Xheffray
MIS

Devoir n°7

Partie I : Rayonnement par un dipôle oscillant

1- Un point $M : (r, \theta, \phi)$ est très éloigné du dipôle si ce dernier respecte l'approximation dipolaire c'est à dire si d est la taille caractéristique du dipôle alors $d \ll r$.

2- Tout plan contenant (Oz) notamment le plan (OM, Oz) est plan d'antisymétrie de $\vec{B}$ donc $\vec{B}$ orthogonal à (OM, Oz) c'est à dire que :
$\vec{B}(M) = B(M)\, \vec{e_\phi}$

3- Etant donné que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un plan orthogonal à la surface de propagation alors localement les surfaces d'ondes équiphases sont des plans donc l'onde sera plane.

4- Le dipôle émet localement une onde plane progressive monochromatique donc
$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_r}$$

5- On considère la sphère de centre O et de rayon r très grand donc $r \gg d$:
$$\Phi = \iint_{S_{sphère}} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \Pi\, dS\, \vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2}\cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2\theta\, dS$$
$$\Phi = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2}\cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$
$$= \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{8\pi c^3 \varepsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta\right)\cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{6\pi c^3 \varepsilon_0}\cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

6- L'énergie rayonnée : $P_{ray} = \langle \Phi \rangle = \dfrac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{12\pi c^3 \varepsilon_0}$

7 a) L'électron est animé d'un mouvement forcé sur (Oz) oscillant :
$\vec{OP} = d\cos(\omega t)\,\vec{e_z}$ donc $\vec{\gamma} = \dfrac{d^2\vec{OP}}{dt^2} = -\omega^2 d\cos(\omega t)\,\vec{e_z}$
et $\langle \vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma} \rangle = \langle d^2\cos^2(\omega t)\,\omega^4 \rangle = \dfrac{d^2\omega^4}{2}$

donc $\langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle = \frac{d^2 \omega^4}{2}$ ainsi $P_L = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{12 \pi c^3 \varepsilon_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6 \pi c^3 \varepsilon_0} \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle$

ainsi $P_L = K_e \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle$

b) $K_e = \frac{\mu_0 e^2}{6 \pi c^3 \varepsilon_0}$ en $H.F^{-1}.C^2.m^{-3}.s^3$

Partie II : Mise en ~~résonance~~ évidence d'une résonance de puissance

~~9~~

9- système : $\{e^-\}$, BAM : $\vec{f}_{ray} = K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ / $\vec{f}_{rappel} = -m_e \omega_0^2 \vec{OP}$

donc principe fondamental de l'analyse :

$m_e \vec{\gamma} = -m_e \omega_0^2 \vec{OP} + K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ c'est-à-dire donc $m_e \ddot{z}(t) = K_e \dddot{z}(t) - m_e \omega_0^2 z(t)$

donc $\ddot{z}(t) - \frac{K_e}{m_e} \dddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$

10- si on pose $z(t) = \exp(i \Omega t)$ alors on obtient :

$-\Omega^2 z(t) + i \frac{K_e}{m_e} z(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$ or $z(t) \neq 0$

donc on a l'équation suivante : $-\Omega + i\tau + \omega_0^2 = 0$

Xhaffray
MIS

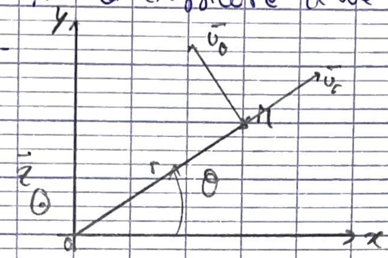
Devoir n°7

Problème 2

II / Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir

A - La difficulté d'une communication directe

Q.12 -



système : [satellite] masse m_S
référentiel : géocentrique supposé galiléen
BAM : $\vec{F} = -G \dfrac{M_T m_S}{(R_T+h)^2} \vec{u_r}$

Principe fondamental de la dynamique : $m_S \dfrac{d\vec{v_0}}{dt} = -G \dfrac{M_T m_S}{(R_T+h)^2} \vec{u_r} = -G \dfrac{M_T m_S}{r^2} \vec{u_r}$
or le satellite a un mouvement circulaire autour de O :
$\dfrac{d\vec{v_0}}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u_r}$ ainsi $r\dot{\theta}^2 \vec{u_r} = G \dfrac{M_T}{r^2} \vec{u_r} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r^3}} = cte$

donc le satellite a un mouvement circulaire uniforme.

