

CONCOURS BLANC DE PHYSIQUE

MP* 2023-2024

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

Ce devoir comporte trois problèmes indépendants :

- Problème 1 (CCINP PC 2023) : La qualité de l'air dans l'habitat
- Problème 2 (Centrale 1 PC 2021) : Différents aspects de l'écoulement dans une lame de savon
- Problème 3 (Mines 1 PSI 2021) : Télécommunications

Consignes à respecter :

Le candidat devra composer à l'encre bleue foncée ou noire non effaçable. Ne pas utiliser de correcteur (tipex par exemple). Pas de stylo plume ni de stylos «friction». Le candidat pourra réaliser des schémas ou mettre des résultats en évidence, en utilisant des couleurs, sauf le vert et le turquoise. Il est également possible d'utiliser des feutres ou des surligneurs.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La notion de confort dans l'habitat caractérise, pour un individu donné, son état de satisfaction avec les conditions d'environnement. Indépendamment des conditions propres à l'individu que sont son métabolisme, son activité, son habillement et sa santé, il est reconnu que quatre paramètres influencent le confort : l'environnement thermique, l'éclairage, la protection acoustique et, enfin, la qualité de l'air dont on propose l'étude dans ce sujet.

On étudiera ainsi dans la **partie I** un système de ventilation mécanique visant à renouveler l'air dans l'habitat. On réalisera dans la **sous-partie I.1** un bilan général d'énergie pour un fluide en écoulement stationnaire, avant d'analyser le principe d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux en **sous-partie I.2**. Dans la **partie II**, on s'intéressera à l'humidité de l'air dans l'habitat avec quelques généralités sur l'air humide en **sous-partie II.1**, puis la description du fonctionnement d'un hygromètre capacitif en **sous-partie II.2**. Enfin, on abordera la problématique de la nuisance sonore liée aux systèmes de renouvellement d'air dans la **partie III**. On détaillera à cet effet le principe de la correction acoustique d'une pièce d'habitation en **sous-partie III.1**, puis celui d'un silencieux à résonateur de Helmholtz en **sous-partie III.2**.

Données

- Masse molaire de l'air sec : $M_{as} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire de l'eau : $M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants d'un gaz parfait diatomique pour les températures considérées : $\gamma = 1,4$
- Pression atmosphérique : $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- Masse volumique de l'eau liquide pour les températures considérées : $\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

- Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour un champ scalaire U et un champ vectoriel $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

Partie I - Le renouvellement de l'air dans l'habitat

La ventilation des principales pièces de l'habitat est indispensable pour assurer un niveau minimal de salubrité de l'air, par exemple par un simple apport d'air neuf de l'extérieur grâce à l'aération naturelle par les ouvrants de ces pièces (portes, fenêtres). Cette solution n'est toutefois pas sans inconvénients sur le confort thermique des occupants et l'efficacité énergétique de l'habitat, l'air extérieur étant plus froid que l'air intérieur en hiver et plus chaud en été. L'utilisation d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux est aujourd'hui la solution la plus commune retenue pour éviter ces inconvénients.

I.1 - Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

On considère l'écoulement parfait et stationnaire d'un fluide à travers un système ouvert (\mathcal{S}), définissant un volume de contrôle indéformable et fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} et présentant une entrée et une sortie (**figure 1**).

On définit comme système d'étude le système fermé, noté (\mathcal{S}^*), constitué du fluide contenu à l'instant t dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_1 qui y rentre entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ'_1) et (Σ_1), et définissant un sous-système (\mathcal{S}_1). À l'instant $t + dt$, il est constitué du fluide contenu dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_2 qui en sort entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ_2) et (Σ'_2), et définissant un sous-système (\mathcal{S}_2).

On note T_i , p_i , ρ_i , $e_{c,i}$, $e_{p,i}$, u_i et h_i respectivement la température, la pression, la masse volumique, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle de pesanteur massique, l'énergie interne massique et l'enthalpie massique du fluide contenu dans chaque sous-système (\mathcal{S}_i) où $i = 1, 2$.

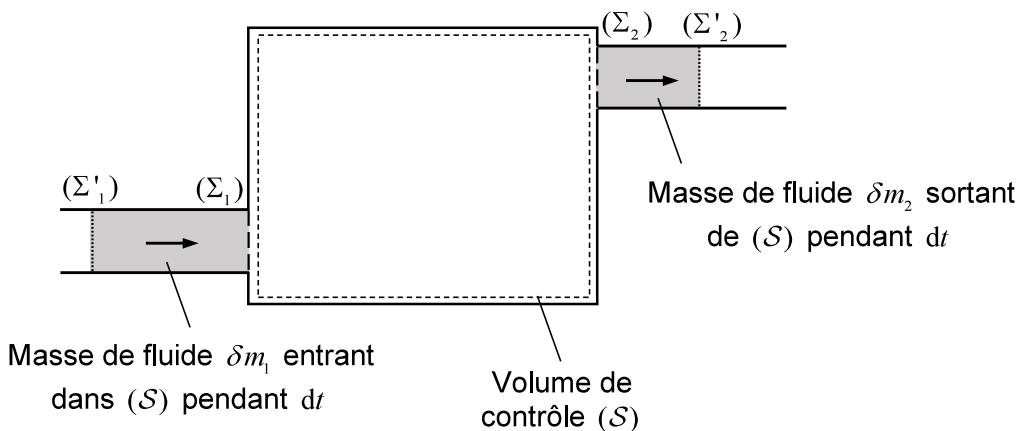


Figure 1 - Fluide en écoulement stationnaire : système fermé étudié

Q1. En traduisant la conservation de la masse du fluide contenu dans le système (\mathcal{S}^*), justifier que le débit massique du fluide en entrée est égal à celui en sortie : $\frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} = D_m$.

Q2. Montrer que le travail massique des forces pressantes reçu par le fluide contenu dans le système (\mathcal{S}^*) pendant la durée dt s'écrit : $w_p = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2} dt$.

