Formulaire : électromagnétisme

29 juin 2013

Table des matières

1 Le champ électrostatique

❒ Constantes fondamentales – ε_0 est la permittivité du vide, et on a les valeurs suivantes

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1} \text{ et } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{F}^{-1} \cdot \mathrm{m}} \tag{1.1}$$

❒ Expression du potentiel électrostatique – En modélisation ponctuelle ou volumique, la loi de Coulomb donne

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte ou } V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(P)\mathrm{d}\tau}{r} + \text{cte}} \tag{1.2}$$

❒ Équations locales du champ – Faisant référence respectivement à la conservation de la circulation et du flux des champs électrostatiques, elles s'écrivent

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \text{ et } \vec{\nabla}_M.\vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}} \tag{1.3}$$

❒ Théorème de Gauss – Le flux du champ électrostatique à travers toute surface fermée est

$$\boxed{\Phi = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}} \tag{1.4}$$

❒ Discontinuité du champ en modélisation surfacique – La discontinuité du champ électrostatique en deux points 1 et 2 situés de part et d'autre d'une surface chargée est, avec $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface et σ la charge surfacique,

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}} \tag{1.5}$$

❒ Équation de Poisson – En combinant les deux relations de (1.3) avec $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, on obtient

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{1.6}$$

2 Le dipôle électrostatique

❒ Potentiel créé – Il s'exprime de manière intrinsèque avec le moment dipolaire $\vec{p}$, ou avec le θ des coordonnées polaires :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}.\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}} \tag{2.1}$$

❒ Champ créé – Là encore une expression intrinsèque ou en sphériques :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3\vec{p}.\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta} \tag{2.2}$$

❒ Action d'un champ uniforme – L'action d'un champ $\vec{E}$ uniforme sur un dipôle se traduit par un torseur mécanique dont les composantes sont :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \text{ et } \vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}} \tag{2.3}$$

❒ Énergie potentielle – Le système de forces de (2.3) dérive d'une énergie potentielle, et la formule reste vraie même si le champ n'est pas uniforme :

$$\boxed{E_{\text{p}} = \begin{cases} -\vec{p}.\vec{E} & \text{si le dipôle est permanent} \\ -\frac{1}{2}\vec{p}.\vec{E} & \text{si le dipôle est induit} \end{cases}} \tag{2.4}$$

❒ Cas d'un champ non uniforme – Si l'on note $\vec{p}.\vec{\nabla} = p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}$ et O le milieu du dipôle, alors

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}.\vec{\nabla})(\vec{E}) = \begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{p}.\vec{E}) & \text{si le dipôle est permanent} \\ \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{p}.\vec{E}) & \text{si le dipôle est induit} \end{cases} \text{ et } \vec{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)} \tag{2.5}$$

3 Conducteurs en équilibre dans le vide

❒ Relations dans la masse du conducteur – À l'intérieur d'un conducteur en équilibre dans le vide, on aura toujours

$$\boxed{\vec{\jmath} = \vec{0},\ \vec{E} = \vec{0} \text{ et } V = \text{cte}} \tag{3.1}$$

❒ Champ au voisinage – Le champ électrostatique au voisinage direct d'un conducteur est, d'après le théorème de Coulomb, avec $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface du conducteur et σ la densité surfacique de charge au voisinage du point considéré,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}} \tag{3.2}$$

❒ Pression électrostatique – Les forces exercées par les charges sur la surfce d'un conducteur et qui tendent à le dilater peuvent se mettre sous la forme $\mathrm{d}\vec{F} = P_e\mathrm{d}\vec{S}$ où la pression électrostatique est

$$\boxed{P_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \tag{3.3}$$

❒ Capacité – La charge totale d'un conducteur seul dans l'espace est relié à son potentiel par la capacité, coefficient purement géométrique :

$$\boxed{Q = CV} \tag{3.4}$$

❒ Capacité d'une sphère – Pour un conducteur sphérique de rayon R seul dans l'espace,

