Topologie

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

5 octobre 2022

Après avoir rapellé les définitions de base en topologie, nous nous intéressons à 5 espaces topologiques particuliers. Nous complétons alors le cours par les notions d'espaces compacts, connexes et complets.

1 Topologie

Fondement de l'analyse, la topologie est une belle partie des mathématiques, qui s'avère toujours utile pour l'analyse de convergences de suites dans des espaces compacts par exemple. En utilisant l'index pour les mots clefs ci-dessous, on trouvera de nombreuses applications à ce chapitre ; le symbole ‖ en signale directement un grand nombre parmi les plus élégantes.

Les différentes sections de ce chapitre sont (i) les espaces topologiques (ii) la construction de topologies (iii) la compacité (iv) la connexité (v) la complétude (vi) une importante section 'zoologie' riche d'exemples.

Une classe importante des espaces topologiques est la classe des espaces vectoriels topologiques. Une synthèse pour voir vite ce vaste champ est la figure **??**.

1.1 Espaces topologiques

Nous verrons dans cette section (i) le cas le plus général des espaces topologiques (ii) le cas plus spécifique des espaces métriques voire normés (iii) quelques éléments sur la notion de voisinage (iv) diverses notions autour de la notion de fermeture (v) les bases d'ouvert (à ne pas négliger malgré un premier abord plus abstrait - cette notion permettra d'introduire la séparabilité, en particulier utile pour construire une métrique de la boule unité fermée du dual d'un espace séparable ; nous

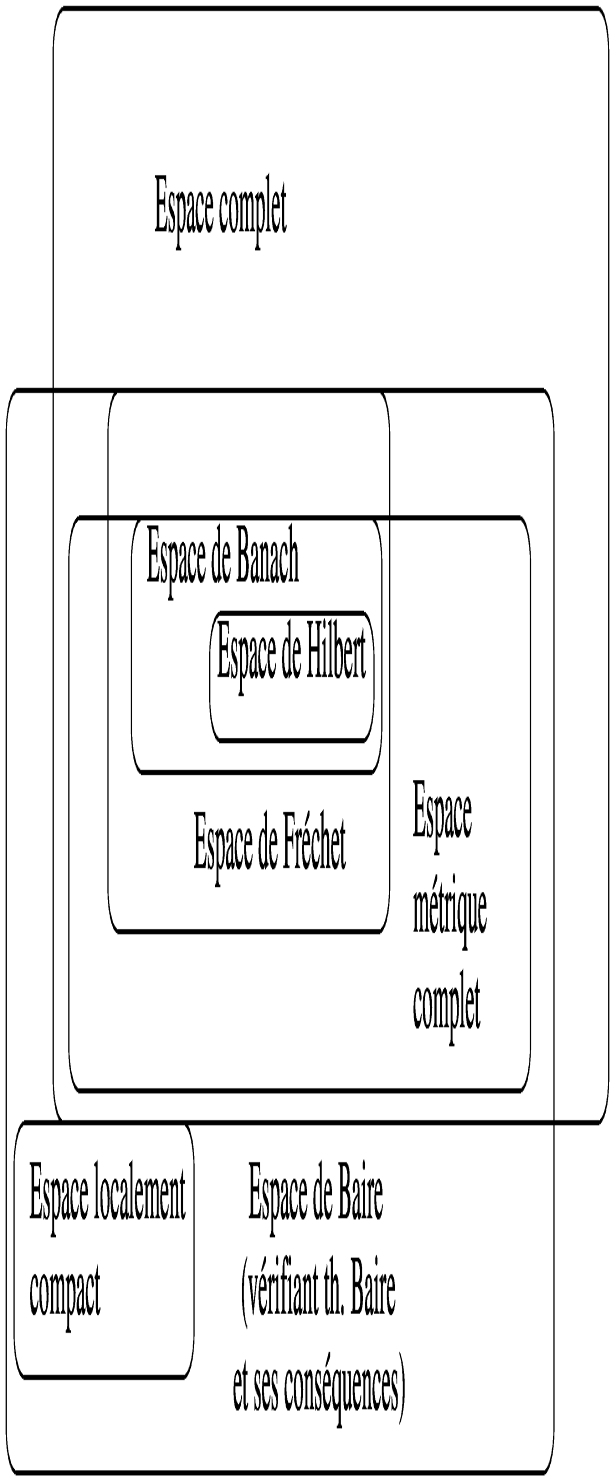


FIGURE 1 – Un aperçu des espaces topologiques.
Commentaire : Les espaces de fonctions et leurs inclusions. Signalons pourquoi la case « espaces de Fréchet » déborde des espaces métriques complets : un espace de Fréchet n'est pas nécessairement métrique complet (puisqu'il n'est pas nécessairement métrique), mais sa topologie est métrisable par une métrique complète. Les espaces polonais sont les espaces séparables métrisable par une métrique complète.

préciserons ce point important plus loin) (vi) des notions plus facilement parlantes comme la limite et la continuité et leurs applications multiples (vii) les valeurs d'adhérence qui nous serviront à divers prolongements ou à étendre des propriétés de connexité du local au global.

Le symbole $\|$ (désignant les applications) apparaît souvent dans ce chapitre ; les notions parfois abstraites de topologie sont en fait très concrètement applicables, même dans une vie d'ingénieur, et les applications font bien sentir l'importance des notions introduites et pourquoi elles sont introduites.

1.1.1 Cas le plus général d'espace topologique

DÉFINITION 0.1 **Topologie**
Une **topologie** $\mathcal{T}$ sur l'ensemble X est une partie $\mathcal{T} \subset P(X)$ vérifiant :
- •L'ensemble vide $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{T}$
- •$\mathcal{T}$ est stable par réunions arbitraires
- •$\mathcal{T}$ est stable par intersections finies

Un tel couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les **ouverts** de la topologie.

Une partie de X est dite **fermée** si son complémentaire est ouvert.

Exemple 0.1 •La topologie discrète sur l'ensemble X est la topologie $\mathcal{T}_d = P(X)$

•La topologie grossière sur l'ensemble X est la topologie $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$

•Sur $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, la topologie usuelle est l'ensemble des U tels que soit (i) $U \subset \mathbb{N}$ soit (ii) $+\infty \in U$ et $\mathbb{N} \setminus U$ est fini.

On verra aussi d'autres exemples en parties 1.1.2 et 1.2.

PROPOSITION 0.1

Si X est un espace topologique alors
- •X et $\emptyset$ sont des fermés de X
- •Une intersection quelconque de fermés est un fermé
- •Une union finie de fermés est un fermé

Démonstration *Immédiat, par passage au complémentaire.*

DÉFINITION 0.2 **Séparation par des ouverts**

On dit que la partie A et la partie B sont **séparées par des ouverts** s'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

1.1.2 Espaces métriques et espaces normés

Définition 0.3 Métrique

Une **métrique** ou **distance** sur l'ensemble X est une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ vérifiant :

•$d(x, y) = 0 \iff x = y$

•$d(x, y) = d(y, x)$

•$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (propriété dite **inégalité triangulaire**)

On dit alors que (X, d) est un **espace métrique**.

Exemple 0.2 Exemples sur $\mathbb{R}^n$:

•$d_p = (\sum |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ pour $p \geq 1$

•$d_\infty = max|x_i - y_i|$

(nous verrons qu'il s'agit de distances issues de normes)

Application 0.3 l'inégalité triangulaire donne rapidement l'inégalité $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ (connue aussi sous le terme d'inégalité triangulaire) ; elle sert aussi pour la continuité de la distance à une partie (proposition 0.121).

Définition 0.4 Boules

Si x est un point de l'espace métrique X et $r \in [0, +\infty[$, on appelle **boule ouverte (resp. fermée)** de centre x et de rayon r, l'ensemble des y tels que $d(x, y) < r$ (resp. $d(x, y) \leq r$).

On appelle **sphère** de l'espace métrique X de centre x et de rayon r l'ensemble des y tels que $d(x, y) = r$.

Définition - proposition 0.5 1

Si X est un espace métrique, la famille de parties de X dont les éléments sont les réunions arbitraires de boules ouvertes est une topologie sur X. Cette topologie est appelée la topologie **associée** à la métrique.

Une partie X d'un espace métrique E est dite **bornée** si étant donné un point e dans E la distance de x à e pour x dans X est majorée par une certaine constante [1]. Cela équivaut aussi au fait que la distance entre deux points quelconques de X est bornée. C'est-à-dire que :

– si pour un point x de X, $y \mapsto d(x, y)$ est bornée, alors pour tout point x de X, $y \mapsto d(x, y)$ est bornée.

– si pour tout point x de X, $y \mapsto d(x, y)$ est bornée, alors $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est aussi bornée sur $X \times X$.

Démonstration *La vérification est fastidieuse et ne présente pas de difficulté.*

Attention 0.4 La notion de borné dépend de la métrique et pas de la topologie ! C'est-à-dire que même si deux métriques sont topologiquement équivalentes (voir définition 0.7) elles n'ont pas nécessairement les mêmes parties bornées. En fait pour toute métrique d, on peut construire une métrique équivalente d' par

$$d'(x, y) = \ln(1 + \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}).$$

telle que toute partie soit bornée.

Propriétés : •Dans un espace métrique, une partie est fermée si et seulement si elle contient la limite de toute suite convergente à valeurs dans cette partie.

•Une boule ouverte est ouverte, et donc un espace métrique est séparé

•Une boule fermée est fermée

•Une sphère est fermée

•Dans un espace métrique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x si et seulement si $d(x_n, x)$ tend vers 0.

Exemple 0.5 •La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est la topologie associée à la distance $d(x, y) = |x - y|$.

•La fonction qui à x et y associe 0 si $x = y$ et 1 sinon est une métrique. Cette métrique est associée à la topologie discrète, pour laquelle toute partie est à la fois un ouvert et un fermé.

•Si f est injective de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors la fonction qui à x et y associe $|f(x) - f(y)|$ est une distance sur X.

•La topologie usuelle sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est définie par la distance $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, avec $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f(+\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$.

Définition 0.6 **Isométrie**

Étant donnés deux espaces métriques E et F, une application f de E dans F est une **isométrie** si $\forall (x, y)\ d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$.

Définition 0.7 **Métrisable**

Une topologie est dite **métrisable** si et seulement si il existe une métrique telle que la topologie soit associée à cette métrique.

Deux métriques d_1 et d_2 sont dites **équivalentes** si il existe α et β tels que $\alpha d_1 < d_2 < \beta d_1$ [2], avec $\alpha, \beta > 0$.

Deux métriques sont dites **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie.

Intuition Soient deux distances d_1 et d_2 sur un espace E ; alors l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est un homéomorphisme si et seulement si d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, et elle est lipschitzienne et d'inverse lipschitzien [3] si et seulement si d_1 et d_2 sont équivalentes.

Proposition 0.2 **Existence de topologies non métrisables**

Il existe des topologies, même séparées [4], non métrisables.

Démonstration *Il est clair que toute topologie non séparée n'est pas métrisable.*

Considérons, pour avoir un contre-exemple plus intéressant, une topologie séparée non métrisable. Ce contre-exemple fait appel à quelques notions qui seront définies ultérieurement, et peut donc être laissé de côté en première lecture.

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, muni de la topologie produit.

3. Une application est dite **bilipschitzienne** si elle est lipschitzienne et d'inverse lipschitzien.

Supposons que cet espace topologique soit métrisable.

Alors par définition tout point est à base dénombrable de voisinages. Nous allons montrer que cela entraine une contradiction.

Soit (U_n) une base de voisinages de 0 (= fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Alors par définition d'une base de voisinage, pour tout n, U_n contient un voisinage de 0 (la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de la forme

$$V_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | \forall i \in [1, N_n] | f(x_{n,i})| < \epsilon_n\}$$

On considère alors T l'ensemble des $x_{n,i}$ pour $i \leq N_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Cet ensemble est dénombrable comme union dénombrable d'ensemble finis.

Soit maintenant x dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à T.

Alors $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / |f(x)| < \epsilon\}$ est un ouvert, qui manifestement ne contient aucun V_n, donc aucun U_n.

Il est à noter que $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ convient aussi.

Proposition 0.3

Une topologie métrisable est entièrement caractérisée par les propriétés de convergence de suites.

C'est-à-dire que si pour deux topologies métrisables, les suites convergentes sont les mêmes et ont mêmes limites, alors ces deux topologies sont égales.

Démonstration *Il suffit de voir que l'on caractérise un fermé F d'un métrique par le fait qu'il contient les limites de toute suite convergente d'éléments de F. Donc les fermés sont caractérisés par les propriétés de convergence de suite, et donc les ouverts aussi par passage au complémentaire.*

Proposition 0.4

- Si deux distance d_1 et d_2 sont équivalentes alors d_1 et d_2 définissent la même topologie.
- On peut avoir la même topologie sans avoir cette relation.

Il est à noter que le second point ne serait pas vrai pour des normes (cf plus bas).

Démonstration *Le premier point, aisé, est laissé en exercice au lecteur. Le second s'obtient en considérant $d'(x, y) = min(1, d(x, y))$, avec d une distance quelconque non bornée.*

Il est intéressant de noter que même en ajoutant une condition à l'équivalence traduisant que l'on peut se limiter aux « petites » distances, on a un contre-exemple avec par exemple sur $\mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ qui définissent la même topologie sans être Lipschitz-équivalentes, même sur les petites distances.

On peut aussi noter que les d_p pour $p \geq 1$ sont Lipchitz-équivalentes entre elles, cela se montre par $d_\infty \leq d_p \leq n^{1/p} d_\infty$

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle.

Définition 0.8 **Norme**

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une **norme** sur E est une application $\| . \|$ de E dans $[0, +\infty[$ vérifiant :

- $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- $\forall x, y \in E$, on a $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

•$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E$ on a $\| \lambda.x \| = |\lambda| \| x \|$

S'il ne manque que la première propriété, on parle de **semi-norme**.

On appelle vecteur unitaire un vecteur x tel que $\| x \| = 1$.

Un espace muni d'une norme est appelé **espace normé** ou **espace vectoriel normé**.

Dans un espace normé une série $(\sum x_n)$ est dite **normalement convergente** si $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ converge.

Enfin une définition nécessitant la notion de continuité (définie ultérieurement) : on appelle **isomorphisme de l'espace vectoriel normé** E **dans l'espace vectoriel normé** F une application linéaire continue bijective de réciproque continue (c'est-à-dire qu'il s'agit d'un morphisme algébrique (i.e. au sens des espaces vectoriels) et d'un homéomorphisme).

Exemple 0.6

•Sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, les applications suivantes sont des normes :

– $(x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_\infty = max_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|$

– pour p réel ≥ 1, $x \mapsto \|x\|_p = (\sum_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|^p)^{1/p}$

•Sur $\mathbb{R}[X]$, les applications suivantes sont des normes :

– $P \mapsto \|P\|_0 = sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$

– $P \mapsto \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)| dt$

La norme est convexe.

Définition 0.9 **Distance associée**

Étant donnée une norme on définit une **distance associée** par

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

Définition 0.10 **Normes équivalentes**

Deux normes $\| \ . \ \|_1$ et $\| \ . \ \|_2$ sur un même espace vectoriel sont **équivalentes** si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha. \| x \|_1 < \| x \|_2 < \beta. \| x \|_1$

Théorème 0.5

Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.

Démonstration *L'une des deux implications (si deux normes sont équivalents, alors elles définissent la même topologie) résulte de 0.4. L'autre s'obtient facilement, l'une des deux inégalités après l'autre, en constatant qu'une boule de centre* 0 *et de rayon* 1 *pour l'une des normes contient une boule de rayon non nul pour l'autre norme.*

1.1.3 Notion de voisinage

DÉFINITION 0.11 **Voisinage**

Soit X un espace topologique. Un **voisinage** V de $x \in X$ est un ensemble tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$.

On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

PROPOSITION 0.6

Un sous-ensemble d'un espace topologique est ouvert si et seulement si il est un voisinage de chacun de ses points.

Démonstration

•*Soit un ouvert U, et x dans U. On a $x \in U$ et bien sûr $U \subset U$. Donc U est voisinage de x. Un ouvert est donc bien voisinage de chacun de ses points.*

•*Soit U voisinage de chacun de ses points. À chaque point x associons l'ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset U$. La réunion des U_x est un ouvert, contient tous les x de U et est incluse dans U ; c'est donc U. Donc U est un ouvert.*

PROPOSITION 0.7

•Si $x \in X$, X espace topologique, et $V \subset V'$, et $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $V' \in \mathcal{V}(x)$.

•pour tous $V, V' \in \mathcal{V}(x)$, alors $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$

Démonstration

•*V contient par définition un ouvert contenant x ; V étant inclus dans V', V' contient ce même ouvert. Donc V' est un voisinage de x.*

•*V et V' contiennent chacun un ouvert contenant x ; l'intersection de ces deux ouverts est un ouvert, contient x et est inclus dans $V \cap V'$; donc $V \cap V'$ est un voisinage de x.*

1.1.4 Fermeture, intérieur, extérieur, frontière

DÉFINITION 0.12 **Fermeture ou adhérence**

Si $A \subset X$, **l'adhérence** (dite aussi **fermeture**) de A est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est donc le plus petit fermé contenant A. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

A, B parties de X ; alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

DÉFINITION 0.13 **Point d'accumulation d'une partie**

On appelle **point d'accumulation d'une partie** A un point x adhérent [5] à $A \setminus \{x\}$.

On appelle **ensemble dérivé de** A l'ensemble des points d'accumulation de A.

Un ensemble dérivé dans un espace séparé est toujours un fermé.

LEMME 0.8

Si A est une partie de l'espace topologique X, on a l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$$

Démonstration *Il suffit de constater les points suivants :*
•*$y \notin \overline{A}$ si et seulement si on peut trouver un fermé F contenant A et ne contenant pas y.*
•*On considère le complémentaire de F. C'est un voisinage de y n'intersectant pas A.*

DÉFINITION 0.14 **Ensemble dense**

Un sous-ensemble de l'espace topologique X est **dense** dans X si son adhérence est X.

Application 0.7 La densité sera utilisée dans les théorèmes de prolongement, prolongement des identités, prolongement de fonctions uniformément continues (capital par exemple pour le théorème de Plancherel, cité dans la partie 1.1.8 et démontré dans [1]). Le prolongement de fonctions continues servira aussi à construire des solutions maximales d'équations différentielles (voir théorème de Cauchy-Lipschitz **??**). On pourra aussi utiliser la densité pour montrer que tout espace métrique complet connexe localement connexe est connexe par arcs.

La densité servira aussi pour prouver le théorème d'Arzéla-Ascoli **??**, le théorème de Moore, l'inégalité de Hardy (voir livre [2]).

De nombreux résultats de densité dans les espaces de Banach auront de vastes applications ; il y a déjà toutes les applications du théorème de Baire 0.113 (théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé, théorème d'isomorphisme de Banach, que l'on trouvera tous à la suite du théorème de Baire 0.113).

Par ailleurs, la séparabilité est par définition liée à la densité, voir la définition 0.20 et la liste d'applications qui y est donnée.

Enfin, certains résultats de densité seront fondamentaux pour de multiples applications pratique (approximation) : on pourra consulter le chapitre **??**. Cela servira par exemple pour la transformée de Fourier - en fait les bases hilbertiennes sont basées sur la densité.

N'oublions pas aussi de petits résultats dus à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'exprime comme union dénombrable d'intervalles ouverts.

PROPOSITION 0.9
A est dense dans l'espace topologique X si et seulement si tout ouvert non vide de X intersecte A.

Démonstration *Cela résulte directement du lemme ci-dessus.*

DÉFINITION 0.15 **Intérieur**

L'**intérieur** du sous-ensemble A de l'espace topologique X, noté $Int(A)$, est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, c'est donc le plus grand ouvert contenu dans A.

Propriétés : $\bullet A$, B inclus dans X ; alors $Int\ (A \cup B) \supset Int\ A \cup Int\ B$ et $Int\ (A \cap B) = Int\ A \cap Int\ B$.

$\bullet$Si deux ouverts sont disjoints, alors les intérieurs de leurs adhérences sont disjoints.

$\bullet Int(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$ (ou de manière équivalente $Int\ A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$).

PROPOSITION 0.10

Le point x est dans $Int(A)$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}(x)$.
Le point x est dans $Int(A)$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ avec $V \subset A$.

La démonstration, simple, est laissée en exercice.

DÉFINITION 0.16 Extérieur

L'**extérieur** de A, noté $Ext(A)$, est l'intérieur du complémentaire de A.

PROPOSITION 0.11

$Ext(A) = \{x | \exists V \in \mathcal{V}(x) / V \cap A = \emptyset\}$

Démonstration *Découle de la proposition 0.10.*

DÉFINITION 0.17 Frontière

La **frontière** de A, notée $Fr(A)$ est son adhérence privée de son intérieur.

$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

PROPOSITION 0.12

Un ensemble est à la fois ouvert et fermé si et seulement si sa frontière est vide.

Démonstration

$\bullet$Soit A un ensemble ouvert et fermé. Comme A est fermé, il est égal à son adhérence, et comme il est ouvert, il est égal à son intérieur, donc sa frontière, égale à son adhérence privée de son intérieur, est vide.

$\bullet$Réciproquement, si la frontière de A est vide, cela signifie que son intérieur contient A, donc qu'il est ouvert. Et si sa frontière est vide, cela signifie que son adhérence ne peut pas être strictement plus grande que lui, donc il est fermé.

Théorème 0.13

$\bullet Int(A) = \{x \in X; \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap X \setminus A \ = \emptyset\}$
$\bullet Ext(A) = \{x \in X; \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset\}$
$\bullet Fr(A) = \{x \in X; \nexists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset \vee V \cap (X \setminus A) = \emptyset\} = \{x \in X / \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$
X est réunion disjointe de son intérieur, son extérieur et sa frontière.

Démonstration *Chacune de ces propriétés se démontre en deux lignes, simplement en écrivant bien formellement ce que l'on cherche à démontrer.*

1.1.5 Base d'ouverts et base de voisinages

Définition 0.18 **Base d'ouverts**

Soit X un espace topologique. Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts de X est une **base d'ouverts** si tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 0.14

Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts si et seulement si quel que soit l'ouvert U et $x \in U$ il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $x \in V \subset U$.

Démonstration *Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors étant donnés x et U, on considère un élément V de $\mathcal{B}$ qui contient x ; la réciproque se fait en considérant, pour un ouvert donné, la réunion U des V obtenus par la propriété en considérant les différents $x \in U$.*

Exemple 0.8

$\bullet$Dans un espace métrique, les boules ouvertes de rayon rationnel forment une base d'ouverts

$\bullet$Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle, les boules ouvertes de rayon rationnel et à coordonnées toutes rationnelles forment une base dénombrable d'ouverts

$\bullet$Dans $\mathbb{R}$ tout ouvert est en fait une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (et réciproquement).

$\bullet$Dans $\mathbb{R}$ un fermé n'est pas nécessairement une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints, et une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints n'est pas nécessairement fermée.

Démonstration

$\bullet$Soit U un ouvert d'un espace métrique, et x dans U ; on montre que U contient une boule de rayon rationnel contenant x. Pour cela on note que U est réunion de boules ouvertes, donc contient au moins une boule ouverte B de rayon r et de centre O contenant x ; on note alors r' la distance de x à O ; toute boule ouverte centrée en x de rayon rationnel inférieur à $r - r'$ convient (on peut aussi choisir de raisonner sur les boules centrées sur O de rayon adéquat).

$\bullet$Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et x un point de U. On considère une boule ouverte contenant x et incluse dans U ; soit O son centre et r son rayon. Alors soit r' la distance de x à O, et y un point de coordonnées rationnelles situé à une distance d inférieure à $\frac{r-r'}{3}$ de O. Alors toute boule centrée sur y de rayon rationnel compris entre $r' + \frac{r-r'}{3}$ et $r' + 2.\frac{r-r'}{3}$ convient.

•En plusieurs points :

– Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; alors étant donné un rationnel de U on considère l'intervalle maximal le contenant. On parcourt ainsi tout U, et on a bien un ensemble dénombrable d'intervalles ouverts.

– Une réunion d'ouverts est toujours un ouvert.

•Deux contre-exemples :

– le cantor K^3 (voir partie 1.6.13) n'est pas une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints.

– l'ensemble des $1/n$ est une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints, mais n'est pas fermé.

DÉFINITION 0.19 **Base dénombrable d'ouverts**

X est à **base dénombrable d'ouverts** si on peut trouver une base d'ouverts qui soit dénombrable.

PROPOSITION 0.15
Un espace à base dénombrable d'ouverts contient un ensemble dénombrable dense.

Démonstration *Il suffit de considérer un point par ouvert non vide d'une base dénombrable.*

DÉFINITION 0.20 **Espace séparable**

Un espace est **séparable** si il contient un ensemble dénombrable dense.

⚠ *Attention 0.9* On parle parfois aussi de séparation pour la propriété des normes $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Application 0.10 Cela sera notamment utile pour définir une métrique sur la boule unité fermée du dual d'un espace séparable (pour la topologie faible). Ceux qui veulent en savoir plus peuvent aller voir la proposition 0.73. Le théorème de Banach-Mazur fournit une application à la séparabilité pour les espaces de Banach : tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ pour la norme du supremum.

On note en particulier qu'un ensemble à base dénombrable d'ouverts est séparable (il suffit de prendre un point dans chaque ouvert) ; il s'agit de la proposition précédente. La réciproque est vraie dans le cas des espaces métriques :

THÉORÈME 0.16

Un espace métrique est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable d'ouverts.

Application 0.11 Ce résultat permettra de conclure que tout espace métrique compact admet une base dénombrable d'ouverts (voir résultat 0.75) et d'en déduire que tout espace métrique compact est de cardinal au plus la puissance du continu (voir résultat 0.73).

Démonstration *La remarque précédente donne l'un des deux sens. Réciproquement supposons que X soit métrique séparable. Soit $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dense dénombrable. Alors l'ensemble des boules de centre x_i et de rayon $1/j$ avec $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est une base dénombrable d'ouverts.*

Définition 0.21 **Base de voisinages**

Soit $x \in X$, une famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x est une **base de voisinages** de x si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $V' \in \mathcal{B}(x)$ avec $V' \subset V$.

Définition 0.22 **à base dénombrable de voisinages**
Un espace est **à base dénombrable de voisinages** si chacun de ses points admet une base dénombrable de voisinages.

Exemple 0.12 Tout espace métrique est à base dénombrable de voisinages.
Démonstration *Il suffit de considérer les boules de rayon $1/i$ de centre x pour avoir une base dénombrable de voisinages de x.*

1.1.6 Continuité et limite

Définition 0.23 **Continuité ponctuelle**

Soit f une application entre espaces topologiques. f est **continue en** x si et seulement si quel que soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x (i.e. si $\exists U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(U) \subset V$).
f est **continue** si f est continue en tout point.

Exemple 0.13
•La distance est continue (en vertu de la propriété $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$).
•La norme est continue (comme composée d'applications continues, puisque $x \mapsto (x,x)$ est continue, et $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue, avec d la distance associée à la norme).
•La multiplication par un scalaire et l'addition sont continues pour la topologie associée à la norme.

Définition 0.24 **Semi-continuité**

Une application f de X dans $\mathbb{R}$ est **semi-continue inférieurement** si pour tout c on a $f^{-1}(]c, +\infty[)$ ouvert.
Une application f de X dans $\mathbb{R}$ est **semi-continue supérieurement** si pour tout c on a $f^{-1}(]-\infty, c[)$ ouvert.

Proposition 0.17

•Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.
•La borne *sup* d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.
•La fonction caractéristique d'un ouvert (resp. fermé) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Théorème 0.18 **Stabilité de la continuité par composition**

Si f est continue en x et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est aussi continue en x.

