Limites

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Dans la suite, on s'intéresse à l'existence d'une limite de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou étant une extrémité de I. On notera $a \in \overline{I}$.

I. Limite d'une fonction en un point

1. Définitions (*)

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$.*

— *Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

— *Si $a = +\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \geq M \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

— *Si $a = -\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \leq M \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$.*

— *Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

— *Si $a = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \geq M' \Rightarrow f(x) \geq M$$

— *Si $a = -\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \leq M' \Rightarrow f(x) \geq M$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$.*

— *Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

— *Si $a = +\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \geq M' \Rightarrow f(x) \leq M$$

— *Si $a = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ en a lorsque*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists M' \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \leq M' \Rightarrow f(x) \leq M$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$.

Ces définitions sont lourdes alors que l'idée est la même dans les trois cas : si x est proche de a alors $f(x)$ est proche de ℓ. Par soucis d'unification, on introduit la notion de voisinage.

2. Voisinages

Définition. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

- *Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout intervalle de la forme $[a-h, a+h]$ avec $h \in \mathbb{R}^{+*}$.*
- *Si $a = +\infty$, on appelle voisinage de a tout intervalle de la forme $[M, +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$.*
- *Si $a = -\infty$, on appelle voisinage de a tout intervalle de la forme $]-\infty, M]$ avec $M \in \mathbb{R}$.*

Un voisinage de a est noté $\mathcal{V}_a$.

Proposition. *Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f admet une limite ℓ en a si pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de l, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a dans tel que*

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap I,\ f(x) \in \mathcal{V}_\ell$$

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$. On appelle voisinage de a dans I toute intersection de I et d'un voisinage de a.*

Proposition. *Soit $a \in \overline{I}$ alors tout voisinage de a dans I est non vide et non réduit à un point.*

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$. On dit qu'une propriété sur f est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur un voisinage de a dans I.*

II. Propriétés

Proposition. *(*) Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$ alors celle-ci est unique.*
On note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$

Proposition. *Si f admet une limite en $a \in I$ alors celle-ci est égale à $f(a)$*

Proposition. *(*) Si f admet une limite finie en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée au voisinage de a.*

Proposition. *(*) Si f admet une limite strictement positive en $a \in \bar{I}$, alors f est strictement positive au voisinage de a.*

Corolaire. *Si f admet une limite l en $a \in \bar{I}$ et si $M > l$ (resp. $m < l$), alors, au voisinage de a, f est majorée par M (rep. minorée par m).*

Proposition. *Si f est positive au voisinage de a et admet une limite en a alors cette limite est positive.*

Corolaire. *Si f est majorée par M (respectivement minorée par m) au voisinage de a et admet une limite en a alors $\lim\limits_{a} f \leq M$ (respectivement $\lim\limits_{a} f \geq m$).*
Si f et g admettent des limites en a et si $f \leq g$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{a} f \leq \lim\limits_{a} g$.

Remarque : Les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

III. Limites à droite et à gauche

Définition. *On dit que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite en $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ si $f_{|I \cap]a,+\infty[}$ admet une limite ℓ en a.*

Remarque : Pour que f admette une limite à droite en $a \in \overline{I}$, il faut que f soit définie à droite de a.
Remarque : Si $a = -\infty$, alors les notions de limites à droite en a et de limite en a coïncident.
Remarque : Si $a = Inf(I)$ et si f n'est pas définie en a, alors les notions de limites à droite en a et de limite en a coïncident.
Si $a = Inf(I)$ et si f est définie en a, alors les notions de limites à droite en a et de limite en a ne coïncident pas forcément.
Remarque : Comme $a \notin I \cap]a, +\infty[$, même si f est définie en a et admet une limite à droite en a, cette limite n'est pas nécessairement égale à $f(a)$
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto E(-x)$ possède une limite à droite en 0 qui vaut -1 et pas $f(0)$.

Traduction : (*)

— Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \overline{I}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $\ell = +\infty$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \overline{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

— Si $\ell = -\infty$ alors f admet une limite ℓ à droite en $a \in \overline{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

Proposition. *Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite en $a \in \overline{I}$ alors celle-ci est unique.*
On note $\ell = \lim\limits_{x \to a,\, x > a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^+} f$

Définition. *On dit que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à gauche en $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ si $f_{|I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite ℓ en a.*

Remarque : Pour que f admette une limite à gauche en $a \in \overline{I}$, il faut que f soit définie à gauche de a.
Traduction :

— Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \overline{I}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

— Si $\ell = +\infty$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \overline{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \geq M$$

— Si $\ell = -\infty$ alors f admet une limite ℓ à gauche en $a \in \overline{I}$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq M$$

Proposition. *Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ à gauche en $a \in \overline{I}$ alors celle-ci est unique.*
On note $\ell = \lim\limits_{x \to a,\, x < a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^-} f$