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R} \tag{3.5}$$

4 Condensateurs

❒ Capacité – La capacité C d'un condensateur est définie par la relation

$$\boxed{Q_1 = C(V_1 - V_2)} \tag{4.1}$$

❒ Association en parallèle – La capacité équivalente à un montage de deux condensateurs de capacités C_A et C_B en parallèle est

$$\boxed{C_{\text{éq}} = C_A + C_B} \tag{4.2}$$

❒ Association en série – La capacité équivalente à un montage de deux condensateurs de capacités C_A et C_B en série est

$$\boxed{C_{\text{éq}} = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B}} \tag{4.3}$$

❒ Condensateur plan – La capacité d'un condensateur plan comportant deux plaques d'une surface S séparées d'une distance e est

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \tag{4.4}$$

❒ Condensateur cylindrique – La capacité d'un condensateur comportant deux plaques cylindriques de hauteur h, de rayons R_2 et R_1 ($R_2 > R_1$) emboitées et coaxiales est

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \tag{4.5}$$

5 Énergie électrostatique

❒ Énergie d'un système de deux charges ponctuelles – En calculant δW_{es} et en le mettant sous la forme d'une différentielle totale, on trouve

$$\boxed{U_{\text{es}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}} \tag{5.1}$$

❒ Système de plusieurs charges ponctuelles – Si V_i est le potentiel crée par les charges $j \neq i$ et vu par i, alors

$$\boxed{U_{\text{es}} = \frac{1}{2}\sum q_i V_i} \tag{5.2}$$

❒ Conducteur seul dans l'espace – En passant au continu dans la formule précédente ou en calculant le travail nécessaire pour déplacer quasistatiquement les charges depuis l'infini jusqu'au conducteur, on trouve

$$\boxed{U_{\text{es}} = \frac{1}{2}QV} \tag{5.3}$$

❒ Systèmes de conducteurs seuls dans l'espaces – Si Q_i est la charge totale d'un des conducteurs et V_i son potentiel, alors

$$\boxed{U_{\text{es}} = \frac{1}{2}\sum Q_i V_i} \tag{5.4}$$

❒ Énergie d'un condensateur – L'énergie électrostatique d'interaction entre les charges des deux plaques d'un condensateur de capacité C est

$$\boxed{U_{\text{es}} = \frac{1}{2}Q_1(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2} \tag{5.5}$$

❒ Énergie d'un dipôle permanent dans un champ extérieur – Elle est égale à

$$\boxed{U_{\text{es}} = -\vec{p}.\vec{E}} \tag{5.6}$$

❒ Postulat de la localisation de l'énergie électrostatique – Partout dans l'espace, de l'énergie électrostatique est stockée et sa densité est

$$\boxed{u_{\text{es}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2} \tag{5.7}$$

❒ Déplacements virtuels à charge constante – On veut connaitre les actions électrostatiques qui s'exercent sur chacun des conducteurs. Pour cela, on imagine une translation de i le long de (Ox) ou une rotation autour de Δ dans le cas où tous les autres conducteurs conservent leur charge (on débranche les générateurs et fils de terre) et le calcul des travaux permet d'avoir la résultante et le moment des actions :

$$\boxed{F_x = -\left.\frac{\partial U_{\text{es}}}{\partial x}\right|_{Q_i,Q_j} \text{ et } M_\Delta = -\left.\frac{\partial U_{\text{es}}}{\partial \theta}\right|_{Q_i,Q_j}} \tag{5.8}$$

❒ Déplacement virtuels à potentiels constants – Sous les hypothèse de (5.8), on déplace un conducteur dans le cas où tous les conducteurs sont alimentés par un générateur qui les maintient à un potentiel constant. Il vient alors

$$\boxed{F_x = \left.\frac{\partial U_{\text{es}}}{\partial x}\right|_{V_i,V_j} \text{ et } M_\Delta = \left.\frac{\partial U_{\text{es}}}{\partial \theta}\right|_{V_i,V_j}} \tag{5.9}$$