Démonstration *L'image réciproque d'un voisinage de $g(f(x))$ est un voisinage de $f(x)$, l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ par f est un voisinage de x, donc l'image réciproque d'un voisinage de $g \circ f(x)$ par $g \circ f$ est un voisinage de x. D'où la continuité de $g \circ f$ en x.*

Corollaire 0.19

Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration *L'image réciproque d'un ouvert par f est un ouvert, l'image réciproque d'un ouvert par g est un ouvert, donc l'image réciproque par $g \circ f$ est un ouvert.*
(on peut aussi simplement utiliser le théorème 0.21)

Proposition 0.20

Soit $\mathcal{B}$ une base de voisinages de $f(x)$.
f est continue en x si et seulement si quel que soit $V \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.

Démonstration *Soit un voisinage U de $f(x)$, il contient un certain V appartenant à $\mathcal{B}$. L'image réciproque de V étant un voisinage de x, l'image réciproque de U contient $f^{-1}(V)$ et est donc aussi un voisinage de x.*

Théorème 0.21

Les assertions suivantes sont équivalentes :
- f est continue
- Pour tout ouvert U, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
- Pour tout fermé F, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.
- Pour tout ouvert $V \in \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B}$ une base d'ouverts, $f^{-1}(V)$ est ouvert
- Pour tout A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Démonstration *L'équivalence entre les 4 premières assertions est laissée en exercice. La cinquième assertion est une conséquence de la continuité de f (il suffit de voir qu'elle équivaut à $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ et de rappeler que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A). Réciproquement, en supposant la cinquième assertion vraie, on montre tout d'abord que tout fermé F de l'image de f vérifie $f^{-1}(F)$ fermé. Il suffit de voir alors que f est continue de X vers Y si et seulement si elle est continue en tant que restriction de X sur $f(X)$.*

Application 0.14 On peut noter alors que si f est une application de X dans Y, alors si X est muni de la topologie discrète (topologie égale à l'ensemble des parties de X) ou si Y est muni de la topologie grossière (topologie limitée à $\{\emptyset, Y\}$) alors f est nécessairement continue.

Définition 0.25 **Limite**

Soit $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$, avec $x_0 \in X$. On dit que y est une **limite** de f en x_0, si pour tout voisinage V de y dans Y, la réunion $f^{-1}(V) \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0.

Proposition 0.22

Les propriétés suivantes sont équivalentes au fait que l soit limite de x_n :
•pour tout voisinage V de l, il existe un nombre fini de x_n en dehors de V.
•Dans le cas où l'espace est métrique : la distance de x_n à l tend vers 0.

Donnons sans démonstration le lemme suivant :

Lemme 0.23

f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0)$ est limite de $f_{|X\setminus\{x_0\}}$ en x_0.

Définition 0.26 **Point isolé**

x_0 est **isolé** si et seulement si $\{x_0\}$ est ouvert.
Un espace topologique est dit **discret** si tous ses éléments sont des points isolés.

Le lemme suivant résulte directement de la définition :

Lemme 0.24

Le point x_0 n'est pas isolé si et seulement si $V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, et encore si et seulement si $x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$.

Un problème est la non-unicité de la limite, a priori. Nous avons donc besoin de la notion d'espace séparé, que l'on définira un peu plus loin.

Définition 0.27 **Homéomorphisme**

Un **homéomorphisme** est une application bijective continue et de réciproque continue.

Propriétés des homéomorphismes •L'identité est un homéomorphisme.
•Une composition d'homéomorphismes est un homéomorphisme.
•Sur un espace normé, la translation et l'homothétie de rapport non nul sont des homéomorphismes.
•L'ensemble des homéomorphismes de X vers X est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de X vers X.

Démonstration *Rien de difficile dans tout ça ; notons que la réciproque d'une homothétie est une homothétie, et qu'une homothétie est continue parce que les opérations algébriques sont continues (voir proposition 0.51).*

1.1.7 Espace séparé

Définition 0.28 **Espace séparé**

Un espace est **séparé** si pour toute paire de points distincts (x, y) on peut trouver un voisinage de x et un voisinage de y disjoints.

Exemple 0.15 Exemples
•Un espace métrique est séparé.
•Une topologie discrète est séparée.
Exemple 0.16
Tout sous-ensemble fini d'un espace séparé est fermé.

Démonstration *Dans le cas d'un singleton il est clair que le complémentaire est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert, par 0.6. Le passage à un ensemble fini se voit par les propriétés immédiates des fermés données en 0.1.*

Théorème 0.25

Soit $f : X \to Y$.
Si x_0 n'est pas isolé et si Y est séparé, alors l'application f a au plus une limite en x_0.

Démonstration *Supposons que f a au moins deux limites en x_0. On considère les voisinages distincts respectifs de ces deux limites, et on considère l'intersection de leurs images inverses respectives ; cette intersection est réduite à un singleton ; or c'est un voisinage de x_0.*

Théorème 0.26

Soient f_1 et f_2 deux applications continues ayant même ensemble de départ et même ensemble séparé d'arrivée. Alors $\{x | f_1(x) = f_2(x)\}$ est fermé.

Attention 0.17 L'hypothèse de séparation est nécessaire (de même que dans le théorème suivant, même contre-exemple) ; considérer par exemple f_1 et f_2 deux applications de $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie grossière. f_1 est l'application nulle, f_2 est nulle sauf en 0 ; $f_2(0) = 1$.

Démonstration *On montre que l'ensemble complémentaire est ouvert. Pour cela on considère x dans ce complémentaire, et deux voisinages disjoints de $f_1(x)$ et $f_2(x)$; l'intersection des images réciproques de ces voisinages est un voisinage de x qui montre que notre complémentaire est bien un voisinage de x.*

Corollaire 0.27

Si f_1 et f_2 coïncident sur un ensemble dense et ont valeurs dans un espace séparé, alors elle coïncident partout.

Démonstration *Il suffit de se rappeler qu'un fermé est égal à son adhérence, et que l'adhérence d'un ensemble dense est l'espace tout entier.*

Lemme 0.28

Si f est continue et injective, et si l'espace d'arrivée est séparé, alors l'espace de départ est aussi séparé.

Application 0.18 Ce lemme servira à montrer le théorème 0.49 (condition pour qu'un espace produit soit séparé).

Démonstration *Soit f continue et injective. On considère deux points distincts de son domaine ; leurs images sont distinctes par l'injectivité, on peut les séparer par deux ouverts, d'images réciproques ouvertes. Ceci conclut la preuve.*

1.1.8 Continuité et limite dans les espaces métriques ou normés

Définition 0.29 **Continuité séquentielle**

f est **séquentiellement continue en** x si et seulement si pour toute suite x_n convergeant vers x les $f(x_n)$ convergent vers $f(x)$.

Théorème 0.29

Soit X à base dénombrable de voisinages, alors toute fonction séquentiellement continue est continue.

Démonstration *Soit un tel X et soit f séquentiellement continue avec pour domaine X. On considère une base de voisinages décroissants (V_n) de x. Soit W un voisinage de $f(x)$. Il suffit de montrer que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x. Si $f^{-1}(W)$ n'est pas un voisinage de x, alors on peut trouver $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(W)$; x_n tend vers x ; or $f(x_n) \notin W$, et donc $f(x_n)$ ne peut pas tendre vers $f(x)$.*

Corollaire 0.30

Si f est séquentiellement continue sur un espace métrique, alors f est continue.

Démonstration *Considérer l'exercice 0.12.*

Application 0.19 Ce corollaire servira notamment pour le théorème **??**.

Proposition 0.31 **Définition $\epsilon - \delta$ de la continuité**

Soit f application entre espaces métriques ; f est continue en x si pour tout ϵ il existe δ tel que $d(x, x') < \delta \to d(f(x'), f(x)) < \epsilon$

Démonstration *Il suffit de remarquer que la famille des boules ouvertes de rayon ϵ et de centre $f(x)$ est une base de voisinages de $f(x)$, et que la famille des boules ouvertes de rayon δ et de centre x est une base de voisinages de x.*

DÉFINITION 0.30 **Continuité uniforme**

Une application f d'un espace métrique dans un autre espace métrique est dite **uniformément continue** si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$, $d(x, y) < \alpha \to d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Démonstration ***Attention :*** *La continuité uniforme n'est pas une notion topologique mais une notion métrique ; i.e. deux distances équivalentes ont la même notion de continuité uniforme (que l'on change la distance dans l'espace de départ ou dans l'espace d'arrivée), mais le fait que deux métriques soient associées à la même topologie ne suffit pas pour qu'elles aient la même notion de continuité uniforme.*
La continuité uniforme est une notion très importante ayant de nombreuses applications.
Pour montrer la continuité uniforme, on dispose des outils suivants :
– une fonction Lipschitzienne entre métriques est uniformément continue
– une fonction <u>bornée</u> de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et <u>monotone</u> est uniformément continue
– une fonction <u>continue sur un compact</u> est uniformément continue (théorème de Heine 0.77, voir le dit théorème pour d'innombrables applications)
– si p et q sont conjugués et si f et g appartiennent respectivement à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ (convoluée) est uniformément continue.

Quitte à échanger f et g, on peut supposer $p < \infty$. L'inégalité de Hölder implique grâce au théorème de Fubini (cas positif) que $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^n$ et que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}^n$ (par $\| f \|_p . \| g \|_q$).

Montrons maintenant l'uniforme continuité de $f * g$: on a

$$\begin{aligned} & \forall x, t \in \mathbb{R}^n \quad |f * g(x + t) - f * g(x)| \\ = \quad & \int_{\mathbb{R}^n} [f(x + t - y) - f(x - y)]g(y)\, dy \\ \leq \quad & \| g \|_q \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + t - y) - f(x - y)|^p\, dy \right)^{1/q} \leq \quad \| g \|_q \| T_t f - f \|_p, \end{aligned}$$

où T_t est l'endomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ défini par $T_t f(x) = f(x + t)$.

On peut démontrer que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\| T_t f - f \|_p$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$ (preuve laissée en exercice au lecteur : on le prouve pour les fonctions continues à support compact (qui sont donc uniformément continues), et on conclut par densité de ces fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^n)$). Ceci achève la preuve de l'uniforme continuité de $f * g$.

Une propriété essentielle est le théorème 0.110.

DÉFINITION 0.31 **converge uniformément**

On dit qu'une suite f_n d'applications de X dans Y avec Y un espace métrique **converge uniformément** vers f si pour tout ϵ positif il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x dans X $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$.

Application 0.20 Les applications et des exemples classiques :
Tout d'abord, quelques résultats célèbres de densité pour la topologie de la convergence uniforme :

voir le théorème de Runge **??**, le théorème de Stone **??** (avec son corollaire le théorème de Stone-Weierstrass ; voir en particulier les polynômes de Bernstein $B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ qui convergent uniformément vers f sur $[0,1]$, voir théorème **??**).

Il faut absolument se rappeler la convergence uniforme d'une série entière sur tout disque de rayon strictement inférieur au rayon de convergence.

Quelques résultats célèbres utilisant la convergence uniforme : **??** (limite de limites uniformes), **??** (intégration de fonctions réglées), **??** (sur la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes). Quelques variantes à notre convergence uniforme ci-dessus définie, et d'autres résultats (notamment métrisabilité) : voir définition **??**, et les résultats qui suivent ; voir aussi Ascoli et ses conséquences, en section **??**.

Il convient enfin de signaler quelques applications de la convergence uniforme aux espaces L^p et à l'intégration :

– théorème de Plancherel : il existe un unique isomorphisme de L^2 dans L^2 appelé transformation de Fourier L^2 notée $f \mapsto \hat{f}$ telle que pour tout f dans $L^1 \cap L^2$ $\hat{f}$ est la transformée de Fourier L^1 de f, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (voir par exemple le livre [1])

– théorème de Sard : voir [3].

– Intégration au sens de Riemann : voir partie **??**.

Définition 0.32 **Applications lipschitzienne**

Une application h est dite **lipschitzienne** s'il existe $K \in [0, +\infty[$ tel que

$$d(h(x), h(x')) \leq K.d(x, x')$$

On dit aussi qu'elle est K-lipschitzienne.
On définit la **constante de Lipschitz** par

$$Lip(h) = sup\{\frac{d(h(x), h(x'))}{d(x, x')} | x, x' \in X, x \neq x'\}$$

Proposition 0.32
• Les fonctions lipschitziennes sont continues, et même uniformément continues.
•Les fonctions C^1 d'un compact de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé sont Lipschitziennes, ainsi que les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé à dérivée bornée (voir le théorème **??**).

Exemple 0.21 La distance $x \mapsto d(x, x_0)$ sur un espace métrique E avec x_0 appartenant à E est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$. La distance de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne, pour toutes les normes usuelles.

Définition 0.33 **Norme d'une application linéaire**

Si ϕ est une application linéaire entre espaces normés, on définit sa **norme** $\| \phi \|$ par $\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \ / \ \| x \| \leq 1\}$

Cette norme peut a priori être infinie - ce qui signifie donc que l'appellation « norme », bien que classique, est abusive. Il ne s'agit d'une norme qu'en se restreignant à l'ensemble des applications pour lesquelles cette « norme » est finie.

Sans démonstration, donnons le lemme suivant :

LEMME 0.33

$$\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \ / \ \| x \| = 1\} = sup\{\frac{\| \phi(x) \|}{\| x \|}; x \neq 0\}$$

THÉORÈME 0.34

Une application linéaire entre espaces normés est continue si et seulement si sa norme est $< \infty$. Elle est continue si et seulement si elle est lipschitzienne et son coefficient de Lipschitz est égal à sa norme.

Démonstration *Si ϕ est continue en zéro, il est clair que pour r suffisamment petit, $\| x \| < r$ implique $\| \phi(x) \| < 1$; on constate alors par linéarité que $\| \phi \| \leq r^{-1}$.*

Réciproquement si ϕ a une norme finie, alors ϕ est lipschtzienne $\| \phi(x) - \phi(y) \| = \| \phi(x-y) \| \leq \| \phi \| . \| (x-y) \|$, et $Lip(\phi) \leq \| \phi \|$; en considérant x de norme 1, on constate que $Lip(\phi) = \| \phi \|$; d'où le résultat.

Critère de continuité pour une forme linéaire sur un espace normé

ϕ forme linéaire de E dans son corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ est continue si et seulement si son noyau $\phi^{-1}(0)$ est fermé.

Démonstration *Si ϕ est continue, il est clair que l'image réciproque d'un singleton est un fermé. Réciproquement, par contraposée, supposons que ϕ n'est pas continue, alors f n'est pas non plus séquentiellement continue (voir le corollaire 0.30), donc il existe une suite x_n tendant vers 0 telle que $\phi(x_n)$ ne tend pas vers 0. La suite $y_n = \frac{x_n}{\phi(x_n)}$ (définie pour les n tels que $\phi(x_n) > \epsilon$ pour un certain $\epsilon > 0$ après extraction d'une sous-suite) tend vers 0. On considère alors un certain a tel que $\phi(a) = 1$ (si ϕ est nulle elle est continue et le résultat a bien lieu, donc on peut supposer l'existence de a sans perte de généralité), et on constate que la suite $z_n = y_n - a$ tend vers $-a \notin \phi^{-1}(0)$, alors que $z_n \in \phi^{-1}(0)$. Cela contredit $\phi^{-1}(0)$ fermé et conclut donc la preuve.*

DÉFINITION 0.34 **Borné**

Soit E un espace normé. Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit **borné** si $sup\{\| x \| \ | x \in A\} < +\infty$.

On dit que l'application f est **bornée** sur B si et seulement si $f(B)$ est borné.

Exemple 0.22

Soit ϕ une application linéaire entre espaces normés. Les assertions suivantes sont équivalentes :

•ϕ est continue
•ϕ est continue en 0
•ϕ est bornée sur une boule de rayon > 0
•ϕ est bornée sur une sphère de rayon > 0
Démonstration *Ces preuves sont aisées, nous nous contenterons de rappeler quelques faits qui permettent de les rédiger proprement.*

La topologie est invariante par translation (puisque toute translation est un homéomorphisme), donc la continuité en 0 équivaut à la continuité en un point quelconque.

Le fait que ϕ soit bornée sur une boule équivaut trivialement au fait que ϕ soit bornée sur une sphère (par linéarité).

Si ϕ est bornée sur une boule, par linéarité il est clair qu'elle tend vers 0 en 0.

Enfin si ϕ est continue, on a montré un peu plus tôt que sa norme est finie, ce qui se voit au fait que pour x suffisamment petit (disons de norme plus petite que r), on doit avoir $\phi(x)$ de norme plus petite que 1, et donc pour $\|x\| < 1$, $\|\phi(x)\| \leq 1/r$.

1.1.9 Valeur d'adhérence

Définition 0.35 **Valeur d'adhérence**

Soit $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$, avec X et Y des espaces topologiques ; on dit que $y \in Y$ est une **valeur d'adhérence** de f en x_0 si et seulement si pour tout $V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$ et tout $V_y \in \mathcal{V}(y)$ on a $V_y \cap f(V_{x_0} \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Lemme 0.35
L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en x_0 est donné par l'intersection des $\overline{f(V_{x_0} \setminus \{x_0\})}$, pour V_{x_0} voisinage de x_0 ; en particulier c'est un fermé.

Démonstration *Soit y une valeur d'adhérence, alors par définition y appartient à l'adhérence de $\overline{f(V \setminus \{x_0\})}$ pour tout V voisinage de x_0. La réciproque, du même niveau de difficulté, est laissée au lecteur en exercice.*

Le lecteur peut aussi s'exercer à montrer le corollaire suivant :

Corollaire 0.36

Si x_0 n'est pas isolé, alors les limites sont des valeurs d'adhérence.

Proposition 0.37 **Le cas des suites**

Soit x_n une suite dans un espace topologique X.
•Les limites de suites extraites sont des valeurs d'adhérence
•Si une valeur d'adhérence a une base dénombrable de voisinages, alors c'est la limite d'une suite extraite.

Démonstration

•l'infini n'est pas isolé pour la topologie usuelle de $\mathbb{N}$. Donc les limites d'une suite sont des valeurs d'adhérence. Et les valeurs d'adhérence d'une suite extraite sont clairement des valeurs d'adhérence de la suite.

•Soit (V_n) une suite de voisinages de l, valeur d'adhérence de x_n ; soit $\phi(1)$ tel que $x_{\phi(1)}$ soit inclus dans V_1, $\phi(2)$ tel que $\phi(2)$ soit inclus dans V_2 et $\phi(1) < \phi(2)$, $\phi(3)$ tel que $\phi(3)$ soit inclus dans V_3 et $\phi(2) < \phi(3)$, et ainsi de suite...

COROLLAIRE 0.38

Dans un espace métrique, les valeurs d'adhérence d'une suite sont exactement les limites des sous-suites extraites.

⚠ *Attention 0.23* Attention à l'hypothèse métrique ! Dans le cas général, ce n'est pas vrai, voir 1.6.7.

1.2 Construction de topologies

Nous allons voir dans cette section différentes méthodes pour construire des topologies intéressantes. Comme dans tout le chapitre, des applications seront proposées via le symbole $\|$; en particulier, espaces projectifs (compacts), continuité pour des applications « multivariées », espaces séparés. Nous verrons (i) ci-dessous quelques cas simples (ii) les topologies quotient (iii) les topologies associées à des espaces d'applications linéaires (iv) les topologies définies par des familles (de parties ou d'applications) (v) les topologies produit.

DÉFINITION 0.36 **topologie induite**

Étant donné $A \subset X$, on appelle **topologie induite** par la topologie de X sur A l'ensemble des intersections d'ouverts de X avec A.

Il convient de vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.

Exemple 0.24

• Si X est séparé, alors A est séparé pour la topologie induite.

•A est ouvert (resp. fermé) dans X si et seulement si les sous-ensembles ouverts de A pour la topologie induite sont exactement les sous-ensembles de A ouverts pour la topologie de X.

•Si A est ouvert (resp. fermé) dans X, alors l'intérieur (resp. l'adhérence) de $B \subset A$ est le même dans X et dans A

1.2.1 Topologie quotient

On suppose X muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On note Π la projection canonique de X sur l'ensemble quotient.

DÉFINITION 0.37 **Topologie quotient**

La **topologie quotient** est définie comme suit :
$U \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $\Pi^{-1}(U)$ est ouvert.

On peut (doit) vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.

PROPOSITION 0.39

Soit X un espace topologique, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note Π la projection canonique de X sur $X/\mathcal{R}$.

Les propriétés suivantes de la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ sont fondamentales :

– la projection canonique est continue (c'est-à-dire que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert)

– la projection canonique est ouverte (c'est-à-dire que l'image de tout ouvert est un ouvert) si la relation d'équivalence est associée à un groupe agissant par homéomorphismes sur X (voir partie **??**).

Démonstration *Il est clair par définition que la projection canonique est continue. Pour le second point il suffit de voir que si U est un ouvert de X, $\Pi^{-1}(\Pi(U))$ est la réunion des $g(U)$ pour g dans le groupe d'homéomorphismes agissant sur X.*

Application 0.25 La topologie quotient sert un peu partout, par exemple elle définit une topologie sur un espace projectif et le rend compact pour cette topologie (voir le théorème **??**).

1.2.2 Topologie sur un espace d'applications linéaires

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F. Cet espace est normé par

$$\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \mid \| x \| \leq 1\} = sup\{\frac{\| \phi(x) \|}{\| x \|} \mid \| x \| \neq 0\}$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel normé, et on a la formule

$$\|\phi\| = \inf\{C \in [0, +\infty[\mid \forall x \in E,\ \|\phi(x)\| \leq C.\|x\|\}.$$

DÉFINITION 0.38 **Dual topologique**

L'espace **dual topologique** du $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E est l'espace $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues.

Par le mot « continu » on introduit une restriction ; ainsi le dual topologique est *inclus* dans le dual algébrique (dit aussi « dual » tout court).

DÉFINITION 0.39 **Topologie forte**

On appelle **topologie forte** la topologie définie sur le dual par la norme usuelle.

⚠ *Attention 0.26* On va voir un peu plus loin (chapitre **??**, analyse fonctionnelle) d'autres topologies utiles sur le dual. La topologie usuelle sur le dual est la topologie faible, et pas la topologie forte (voir définition plus loin).

1.2.3 Topologie définie par une famille de parties d'un ensemble

Lemme 0.40
Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

Démonstration *Évident en revenant à la définition d'une topologie.*

Définition 0.40 **plus fine**
Si une topologie $\mathcal{T}$ est incluse dans une topologie $\mathcal{T}'$, on dit que $\mathcal{T}'$ est **plus fine** que $\mathcal{T}$, ou que $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$.

Proposition 0.41
Soit A une famille de parties de X ; l'intersection de toutes les topologies contenant A est une topologie, c'est la plus petite topologie contenant A. On la note $\mathcal{T}(A)$, et on dit que c'est la **topologie engendrée par** A. $\mathcal{T}(A)$ est la famille des réunions arbitraires d'intersections finies de parties de $A \cup \{\emptyset, X\}$. Les intersections finies de parties de $A \cup \{\emptyset, X\}$ forment une base d'ouverts pour cette topologie.

Démonstration *Il suffit de considérer le lemme 0.40 pour avoir l'existence de la plus petite topologie contenant A. Le reste est un petit exercice.*

1.2.4 Topologie définie par une famille d'applications

Proposition 0.42
Étant donné Z un ensemble, et X_i une famille d'espaces topologiques, avec $f_i : Z \to X_i$, il existe une plus petite topologie sur Z rendant toutes les f_i continues ; c'est la topologie engendrée par les $f_i^{-1}(U)$ avec U ouvert. Une base de cette topologie est donc l'ensemble des intersections finies d'images réciproques d'ouverts par des f_i.

Démonstration *Découle de la proposition 0.41*

Remarquons que pour $A \subset X$ la topologie engendrée par la fonction (dite injection canonique) qui à x dans A associe x dans X est la topologie induite sur A par celle de X.

Théorème 0.43
Dans la situation ci-dessus, une application f de Y dans Z est continue si et seulement si toutes les composées $f_i \circ f$ sont continues.

Application 0.27 On verra une application pour la continuité lorsque l'espace d'arrivée est un espace produit ; théorème 0.48. Ce théorème permet aussi de montrer la proposition 0.45.

Démonstration *Application immédiate des définitions.*

Définition 0.41 **séparante**

On dit que la famille d'applications f_i est **séparante** si et seulement si pour tout (x, y) il existe i tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Proposition 0.44

Si les f_i sont séparantes et si les topologies sur les X_i sont séparées, alors la topologie engendrée est séparée.

Application 0.28 Ce lemme permettra de montrer qu'un produit d'espaces séparés est séparé, théorème 0.49.

Démonstration *Supposons que x et y soient distincts ; alors puisque la famille d'applications est séparante il existe f_i telle que $f_i(x) \neq f_i(y)$; et puisque X_i est séparé, il existe un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y tels que U et V sont disjoints. Les ensembles $f_i^{-1}(U)$ et $f_i^{-1}(V)$ sont ouverts, puisque f_i est continue (par définition de la topologie engendrée !), et disjoints. Le résultat en découle.*

Définition 0.42 **Topologie faible et topologie faible-***

On appelle **topologie faible** sur l'espace normé E la topologie engendrée par l'ensemble des formes linéaires continues de E dans K. On appelle **topologie faible-*** sur le dual de l'espace normé E la topologie engendrée par l'ensemble des applications qui à ϕ associent $\phi(x)$, étant donné $x \in X$.

Proposition 0.45

Sur E', la topologie forte définie en 0.39 est plus fine que la topologie faible-*.

Démonstration *En vertu du théorème 0.43, il suffit de voir que pour tout x la fonction qui à ϕ associe $\phi(x)$ est continue pour la norme, ce qui est aisé à prouver (en se ramenant en zéro, une application linéaire étant continue si et seulement si elle est continue en zéro).*

PROPOSITION 0.46

La topologie forte d'un espace vectoriel normé est plus fine que la topologie faible.

Démonstration *En vertu du théorème 0.43, il suffit de voir que toute ϕ dans E' est continue pour la norme, ce qui est immédiat.*

PROPOSITION 0.47

La topologie forte sur le dual E' est plus fine que la topologie faible, elle même plus fine que la topologie faible *.

Démonstration *La première partie étant déjà montrée, il suffit de voir que la topologie faible est plus fine que la topologie faible *. Or ceci découle simplement du fait que si deux familles d'applications sont incluses l'une dans l'autre, alors les topologies engendrées sont plus fines l'une que l'autre.*

1.2.5 Topologie produit

DÉFINITION 0.43 **Topologie produit**

On appelle **topologie produit** sur le produit des X_i la topologie engendrée par les projections canoniques de $X = \Pi_i X_i$ sur X_i.

THÉORÈME 0.48

Avec π_i les projections canoniques, une application f de Y dans X est continue si et seulement si pour tout i $\pi_i \circ f$ est continue.

Démonstration *Il suffit d'utiliser le théorème 0.43.*

THÉORÈME 0.49

Un produit d'espaces topologiques non vides est séparé si et seulement si chacun des facteurs l'est.

Démonstration *Les π_i sont séparantes, donc si chaque X_i est séparé, X est séparé, par la proposition 0.44.*

Réciproquement, il suffit de considérer un élément du produit, grâce à l'axiome du choix ; grâce à cet élément, on peut aisément construire une application de X_i dans X qui soit continue et injective ; donc X_i est séparé par le lemme 0.28.

Proposition 0.50

La topologie sur $X_1 \times X_2$ avec X_i métrique est la topologie associée à la métrique $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = max(d(x_1,y_1),d(x_2,y_2))$; on pourrait aussi prendre la somme.