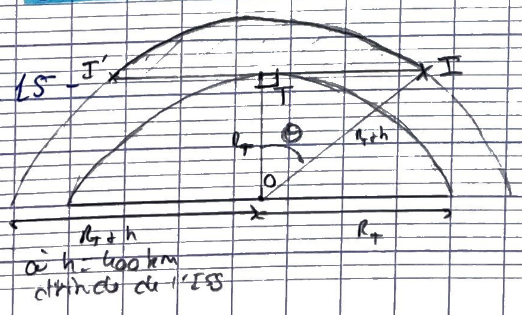
Q.13 - Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme : $\vec{v_0} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et
$\dfrac{d\vec{v_0}}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u_r} = -\dfrac{r^2\dot{\theta}^2}{r}\vec{u_r} = -\dfrac{\|\vec{v_0}\|^2}{r}\vec{u_r}$

donc on injecte dans le PFD : $\dfrac{\|\vec{v_0}\|^2}{r} = \dfrac{GM_T}{r^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{(R_T+h)}}$

Q.14 - On a vu que $v_0 = r\dot{\theta} = \dfrac{r2\pi}{T_0}$ donc $T_0 = \dfrac{2\pi r}{v_0}$

or $v_0 = 7518 \text{ m.s}^{-1} = 27056 \text{ km.h}^{-1}$ et $T_0 = 5894 \text{ s}$

Q.15 -



▱ Zone de communication

$\|IT\|^2 = (R_T+h)^2 - R_T^2 = h^2 + 2R_T h$
On peut approcher l'arc passant par I et I' à un demi cercle de rayon IT

l'ISS possède une vitesse orbitale de 27 500 km/h soit 7639 m s^{-1}

et sa vitesse de rotation $\dot{\theta} = \dfrac{\|\vec{v}\|}{(R_T + h)}$ h l'altitude de l'ISS

donc la période de communication est $\Delta t = \dfrac{\theta}{\dot{\theta}}$

or $\cos\theta = \dfrac{R_T}{R_T + h}$ donc $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{R_T}{R_T+h}\right) = 0{,}34$ rad et $\dot{\theta} =$ ~~[illegible]~~ $0{,}0011$ rad s^{-1}

ainsi $\Delta t = 5{,}21$ min $= 313{,}4$ s

Si l'on considère la difficulté afin d'émettre dans une direction très précise et que l'on considère les vitesses, cela n'est pas aberrant de dire que l'on ne peut communiquer qu'une minute avec l'ISS.

B. Communication avec les satellites relais

Q.16 - Les équations de Maxwell dans le vide sont : vide (ε_0, μ_0) $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$

Maxwell Gauss : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

Maxwell flux : $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

Maxwell Faraday : $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Maxwell Ampère : $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

et $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

ainsi l'équation de propagation de $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{(Equation de d'Alembert)}$$

Q.17 - On a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) donc on peut passer en notation complexe : $-k^2\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}(j\omega)^2\vec{E}$

puis $-k^2 = -\dfrac{\omega^2}{c^2}$ et enfin ~~[illegible]~~ $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow$ $k = \dfrac{\omega}{c}$ relation de dispersion dans le vide.

on calcule la vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c$ ne dépend pas de ω donc le ~~[illegible]~~ vide n'est pas un milieu dispersif.

Q.18- on a une OPPM donc on a la relation de structure suivante :
$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx))\vec{u_z}$

2) Propagation dans le plasma

Q.19- on a $\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ la force de Lorentz avec
$\vec{f_e} = q\vec{E}$ la force électrique et $\vec{f_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la force magnétique
ainsi $\frac{\|\vec{f_B}\|}{\|\vec{f_e}\|} \sim \frac{qvB}{qE} \sim \frac{v E_0}{c E_0} \sim \frac{v}{c} << 1$ car les électrons sont

non relativistes donc on peut négliger la force magnétique de Lorentz.

Q.20- système {e} masse m_e, BDF : $\vec{f_e} = -e\vec{E}$
donc $m_e \frac{d\vec{v_e}}{dt} = -e\vec{E}$ donc $m_e i\omega \vec{v_e} = e\vec{E}$ c'est à dire : $\vec{v_e} = \frac{-e}{i\omega m_e}\vec{E}$

de la même manière $\vec{v_c} = \frac{e}{i\omega m_c}\vec{E}$ ainsi $\frac{\|\vec{v_c}\|}{\|\vec{v_e}\|} \sim \frac{m_e}{m_c} << 1$
car $m_c >> m_e$
On pourra ainsi considérer les cations comme fixes.

