Entropie

I

1.a On sait que ℓ' est décroissante. Selon l'inégalité des accroissements finis :

- si $x>y$ alors $\ell(x)-\ell(y) \leq (x-y)\sup_{[y,x]} \ell'(t) = (x-y)\,\ell'(y)$
- si $x<y$ alors $\ell(y)-\ell(x) \geq (y-x)\inf_{[x,y]} \ell'(t) = (y-x)\,\ell'(y)$.

1.b $\forall n, \quad \ell(q_n) \leq \ell(y) + \ell'(y)(q_n - y)$

- on multiplie par p_n (≥ 0 donc l'inégalité est conservée)
- on somme sur n (possible car toutes les séries sont supposées cv)

Il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln(q_n) \leq \ell(y)\sum_0^{\infty} p_n + \ell'(y)\left(\sum_0^{\infty} p_n q_n - \sum_0^{\infty} p_n y\right)$

Comme $\sum_0^{\infty} p_n = 1$, on obtient l'inégalité voulue.

1.c Soit $y = \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_n$.

Comme $\forall n$, $q_n \in I$ et $\sum_0^{\infty} p_n = 1$ on a aussi $y \in I$.

on peut donc substituer y dans **1.b**, ce qui donne le résultat voulu.

2

a) La fonction $x \longmapsto -\ln x$ est concave sur $]0,+\infty[$

Commençons par sommer sur la sous famille des $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in I}$ pour $I = \{n, q_n \neq 0\}$

Il vient d'après 1.c $\displaystyle\sum_{n\in I} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \leq \ln\left(\sum_{n\in I} p_n\right)$

Mais $\displaystyle\ln\left(\sum_{n\in I} p_n\right) \leq \ln\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} p_n\right) = \ln(1) = 0$ par croissance du logarithme.

et avec la convention $q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = 0 \;\; \forall n \notin I$. Ceci donne bien le résultat voulu. $\square$

2_b.

(i) Il suffit que remarquer que $\sum\limits_{q_n \neq 0} q_n \left(1 - \frac{p_n}{q_n}\right) = \sum\limits_{1}^{\infty} q_n - \sum\limits_{1}^{\infty} p_n = 0$

(ii) Si la suite q_n n'a aucun terme nul alors on sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + 1 - \frac{p_n}{q_n} \right] = 0$$

Mais par ailleurs, $\forall x > 0 \ \ln(x) \leq x - 1$ donc $\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + 1 - \frac{p_n}{q_n} \leq 0$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n}{q_n} - 1$

L'égalité $\ln(x) = x - 1$ n'a lieu que pour $x = 1$ donc $\forall n \ \frac{p_n}{q_n} = 1$.

Si la suite q_n s'annule :

Soit $I = \{n, \ q_n \neq 0\}$ alors on a comme au (i)

$$\sum_{n \in I} q_n \left(1 - \frac{p_n}{q_n}\right) = \sum_{n \in I} q_n - \sum_{n \in I} p_n = 1 - \sum_{n \in I} p_n > 0 \quad \text{(car tous les } p_n \text{ sont} > 0)$$

Ceci prouve que $$\sum_{n \in I} q_n \left(\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + 1 - \frac{p_n}{q_n} \right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}_{=0} + \sum_{n \in I} q_n \left(1 - \frac{p_n}{q_n}\right)$$

est strictement positive

c'est impossible par l'inégalité de concavité du logarithme.

II

1 a : si $p_n \geq e^{-n}$ alors $p_n|\ln p_n| \leq p_n|\ln e^{-n}| = n p_n$.

Si $p_n \leq e^{-n}$ alors comme $x \mapsto x|\ln x|$ est croissante sur $[0, e^{-1}]$

on a $|p_n \ln p_n| \leq e^{-n}|\ln e^{-n}| = n e^{-n}$.

1.b : Par hypothèse, X possède une espérance, donc $\sum_{n\geq 1} n p_n$ converge.

comme bien sûr $\sum_{n\geq 0} n e^{-n}$ converge, la majoration

$|p_n \ln(p_n)| \leq n e^{-n} + n p_n$ assure la cv absolue de $\sum p_n \ln(p_n)$.

1.c : Non : si l'on prend $p_n = \frac{c}{n^2}$ (avec $c = \frac{6}{\pi^2}$ pour avoir $\sum_1^{\infty} p_n = 1$)

alors $\sum n p_n$ diverge, mais $p_n \ln(p_n) \sim \frac{2c \ln(n)}{n^2}$

donc $\sum p_n \ln p_n$ cv

1.d . Clairement $H(X) \geq 0$ car tous les logarithmes sont négatifs ou nuls.

. si X est une variable aléatoire p.s constante, alors $H(X) = 0$

Le minimum est donc zéro.

2 Suivons l'indication et considérons une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Alors en posant $\begin{cases} p_n = \mathbb{P}(Y=n) = \frac{1}{N} \\ q_n = \mathbb{P}(X=n) \end{cases}$

il vient par 1(a) que

$$H(X) = \sum_{n=1}^{N} q_n \ln\left(\frac{1}{q_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \sum_{n=1}^{N} q_n \ln(p_n)$$

$$\leq 0 - \sum_{n=1}^{N} q_n \ln\left(\frac{1}{N}\right) = \ln(N)$$

3 Ici $p_n = p(1-p)^{n-1} = \mathbb{P}(X=n)$.

X possède une espérance, donc une entropie.