6 Mouvement d'une particule électrisée dans un champ électromagnétique

❒ Postulat de Lorentz – Dans un référentiel galiléen, une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ est soumise à une force

$$\boxed{\vec{F}_{\mathcal{L}} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})} \tag{6.1}$$

❒ Pulsation cyclotron – La pulsation du mouvement circulaire uniforme d'une particule soumise uniquement à un champ $\vec{B}$ uniforme stationnaire qui apparait lors de la résolution d'un système d'équation couplées est appelée pulsation cyclotron et vaut

$$\boxed{\omega_c = \frac{|qB|}{m}} \tag{6.2}$$

7 Distributions de charge et de courant

❒ Densité volumique de force de Lorentz – La force de Lorentz élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathcal{L}}$ s'exerçant sur un petit élément de volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$ se met sous la forme

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\mathcal{L}} = \vec{f}\mathrm{d}\tau \text{ où } \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}} \tag{7.1}$$

❒ Vitesses thermique et de dérive – Pour un porteur de charge dans un conducteur, la vitesse d'agitation thermique v_{rm} et la vitesse de dérive v_{d} sous l'action d'un courant ont pour ordre de grandeurs

$$\boxed{v_{\text{th}} \sim 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } v_{\text{d}} \sim 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \tag{7.2}$$

❒ Conservation de la charge – L'équation locale traduisant la conservation de la charge est

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0} \tag{7.3}$$

❒ Changement de référentiel – Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ l'un par rapport à l'autre. Alors on a les relations, les grandeurs prime étant vues dans $\mathcal{R}'$:

$$\boxed{\rho = \rho' \text{ et } \vec{j}' = \vec{j} - \rho\vec{v}} \tag{7.4}$$

❒ Loi d'Ohm locale – Dans un conducteur ohmique, on a en tout point avec σ la conductivité électrique du matériaux

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \tag{7.5}$$

❒ Dérivée en suivant le mouvement – Lorsque l'on dérive une grandeur $f(\vec{r}, t)$ liée à une particule de vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}f} \tag{7.6}$$

❒ Expression de la conductivité – Si m est la masse d'un porteur de charge, n leur densité particulaire, q leur charge et τ le temps moyen entre deux choc d'un porteur de charge avec un ion fixe du réseau du conducteur, alors pour un champ $\vec{E}$ stationnaire, la conductivité qui apparaît dans la loi d'Ohm est

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}} \tag{7.7}$$

❒ Conductivité complexe – Si maintenant le champ électrique est de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\mathrm{e}\left(\underline{\mathrm{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$, alors

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega t}} \tag{7.8}$$

❒ Pulsation plasma – La densité de charge dans un conducteur ohmique soumis à un champ électrique sinusoïdal est nulle, sauf si la pulsation temporelle de ce champ est égale à la pulsation plasma définie par

$$\boxed{\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{nq^2}{m\varepsilon_0}}} \tag{7.9}$$

8 Le champ magnétostatique

❒ Conservation de la charge – Puisqu'en statique les grandeurs ne dépendent pas du temps, la relation de (7.3) devient

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{j} = 0} \tag{8.1}$$

❒ Loi de Biot et Savart – Toute répartition de courant crée en tout point M de l'espace le champ magnétostaique ci dessous, avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$:

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}\tau} \tag{8.2}$$

❐ PREMIÈRE ÉQUATION LOCALE DE $\vec{B}$ – Cette équation porte sur la divergence de $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{B} = 0} \tag{8.3}$$

❐ JAUGE DE COULOMB – $\vec{B}$ est égal au rotationnel d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, qui est défini à un gradient près. En rajoutant la condition de jauge $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, on trouve une expression de $\vec{A}$ qui vérifie $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$ et $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P)}{r} \mathrm{d}\tau} \tag{8.4}$$

❐ ÉQUATION VECTORIELLE DE POISSON – Pour une jauge $\vec{A}$ vérifiant $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, donc en particulier pour la jauge de COULOMB, on a