Démonstration *On rappelle simplement que les boules constituent une base d'ouverts dans un espace métrique*

⚠ *Attention 0.29* Cette proposition se généralise à un produit fini, et même à un produit dénombrable ; la distance entre $(x_1, x_2, ...)$ et $(y_1, y_2, ...)$ est donnée par $\sum_n \frac{min(1,d_n(x_n,y_n))}{2^n}$, avec d_n la distance sur X_n.

Exemple 0.30

Écrire la généralisation du lemme précédent à un produit fini quelconque.

Proposition 0.51

Sur un espace normé la somme (opération entre deux élément de l'espace) et la multiplication (d'un élément du corps par un élément de l'espace) sont continues.

Démonstration *L'addition est continue grâce à l'inégalité triangulaire. La multiplication est continue grâce à* $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Exemple 0.31

Soit $E_1, ..., E_n$ et F des espaces vectoriels normés . Soit f multilinéaire de $E_1 \times ... \times E_n$ dans F, alors f est continue si et seulement si $\| \phi \| = sup\{\| \phi(x_1, ..., x_n) \| \mid \| x_1 \| \leq 1, ..., \| x_n \| \leq 1\} < +\infty$

Contrairement au cas des applications linéaires, notons qu'une application multilinéaire continue (non nulle) n'est pas nécessairement lipschitzienne dès que $n \geq 2$.

Exemple 0.32

Une application multilinéaire continue entre un produit d'espaces vectoriels normés et un espace vectoriel normé est lipschitzienne sur chaque sous-ensemble borné.

1.3 Compacité - liens entre complétude et compacité

La compacité est un des développements majeurs de la topologie ; c'est un outil utile même dans des cadres applicatifs. Le symbole ‖ plus bas, ainsi que l'index au mot clef « compacité », sont donc très importants. On verra ici (i) quelques généralités (ii) le théorème de Tykhonov (iii) le cas des espaces vectoriels normés (iv) le cas des espaces métriques compacts. Des exemples importants de compacts sont la boule unité fermée du dual d'un espace vectoriel normé pour la topologie faible-*, les espaces projectifs (théorème **??**), les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$, les fermés d'un compact. Les propriétés fondamentales sont notamment l'existence de suites extraites convergences dans les compacts, et le fait que de tout recouvrement d'un compact par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue). La terminologie est un peu piège, puisqu'en anglais, un espace compact ne devient pas un « compact space » mais un « compact Hausdorff space » (la différence tient à la séparabilité).

1.3.1 Généralités

Définition 0.44 Recouvrement ouvert

Un **recouvrement ouvert** de l'espace topologique X est une famille d'ouverts U_i avec $X = \cup_i U_i$.

Définition 0.45 Compact

X est **compact** s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Un sous-ensemble K de l'espace X est dit **compact** s'il est compact pour la topologie induite.

Une partie A de X est dite **relativement compacte** si sa fermeture $\overline{A}$ est compacte.

On verra plus tard (voir lemme 0.58) que tout compact d'un espace séparé est fermé, et que tout compact d'un métrique est borné (s'il n'était pas borné on extrairait une sous-suite convergente d'une suite non bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass 0.78, pour aboutir à une contradiction).

⚠ *Attention 0.33* Un compact, dans le cas général, n'est absolument pas nécessairement fermé ! Considérer par exemple un point, dans un ensemble X contenant au moins deux points et dont la topologie est réduite à $\{\emptyset, X\}$.

Définition 0.46 propriété de Borel-Lebesgue

Un espace vérifie la **propriété de Borel-Lebesgue** si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

Application 0.34 Quoique d'autres caractérisations existent, la propriété de Borel-Lebesgue sert souvent directement ; voir par exemple une généralisation au théorème de Heine aux familles de fonctions équicontinues **??**.

Un espace est ainsi compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Intuition ‖ La compacité : éclaircissements, utilisation.
On verra d'autres caractérisations de la compacité que la définition par « séparé+Borel-Lebesgue ». Néanmoins cette définition servira par exemple pour le théorème **??** (résultats de régularité sous le signe somme). Elle permettra aussi, en partie 1.6.12, de montrer que le compactifié d'Alexandrov est compact. Les deux premiers points de l'exercice 0.36, la proposition 0.53 (l'image continue d'un compact dans un séparé est compact), le théorème 0.57 de séparation des compacts, le théorème **??** (semblable au théorème de Heine dans le cas de familles équicontinues), le résultat selon lequel tout métrique compact est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert en partie 1.6.9, le théorème de Stone **??**, le corollaire du champ rentrant dans la sphère 0.160, le théorème d'Ascoli **??** utilisent cette même caractérisation.

Les méthodes usuelles pour montrer la compacité d'un ensemble sont le fait qu'un sous-ensemble fermé d'un compact est compact, le fait qu'un produit (quelconque) de compacts est compact (voir le théorème de Tykhonov 0.66 [6], le théorème d'Arzéla-Ascoli **??** (aux multiples applications), et le fait que l'image continue d'un compact dans un séparé est compacte (par exemple, dans le cas des espaces projectifs).

Des théorèmes incontournables en matière de compacité sont le théorème de Banach-Alaoglu 0.72 (utilisant Tykhonov), le théorème de Heine 0.77 ; le théorème de Baire 0.113 (sous une forme moins connue que la forme classique basée sur la complétude) s'applique aux espaces localement compacts. Citons aussi le théorème de Riesz 0.71, le théorème de Krein-Milman (soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact convexe de E non vide, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : on trouvera une preuve dans [4]), le théorème de Montel **??**.

La compacité dans le cas métrique offre des résultats fondamentaux :

•théorème de Bolzano-Weierstrass 0.78

•un espace métrique compact est séparable

•une isométrie d'un espace métrique compact dans lui-même est une bijection [7]

Un sous-ensemble discret [8] dans un compact est fini ; on en déduit en particulier qu'une fonction holomorphe non nulle a un nombre fini de zéros dans un compact connexe.

Enfin notons le point fondamental suivant : l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compacte (voir théorème 0.53). Cela entraine en particulier qu'une fonction continue sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ atteint ses bornes (d'où le théorème de Darboux **??**, le théorème de Rolle **??**, et certains critères de recherche de minima - voir partie **??**).

En prenant un peu d'avance sur la notion de complétude, que l'on verra en section 1.5.1, on peut encore citer le fait qu'un espace métrique compact est complet (voir corollaire 0.102) [9], ainsi que le théorème ci-dessous :

Théorème 0.52
Un espace métrique **précompact** [10] et complet est compact.

Démonstration

Comme dit ci-dessus, on verra plus loin qu'un espace compact métrique est complet. Il est donc aussi précompact. Mais ici, il s'agit de la réciproque.

Supposons donc E précompact et complet, et montrons sa compacité. Pour montrer sa compacité, nous allons utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass 0.78. Considérons donc une suite (x_n) de E. Nous allons en chercher une sous-suite convergente.

Il existe, par définition, pour i entier ≥ 1, $y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,N_i}$ tels que les boules centrées sur les $y_{i,j}$ et de rayon $\frac{1}{2^j}$ recouvrent E. Construisons par récurrence sur i $1 \leq j_i \leq N_i$ tel qu'une infinité de points x_n soit dans l'intersection des boule de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i$. On choisit alors $a_i \in \mathbb{N}$, construit aussi par récurrence, tel que la suite des a_i soit croissante, et x_{a_i} soit dans l'intersection des boules de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i$.

Ceci définit une suite extraite de la suite des x_n, dont on montre aisément qu'elle est de Cauchy. Elle converge donc, par complétude de E. Donc, E est compact.

6. Le théorème de Tykhonov, conjoint au fait qu'un fermé d'un compact est compact, implique d'ailleurs que la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, et donc notamment l'équivalence des normes en dimension finie - voir théorème 0.68

7. On en trouvera une preuve en application de Bolzano-Weierstrass.

8. Un espace topologique est discret si tout point est isolé.

9. On en déduit notamment que le théorème du point fixe **??** s'applique dans un compact métrique et donc que la boule unité fermée $l^2(\mathbb{N})$ n'est pas compacte ; en cas contraire, l'application $(x_n)_{n\geq 0} \mapsto (y_n)_{n\geq 0}$ avec $y_i = x_{i-1}$ si $i > 0$ et $y_0 = 0$ serait bijective car une isométrie d'un espace complet compact sur lui-même est une bijection comme dit ci-dessus.

Application 0.35 Une belle application est la proposition 0.139 (compacité d'un certain ensemble de compacts pour la distance de Hausdorff).

Dans les ouvrages en anglais, « compact space » est simplement un espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue. L'équivalent de notre espace compact est « compact Hausdorff space ».

Exemple 0.36

On peut montrer que

•Toute partie finie d'un espace séparé est compacte.

•Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

•Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique X séparé tendant vers une limite x. Alors $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact (preuve aisée, en considérant un recouvrement par des ouverts, puis en considérant un des ouverts contenant x, et en voyant qu'un nombre fini des éléments de la suite est en dehors de cet ouvert.

•$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont des compacts (en tant que fermés bornés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie).

•Les espaces projectifs sont compacts (voir **??**).

•Le cube de Hilbert (voir section 1.6.9) est compact.

•Le compactifié d'Alexandrov d'un espace séparé non compact localement compact est compact (voir section 1.6.12)

Démonstration *La première assertion est aisée. Pour la deuxième, on se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de l'intervalle $[a, b]$ et on considère le plus grand x tel que $[a, x]$ peut être recouvert par un recouvrement fini extrait de $\mathcal{U}$ et l'hypothèse $x \neq b$ conduit à une contradiction. Les points suivants sont simples ou comportent une référence vers une preuve complète.*

PROPOSITION 0.53

Si f est une application continue d'un espace compact K dans un espace séparé Y, alors $f(K)$ est compact.

Démonstration *$f(K)$ est évidemment séparé. Étant donné un recouvrement ouvert de $f(K)$ on peut considérer le recouvrement ouvert de K constitué des images réciproques de ces ouverts ; on en extrait un recouvrement fini, et il n'y a plus qu'à repasser dans Y pour conclure.*

Application 0.37 Cette propriété servira notamment pour le théorème de Rolle **??**, ou pour montrer qu'un espace projectif est compact (théorème **??**). Elle permettra aussi de montrer que tout compact métrique est isomorphe à un sous-espace topologique du cube de Hilbert (voir partie 1.6.9). Enfin, elle permet de montrer que toute isométrie d'un métrique compact sur lui-même est une bijection (corollaire 0.122).

Il faut noter qu'une propriété plus fine sera parfois utile :

Proposition 0.54

Soit f une application semi-continue supérieurement d'un compact dans $\mathbb{R}$. Alors f est majorée et atteint sa borne sup.

Application 0.38 Cela servira notamment pour le théorème de Montel **??**.

Démonstration

•Soit K un compact, et f semi-continue supérieurement de K dans $\mathbb{R}$. Soit x la borne sup de $f(t)$ pour t dans K (a priori x peut être égal à $+\infty$).

•Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de réels tendant vers x avec x_n élément de l'image de f pour tout n. Supposons que la borne sup ne soit pas atteinte (soit elle est infinie, soit x_n tend vers x sans jamais l'atteindre).

•On a alors $K = \cup_{n\in N} f^{-1}(]-\infty, x_n[)$. On peut extraire de ce recouvrement de K un recouvrement fini (en fait, un recouvrement par un seul des $f^{-1}(]-\infty, x_n[)$ puisque ces ensembles sont croissants) ; donc f est bien majorée.

•K est alors égal à $f^{-1}(]-\infty, x_n[)$ pour un certain n, ce qui contredit le fait que x_n croisse vers x sans jamais l'atteindre - en effet $x_n < x$ implique qu'il existe t dans K tel que $f(t) > x_n$.

Définition 0.47 Propriété d'intersection finie non vide

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X a la **propriété d'intersection finie non vide** si et seulement si tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide.

Proposition 0.55

Un espace topologique est compact s'il est séparé et si toute famille de fermés qui a la propriété d'intersection finie non vide a une intersection non vide.

Démonstration *Il suffit de considérer les complémentaires des fermés, qui ont le bon goût d'être ouverts.*

Application 0.39 Outre les corollaires qui suivent, on pourra voir la proposition 0.64 (adhérence non vide d'une suite dans un compact), ou le lemme **??** (intercalage d'ouverts). L'une des formes du théorème de Baire (cas localement compact) utilise aussi cette proposition.

Corollaire 0.56

Un fermé d'un compact est compact.

Application 0.40 Voir par exemple **??** pour l'intercalage d'ouverts.

Démonstration *Un fermé d'un compact est évidemment séparé ; il suffit ensuite de voir qu'un fermé de notre fermé est un fermé de notre espace et d'utiliser la proposition précédente.*

Théorème 0.57

Deux compacts disjoints d'un espace séparé peuvent être séparés par des ouverts.

On montre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 0.58

Si X est séparé, et K compact inclus dans X, alors K est fermé.

Application 0.41 Cela servira à chaque fois qu'on voudra montrer que compact équivaut à fermé borné dans un espace donné, par exemple **??** (caractérisation de l'ensemble des compacts de l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$).

Démonstration *On considère x dans le complémentaire de K ; pour tout y appartenant à K on peut séparer x et y par des ouverts U_y et V_y. On peut alors considérer le recouvrement de K par les ouverts V_y et en extraire un recouvrement fini. En prenant l'intersection des U_y correspondants à notre recouvrement fini, on a un ouvert autour de x, n'intersectant pas K. Cela vaut pour tout x ; donc le complémentaire de K est ouvert, donc K est fermé.*

On peut donc terminer la preuve de notre théorème, en considérant un deuxième compact K', et pour tout x de K', on peut trouver un ouvert U_y autour de x et un ouvert V_x contenant K ; on applique la compacité de K', et on obtient ainsi deux ouverts disjoints séparant K' de K.

Corollaire 0.59

Dans un espace compact, les sous-ensembles fermés sont les sous-ensembles compacts.

Démonstration *Il suffit de considérer le corollaire 0.56 et le lemme 0.58.*

Corollaire 0.60

Tout point d'un compact possède une base de voisinages compacts.

Démonstration *(voir figure 2) Soit W un voisinage ouvert de x dans l'espace compact X. Le fermé $X \setminus W$ est compact. On peut donc (théorème 0.57) séparer les compacts $\{x\}$ et $X \setminus W$ par deux ouverts U et V. Alors $X \in U \subset X \setminus V \subset W$; et donc $X \setminus V$ est un voisinage compact de x inclus dans W.*

Corollaire 0.61

Une fonction continue bijective d'un compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.

Application 0.42 On peut citer en applications les résultats 0.136 et 0.126 (propriétés du cube de Hilbert et du Cantor triadique).

Démonstration *Il suffit de voir que l'image d'un fermé (donc compact) est compacte dans l'espace image, et donc elle est aussi fermée. Donc l'image réciproque de tout fermé par la fonction inverse est un fermé.*

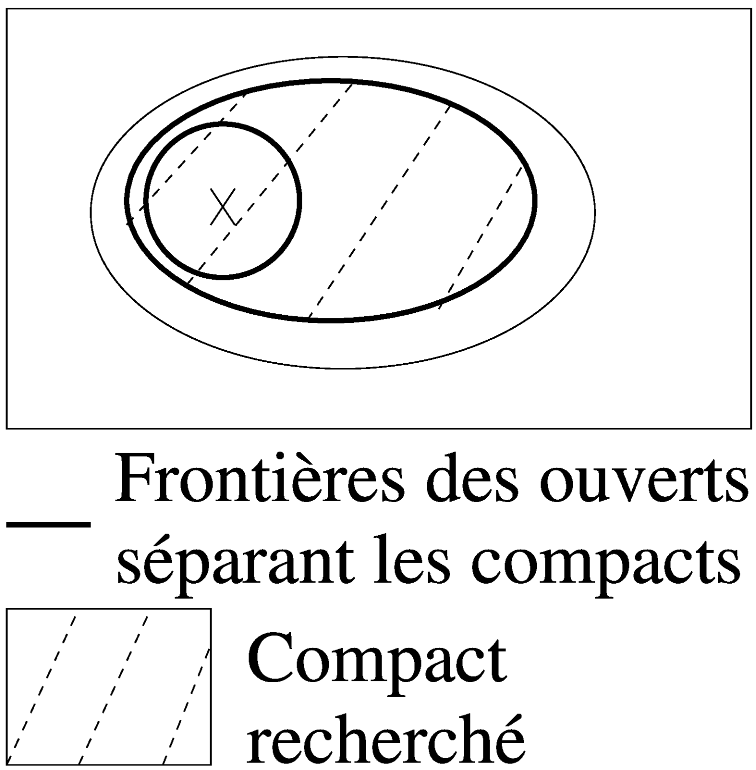


Figure 2 – Construction d'une base de voisinages compacts dans un compact.La croix désigne x.

Application 0.43 On peut utiliser ce résultat pour montrer que tout compact métrique est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert, partie 1.6.9.

THÉORÈME 0.62

Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

Démonstration *Il suffit de considérer un interval fermé borné autour d'une partie bornée pour montrer aisément ce résultat à partir des résultats précédents et de l'exercice 0.36.*

COROLLAIRE 0.63
Étant donnée une fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$, ses bornes supérieures et inférieures sont atteintes.

Application 0.44 Ce résultat sert dans la vie de tous les jours, mais on peut par exemple citer le théorème du champ rentrant dans la sphère 0.160, le theorème de Rolle **??**, la recherche de points extrémaux sur un compact (voir **??**). Citons aussi le résultat 0.144 sur les billards strictement convexes du plan. Enfin, il servira pour le théorème 0.143 (point fixe commun à un sous-groupe compact d'automorphismes d'un espace de Hilbert).

Démonstration *Immédiat au vu du résultat précédent et de la proposition 0.53.*

PROPOSITION 0.64

Toute suite à valeurs dans un compact admet une valeur d'adhérence.

Démonstration *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un compact. La suite des $\overline{\{x_m/m \geq n\}}$ a la propriété d'intersection finie non vide ; il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 0.55.*

DÉFINITION 0.48 **Localement compact**

Un espace topologique est **localement compact** s'il est séparé et si tout point possède un voisinage compact.

PROPOSITION 0.65

Tout point d'un espace localement compact possède une base de voisinages compacts.

Démonstration *Si $x \in Int(K)$ avec K compact, alors x possède une base de voisinages compacts dans K muni de la topologie induite (par 0.60). Comme $x \in Int(K)$, cette base de voisinages est aussi une base de voisinages de x dans X.*

1.3.2 Le théorème de Tykhonov

Théorème 0.66 **Théorème de Tykhonov**

Soit X_i une famille d'espaces tous non vides. Le produit est compact si et seulement si chacun des facteurs l'est.

Démonstration *On a déjà montré que le produit est séparé si chacun des facteurs l'est (voir 0.49). La compacité du produit X entraîne la compacité de chacun des facteurs comme on peut s'en rendre compte en considérant la projection canonique sur chacun des facteurs et en appliquant la proposition 0.53 (image continue d'un compact dans un séparé). Il reste donc à voir la réciproque, c'est-à-dire que X est compact, si chacun des facteurs l'est. On trouvera une démonstration dans Bourbaki, ou bien dans [4]. La démonstration utilise le lemme de Zorn* **??**.

Intuition *Il est important de noter que l'on peut prouver Tykhonov dans le cas d'un produit dénombrable de compacts métriques (X_i, d_i) sans faire appel à l'axiome du choix (qui est à la base du lemme de Zorn). Cela se fait simplement en considérant :*

- *La métrique d'_i associée à la métrique d_i, avec $d'_i = min(d_i, 1)$.*
- *La métrique sur le produit des compacts définie par $D(x,y) = \sum \frac{1}{2^i} d'_i(x_i, y_i)$.*
- *La topologie de cette métrique est la topologie produit.*
- *Il ne reste plus qu'à utiliser la caractérisation des compacts métriques par les sous-suites (théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème 0.78).*

Intuition Dans le cas d'un produit fini de compacts métriques, la preuve est immédiate.

Corollaire 0.67

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

Application 0.45 Voir par exemple la compacité du K_3 de Cantor 0.134, le lemme 0.123 sur l'approximation d'ouverts par des compacts.

Démonstration *Étant donnée une partie bornée, on considère un produit d'intervalles fermés bornés dans lequel cette partie est incluse, et le résultat vient tout seul.*

1.3.3 Application aux espaces vectoriels normés

Théorème 0.68

Toutes les normes sur un $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Démonstration *On considère une base, et la norme qui a un élément de E associe la somme des valeurs absolue de ses composantes. On montre qu'une norme quelconque est équivalente à cette norme. Il suffit pour cela de noter que la sphère unité (pour notre norme) est compacte, par compacité de la même sphère dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et continuité des opérations algébriques, et de vérifier que toute norme est continue et donc atteint sur cette sphère un minimum et un maximum (nb : toute norme est continue car K-lipschitzienne avec K le max des normes d'images d'éléments de la base).*

Dans un espace vectoriel de dimension finie, on pourra éviter de préciser la topologie, ce qui sous-entendra qu'on considère la topologie définie par n'importe laquelle des normes (puisque des normes équivalentes définissent la même topologie).

Corollaire 0.69
Un sous-espace vectoriel (de dimension finie) d'un espace normé est fermé.

Application 0.46 Une application se trouve juste après le théorème de Baire 0.113 : un espace de Banach de dimension infinie ne possède pas de base dénombrable.

Démonstration *Nous avons tout d'abord besoin d'un lemme :*

Lemme 0.70

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

begindivdemonstrationbegintext endtext On considère la même norme que dans le théorème précédent. Pour cette norme notre espace est clairement fermé (au vu des équations le définissant). Plus précisément, on considère une base de notre espace vectoriel E, telle que F soit engendré par les k premiers éléments de cette base (c'est possible grâce au théorème de la base incomplète). Alors F est l'intersection d'hyperplans fermés d'équations $x_i = 0$.

On peut maintenant finir notre preuve ; soit $x \in \overline{F}$, avec F de dimension finie ; alors on se place dans l'espace généré par une base de F plus le vecteur x, et on utilise le lemme ci-dessus. enddivdemonstration

Exemple 0.47

Toute application linéaire d'un espace normé de dimension finie dans un espace normé est continue.

Démonstration *Il suffit de considérer une base et la norme définie plus haut.*

Théorème 0.71 **Théorème de Riesz**

Un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Application 0.48 On verra une application amusante avec le corollaire **??** ($H(\Omega)$ n'est pas normable), une autre (utilisant aussi le théorème d'Arzéla-Ascoli et le théorème d'isomorphisme de Banach) avec le théorème **??** quant à l'espace des applications continues de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration *Supposons E de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes, on peut se ramener à $E = \mathbb{R}^n$; comme la boule unité est fermée bornée, elle est compacte. Réciproquement (voir figure 3), supposons la boule unité fermée compacte, alors on peut la recouvrir par des boules ouvertes de diamètre 0.5 en nombre fini. On considère alors l'espace F engendré par les centres de ces boules, et on montre que l'on peut approcher tout point de la boule arbitrairement bien avec des points de F ; ensuite on utilise le fait que F est de dimension finie et donc est fermé.*

Théorème 0.72 **Théorème de Banach-Alaoglu**

Soit E' le dual d'un espace normé, alors sa boule unité fermée est compacte pour la topologie faible-* (i.e. la topologie engendrée par les applications qui à $\phi \in E'$ associent $\phi(x)$ pour un certain $x \in E$).

La boule unité fermée est l'ensemble des formes linéaires ϕ telles que $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

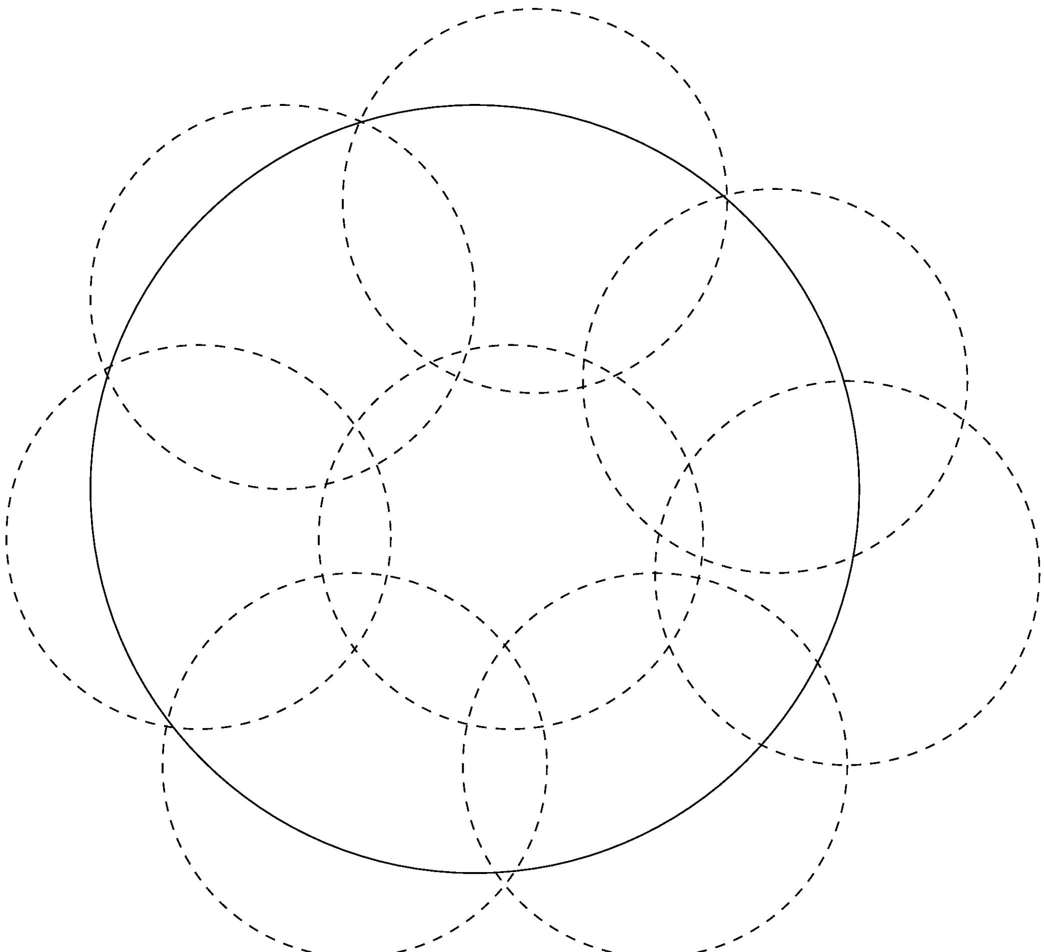


Figure 3 – Le théorème de Riesz.
Commentaire : Recouvrons la boule unité par des boules de diamètre $\frac{1}{2}$. Donnons-nous x dans la boule unité. On approxime x par le centre du cercle le plus proche, et on réitère avec le double du vecteur reliant ce centre à x.

Démonstration *(voir figure 4) On identifie E' à une partie du produit $\mathbb{K}^E$, en identifiant ϕ à $(\phi(x))_{x\in E}$. La topologie faible-* est alors la topologie induite sur E' par la topologie produit sur $\mathbb{K}^E$. La boule unité $\overline{B_{E'}}$ est contenue dans $\Gamma = \Pi_{x\in E}\overline{B}(0, \| x \|) \subset \mathbb{K}^E$. Par le théorème de Tykhonov ce produit est compact. Il suffit donc maintenant de montrer que $\overline{B}_{E'}$ est fermé comme sous-ensemble de Γ muni de la topologie produit, ce qui se fait aisément en considérant les équations définissant $\overline{B}_{E'}$ (qui sont simplement les équations définissant les fonctions linéaires).*

Application 0.49 Voir la proposition **??** par exemple.

