l'orientation est définie par le choix de γ, $\displaystyle\int_\gamma F$ ne dépend que de Γ à condition de n'autoriser que les changements de paramètre croissant.

Généralisation Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue par morceaux : $\exists\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\forall i \in [\![0, m-1]\!]$, $\gamma_{|[x_i,x_{i+1}]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, on pose

$$\int_\gamma F = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\gamma_{|[x_i,x_{i+1}]}} F$$

2.2 Circulation dans un champ de gradient

Supposons que F dérive d'un potentiel $V \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Alors $F = \operatorname{grad} V$ donc $P = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $Q = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma F &= \int_a^b \left[x'(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V(x(t),y(t))\right) \mathrm{d}t \\ &= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Ainsi :
(1) $\displaystyle\int_\gamma F$ ne dépend pas de γ mais uniquement de ses extrémités $\gamma(b)$ et $\gamma(a)$;
(2) si $\gamma(b) = \gamma(a)$, alors $\displaystyle\oint_\gamma F = 0$. On dit que γ est un chemin fermé.

Remarque Soit $U=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, pour $(x,y)\in U$ on pose $F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall(x,y)\in U$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-\left(x^2+y^2\right)+y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{\left(x^2+y^2\right)-x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

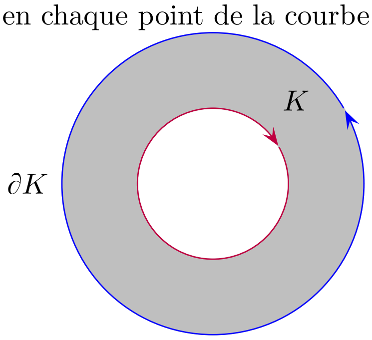
ON a donc $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Or, si l'on pose $\forall t\in[0,2\pi]$, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \int_0^{2\pi}[-\sin t(-\sin t)]+\cos t\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

Or γ est fermé donc F ne peut pas dériver d'un potentiel sur U. Le théorème de Poincaré ne s'applique pas ici car U n'est pas étoilé.

2.3 Formule de Green-Riemann

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont on suppose que la frontière $\partial K=K\backslash\operatorname{Int}K$ est le support d'une réunion finie d'arc paramétrés du type $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ continus, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et simples (tels que γ est injective), orienté dans le sens direct : le vecteur normal en chaque point de la courbe pointe vers l'intérieur de K.



Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui contient K et $F:U\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial K}F=\int_{\partial K}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$$

Application pratique Il s'agira de calculer $\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On cherche donc $F:U\longrightarrow\mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f$, on peut essayer de prendre $P=0$ et Q tel que $\frac{\partial Q}{\partial x}=f$. On applique alors Green-Riemann :

$$\begin{aligned}\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial K}F\\ &= \int_{\partial K}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Illustration : calculs d'aires On prend $\partial K = \gamma$, on a donc $\mathcal{A}(K) = \iint\limits_K 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Si on pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (0,x)$, alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ donc d'après la formule de Green-Riemann, $\mathcal{A}(K) = \displaystyle\int_\gamma (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y$.

Si $\gamma : t \in [a,b] \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\mathcal{A}(K) = \int_a^b x(t)\, y'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b y(t)\, x'(t)\ \mathrm{d}t$$

en prenant $F(x,y) = (-y, 0)$.

Exemples

– Recalculons l'aire de l'ellipse :

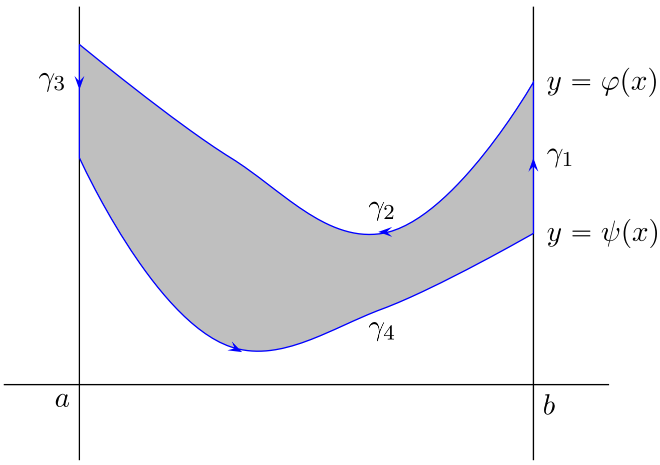
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\} \Rightarrow \partial K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

donc $\partial K = \gamma([0, 2\pi])$ où $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ donc, d'après le résultat précédent

