DM9

I

1) Facilement on trouve $\chi_A = (X-4)^2(X-16)$

L'espace propre pour $\lambda=4$ est $\mathrm{Vect}<\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}>$ et pour $\lambda=16$ $\mathrm{Vect}<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}>$

donc A est DZ et en posant $P = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}16&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

2) on peut par exemple prendre $\cancel{B = P\begin{pmatrix}\varepsilon_1 4&0&0\\0&\varepsilon_2 2&0\\0&0&\varepsilon_2 2\end{pmatrix}P^{-1}}$ (

$$B = P\begin{pmatrix}4\varepsilon_1&0&0\\0&2\varepsilon_2&0\\0&0&2\varepsilon_2\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{avec } \varepsilon_1 = \mp 1 \quad \varepsilon_2 = \mp 1$$

on a $B^2 = P\begin{pmatrix}16&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}P^{-1} = A$. Ceci donne bien 4 matrices possibles.

(Il y en a d'autres !!)

3) a) $A^2 = 20A - 64 I_3$.

b) $B^2 = a^2 I + 2ab A + b^2 A^2 = (a^2 - 64b^2) I + (2ab + 20b^2) A$

comme (A, I) est une famille libre on a $B^2 = A \iff \begin{cases} a^2 = 64 b^2 \\ 2ab + 20b^2 = 1 \end{cases}$

en résolvant on trouve : $\begin{cases} a = -8b \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 8b \\ b^2 = \frac{1}{36} \end{cases}$.

Il y a donc 4 matrices possibles :

$4I - \frac{1}{2}A$; $-4I + \frac{1}{2}A$; $\frac{4}{3}I + \frac{1}{6}A$, $-\frac{4}{3}I - \frac{1}{6}A$.

Avec les choix faits au I 2) on trouve les mêmes matrices par calcul direct.

(Mais d'autres choix sont possibles)

$\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&0&-2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8&2&2\\2&8&2\\2&2&8\end{pmatrix}$; $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8&2&2\\2&8&2\\2&2&8\end{pmatrix}$

II

1) $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$ telle que $A = PDP^{-1}$.

pour tout i, soit μ_i une racine carrée de λ_i (existe toujours dans $\mathbb{C}$).

Posons $\Delta = \begin{bmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{bmatrix}$ alors $\Delta^2 = D$ et donc $(P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$

Par suite $B = P\Delta P^{-1} \in \sqrt{A}$ et donc $\sqrt{A}$ est non vide.

2) . Si $\lambda = 0$ il suffit de choisir par exemple $B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix}$. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $B^2 = 0$.

. Si $\lambda \neq 0$ on peut prendre μ une racine carrée de λ dans $\mathbb{C}$

la matrice $B = \begin{bmatrix} \mu & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu & \\ & & & 0 & \frac{\mu}{\alpha} \\ & & & \mu\alpha & 0 \end{bmatrix}$ a pour carré λI pour tout choix de α.

3) . Si $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (on suppose $\lambda_1 = \lambda_2$)

alors pour toute matrice B_1 vérifiant $B_1^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ on peut choisir

$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & (0) \\ & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mu_n \end{bmatrix}$ avec $\mu_i^2 = \lambda_i$ et l'on a bien $B^2 = A$.

Comme il y a une infinité de choix pour B_1, il y a une infinité de choix pour B.

. Si A est seulement diagonalisable :

$A = PDP^{-1}$. Alors l'égalité $B^2 = D$ implique $(PBP^{-1})^2 = A$.

Nous savons que l'équation $B^2 = D$ a une infinité de solutions et de plus

la transformation $B \to PBP^{-1}$ est injective, donc $\sqrt{A}$ est infini.

4 (a) Si $x \in E_{\lambda_i}(A)$ on a $Q_i(x) = x$ et $Q_j(x) = 0 \quad \forall j \neq i$

Donc $\left(\sum \lambda_j Q_j\right)(\vec{x}) = \sum_j \lambda_j Q_j(\vec{x}) = \lambda_i Q_i(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x} = A\vec{x}$

Les ~~matrices~~ endomorphismes $\sum \lambda_j Q_j$ et A coïncident sur les $E_{\lambda_i}(A)$. Or $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(A)$

Par suite $\sum \lambda_j Q_j = A$.