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \tag{8.5}$$

❐ DEUXIÈME ÉQUATION LOCALE DE $\vec{B}$ – Elle porte sur $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$:

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \tag{8.6}$$

❐ THÉORÈME D'AMPÈRE – Pour toute courbe Γ fermée orientée, si I_e est l'intensité embrassé par Γ, alors

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 I_e} \tag{8.7}$$

❐ RELATION DE PASSAGE – Si $\vec{n}$ est dirigé de 1 vers 2, la relation de passage pour $\vec{B}$ à travers une surface parcourue par un courant est

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}} \tag{8.8}$$

❐ CALCUL DE $\vec{B}$ POUR UN CIRCUIT PLAN – Si on considère un circuit plan filiforme parcouru par une intensité I, alors le champ crée par cette distribution de courant en un point M du plan du circuit est

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\theta}{r} \vec{u}_z} \tag{8.9}$$

❐ CHAMP CRÉE PAR UN FIL RECTILIGNE INFINI – Soit un fil rectiligne uniforme porté par $\vec{u_z}$ et parcouru par une intensité I. Une application du théorème d'AMPRÈRE donne

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta} \tag{8.10}$$

❐ CHAMP CRÉE PAR UNE SPIRE CIRCULAIRE EN SON CENTRE – Le champ au centre O de la spire de rayon R parcourue par une intensité I est, d'après (8.9)

$$\boxed{\vec{B_0}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z} \tag{8.11}$$

❒ Champ crée par une spire circulaire sur son axe – Avec la même situation que (8.11), si on repère un point M sur (Oz) par l'angle $\theta = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MD})$ où D est un point de la spire, alors

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}_0 \sin^3\theta} \tag{8.12}$$

❒ Champ au voisinage d'un axe d'une distribution à invariance cylindrique – On suppose connaitre le champ $\overrightarrow{B}(0,z)$ sur l'axe en coordonnées cylindriques. Le champ à l'ordre 1 au voisinage de l'axe est alors

$$\boxed{\overrightarrow{B} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_z(0,z)}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{u}_r + B_z(0,z)\overrightarrow{u}_z} \tag{8.13}$$

❒ Champ créé par un solénoïde – Soit un solénoïde d'axe (Oz), de densité linéique de spires n parcouru par une intensité I, et M un point de l'axe. Si θ_2 et θ_1 sont les angles que forment l'axe avec $\overrightarrow{MP_1}$ et $\overrightarrow{MP_2}$, P_1 et P_2 étant sur les extrémités du solénoïde, alors

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\overrightarrow{u}_z} \tag{8.14}$$

❒ Solénoïde infini – Un solénoïde infini d'axe (Oz), de densité linéique de spire n parcouru par une intensité I crée en son intérieur un champ magnétostatique uniforme égal à

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{u}_z} \tag{8.15}$$

9 Actions magnétiques subies par les courants

❒ Expression du champ de Hall – Pour des porteurs de charges se déplaçant dans un conducteur à la vitesse moyenne $\overrightarrow{v}$, le tout étant soumis à un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{E_H} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}} \tag{9.1}$$

❒ Loi de Laplace – Un élément de courant $I\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ placé dans un champ $\overrightarrow{B}$ subit une force de Laplace d'expression

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = I\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}} \tag{9.2}$$

❒ Moment sur un circuit filiforme – Le moment global exercée par la force de Laplace sur un circuit filiforme parcouru par une intensité I s'exprime en fonction du vecteur surface définie par la courbe fermée du circuit :

$$\boxed{\overrightarrow{M} = I\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B} \text{ où } \overrightarrow{S} = \iint \mathrm{d}\overrightarrow{S}} \tag{9.3}$$

❒ Perméabilité du vide – La valeur de μ_0 dans le système international est la conséquence de la définition légale de l'ampère :

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H} \cdot \mathrm{m}^{-1}} \tag{9.4}$$