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(K) &= \int_0^{2\pi} a\cos t b \cos t\ \mathrm{d}t \\ &= ab\left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab\end{aligned}$$

– Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\varphi \leqslant \psi$,

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b] \text{ et } y \in [\varphi(x), \psi(x)]\right\}$$



D'après la formule de Green-Riemann,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(K) &= -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_3} y\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_4} y\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

γ_1 est le support de $t \in [\varphi(b), \psi(b)] \longmapsto (b,t)$ donc $\int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}x = 0$ et de même, $\int_{\gamma_3} y\,\mathrm{d}x = 0$. γ_2 est le support de $\gamma_2' : t \in [a,b] \longrightarrow (t, \psi(t))$ qui est orienté dans le sens opposé à celui de γ_2 : $\int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x = -\int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$. De même, sans inversion cette fois, $\int_{\gamma_4} y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ donc

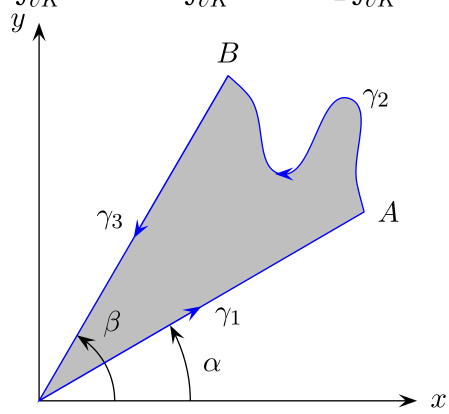
$$\mathcal{A}(K) = \int_a^b (\psi(t) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

- Soit K donnée en polaire par les conditions $\theta \in [\alpha, \beta]$ avec $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$ et $r \in [0, \rho(\theta)]$: si

$$K' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [\alpha,\beta] \text{ et } r \in [0, \rho(\theta)]\right\}$$

alors $K = \psi(K')$ où $\psi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a alors, d'après la formule de Green-Riemann,

$$\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial K} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$



On pose $A = (a,b) = (\rho(\beta)\cos\beta, \rho(\beta)\sin\beta)$, $B = (a',b') = (\rho(\alpha)\cos\alpha, \rho(\alpha)\sin\alpha)$, $\gamma_1 = [OA]$, $\gamma_2 = \left\{\rho(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta} | \theta \in [\alpha,\beta]\right\}$ et $\gamma_3 = [BO]$ orientés comme sur la figure. Alors

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) + \int_{\gamma_2} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) + \int_{\gamma_3} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\right)$$

Or $\int_{\gamma_1} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \int_0^a t\frac{b}{a} - \frac{b}{a}t\,\mathrm{d}t = 0$ et de même, $\int_{\gamma_3} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) &= \int_\alpha^\beta \left\langle P(r\cos\theta, r\sin\theta), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\rangle \mathrm{d}\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\rho(\theta)\cos\theta\left(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\right) - \rho(\theta)\sin\theta\left(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta\right)\right] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat de la section 32.3.2 du cours complet page 666 : $\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2$.

3 Complément : masses, centre d'inertie, moments d'inertie

3.1 Sur une surface

❒ Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$, $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue. σ est la densité surfacique de masse et la masse $m(K)$ de K est

$$m(K) = \iint_K \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si σ est constante, on dit que K est homogène et $m(K) = \sigma\mathcal{A}(K)$.