- Q3.** Montrer que la variation d'énergie interne du fluide contenu dans le système (S^*) pendant la durée dt s'écrit : $dU = D_m(u_2 - u_1)dt$.

Donner, sans calculs supplémentaires, les expressions des variations d'énergie cinétique macroscopique dE_c et d'énergie potentielle de pesanteur dE_p du fluide.

- Q4.** À partir d'un bilan énergétique pour le fluide contenu dans le système (S^*) pendant la durée dt , établir l'expression du premier principe pour un écoulement stationnaire :

$$D_m \left[(h_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (h_1 + e_{c,1} + e_{p,1}) \right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où \mathcal{P}_u et \mathcal{P}_{th} sont respectivement la puissance mécanique des forces extérieures non conservatives autre que celle des forces pressantes (puissance dite utile) et le flux thermique reçus par le fluide contenu dans le volume de contrôle.

I.2 - Étude d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux

On modélise une habitation par une pièce unique, de température intérieure supposée uniforme $T_{int} = 20,0 \text{ } ^\circ\text{C}$ et maintenue constante grâce à un chauffage. L'air à l'extérieur de l'habitation est à la température constante $T_{ext} = 0,0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

- Q5.** En l'absence de toute ventilation, le flux thermique lié aux pertes à travers l'ensemble des parois (fenêtres, toit, murs) séparant l'habitation de l'extérieur est $\mathcal{P}_{h,p} = 5,0 \text{ kW}$ en régime stationnaire. Estimer la résistance thermique R_{th} de l'ensemble de ces parois.

L'habitation est désormais munie d'une ventilation mécanique contrôlée (VMC) à double flux. Elle se distingue d'une VMC simple flux qui insuffle dans l'habitation de l'air froid neuf à la température T_{ext} et extrait de l'air chaud vicié (c'est-à-dire ayant "servi") à la température T_{int} . Une VMC double flux comporte en effet un échangeur thermique tel que l'air chaud vicié sortant préchauffe l'air froid neuf entrant (**figure 2**).

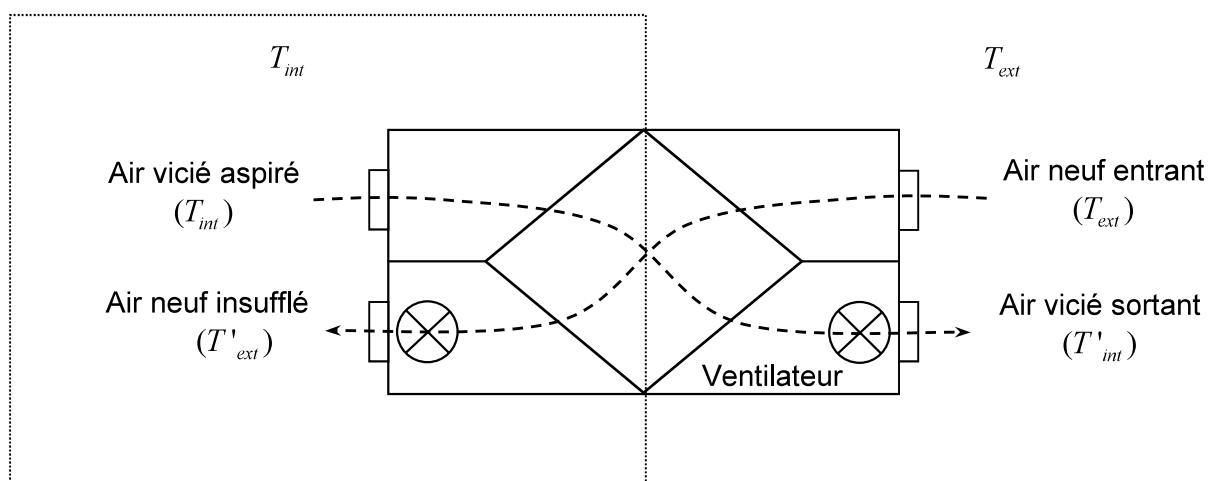


Figure 2 - Schéma de principe d'une VMC double flux

En régime stationnaire, l'air neuf entrant dans le système à la température $T_{ext} = 0,0 \text{ } ^\circ\text{C}$ traverse l'échangeur avec un débit massique $D_m = 150 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ avant d'être insufflé dans l'habitation à la température $T'_{ext} = 15,0 \text{ } ^\circ\text{C}$. Quant à l'air vicié aspiré dans l'habitation à la température $T_{int} = 20,0 \text{ } ^\circ\text{C}$, il sort du système à la température T'_{int} après traversée de l'échangeur avec le même débit D_m . Au sein de l'échangeur parfaitement isolé du reste du système, l'air neuf circule dans une conduite plane en contact avec une autre conduite plane dans laquelle circule l'air vicié de façon à assurer les échanges thermiques (**figure 3**). On néglige toute variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'air circulant dans chacune des deux conduites.

