Nombres réels

Exercice 1 :

1. Montrer qu'une intersection de deux intervalles est encore un intervalle.
2. Montrer que l'union de deux intervalles non disjoints est encore un intervalle.

Exercice 2 : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $E(x) + E(x + y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$
2. $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Exercice 3 : Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}$.
   Déterminer $\mathrm{Sup}(\lambda A)$ en fonction de $\mathrm{Sup}(A)$.
2. Montrer que $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A)+\mathrm{Sup}(B)$ où $A+B = \{a+b,\ (a, b) \in A\times B\}$.
3. On suppose que $A \cup B \subset \mathbb{R}^+$.
   Montrer que $\mathrm{Sup}(A \cdot B) = \mathrm{Sup}(A) \times \mathrm{Sup}(B)$ où $A \cdot B = \{ab,\ (a, b) \in A \times B\}$.

Exercice 4 : On cherche toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \ \text{ et } \ f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que si f est solution alors il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = cx$$

2. Montrer que si f est une solution non nulle alors f est positive sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que si f est solution alors $\exists c \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = cx$
4. Conclure.