~~b)~~ Bien sûr on a $Q_j \circ Q_j = \delta_{ij} Q_i$ (projecteurs associés à une somme directe)

(b) Par récurrence facile on prouve que $\underline{\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k Q_i}$ (récurrence à faire)

Donc $A^k \in \mathrm{Vect}\langle Q_1, \dots, Q_p\rangle$

Par linéarité, $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(A) \in \mathrm{Vect}\langle Q_1, \dots, Q_p\rangle$

(c) Comme A est DZ on a $\pi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$ donc π_A est de degré p

Ceci prouve que l'algèbre $\mathbb{C}[A]$ est de dimension p.

(d) On a d'après (b) $\mathbb{C}[A] \subset \mathrm{Vect}\langle Q_1, \dots, Q_p\rangle$. Mais $\dim \mathbb{C}[A] = p$

et $\dim \mathrm{Vect}\langle Q_1, \dots, Q_p\rangle \leq p$. Donc c'est une égalité.

(Rq: On a au passage prouvé que $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre, et que les Q_i sont dans $\mathbb{C}[A]$)

(e) $B^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} b_i Q_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} b_i^2 Q_i^2 + \sum_{i \neq j} b_i b_j \underbrace{Q_i Q_j}_{=0} = \sum_1^p b_i^2 Q_i^2 = \sum_{i=1}^{p} b_i^2 Q_i$

$B^2 = A \iff \sum_1^p b_i^2 Q_i = \sum_1^p \lambda_i Q_i \iff \boxed{b_i^2 = \lambda_i \quad \forall i}$ (les Q_i sont indépendants)

c'est la C.N.S cherchée

(f) L'équation $b_i^2 = \lambda_i$ a $\underline{2 \text{ racines}}$ si $\lambda_i \neq 0$, $\underline{1 \text{ racine}}$ si $\lambda_i = 0$

Par suite le nombre de choix de $(b_1, \dots, b_p)$ est 2^p $\underline{\text{si } A \text{ est inversible}}$

$\underline{2^{p-1}}$ sinon

5 :

(a) On est dans le cas $p=n$ de la question 4(c)

(b) (i) Si $MA = AM$. Soit $X \in E_\lambda(A)$ $\quad MAX = \lambda MX = AMX$

Donc $A(MX) = \lambda MX$ et $MX \in E_\lambda(A)$: $E_\lambda(A)$ est stable par M.

Si $\forall \lambda$, $E_\lambda(A)$ est stable par M.

Soit $\lambda \in Sp(A)$, soit $X \in E_\lambda(A)$ $\quad \begin{cases} AMX = \lambda MX \\ MAX = M(AX) = \lambda MX \end{cases}$ donc MA et AM coïncident sur $E_\lambda(A)$

Or A est diagonalisable, donc AM et MA coïncident sur $\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A) = E$ et par suite $AM = MA$.

(ii) Comme les espaces propres sont de dimension 1, et le spectre de cardinal n on peut noter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres et choisir $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ tels que $E_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Vect}\langle \vec{e_i} \rangle$ ($\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ base de E)

Supposons que $MA = AM$ alors d'après (ii) $M\vec{e_i} \in E_{\lambda_i}(A)$ donc $M\vec{e_i} \in \mathrm{Vect}\langle \vec{e_i} \rangle$

ceci prouve que $\mathrm{Mat}(\mathcal{B}, M)$ est <u>diagonale</u>. Notons $\mathcal{C}(A)$ l'EV des matrices qui commutent avec A

Comme les matrices diagonales forment un EV de dimension n on a

. $\dim \mathcal{C}(A) \leq n$

Mais comme $\mathbb{C}[A] \subset \mathcal{C}(A)$ on a $\dim \mathcal{C}(A) \geq \dim \mathbb{C}[A] = n$.