Proposition 0.73
La boule unité fermée du dual d'un espace séparable est métrisable pour la topologie faible-*.

Démonstration *Soit E un tel espace. On considère une suite x_n dense dans E, à valeurs non nulles ; la topologie faible sur la boule unité fermée peut être définie par la métrique*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{n\geq 0} \frac{|\phi(x_n) - \psi(x_n)|}{\| x_n \| .2^n}$$

Cette (courte) vérification étant faite, le résultat est acquis.

Corollaire 0.74

On peut en outre extraire de toute suite de cette boule unité fermée une suite convergeant *-faiblement.

Démonstration *Laissée au lecteur.*

1.3.4 Espaces métriques compacts

Théorème 0.75

Un espace métrique compact est séparable. Il possède donc une base dénombrable d'ouverts.

Démonstration *Soit X métrique compact. Pour tout n on peut trouver une suite finie de points telle que les boules centrées sur ces points et de rayon $\frac{1}{n}$ recouvrent X. La suite obtenue en mettant bout à bout toutes ces suites finies est dense dans X.*

Corollaire 0.76
Un espace métrique compact est de cardinal inférieur ou égal à $\mathbb{R}$.

Démonstration *Un espace métrique compact est séparable ; donc il admet une base dénombrable d'ouverts. En prenant un x_i dans chaque ouvert, on obtient donc que tout point est limite d'une suite de x_i. Il suffit alors de voir que l'ensemble des suites d'un ensemble au plus dénombrable est de cardinal au plus la puissance du continu, ce qui se voit en considérant par exemple la fonction qui à un réel $x \in [0, 1]$ dont le développement binaire comporte une infinité de 1 associe la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_n est égal au nombre de 0 entre le n-ième 1 et le $n + 1$-ième 1.*

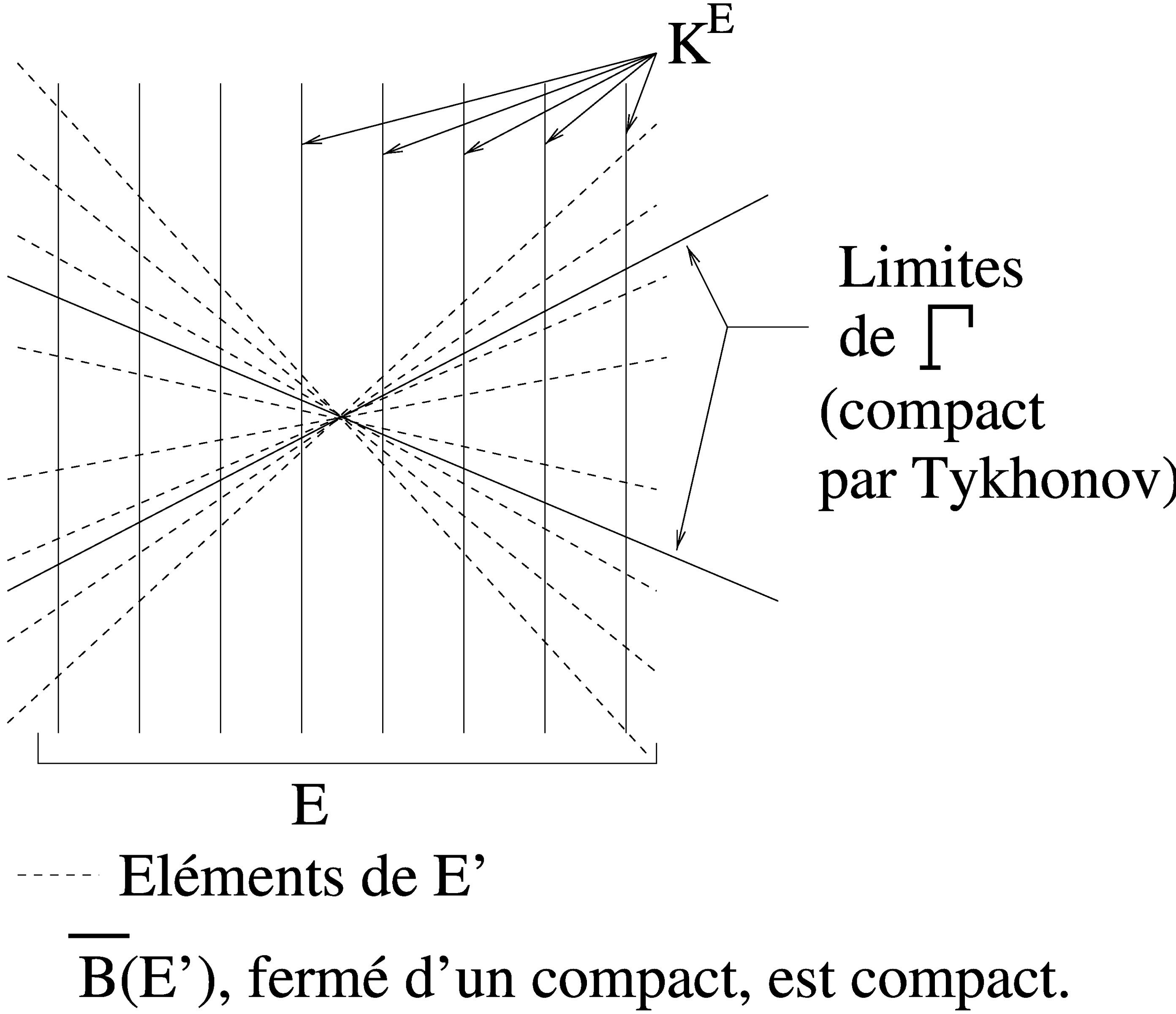


FIGURE 4 – Schéma explicatif de la preuve du théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème 0.77 Théorème de Heine

Une application continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est uniformément continue.

Application 0.50 Ce théorème servira par exemple pour le théorème **??** (densité de fonctions C^∞ à support compact dans l'ensemble des fonctions C^k). Il peut aussi servir à montrer qu'une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers une limite finie en plus et moins l'infini est uniformément continue.

Démonstration *On considère, pour $\epsilon > 0$, pour chaque $x \in X$, $\alpha_x > 0$ tel que $d(x, y) < \alpha_x \to d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de centre x et de rayon $\alpha_x/2$. On prend alors $\alpha = \inf \alpha_i$, et le résultat vient tout seul.*

Théorème 0.78 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans X contient une sous-suite convergente.

Application 0.51 par exemple le théorème de Brouwer 0.158, le théorème de Tykhonov dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques (voir juste après le théorème 0.66) sans utiliser l'axiome du choix. Le théorème est aussi utilisé dans le lemme **??**, qui servira à démontrer le théorème de Runge. Le corollaire 0.80 est une autre application : toute isométrie d'un espace métrique compact dans lui-même est une bijection. On pourra aussi voir le lemme **??** qui sert pour l'approximation de fonctions holomorphes par des fractions rationnelles.

Démonstration *Si X est métrique compact, alors toute suite (x_n) a une valeur d'adhérence (considérer la suite décroissante de parties de X constituées des adhérences $X_n = \overline{\{x_k / k \geq n\}}$; la suite de ces parties a la propriété d'intersection finie), et X étant métrique, une sous-suite converge vers cette valeur d'adhérence.*

Pour la réciproque, considérons tout d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 0.79 Lemme de Lebesgue

Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite contienne une sous-suite convergente. Si V_i est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i tel que $B(x, \epsilon) \subset V_i$.

Démonstration *Dans le cas contraire, on peut pour tout entier n trouver un x_n tel que la boule de centre x_n et de rayon $1/n$ ne soit contenue dans aucun V_i. Alors on extrait de cette suite une sous-suite convergente. On obtient que pour n assez grand les boules en question seront incluses dans le V_i qui contient x.*

Corollaire 0.80

Une isométrie d'un espace métrique compact sur lui-même est une bijection.

Démonstration *Supposons E un tel espace, et f une isométrie de E dans E. Supposons que x n'appartienne pas à l'image de f. Alors, x est à distance $> \epsilon > 0$ de l'image de f (en effet l'image de f est compacte comme image continue d'un compact, voir proposition 0.53, or la distance entre un compact et un fermé disjoint de lui est > 0, voir corollaire 0.122).*

Considérons alors $u_n = f^n(x)$, et supposons que u_{k_n} converge, pour (k_n) une certaine suite strictement croissante. Si l'on aboutit à une contradiction, alors le théorème de Bolzano-Weierstrass permettra de conclure que l'espace ne peut être compact.

$d(u_{k_n}, u_{k_{n+1}}) = d(u_{k_{n+1}-k_n}, x)$ puisque f est une isométrie. Or $d(u_{k_{n+1}-k_n}, x) > \epsilon$ par définition de x et puisque les u_n appartiennent à l'image de f pour $n > 0$. D'où la contradiction recherchée.

Lemme 0.81

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 0.79, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite finie x_i telle que les boules $B(x_i, \epsilon)$ recouvrent X.

Démonstration *Si le lemme est faux pour un certain ϵ, alors on peut construire par récurrence une suite telle que chaque point soit à une distance au moins ϵ des autres points, ce qui contredit l'hypothèse.*
Démonstration *Avec ces deux lemmes on conclut : si toute suite contient une sous-suite convergente, alors étant donné un recouvrement ouvert (V_i), on peut construire par le premier lemme un ensemble de boules recouvrant X et tel que chaque boule est incluse dans l'un des V_i ; ensuite par le deuxième lemme, on se ramène à un nombre fini de points, et il ne reste plus qu'à « cueillir » le bon sous-ensemble des V_i.*

1.4 Connexité

Définition 0.49 **connexe**

Un espace topologique est dit **connexe** si les seuls sous-ensembles de X à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X. Une partie d'un espace topologique est connexe si elle est connexe pour la topologie induite.

Application 0.52 On utilisera la connexité pour montrer :
– certaines formes du théorème des valeurs intermédiaires 0.87.
— le corollaire **??** sur la dérivabilité d'une limite d'une suite de fonctions.
— la proposition **??** (distance dans un connexe) qui utilisera la connexité pour définir une distance dans un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé
— le théorème de Runge, **??**.
— tous les résultats basés sur l'indice, par exemple le théorème de Cauchy **??**, et beaucoup de résultats sur les fonctions holomorphes.
— l'exercice de la partie 1.6.17, montrant qu'une fonction f C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\ \exists n\ f^{(n)}(x) = 0$ est polynomiale.

On trouvera diverses autres applications de la connexité plus loin dans ce chapitre.

Proposition 0.82

Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) X est connexe
(ii) Toute application ϕ de X dans $\{0,1\}$ continue est constante, avec $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète.
(iii) Pour tout couple d'ouverts A et B de X, si $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$
(iv) Pareil avec des fermés
(v) Toutes les parties de X non triviales (i.e. autres que X et $\emptyset$) ont une frontière non vide.

Démonstration *Facile :*

(i) → (ii) Si X est connexe, montrons que toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

En effet, si une telle application f n'était pas constante, on partitionnerait X en deux ouverts non vides ($f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$) ; chacun d'eux serait alors à la fois non trivial, et ouvert et fermé (car $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des parties ouvertes et fermées de $\{0,1\}$).

La réciproque (ii) → (i) est non moins simple (raisonner par contraposée : si A ouvert et fermé non vide et différent de X, alors prendre la fonction caractéristique de A dans X).

(i) → (iii) Facile, en voyant que si A et B contredisent l'hypothèse, A est ouvert et fermé et non trivial.

Le reste est du même niveau de difficulté.

Proposition 0.83

On peut montrer que :
•Si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.
•Si les A_i sont des parties connexes de X et $\cap A_i \neq \emptyset$, alors $\cup A_i$ est connexe.
•Si les A_i sont des parties connexes de X et pour tout couple A_i, A_j il existe $i_0, ..., i_k$ avec $i_0 = i$ et $i_k = j$ tels que A_{i_l} intersecte $A_{i_{l+1}}$, alors $\cup A_i$ est connexe.

Démonstration *Pour montrer la première assertion on utilise la deuxième des caractérisations des connexes donnée en 0.82.*

La deuxième assertion n'est qu'un cas particulier de la troisième.

La troisième assertion là aussi se montre en utilisant la seconde des caractérisations des connexes donnée en 0.82.

On donne sans démonstration les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.84
Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème 0.85

L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe.

(à prouver en utilisant la même 2nde caractérisation des connexes)

THÉORÈME 0.86

Soit f une application continue définie sur un connexe et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors l'image de f est un intervalle.

Démonstration *Conséquence des deux théorèmes précédents.*

COROLLAIRE 0.87

Le théorème des valeurs intermédiaires (dans le cas d'une fonction continue, pas dans le cas d'une fonction dérivée) découle immédiatement du théorème ci-dessus.

Application 0.53 Théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction dérivée, dit aussi théorème de Darboux, **??**.

THÉORÈME 0.88 **passage à la douane**

Soit X un espace topologique, A une partie connexe de X et $B \subset X$. Si A intersecte à la fois B et son complémentaire, alors A intersecte la frontière de B.

Démonstration *Il suffit de voir que les deux ouverts $Int(B)$ et $Ext(B)$ ne peuvent recouvrir A sans contredire la connexité de A.*

THÉORÈME 0.89

Un produit d'ensembles (tous) non vides est connexe si et seulement si chacun des facteurs l'est.

Démonstration *Via les projections canoniques, on voit que si le produit est connexe, chacun des facteurs l'est. La réciproque est plus difficile. On commence par le cas où le produit est un produit de deux espaces.*

Soient X_1, X_2 deux connexes non vides. Montrons que $X_1 \times X_2$ est connexe.

On va utiliser la deuxième des caractérisations des connexes données en 0.82.
Soit donc une fonction continue f de $X_1 \times X_2$ dans $\{0,1\}$. Il nous faut montrer que f est constante.
On considère donc deux éléments $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $X_1 \times X_2$. On doit prouver que $f(x) = f(y)$.
Étudions la fonction $f_1 : \begin{array}{ccc} X_1 & \to & \{0,1\}t \\ & \mapsto & f(t, x_2) \end{array}$. La fonction f_1 est continue sur X_1 connexe, donc f_1 est constante.
On a ainsi $f_1(x_1) = f_1(y_1)$, ce qui s'écrit $f(x) = f(x_1, x_2) = f(y_1, x_2)$.
En étudiant la fonction $f_2 : t \mapsto f(y_1, t)$ on obtient de même $f(y_1, x_2) = f(y_1, y_2) = f(y)$.
On déduit de ce qui précède que $f(x) = f(y)$, et par suite que f est constante sur $X_1 \times X_2$, ce qui achève de prouver que $X_1 \times X_2$ est connexe.
Par récurrence, on généralise ce résultat à tout produit fini de connexes.

On considère maintenant un produit quelconque X de facteurs $(X_i)_{i\in I}$ connexes non vides. On considère un élément y de X, en utilisant l'axiome du choix. Pour A fini inclus dans I, on définit alors le sous-ensemble X_A de X défini par $(x_i) \in X_A$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout i tel que $i \notin A$. X_A est connexe puisqu'homéomorphe à un produit fini de X_i. On peut vérifier que la réunion des X_A est dense dans X (en se rappelant qu'une base d'ouverts d'une topologie produit est l'ensemble des intersections finies d'images d'ouverts par les projections inverses) et connexe (par le deuxième point de la proposition 0.83), et on conclut par le premier point de la proposition 0.83.

THÉORÈME 0.90

Une fonction localement constante sur un connexe est constante.

Démonstration *Il suffit de voir que l'image réciproque d'un singleton est à la fois ouverte et fermée.*

Application 0.54 On se servira par exemple de ce théorème pour montrer que $Lip_\alpha(\Omega)$ n'a pas d'intérêt pour $\alpha < 1$ (cf section **??**).

DÉFINITION 0.50 **Composante connexe**

Avec $x \in X$, la **composante connexe** de x, notée $C(x)$, est la réunion de tous les connexes contenant x.

PROPOSITION 0.91

•Tout point appartient à sa composante connexe
•La composante connexe d'un point est le plus grand connexe contenant ce point
•Les composantes connexes sont fermées
•Deux composantes connexes sont disjointes ou confondues. En particulier, la famille des composantes connexes forme une partition de l'espace.

Démonstration *Le premier point est immédiat, le deuxième découle de la proposition 0.83, le troisième découle de la connexité de $\overline{C(x)}$, le quatrième point découle du fait que la réunion de deux connexes non disjoints est un connexe (deuxième point de la proposition 0.83).*

DÉFINITION 0.51 **Arc ou chemin, ligne brisée**

Un **arc ou chemin** est une application continue de $[0,1]$ dans X. L'image de 0 et l'image de 1 sont les extrémités de l'arc.
On appelle **longueur d'un arc** C^1 l'intégrale de la norme de sa dérivée, lorsque cette intégrale est bien définie.

Application 0.55 On verra une application des lignes brisées amusante avec le corollaire **??** des accroissements finis.

Exemple 0.56 Exemples

• Dans un espace normé, l'application qui à t associe $(1-t).x + t.y$ est un arc d'extrémités x et y (on dit aussi un arc entre x et y). L'image de cet arc est appelée **segment**, noté $[x, y]$. La longueur de cet arc est $d(x, y) = y - x$.

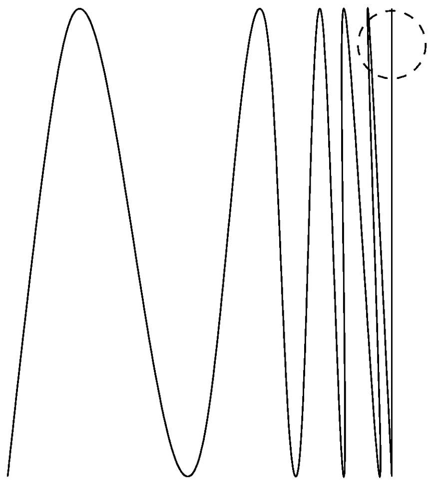


FIGURE 5 – Cette figure fournit un exemple de connexe
Commentaire : qui n'est (i) pas localement connexe (ii) pas connexe par arcs. Il s'agit de la courbe des $(x, \sin(1/x))$ pour $x \leq 0$, plus la frontière $\{0\} \times [-1, 1]$. On voit que la figure n'est pas localement connexe en considérant ce qu'il se passe au voisinage du point $(0, 1)$.

•Une **ligne brisée entre** a **et** b est une suite finie de segments $[x_i, x_{i+1}]$ avec $i \in [0, n-1]$, $x_0 = a$ et $x_n = b$.

•On appelle **longueur d'une ligne brisée** la somme des longueurs de ses segments.

•D'un arc entre x et y et un arc entre y et z on peut déduire un arc entre x et z.

DÉFINITION 0.52 **Connexe par arcs**

Un espace topologique est dit **connexe par arcs** si il existe un arc entre toute paire de points.

Une partie d'un espace topologique est dite connexe par arcs si elle est connexe par arcs pour la topologie induite.

Exemple 0.57 Un convexe est connexe par arcs.

Démonstration *Cela découle des exemples ci-dessus.*

PROPOSITION 0.92

Un connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse.

Démonstration *On fixe x dans un espace connexe par arcs. Chaque arc est un connexe, car image d'un connexe ($[0, 1]$) par une fonction continue ; la réunion des arcs partant de x est connexe (par la proposition 0.83), or par définition cette réunion est l'espace tout entier. Pour la réciproque, considérer la figure 5.*

Exemple 0.58

Soit l'application $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, qui à x associe $1/\sin(x)$. Montrer que la fermeture de son graphe est connexe mais pas connexe par arcs.

Démonstration *On suppose qu'il existe une fonction ϕ continue (de $[0,1]$ dans la fermeture du graphe de f) qui à 0 associe $(0,1)$ et à 1 associe $(-1, \sin(-1))$. On considère x_0 le sup de l'ensemble des x tels que la première composante de $\phi(x)$ soit nulle. Il suffit ensuite de considérer la limite de la deuxième composante pour x tendant vers x_0.*

Exemple 0.59

Soit C_i une famille de parties connexes par arcs. Si pour toute paire i, j il existe une suite finie $C_{a_0}, ..., C_{a_k}$ avec $C_{a_h} \cap C_{a_{h+1}} \neq \emptyset$ et $a_0 = i$ et $a_k = j$, alors la réunion est connexe par arcs.

Définition 0.53 **Composante connexe par arcs**

La **composante connexe par arcs** de x est la réunion de tous les connexes par arcs passant par x ; on la note $C_a(x)$.

Proposition 0.93

•La composante connexe par arcs d'un point est connexe par arcs.

•Deux composantes connexes par arcs sont soit disjointes soit confondues. Ainsi, la famille des composantes connexes par arcs d'un espace forme une partition de cet espace.

•$C_a(x) \subset C(x)$, car $C_a(x)$ est un connexe contenant x, et $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x par définition.

Définition 0.54 **Localement connexe (par arcs)**

Un espace est **localement connexe (resp. par arcs)** si tout point de l'espace possède une base de voisinage connexes (resp. par arcs).

⚠ *Attention 0.60* Attention ; un espace peut être connexe sans être localement connexe. Voir par exemple la figure 5.

Notamment, alors qu'un espace dont tout point possède un voisinage compact (par exemple un espace compact !) est localement compact, un espace dont tout point possède un voisinage connexe n'est pas nécessairement localement connexe.

On donne sans démonstration le théorème (peu difficile) suivant.

Théorème 0.94

Dans un espace localement connexe (resp. localement connexe par arcs), les composantes connexes (resp. par arcs) des ouverts sont ouvertes.

Corollaire 0.95

Dans un espace localement connexe (resp. localement connexe par arcs) tout point possède une base de voisinages ouverts et connexes (resp. connexes par arcs).

Démonstration *Il suffit de considérer, étant donnés x et un voisinage V de x, un ouvert inclus dans V et contenant x, et la composante connexe (resp. par arcs) de x dans cet ouvert.*

On peut noter le théorème suivant :

Théorème 0.96

Dans un espace localement connexe par arcs, les ouverts connexes sont connexes par arcs. Notamment, les ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$, ou de tout espace vectoriel normé [11] sont connexes par arcs.

1.5 Complétude

On présente ci-dessous respectivement les suites de Cauchy (fondamentales en matière de complétude) et la notion de complété d'un espace métrique.

1.5.1 Suites de Cauchy. Espace complet

Définition 0.55 **Suite de Cauchy**

Une suite (x_n) dans un espace métrique est dite **suite de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > N$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

⚠ *Attention 0.61* La notion de suite de Cauchy est une notion métrique et non une notion topologique. Même si deux distances sont équivalentes, on ne peut être sûr que les suites de Cauchy soient les mêmes pour les deux métriques. Par exemple avec $d(x,y) = |arctan(x) - arctan(y)|$, la topologie sur $\mathbb{R}$ est la même que pour la topologie usuelle, mais la suite $u_n = n$ n'est pas de Cauchy pour la métrique usuelle, alors qu'elle est de Cauchy pour cette métrique.

Proposition 0.97

•Étant donnée une suite x_n, notons $X_n = \{x_k; k \geq n\}$; alors la suite x_n est de Cauchy si et seulement si le diamètre de X_n tend vers 0.

•Dans un espace métrique toute suite convergente est de Cauchy.

•L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.

Définition 0.56 **Espace complet**

Un espace métrique X est **complet**, si toute suite de Cauchy de X a une limite dans X.

Quelques exemples d'espaces complets :

•voir les exemples d'espaces de Banach donnés un peu plus loin.

$\bullet C^k(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, voir partie **??**.

Une propriété fondamentale des espaces complets est le théorème du point fixe **??**.

DÉFINITION 0.57 **Espace de Banach**

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

Un **isomorphisme entre l'espace de Banach** E **et l'espace de Banach** F est un isomorphisme des espaces vectoriels normés sous-jacents.

Quelques exemples d'espaces de Banach :
$\bullet\mathbb{R}$
$\bullet\mathbb{R}^n$ muni d'une des normes suivantes :
– $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
– $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
– Plus généralement, $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ si $p \geq 1$
– $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_\infty = max_{i=1}^n |x_i|$
$\bullet$L'ensemble des applications continues bornées d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $f \mapsto sup_{x\in X}|f(x)|$
$\bullet$Les espaces L^p, comme on le verra en section **??**.
$\bullet$Si F est un Banach et E un espace vectoriel normé , alors $\mathcal{L}(E, F)$ (ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F) est un Banach (pour la norme $f \mapsto sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$).

Un résultat important, le théorème de Banach-Mazur, fournit une caractérisation des espaces de Banach *séparés* (section 1.1.5).

On rappelle que deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie (ce n'est pas la définition, mais la définition est équivalente à cela, voir le théorème 0.5).

Tout d'abord quelques propriétés des espaces de Banach issues directement de la partie 1 :
$\bullet$Un isomorphisme algébrique (i.e. un isomorphisme au sens des espaces vectoriels) continu entre espaces de Banach est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés .
$\bullet$Toutes les normes sont équivalentes sur des $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.
$\bullet$Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet, et donc est un Banach.
$\bullet$Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés.

PROPOSITION 0.98

Étant donné un nombre fini d'espaces métriques E_0, ..., E_n, le produit $E_0 \times ... \times E_n$ peut être équipé d'une métrique définie par $d((x_i), (y_i))$ de l'une des formes suivantes (entre autres) :
$\bullet\sum_i d(x_i, y_i)$
$\bullet\sqrt{\sum_i d(x_i, y_i)^2}$
$\bullet\sqrt[p]{\sum_i d(x_i, y_i)^p}$ $(p \geq 1)$
$\bullet max_i d(x_i, y_i)$

Ce sont bien des distances et elles sont équivalentes entre elles (leur équivalence vient de celles des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$). La topologie ainsi définie est la topologie produit, que l'on a définie plus tôt.

Proposition 0.99

Un espace métrique est complet si et seulement si l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides de diamètre tendant vers 0 est non vide (et donc réduite à un point).

Application 0.62 Une application de cette proposition est le théorème de Baire 0.113.

Démonstration *Si l'espace métrique est complet, alors on considère x_n appartenant au n-ième fermé ; la suite est de Cauchy, et converge donc vers un point ; quel que soit n, ce point est limite d'une suite de points de X_n ; donc il appartient à X_n puisque X_n est fermé. L'intersection des X_n est donc bien non vide. En outre, le diamètre tendant vers 0, le diamètre de l'intersection est 0 ; donc il s'agit d'un seul point.*

Réciproquement, étant donnée une suite de Cauchy x_n, on considère la suite des X_n avec $X_n = \overline{\{x_k/k \geq n\}}$; cette suite vérifie les hypothèses, donc l'intersection des X_n est réduite à un point. On montre ensuite aisément que ce point est limite des x_n.

Proposition 0.100

Un produit fini d'espaces métriques, muni d'une métrique comme définie ci-dessus, est complet si et seulement si chacun des facteurs l'est.

Démonstration *La démonstration (pas très difficile) est laissée au lecteur.*

Proposition 0.101

Si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence, elle est convergente.

Cette proposition sera appliquée aux théorèmes 0.103 et 0.105.

Démonstration *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. L'astuce est de considérer une suite extraite qui converge. On note x sa limite. Le critère de Cauchy montre immédiatement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers cette même limite.*

Corollaire 0.102

Un espace métrique compact est complet.

Démonstration *Si l'espace est compact, toute suite a une valeur d'adhérence (par le théorème de Bolzano-Weierstrass 0.78) ; il suffit alors d'appliquer la proposition précédente.*

Théorème 0.103

Le corps $\mathbb{R}$ est complet pour sa métrique ; de même $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme est complet pour cette norme. Plus généralement un espace normé de dimension finie est complet.