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln(p_n) = -p \sum_1^{\infty} [\ln p + (n-1)\ln(1-p)](1-p)^{n-1}$$

$$= -p\ln p \underbrace{\sum_1^{\infty}(1-p)^{n-1}}_{=\frac{1}{p}} - p\ln(1-p) \underbrace{\sum_1^{\infty}(n-1)(1-p)^{n-1}}_{\frac{1-p}{p^2}}$$

$$\boxed{H(X) = -\frac{[p\ln p + (1-p)\ln(1-p)]}{p}}$$

Cette fonction de p n'est pas majorée sur $]0,1[$ (tend vers l'infini qd $p \to 0$)

4.a Y possède une espérance de plus $\mathbb{E}(Y) \geq 1$ car $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On choisit donc $p = \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$

b $H(Y) - H(X) = -\sum_1^{\infty} q_n \ln q_n + \sum_1^{\infty} p_n \ln(p_n)$ $\quad (p_n = p(1-p)^{n-1})$

$$= +\sum_1^{\infty} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \sum_1^{\infty} \ln(p_n)[q_n - p_n]$$

Mais $\ln(p_n) = \ln p + (n-1)\ln(1-p)$

Donc $\sum_1^{\infty} \ln(p_n)[q_n - p_n] = [\ln p - \ln(1-p)]\overbrace{\left(\sum_1^{\infty} q_n - \sum_1^{\infty} p_n\right)}^{=0}$

$$+ \ln(1-p)\underbrace{\left(\sum_1^{\infty} nq_n - \sum_1^{\infty} np_n\right)}_{=E(X)-E(Y)=0}$$

$$= 0$$

Par conséquent

$$H(Y) - H(X) = +\sum_1^{\infty} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \leq 0 \quad (\text{I } 2.a)$$

Ainsi, parmi les VAD entières d'espérance donnée, celles dont la loi est géométrique ont une entropie maximale.

III.

1.a Z_n et Z sont des fonctions de variables aléatoires, donc des variables aléatoires

1.b Posons $A_n = [|X| > n]$

Alors la suite $(A_n)_n$ est décroissante et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$

Par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\forall \alpha > 0, \exists n \quad \mathbb{P}(A_n) < \alpha$ $\square$

1.c $|Z_n - Z| \geq \varepsilon \Leftrightarrow |e^{X_n} - e^X| > \varepsilon$

Mais $|e^t - e^u| = e^u |e^{t-u} - 1| \leq e^u (e^{|t-u|} - 1)$

Par suite

$|Z_n - Z| \geq \varepsilon \Rightarrow e^X (e^{|X_n - X|} - 1) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow |X| > s$ ou $(e^{|X_n - X|} - 1) \geq \varepsilon e^{-s}$

on a donc prouvé que l'événement

$E = [|Z_n - Z| \geq \varepsilon]$ est inclus dans la réunion des événements

$A = [|X| > s]$ et $B = [|X_n - X| \geq \ln(1 + \varepsilon e^{-s})]$

on a donc $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

c'est l'inégalité voulue.

d : Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$

On commence par choisir s tel que $\mathbb{P}(|X| > s) \leq \frac{\alpha}{2}$

Ensuite, puisque $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \ln[1 + \varepsilon e^{-s}]) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

on choisit N_0, tel que $n > N_0 \Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \ln(1 + \varepsilon e^{-s})) \leq \frac{\alpha}{2}$

on a alors

$\forall n \geq N_0 \quad \mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \leq \alpha$. $\square$

2 : Il suffit de remarquer que par la loi faible des grands nombres

si l'on pose $X_n = \dfrac{\ln(T_1) + \cdots + \ln(T_n)}{n}$

et $X = \mathbb{E}(\ln T_1)$ [VA constante]

alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Alors $P_n = e^{X_n}$ converge en probabilité vers $Z = e^{\mathbb{E}(\ln T_1)}$

IV

1 Nous sommes dans les hypothèses de la partie précédente

ici $T_1 = M_1$

2 a $\mathbb{E}(\ln T_1) = \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(f_k c_k)$.

b

Il faut maximiser $\mathbb{E}(\ln T_1)$

Pour cela on l'écrit

$$\mathbb{E}(\ln T_1) = \sum_{1}^{n} p_k \ln\left(\frac{f_k}{p_k}\right) + \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k c_k)$$

Le second terme est une constante

Le premier est toujours négatif avec égalité ssi $p_k = f_k \ \forall k$ d'après I.2

$\boxed{\text{La stratégie optimale consiste donc à choisir } p_k = f_k \ \forall k}$

c. $\sum_{1}^{n} p_k \ln p_k c_k = -\sum_{1}^{n} p_k \ln\left(\frac{\frac{1}{c_k}}{p_k}\right) \geq 0$ d'après le I appliqué à $q_k = \frac{1}{c_k}$

(on a bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = 1$)

cette somme est nulle ssi $p_k = \frac{1}{c_k} \ \forall k$: Dans ce cas, il n'y a pas de stratégie amenant un rendement strictement positif.