❒ PRESSION MAGNÉTOSTATIQUE – Un élément de surface parcouru par un courant est soumis à une force dérivant d'une pression dont le sens va du côté de la surface où le champ n'est pas nul, vers le côté où le champ est nul. La pression en question est la pression magnétostatique est est égale à

$$\boxed{P_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 j_S^2}{2}} \tag{9.5}$$

❒ THÉORÈME DE MAXWELL – Lorsqu'un circuit filiforme parcourue par une intensité I constante se déplace de 1 vers 2 dans un champ $\vec{B}$ stationnaire, alors le travail des forces de LAPLACE durant ce déplacement est

$$\boxed{W_L = I(\phi_2 - \phi_1)} \tag{9.6}$$

❒ ÉNERGIE POTENTIELLE ASSOCIÉE – Sous les mêmes hypothèses que (9.6), les forces de LAPLACE dérivent d'une énergie potentielle

$$\boxed{E_p = -I\phi} \tag{9.7}$$

❒ THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS – En envisageant un déplacement virtuel d'un circuit à intensité constante et champ stationnaire, on trouve

$$\boxed{F_x = I\frac{\partial \phi_c}{\partial x} \text{ et } M_\Delta = I\frac{\partial \phi_c}{\partial \theta}} \tag{9.8}$$

10 Le dipôle magnétostatique

❒ MOMENT MAGNÉTIQUE – Une boucle de courant de vecteur surface $\vec{S}$ parcourue par une intensité I possède un moment magnétique

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\vec{S}} \tag{10.1}$$

❒ POTENTIEL CRÉÉ – Il s'exprime de manière intrinsèque avec le moment magnétostatique :

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}} \tag{10.2}$$

❒ CHAMP CRÉÉ – Expression en sphériques :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta} \tag{10.3}$$

❒ ACTION D'UN CHAMP UNIFORME – L'action d'un champ $\vec{B}$ uniforme sur un dipôle se traduit par un torseur mécanique dont les composantes sont :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \text{ et } \vec{M} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}} \tag{10.4}$$

❒ ÉNERGIE POTENTIELLE – Le système de forces de (10.4) dérive d'une énergie potentielle, et la formule reste vraie même si le champ n'est pas uniforme :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \begin{cases} -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\vec{B} & \text{si le dipôle est permanent} \\ -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathcal{M}}.\vec{E} & \text{si le dipôle est induit} \end{cases}} \tag{10.5}$$

❒ Cas d'un champ non uniforme – Si l'on note O le milieu du dipôle, alors

$$\boxed{\vec{F} = \begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{M}}.\vec{B}) & \text{si le dipôle est permanent} \\ \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{\mathcal{M}}.\vec{B}) & \text{si le dipôle est induit} \end{cases} \quad \text{et } \vec{M}(O) = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(O)} \tag{10.6}$$

11 Équations de Maxwell

❒ Équations de Maxwell – Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, une densité de charges volumique $\rho(\vec{r},t)$ et une densité volumique de courant $\vec{\jmath}(\vec{r},t)$ créent un champ $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ tels que

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}.\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 & \text{Maxwell-Thomson} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{\jmath} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & \text{Maxwell-Ampère} \end{array}} \tag{11.1}$$

❒ Potentiels – Pour tout champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$, il existe un couple de potentiels $(V,\vec{A})$ tels que

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ et } \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \tag{11.2}$$

❒ Transformation de jauge – Si on choisit une jauge $(V,\vec{A})$, alors une fonction $\phi(\vec{r},t)$ définit une nouvelle jauge $(V',\vec{A'})$ par

$$\boxed{\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \text{ et } V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t}} \tag{11.3}$$

❒ Équations aux potentiels – Si $(V,\vec{A})$ vérifie la condition de jauge de Lorentz, qui est $\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, alors on a les équations suivantes :

$$\boxed{\square V = \vec{\nabla}^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{\jmath}} \tag{11.4}$$