❒ Le centre d'inertie de K est le point G défini par

$$m(K)\overrightarrow{OG} = \iint\limits_K \sigma(x, y)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si on note $G = (x_G, y_G)$, on a alors

$$m(K)\,x_G = \iint\limits_K x\sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ et } m(K)\,y_G = \iint\limits_K y\sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

❒ Le moment moment d'inertie de K par rapport au point A est, en notant $M = (x, y)$,

$$J_A = \iint\limits_K \sigma(M)\,AM^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Le moment d'inertie par rapport à une droite $\mathcal{D}$ est

$$J_{\mathcal{D}} = \iint\limits_K \sigma(M)\,\mathrm{d}(M, \mathcal{D})^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Exemple Soit K la demi cardioïde :

$$K = \left\{r\mathrm{e}^{i\theta} | \theta \in [0, \pi] \text{ et } r \in [0, a(1 + \cos\theta)]\right\}$$

K est homogène de densité surfacique σ. Trouvons la masse de K et les coordonnées du centre d'inertie G de K.

$$\begin{aligned}
m(K) &= \sigma\iint\limits_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sigma\int_0^\pi \left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \text{ en passant en polaires} \\
&= \sigma\int_0^\pi \frac{a^2(1+\cos\theta)^2}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sigma a^2}{2}\int_0^\pi \left(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sigma a^2}{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + 2\sin\theta + \theta\right]_0^\pi \\
&= \frac{\sigma 3\pi a^2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
m(K)\,x_G &= \sigma\iint\limits_K x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sigma\int_0^\pi \left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \sigma\int_0^\pi \cos\theta\frac{a^3(1+\cos\theta)^3}{3}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sigma a^3}{3}\int_0^\pi \left(\cos^4\theta + 3\cos^3\theta + 3\cos^2\theta + \cos\theta\right)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Or $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, $\cos^3\theta = \dfrac{1}{4}\cos(3\theta) + \dfrac{3}{4}\cos\theta$ et

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \frac{\left(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^4}{2^4}\\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4i\theta}+4\mathrm{e}^{2i\theta}+6+4\mathrm{e}^{-2i\theta}+\mathrm{e}^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta)+8\cos(2\theta)+6\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\theta\left(1+\cos^3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{d}\theta + 3\int_0^\pi \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta + 3\int_0^\pi\left(\frac{\cos(3\theta)}{4}+\frac{3\cos\theta}{4}\right)\,\mathrm{d}\theta\\ &\quad+\int_0^\pi\left(\frac{\cos(4\theta)}{8}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{3}{8}\right)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\\ &= \frac{15\pi}{8}\end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\frac{3\pi}{4}\sigma a^2 x_G = \frac{\sigma a^3}{3}\frac{15\pi}{8} \Leftrightarrow x_G = \frac{5}{6}a$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}m(K)\,y_G &= \iint_K \sigma y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \sigma\int_0^\pi\left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\right)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\sigma}{3}\int_0^\pi \sin\theta a^3\left(1+\cos\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\sigma a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\left(1+\cos\theta\right)^4\right]_0^\pi\\ &= \frac{\sigma a^3}{3}\frac{2^4}{4}\\ &= \frac{4\sigma a^3}{3}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{4}{3}\sigma a^3\frac{4}{3\pi\sigma a^2}\\ &= \frac{16}{9\pi}a\end{aligned}$$

3.2 Pour un solide

❒ Soit K un compact de $\mathbb{R}^3$, $\rho : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue. ρ est la densité volumique de masse et

$$m(K) = \iiint_K \rho(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

❒ Le centre d'inertie G est donné par

$$m\left(K\right)\overrightarrow{OG}=\iiint\limits_{K}\rho\left(M\right)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}\tau$$

où $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est l'élément de volume centré sur M.

❒ Le moment d'inertie de K par rapport à une droite $\mathcal{D}$ est

$$J_{\mathcal{D}}=\iiint\limits_{K}\rho\left(M\right)\mathrm{d}\left(M,\mathcal{D}\right)^{2}\mathrm{d}\tau$$

$\boxed{\text{Fin}}$