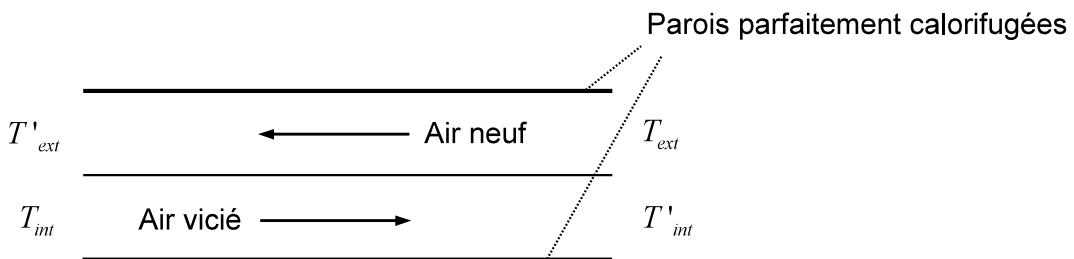


Figure 3 - Échangeur thermique

- Q6.** On assimile l'air supposé sec, donc sans vapeur d'eau, à un gaz parfait. Dans ces conditions, les capacités thermiques à pression et volume constants d'une quantité de matière n d'air, notées respectivement C_p et C_V , sont reliées par la relation de Mayer : $C_p - C_V = nR$. Établir l'expression de la capacité thermique massique à pression constante c_p de l'air en fonction notamment du rapport γ entre les capacités thermiques à pression et volume constants. Calculer c_p .
- Q7.** Montrer à l'aide de l'expression établie à la **Q4** et en précisant les systèmes ouverts choisis que $T_{int} - T'_{int} = T'_{ext} - T_{ext}$. Calculer T'_{int} .
- Q8.** Donner l'expression littérale du flux thermique $\mathcal{P}_{th,a}$ reçu par l'air insufflé à la température T'_{ext} pour le réchauffer à la température T_{int} de la pièce. Calculer $\mathcal{P}_{th,a}$.
- Q9.** Déduire des résultats précédents la puissance \mathcal{P}_c fournie par le chauffage pour maintenir une température intérieure T_{int} constante. Calculer \mathcal{P}_c .
- Q10.** Dans le cas d'une VMC simple flux, calculer le flux thermique $\mathcal{P}'_{th,a}$ reçu par l'air insufflé pour le réchauffer à la température de la pièce, puis la puissance \mathcal{P}'_c fournie par le chauffage pour maintenir cette température constante. En déduire le pourcentage d'énergie économisée en passant d'une VMC simple flux à une VMC double flux : $\frac{\mathcal{P}'_c - \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}'_c}$.

Quel serait le pourcentage d'énergie économisée si l'échange thermique entre l'air neuf et l'air vicié était parfait, c'est-à-dire si l'air vicié sortait de l'échangeur à la température T_{ext} ?

Partie II - L'humidité de l'air dans l'habitat

L'humidité de l'air d'une pièce doit être contrôlée. Trop grande, elle peut en effet favoriser le développement de moisissures, bactéries, acariens, mais aussi provoquer la dégradation de certains matériaux.

II.1 - L'air humide

L'air sec ne contient pas de vapeur d'eau. C'est un mélange de gaz, de proportions connues et invariables, principalement du diazote et du dioxygène. Un mélange d'air sec, de masse molaire M_{as} et de pression partielle p_{as} , et de vapeur d'eau, de masse molaire M_e et de pression partielle p_e , est qualifié d'air humide. Ce mélange sera considéré par la suite comme un mélange idéal de gaz parfaits.

L'air humide est caractérisé à la température T par son degré hygrométrique φ ou humidité relative : $\varphi = \frac{P_e}{P_{e,sat}(T)}$ où $P_{e,sat}(T)$ est la pression de vapeur saturante (pression d'équilibre liquide-vapeur) de l'eau pure à la température considérée.

- Q11.** Représenter l'allure du diagramme des phases pression-température du corps pur "eau". Y indiquer le domaine de chaque phase en présence. Définir avec précision les deux points caractéristiques qui y figurent.

L'air d'une cuisine hermétiquement close, de volume $V = 50 \text{ m}^3$, est à la pression atmosphérique p_0 et à la température $T = 293 \text{ K}$. À cette température, la pression de vapeur saturante de l'eau est égale à $2,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Le degré hygrométrique de l'air dans cette pièce est de 55%.

- Q12.** Rappeler la relation entre p_0 et les pressions partielles p_e et p_{as} .

Calculer les masses m_e de vapeur d'eau et m_{as} d'air sec dans la pièce. En déduire la valeur de l'humidité spécifique ϕ de l'air de la pièce, exprimée en kg d'eau par kg d'air sec et définie par : $\phi = \frac{m_e}{m_{as}}$.

- Q13.** On porte à ébullition un récipient rempli d'eau. Calculer le volume V_e d'eau à évaporer pour saturer en humidité l'air de la cuisine, c'est-à-dire atteindre un degré hygrométrique de 100%. On négligera l'augmentation de la température de l'air de la cuisine.

On considère maintenant que la cuisine de volume V est dotée d'un système de renouvellement d'air. L'air est supposé homogène dans la pièce, avec à l'instant t une concentration massique en vapeur d'eau $C(t)$ uniforme (exprimée en kg d'eau par m^3 d'air). De l'air extérieur neuf, de concentration massique en vapeur d'eau C_{ext} constante, entre dans la cuisine avec un débit volumique D_v , tandis que de l'air vicié de concentration massique $C(t)$ sort de la cuisine avec le même débit. Les personnes présentes dans la cuisine et leurs activités sont une source de vapeur d'eau. On note S le taux de création de vapeur d'eau dans la pièce, c'est-à-dire la masse de vapeur d'eau créée par unité de temps.

Q14. Établir une équation différentielle vérifiée par $C(t)$ à partir d'un bilan de masse entre les instants t et $t+dt$ pour la vapeur d'eau dans l'air de la cuisine.

En déduire que le débit volumique minimal nécessaire pour maintenir une concentration en vapeur d'eau sous une valeur limite C_{lim} s'écrit en régime stationnaire : $D_{v,m} = \frac{S}{C_{lim} - C_{ext}}$.

Q15. L'air extérieur, de température égale à 5°C , a un degré hygrométrique de 100%, soit une concentration massique en vapeur d'eau $C_{ext} = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le taux de création de vapeur d'eau dans la cuisine est $S = 0,30 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$. Pour l'air dans la cuisine, de température égale à 20°C , on souhaite ne pas dépasser un degré hygrométrique de 60%, soit une concentration massique en vapeur d'eau $C_{lim} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer le débit volumique minimal nécessaire $D_{v,m}$. Commenter le choix d'un débit massique de renouvellement d'air $D_m = 150 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ comme celui de la VMC double flux étudiée dans la partie I.