❒ Potentiels retardés – On peut noter une jauge utile qui vérifie la condition de Lorentz. Soit une distribution de charges et courant $(\rho(P,t), \vec{\jmath}(\vec{r},t)$, alors ces potentiels ont l'expression

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(P, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \mathrm{d}\tau \text{ et } \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{\jmath}\left(P, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \mathrm{d}\tau} \tag{11.5}$$

❒ Équations de Maxwell en complexes – Si ρ, $\vec{\jmath}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont des variations temporelles sinusoïdales dans un milieu linéaire isotrope homogène, alors un passage en transformée de Fourier donne

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}.\underline{\vec{E}} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \vec{\nabla}.\underline{\vec{B}} = 0 & \text{Maxwell-Thomson} \\ \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = i\omega \underline{\vec{B}} & \text{Maxwell-Faraday} \\ \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \mu_r \left(\underline{\vec{\jmath}} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r \underline{\vec{E}}\right) & \text{Maxwell-Ampère} \end{array}} \tag{11.6}$$

❒ Relation de passage de $\vec{E}$ – À la traversé d'une interface chargée, on a continuité de la composante tangentielle et discontinuité de la composante normale :

$$\boxed{\vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = \vec{0} \text{ et } \varepsilon_{r_2}\vec{E}_{N_2} - \varepsilon_{r_1}\vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}} \tag{11.7}$$

❒ Relation de passage de $\vec{B}$ – À la traversé d'une interface chargée, on a discontinuité de la composante tangentielle et continuité de la composante normale :

$$\boxed{\vec{B}_{N_2} - \vec{B}_{N_1} = \vec{0} \text{ et } \frac{\vec{B}_{T_2}}{\mu_{r_2}} - \frac{\vec{B}_{T_1}}{\mu_{r_1}} = \mu_0 \vec{\jmath}_S \wedge \vec{n}} \tag{11.8}$$

❒ Relation de passage à l'interface avec un conducteur – Ici, $\mu_{r_2} = \mu_{r_1} = 1$ et on a une distinction de cas :

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \begin{cases} \vec{0} & \text{si le conducteur est réel} \\ \mu_0 \vec{\jmath}_S \wedge \vec{n} & \text{si le conducteur est parfait} \end{cases}} \tag{11.9}$$

12 Énergie électromagnétique

❒ Bilan d'énergie – En faisant un bilan global pour l'énergie électromagnétique $U_{\text{em}} = u_{\text{em}}\mathrm{d}\tau$, en notant $p = -\sigma_{u_{\text{em}}}$ et $\vec{\pi} = \vec{\jmath}_{u_{\text{em}}}$ le vecteur de Poynting, on a les bilans local et global suivants :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = -\oiint \vec{\pi}.\mathrm{d}\vec{S} - \iiint p\mathrm{d}\tau \text{ et } \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{\pi} = -p} \tag{12.1}$$

❒ Expression de p et $\vec{\pi}$ – Divers calculs permettent d'affirmer que

$$\boxed{p = \vec{\jmath}.\vec{E} \text{ et } \vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}} \tag{12.2}$$

❒ Densité d'énergie magnétostatique – En magnétostatique, une partie de l'énergie électromagnétique dépend directement et uniquement du champ $\vec{B}$, c'est l'énergie magnétostatique dont la densité volumique est

$$\boxed{u_{\text{ms}} = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2} \tag{12.3}$$

❒ Énergie magnétostatique globale – Il existe une forme intégrée du résultat précédent faisant intervenir un potentiel vecteur $\vec{A}$ quelconque de $\vec{B}$. Néanmoins ceci n'est valable qu'une fois intégré, pas question d'employer cette formule différentiellement :

$$\boxed{U_{\text{ms}} = \frac{1}{2}\iiint \vec{\jmath}.\vec{A}\mathrm{d}\tau} \tag{12.4}$$

