Devoir à rendre le 18/12/2020

Exercice 1 :
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a,b) \in A \times B$, $a \leq b$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure.
2. Montrer que B admet une borne inférieure.
3. Prouver que $\mathrm{Sup} A \leq \mathrm{Inf} B$.

Exercice 2 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite avec plusieurs valeurs de a.
2. Intuiter le comportement de la suite u en fonction de a.
3. Prouver votre conjecture.

Exercice 3 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. L'objectif est de démontrer que f admet un point fixe i.e. qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

1. Dessiner le graphe de plusieurs fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$ croissante. (f n'est pas nécessairement une bijection, ni nécessairement continue.) Vérifier sur ces exemples qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soit $E = \{x \in [0,1] \,:\, x \leq f(x)\}$. Montrer que E admet une borne supérieure.
3. On pose $s = \mathrm{Sup} E$.
   (a) Sur vos exemples, déterminer s et vérifier que l'on a $f(s) = s$.
   (b) On suppose que $f(s) > s$.
   En déduire que $f(s) \in E$ et conclure à une absurdité.
   (c) On suppose que $f(s) < s$.
   En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $f(s) < x \leq s$ et conclure à une absurdité.
   (d) Conclure.