II.2 - Principe d'un capteur d'humidité capacitif

Deux disques conducteurs, de rayon a , de même axe (O, \vec{u}_z), distants de $d \ll a$, constituent les armatures d'un condensateur à vide (figure 4). La charge portée par chaque armature varie de façon sinusoïdale avec le temps, à la fréquence f . On note $q(t) = q_0 \cos(2\pi ft)$ la charge portée par l'armature supérieure à l'instant t . On suppose que le courant qui apporte ces charges arrive par des fils infinis confondus avec l'axe de révolution (O, \vec{u}_z) du condensateur.

On s'intéresse au champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t); \vec{B}(M,t))$ en tout point M à l'intérieur du condensateur et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_{\theta}, \vec{u}_z)$.

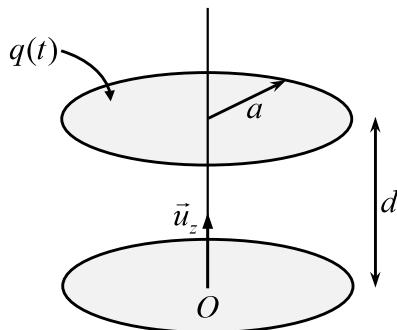


Figure 4 - Condensateur à symétrie cylindrique

Les échelles ne sont pas respectées

Q16. Justifier par des considérations de symétries et d'invariances que le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ est *a priori* de la forme : $\vec{E}(M,t) = E_r(r,z,t)\vec{u}_r + E_z(r,z,t)\vec{u}_z$.

Q17. On suppose en première approximation que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \approx \vec{0}$. En déduire l'ordre de grandeur du rapport $\left| \frac{E_r}{E_z} \right|$. Conclure sachant que les effets de bords sont négligeables ($d \ll a$).

Déduire d'une autre équation de Maxwell que le champ $\vec{E}(M,t)$ est finalement de la forme : $\vec{E}(M,t) = E_z(r,t)\vec{u}_z$.

Q18. On cherche en première approximation un champ uniforme à l'intérieur du condensateur :

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(t) = E_{0,z}(t)\vec{u}_z.$$

Déduire du théorème de Gauss appliqué à une surface à définir clairement, notamment à l'aide d'un schéma, l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(t)$. On donnera le résultat en fonction de $q(t)$, a et de la permittivité du vide ε_0 . On admettra que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur et on supposera que la densité surfacique de charges portée par chaque armature est uniforme.

Du fait de sa dépendance par rapport au temps, le champ $\vec{E}_0(t)$ crée un champ magnétique induit $\vec{B}_1(M,t)$. Le champ magnétique $\vec{B}_1(M,t)$ crée à son tour un champ induit $\vec{E}_2(M,t)$, terme correctif pour le champ électrique qui s'écrit : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(t) + \vec{E}_2(M,t)$.

Q19. À quelle condition portant sur $\|\vec{E}_2\|$ et $\|\vec{E}_0\|$ peut-on considérer que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \simeq \vec{0}$ comme supposé à la Q17 ?

On admet que cette condition est vérifiée si $a \ll c/f$ où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Proposer une interprétation physique.

La condition précédente étant vérifiée, le champ électrique à l'intérieur du condensateur dérive donc d'un potentiel scalaire $V_0(M,t)$ tel que $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_0)$.

Q20. Donner l'expression du potentiel scalaire $V_0(M,t)$ à une constante additive près.

Exprimer la différence de potentiel $V_0(z=d) - V_0(z=0)$ entre les deux armatures et en déduire que la capacité C du condensateur s'écrit : $C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$.

On munit désormais le condensateur d'une armature poreuse et on le remplit d'un polymère hygroscopique pouvant adsorber l'eau de l'air et dont la permittivité diélectrique ε est fonction du degré hygrométrique de l'air. On admet que la capacité C de ce condensateur a la même expression que celle du condensateur à vide établie à la Q20 à condition de remplacer la permittivité ε_0 du vide par la permittivité ε du polymère. Le condensateur possède en outre une résistance de fuite R , principalement due au polymère qui en adsorbant l'eau ne se comporte pas comme un isolant parfait. Le modèle électrique équivalent de ce condensateur est constitué de la capacité C en parallèle avec la résistance R .

Le condensateur est inséré dans le circuit suivant (**figure 5**), appelé pont de Sauty, alimenté sous une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω , où la résistance R_0 et la capacité C_0 sont variables.

On note $u(t)$ la tension entre les points A et B , \underline{e} et \underline{u} les représentations complexes des tensions respectives $e(t)$ et $u(t)$. On note \underline{Z}_0 l'impédance de l'association parallèle de la capacité C_0 et de la résistance R_0 entre les points M et B , et \underline{Z} l'impédance de l'association parallèle de la capacité C et de la résistance R entre les points B et N .

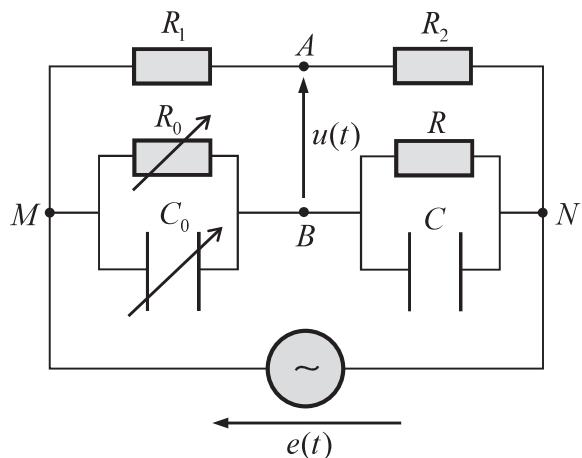


Figure 5 - Pont de Sauty

Q21. Exprimer en fonction de e et des différentes impédances les tensions u_{AN} et u_{BN} .

$$\text{En déduire que } \underline{u} = \frac{R_2 \underline{Z}_0 - R_1 \underline{Z}}{(R_1 + R_2)(\underline{Z}_0 + \underline{Z})} \underline{e}.$$

Q22. Le pont de Sauty est dit équilibré lorsque $\underline{u} = 0$, quelle que soit la tension e . Montrer que l'équilibre du pont permet de déterminer R et C , dont on donnera l'expression en fonction de R_0 , R_1 , R_2 et C_0 .

