Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

1) Soit M un idéal à droite

Soit $f \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda f = f \circ (\lambda \mathrm{Id}) \in M$ d'après la définition de M.

- Comme ~~M~~ est aussi un groupe additif, on en déduit que M est stable par combinaisons linéaires
- Le cas d'un idéal à gauche est analogue.

2) - Δf est l'image de l'applicat° linéaire $g \mapsto f \circ g$ c'est donc un espace vectoriel, donc un groupe additif.

- Soit $g \in \Delta f$, $h \in \mathcal{L}(E)$. Il existe g_1 / $g = f \circ g_1$. Alors $g \circ h = f \circ (g_1 \circ h) \in \Delta f$.

Donc Δf est un idéal. On fait pareil pour Γ_f.

3) $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im} f \subset F \\ \mathrm{Im} g \subset F \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g \subset F$

$\mathrm{Im} f \subset F \Rightarrow \forall h \in \mathcal{L}(E)\quad \mathrm{Im}\, f \circ h \subset \mathrm{Im} f \subset F$

$\Big\}$ J_F idéal à droite.

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker} f \supset G \\ \mathrm{Ker} g \supset G \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f+g) \supset \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g \supset G.$

$\mathrm{Ker} f \supset G \Rightarrow \forall h \in \mathcal{L}(E)\quad \mathrm{Ker}(h \circ f) \supset \mathrm{Ker} f \supset G$

$\Big\}$ K_G idéal à gauche.

4) Considérons un supplémentaire F' de F alors, dans une base adaptée à cette somme directe $E = F \oplus F'$ on a, en notant $r = \dim F$:

$$f \in J_F \iff \mathcal{M}_B(f) = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{M_1}^{r} & \Big| & \overbrace{0}^{n-r} \end{pmatrix}\right\} n$$ de sorte que J_F est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$

Donc $\boxed{\dim J_F = n \times \dim F}$

de même : $f \in K_F \iff \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{r} & \Big| & \overbrace{M_2}^{n-r} \end{pmatrix}$ et $\boxed{\dim K_F = n(n - \dim F)}$

5) $\Phi(g) = 0 \iff f\circ g = \vec{0} \iff \mathrm{Im}\, g \subset \ker f \iff g \in J_{\ker f}$.

Donc $\dim\ker\Phi = \dim J_{\ker f} = n(\ \dim\ker f)$.

Le théorème du rang pour que $\dim\mathrm{Im}\,\Phi = n^2 - \dim\ker\Phi = n(\ \mathrm{rg} f)$

Mais $\mathrm{Im}\,\Phi = \Delta f$ Donc $\underline{\dim\Delta f = n(\ \mathrm{rg} f)}$

Or clairement $\forall u \in \Delta f$, on a $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im} f$ donc $\Delta f \subset J_{\mathrm{Im} f}$.

et comme $\dim J_{\mathrm{Im} f} = n\, \mathrm{rg} f$ on a égalité des dimensions.

Finalement $\boxed{\Delta f = J_{\mathrm{Im} f}}$

6) On considère de la même façon l'endomorphisme

$$\Psi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$$
$$g \longmapsto g\circ f$$

Alors $\ker\Psi = \{ g \ / \ \ker g \supset \mathrm{Im} f \} = K_{\mathrm{Im} f}$. et $\mathrm{Im}\,\Psi = \Gamma_f$.

donc $\dim\Gamma_f = n^2 - \dim K_{\mathrm{Im} f} = n^2 - n(n - \mathrm{rg} f) = n\, \mathrm{rg} f$

or $\dim K_{\ker f} = n\, \mathrm{rg} f$ et on a clairement $\Gamma_f \subset K_{\ker f}$ Donc il y a égalité

7) c'est clair car il existe f tel que $\mathrm{Im} f = F$ et il existe h tel que $\ker h = F$

(prendre des projecteurs par exemple)

8) a) comme $\mathrm{Im} f \subset F$ et $\mathrm{Im} f \subset G$ $\iff \mathrm{Im} f \subset F\cap G$ on a tout de suite $J_F \cap J_G = J_{F\cap G}$

De même $F \subset \ker f$, $G \subset \ker f$ $\iff F+G \subset \ker f$ Donc $K_F \cap K_G = K_{F+G}$.

b) $\mathrm{Im} f \subset F$, $\mathrm{Im}\, g \subset G$ $\Rightarrow \mathrm{Im}(f+g) \subset F+G$ donc $J_F + J_G \subset J_{F+G}$.