Proposition. *(*) Si $a \in I$ tel que f soit définie au voisinage de a alors f a une limite en a si et seulement si f a des limites à droite et à gauche en a qui sont égales à $f(a)$.*

Extension : Soit f définie sur $I \setminus \{a\}$.
On dit que f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a si $f_{|I \cap]-\infty, a[}$ (resp. $f_{|I \cap]a, +\infty[}$) admet une limite en a.admet une limite ℓ en a.
On dit que f admet une limite en a si elle admet des limites à droite et à gauche en a qui sont égales.
Exemple : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

IV. Opérations sur les limites

Théorème. *Caractérisation séquentielle (*)*
Soit $a \in \overline{I}$ alors f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

$$\forall u \in I^{\mathbb{N}},\ \lim u = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$$

Proposition. *Soit f et g admettant des limites finies ℓ et ℓ' en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{a}(f+g) = \ell + \ell'$ et $\lim\limits_{a}(fg) = \ell\ell'$.*

Proposition. *Si* $\lim_a f = +\infty$ *et si* g *est minorée au voisinage de* a *alors* $\lim_a (f+g) = +\infty$.

Corolaire. *Si* $\lim_a f = -\infty$ *et si* g *est majorée au voisinage de* a *alors* $\lim_a f + g = -\infty$.

Corolaire. *Soit* f *et* g *admettant des limites* ℓ *et* ℓ' *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors*
- *Si* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $\ell' = +\infty$ *alors* $\lim_a (f+g) = +\infty$,
- *Si* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* $\ell' = -\infty$ *alors* $\lim_a (f+g) = -\infty$,
- *Si* $\ell = \ell' = +\infty$ *alors* $\lim_a (f+g) = +\infty$,
- *Si* $\ell = \ell' = -\infty$ *alors* $\lim_a (f+g) = -\infty$.

Théorème. *Soit* f *et* g *telles* $\lim_a f = +\infty$ *et que* g *soit minorée au voisinage de* a *par* $m > 0$ *alors* $\lim_a fg = +\infty$.

Corolaire. *Soit* f *et* g *admettant des limites* ℓ *et* ℓ' *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors*
- *Si* $\ell = \ell' = +\infty$ *et* $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$ *alors* $\lim_a (fg) = +\infty$,
- *Si* $\ell = +\infty$ *et* $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$ *alors* $\lim_a (fg) = +\infty$,
- *Si* $\ell = +\infty$ *et* $\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$ *alors* $\lim_a (fg) = -\infty$,
- *Si* $\ell = +\infty$ *et* $\ell' = -\infty$ *alors* $\lim_a (fg) = -\infty$.

Proposition. *Si* f *ne s'annule pas au voisinage de* $a \in \overline{I}$ *alors la fonction* $\frac{1}{f}$ *est bien définie au voisinage de* a. *De plus,*
- *si* $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}^*$ *alors* $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$,
- *si* $\lim_a f = 0$ *alors* $\lim_a \left|\frac{1}{f}\right| = +\infty$,
- *si* $\lim_a |f| = +\infty$ *alors* $\lim_a \frac{1}{f} = 0$.

Théorème. *Soient* f *et* g *respectivement définies sur* I *et* J *telles* f *soit à valeurs dans* J *alors la fonction* $g \circ f$ *est bien définie sur* I. *De plus, si* $\lim_a f = \ell$ *et* $\lim_l g = \ell'$ *alors* $\lim_a g \circ f = \ell'$

V. Théorème d'existence de limites

Théorème. *Théorème d'encadrement*
Soit f, g *et* h *trois fonctions définies au voisinage de* a *alors*
- *si* $f \leq g \leq h$ *au voisinage de* a *et si* $\lim_a f = \lim_a g = \ell \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim_a f = \ell$.
- *si* $f \leq g$ *au voisinage de* a *et si* $\lim_a f = +\infty$ *alors* $\lim_a g = +\infty$.
- *si* $f \leq g$ *au voisinage de* a *et si* $\lim_a g = -\infty$ *alors* $\lim_a f = -\infty$.

Théorème. *Théorème de la limite monotone : (*)*
Soit f *définie sur* I
Notons $s = \sup(I)$ *(resp.* $i = \inf(I)$ *si* I *est majoré) et* $s = +\infty$ *(resp.* $i = -\infty$*) sinon.*
Si f *est croissante, alors*
- f *admet une limite à gauche en* s. *Cette limite est finie et égale à* $\sup\{f(x), x \in I \cap]-\infty, s[\}$ *si* f *est majorée et égale à* $+\infty$ *sinon.*
- f *admet une limite à droite en* i. *Cette limite est finie et égale à* $\inf\{f(x), x \in I \cap]i, +\infty[\}$ *si* f *est minorée et égale à* $-\infty$ *sinon.*
- f *admet une limite à droite et à gauche en tout point intérieur de* I *et* $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$.