Q23. On utilise le condensateur en tant que capteur d'humidité dont on donne ci-dessous la courbe d'étalonnage (**figure 6**). Déterminer le degré hygrométrique de la pièce dans laquelle il est plongé sachant que le pont de Sauty est équilibré pour $C_0 = 1,44 \text{ nF}$ avec $R_1 / R_2 = 0,1$.

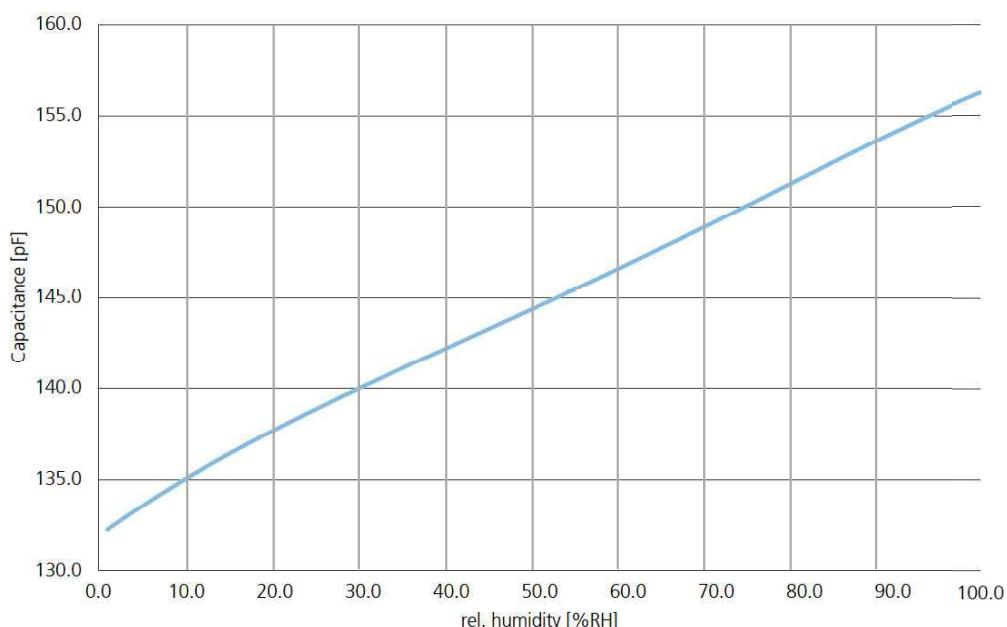
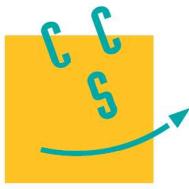


Figure 6 - Courbe d'étalonnage du capteur

Source : data sheet capacitive humidity sensor P14 rapid-W, Innovative Sensor Technology



Problème 2 :

Différents aspects de l'écoulement dans une lame de savon (Centrale 1 PC 2021)

L'étude d'écoulements tourbillonnaires plans, dits aussi bi-dimensionnels, s'applique dans de nombreux domaines, dont les écoulements géophysiques. Parmi ceux-ci, une thématique particulièrement riche est celle des écoulements tourbillonnaires océaniques et atmosphériques de fluide (eau ou air) sur des distances horizontales grandes devant l'épaisseur de la couche de fluide concernée. L'image satellite de la figure 1 présente une allée tourbillonnaire dans le sillage des îles du Cap Vert (image NASA).



Figure 1

Sous certaines conditions, ces écoulements peuvent être modélisés par l'étude des écoulements tourbillonnaires plans dans une lame de savon. Ce sujet propose d'aborder quelques aspects de ces écoulements.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat sur sa copie ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement, il valorise ces questions de façon très significative.

Des données et relations utiles sont disponibles dans le document réponse.

I Interféromètre de Michelson et épaisseur d'une lame de savon

Le but de cette partie est de quantifier, par l'étude de la figure d'interférence à la surface d'une lame de savon, l'écart que présente celle-ci à un écoulement rigoureusement plan. On procédera par analogie avec la figure d'interférence obtenue à l'aide d'un interféromètre Michelson réglé en coin d'air.

I.A – On considère un interféromètre de Michelson dans lequel l'ensemble {flame séparatrice + compensatrice} est assimilé à une unique lame semi-réfléchissante d'épaisseur négligeable. On la note par la suite lame séparatrice (L).

L'interféromètre, éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 est réglé comme schématisé sur la figure 2 : les deux bras sont dissymétriques du fait de la position relative des miroirs : M_1 est parallèle à (J, x) et M_2 est parallèle à (J, y) mais ils ne sont pas à égale distance de J . On considère que les deux ondes qui émergent de l'interféromètre vers l'espace d'observation ont le même éclairement I_0 .

Q 1. Sur la figure A du document réponse, à rendre avec la copie, tracer avec soin les deux rayons issus du rayon incident qui émergent de l'interféromètre dans l'espace d'observation. Sur le même schéma, dans l'espace réservé à cet effet, montrer graphiquement que l'on peut considérer que ces deux rayons sont issus d'une « lame d'air » d'épaisseur e que l'on représentera. On supposera que l'indice de l'air est égal à 1.

Q 2. Établir la différence de marche introduite par le système en fonction de l'angle d'incidence θ sur cette lame et de son épaisseur e .

