2 | Norme sur un espace vectoriel

« Les mathématiques sont la poésie des sciences. »
Léopold Sédar Senghor (1906 – 2001)

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I | Détour par les bornes supérieures

A désignera par la suite une partie de $\mathbb{R}$. On rappelle que l'on appelle borne supérieure de A, lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A. Cette bornée supérieure est alors notée $\sup(A)$.

Théorème 2.1 : Propriété de la borne supérieure

Toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Supposons l'existence de $\sup(A)$. Par définition même de $\sup(A)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad \sup(A) - \varepsilon < x \leqslant \sup(A)$$

puisque $\sup(A) - \varepsilon$ ne majore pas A. Cette considération est extrêmement utile. On peut ainsi construire en prenant $\varepsilon = 1/(n+1)$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$. En effet, les termes d'une telle suite vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup(A) - \frac{1}{n+1} < x_n \leqslant \sup(A)$$

Pour justifier qu'un réel M est égal à $\sup(A)$, on procédera souvent en deux étapes :

- on montre que pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$. Ceci prouve que M majore A, autrement dit que $\sup(A) \leqslant M$.
- on montre que pour tout $s < M$, il existe $x \in A$ tel que $s \leqslant x$. Il n'y a donc pas de majorant inférieur à M : $M \leqslant \sup(A)$.

En résumé, on prouve que M est un majorant... et que c'est le plus petit!

Proposition 2.2 : Opérations sur les bornes supérieures

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ qui admettent, chacune, une borne supérieure.

(i) Si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

(ii) $A \cup B$ possède une borne supérieure et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

(iii) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ possède une borne supérieure et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(iv) Si $\lambda > 0$, $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ possède une borne supérieure et $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Démonstration

(i) Pour tout $a \in A$, $a \leqslant \sup(B)$ donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

(ii) Pour tout $x \in A \cup B$, $x \leqslant \sup(A)$ et $x \leqslant \sup(B)$ donc $x \leqslant \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. $A \cup B$ est donc non vide et majoré, il admet une borne supérieure. Prenons maintenant $s < \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. $s < \sup(A)$ ou $s < \sup(B)$ donc il existe $x \in A \cup B$ tel que $s < x$. s ne majore pas $A \cup B$. Ainsi, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

(iii) De même, pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$ donc $A + B$ est non vide et majorée et admet une borne supérieure. Prenons maintenant $s < \sup(A) + \sup(B)$. $s - \sup(B) < \sup(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $s - \sup(B) < a$. Comme $s - a < \sup(B)$, il existe $b \in B$ tel que $s - a < b$, c'est-à-dire $s < a + b$. s ne majore pas $A + B$ ce qui prouve que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(iv) Supposons $\lambda > 0$. Pour tout $a \in A$, $\lambda a \leqslant \lambda \sup(A)$ donc λA est non vide et majorée. Soit $s < \lambda \sup(A)$. Comme $s/\lambda < \sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $s/\lambda < a$ et donc $s < \lambda a \in \lambda A$. s ne majore pas λA. Ainsi, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. ■

II | Norme et distance

A – Norme

Définition 2.3 : Norme sur un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ *(séparation)*
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$ *(homogénéité)*
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé.

Une norme sur un espace vectoriel est couramment notée $\|\cdot\|$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. La restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel fait de ce dernier un espace vectoriel normé. Si $x \neq 0_E$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, il est dit unitaire.

Proposition 2.4

Une norme sur un espace vectoriel E vérifie l'inégalité triangulaire étendue :

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Démonstration

Soient $x, y \in E$. $\|x\| = \|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$. Donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$.
De même, par symétrie, $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$. Ainsi, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. ∎

Proposition 2.5 : Norme euclidienne

Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel, alors l'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E.

Ce dernier résultat découle directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Une norme découlant d'un produit scalaire est qualifiée de norme euclidienne.

Voici maintenant des exemples fondamentaux de normes sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, les démonstrations sont à connaître.

Exemple 1 – normes sur $\mathbb{K}^n$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \,; \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Notons tout d'abord que ces trois applications sont bien définies sur $\mathbb{K}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Elles définissent toutes trois des normes sur $\mathbb{K}^n$.