Par ailleurs :

$$\dim J_{F+G} = m \times \dim(F+G)$$
$$= m\dim F + m\dim G - m\dim(F\cap G)$$
$$= \dim J_F + \dim J_G - \dim J_{F\cap G}$$
$$= \dim J_F + \dim J_G - \dim(J_F \cap J_G) \text{ d'après le a)}$$
$$= \dim(J_F + J_G)$$

Donc $J_{F+G} = J_F + J_G$.

$f \in K_F \Rightarrow \forall x \in F \; f(x)=0$ donc $\forall x \in F\cap G \; f(x)+g(x)=0$, $f+g \in K_{F\cap G}$
$g \in K_G \Rightarrow \forall x \in G \; g(x)=0$

Donc $K_F + K_G \subset K_{F\cap G}$ et l'inclusion réciproque se fait, comme précédemment, en regardant les dimensions.

9)

a) l'ensemble $\{rg f,\ f\in M\}$ est non vide majoré et constitué d'entiers.
Il a donc un plus grand élément.
Si $f\in M$ alors $\forall g\in \mathcal{L}(E)$ $f\circ g\in M$ donc $\Delta_f \subset M$.

b) Supposons que $\operatorname{Im} h \not\subset \operatorname{Im} f$ alors $\Delta_f + \Delta_h = J_{\operatorname{Im} f} + J_{\operatorname{Im} h} = J_{\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} h} \subset M$

or Nous savons que $\exists\, g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $J_{\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} h} = \Delta_g$ (Question 7)

et qu'alors $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} h$.

Un tel g vérifie $\begin{cases} g\in M \\ rg\, g > rg\, f \end{cases}$. C'est impossible.

Donc $\forall h\in M$ $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$.

c) On a prouvé que $M \subset J_{\operatorname{Im} f}$. Or on avait l'inclusion réciproque donc $M = J_{\operatorname{Im} f}$.

L'unicité du sous espace F est claire à cause de $J_F \cap J_G = J_{F\cap G}$.

10) En reprenant le même argument, il vient :

soit f de rang maximal élément de M alors $\Gamma f \subset M$

si $\underset{\in M}{\exists h}$ tel que $\ker h \not\supset \ker f$ alors

$$\Gamma f + \Gamma h = K_{\ker f} + K_{\ker h} = K_{\ker f \cap \ker h} \subset M$$

et $\exists g \,/\, \Gamma g = K_{\ker f \cap \ker h}$ donc $\ker g = \ker f \cap \ker h$.

Un tel g est dans M et $rg(g) > rg(f)$.

On a donc $M = \Gamma f = K_{\ker f}$ et l'unicité de $\ker f$ vient du 8)

11) a) $$J_F \cap K_G = \{f,\ \ker f \supset G,\ \operatorname{Im} f \subset F\}$$

Soit $B_1 = B_G \sqcup B_{G'}$ $(G \oplus G' = E)$

$B_2 = B_F \sqcup B_{F'}$ $(F \oplus F' = E)$

Alors $f \in J_F \cap K_G \iff \mathcal{M}_{B_1,B_2}(f) = \begin{array}{cc} \overbrace{}^{B_G} & \overbrace{}^{B_G'} \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, B_F \\ \}\, B_F' \end{array}$

Donc par le même argument qu'au 1)

$$\dim J_F \cap K_G = (n - \dim G) \dim F.$$

b) Si J_F est un idéal bilatère alors on a simultanément :

$J_F = K_G = J_F \cap K_G$ donc $(n - \dim G)\dim F = n \times \dim F = n(n - \dim G)$.

Ce qui donne : $\dim G = 0$ ou $\dim F = 0$

si $G = \{0\}$ alors $K_G = E$ si $F = 0$ alors $J_F = \{0\}$.