❒ Cas d'un système de conducteurs – Lorsque l'on déplace à intensité constante des circuits filiformes indéformables, et si l'on note I_k l'intensité du circuit k et $\mathrm{d}\phi_k$ le flux du champ magnétique des autres circuits sur le circuit k, alors la variation de U_{ms} au cours d'un déplacement élémentaire est

$$\boxed{\mathrm{d}U_{\text{ms}} = \frac{1}{2}\sum I_k \mathrm{d}\phi_k} \tag{12.5}$$

13 Le phénomène d'induction électromagnétique

❒ Loi d'Ohm locale – Dans un conducteur où les porteurs de charge se déplacent à la vitesse $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}^*$ pù $\vec{V}$ est la vitesse d'entrainement du circuit qui se déplace (on négligera parfois $V \gg v^*$), on a

$$\boxed{\vec{\jmath} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})} \tag{13.1}$$

❒ Cas de Lorentz – Pour un circuit filiforme que l'on déplace à la vitesse $\vec{V}$ dans un champ $\vec{B}$ stationnaire, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} R_{AB} + i_{AB} = u_{AB} + e_{AB} & \text{Loi d'Ohm locale} \\ \overrightarrow{E_\mathrm{m}} = \vec{V} \wedge \vec{B} & \text{Champ électromoteur de Lorentz} \\ e_{AB} = \displaystyle\int_A^B \vec{E}_\mathrm{m}.\vec{\mathrm{d}\ell} & \text{Force électromotrice d'induction} \\ e_{AB} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi_c}{\mathrm{d}t} & \text{Théorème de Faraday} \end{array}} \tag{13.2}$$

❒ Cas de Neumann – Pour un circuit filiforme fixe dans un champ $\vec{B}$ variable, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} Ri = e & \text{Loi d'Ohm (circuit entier)} \\ \overrightarrow{E_\mathrm{m}} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \text{Champ électromoteur de Neumann} \\ e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} & \text{Théorème de Faraday} \end{array}} \tag{13.3}$$

❒ Puissance reçue – La puissance algébriquement reçue par le dipôle électrique AB est égale à

$$\boxed{\mathcal{P}_\text{reçue} = u_{AB} i_{AB}} \tag{13.4}$$

14 Autoinduction et induction mutuelle

❒ Force électromotrice d'autoinduction – $\phi = LI$ donc, d'après le théorème de Faraday,

$$\boxed{e_\text{auto} = -\frac{\mathrm{d}LI}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \text{ si } L \text{ est constant}} \tag{14.1}$$

❒ Énergie magnétique propre – Pour un circuit entier, l'énergie magnétique liée au champ propre du circuit est

$$\boxed{U_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2} \tag{14.2}$$

❒ Bilan énergétique – En multipliant la loi d'Ohm pour un circuit filiforme seul dans l'espace par I, on obtient

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + RI^2\mathrm{d}t = 0} \tag{14.3}$$

❒ Définition par l'énergie – Lorsque la relation $\phi = LI$ conduit à des intégrales divergentes, on pourra être mané à utiliser une définition de L à partir de l'énergie magnétique de (14.2) :

$$\boxed{L \triangleq \frac{2U_\mathrm{m}}{I^2}} \tag{14.4}$$

❒ Théorème de réciprocité – Pour deux circuits filiformes 1 et 2 en interaction magnétique, on a la formule

$$\boxed{\frac{\phi_{1\to2}}{I_1} = \frac{\phi_{2\to1}}{I_2}} \tag{14.5}$$

❒ Énergie d'interaction mutuelle – Si on note M le coefficient d'inductance mutuelle entre les circuits 1 et 2 en interaction magnétique, alors on a

$$\boxed{U_{\mathrm{m},1\leftrightarrow2} = MI_1I_2} \tag{14.6}$$

15 Propagation des ondes électromagnétiques

❒ Relation de dispersion dans le vide – C'est la relation de dispersion de l'équation d'onde classique :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \tag{15.1}$$