Q.21- Les électrons possèdent une vitesse ainsi qu'une densité volumique n_e nulles
donc on a existence de $\vec{j}$ et $\vec{j} = -n_e e \vec{v_e} = \frac{e^2 n_e}{i\omega m_e}\vec{E} = -i\frac{e^2 n_e}{\omega m_e}\vec{E}$

donc $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\gamma = -i\frac{e^2 n_e}{\omega m_e}$

Q.22- La puissance volumique moyenne cédée aux charges est $P_v = \langle \vec{j}.\vec{E} \rangle$
or $\vec{j}.\vec{E} = \gamma E^2 = -i\frac{n_e e^2}{m_e \omega} E_0^2 \exp(i(\omega t - kx))^2$
et $\vec{j}.\vec{E} = \frac{n_e e^2}{m_e \omega} \sin^2(\omega t - kx)$ ainsi $P_v = \frac{n_e e^2}{2 m_e \omega} E_0^2$

l'onde cède de l'énergie aux charges du milieu conducteur et donc absorbant

Q.23- on appellera $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ la pulsation plasma avec $\vec{j} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E}$

donc $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{rot}\,\vec{B} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

on a donc l'équation de propagation suivante : $\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Q.24 - On passe en complexe : $-\underline{k}^2\vec{\underline{E}} = i\omega\mu_0\gamma\vec{\underline{E}} + \frac{1}{c^2}(i\omega)^2\vec{\underline{E}}$

avec $-\underline{k}^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}$

c'est à dire $\underline{k} = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 n_e e^2 c^2}{m_e}}$

Q.25 - on a $\omega<\omega_p$ donc $\underline{k} = \pm i\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c} = \pm\frac{i}{\delta_p}$

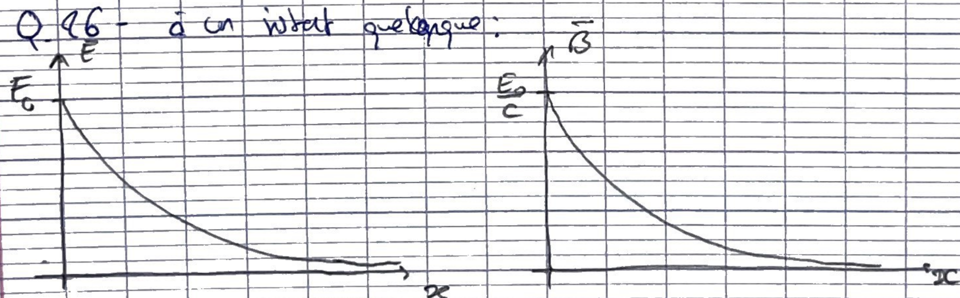
avec $\delta_p = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}$ qui est l'épaisseur de peau du plasma

ainsi on prend $\underline{k} = -\frac{i}{\delta_p}$ afin d'avoir une amplitude finie.

$\vec{\underline{E}}(x,t) = E_0\exp\left(-\frac{x}{\delta_p}\right)\exp(i\omega t)\vec{u_y}$

et $\vec{\underline{B}}(x,t) = \frac{E_0}{c}\exp\left(-\frac{x}{\delta_p}\right)\exp(i\omega t)\vec{u_z}$

Q.26 - à un instant quelconque :



Les champs ont un facteur d'atténuation spatiale exponentielle et ce sont des ondes stationnaires car leurs propagations spatiale et temporelle sont découplées.

Q.27

$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}Re(\vec{\underline{E}}\wedge\vec{\underline{B}}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\exp\left(-\frac{2x}{\delta_p}\right)\vec{u_z}$ c'est une onde évanescente

Q.28- ici $\omega > \omega_p$ donc k réel et $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

donc $\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\right)\right)\vec{u}_y$

et $\vec{B}(M,t) = \frac{E_0}{c} \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\right)\right)\vec{u}_z$

donc $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x\right)\vec{u}_y$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x\right)\vec{u}_z$

ainsi $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x$

Q.29- On a $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \omega \times \frac{c}{\omega\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

et $dk^2 = 2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2kc^2}{2\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

v_φ dépend de ω donc le milieu est dispersif et $v_\varphi > c$ ce qui ne contredit pas les lois de la relativité car le milieu n'est pas le vide cependant $v_g < c$ or v_g représente la vitesse de l'information et elle est bien plus petite que c