Démonstration *On considère une norme sur E, espace normé de dimension finie, et une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On montre que pour un certain $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, x_n est dans la boule de centre x_N et de rayon 1 : ceci découle directement de la définition d'une suite de Cauchy. On a donc une suite $(x_n)_{n\geq N}$ dans un compact. Cette suite a donc une valeur d'adhérence. Donc par la proposition 0.101 la suite de Cauchy converge vers un élément de ce compact (cette boule).*

Application 0.63 trouvera par exemple une utilisation de ce théorème dans le théorème 0.109, qui stipule que tout espace métrique est isomorphe à un sous-espace métrique dense d'un espace métrique complet (qui est en fait son complété).

PROPOSITION 0.104

Un sous-ensemble d'un métrique complet est complet si et seulement si il est fermé.

Application 0.64 On trouvera une application avec le corollaire 0.139 (topologie d'un certain ensemble de compacts) ou la définition de l'intégrale de Riemann (**??**).

Démonstration *Soit A un sous-ensemble fermé de X complet. Si x_n est une suite de Cauchy dans A, c'est aussi une suite de Cauchy dans X, donc elle converge. Si A est fermé la limite est dans A. Réciproquement, on suppose x dans $\overline{A}$, et on choisit une suite x_n d'éléments de A qui tend vers x ; et on remarque que x_n est de Cauchy et donc converge vers une limite dans A puisque A est complet.*

DÉFINITION 0.58 **Série absolument convergente**

Soit E un espace vectoriel normé. (x_n) dans E est appelée une **série absolument convergente** si $\sum_{n\geq 0} \| x_n \| < +\infty$.

THÉORÈME 0.105

Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente (x_n) est convergente dans E.

Démonstration *Supposons E complet.*

Soit une série x_n absolument convergente. Pour $m > n$ on a

$$d(\sum_{i=0}^{n} x_i, \sum_{i=0}^{m} x_i) = \| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \|$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{m} \| x_i \| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \| x_i \| \to 0$$

Donc la suite $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ est de Cauchy, et donc converge par définition de la complétude.

Réciproquement supposons maintenant que toute série absolument convergente converge. On se donne x_n une suite de Cauchy. Par définition du critère de Cauchy, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\| x_m - x_{n_k} \| \leq \frac{1}{2^k}$ pour $m \geq n_k$. La série $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est ainsi absolument convergente ; donc elle converge. La suite x_n a ainsi une valeur d'adhérence, et donc elle converge par application de la proposition 0.101.

Théorème 0.106

Si E est normé et si F est de Banach, alors l'espace normé $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi de Banach.

Démonstration *Soit f_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $x \in E$, on a*

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq \| f_n - f_m \| . \| x \|,$$

donc la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans F ; elle converge vers un élément que l'on note $f(x)$. Il est clair que f est linéaire. On fixe alors $\epsilon > 0$. On choisit N tel que $\| f_n - f_m \| \leq \epsilon$, pour $n, m > N$, et on considère x de norme ≤ 1. En faisant tendre m vers l'infini on obtient que

$$\forall n > N, \forall x \text{ tel que } \| x \| \leq 1, \| f_n(x) - f(x) \| \leq \epsilon$$

donc f est bornée sur la boule unité, et donc f est continue. On obtient avec la même formule 100 la convergence de f_n vers f au sens de la norme. En résumé, la preuve s'obtient en montrant (i) la convergence simple, puis (ii) que la limite est linéaire, puis (iii) qu'elle est continue et enfin (iv) qu'il y a convergence de f_n vers f dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Corollaire 0.107

Le dual E' d'un espace normé E est un espace de Banach.

Démonstration *Par application immédiate du théorème précédent.*

Application 0.65 Voir le corollaire **??**.

Théorème 0.108

Si K est un espace compact et Y un espace complet, alors l'espace $C^0(K,Y)$ est métrique complet pour la distance $d(f,g) = sup_x d(f(x), g(x))$.

Démonstration *La compacité de K permet de vérifier que la fonction d est bien définie ; elle est clairement effectivement une métrique. Étant donnée f_n une suite de Cauchy dans l'espace considéré, on montre que cette suite converge simplement vers une certaine fonction f ; en utilisant la continuité de f_n et la convergence uniforme on conclut à la continuité de f. La convergence uniforme des f_n découle ensuite du critère de Cauchy dans l'espace considéré.*

Application 0.66 Voir par exemple le théorème **??**. On peut citer aussi le fait que l'espace des applications continues d'un espace K compact dans un espace E de Banach est de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = sup_x \|f(x)\|_E$.

Exemple 0.67

Si $E_1, ...E_n$ sont des espaces vectoriels normés et si F est de Banach, montrer que l'espace normé $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ est aussi de Banach.

Démonstration *La preuve est similaire à celle du théorème 0.106, en normant $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ par $\|\varphi\| = \sup\{\varphi(x_1, ..., x_n) \mid \|x_1\| \leq 1,\ \|x_2\| \leq 1,\ ...\|x_n\| \leq 1\}$.*

On pourra alors remplacer l'inégalité $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\|.\|x\|$ par $\|\varphi_p(x_1, x_2, ..., x_n) - \varphi_q(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq \|\varphi_p - \varphi_q\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot ... \cdot \|x_1\|$ et on conclut par la même méthode.

1.5.2 Complété d'un espace métrique

Théorème 0.109

Tout espace métrique (X, d) se plonge isométriquement dans un espace complet $(\tilde{X}, \tilde{d})$ avec X dense dans $\tilde{X}$.

Si on se donne deux tels plongements, alors l'identité sur X s'étend de manière unique en une isométrie de $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$.

Définition 0.59 **complété**

Un tel espace métrique complet est appelé **complété** de X.

Démonstration

Existence :

• *on commence par introduire une relation d'équivalence entre les suites de Cauchy : on dit de deux suites qu'elles sont équivalentes si la distance entre l'une et l'autre tend vers* 0 *(i.e.* (x_n) *est équivalente à* (y_n) *si* $\lim d(x_n - y_n) = 0$*).*

•*On considère* $\tilde{X}$ *l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.*

•*On remarque que la distance entre* x_n *et* y_n*, suites de Cauchy de* X*, donc éléments de* $\tilde{X}$*, tend vers une limite donnée pour* n *tendant vers* $+\infty$ *(noter que pour ce point on utilise la complétude de* $\mathbb{R}$ *montrée un peu plus tôt).*

•*On peut donc prendre pour distance sur* $\tilde{X}$ *la limite de la distance entre deux suites pour* n *tendant vers l'infini ; on vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une distance.*

•*On peut prendre pour plongement la fonction qui à* x *associe la suite constante égale à* x*.*

•*On constate alors que ce plongement est une isométrie.*

•*On peut voir alors que l'image du plongement est dense dans* $\tilde{X}$ *en considérant pour une suite donnée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites de Cauchy constantes égales à* x_n*, i.e.* $(x'_n)_m = x_n$*.*

•*On peut maintenant identifier* X *et son image.*

•*On considère maintenant une suite de Cauchy dans* $\tilde{X}$*, notée* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On va montrer que cette suite converge, pour conclure à la complétude de* $\tilde{X}$*.*

•*Pour tout* n y_n *est une suite de Cauchy dans* X *et par densité (montrée ci-dessus) on peut choisir* x_n *dans* X *tel que la distance (dans* $\tilde{X}$*) entre la suite constante égale à* x_n *et* y_n *soit inférieure à* $1/n$*.*

•*La suite* x_n *est de Cauchy dans* $\tilde{X}$*, et donc aussi dans* X*. Par définition de* $\tilde{X}$*, la limite* l *de la suite* x_n *est la classe des suites dont la distance à* x_n *est nulle.*

•*Il ne reste plus qu'à constater que* y_n *tend vers cette même limite* l*.*

L'unicité résulte du corollaire 0.111.

Théorème 0.110

Soient deux espaces métriques A et B avec B complet. Si D est une partie dense de A et $f : D \to B$ est uniformément continue, alors il existe un et un seul prolongement continu $\tilde{f} : A \to B$. Cette fonction $\tilde{f}$ est de plus uniformément continue.

Démonstration

•*L'unicité est immédiate, par unicité de la limite et par la densité de* D *dans* A*.*

•*Pour l'existence, considérons $\tilde{f}$ définie pour a dans A*

$$\tilde{f}(a) = \lim_{d \to a, d \in D} f(d)$$

$\tilde{f}$ prolonge bien f et est bien définie car si $d_n \to a$ avec $d_n \in D$, alors d_n est de Cauchy, et donc $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy par uniforme continuité de f, et donc $f(d_n)$ converge par complétude de B. On peut en outre montrer que la limite de cette suite $f(d_n)$ est indépendante de la suite d_n convergeant vers a (grâce à l'uniforme continuité de f).

•*Il reste à montrer l'uniforme continuité : soient x et y distincts dans A. Soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$, avec x_n et y_n dans D. $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq 2d(f(x_n), f(y_n))$ si n est assez grand. L'uniforme continuité de $\tilde{f}$ en découle immédiatement.*

Application 0.68 Ce résultat servira à montrer quelques propriétés simples des espaces de Hölder, voir **??**, et le théorème de Plancherel. L'escalier de Cantor utilise aussi ceci (voir partie 1.6.13). Cela permet aussi de voir que si E est métrique complet connexe localement connexe, alors E est connexe par arcs.

COROLLAIRE 0.111

Une isométrie $i : D \to B$ d'un sous-ensemble dense de l'espace métrique A sur une partie de l'espace métrique complet B s'étend de manière unique en une isométrie $\tilde{i} : A \to B$ de A sur une partie de B. L'extension $\tilde{i}$ est une bijection de A sur B si et seulement si $i(D)$ est dense dans B.

Démonstration *Preuve similaire à celle du théorème 0.110.*

1.6 Zoologie de la topologie

1.6.1 Séparation de fermés par des ouverts dans un métrique

PROPOSITION 0.112

Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace métrique (E, d). Alors il existe deux ouverts U_1 et U_2 tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$, U_1 et U_2 étant disjoints.

En outre il existe une fonction continue de E dans $[0, 1]$ dont la restriction à F_1 est égale à 0 et dont la restriction à F_2 est 1 (c'est-à-dire que $\chi_{F_2} \leq f \leq \chi_{F_1^c}$).

On peut même définir f telle que $f^{-1}(\{0\}) = F_1$ et $f^{-1}(\{1\}) = F_2$.

Démonstration *Considérer la fonction f définie par*

$$f(x) = \frac{\sup(d(x, F_1) - d(x, F_2), 0)}{d(x, F_1)}$$

si $x \notin F_1$ et $f(x) = 0$ sinon, puis $U_1 = f^{-1}([0, 0.5[)$ et $U_2 = f^{-1}(]0.5, 1])$.

1.6.2 Théorème de Baire

On se penche ici sur le théorème de Baire, aux très nombreuses applications.

Théorème 0.113 **Théorème de Baire**

Soit X un espace topologique. Si X est localement compact, ou s'il est métrique complet, alors

•toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense

•une réunion dénombrable de fermés recouvrant X comporte un fermé d'intérieur non vide

Notons que les espaces de Fréchet sont une autre catégorie d'espaces vérifiant le théorème de Baire. On appelle **espaces de Baire** les espaces topologiques dans lequels l'une des deux propriétés équivalentes énoncées est vraie.

Démonstration *Il suffit de montrer la première assertion, la seconde étant équivalente par passage au complémentaire.*
On se donne U_i une famille dénombrable d'ouverts avec $\overline{U_i} = X$. Soit V un ouvert non vide. On veut montrer que l'intersection des U_i a une intersection non vide avec V. On pose $V_0 = U_0 \cap V$ (ouvert non vide par densité de U_0). Ensuite, par récurrence, pour tout entier $n > 0$ on construit V_n ouvert non vide tel que :

- $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap U_n$ *pour* $n \geq 1$
- *Cas métrique complet : on impose* $diam(V_n) \leq \frac{1}{2n}$
- *Cas localement compact :* $\overline{V_n}$ *compact*

Il convient de bien vérifier la possibilité de cette construction. L'intersection des $\overline{V_n}$ est non vide, car :

- *Dans le cas localement compact, il s'agit d'une suite décroissante de compacts non vides (voir la proposition 0.55).*
- *Dans le cas métrique complet, il s'agit d'une suite décroissante de parties non vides de diamètres tendant vers 0 (voir la proposition 0.99).*

Il suffit alors de choisir un élément dans l'intersection des V_i.

Application 0.69 Les lignes qui suivent fournissent de nombreuses applications du théorème de Baire. Il y a aussi par exemple la section 1.6.17 pour prouver la polynomialité de fonctions à partir de propriétés locales des dérivées.

Exemple 0.70
espace de Banach de dimension infinie n'a pas de base algébrique dénombrable.
Démonstration
Supposons que E, espace de Banach de dimension infinie, ait une base dénombrable (e_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
Définissons alors F_n, espace vectoriel engendré par les e_i pour $i \leq n$.
F_n est alors un fermé (car de dimension finie, résultat 0.69) et d'intérieur vide (ce point est laissé en exercice au lecteur). Or l'union des F_n est égale à E ; donc E devrait être d'intérieur vide grâce au théorème de Baire, ce qui est absurde (E est ouvert et donc d'intérieur égal à E).

Corollaire 0.114

$\mathbb{R}[X]$ n'est de Banach pour aucune norme.

Théorème 0.115 **Théorème de Banach-Steinhaus**

Soit $T_\alpha : E \to F$ une famille d'applications linéaires continues de l'espace de Banach E dans l'espace normé F. Si
$$\forall x, \sup_\alpha \| T_\alpha x \| < \infty$$
alors $sup_\alpha \| T_\alpha \| < \infty$.

Application 0.71 On verra une application à la transformation de Toeplitz (proposition **??**), qui fournit une preuve élégante de la moyenne de Césaro (corollaire **??**).
Démonstration *On pose B_n l'ensemble des x tels que $\forall \alpha$ on a $\| T_\alpha(x) \| \leq n$.*
B_n est fermé comme intersection de fermés. L'hypothèse (0.115) permet de dire que l'union des B_n est E. Par le théorème de Baire 0.113, l'un des B_n est d'intérieur non vide. Ce B_n contient donc une boule B de diamètre $r > 0$ telle que $\sup_\alpha \sup_{x \in B} ||T_\alpha x|| \leq n$ et donc $||T_\alpha|| \leq n/r$. On en déduit alors le résultat.

On notera le corollaire suivant :

Corollaire 0.116
Soit $T_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues de l'espace de Banach E dans l'espace normé F. Si $T(x) = lim_{n \to +\infty} T_n(x)$ existe pour tout x, alors T est une application linéaire continue.

Définition 0.60 **Application ouverte**
Une application est dite **ouverte** si l'image de tout ouvert est un ouvert.

Théorème 0.117 **Théorème de l'application ouverte**

Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.

Ce théorème est parfois aussi appelé théorème de Banach-Schauder. Comme diverses conséquences du théorème de Baire et le théorème de Baire lui-même, il se généralise aux espaces de Fréchet (c'est-à-dire aux espaces localement convexes métrisables et complets).

Démonstration *Donnons nous une telle application f, entre deux espaces de Banach E et F. f est donc supposée linéaire, continue, et surjective. On montre qu'elle est ouverte.*

•Soit U un ouvert de E. Il s'agit de montrer que $f(U)$ est ouvert dans F.

•Soit x dans $f(U)$. Il suffit de montrer que $f(U)$ est un voisinage de x.

•Par translation, on peut supposer $x = 0$.

•Il suffit donc de montrer qu'une certaine boule $B_F(0, r)$ dans F centrée en 0 de rayon un certain $r > 0$ est incluse dans l'image par f d'une boule arbitraire $B_E(0, r')$ dans E, centrée en 0, de rayon r', avec r' tel que $B_E(0, r') \subset U$. Par linéarité de f, on peut se limiter à $r' = 1$. Il convient donc de montrer qu'il existe r tel que $B_F(0, r) \subset f(B_E(0, 1))$.

•Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{f(B_E(0, n))}$.

•D'après le théorème de Baire (ci-dessus), l'union des F_n étant égale à E et chaque F_n étant fermé, il existe un F_n d'intérieur non vide. Du coup, F_1, par linéarité, est lui-même d'intérieur non vide.

•Il existe donc une boule $B_F(y, \epsilon)$ centrée en y de rayon $\epsilon > 0$ incluse dans F_1.

•Par symétrie $-y \in F_1$. Finalement, $B_F(y, \epsilon) - y \subset F_1 + F_1$, donc $B_F(0, \epsilon) \subset F_2$ (on a $F_1 + F_1 = F_2$ comme on s'en convaincra aisément).

•$B_F(0, \frac{\epsilon}{2}) \subset F_1$, d'où le résultat.

Corollaire 0.118
Théorème d'isomorphisme de Banach

Une application continue linéaire bijective entre espaces de Banach a un inverse continu (et donc est un isomorphisme).

Démonstration *Conséquence immédiate du théorème de l'application ouverte.*

Application 0.72 Voir par exemple le théorème **??**, utilisant aussi le théorème de Riesz et le théorème d'Arzéla-Ascoli.

Corollaire 0.119

Si un même espace vectoriel E est de Banach lorsqu'il est muni d'une norme N_1 ou d'une norme N_2, alors les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Démonstration
•Notons N la norme $N = N_1 + N_2$. Les suites de Cauchy pour N sont de Cauchy pour N_1 et N_2, donc convergentes dans E pour les deux normes, donc convergentes pour la norme N.

(E, N) est donc un espace de Banach.

•L'identité de (E, N) dans (E, N_1) est continue, bijective, linéaire ; donc c'est un isomorphisme. On en déduit l'existence de $c > 0$ tel que $cN \leq N_1 \leq N$.

Les normes N_1 et N sont donc équivalentes.

•On peut montrer de manière analogue que les normes N_2 et N sont équivalentes, d'où l'équivalence des normes N_1 et N_2.

Corollaire 0.120 **Théorème du graphe fermé**

Soit $T : E \to F$, linéaire entre les Banach E et F. L'application T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$.

Démonstration *Un sens ne pose pas de problème ; le graphe d'une application continue est toujours fermé.*

Réciproquement, supposons le graphe fermé, voir figure 6.

•L'espace $E \times F$ est en fait un espace de Banach.

•Le graphe est en fait un Banach (la linéarité de T permet de conclure que le graphe est en fait un espace vectoriel, qui est fermé par hypothèse).

•La projection du graphe sur E (qui à $(e, T(e))$ associe e) est une application linéaire bijective du graphe sur E ; par le corollaire 0.118, son inverse est aussi continue.

•La projection du graphe sur F (i.e. l'application qui à $(e, T(e))$ associe $T(e)$) est aussi continue.

•Combinons les deux points précédents : la fonction considérée T, composition de deux fonctions continues, est donc continue.

1.6.3 Distance d'un point à une partie

Proposition 0.121

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). L'application $\tilde{d}$ qui à x dans E associe $d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$ est continue et 1-lipschitzienne.

Application 0.73 Cette proposition servira un peu partout, par exemple pour le lemme **??** (très utile pour approximer des fonctions par des fonctions C^∞), ou pour le lemme 0.123, ou pour voir que les ϵ-voisinages sont ouverts.

Démonstration *Soit x dans E, montrons que $\tilde{d}$ est continue en x. Considérons t dans E, et donnons nous $\epsilon > 0$ (figure 7).*

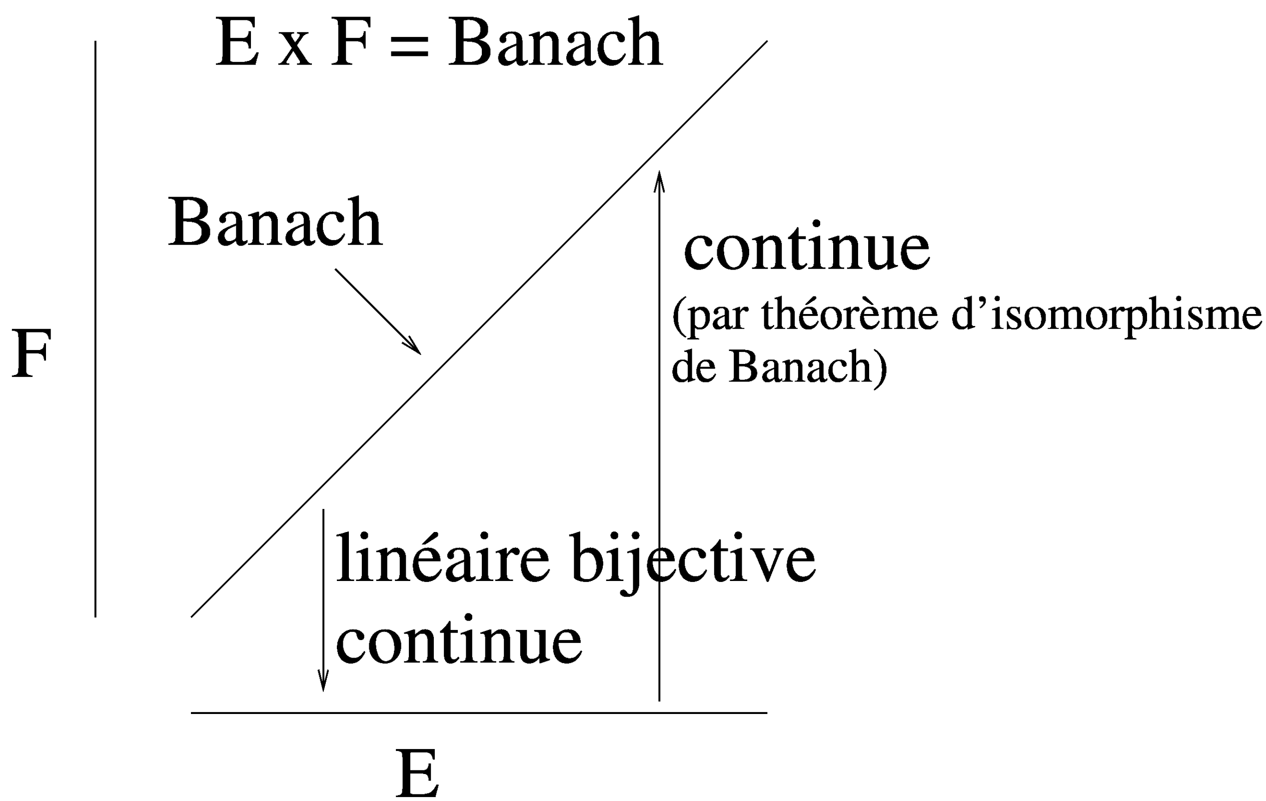


Figure 6 – Schéma explicatif de la preuve du théorème du graphe fermé.

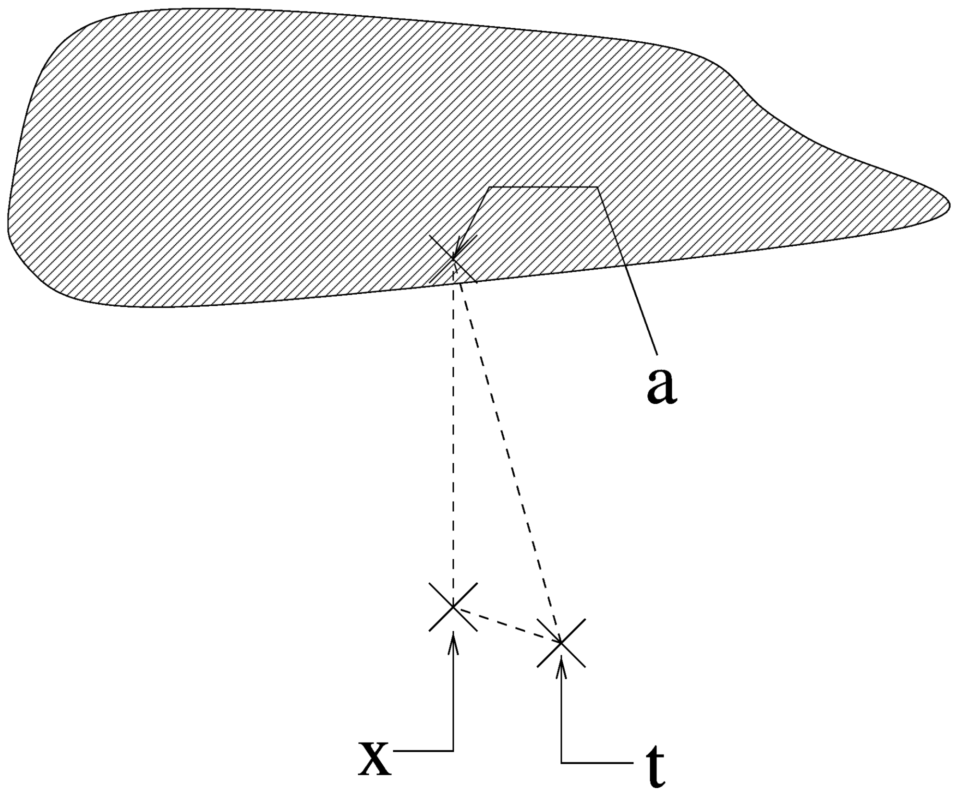


FIGURE 7 – Continuité de la distance à une partie : une simple application de l'inégalité triangulaire.

Par définition de $\tilde{d}$ et de l'inf, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) \leq d(x,A) + \epsilon$. Alors $d(t,A) \leq d(t,x) + d(x,a) \leq d(t,x) + d(x,A) + \epsilon$, donc $\tilde{d}(t) \leq \tilde{d}(x) + d(t,x) + \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient $\tilde{d}(t) \leq \tilde{d}(x) + d(x,t)$. De même on obtient $\tilde{d}(x) \leq \tilde{d}(t) + d(x,t)$. Donc

$$|\tilde{d}(x) - \tilde{d}(t)| \leq d(x,t)$$

On en déduit le caractère 1-lipschitzien et la continuité de $\tilde{d}$.

COROLLAIRE 0.122

La distance entre un compact et un fermé disjoints est > 0.

Application 0.74 On verra une application géométrique avec le théorème **??**.

Intuition Par distance entre un compact et un fermé on entend l'inf de la distance entre un point du compact et un point du fermé.

Démonstration *La distance à un ensemble étant continue, la distance d'un point du compact au fermé atteint son minimum sur le compact (voir 0.63). Si la distance est nulle, alors elle est nulle en un certain point x du compact. On prend alors une suite x_n du fermé tendant vers x (par exemple $d(x_n, x) < 1/n$) ; sa limite est nécessairement dans le fermé, donc x est à l'intersection du fermé et du compact, donc ces deux ensembles ne sont pas disjoints. D'où la contradiction, et le résultat.*

⚠ *Attention 0.75* La distance entre deux fermés disjoints n'est pas nécessairement non nulle ! Considérer dans $\mathbb{R}$ les fermés F_1 et F_2 définis par

$$F_1 = \mathbb{N}$$

$$F_2 = \{\frac{n+1}{n} / n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2\}$$

Un autre contre-exemple classique est une courbe et son asymptote. Par exemple, on peut considérer $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $F_2 = (Ox) \cup (Oy) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

1.6.4 Approximation d'ouverts par des compacts

Lemme 0.123

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \geq 1$, notons K_m l'intersection de

$$K'_m = \{x \in U; d(x, U^c) \geq \frac{1}{m}\} \text{ et de } \overline{B}(0,m)$$

Alors :
- Pour tout $m > 0$, K_m est compact
- $K_m \subset Int(K_{m+1})$
- $U = \cup_i K_i$
- $\forall K$ compact de U, $\exists m$ tel que $K \subset K_m$

Application 0.76 Ce résultat servira par exemple pour le corollaire **??** (sur la non-normabilité de $H(\Omega)$), ou pour l'utilisation de la définition **??** (distance sur $C^k(\Omega)$), ou pour la proposition **??** (métrisabilité de la convergence uniforme).