① Vérification pour $\|\cdot\|_1$
Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\|x\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$
- $\|\lambda x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$ donc en sommant,

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

② Vérification pour $\|\cdot\|_2$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme découle du produit scalaire $(X, Y) \mapsto Y^\top X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on se ramène à $\mathbb{R}^{2n}$.

③ Vérification pour $\|\cdot\|_\infty$

Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\|x\|_\infty = 0 \iff \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 0 \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i = 0 \iff x = 0_E$
- Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $|\lambda x_i| = |\lambda|\cdot|x_i|$ donc $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\cdot\|x\|_\infty$.
- Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ donc $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Exemple 2 – normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}\,; \quad \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$$

Notons tout d'abord que ces trois applications sont bien définies sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Elles définissent toutes trois des normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

① Vérification pour $\|\cdot\|_1$ (norme de la convergence en moyenne)
Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\|f\|_1 = 0 \iff \displaystyle\int_a^b |f| = 0 \underset{\substack{|f| \text{ continue} \\ \text{et positive}}}{\iff} \forall t \in [a,b]\ f(t) = 0 \iff f = 0_E$.
- Par linéarité de l'intégrale, $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\cdot\|f\|_1$.
- $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ donc, par croissance de l'intégrale, $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

② Vérification pour $\|\cdot\|_2$ (norme de la convergence en moyenne quadratique)
La norme découle du produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

③ Vérification pour $\|\cdot\|_\infty$ (norme de la convergence uniforme) : la preuve est laissée aux lecteurs.

Exercice 1

Montrer que les applications $P \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$ et $P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}|P(t)|\,\mathrm{d}t$ définissent des normes sur $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 2.6 : Norme produit

Étant donné p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) avec $1 \leqslant i \leqslant p$, on peut munir l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme N définie par :

$$\forall x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad N(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant p} N_i(x_i)$$

$\|\cdot\|_\infty$ est en fait une norme produit sur $\mathbb{K}^p$.

B – Distance associée, boules ouvertes et fermées

Définition 2.7 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application :

$$d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$$

La distance associée à une norme vérifie alors de façon immédiate les propriétés suivantes.

Proposition 2.8

Soit d la distance associée à une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E. Alors,

- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Définition 2.9 : Boules et sphères

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \geqslant 0$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$.
- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r, l'ensemble $B_f(a,r) = \overline{B(a,r)} = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$.
- On appelle sphère de centre a et de rayon r, l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$.

Pour $a = 0$ et $r = 1$, on parle respectivement de boule unité ouverte, boule unité fermée et sphère unité.

Définition 2.10 : Partie bornée

On dit qu'une partie d'un espace vectoriel normé est bornée s'il existe une boule la contenant.

On démontre aisément qu'une partie A est bornée si, et seulement si,

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x\| \leqslant M$$

Une partie peut être bornée pour une norme sans l'être pour autant pour une autre !

Exercice 2

Représenter dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ les boules unités associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3

Montrer que le pavé $[a,b] \times [c,d]$ est un borné de $\mathbb{R}^2$ pour une norme à définir.

III | Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On se donne dans toute la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque ; on le notera $(E, \|\cdot\|)$.

A – Convergence d'une suite

Définition 2.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$.
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

  On dit qu'elle diverge sinon.

On remarquera que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Attention, la convergence d'une suite est intimement liée à la norme choisie, au moins en apparence, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

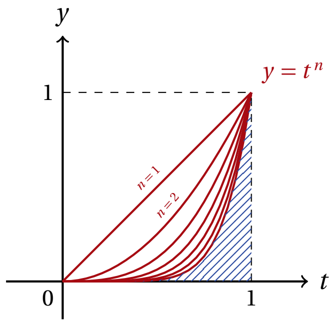
Considérons l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ que l'on peut munir, au choix, des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n : t \mapsto t^n$.

- La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$ puisque :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- La suite (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ puisque $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

  On peut même montrer que la suite diverge.



Représentation de la suite $(t \mapsto t^n)$

On retrouve les propriétés bien connues des suites numériques.

Proposition 2.12

(i) La limite d'une suite, lorsqu'elle existe est unique.

(ii) Toute suite convergente est bornée.

(iii) L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace.

Démonstration

Démontrons seulement le point (iii).

