Intégrales généralisées

I. Fonctions continues par morceaux sur I

Définition. *Une fonction f est dite* ***continue par morceaux sur un segment*** *$[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ (avec donc $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$) telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la restriction de f à l'ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ soit continue, et admette des limites finies en a_{k-1} et a_k.*

Une fonction f est dite ***continue par morceaux sur un intervalle*** *I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.*

Les combinaisons linéaires et les produits de fonctions continues par morceaux, sont encore continues par morceaux.

II. Intégrales convergentes

II.1. Intégrale sur un semi-ouvert

Dans ce qui suit, $I = [a,b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et b est un réel ou vaut $+\infty$. Les fonctions manipulées sont toutes supposées définies et continues par morceaux sur I, à valeurs réelles ou complexes.

Les définitions et résultats se traduisent immédiatement à l'intégration sur un semi-ouvert de la forme $]a,b]$.

Définition. *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$, qui est définie sur $[a,b[$, admet une limite finie quand x tend vers b.*

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt.$

Proposition II.1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\,dt$ *converge si et seulement si $\alpha < -1$.*

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,dt$ *converge si et seulement si $\alpha > -1$.*

Proposition II.2. *Si les intégrales sur I de f et g convergent, et si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, alors l'intégrale sur I de $\lambda f + \mu g$ converge, et*

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g](t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt$$

Proposition II.3. *On suppose f et g à valeurs réelles.*

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, et si $0 \leqslant f(t)$ pour $t \in I$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. Si de plus il existe $t_0 \in I$ tel que f soit continue en t_0 et $f(t_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Si les intégrales sur I de f et g convergent, et si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in I$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

II.2. Intégrale fonction d'une borne

Théorème II.4. *Soit $c \in [a,b[$. L'intégrale sur $[a,b[$ de f converge si et seulement si l'intégrale sur $[c,b[$ de f converge. Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ (où $\int_a^c f(t)\,dt$ est une intégrale "ordinaire" sur un segment).*

Corollaire II.5. *La convergence de l'intégrale sur $[a,b[$ de f ne dépend que du comportement de f au voisinage de b.*

Théorème II.6. *Si l'intégrale sur $[a,b[$ de f converge, alors la fonction $x \longmapsto \int_x^b f(t)\,dt$ est définie et continue sur $[a,b[$, et a pour limite 0 quand x tend vers b.*

Elle est de plus dérivable en tout point x_0 en lequel f est continue, de dérivée $-f(x_0)$; elle est donc de classe C^1 sur tout intervalle sur lequel f est continue.

II.3. Intégrale sur un ouvert

Dans ce paragraphe, $I =]a,b[$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Les fonctions manipulées sont supposées continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition II.7. *Pour $c \in]a,b[$, la convergence des intégrales sur $]a,c]$ et $[c,b[$ d'une fonction f ne dépend pas du choix de c.*

Dans le cas où ces deux intégrales convergent, le nombre $\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ ne dépend pas non plus du choix de c.

Définition. *S'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales de f sur $]a,c]$ et $[c,b[$ convergent, on dit que l'intégrale sur $]a,b[$ de f converge, et on pose $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.*

III. Convergence par comparaison

III.1. Fonctions positives

Proposition III.1. *Soit f une fonction positive sur $[a,b[$. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée. Dans ce cas, on a en particulier $\forall x \in [a,b[\quad \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$.*

Théorème III.2. *Si $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a,b[$, et si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*

Théorème III.3. *On suppose f et g positives sur $[a,b[$, et $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge.*

III.2. Convergence absolue

Définition. *Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I. On dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ converge **absolument**, ou que f est **intégrable** sur I, si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,dt$ converge.*

Théorème III.4. *Si l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ converge absolument, alors elle converge, et :*

$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leqslant \int_I \bigl|f(t)\bigr|\,dt$$

III.3. Convergence par comparaison

Théorème III.5. *On suppose que :*
- $\forall t \in [a,b[\quad g(t) \geqslant 0$;
- *l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge ;*
- $f(t) = O\bigl(g(t)\bigr)$ *au voisinage de b.*

Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument.

IV. Calcul des intégrales

IV.1. Utilisation de primitives

Proposition IV.1. *Si f est continue sur $]a,b[$, et si F est une primitive de f sur $]a,b,[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et b^- ; et, dans ce cas,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(t) - \lim_{x\to a^+} F(t)$ *noté* $[F(t)]_a^b$.

IV.2. Intégration par parties

Théorème IV.2. *On suppose que*
- *f et g sont de classe C^1 sur $]a,b[$;*
- *le produit $f(t)g(t)$ admet des limites finies en a et b.*

Alors, $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ converge ; dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

IV.3. Changement de variable

Théorème IV.3. *On suppose que*
- *f est continue sur $]a,b[$;*
- *φ est une bijection de classe C^1, strictement croissante, de $]\alpha,\beta[$ dans $]a,b[$.*

Alors, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge (respectivement converge absolument) si et seulement si $\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)\,du$ converge (respectivement converge absolument) ; et dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

Si l'on veut que la formule fonctionne dans le cas d'un changement de variable décroissant, il suffit de remplacer $\varphi'(u)$ par $-\varphi'(u) = |\varphi'(u)|$ (on évitera d'inverser les bornes dans une intégrale généralisée).

V. Intégration des relations de comparaison

V.1. Cas intégrable

Théorème V.1. *On suppose que g est positive et intégrable sur $[a,b[$. Dans ce cas,*
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{=} O\bigl(g(t)\bigr)$, *alors* $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$;
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{=} o\bigl(g(t)\bigr)$, *alors* $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$;
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, *alors* $\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$.

V.2. Cas non intégrable

Théorème V.2. *On suppose que g est positive et n'est pas intégrable sur $[a,b[$. Dans ce cas,*
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{=} O\bigl(g(t)\bigr)$, *alors* $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$;
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{=} o\bigl(g(t)\bigr)$, *alors* $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$;
- ▷ *si* $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, *alors* $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$.