Démonstration *•Prouvons que pour tout $m > 0$, K_m est compact. K_m est borné (clairement), K_m est une intersection de deux fermés (K'_m est fermé en tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue qui est $x \mapsto d(x, U^c)$, car étant donnée une partie non vide l'application qui à un point associe sa distance à cette partie est continue, voir la proposition 0.121). Un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact (corollaire 0.67).*

•Preuve de $K_m \subset Int(K_{m+1})$: il suffit de se rappeler que l'intérieur d'une intersection finie est l'intersection des intérieurs.

•La distance d'un point x de U au complémentaire de U est > 0 car le complémentaire de U est fermée (un point à distance nulle d'un fermé est dans ce fermé).

•Soit K un compact inclus dans U. L'inf de la distance d'un point de K au complémentaire de U est > 0 grâce au corollaire précédent 0.122. Donc cette distance est supérieure à $1/m$ pour m assez grand. Il suffit ensuite de prendre m assez grand pour que K soit en outre inclus dans la boule fermé $\overline{B}(0,m)$.

Lemme 0.124 **Approximation d'ouverts du plan par des compacts**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ (on pourrait dire $\mathbb{R}^2$). Alors il existe une suite de compacts K_n inclus dans Ω tels que :
- $K_n \subset Int(K_{n+1})$

•Tout compact de Ω est inclus dans un certain K_n
•Toute composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K_n$ contient une composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$

Intuition La dernière condition signifie simplement qu'il n'y a pas de « trous » superflus dans les K_n. La seconde condition implique que la réunion des K_n est Ω.

Démonstration *On utilise les mêmes K_n que dans la partie précédente (avec $\Omega = U$).*

Il suffit pour conclure de vérifier que la dernière condition est vérifiée.

On se donne donc C une composante connexe de $\hat{C} \setminus K_n$ [12], et x appartenant à cette composante connexe.

Alors nécessairement $|x| > n$ ou $|x - f| < 1/n$ pour un certain f dans F, avec F le complémentaire de Ω.

Dans le cas $|x| > n$, alors les $\lambda.x$, pour λ réels ≥ 1, forment une demi-droite, qui unie à $\{\infty\}$, forme un connexe, inclus dans C, et intersectant une composante connexe de $\hat{C} \setminus \Omega$ (puisque $\infty \notin \Omega$!).

Dans le cas $|x - f| < 1/n$, le segment $[x, f]$ est inclus dans C, donc C contient f, et donc intersecte $\hat{C} \setminus \Omega$, au moins en f.

D'où le résultat.

1.6.5 Homéomorphisme entre une boule fermée et un compact convexe d'intérieur non vide

PROPOSITION 0.125

Soit K un compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Alors K est homéomorphe à la boule unité fermée.

Démonstration

•On peut supposer que 0 appartient à l'intérieur de K.

•On peut agrandir K jusqu'à ce qu'il contienne la boule unité fermée.

•On définit la fonction f de la boule unité fermée dans K qui à x associe $T.x$ avec T le sup des $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $t.u$ appartient à K, avec u le vecteur directeur de x ($u = x/\|x\|$). On définit $f(0) = 0$.

•Montrons tout d'abord que f est bien définie. Si x est non nul, K étant borné, le sup des t en question est bien défini si x est non nul (le cas $f(0)$ étant séparé).

•$t.u$ appartient à K pour tout $t < T$, par convexité de K. Le fait que K est fermé fait que $T.u$ appartient à K. Si x est de norme 1, le problème est donc résolu. Si x est de norme plus petite que 1, a fortiori, $T.x$ appartient à K par convexité de K.

•Il faut maintenant montrer que f est continue.

•f est continue en 0, car $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 puisque $||f(x)|| \leq (\sup_{k \in K} ||k||)||x||$.

•Il convient maintenant de montrer que f est continue en x autre que 0. Pour cela il suffira de montrer que la fonction qui à u associe T le sup des $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $t.u$ appartient à K est continue sur la sphère (ensuite il est clair que la multiplication par un scalaire est continue, que la fonction qui à un vecteur associe son vecteur directeur est continue (par quotient $x/\|x\|$).

•La figure 8 parle d'elle même.

Application 0.77 Cela permet d'appliquer des « triangulations » (précisément, l'image d'une triangulation d'un simplexe via un homéomorphisme) sur la boule unité fermée, voir théorème 0.159.

12. $\hat{C}$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ (i.e. $\hat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

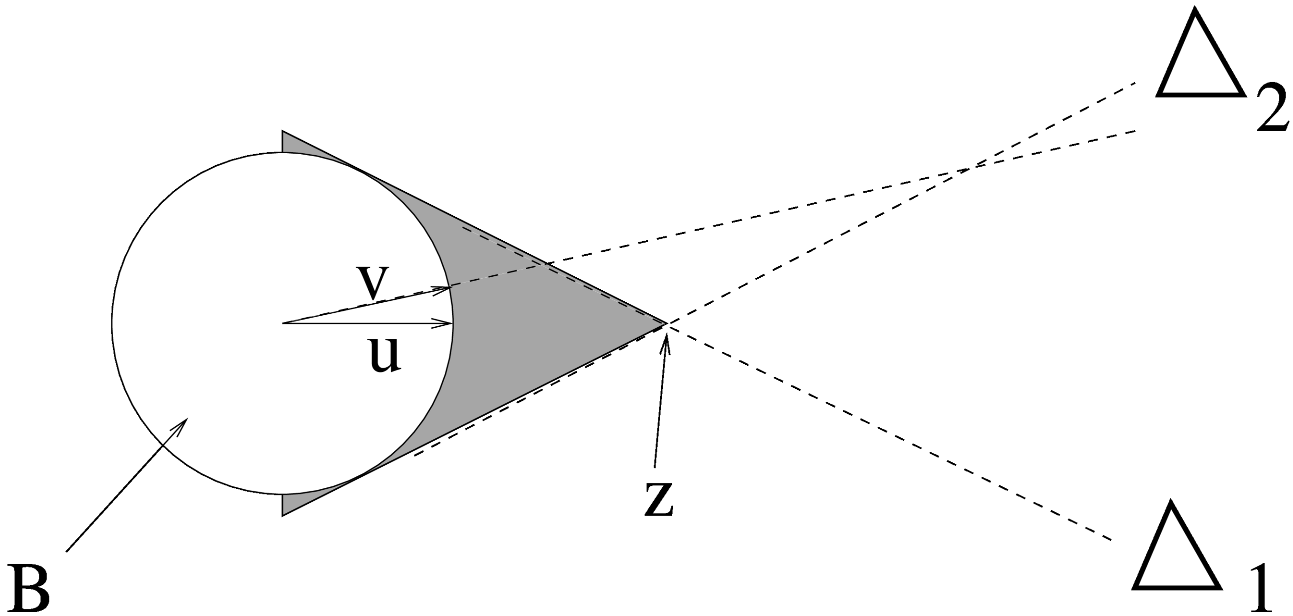


FIGURE 8 – Par hypothèse, la boule B est incluse dans K.
Commentaire : On se donne z le point $f(u)$, c'est-à-dire le « bord » de K dans la direction u. Alors la zone grisée appartient nécessairement à K par convexité. $f(v)$ est alors nécessairement au delà de Δ_1 par convexité de K, et en deça de Δ_2, par définition de z. Donc si v tend vers u, $f(v)$ tend vers $z = f(u)$. D'où la continuité de f.

Exemple 0.78 Dans le même ordre d'idée, on peut montrer que dans un espace E de dimension finie qu'une partie B est une boule unité fermée ssi B est compacte, connexe, symétrique (par rapport à 0) et dont l'intérieur est non vide ($\rightarrow$ l'intérieur contient 0).

Démonstration *On définit $j_B : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ par*

$$\forall x \in E, \quad j_B(x) = \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in B\}.$$

On laisse en exercice le fait que j_B est une norme et que sa boule unité est B.

1.6.6 Intersection vide d'une suite décroissante de fermés convexes non vides bornés d'un espace vectoriel normé

Sur $\mathbb{R}$ l'intersection d'une suite décroissante de convexes fermés bornés non vides ne saurait être vide. De manière plus générale, une telle intersection ne peut être vide dans un espace vectoriel normé de dimension finie (voir proposition 0.55). Dans le cas général il en est tout autrement.

•Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

•C'est un espace vectoriel normé pour la norme infinie. C'est même un espace de Banach.

•Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels dense dans $[0, 1]$.

•Soit C_n l'ensemble des applications de E nulles en x_i pour tout i dans $[[0, n]]$, bornées par 2 et d'intégrale 1 sur $[0, 1]$.

•Les C_n sont non vides, convexes, fermés, bornés, décroissants.

•L'intersection des C_n ne peut contenir que des fonctions nulles sur tous les rationnels, et continues, donc l'intersection des C_n ne peut pas contenir de fonction non nulle. Or l'intersection des C_n ne peut contenir que des fonctions d'intégrale 1.

1.6.7 Valeurs d'adhérence $\neq$ limites de suites extraites

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite n'est pas nécessairement égal à l'ensemble des limites de sous-suites extraites. Rappelons que par contre les valeurs d'adhérence, lorsqu'elles sont à base dénombrable de voisinage, sont des limites de suites extraites, et que dans un espace métrique, les valeurs d'adhérence sont bien les limites de sous-suites extraites.

En effet, soit E l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$; on le munit de la topologie produit, c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple (le lecteur peut vérifier que topologie de la convergence simple et la topologie produit coïncident ici).

•Un voisinage de la fonction nulle dans E est de la forme $\{f \ ; \ \forall i \in [[1, n]], \ |f(x_i)| \leq \epsilon_i\}$ $(*)$, avec les ϵ_i positifs, et les x_i dans $[0, 1]$.

•On considère les applications en dents de scie, égales à 0 en x_0, en x_1, en x_2, ... , en x_n, avec $x_i < x_{i+1}$, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$; et affine entre x_i et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1}, avec $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) = 1$, avec les x_i rationnels.

•On peut énumérer ces fonctions, et donc il s'agit d'une suite.

•La suite nulle est clairement dans l'adhérence de cette suite (prendre un voisinage de la fonction nulle écrit sous la forme $(*)$, et regarder ce qu'il se passe.

•Aucune suite extraite ne peut tendre simplement vers la fonction nulle, sinon le théorème de convergence dominée de Lebesgue permettrait de dire que l'intégrale de la fonction nulle est la limite de l'intégrale des fonctions de la suite - or toute fonction de notre suite a une intégrale $\frac{1}{2}$.

1.6.8 Les espaces projectifs

Les espaces projectifs sont compacts et connexes par arcs. On trouvera plus d'informations sur ce sujet dans la partie **??**.

1.6.9 Le cube de Hilbert

DÉFINITION 0.61 **cube de Hilbert**

On appelle **cube de Hilbert** l'espace produit $[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit ($[0,1]$ étant muni de la topologie usuelle sur les segments de réels).

Propriétés : •Le cube de Hilbert est connexe par arcs (considérer, étant donnés deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'application qui à t associe $(x_n + t.(y_n - x_n))_{n\in\mathbb{N}}$). Chaque composante étant continue, cette application est continue.

•Le cube de Hilbert est métrisable (considérer l'application qui à (x_n) et (y_n) associe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$.

•Le cube de Hilbert est compact, par application du théorème de Tykhonov.

THÉORÈME 0.126

Tout espace métrique compact K est homéomorphe à un sous-espace topologique du cube de Hilbert.

Démonstration

•Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère un recouvrement de K par des boules $b_{n,i}$ pour $i \in [[1, t(n)]]$, en nombre fini et de rayon $1/n$ (on peut toujours construire un recouvrement fini, en extrayant un recouvrement fini du recouvrement comportant toutes *les boules de rayon $1/n$, via la compacité de K).*

•On note $B_{n,i}$ la boule de même centre que $b_{n,i}$, mais de rayon double $(2/n)$

*•On peut, par le lemme d'Urysohn **??**, trouver une fonction continue $f_{n,i}$ égale à 1 sur $b_{n,i}$, comprise entre 0 et 1, et nulle en dehors de la boule $B_{n,i}$.*

•On peut alors construire l'application f qui à un point x de K associe $(f_{1,1}(x), ..., f_{1,t(1)}(x), f_{2,1}(x), ..., f_{2,t(2)}(x), ..., f_{m,1}(x),$ qui est un élément du cube de Hilbert.

•Cette application est continue, puisque toutes ses composantes sont continues.

•Elle est injective, on l'a construite pour ça.

•f de K dans $f(K)$ est alors une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé ; ceci implique que f est un homéomorphisme, d'après le corollaire 0.61.

1.6.10 Fonction non continue vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires

Il suffit, pour montrer l'existence d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non-continue et telle que pour tous $a < b$ et tout c dans $[f(a), f(b)]$ il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = c$, de considérer la fonction qui à un réel x associe $\sin(1/x)$ si x est non nul et 0 sinon.

1.6.11 Tous les fermés de $\mathbb{R}^n$ s'expriment comme zéros de fonctions indéfiniment dérivables

LEMME 0.127

Il existe une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule exactement sur $]-\infty, 0]$.

Des fermés particuliers, le cas de la dimension 1

Démonstration

•*On pose* $f(x) = \exp(-1/x)$ *pour* $x > 0$, $f(x) = 0$ *sinon.*

•*Il est clair que* f *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$.

•*En* 0 *on peut alors voir que toutes les dérivées sont nulles, car leurs limites sont nulles, puisqu'elles s'expriment par 0 pour* $x < 0$ *et comme produit d'une fraction rationnelle par un* $\exp(-1/x)$ *(pour* $x > 0$*).*

LEMME 0.128

Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ s'exprime comme complémentaire de l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞.

Démonstration

•$]a, +\infty[$ *ou* $]-\infty, a[$ *: voir lemme précédent.*

•$]a, b[$ *est l'ensemble des zéros de* $x \mapsto f(x-a).f(b-x)$.

LEMME 0.129

Tout fermé de $\mathbb{R}$ s'exprime comme ensemble des zéros d'une fonction C^∞.

Démonstration

•*On note* U *le complémentaire du fermé à étudier.*

•U *est ouvert.*

•U *est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints (preuve de la dénombrabilité en vérifiant qu'il y a un rationnel dans toute composante connexe d'un ouvert)*

•*On note* ϕ_n *une fonction positive (voir lemme précédent)* C^∞ *qui s'annule exactement sur le complémentaire du* n*-ième intervalle de la partition ci-dessus.*

•*On note* ϕ *la somme des* ϕ_n. *Cette somme est bien définie car il y a au plus un des* ϕ_n *qui est non nul en un point donné.*

•ϕ *est indéfiniment dérivable, comme on s'en rend compte en regardant ce qu'il se passe au voisinage d'un point donné - qui n'appartient qu'à un seul (au plus) support de* ϕ_n.

LEMME 0.130

Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$; il existe une fonction C^∞ nulle partout sauf dans cette boule, où elle est > 0.

Des fermés particuliers, le cas général : dimension quelconque

Démonstration *On montre le résultat pour la boule unité ouverte, la généralisation étant immédiate.*

•*Soit* $f(x) = \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2})$ *pour* x *tel que* $\|x\| < 1$, *et* $f(x) = 0$ *sinon. La norme ici évoquée est la norme euclidienne.*

•*la situation étant invariante par rotation, on se contente de montrer que la fonction est* C^∞ *sur le premier axe (i.e. l'ensemble des* $(x, 0, 0, ...0)$ *pour* $x \geq 0$*).*

•*Pour cela on montre que chaque dérivée partielle est* C^∞.

•*Tout d'abord dans le cas d'un point autre que* 0 *ou* 1 *:*

– *La dérivée partielle suivant un autre axe que le premier est clairement nulle, par symétrie du problème.*

– *La dérivée partielle suivant le premier axe est clairement* C^∞, *comme composée d'applications* C^∞, *voir le lemme 0.128.*

•*Et en zéro, il suffit de voir que le carré de la norme euclidienne est une fonction polynômiale, donc* C^∞.

•*Le cas* 1 *se traite, comme dans le lemme 0.127.*

Lemme 0.131

Tout ouvert s'écrit comme réunion dénombrable de boules ouvertes.

Démonstration

•*On considère la suite* x_n *des points à coordonnées rationnelles de* U, *un ouvert.*

•*Pour tout* x_n, *on définit* r_n *le sup des* r *tels que* $B(x_n, r) \subset U$.

•r_n *est bien positif strictement, puisque* U *est ouvert.*

•*Il est clair que tout rationnel de* U *est inclus dans la réunion des* $B(x_n, r)$.

•*Tout point* x *est inclus dans une boule centrée sur* x *de rayon* ϵ *incluse dans* U *; donc une boule centrée sur un rationnel situé à une distance au plus* $\epsilon/3$ *de* x *et de rayon maximal va contenir* x. *En effet ce rayon maximal est* $\geq \epsilon/3$.

•*Des deux* •*précédents, on déduit donc que notre ouvert s'exprime comme réunion dénombrable de boules ouvertes.*

Théorème 0.132 **Le résultat tant attendu**

Tout fermé de $\mathbb{R}^n$ s'exprime comme zéro d'une fonction C^∞.

Démonstration

•*Soit* F *un fermé. On considère* U *son complémentaire. On écrit* U *comme une réunion dénombrable de boules ouvertes* B_n *de rayon* r_n.

•*On fait alors une somme pondérée de fonctions comme définies dans le lemme 0.130. Avec* ϕ *la fonction donnée par le lemme 0.130 pour la boule unité, on peut écrire cette somme comme* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi(\frac{x-x_i}{r_i})$.

•*Il faut choisir les* c_i *afin d'assurer la convergence normale de la dérivée* k*-ième de* $\sum_{i=1}^{N} c_i \phi(\frac{x-x_i}{r_i})$ *pour* $N \to \infty$ *; ainsi on aura convergence normale de toutes les dérivées et donc la somme sera* C^∞. *La difficulté est que contrairement au cas de la dimension* 1, *les boules ne sont pas disjointes.*

•*Il est suffisant pour cela que la somme des* c_i/r_i^k *soit convergente. En effet, dans ce cas la dérivée* k*-ième de* $c_i\phi(\frac{x-x_i}{r_i})$ *sera majorée par la borne sur la dérivée* k*-ième de* ϕ, *divisée par* r_i^k, *conduisant à une convergence normale de toutes les dérivées.*

•*Il suffit de choisir* $c_i = e^{-\frac{1}{r_i}}.2^{-i}$ *; ainsi* $\sum c_i/r_i^k = \sum 2^{-i}.e^{-\frac{1}{r_i}}/r_i^k \leq \sum 2^{-i}.M_k$ *avec* M_k *le sup de* $x^k.e^{-\frac{1}{x}}$.

1.6.12 Le compactifié d'Alexandrov

On se donne X un espace topologique séparé, non compact, localement compact. L'objectif va être de construire un espace $\tilde{X}$, dit compactifié d'Alexandrov, à peine plus gros que X, qui lui sera compact, et qui contient un sous-espace topologique homéomorphe à X.

On pose $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. On définit $\mathcal{T}$ l'ensemble constitué :

– des ouverts de X

– des $\tilde{X} \setminus K$, où K est un compact de X.

•Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie. L'ensemble des ouverts de X est bien stable par intersection finie et par réunion quelconque ; et l'ensemble des complémentaires de compacts de X dans $\tilde{X}$ est bien lui aussi stable par intersections finies et réunion quelconques (rappelons qu'une réunion finie de compacts est compacte et qu'une intersection quelconque de compacts est compact - comme fermé d'un compact) ; il suffit donc de vérifier que l'intersection (resp. la réunion) d'un ouvert de X et d'un complémentaire de compact de X est bien un ouvert de X ou un complémentaire de compact de X.

Voyons tout d'abord le cas de l'intersection. Pour cela soit U un ouvert de X, et K un compact de X, de complémentaire V. $U \cap V$ est l'intersection d'un ouvert avec $V \setminus K$ qui est un ouvert ; donc c'est un ouvert de X.

Passons à la réunion. $U \cup V$ est le complémentaire de $K \cap U'$, avec U' le complémentaire de U dans $\tilde{X}$. $U \cup V$ est donc bien le complémentaire d'un compact de X.

•Montrons que X est dense dans $\tilde{X}$. Pour le voir il suffit de voir que tout voisinage de ∞ intersecte X ; ce qui est clair car $\underline{X \text{ n'est pas compact}}$[13].

•On va maintenant montrer que X est homéomorphe à un sous-espace de $\tilde{X}$. L'identité de X dans $\tilde{X}$ est injective. Les ouverts de $\tilde{X}$ inclus dans X étant exactement les ouverts de X, il est clair qu'il s'agit bien d'un homéomorphisme.

•Montrons maintenant que $\tilde{X}$ est séparé (premier pas pour montrer qu'il est compact). On peut séparer deux points de X par des ouverts, puisque $\underline{X \text{ est séparé}}$. Montrons maintenant qu'on peut séparer un point $x \in X$ de ∞. On se donne pour cela K un voisinage compact de x, ce qui peut se faire puisque $\underline{X \text{ est localement compact}}$. $Int(K)$ (intérieur de K) et $\tilde{X} \setminus K$ sont des ouverts séparant x et ∞.

•Montrons maintenant que $\tilde{X}$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, c'est-à-dire que de tout recouvrement d'ouverts de $\tilde{X}$ on peut extraire un recouvrement fini. Soit $X = \cup_{i \in I} U_i$, avec les U_i ouverts. Un certain U_{i_0} contient ∞. Son complémentaire est compact, et recouvert par les U_j, pour $j \neq i_0$; on peut donc le recouvrir par les U_j, pour $j \in J$ fini. L'ensemble des U_i pour $i \in J \cup \{i_0\}$ est un recouvrement fini de $\tilde{X}$.

Exemple 0.79 $\tilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$[14].

1.6.13 Le cantor K_3

DÉFINITION 0.62 **Cantor** K_3

On note C_0 l'ensemble $[0, 1]$.
On note C_1 l'ensemble $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

13. On souligne dans cette démonstration, par souci de clarté, les endroits où s'appliquent les hypothèses
14. Cette sphère est de dimension topologique n.

FIGURE 9 – Construction de l'ensemble de Cantor.
Les lignes successives représentent C_1, C_2, C_3, C_4.

On note C_2 l'ensemble $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \ \cup \ [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$
...
On note C_n l'ensemble $\frac{1}{3}.C_{n-1} \cup (C_{n-1} + 2).\frac{1}{3}$.

On note K_3 l'intersection des C_n, pour $n \in \mathbb{N}$. On appelle cet ensemble **ensemble triadique de Cantor**.
On le munit d'une topologie en considérant la restriction de la distance usuelle à K_3.

On trouve figure **??** un graphique proche du Cantor, appelé « éponge de Sierpinski », avec le programme Matlab qui le génère.

PROPOSITION 0.133

K_3 est aussi l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont le développement 3-adique ne comporte que des 0 ou des 2.

Démonstration *La proposition 0.133 se prouve en considérant l'intersection des C_i jusqu'à un certain rang, et en prenant la limite en l'infini.*

PROPOSITION 0.134

K_3 est compact.

Démonstration *K_3 est fermé, car c'est une intersection de fermés, et borné car inclus dans $[0, 1]$. Donc il est compact, comme tout fermé borné de $\mathbb{R}$ (corollaire 0.67).*

PROPOSITION 0.135

K_3 est de mesure nulle et d'intérieur vide.

Démonstration *K_3 est mesurable, comme intersection dénombrable de fermé. La mesure de K_3 est inférieure à la mesure de C_n, pour tout n ; or C_n est de mesure tendant vers 0 comme $n \to \infty$; donc K_3 est de mesure nulle. K_3 est d'intérieur vide, sinon il ne serait pas de mesure nulle.*

PROPOSITION 0.136

K_3 est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites de $\{0,1\}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0,1\}$.

Démonstration *Soit la fonction f qui à une suite u_n de $\{0,1\}$ associe la somme des $2.u_n/3^n$. Cette fonction est injective, clairement. Elle est surjective (proposition 0.133). Voyons maintenant la continuité de f ; en fait on va considérer la continuité de f^{-1}. Pour cela on considère l'image réciproque d'un ouvert non vide de la base d'ouverts de la topologie produit constituée des produits d'ouverts tels qu'un nombre fini d'ouverts seulement soient différents de $\{0,1\}$. Il est suffisant pour que l'image réciproque de x soit dans cet ouvert que les premiers chiffres soient les mêmes, et donc que la distance soit suffisamment petite.*

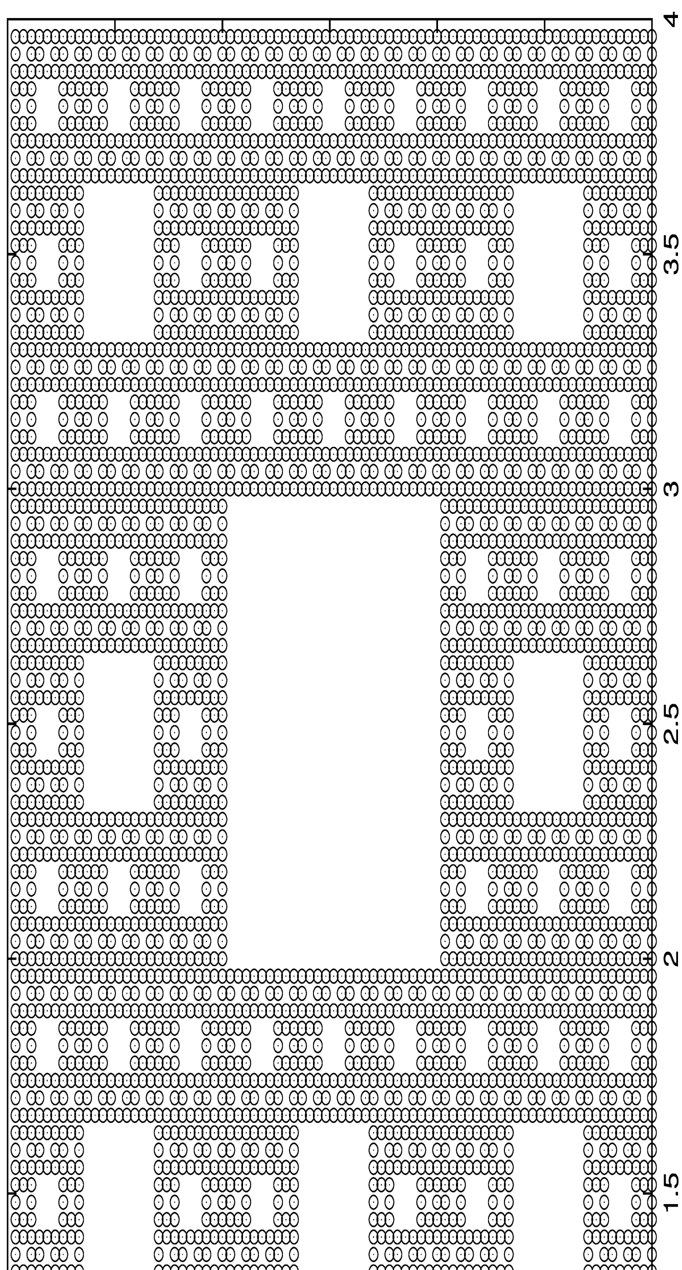
Enfin toute fonction continue bijective d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme (d'après le corollaire 0.61), ce qui permet de conclure.

```
function [x,y] = serp(a,b,c)

% Executer: [x,y] = serp(1,1,3); plot(x,y,'*');

x=[];y=[];
gset nokey
hold on
if (c<0.07)
x=[a];
y=[b];
else
for i=0:2,
for j=0:2,
if ((i!=1)|(j!=1))
[u,v]=serp(a+i*c/3,b+j*c/3,c/3);
x=[x,u];y=[y,v];
endif;
endfor;
endfor;

endif;
```

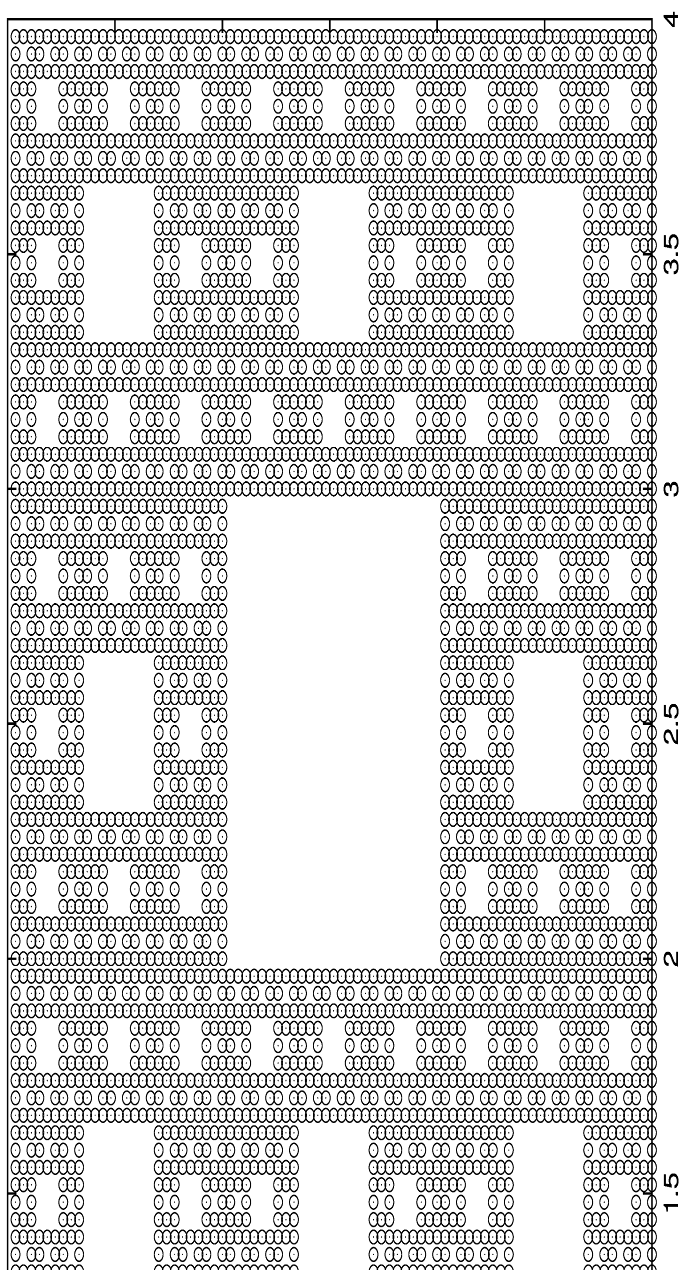


```
function [x,y] = serp(a,b,c)

% Executer: [x,y] = serp(1,1,3); plot(x,y,'*');

x=[];y=[];
gset nokey
hold on
if (c<0.07)
x=[a];
y=[b];
else
for i=0:2,
for j=0:2,
if ((i!=1)|(j!=1))
[u,v]=serp(a+i*c/3,b+j*c/3,c/3);
x=[x,u];y=[y,v];
endif;
endfor;
endfor;

endif;
```



Proposition 0.137

K_3 est **totalement discontinu**, ce qui signifie que la composante connexe d'un point est réduite à ce point.