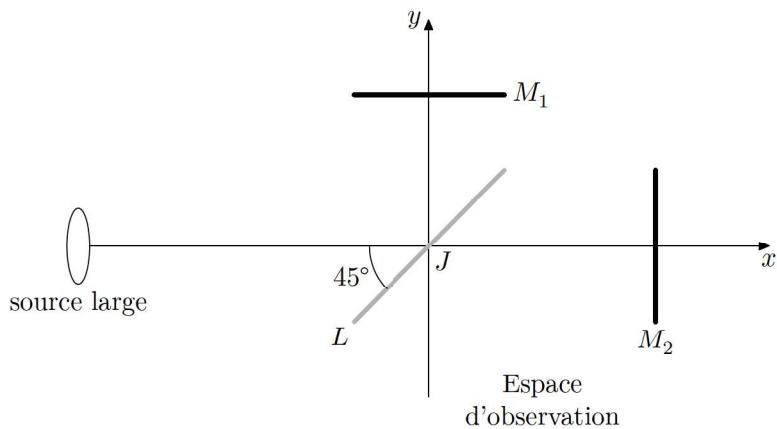


Figure 2 Schéma de l'interféromètre éclairé par une source large

Q 3. Où est localisée la figure d'interférence ? Comment l'observer dans de bonnes conditions si l'on dispose d'un jeu complet de lentilles convergentes de distances focales comprises entre 20 cm et 1 m ? Un schéma clair de la situation expérimentale correspondante est attendu.

Q 4. Montrer que la figure d'interférence est formée d'anneaux d'égale inclinaison (justifier ce terme). On observe sur l'écran la figure d'interférence présentée figure 3.

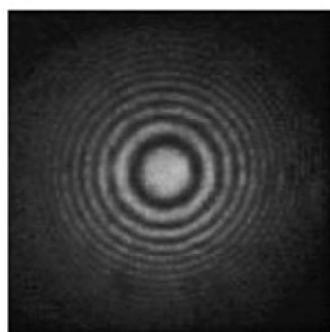


Figure 3 Figure d'interférence : anneaux d'égale inclinaison

On souhaite maintenant régler l'appareil au contact optique.

Q 5. Décrire l'opération : faut-il tourner ou translater un miroir ? Comment savoir dans quel sens ? Décrire l'évolution de la figure d'interférence au cours de l'opération. Quel est l'aspect de l'éclairement sur l'écran une fois ce réglage réalisé ?

Q 6. Partant de cette situation on incline un des miroirs d'un petit angle α pour former un coin d'air. On éclaire le système en incidence quasi-normale de telle sorte que l'on observe des franges d'interférences rectilignes parallèles entre elles. Où sont-elles localisées ? Préciser les conditions de leur observation.

Q 7. On admet que la différence de marche introduite par le coin d'air en un point M de la surface de localisation situé à une distance x de l'arête commune des deux miroirs est $\delta(M) \approx \pm 2n\alpha x$ avec $n = 1$. Déterminer l'interfrange i sur la surface de localisation, en fonction de α et λ_0 . Comment évolue la figure d'interférence si l'angle α varie ?

I.B – Une lame de savon est constituée d'une mince couche d'eau entourée de part et d'autre par une couche de savon. Cette configuration est due aux tensio-actifs contenus dans le savon. Ces molécules sont constituées de deux parties distinctes : une tête hydrophile, généralement ionique, et une queue hydrophobe, généralement constituée d'une chaîne carbonée (figure 4).

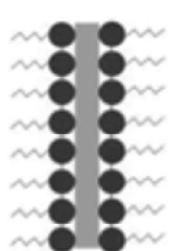


Figure 4

Cette propriété amène ainsi les tensio-actifs à se concentrer et à se fixer les uns aux autres aux interfaces entre l'eau et l'air. En éclairage monochromatique, cette lame fait apparaître des franges d'interférence (figure 5), dont l'interfrange diminue vers le bas de la lame. Ces franges sont liées à un phénomène d'interférence se produisant sur une couche mince. On suppose ici que l'indice de cette fine couche est $n \approx 1,4$. L'épaisseur de cette couche est variable de haut en bas sans dépasser une épaisseur maximum d'environ 1 µm. La masse volumique et la viscosité du liquide savonneux sont pris égaux à ceux de l'eau.

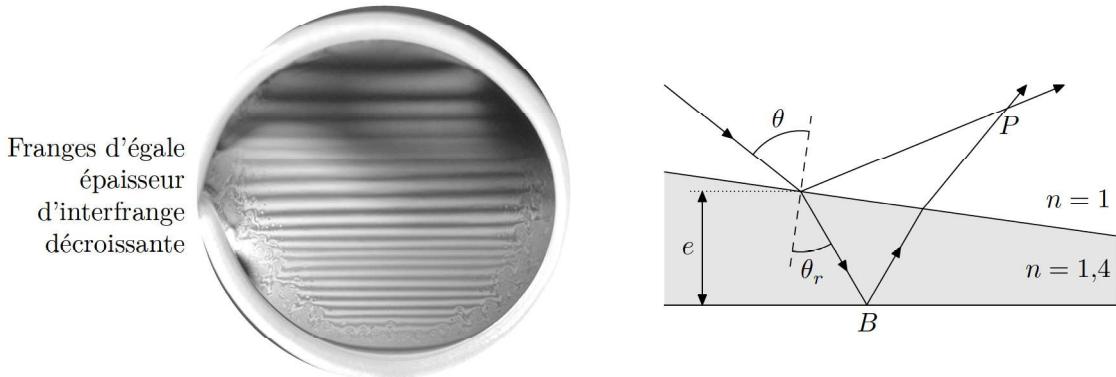


Figure 5 Interférences sur le film (à gauche) et modélisation des rayons lumineux (à droite)

Le trajet d'un rayon lumineux arrivant sous incidence θ sur une lame d'indice n et d'épaisseur locale e , doit tenir compte du phénomène de réfraction à l'intérieur de la lame. On note θ_r l'angle de réfraction et θ l'angle d'incidence. Une division d'amplitude se produit sur la face avant, suivie d'une réflexion sur la face arrière, produisant deux rayons réfléchis par la lame qui interfèrent au point P . On admet que la réflexion sur un milieu plus réfringent s'accompagne d'un déphasage de π .