❒ Densité d'énergie de propagation dans le vide – Puisque dans le vide, $c||\overrightarrow{B}|| = ||\overrightarrow{E}||$, on a

$$\boxed{u_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\overrightarrow{E}^2} \tag{15.2}$$

❒ Charge et propagation dans un conducteur ohmique – Pour la plupart des pulsations (sauf la pulsation plasma), la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique entraine en son sein

$$\boxed{\underline{\rho} = 0} \tag{15.3}$$

❒ Épaisseur de peau – Une onde électromagnétique de faible pulsation ($\omega \ll 10^{15}$ Hz) pénétrant dans un conducteur ohmique de conductivité σ est amortie exponentiellement avec une distance caractéristique aussi appelée épaisseur de peau égale à

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}} \tag{15.4}$$

❒ Relation de dispersion en domaine optique – Une onde électromagnétique appartenant au domaine optique ($\lambda_0 > 0,8$ µm) se propageant dans un conducteur ohmique est soumise à la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \text{ où } \omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\varepsilon_0}}} \tag{15.5}$$

❒ Conductivité d'un plasma – C'est la même conductivité que celle d'un métal en domaine ohmique : n est la densité particulaire, e la charge élémentaire, m la masse d'un électron et ω la pulsation de l'onde qui se propage :

$$\boxed{\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega}} \tag{15.6}$$

❒ Loi de Malus – On considère un dispositif constitué d'un polariseur d'axe Δ, suivi d'un analyseur d'axe Δ' avec α l'angle formé par les deux axes. À l'entrée, de la lumière non polarisée et en sortie de la lumière polarisée rectilignement selon Δ' dont l'intensité suit la loi :

$$\boxed{I_e = I_0 \cos^2 \alpha} \tag{15.7}$$

16 Le rayonnement dipolaire électrique

❒ Champ de rayonnement – Un dipôle électrique de moment variant sinusoïdalement en $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$ crée un champ électromagnétique qui, à grande distance, a pour expression en coordonnées sphériques (prendre la partie réelle) :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \omega^2 \frac{\sin\theta}{r} \exp\left(i(kr - \omega t)\right) \vec{u}_\theta \text{ et } c\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \omega^2 \frac{\sin\theta}{r} \exp\left(i(kr - \omega t)\right) \vec{u}_\varphi} \tag{16.1}$$

❒ Puissance rayonnée – La puissance totale rayonnée par le dipôle de (16.1) à travers toute sphère de rayon r centrée sur le dipôle est

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4} \tag{16.2}$$

17 Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques à l'interface de deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes

❒ Lois de la réflexion – Lorsqu'une onde de vecteur $\vec{k}_i$ arrive à une interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 en formant un angle de θ_i avec le vecteur normal $\vec{n}$, alors elle produit une onde réfléchit dont le vecteur $\vec{k}_r$ qui forme un angle θ_r avec $\vec{n}$ vérifie :

$$\boxed{\vec{k}_r,\ \vec{k}_i \text{ et } \vec{n} \text{ sont coplanaires et } \theta_i = \theta_r} \tag{17.1}$$

❒ Lois de la réfraction – Sous les hypothèses de (17.1), il y a aussi production d'une onde transmise de vecteur d'onde $\vec{k_t}$ formant un angle θ_t avec $\vec{n}$ tel que

$$\boxed{\vec{k}_t,\ \vec{k}_i \text{ et } \vec{n} \text{ sont coplanaires et } n_2 \sin\theta_t = n_1 \sin\theta_i} \tag{17.2}$$

❒ Distribution d'amplitude – Toujours dans la situation de (17.1), l'amplitude de l'onde incidente se répartit dans les ondes réfléchies et transmises avec les coefficients de transmission et réflexion en amplitude suivants :

$$\boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \tag{17.3}$$

❒ Réflexion en énergie – Dans la situation de (17.1), les portion d'énergie réfléchie par l'interface et transmises sont :

$$\boxed{R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \text{ et } T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}} \tag{17.4}$$

Bon courage pour apprendre ces 107 formules !