Par suite <u>$\mathbb{C}[A] = \mathcal{C}(A)$</u>

(c) Soit $B \in \sqrt{A}$ alors $AB = A^3 = BA$ donc $B \in \mathcal{C}(A)$ et par suite $B \in \mathbb{C}[A]$.

ainsi $B \in \mathbb{C}[A] \cap \sqrt{A}$ qui est un ensemble fini d'après 4(f) $\square$.

6 : Les valeurs propres de A sont $0, 1, -1$. Elles sont simples, donc d'après 4(f) et 5(c) A possède 4 racines carrées.

III

1) $B^{2k} = A^{k} = 0$ donc <u>B est nilpotente</u>

On sait que l'ordre de nilpotence ne peut pas dépasser la dimension donc $B^n = 0$

$A^{k-1} = B^{2k-2}$ Mais $k > \frac{n+1}{2}$ donc $2k > n+1$ ie $2k \geqslant n+2$ (ce sont des entiers). Par suite $2k-2 \geqslant n$ et donc $\underline{A^{k-1} = 0}$: c'est faux car l'ordre de nilpotence de A est k.

Donc $\sqrt{A} = \emptyset$.

2) (a) Le polynôme caractéristique de A est $(X-a)^n = \chi_A$

Par le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ donc $(A - aI)^n = 0$

Ainsi $N = (A - aI)$ est nilpotente.

(b) <u>Une première méthode</u> consiste à travailler directement avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$.

on a $P^2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_k b_j X^{k+j}$

on peut regrouper selon les puissance de X : $P^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{j+i=k} b_i b_j$

Pour que X^n divise $P^2 + a - X$ il faut que tous les coefficients de $d° \leqslant n-1$ soient nuls :

Ceci donne
$$\begin{cases} c_0 + a = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_j = 0 \ \forall j \in [\![2, n-1]\!] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0^2 = +a \\ 2 b_1 b_0 = 1 \\ \forall j \in [\![2, n-1]\!] \ 2 b_j b_0 + \sum_{k=1}^{j-1} b_k b_{j-k} = 0 \end{cases}$$

. les 2 premières équations fournissent b_0 et b_1 (on choisit pour b_0 l'une des racines carrée de $+a$) la seconde équation fournit b_1 <u>car $b_0 \neq 0$</u> $(a \neq 0)$)

. les équations suivantes permettent de calculer b_j en fonction de $b_0, \dots, b_{j-1}$ <u>car $b_0 \neq 0$</u> : Par le principe de récurrence la suite $(b_0, \dots, b_{n-1})$ est bien définie

(c) on <u>évalue en</u> ~~N~~ ~~P(N)~~ $P^2(N) + aI - N = 0$ (car X^n divise $P^2 + a - X$)

Donc $P^2(N) = N + aI = A$. La matrice $B = P(N)$ convient

IV

1 : C'est du cours $\dim E_k = m_k$.

2 : Soit $x \in E_k$ $\quad (A-\lambda_k I)^{m_k} x = 0$ donc $(B^2-\lambda_k I)^{m_k} x = 0$

$(B^2-\lambda_k I)^{m_k} Bx = B(B^2-\lambda_k I)^{m_k} x = B0 = 0$ (car $(B^2-\lambda_k I)^{m_k}$ et B commutent)

Donc $Bx \in E_k$.

E_k est donc stable par B, et aussi par $B^2 = A$.

Clairement $\forall x \in E_k$ $\quad B^2 x = Ax$ donc $B_k^2 = A_k$.

3 : Comme $E = \bigoplus E_k$ il existe un unique endomorphisme B tel que $B_{|E_k} = B_k$

$\forall x \in E_k$ on a $B^2 x = B_k^2 x = A_k x = Ax$.

B^2 et A coïncident sur les E_k et $\bigoplus E_k = E$ donc $B^2 = A$.