Remarque : Si f est croissante et définie en s, alors, elle possède une limite finie à gauche en s car f est alors majorée par $f(s)$.

VI. Extension aux fonctions complexes

Dans cette partie f est une fonction définie sur I valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition. *Soit $a \in \overline{I}$.*

— *Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

— *Si $a = +\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \geq M \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

— *Si $a = -\infty$, on dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ x \leq M \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Remarque : La définition ne change pas mais cette fois, $|.|$ désigne le module et plus la valeur absolue.

Remarque : Pour une fonction à valeurs complexes, on n'écrit pas $\lim\limits_a f = +\infty$ mais on peut écrire $\lim\limits_a |f| = +\infty$

Proposition. *Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{I}$ alors celle-ci est unique.*
On note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_a f$

Proposition. *Si f admet une limite en $a \in I$ alors celle-ci est égale à $f(a)$*

Proposition. *Si f admet une limite finie en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée au voisinage de a.*

Théorème. *Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$ alors*

$$\lim_a f = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_a Re\, f = Re\, \ell \\ \lim\limits_a Im\, f = Im\, \ell \end{cases}$$

Proposition. *Soit f et g admettant des limites complexes ℓ et ℓ' en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_a f+g = \ell+\ell'$ et $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$.*

Proposition. *Si f ne s'annule pas au voisinage de $a \in \overline{I}$ alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a. De plus,si $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$.*

VII. Comparaison de fonctions

Dans cette section, on s'intéresse à des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mais pas nécessairement en a.
Elles sont donc définies sur $\mathcal{D}$ de la forme $[a-h, a+h]$ ou $[a-h, a+h] \setminus \{a\}$ ou $[a, a+h]$ ou $]a, a+h]$ ou $[a-h, a]$ ou $[a-h, a[$ si $a \in \mathbb{R}$, ou de la forme $[M, +\infty[$ si $a = +\infty$ ou de la forme $]-\infty, M[$ si $a = -\infty$.
On se limite à des fonctions ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}$.

1. Fonctions dominées

Définition. *On dit que f est dominée par la fonction g au voisinage de a lorsque la fonction f/g est bornée au voisinage de a.*

Proposition. $f \underset{a}{=} O(1) \quad \Leftrightarrow \quad f$ *est bornée au voisinage de a*

Proposition. *Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lim\limits_{a} g = 0$ alors $\lim\limits_{a} g = 0$.*

Proposition. *Transitivité*

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \quad \Rightarrow \quad f \underset{a}{=} O(h)$$

Proposition. *Combinaison linéaire*

$$f \underset{a}{=} O(h) \text{ et } g \underset{a}{=} O(h) \quad \Rightarrow \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \lambda f + \mu g \underset{a}{=} O(h)$$

Proposition. *Produit*

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } h \underset{a}{=} O(\phi) \quad \Rightarrow \quad fh \underset{a}{=} O(g\phi)$$

Proposition. *Quotient Soit f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a, alors*

$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\frac{1}{f}\right)$$

Proposition. *Puissance positive*
Soit f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ alors

$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \Leftrightarrow \quad f^\alpha \underset{a}{=} O(g^\alpha)$$

2. Fonctions négligeables

Définition. *On dit que f est dominée par la fonction g au voisinage de a lorsque $\lim\limits_{a} f/g = 0$.*

Proposition. $f \underset{a}{=} o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_a f = 0$

Propriétés similaires aux fonctions dominées

Proposition. *Croissance comparées*

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad (\ln x)^\beta \underset{\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^{\lambda x})$$

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad |\ln x|^\beta \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

3. Fonctions équivalentes

Définition. *On dit que f est équivalente à la fonction g au voisinage de a si* $\lim_a f/g = 1$. *On note* $f \underset{a}{\sim} g$

Proposition. *La relation* $\underset{a}{\sim}$ *est une relation d'équivalence*

Proposition. *On a* $f - g = o(f) \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} g$.

Propriétés similaires aux fonctions dominées
équivalent d'un polynôme en 0 et $+\infty$, équivalent d'une fraction rationnelle

Proposition. *Si les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a alors elles sont de même signe au voisinage de a.*

Proposition. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\lim_a f = \ell$, *alors* $\lim_a g = \ell$

Proposition. *Soit* $\ell \in \mathbb{C}^*$ *alors* $f \underset{a}{\sim} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_a f = \ell$

Remarque : $f \sim 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a. Si l'on tombe sur ce résultat c'est surement que l'on a fait une erreur comme sommer ou soustraire des équivalents.
Remarque : Ne jamais sommer des équivalents. Quand on veut sommer il faut repasser par des o.

Proposition. *Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors* $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$

Proposition. *(*)* $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\tan x \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $\exp(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Proposition. *(*)* $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$