Q 8. Justifier qu'en incidence quasi-normale, le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent peut s'écrire $\Delta\phi = 2\frac{\pi}{\lambda_0} \left(2ne + \frac{\lambda_0}{2} \right)$.

En l'absence de perturbation extérieures (telles que celles qui seront abordées par la suite) la lame n'est le siège que de son écoulement gravitaire (du haut vers le bas sous l'effet de la gravité). Dans le cadre d'un modèle simplifié, dit d'interface sans interaction, la pression P au sein du fluide en écoulement gravitaire entre l'interface de tensioactifs est supposée uniforme. Le phénomène de drainage des tensioactifs est alors négligé. L'axe (Oz) sera pris vertical ascendant. La figure 6 présente la figure d'interférence observée sur un film de savon, ainsi que les notations introduites.

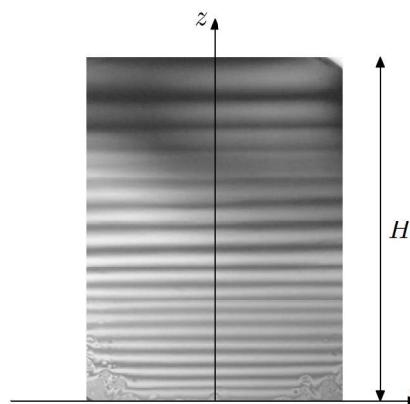


Figure 6 Vue de face de la lame de savon

On note $H = 5,0$ cm la hauteur de la lame de savon. On note $e(z, t)$ l'épaisseur de la lame, dans la direction (Oy), à l'altitude z et à l'instant t . Du fait de l'écoulement de drainage gravitaire, cette épaisseur varie au cours du temps à z fixé et à t fixé elle augmente vers le bas.

Q 9. Compte tenu de la topographie des franges observées sur la figure 6, discuter qualitativement l'écart du profil de la lame à une portion de coin d'angle constant, induit par son drainage gravitaire.

Afin d'interpréter ces différences, une modélisation de mécanique des fluides, non détaillée ici, aboutit à l'expression suivante pour l'épaisseur e de la lame en fonction de z et du temps :

$$e(z, t) = \sqrt{\frac{2\eta(H - z)}{\rho g t}}.$$

Q 10. Discuter qualitativement la validité de cette expression en regard de la figure 6.

Pour aller plus loin dans la caractérisation de la variation de l'épaisseur de la lame, on se propose d'effectuer une approche semi-empirique de la loi de variation de l'épaisseur de la lame. On se place à t fixé et on suppose une loi de puissance semi-empirique de la forme

$$e(z, t) = K(H - z)^\beta$$

où β et K sont des constantes. On relève pour cela expérimentalement la position des premières franges brillantes. Le tableau 1 présente les résultats obtenus en indiquant la position z de ces franges, pour un éclairage monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et un film de savon d'indice optique $n = 1,4$.

Numéro de la frange brillante	1	2	3	4	5	6	7	8
Position z (cm)	4,5	4,1	3,7	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6

Tableau 1

- Q 11.** Compte tenu de ces valeurs numériques, analyser graphiquement, à l'aide du support fourni en figure B du document réponse, si cette loi semi-empirique est conforme aux observations. Si c'est le cas, donner la valeur numérique de β .

Problème 3 : Télécommunications (Mines 1 PSI 2021)

Ce sujet est consacré à l'étude de modes de communication à distance, relevant de plusieurs domaines de la physique ; les différentes parties sont totalement indépendantes et, à l'intérieur même de celles-ci, de nombreuses questions sont également indépendantes. Pour toutes les applications numériques, repérées par les initiales *A.N.*, on se contentera d'un ou deux chiffre(s) significatif(s). A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont repérés par une notation avec barre : $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Une grandeur sinusoïdale de pulsation ω sera associée à la représentation $e^{i\omega t}$.

Données numériques et constantes physiques

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante d'AVOGADRO : $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6\,400 \text{ km}$

I Le fil du télégraphe

- Sire, une nouvelle dépêche.
- D'où vient-elle ?
- De Tomsk.
- Le fil est coupé au-delà de cette ville ?
- Il est coupé depuis hier.
- D'heure en heure, général, fais passer un télégramme à Tomsk, et que l'on me tienne au courant.

Dans le roman de JULES VERNE, *Michel Strogoff*, publié en 1876, l'année même de la fondation à Paris de l'École Supérieure de Télégraphie (actuellement Télécom Paris), les télécommunications électriques (le télégramme) jouent, dès la première page, un rôle essentiel.

- – 1. L'alphabet cyrillique utilisé par Michel Strogoff comporte 32 lettres, plus les chiffres et quelques symboles de ponctuation. Combien de symboles binaires (les bits ou les points et traits du code MORSE) faut-il prévoir pour coder chaque caractère d'un document écrit en cyrillique contenant du texte, des chiffres et de la ponctuation ?

A.N. : sachant qu'un opérateur compose 3 symboles binaires par seconde, combien de temps faut-il pour transmettre une page complète de texte comme celle-ci par exemple ? On détaillera l'évaluation proposée.

Le premier télégraphe électrique terrestre a été mis en service en 1838 par WHEATSTONE en Angleterre et le premier câble sous-marin posé en 1851 entre la France et l'Angleterre. La suite de ce sujet explore quelques propriétés de la transmission d'informations le long d'un fil électrique.

II La télégraphie sans fil

Le physicien italien MARCONI est considéré comme un des inventeurs de la transmission à grande distance de signaux électromagnétiques (la *T.S.F.*, télégraphie sans fil, ou radio). Il a reçu à ce titre le prix NOBEL de physique en 1909. On lui doit la réalisation de la première transmission radio transatlantique (1901) entre le nord-est du Canada et le sud-ouest de l'Angleterre, séparés par une distance à vol d'oiseau de 3 500 km.