4 $(A_k - \lambda_k I)^{m_k} = 0$ car $E_k = \ker(A-\lambda_k I)^{m_k}$. Par suite $(X-\lambda_k)^{m_k} = P_k$

annule A_k : Il en résulte que $Sp(A_k) \subset \{\lambda_k\}$ (racines de P_k)

le spectre est non vide donc $Sp(A_k) = \{\lambda_k\}$

5 : Si A est inversible, $\forall k$ $\lambda_k \neq 0$. Par III 2, $\exists B_k \in \sqrt{A_k}$ pour tout k.

Par IV 3), $\exists B$, $B \in \sqrt{A}$.

V

1) Soit λ une vp réelle strictement négative : Soit $F = \ker(A-\lambda I)^{m_\lambda}$

~~alors~~ Si $B^2 = A$, d'après IV B stabilise F et si on note B_λ et A_λ les

induits, on a $B_\lambda^2 = A_\lambda$ Donc $(\det B_\lambda)^2 = \det A_\lambda$. Mais λ est la seule vp de A_λ

donc $\det A_\lambda = \lambda^{m_\lambda}$ ainsi $\lambda^{m_\lambda} = (\det B_\lambda)^2 > 0$ et m_λ est donc pair ($\lambda < 0$)

2) Écrivons le polynôme minimal de A sous la forme:

$\Pi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)\times P_1\cdots\times P_s$ où : $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont les valeurs propres réelles, et $P_1,\dots,P_s$ sont les polynômes irréductibles de degré 2, ayant 2 racines complexes conjuguées. Chacun des facteurs apparaît à la puissance 1, car A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Comme tous ces polynômes sont irréductibles, on a d'après le lemme des noyaux:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(A) \bigoplus_{j=1}^{s} \ker P_j(A)$$

. On va construire une solution de $B^2=A$ par ses restrictions à chaque terme de cette somme:

1er cas : $\lambda_i \geq 0$ alors sur $E_{\lambda_i}(A)$ on pose $B_i = \sqrt{\lambda_i}\, I$,

2ème cas $\lambda_i < 0$ alors $\dim E_{\lambda_i}(A)$ est paire. Posons $B_i = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_i \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_i \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \lambda_i \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$

Alors B_i convient.

3ème cas: on se place sur $\ker P_j(A)$

Écrivons $P_j = X^2 + a_j X + b_j$ avec $a_j^2 - 4b_j < 0$

Notons $\hat{A}$ la restriction de A à $\ker P_j(A)$. Alors $\hat{A}^2 + a_j\hat{A} + b_j I = 0$

Cette restriction possède un polynôme minimal de degré 2, donc l'algèbre $\mathbb{R}[\hat{A}]$ est de dimension 2: $\mathbb{R}[\hat{A}] = \mathrm{Vect}\langle I, \hat{A}\rangle$.

Ceci suggère de chercher une solution $\hat{B}$ sous la forme $\hat{B} = uI + v\hat{A}$

Il vient $\hat{B}^2 = (u^2 - b_j v^2) I + (2uv - v^2 a_j)\hat{A}$

Il suffit donc de choisir (u,v) solutions de $\begin{cases} u^2 = b_j v^2 \\ 2uv - v^2 a_j = 1 \end{cases}$

V 3 : On le fait à la "main" $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Il vient $\begin{cases} a^2 = -bc = d^2 \\ (a+d)\,c = -1 \quad (2) \\ (a+d)\,b = 1 \quad (3) \end{cases}$

on en déduit $a^2 = d^2$ mais $a+d \neq 0$ (sinon $(a+d)c \neq -1$)

donc $a = d$

les équations (2) (3) assurent $b = -c$ et on a donc $a^2 = c^2 = b^2 = d^2$

La suite des calculs est facile : Il y a 2 matrices : $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et son opposé

Remarque ; Comme les vp de A sont distinctes A est diagonalisable, ~~donc~~

la question II 5] s'applique - les solutions sont des polynômes en A.

comme $A^2 = I$ il est facile de voir qu'elles sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

en élevant au carré on trouve 4 solutions. 2 seulement sont réelles.

(conforme au II 4)