Démonstration *Il suffit de montrer qu'étant donnés x et y dans K_3, il existe deux ouverts fermés disjoints contenant l'un x et l'autre y. En effet ainsi la composante connexe de x sera différente de la composante connexe de y.*

Pour cela on peut considérer indifféremment K_3 comme le produit $\{0,1\}^n$ ou comme l'intersection des C_n ; dans le premier cas il suffit de considérer le premier rang auquel les deux suites diffèrent, dans le deuxième cas, le premier chiffre dans le développement triadique pour lequel x et y diffèrent.

Exemple 0.80

Montrer que K_3 ne comporte pas de point isolé.

On appelle ensemble **parfait** un ensemble fermé et dépourvu de point isolé.

K_3 sera donc un ensemble parfait.

Démonstration *Facile, soit en considérant un ouvert de la base d'ouverts dans le cas du produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, soit en considérant l'intersection d'une boule ouverte avec K_3 dans le cas de l'intersection des C_n (bien entendu, une seule de ces deux preuves suffit !).*

Proposition 0.138

K_3 et $\emptyset$ sont les deux seuls compacts K inclus dans $[0,1]$ qui vérifient

$$K.\frac{1}{3} \cup (K.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = K$$

Démonstration *Il est tout d'abord aisé de vérifier que $\emptyset$ et K_3 sont des solutions de l'équation donnée.*

On considère maintenant l'ensemble $K([0,1])$ des compacts non vides inclus dans $[0,1]$, et l'application f qui à un compact K associe $(\frac{1}{3}K) \cup (\frac{1}{3}K + \frac{2}{3})$.

Cette application associe bien un compact inclus dans $[0,1]$ à un compact inclus dans $[0,1]$. On va considérer un compact A donné, non vide, et on va montrer que $f^n(A)$ tend vers K_3 pour la distance de Hausdorff. Cet élément, prouvé plus bas, permettra de conclure ; mais nous allons pour cela devoir définir la distance de Hausdorff et voir quelques unes de ses propriétés.

Définition 0.63 ***Définition de la distance de Hausdorff***

On définit tout d'abord :

$$V_\epsilon(A) = \{x; d(x,A) < \epsilon\}$$

*$V_\epsilon(A)$ est appelé **ϵ-voisinage ouvert de** A. Il est ouvert par la proposition 0.121.*

*Ensuite on note $D(A,B)$ et on appelle **distance de Hausdorff** le réel*

$$D(A,B) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+; A \subset V_x(B) \wedge B \subset V_x(A)\}$$

défini sur l'ensemble $K(E)$ des compacts non vides d'un espace métrique E donné.

Il s'agit bien d'une distance ; comme on peut le voir en vérifiant que $D(A,B) \geq 0$ et $D(A,B) < \infty$; que $D(A,B) = 0 \rightarrow A = B$; et que l'inégalité triangulaire est bien vérifiée.

Proposition 0.139

Si E est un espace métrique complet, alors l'ensemble des compacts non vides de E muni de la distance de Hausdorff est complet.

begindivdemonstrationbegintext endtext Soit K_n une suite de Cauchy dans l'ensemble des compacts non vides de E.

Alors il existe une suite $\epsilon_N \to 0$ telle que

$$\forall k, n > N \ D(K_k, K_n) < \epsilon_N$$

$$\text{et donc } \forall k, n > N, \ K_k \subset V_{\epsilon_N}(K_n)$$

On considère alors K l'ensemble des x tels qu'il existe une suite x_n telle que $x_n \in K_n$ et x_n admet x pour valeur d'adhérence. Nous allons montrer (i) que K est fermé et complet (ii) que K est précompact (iii) que K est compact et enfin (iv) que $K_n \to K$ ce qui conclura la preuve.

K est fermé. En effet :

– soit y_∞ dans $\overline{K}$. Il existe (y_m) suite dans K tendant vers y_∞.

– y_m est limite d'une certaine suite d'éléments x_n tels que $x_n \in K_n$. On considère une suite extraite x_{n_m} telle que $d(x_{n_m}, y_m) \to 0$ comme $m \to \infty$. On définit x_n pour n n'appartenant pas à l'ensemble des n_m, en le choisissant de manière quelconque dans K_n.

$$\text{Alors } d(x_{n_m}, y_\infty) \leq d(y_m, y_\infty) + d(x_{n,m}, y_m) \to 0$$

Donc y_∞ est valeur d'adhérence des x_n, donc $y_\infty \in K$. D'où $\overline{K} \subset K$, et donc K est fermé. Fermé d'un complet, il est donc aussi complet (proposition 0.104).

K est aussi précompact. En effet :

Soit $\epsilon > 0$.

– Par l'équation (134), il existe N tel que K soit inclus dans $V_\epsilon(K_N)$.

– pour tout y dans K, il existe x_y dans K_N tel que $d(y, x_y) < \epsilon$.

– On peut construire sur K_n (puisqu'il est compact) un recouvrement fini par des boules centrés sur les $z_i \in K_n$ de rayon ϵ.

– Les boules centrées sur les $z_i \in K_n$ de rayon 2ϵ recouvrent donc K. On peut supprimer les z_i inutiles, i.e. tels que $B(z_i, 2\epsilon) \cap K = \emptyset$. Il reste les z_i, pour, disons, $i \in [[1, M]]$.

– On peut alors déterminer, pour tout $i \in [[1, M]]$, un élément z'_i de K à distance $< 2\epsilon$ de z_i (puisqu'on a supprimé les z_i inutiles).

– Les boules centrées sur les z'_i et de rayon 4ϵ couvrent K et montrent que K est précompact.

Précompact et complet, K est donc compact (voir théorème 0.52).

Il convient de montrer que K est non vide (cf. l'énoncé de la proposition), ce qui sera fait en même temps que la preuve de la convergence des K_n ci-dessous (en effet on va montrer que K_n est inclus dans $V_\epsilon(K)$, ce qui implique que K est non vide).

On va donc montrer que K est limite des K_n pour la distance de Hausdorff ; pour le montrer il suffit de montrer que pour tout ϵ il existe un N tel que pour $n \geq N$ on a

•$K \subset V_\epsilon(K_n)$ (immédiat)

•$K_n \subset V_\epsilon(K)$: pour cela on considère x dans K_n, avec n tel que $\epsilon_n \leq \epsilon$. On considère alors

— *$n_0 > n$ tel que $\epsilon_{n_0} \leq \epsilon/2^1$, et x_{n_0} dans K_{n_0}, tel que $d(x, x_{n_0}) \leq \epsilon/2^0$*

— *$n_1 > n_0$ tel que $\epsilon_{n_1} \leq \epsilon/2^2$, et x_{n_1} dans K_{n_1}, tel que $d(x_{n_0}, x_{n_1}) \leq \epsilon/2^1$*

— *$n_2 > n_1$ tel que $\epsilon_{n_2} \leq \epsilon/2^3$, et x_{n_2} dans K_{n_2}, tel que $d(x_{n_1}, x_{n_2} \leq \epsilon/2^2$*

— *...*

— $n_p > n_{p-1}$ *tel que* $\epsilon_{n_p} \leq \epsilon/2^{p+1}$, *et* x_{n_p} *dans* K_{n_p}, *tel que* $d(x_{n_{p-1}}, x_{n_p}) \leq \epsilon/2^p$

— ...

La suite des x_{n_p} *est de Cauchy, donc elle converge vers un certain* y *; en sommant les distances on obtient alors que* $d(x,y) \leq 2.\epsilon$. *Pour compléter la suite des* x_n *pour* $n_p \leq n \leq n_{p+1}$, *il suffit de prendre un point quelconque dans* K_n.

On a donc bien $y \in K$ *et* $d(x,y) \leq 2\epsilon$, *donc* $K_n \subset V_\epsilon(K)$, *ce qui conjointement à* $K \subset V_\epsilon(K_n)$ *(plus haut) montre que* $D(K_n, K) \leq \epsilon$. *On a donc bien montré*

— *que* $K_n \to K$ *pour la distance de Hausdorff,*

— *que* K *est non vide.*

(ceci conclut la preuve de la proposition 0.139 ; toute suite de Cauchy converge, donc l'ensemble des compacts non vides de E munis de la distance de Hausdorff est bien complet)

On peut maintenant terminer notre démonstration du fait que K_3 est le seul compact non vide tel que $K_3 = f(K_3)$ (nous finissons ici la preuve de la proposition 0.138, à l'aide de la proposition 0.139 que nous venons de prouver)).

On montre alors que f est contractante de rapport $\frac{1}{3}$ pour la distance de Hausdorff. On peut donc conclure par le théorème du point fixe **??** ; K est le seul compact non vide satisfaisant à l'équation.enddivdemonstration

Une autre propriété de $K(E)$ (ensemble des compacts non vides de E) est le fait que pour E métrique compact, $K(E)$ est compact.

On peut utiliser le Cantor triadique K_3 pour construire une fonction continue, croissante, dérivable presque partout, de dérivée nulle presque partout, et pourtant non constante (égale à 0 en 0 et à 1 en 1). Cette fonction est souvent désignée sous le terme d'escalier de Cantor.

1.6.14 Une distance sur les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle S l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Alors on définit la distance d sur S par

$$d(F,G) = dim(F+G) - dim(F \cap G)$$

Définition 0.64 **distance de Grassman**

Cette distance est appelée **distance de Grassman**.

Proposition 0.140

Il s'agit bien d'une distance.

Démonstration *En effet :*

•*d est bien positive.*

•*d est symétrique.*

•$d(F,G) = 0$ *implique* $dim\ F \cap G = dim\ F + G$ *or* $F \cap G \subset F \subset F + G$ *et donc* $F \cap G = F$ *et donc* $F \subset G$ *; de même on obtiendrait* $G \subset F$ *; et donc au final* $F = G$.

•*Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour cela on aura besoin de la définition suivante :*

Définition 0.65 ***chaîne entre les sous-espaces vectoriels F et G***

On appelle ***chaîne entre les sous-espaces vectoriels F et G*** *une suite finie de sous-espaces vectoriels , le premier étant F, le dernier étant G, et chaque élément de la chaîne étant un hyperplan du sous-espace vectoriel suivant, ou au contraire le sous-espace vectoriel suivant étant un hyperplan de ce sous-espace vectoriel ; formellement cela signifie qu'il existe $F_1, ..., F_p$ tels que $F = F_1$, $G = F_p$, et pour tout $i \in [1, p-1]$, F_i est un hyperplan de F_{i+1} ou F_{i+1} est un hyperplan de F_i.*

p est appelé ***longueur de la chaîne****.*

On procède comme suit :

- *Si $F \subset G$, il y a entre F et G une chaîne de longueur $dim\ G - dim\ F$.*
- *Dans le cas général il y a entre F et G une chaîne de longueur $d(F,G)$ (se montre en passant par l'espace $F \cap G$ - il suffit de se rappeler que $dim\ F + G = dim\ F + dim\ G - dim\ F \cap G$). On va maintenant se préoccuper de montrer que cette chaîne est de longueur minimale.*
- *Si on a une chaîne A, B, C, avec A et C hyperplans de B (c'est-à-dire que B est le plus grand de nos 3 éléments A, B et C), alors on a aussi une chaîne $A, A \cap C, C$, à moins que $A = C$.*
- *En appliquant aussi souvent que nécessaire le point ci-dessus à une chaîne minimale entre F et G, on constate qu'on peut la remplacer par une chaîne de même longueur entre les deux mêmes sous-espaces vectoriels F et G et de manière à avoir des inclusions décroissantes puis croissantes.*
- *La chaîne obtenue passe par $F \cap G$ et a longueur $d(F,G)$. On sait donc que $d(F,G)$ est la longueur minimale d'une chaîne entre F et G. On peut remarquer qu'on aurait pu raisonner de même en utilisant une chaîne croissante puis décroissante en passant par $F + G$ au lieu de décroissante puis croissante en passant par $F \cap G$.*
- *L'inégalité triangulaire en résulte.*

Proposition 0.141

Pour la distance de Grassman, tout isomorphisme algébrique est une isométrie.

Démonstration *Découle du fait que la distance de Grassman ne dépend que de dimensions d'espaces, qui sont préservées par isomorphisme algébrique.*

1.6.15 Topologie et approximation de fonctions caractéristiques

Les approximations de fonctions caractéristiques sont présentées en section **??** (et les parties suivantes pour des applications).

1.6.16 Points fixes

Lemme 0.142

Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé E, et f un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$; alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

⊡ Point fixe d'un endomorphisme dans un compact convexe

Démonstration

•On se donne $x_0 \in K$, et on définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$.

•On définit alors $y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_n$; $y_n \in K$ par convexité de K.

•Par compacité de K, on peut extraire une suite convergente de la suite des (y_n) (puisque E est un espace vectoriel normé , donc un espace métrique, le théorème de Bolzano-Weierstrass 0.78 s'applique).

•Soit y la limite de cette suite.

•$f(y_n) - y_n = \frac{x_n - x_0}{n}$; la suite (x_n) étant bornée (puisque <u>K est compact dans un métrique</u>) $f(y_n) - y_n \to 0$ et en passant à la limite <u>puisque f est continue</u> $f(y) = y$.

⊡ **Un théorème de point fixe dans un espace de Hilbert** Ce résultat est directement inspiré de la note « Un théorème de point fixe en dimension finie : application aux sous-groupes compacts de $\mathbb{R}^n$ », de Richard Antetomaso, dans la 104ème intégrale de la Revue de Maths Spé, 1993-1994.

Théorème 0.143

On se donne H un espace de Hilbert, et K un compact convexe non vide de H, et un sous-groupe compact G de l'ensemble des automorphismes de H (qui sont aussi des homéomorphismes). On suppose que pour tout g dans G, $g(K) \subset K$. Alors il existe a appartenant à H point fixe commun, i.e. tel que $\forall g \in G, g(a) = a$.

Intuition Il faut bien comprendre pour quelle topologie G est compact. Il s'agit de la topologie produit de H^H.

Démonstration

•On définit sur H une norme $\|.\|'$ (on va montrer qu'il s'agit bien d'une norme) définie par

$$\|x\|' = \sup\{\|g(x)\|; g \in G\}$$

Cette norme est bien définie et à valeurs finies, car G est compact ; utiliser le corollaire 0.63 avec la fonction qui à g associe $\|g(x)\|$.

•Montrons qu'il s'agit bien d'une norme.

– Linéarité :

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|' &= \sup\{\|g(\lambda x)\|; g \in G\} \\ &= \sup\{\||\lambda| g(\lambda x)\|; g \in G\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|g(\lambda x)\|; g \in G\} \\ &= |\lambda| \|g(x)\|' \end{aligned}$$

– $\|x\|' = 0$ implique clairement $x = 0$.

– Enfin,

$$\begin{aligned} & \|x+y\|' \\ = \quad & \sup\{\|g(x+y)\|; g \in G\} \\ = \quad & \|g_0(x+y)\| \text{ pour un certain } g_0 \text{ (cf texte ci-dessous)} \\ \leq \quad & \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| \leq \quad \|x\|' + \|y\|' \end{aligned}$$

L'existence de g_0 (équation 138) provient du fait que par hypothèse <u>G est compact</u> et une fonction continue sur un compact atteint ses bornes (voir corollaire 0.63).

Le cas d'égalité est atteint si $\|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| = \|g_0(x+y)\|$, donc si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés (car H est un espace de Hilbert), donc si x et y sont positivement liés puisque g_0 est *un automorphisme (les éléments de G sont des automorphismes). Cela signifie précisément que notre norme est strictement convexe.*

•Supposons maintenant, pour arriver à une contradiction, que

$$\forall x \exists g \in G; g(x) \neq x.$$

•Considérons, pour $g \in G$, l'ensemble Ω_g des éléments de x de K tels que $g(x) \neq x$.

•pour tout g, Ω_g est ouvert, puisque g, l'identité, et l'addition sont continues (g est continue par hypothèse, l'identité est continue[15], et voir la proposition 0.51 pour vérifier que l'addition est bien continue).

•Les Ω_g recouvrent K (c'est ce qu'on a supposé ci-dessus pour arriver à une contradiction).

•Par définition des compacts, et puisque K est compact, on peut extraire un recouvrement fini $K = \cup_{i \in [[1,n]]} \Omega_{g_i}$. On note que $n \geq 1$, car K est non vide.

•On applique alors le lemme 0.142 à l'endomorphisme continu

$$x \mapsto \frac{1}{n}\left(g_1(x) + \cdots + g_n(x)\right);$$

c'est un endomorphisme de K dans K, bien défini par convexité de K, continu par continuité des g_i. On en déduit qu'il existe x tel que $nx = \sum_i g_i(x)$.

•On a alors $n\|x\|' \leq \sum_i \|g_i(x)\| = n\|x\|$

(car les g_i sont des isométries et car les isomorphismes d'espaces de Hilbert sont des isométries.).

•On a montré plus haut que la norme était strictement convexe ; donc pour avoir le cas d'égalité ci-dessus il faut que les $g_i(x)$ soient positivement liés ; or ils ont tous même norme, puisque les g_i sont des isométries ; donc tous les $g_i(x)$ sont égaux.

•Du coup pour tout i dans $[[1,n]]$, $ng_i(x) = nx$; donc $g_i(x) = x$. D'où la contradiction ; x n'appartient pas à l'union des Ω_{g_i}, alors qu'il appartient à K, et que ces Ω_{g_i} recouvrent K.

1.6.17 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ et $\forall x \exists n / f^{(n)}(x) = 0$, alors f est polynomiale

Cet exercice est extrait du livre [5].

Démonstration *Une démonstration possible est comme suit :*

•On considère Ω l'ensemble des points au voisinage desquels f est polynomiale

•Ω est ouvert. En effet, soit $x \in \Omega$. Alors f est polynomiale sur un voisinage ouvert V de x. Pour tout y dans V, f est polynomiale sur V, c'est-à-dire sur un voisinage de y ; donc y est dans Ω. Donc V est inclus dans Ω. Donc Ω est bien ouvert.

•Montrons que pour tout $]u, v[$ inclus dans Ω, il existe un polynôme P tel que f est égale à P sur $[u, v]$.

Pour le prouver, on se donne un tel $]u, v[\subset \Omega$, et on considère

- *x_0 dans $]u, v[$,*
- *un couple (x_1, x_2) tel que f est polynomiale sur $]x_1, x_2[$ et $x_1 < x_0 < x_2$,*
- *l'ensemble J des $x \in]x_0, x_2[$ tels que f est polynomiale sur $]x_0, x[$.*

On a les propriétés qui suivent :

- *J est non vide car contenant x_2 par définition ;*
- *il est fermé dans $]x_0, v[$ par continuité de f (il faut aussi dire que si f est polynomiale égale au polynôme P_x sur $]x_0, x[$ pour $x \in]x_0, x_2[$, alors tous les P_x pour $x \in]x_0, x_2[$ sont égaux car ayant une infinité de racines en commun) ;*
- *si $x \in J$ alors $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset J$ pour un certain ϵ ; donc J est ouvert dans $]x_0, v[$.*

15. L'image réciproque de tout ouvert est bien un ouvert !

donc $J =]x_0, v[$ par connexité. On a donc $f = P$ sur $]x_0, v[$ avec un certain polynôme P, et de même on aurait $f = P$ sur $]u, x_0[$.

•Soit F le complémentaire de Ω. F est fermé. Montrons qu'il ne comporte pas de point isolé. S'il comporte un point isolé a, alors

- *pour un $\epsilon > 0$, $]a, a+\epsilon[\subset \Omega$ et donc par le point précédent f est polynomiale égale à un certain P sur $]a, a+\epsilon[$; de même $f = Q$ sur $]a-\epsilon, a[$;*
- *P et Q coïncident par égalité des dérivées en a ;*
- *$f = P = Q$ sur $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ (même en a donc) par continuité de f en a.*

On a donc bien montré que

$$F \text{ ne contient pas de point isolé}$$

•On suppose maintenant F non vide pour arriver à une contradiction.

•On définit F_n l'ensemble des $x \in F$ tels que $f^{(n)}(x) = 0$.

•On montre qu'il existe un intervalle ouvert non vide I de longueur finie dont l'intersection avec F est non-vide et incluse dans un certain F_{n_0} :

- *Les F_n sont fermés dans le fermé F et recouvrent F par hypothèse. Donc on applique le théorème de Baire 0.113 dans F ; il existe F_{n_0} d'intérieur non vide dans F.*
- *On peut alors choisir un intervalle I ouvert d'intersection non vide avec F, et cette intersection $I \cap F$ est incluse dans F_{n_0} : il suffit de choisir I inclus dans F_{n_0}.*

On a donc bien montré

$$I \cap F \neq \emptyset I \cap F \subset F_{n_0}$$

•Montrons que $I \cap F \subset F_n$, pour tout $n \geq n_0$. Pour cela, on procède comme suit :

- *soit $a \in I \cap F$; a n'est pas isolé dans F (équation 139), a n'est pas non plus isolé dans $F \cap I$ car I est ouvert, et a est donc limite d'une suite a_p d'éléments de $F \cap I$ différents de a.*
- *Il suffit alors d'écrire la dérivée de $n_0 + 1$-ième de f comme limite de $\frac{f^{(n_0)}(a_p) - f^{(n_0)}(a)}{a_p - a}$ pour constater que $a \in F_{n_0+1}$.*

Par récurrence, l'équation 139 devient donc

$$I \cap F \subset F_n \text{ pour tout } n \geq n_0$$

•On montre maintenant que $f^{(n_0)}$ est nulle sur toute composante connexe de $I \cap \Omega$. $I \cap \Omega$ est ouvert ; donc c'est une réunion disjointe d'intervalles ouverts. Soit $]u, v[$ une telle composante connexe ; il sera suffisant pour montrer que $f^{(n_0)}$ est nulle sur $I \cap \Omega$ que $f^{(n_0)}$ est nulle sur tout $]u, v[$ de cette forme.

Comme montré plus haut, $f = P$ sur $[u, v]$. $]u, v[\neq I$ sinon $F \cap I = \emptyset$ (or $F \cap I$ non vide, équation **??***).*

Donc $u \in I$ ou $v \in I$; supposons sans perte de généralité $u \in I$. Alors $u \in I \cap F$, et pour un certain n_0, $u \in F_n$ pour tout $n \geq n_0$ (équation 139).

Le degré de P est donc inférieur à n_0. Donc $f^{(n_0)} = 0$ sur $[u, v]$. Ca marche sur toutes les composantes connexes de $I \cap \Omega$, donc

$$f^{(n_0)} = 0 \text{ sur } I \cap \Omega$$

$$\text{mais aussi } f^{(n_0)} = 0 \text{ sur } I \cap F$$

par l'équation **??***. Donc $f^{(n_0)}$ est nulle sur I, donc f est un polynôme sur I donc $I \subset \Omega$, ce qui est impossible puisque $I \cap F \neq \emptyset$ (équation* **??***). On est donc bien parvenu à une contradiction en supposant F non vide.*

1.6.18 Les billards strictement convexes

PROPOSITION 0.144

Soit K un ensemble strictement convexe de $\mathbb{R}^2$; on suppose que par tout point de la frontière de K il passe une unique tangente à K. On définit une trajectoire périodique de période n par la donnée de n points $a_0, \ldots, a_{n-1}$ de la frontière de K tels que pour tout $i \in [[0, n-1]]$, $\theta_i = \theta_{i+1}$ (voir figure 10) en notant $a_n = a_0$.

Alors pour tout $n \geq 2$ il existe des trajectoires périodiques de période n.

