# Matrices stochastiques

## 1) Définition des matrices stochastiques.

Une matrice stochastique est une matrice carrée réelle $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Une conséquence de la définition ci-dessus est que tous les coefficients d'une telle matrice sont des réels de $[0,1]$ car pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$a_{i,j} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Le mot stochastique vient du mot grec $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa o\zeta$ (stokhastikos) qui signifie « conjectural ».

## 2) Exemples de matrices stochastiques

• Un objet a $n$ états possibles $1, 2, \ldots, n$ et passe aléatoirement d'un état à un autre. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $p_{i,j}$ la probabilité de passer de l'état $i$ à l'état $j$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j} \geqslant 0$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$ et donc la matrice $A = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice stochastique. Ainsi, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ est une matrice stochastique.

• La matrice $I_n$ est une matrice stochastiques et plus généralement toute matrice de permutation (c'est-à-dire toute matrice possédant exactement un $1$ dans chaque ligne et chaque colonne et des $0$ ailleurs) est une matrice stochastique.

## 3) Convexité de l'ensemble des matrices stochastiques

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices stochastiques. Soit $\lambda \in [0,1]$. Vérifions que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B = ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice stochastique.

• Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\lambda \geqslant 0$, $1-\lambda \geqslant 0$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $b_{i,j} \geqslant 0$ et donc $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$.

• Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\sum_{i=1}^{n} ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

On a montré que pour toutes matrices stochastiques $A$ et $B$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ est une matrice stochastique. Donc,

L'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**Remarques.**

• On peut montrer explicitement que $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \leqslant 1$ (ce qui est inutile) : $a_{i,j} \leqslant 1$ et $1-\lambda \geqslant 0$ et donc $(1-\lambda)a_{i,j} \leqslant 1-\lambda$. De même, $\lambda b_{i,j} \leqslant \lambda$ et donc $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \leqslant 1 - \lambda + \lambda = 1$.

• L'ensemble des matrices stochastiques n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car par exemple, la matrice nulle n'est pas stochastique ou aussi, la matrice $I_n$ est stochastique mais la matrice $-I_n$ ne l'est pas.

## 4) Produit de deux matrices stochastiques

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices stochastiques. Soit $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$.

• Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{i,k}\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Donc,

Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

En particulier, les puissances successives d'une matrice stochastique sont des matrices stochastiques. On note que l'inverse d'une matrice stochastique inversible n'est pas nécessairement une matrice stochastique. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique.

**5) Valeurs propres d'une matrice stochastique**

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $AU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = U$. Puisque $U$ n'est pas nul, $1$ est valeur propre de $A$ et $U$ est un vecteur propre associé.

1 est toujours valeur propre d'une matrice stochastique.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice stochastique. Soient $\lambda$ une valeur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$ et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ un vecteur propre associé. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $\|X\|_\infty = |x_{i_0})\,|$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, puisque $AX = \lambda X$,

$$\begin{aligned} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,|x_j| \\ \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)\|X\|_\infty = \|X\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda|\,|x_i| \leqslant \|X\|_\infty$. En particulier, quand $i = i_0$, $|\lambda|\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$. Enfin, $X$ est un vecteur propre de $A$ et donc $X$ n'est pas nul ou encore $\|X\|_\infty > 0$. Après simplification par le réel strictement positif $\|X\|_\infty$, on obtient $|\lambda| \leqslant 1$. On a montré que

Les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ d'une matrice stochastique ont un module inférieur ou égal à 1.

Améliorons le résultat. $\lambda$ désigne toujours une valeur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$. On va montrer qu'il existe un réel $\omega$ de $[0,1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$. On reprend les notations précédentes. L'égalité $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j$ s'écrit encore

$$(\lambda - a_{i_0,i_0})\,x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I_0}}^{n} a_{i_0,j}x_j$$

puis

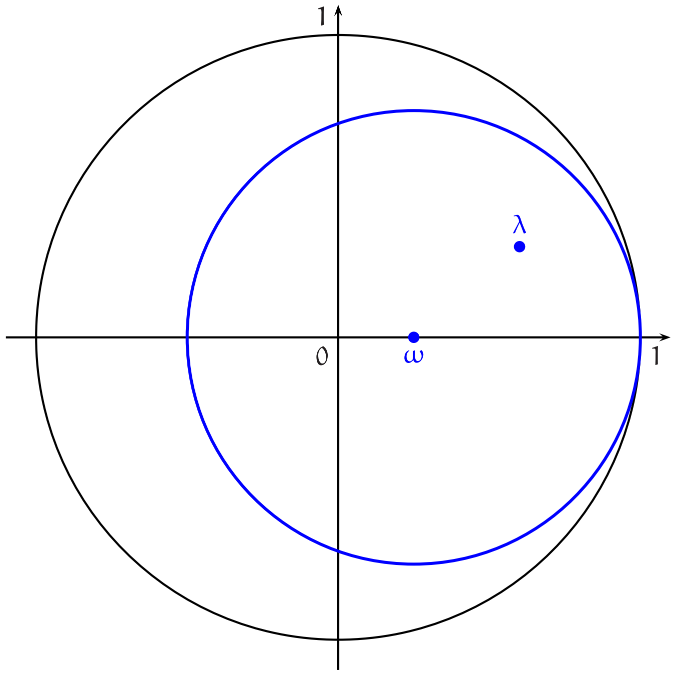
$$|\lambda - a_{i_0,i_0}|\,\|X\|_\infty = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I_0}}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I_0}}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| \leqslant \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I_0}}^{n} a_{i_0,j}\right)\|X\|_\infty = (1 - a_{i_0,i_0})\,\|X\|_\infty.$$

Puisque $\|X\|_\infty > 0$, on obtient après simplification $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$. Puisque $a_{i_0,a_0} \in [0,1]$, on a montré que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),\ \exists \omega \in [0,1]/\ |\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega.$$

Interprétons géométriquement le résultat précédent. L'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $|z-\omega| \leqslant r$ est le disque fermé de centre $\omega$ et de rayon $r$. Ici, $r = 1 - \omega$ est la distance de $\omega$ à $1$ et donc, l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $|z-\omega| \leqslant 1-\omega$ est le disque fermé de centre $\omega$ dont la frontière passe par $1$.




Supposons de plus que tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Donc, $\omega \in ]0,1]$. Vérifions que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module $1$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ de module $1$. On peut donc poser $\lambda = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned}
|\lambda-\omega| \leqslant 1-\omega &\Leftrightarrow \left|e^{i\theta}-\omega\right|^2 \leqslant (1-\omega)^2 \Leftrightarrow \left(e^{i\theta}-\omega\right)\left(e^{-i\theta}-\omega\right) \leqslant (1-\omega)^2 \\
&\Leftrightarrow 1-2\omega\cos(\theta)+\omega^2 \leqslant 1-2\omega+\omega^2 \Leftrightarrow 2(1-\cos(\theta))\omega \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 1-\cos(\theta) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, si tous les coefficients diagonaux de la matrice stochastique $A$ sont strictement positifs, les valeurs propres de $A$ distinctes de $1$ sont de module strictement inférieur à $1$. Ceci a pour conséquence que pour une valeur propre $\lambda$ de $A$ distincte de $1$, la suite $\left(\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$. Ce dernier résultat intervient bien sûr dans l'étude de la convergence de la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.