- La suite nulle converge.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', ainsi que deux scalaires α et β.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|(\alpha u_n+\beta u'_n)-(\alpha\ell+\beta\ell')\|\leqslant|\alpha|\cdot\|u_n-\ell\|+|\beta|\cdot\|u'_n-\ell'\|$$

Donc par passage à la limite, $(\alpha u_n+\beta u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha\ell+\beta\ell'$. ■

Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge.

Proposition 2.13

Soient p espaces vectoriels normés (E_i,N_i). On pose $E=E_1\times\cdots\times E_p$ et on munit E de la norme produit notée N. Une suite $u=(u_1,\dots,u_p)$ de E converge si, et seulement si, chaque suite u_i converge dans E_i. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\left(\lim_{n\to+\infty} u_{1,n},\dots,\lim_{n\to+\infty} u_{p,n}\right)$$

Pour étudier une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^p$, on se ramènera à l'étude des p suites composantes, elles, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

La suite $\left(\left(\dfrac{n!}{n^n},2+\mathrm{e}^{-n},\dfrac{1}{\ln(n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)_{n\geqslant2}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^3$ converge vers $\ell=(0,2,1)$ (pour la norme produit).

Pour déterminer la nature d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pourra étudier la convergence des parties réelle et imaginaire.

Voici enfin une dernière définition qui nous accompagnera dans les prochains chapitres afin de donner un sens à $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ où f est définie sur une partie A de E et a un point n'appartenant pas nécessairement à A.

Définition 2.14 : Point adhérent à une partie

Un point a de E est adhérent à une partie A non vide de E s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Le nombre réel 1 est par exemple un point adhérent à l'intervalle $[0,1[$.

B – Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition 2.15 : Suite extraite

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante.

On rappelle en particulier que $\varphi(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ puisque $\varphi(n)\geqslant n$.

Définition 2.16 : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute limite de sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

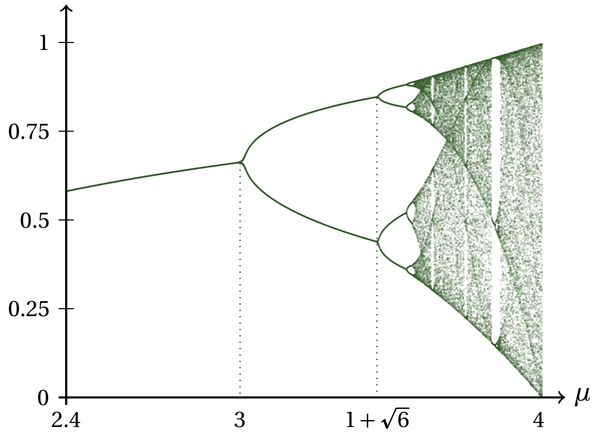
Proposition 2.17

Une suite converge vers $\ell\in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ.

La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. Ainsi, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Exemples

- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence et diverge.
- La suite $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence.
- La suite $(n(1+(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une seule valeur d'adhérence et diverge (pourtant).
- On peut montrer que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une infinité de valeurs d'adhérence : le segment $[-1,1]$.



Valeurs d'adhérence de la suite logistique définie par $u_{n+1}=\mu u_n(1-u_n)$ en fonction de $\mu\in[2.4,4]$

Rappelons enfin un des grands théorèmes d'analyse de première année.

Théorème 2.18 : Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

IV | Comparaison de normes

Comme nous avons pu le constater, la convergence d'une suite au sens d'une certaine norme n'assure nullement la convergence de cette suite pour une autre norme. Mais certaines normes garantissent des comportements analogues.

Proposition 2.19

Soient N et N' deux normes définies sur un même espace vectoriel E. Toute suite convergeant au sens de N converge aussi au sens de N' si, et seulement s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x\in E$, $N'(x)\leqslant \alpha N(x)$.