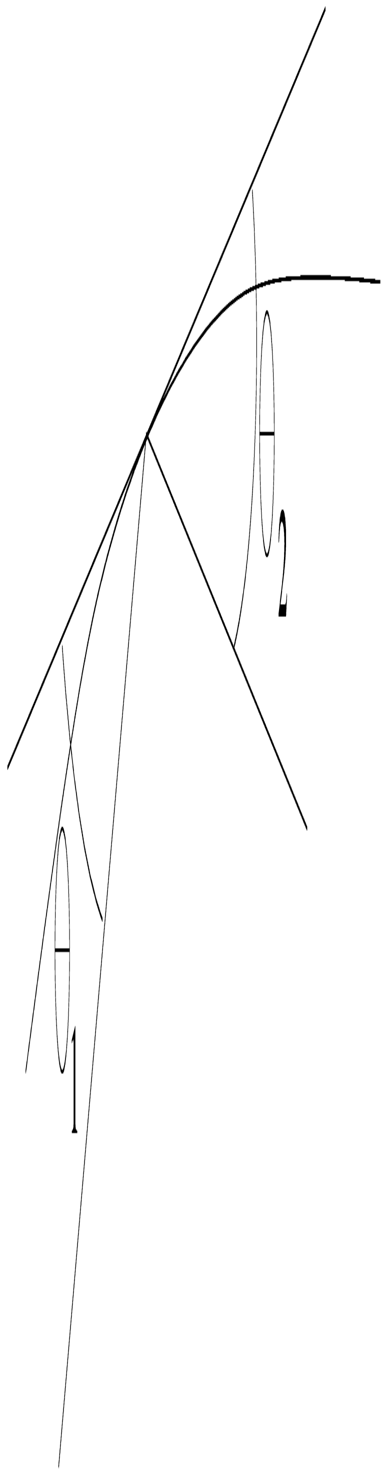


FIGURE 10 – Illustration de la définition d'une trajectoire périodique

Démonstration

$\bullet$*On se donne $n \geq 2$.*

$\bullet$*Notons δK la frontière de K.*

$\bullet$*On considère l'ensemble*

$$\tilde{K} = \{(a_0, \dots, a_{n-1}); \forall i, a_i \in \delta K\}$$

Il est égal à $(\delta K)^n$.

$\bullet$*On définit $f : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ défini par*

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i-1}|$$

($|.|$ désigne ici la norme euclidienne)

$\bullet$*f est C^0.*

$\bullet$*$\tilde{K}$ est compact (comme produit de compacts - s'agissant d'un produit fini d'espaces métriques il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème de Tykhonov, voir le paragraphe qui suit le théorème 0.66).*

$\bullet$*f atteint son maximum sur $\tilde{K}$.*

$\bullet$*Tout point où f atteint son maximum vérifie la propriété énoncée, comme le lecteur le vérifiera aisément.*

1.6.19 Deux élégantes inégalités géométriques

On s'inspire ici de [6] que l'on pourra consulter pour plus d'informations. On présentera ici l'inégalité isopérimétrique, qui explique la sphéricité des bulles de savon et beaucoup d'autres choses, et l'inégalité isodiamétrique.

1.6.20 Inégalité isopérimétrique

Lemme 0.145

On se donne Γ une fonction C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose $\int_0^1 \Gamma = 0$. Alors

$$4\pi^2 \int_0^1 |\Gamma|^2 \leq \int_0^1 |\Gamma'|^2$$

et il n'y a égalité que si Γ est une combinaison linéaire de $e^{2i\pi x}$ et $e^{-2i\pi x}$.

Démonstration *On procède comme suit :*

$\bullet$*On considère Γ sur $[0,1[$, et on considère sa série de Fourier.*

$$\Gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n x}$$

$\bullet$*On applique Parseval (théorème **??**) ;*

$$\int_0^1 |\Gamma|^2 = \sum_n c_n^2$$

•On applique Parseval à la dérivée de Γ, $\Gamma'(x) = 2i\pi \sum_n nc_n e^{2i\pi nx}$

$$\int_0^1 |\Gamma'|^2 = 4\pi^2 \sum_n (nc_n)^2$$

•On sait que $c_0 = 0$, car $\int_0^1 \Gamma = 0$.
•On a donc l'inégalité souhaitée, et le cas d'égalité.

THÉORÈME 0.146 **Inégalité isopérimétrique**

La courbe C^1 fermée du plan qui à longueur donnée délimite une aire maximale est le cercle.

Démonstration

•On se donne une courbe fermée C^1 Γ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.
•Quitte à reparamétrer, on suppose que Γ' est constant.
•Quitte à translater Γ on suppose que $\int \Gamma = 0$.
•On applique alors le théorème de Green-Riemann, qui affirme que l'aire A est donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2}\int xy' - x'y$$

avec $\Gamma = x + iy$, et x et y à valeurs réelles.
•Or

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = \int (x + iy).(x' - iy')$$
$$= \int xx' + yy' + iyx' - iy'x$$

or $\int xx' = \int yy' = 0$ par périodicité de x^2 et de y^2 donc

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = i\int yx' - y'x$$

et donc

$$2A \leq \sqrt{\int |\Gamma|^2}\sqrt{\int |\Gamma'|^2}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int |\Gamma'|^2$$

grâce au lemme précédent. Or Γ' étant constant, on obtient

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

avec l la longueur de l'arc.
•Il y a égalité si et seulement si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est en fait une égalité, et donc si et seulement si on a non seulement tous les c_i nuls sauf c_1 et c_{-1} (avec les c_i les coefficients de Fourier du lemme précédent), mais aussi Γ et Γ' liés ; la famille $(x \mapsto e^{2i\pi x}, x \mapsto e^{-2i\pi x})$ étant libre, on constate que les solutions se trouvent pour un des deux coefficients c_1 et c_{-1} nul, c'est-à-dire que Γ est un cercle.

1.6.21 Inégalité isodiamétrique

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, et de la mesure de Lebesgue.

Théorème 0.147

Quel que soit K compact de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie, $\mu(K) \leq \mu(B(0, \delta(K)/2))$, avec $\delta(E)$ pour E une partie de $\mathbb{R}^n$ le diamètre de E, c'est-à-dire le sup des distances entre deux points de E.

Intuition Cela revient à dire que le plus grand volume possible à diamètre donné est celui d'une boule.

Démonstration

Nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 0.66 ***symétrisé de Steiner***

*Étant donné K un compact de $\mathbb{R}^n$, on appelle **symétrisé de Steiner** de K par rapport à l'hyperplan P l'ensemble*

$$S_P(K) = \{x = p + tu / p \in P \wedge D(p,u) \cap K \neq \emptyset \wedge |t| \leq \frac{1}{2}\mu'(K \cap D(p,u)\}$$

où u désigne un vecteur directeur unitaire de la droite orthogonale à P, et où $D(p,u)$ désigne la droite de vecteur unitaire u passant par p.

μ' désigne la mesure de Lebesgue sur la droite $D(p,u)$.

Intuition *Géométriquement, le symétrisé de Steiner d'un ensemble F par rapport à un hyperplan H se construit comme suit :*

- *soit u un vecteur de norme 1 orthogonal à H*
- *pour chaque droite D orthogonale à H, considérer $F \cap D$;*
- *déterminer t tel que $F \cap D + t.u$ soit centré (au sens du barycentre) sur H ;*
- *le symétrisé $S_H(F)$ est l'union des $F \cap D + t.u$.*

On va montrer que, sous des hypothèses réduites,

- *le symétrisé de F a la même mesure que F ;*
- *le symétrisé de F a un plus petit diamètre que F ;*
- *si l'on applique suffisamment de symétrisations, on transforme F en une boule.*

En combinant ces trois propriétés, on prouvera l'inégalité isodiamétrique.

Lemme 0.148 ***Première propriété fondamentale du symétrisé de Steiner***

Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a même mesure que K.

begindivdemonstrationbegintext endtext Il suffit de considérer le théorème de Fubini, appliqué à la fonction caractéristique de K, pour voir que l'intégrale est l'intégrale sur $p \in P$ de la mesure $\mu'(K \cap D(p,u))$, cette dernière quantité étant la mesure de $\{t \in \mathbb{R} / |t| \leq \frac{1}{2}\mu'(K \cap D(p,u))\} \subset \mathbb{R}$.

Lemme 0.149 **Deuxième propriété fondamentale du symétrisé de Steiner**

Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a un diamètre inférieur ou égal à celui de K.

Démonstration *Il est conseillé de faire un dessin soi-même pour suivre la preuve. On considère deux points x et y de $S_P(K)$, à une distance d l'un de l'autre ; on cherche à montrer qu'il existe deux points x' et y' de K à distance supérieure ou égale à d.*

•On note x_P et y_P les projetés orthogonaux de x et y sur P.

•*On note* l_x *et* l_y *les mesures de* $K \cap D(x,u)$ *et* $K \cap D(y,u)$*.*
•*On note* d' *la distance entre* x_P *et* y_P*.*
•d^2 *est majorée par* $d'^2 + (l_x/2)^2 + (l_y/2)^2$*.*
•*On note* L_x *et* L_y *les* diamètres *de* $S_P(K) \cap D(x,u)$ *et* $S_P(K) \cap D(y,u)$*.*
•*Il est clair que* $L_x \geq l_x$ *et que* $L_y \geq l_y$*. Une étude de cas montre rapidement qu'en considérant les points extrémaux* x_1*,* x_2*,* y_1 *et* y_2 *de* $S_P(K) \cap D(x,u)$ *et* $S_P(K) \cap D(y,u)$ *respectivement, l'une des distances* $d(x_i, y_i)$ *est supérieure ou égale à* $\sqrt{d'^2 + (L_x/2)^2 + (L_y/2)^2}$*, donc à* d*.*

On a encore besoin d'un nouveau lemme :

Lemme 0.150 **Symétrisation d'un compact de $\mathbb{R}^n$**

On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et P_1, ..., P_n les hyperplans orthogonaux aux e_i passant par 0. On se donne K un compact de $\mathbb{R}^n$.
Alors $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \cdots \circ S_{P_n}(K)$ est stable par $x \mapsto -x$.

Démonstration
Il suffit de procéder tranquillement, par récurrence ; $S_{P_n}(K)$ *est clairement invariant par symétrie par rapport à* P_n*,* $S_{P_{n-1}}$ *est clairement invariant par symétrie par rapport à* P_{n-1}*, et par rapport à* P_n *aussi car la symétrisation de Steiner par rapport à un hyperplan* P *ne perturbe pas les symétries par rapport à des hyperplans orthogonaux à* P *(vérification immédiate sur la formule !), et ainsi de suite... L'invariance par rapport aux symétries par rapport aux* n *hyperplans donnent aussi l'invariance par* $x \mapsto -x$*.*

On peut maintenant finir la preuve du théorème, en se donnant un compact K quelconque, en lui associant un compact K' égal à $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \cdots \circ S_{P_n}(K)$, qui, par les lemmes précédents, est invariant par symétrie par rapport à l'origine, et donc est inclus dans la boule $B(0, \delta(K')/2)$. Il ne reste qu'à appliquer les différents lemmes pour conclure...enddivdemonstration

1.6.22 Triangulations d'un simplexe. Lemme de Sperner, conséquences

On s'inspire ici du livre [6].

Définition 0.67 **simplexe**

On appelle **simplexe** de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points formant un repère affine.
On appelle **face d'un simplexe** l'enveloppe convexe d'un nombre fini (quelconque) de ses points. Sa **dimension** est par définition le nombre de points de cette face moins 1. On appelle g**-face** une face de dimension g.

Lemme 0.151

élément P appartenant à un simplexe Δ est décrit de manière unique par ses coordonnées barycentriques dans le repère des sommets de ce simplexe, si l'on impose que la somme des dites coordonnées est 1. Chaque coordonnée est ≥ 0.

Démonstration *Voir la proposition-définition* **??**.

On se donne pour la suite un simplexe Δ de $\mathbb{R}^n$ de sommets x_0, x_1, ... , x_n.

Tout point x de Δ est donc repéré par ses coordonnées barycentriques $c_0(x)$, ... , $c_n(x)$, avec $\sum_{i=0}^n c_i(x) = 1$, et $\sum_{i=0}^n c_i(x).\overrightarrow{xx_i} = \overrightarrow{0}$.

Définition 0.68 **triangulation d'un simplexe Δ**

Soit $\sigma \in \sigma_{n+1}$ une permutation de $[[0, n]]$.
On note Δ_σ l'ensemble des points x de Δ tels que

$$c_{\sigma(0)}(x) \geq c_{\sigma(1)}(x) \geq ... \geq c_{\sigma(n)}(x)$$

Proposition 0.152

- Δ est l'union des Δ_σ.
- Pour tout $\sigma \in \sigma_{n+1}$, Δ_σ est un simplexe.
- Les intérieurs des Δ_σ sont disjoints.

Démonstration

Le premier • est aisé.

Pour le second •, c'est plus difficile, et nous allons donc détailler :

Un point x est dans Δ_I avec I la permutation identité, si ses coordonnées c_0, c_1,...,c_n vérifient

$c_0 \geq c_1 \geq ... \geq c_n$. En écrivant

$$t_0 = c_0$$

$$t_1 = c_1 - c_0$$

$$t_2 = c_2 - c_1 - c_0$$

$$t_i = c_i - c_{i-1} - c_{i-2} - ... - c_0$$

$$t_n = c_n - c_{n-1} - c_{n-2} - ... - c_0$$

on voit que x est dans Δ_I si et seulement si il est dans l'enveloppe convexe des points de coordonnées barycentriques

$$(1,0,0,0,...,0)$$

$$(1,1,0,0,...,0)$$

$$(1,1,1,0,...,0)$$

$$...$$

$$(1,1,1,1,...,1)$$

Nous n'avons pas normalisé pour ne pas alourdir la notation, sinon on obtient

$$(1,0,0,0,...,0)$$

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...,0)$$

$$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,...,0)$$

$$...$$

$$(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n})$$

Donc il s'agit bien d'un simplexe. Il est non vide car les sommets définis ci-dessus forment bien un repère affine et donc l'intérieur est un voisinage de leur isobarycentre.

Il en va de même pour autre chose que l'identité ; Δ_σ est l'enveloppe convexe de n points comportant respectivement un 1 et seulement des 0 ailleurs, deux 1 et seulement des 0 ailleurs, trois 1 et seulement des 0 ailleurs, et ainsi de suite, chaque fois les 1 étant conservés, et un nouveau 1 étant ajouté.

Le troisième • est démontré dans le lemme qui suit.

Définition 0.69

On appelle **triangulation d'un simplexe** Δ un ensemble fini de simplexes Δ_i tels que :

•$\cup_i \Delta_i = \Delta$

•Si $i \neq j$, $Int(\Delta_j) \cap Int(\Delta_i) = \emptyset$

•L'intersection d'une face de Δ_i et d'une face de Δ_j (pour $i = j$ ou $i \neq j$) est soit vide soit une face de Δ_i et une face de Δ_j.

Lemme 0.153

L'ensemble des Δ_σ pour $\sigma \in \sigma_{n+1}$ est une triangulation de Δ.

Démonstration

•Il est bien clair que la réunion des Δ_σ est bien égale à Δ.

•L'intersection des intérieurs de Δ_σ et Δ_τ avec $(\sigma,\tau)\in\sigma_{n+1}^2$ est incluse dans l'intérieur des intersections, et donc incluse dans un hyperplan ; donc elle est vide.

•Regardons ce qu'est une face de simplexe, par exemple le simplexe Δ_I, avec I la permutation identité.

Il s'agit du barycentre d'un nombre fini de sommets, de la forme

$$(1/p, 1/p, ..., 1/p, 1/p, 0, 0, ..., 0, 0).$$

C'est-à-dire d'une somme pondérés de

$$(1, 0, 0, ..., 0)$$
$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}, 0, ..., 0)$$
$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{j}, 0, ..., 0)$$

On constate donc qu'une face est entièrement décrite par des équations du type $c_0(x)r_0c_1(x)r_1c_2(x)r_2...r_{n-1}c_n(x)r_n0$, avec r_i opérateur $=$ ou $\geq$.

Une intersection de faces va encore être du même type, car au plus elle va remplacer des $\geq$ par des $=$. D'où le résultat.

Lemme 0.154

Dans la triangulation de Δ en les Δ_σ où σ appartient à σ_{n+1}, les Δ_σ ont un diamètre inférieur à $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre de Δ.

Démonstration

•le centre de gravité x (ou isobarycentre) de Δ appartient à tout simplexe Δ_σ (car tous les $c_i(x)$ sont égaux, égaux à $\frac{1}{n+1}$).

•la distance de x à un point de Δ est inférieur ou égale aux distances aux sommets de Δ, donc la distance d'un point de Δ_σ à x est toujours inférieure ou égale à $\frac{n}{n+1}$ fois la longueur d'une médiane de $\mathbb{D}$.

•le diamètre de Δ_σ, qui est la longueur maximale d'un de ses côtés, est donc majoré par la longueur maximale des côtés sur la face opposée à x, ou par la longueur maximale des arêtes débouchant sur x... Dans tous les cas, cette longueur est majorée par celle d'une médiane de Δ ou d'une face du simplexe (une face de dimension quelconque, éventuellement une arête, donc par $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre de Δ).

Lemme 0.155

Pour tout ϵ on peut obtenir des triangulations de Δ en simplexes de diamètre inférieurs à ϵ.

On donnera ici une preuve rapide, peu détaillée.

Démonstration

On va utiliser par récurrence le lemme précédent. Les deux premiers • de la définition d'une triangulation sont aisés à obtenir, le problème est de montrer qu'une partition de chaque élément d'une partition donne encore une partition vérifiant le troisième point, c'est-à-dire le fait que l'intersection de deux faces de deux éléments distincts de la partition est soit vide soit égale à une face de chacun des deux éléments. Intuitivement, le problème est de voir que les faces se « recollent » bien.

Pour cela il suffit de voir que la triangulation faite selon le lemme précédent induit une triangulation de chacune des faces du dit simplexe - triangulation égale à celle qu'aurait donné le même lemme sur cette face. Cela se voit en constatant qu'une face est une partie du simplexe où l'on annule une des composantes.

DÉFINITION 0.70 **Numérotation standard d'un simplexe**

Étant donnée une triangulation Δ_i d'un simplexe Δ, on note S l'ensemble des sommets des éléments de cette triangulation. On appelle **numérotation standard** d'une triangulation d'un simplexe de sommets $x_0, ..., x_n$ une application f de S dans $[[0, n]]$ telle que $f(x_i) = i$ et si pour tout s dans S $f(s) = i$ pour un certain i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x.

⚠ *Attention 0.81* La caractérisation « pour tout s dans S $f(s) = i$ pour un certain x_i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x » inclue la condition $f(x_i) = i$, car une face peut très bien avoir une dimension 0.

On constate donc que dans une triangulation comme celles que l'on a construites plus haut, l'isobarycentre est autorisé à prendre n'importe quelle valeur puisque la seule face qui le contienne est Δ lui-même.

PROPOSITION 0.156

Une numérotation standard f d'une triangulation du simplexe Δ enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_n)$ induit une numérotation standard de la triangulation induite sur le simplexe Δ' enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_{n-1})$.

Démonstration

- *Il est clair que tout sommet de la triangulation de Δ' a bien un numéro $< n$.*
- *Soit x sommet de la triangulation de Δ' appartenant à une face F minimale de Δ.*
- *F est forcément incluse dans Δ'.*
- *F est donc la même face que la face minimale contenant x dans Δ'.*
- *Donc la numérotation induite est bien standard.*

LEMME 0.157 **Lemme de Sperner**

Toute triangulation d'un simplexe de dimension n munie d'une numérotation standard possède un élément numéroté $(0, ..., n)$, c'est-à-dire de sommets numérotés $0, 1, 2, \ldots, n$ (pour chaque $i \in [[0, n]]$, un des sommets de cet éléments est numéroté i, et un seulement).

On ne donnera pas ici la preuve (difficile).

THÉORÈME 0.158 **Théorème de Brouwer**

Soit f une application continue de Δ dans Δ. Alors f admet au moins un point fixe.

Démonstration

•*On suppose pour arriver à une contradiction que f n'a pas de point fixe. On note $c_i(x)$ les coefficients de x en coordonnées barycentriques comme précédemment.*

•*Soit Δ_i, pour $i \in [[0,n]]$, l'ensemble des $x \in \Delta$ tels que $c_i(x) > c_i(f(x))$ (intuitivement f « éloigne » x du sommet i - attention, pas au sens de la distance, mais au sens du poids barycentrique du sommet i ; les points les plus « loin » étant les points de la face opposée, le point le plus proche étant le sommet lui-même).*

•$\Delta = \cup_i \Delta_i$. *En effet, soit $x \in \Delta$.*

– *Supposons $c_i(x) \leq c_i(f(x))$ pour tout i.*

– $\sum c_i(x) = \sum c_i(f(x)) = 1$

– *donc $c_i(x) = c_i(f(x))$ pour tout i*

– *alors on a f admettant un point fixe en x.*

– *c'est une contradiction, donc il existe i tel que $c_i(x) > c_i(f(x))$.*

•*x_i appartient à Δ_i (immédiat : f ne peut qu'« éloigner » un point de lui-même, puisque f n'a pas de point fixe)*

•*x_i n'appartient pas à Δ_j si $j \neq i$ (non moins immédiat : x est déjà « loin » autant que possible de x_j, puisqu'il appartient à la face opposée)*

•*Si x appartient à la face de Δ engendrée par les x_i pour $i \in I$ pour un certain sous-ensemble I de $[0,n]$, alors x n'appartient pas aux Δ_i si $i \notin I$ (toujours immédiat : si x appartient à la face engendrée par les x_i pour $i \in I$, il appartient à la face opposée à x_j pour tout $j \notin I$, et ne peut donc en être éloigné).*

•*Soit T une triangulation de Δ, ayant pour ensemble de sommets l'ensemble S. Soit g l'application qui à $s \in S$ associe $g(s)$ avec $s \in \Delta_{g(s)}$; on cherche à montrer qu'il s'agit bien d'une numérotation standard. Pour cela,*

— *g est bien définie (sans unicité), puisque l'on a montré que les Δ_i recouvraient Δ.*

— *le fait que $g(x_i) = i$ a déjà été prouvé ($x_i \in \Delta_i$, $x_i \notin \Delta_j$ quand $j \neq i$).*

— *soit $s \in S$, et F une face minimale de Δ contenant s. Il faut montrer que $g(s)$ est le numéro d'un sommet de F.*

— *si $F = \Delta$, le résultat est clair.*

— *si s appartient à une face stricte de Δ, alors s n'appartient pas aux Δ_j pour j ne désignant pas un numéro de sommet de F (prouvé un peu plus haut) ; donc $g(s)$ est forcément le numéro d'un sommet de F.*

•*g est donc bien une numérotation standard.*

•*On a montré qu'on pouvait construire des triangulations aussi fines que l'on voulait, au sens où chaque simplexe de la triangulation pouvait être imposé de diamètre inférieur à $1/n$. On se donne T_n une telle triangulation, avec g_n la numérotation correspondante, donnée par les questions précédentes.*

•*D'après le lemme de Sperner, il existe un élément de la triangulation T qui a la propriété P évoquée plus tôt, c'est-à-dire qu'il comporte un sommet numéroté i pour tout i dans $[[0,n]]$.*

•*On peut considérer alors la suite de sommets numérotés 0 dans des simplexes ayant la propriété P de la triangulation T_n.*

•*Puisque l'on est dans un compact métrique, on peut en extraire une sous-suite convergente, par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 0.78). Soit x la limite.*

•*x est aussi la limite des suites de sommets numérotés i dans des simplexes ayant la propriété P, pour $i \in [1,n]$, car le diamètre des simplexes tend vers 0.*

•*Par continuité de f, $c_i(f(x)) \geq c_i(x)$ pour tout i.*

•*Or $\sum_i c_i(x) = \sum_i c_i(f(x)) = 1$, donc $c_i(f(x)) = c_i(x)$ pour tout i.*

•*On en déduit alors que $x = f(x)$. D'où la contradiction, et ainsi le résultat.*

Corollaire 0.159 **Brouwer**

Toute application continue d'une boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même comporte un point fixe.

Démonstration

Il suffit (i) de montrer que la boule unité fermée est homéomorphe à un simplexe (cela est fait dans la proposition 0.125) et (ii) d'appliquer le théorème précédent.

Via des homéomorphismes pertinents, on montre que le théorème de Brouwer se généralise à tout compact convexe au lieu de la boule unité fermée.

Exemple 0.82 Exemples d'applications :

— quand votre café circule dans votre tasse, au moins un point du café ne bouge pas (considérez l'application f_ϵ qui à x associe sa position ϵ-secondes plus tard).

— toute boule de billard poilue « bien peignée » (continument...) a un épi (un cheveux vertical).

Le théorème de Brouwer est apparenté au théorème de la boule chevelue, dit aussi lemme de Milnor, selon lequel pour toute sphère S de dimension paire (donc dans $\mathbb{R}^d$ avec d impair), il n'existe aucune application continue ϕ de S dans S telle que $\phi(x)$ est orthogonale à x. Le théorème de Brouwer permet de montrer de théorème de Schauder ([7]) : soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, et soit $X \subset E$ non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée. Si T est une application continue de X dans X, si $T(X)$ est relativement compact, alors T admet un point fixe. De manière amusante, ce théorème permet de montrer l'existence de solutions à certaines équations différentielles.

Des preuves alternatives du théorème de Brouwer reposent sur le lemme de non-rétraction, stipulant qu'il n'existe pas d'application C^1 de la boule vers sa frontière (en dimension ≥ 1) égale à l'identité sur la frontière. Le corollaire 0.159 a aussi une application élégante quant aux champs rentrants dans la sphère :

Corollaire 0.160 **Champ rentrant dans la sphère**

Soit V un champ de vecteur continu de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Si pour tout x, $\tilde{V}(x) =< V(x), x >$ est négatif strictement [16], alors V s'annule au moins en un point de la boule unité.

Démonstration

•On note S la sphère unité fermée, et C_r la couronne constituée par la boule unité fermée privée de la boule ouverte de rayon $1 - r$.

•On considère pour tout ϵ l'application f_ϵ de $\overline{B}$ (la boule unité fermée) dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe $x + \epsilon.V(x)$.

•f_ϵ est continue.

•$\tilde{V}$ étant continue sur le compact $\overline{B}$, on peut lui trouver un maximum $\|\tilde{V}\|$ (corollaire 0.63). Notons M ce maximum.

•V étant continue sur un compact S, elle y atteint son maximum, qui est négatif. Notons m ce maximum ; on a $m < 0$ et

$$\forall x \in S, \tilde{V}(x) =< V(x), x > \leq m < 0$$

•En tout point x de S, on peut centrer une boule ouverte de rayon r_x sur laquelle $t \mapsto < t, V(t) >$ est inférieur à $m/2$. La sphère S est recouverte par les boules centrées en x de rayon $r_x/2$; on peut donc extraire de ce recouvrement un recouvrement fini. Les boules de rayon r_x recouvrent elle aussi S,

et elles recouvrent aussi une couronne C_r pour un r assez petit. On obtient ainsi l'équation suivante comme amélioration de l'équation 154 :

$$\forall x \in C_r, \tilde{V}(x) =< V(x), x >\leq m/2 < 0$$

•*Pour $x \in C_r$, on a donc*

— $< x, V(x) >$ *inférieur à* $m/2$ *(équation 154) ;*

— $\|f_\epsilon(x)\|^2 = \|x\|^2 + \epsilon^2\|V(x)\|^2 + 2\epsilon < V(x), x >$;

— $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + 2\epsilon < V(x), x >$

— *On a alors* $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + \epsilon.m$

— *Pour ϵ suffisamment petit, on a donc* $\|f_\epsilon(x)\|^2 < \|x\|^2$

— *Pour ϵ suffisamment petit, on a aussi* $\|f(x)\| \leq 1$ *(puisque V est borné).*

•*On déduit de tout cela que f_ϵ, pour ϵ assez petit, est une application de la boule unité fermée dans la boule unité fermée. f_ϵ est par ailleurs continue. Par le résultat 0.159, on en déduit donc que f_ϵ admet un point fixe, et que donc V s'annule quelque part.*

Références

[1] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[3] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, Masson, 1996.

[4] S. Lang, *Real analysis*, Addison-Wesley Publishing company, 1969.

[5] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

[6] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, Masson, 1997.

[7] Wikipédia, *L'encyclopédie Libre, Wikipédia*, Wikipédia Fondation.