TD34 - Isométrie

Ex 1 :

$$P = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$p \circ p = p$

$\mathrm{Ker}\, p \perp \mathrm{Im}\, p$

$$\rightarrow \quad P^2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} \times \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11^2}\begin{pmatrix} 4+9+9 & 6+30-3 & 6-3+30 \\ 6+30-3 & 9+100+1 & 9-10-10 \\ 6-3+30 & 9-10-10 & 9+1+100 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11^2}\begin{pmatrix} 22 & 33 & 33 \\ 33 & 110 & -11 \\ 33 & -11 & 110 \end{pmatrix}$$

$$= P$$

Déterminons Ker(p)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ 3x - y + 10z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\iff} \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 9y - 11z = 0 \\ 3x - y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_3}{\iff} \begin{cases} 2y + \frac{2}{3}y + 3z - \frac{10 \times 2}{3} z = 0 \\ y = \frac{11}{9} z \\ 3x - y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{8}{3} y + \dfrac{9-20}{3} z = 0 \\[2ex] y = \dfrac{11}{9} z \\[2ex] 3x - \dfrac{11}{9} z + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{8}{3} \times \dfrac{11}{9} z - \dfrac{11}{3} z = 0 \\[2ex] y = \dfrac{11}{9} z \\[2ex] 3x - \dfrac{11 + 10 \times 9}{9} z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3y \\ y = z \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} p = 1$

Comme $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supp dans un ev de dim 3

On en déduit que $\dim(\operatorname{Im} p) = 2$

Il suffit de prendre 2 vecteurs non colinéaires de $\operatorname{Im}(p)$ pour en faire une base

On prend $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$

On vérifie que $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$

On montre l'orthogonalité sur les bases

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

donc p est un projecteur ortho

Ex 2:

Ex :

$E = \mathbb{R}[X]$

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(P, Q) \mapsto \lim_{x \to +\infty} \int_0^x P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

Mq φ prod sca sur E

. Orthonormalisé $(1, X, X^2)$

-> Produit scalaire

-> Symétrie :

Soit $(P, Q) \in E^2$ Mq $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$

$$\varphi(P, Q) = \lim_{\to +\infty} \int_0^x P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{\to +\infty} \int_0^x Q(t)\, P(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \varphi(Q, P)$$

-> Bilinéaire

Soit $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Mq $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(\lambda_2, Q)$

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x (\lambda P_1 + P_2)(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \left(\lambda P_1(t) + P_2(t)\right) Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda P_1(t)\, Q(t)\, e^{-t} + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x P_2(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$$

Donc φ est lin / à la 1ère variable

Par symétrie 2ème var aussi

→ déf positive

Soit $P \in E$

$$\varphi(P,P) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x P^2(t) e^{-t} dt \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2(t) e^{-t} \geq 0 \quad \text{or} \quad e^{-t} \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow P(t) \geq 0$$

$$\varphi(P,P) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x P^2(t) e^{-t} dt = 0$$

Ex 2:

Calcul vecteur de base

Ex 3:

1) p est orthogonal ssi $\underbrace{\forall (x,y) \in E^2 \ \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle}_{*}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp p ortho

Soit $(x,y) \in E^2$

On a $E = \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})}}{\mathrm{Ker}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, p}$

Il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathrm{Ker}\, p)^2 \times (\mathrm{Im}\, p)^2$

tq $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x_1 + x_2), y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \langle x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_2, y_1 \rangle}_{0} + \langle x_2, y_2 \rangle$$

$$\langle x, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, y_2\rangle$$
$$= \underbrace{\langle x_1, y_2\rangle}_{=0} + \langle x_2, y_2\rangle$$
$$= \langle x_2, y_2\rangle$$
$$= \langle p(x), y\rangle$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp *

Soit $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$

$$\langle x, y\rangle = \langle p(x), y\rangle$$
$$= \langle p(x), y\rangle = 0$$

Donc p est un proj ortho.

2) Mq p est orthogonal ssi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \in S_n(\mathbb{R})$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp p ortho

Soit $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\ p$

$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad C_j = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \cdot e_j$

$\mathcal{B}$ est orthonormée, $\quad C_j = \begin{pmatrix} p(e_j).e_1 \\ \vdots \\ p(e_j).e_n \end{pmatrix}$

$$M_{ij} = p(e_j).e_i$$
$$= e_j \cdot p(e_i) \quad \text{d'après 1)}$$
$$= M_{ji}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $(x, y) \in E^2$ tq $\begin{cases} x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \\ y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_i \, e_j \end{cases}$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(e_i)$$

$$p(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p(e_j)$$

$$\begin{aligned} \langle p(x), y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(e_i) \, , \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, y_j \, \langle p(e_i), e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, y_j \, M_{ji} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \quad \sim \quad M_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, y_j \, \langle e_i \, , p(e_j) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \, , \sum_{i=1}^{n} y_j \cdot p(e_j) \right\rangle \\ &= \langle x \, , p(y) \rangle \end{aligned}$$

3) Supp p ortho, $E = \mathrm{Ker}\, p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, p$

Soit $\mathcal{B}_1$ BON de $\mathrm{Ker}\, p$

$\mathcal{B}_2$ BON de $\mathrm{Im}\, p$

dont $\mathcal{B}'$ la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$

$\mathcal{B}'$ est une BON de E

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, p = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

D'après le changement de bases : $Mat_{\mathcal{B}}(p) = PDP^{-1}$ où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont 2 BON de E, P est une matrice orthogonale

donc $Mat_{\mathcal{B}}(p) = {}^tPDP$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tq $Mat_{\mathcal{B}}(p) = {}^tPDP$

Soit $M = Mat_{\mathcal{B}}(p)$

$${}^tM = {}^t({}^tPDP)$$
$$= {}^tP\,{}^tD\,{}^t({}^tP)$$
$$= {}^tP\,D\,P = M$$

Donc M est symétrique

puis p est orthogonal