II.A Échos ionosphériques

Lors de la première série d'expériences, le récepteur se situait au niveau du sol et l'émetteur était porté par des cerf-volants dont l'altitude, limitée par la longueur du fil, ne dépassait pas $h = 180$ m. On néglige tout phénomène de réflexion sur le sol, la portée d'un tel émetteur est donc limitée par la courbure de la Terre.

- – 2 . Représenter sur un schéma les points d'émission E et de réception R du signal radio correspondant à cette transmission. Montrer qu'elle n'est possible que si la distance $d = ER$ vérifie $d < d_{\max}$ et exprimer d_{\max} en fonction de h et du rayon terrestre R_T .

A.N. : calculer d_{\max} et conclure.

La propagation sur une grande distance d'ondes radio est en fait possible grâce aux *échos ionosphériques*, qu'on assimilera à des réflexions de l'onde électromagnétique sur la surface de

séparation entre la basse atmosphère (assimilée au vide) et la haute atmosphère (l'ionosphère qui forme un plasma). Une onde électromagnétique incidente plane, progressive, de pulsation ω , polarisée rectilignement selon (Oy), est émise en direction de ce plasma, dans une direction faisant l'angle θ avec la verticale (Oz). L'ensemble est représenté sur la figure 5.

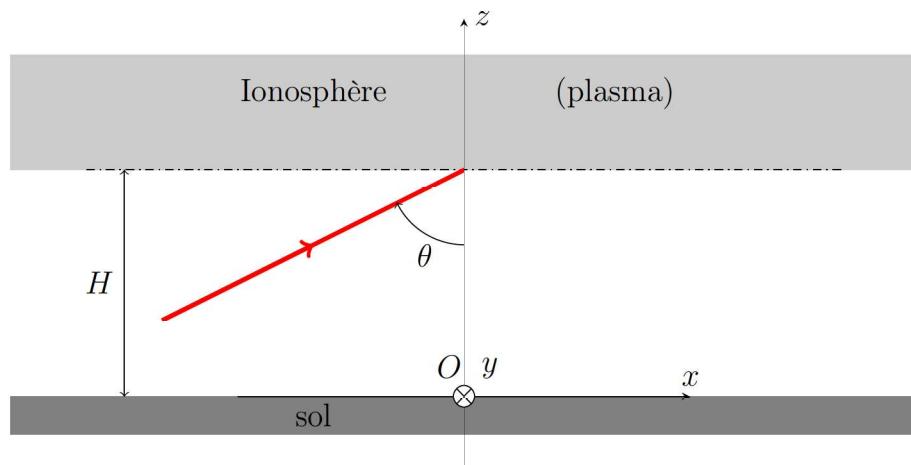


FIGURE 5 – Échos ionosphériques

- – 3 . Exprimer la représentation complexe du champ électrique \vec{E} de l'onde incidente d'amplitude E_0 ; on prendra l'origine des phases au point origine O .

Le champ électrique dans le plasma étant recherché sous la forme $\vec{E}' = E'_0 \vec{e}_y \exp [i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{r})]$, on peut établir l'équation de dispersion (ED) $\omega'^2 = \omega_p^2 + c^2 k'^2$ où $\omega_p^2 > 0$ est une constante qui ne dépend que des propriétés électromagnétiques locales de l'ionosphère. Par ailleurs, on admettra la continuité de toutes les composantes du champ électromagnétique à l'interface $z = H$ entre le vide et ce plasma. Une onde électromagnétique réfléchie existe également mais sa prise en compte n'est pas utile dans les calculs qui suivent.

- – 4 . Expliciter ω' et les composantes $k'_x = \vec{e}_x \cdot \vec{k}'$ et $k'_y = \vec{e}_y \cdot \vec{k}'$ en fonction de ω , c et θ .
 □ – 5 . En déduire $k_z'^2$ en fonction de ω , ω_p , c et $\cos \theta$ et en déduire que l'onde transmise ne peut pas se propager dans le plasma si $\omega < \omega_\ell$ et exprimer la pulsation limite ω_ℓ en fonction de ω_p et θ .
 □ – 6 . A.N. : pour l'ionosphère on prendra $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \sim 1 \text{ MHz}$ et $H \sim 175 \text{ km}$. Calculer $\cos \theta$ puis la fréquence limite $f_\ell = \omega_\ell / 2\pi$ dans le cas d'une transmission sur une distance totale $d \sim 3500 \text{ km}$ (en négligeant l'influence de la courbure terrestre). Conclure.

II.B L'ionosphère

On considérera que l'ionosphère forme un plasma peu dense qui contient une densité particulaire uniforme n d'électrons par unité de volume, et autant d'ions (de forte masse donc presque immobiles) de sorte que la charge totale reste partout nulle. On étudie ici encore la propagation d'une onde plane progressive et monochromatique, de champ électrique complexe \vec{E} dans le plasma.

- – 7 . Dans le cadre non relativiste, en justifiant les simplifications, expliciter l'équation du mouvement des électrons et en déduire la densité volumique de courant dans ce milieu sous la forme $\vec{J} = \bar{\gamma}(\omega) \vec{E}$; préciser l'expression, le nom et la dimension de la grandeur complexe $\bar{\gamma}(\omega)$.

- – 8 . Montrer que cette expression de \vec{J} permet d'obtenir une équation de dispersion (ED) ; préciser en particulier l'expression de la grandeur ω_p .
 - – 9 . Que peut-on dire de la puissance moyenne dissipée dans ce milieu lors du passage de l'onde ? Que devient la puissance incidente électromagnétique dans le cas d'un écho ionosphérique ?
- Les ondes électromagnétiques actuellement utilisées pour la transmission de signaux radio ou télévision vérifient $\omega \gg \omega_p$, au contraire des ondes des expériences historiques étudiées précédemment.
- – 10 . Citez l'ordre de grandeur des fréquences utilisées actuellement pour ce type de signaux. Quels sont les avantages et les inconvénients d'une transmission à haute fréquence ?

FIN DE L'ÉPREUVE