Démonstration

On peut se ramener sans perte de généralité au cas des suites convergeant vers 0.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $N'\leqslant \alpha N$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens de la norme N, alors $N'(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens de la norme N'.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Démontrons la contraposée. Cela revient à supposer que pour tout réel strictement positif α, il existe $x\in E$ tel que $N'(x)>\alpha N(x)$ et à montrer qu'il existe une suite convergeant au sens de la norme N mais ne convergeant pas au sens de la norme N'.
Construisons une telle suite en associant à chaque entier $\alpha=n$, un élément $x_n\in E$ tel que $N'(x_n)>\alpha N(x_n)$.
On a dès lors $x_n\neq 0_E$. Posons $u_n=\dfrac{x_n}{\sqrt{n}N(x_n)}$. $N(u_n)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ alors que $N'(u_n)>\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. ■

Définition 2.20 : Normes équivalentes

Deux normes N et N' définies sur un même espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x\in E,\quad \alpha N(x)\leqslant N'(x)\leqslant \beta N(x)$$

On définit ainsi une relation d'équivalence.

Proposition 2.21

Deux normes sont équivalentes si, et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

Exercice 4

Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 5

Comparer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

On pourra, si besoin, recourir aux suites de fonctions définies par $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \begin{cases} n - n^2 x \text{ si } x \in [0, 1/n] \\ 0 \text{ si } x \in]1/n, 1] \end{cases}$

Généraliser le résultat en travaillant cette fois-ci dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Plus généralement, pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit d'exhiber une suite de vecteurs telle que $N(u_n)$ converge vers 0 et $N'(u_n)$ non, ce qui revient à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(u_n)}{N'(u_n)} = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(u_n)}{N'(u_n)} = 0$.

Le vieil adage « En dimension finie, tout est plus facile » va une nouvelle fois fort heureusement se vérifier.

Théorème 2.22 : Équivalence des normes en dimension finie

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ce résultat fondamental est provisoirement admis. Il nous assure que la convergence d'une suite en dimension finie ne dépend pas de la norme utilisée. À nous donc de choisir la norme la plus commode pour l'étudier.

V | Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

$(E, \|\cdot\|)$ désignera désormais un espace vectoriel normé de dimension finie.

A – Convergence d'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On peut définir la série de terme général u_n en revenant à des définitions familières aux lecteurs :

- On appelle somme partielle au rang n le terme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Notation : $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Cette somme est un élément de E.

On notera que la nature de la série est indépendante de la norme choisie puisque nous travaillons en dimension finie.

Nous pouvons donc désormais sommer des objets aussi variés que des polynômes, des matrices, des endomorphismes…

Définition 2.23 : Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum \|u_n\|$ converge.

Le théorème suivant généralise un résultat déjà connu pour les séries numériques. C'est l'outil indispensable pour ramener l'étude d'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé à une simple étude de série numérique à termes positifs.

Théorème 2.24

Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Attention, comme dans le cas réel, la réciproque est fausse.

Démonstration

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et une série absolument convergente de terme général u_n. Notre objectif est de nous ramener au cas particulier des séries numériques pour lesquelles le résultat est déjà établi.

- On considère une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E en notant $p=\dim(E)$. Tout vecteur se décompose dans cette base :
$$\forall x\in E,\quad \exists(x^1,\dots,x^p)\in\mathbb{K}^p,\quad x=x^1e_1+\cdots+x^pe_p$$
On pose alors $\|x\|=\max(|x^1|,\dots,|x^p|)$. On montre facilement que l'on définit ainsi une norme sur E.
- Montrer que la série $\sum u_n$ converge revient à montrer que les séries de coordonnées convergent. En effet,
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^n u_k=\left(\sum_{k=0}^n u_k^1\right)e_1+\cdots+\left(\sum_{k=0}^n u_k^p\right)e_p$$
- Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, l'absolue convergence de la série de terme général u_n peut s'entendre au sens de la norme $\|\cdot\|$. Or $\|u_n\|=\max(|u_n^1|,\dots,|u_n^p|)$. Ainsi, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $|u_k^i|\leqslant\|u\|$. Donc par comparaison de séries à termes positifs, chaque série $\sum u_n^i$ converge absolument, donc converge. ■

Exercice 6

Soit $A\in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\frac{A^p}{p^2}$ converge.

B – Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Introduisons tout d'abord une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ disposant de bonnes propriétés.

Proposition 2.25 : Une norme matricielle

L'application $A\mapsto\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$ où l'on a posé $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, en la notant $\|\cdot\|$, elle vérifie :
$$\forall A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad \|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$$

Démonstration

(i) L'application $\|\cdot\|$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et par ailleurs, pour tous $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$:

- $\|A\|=0\iff\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n|a_{i,j}|=0\iff\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ a_{i,j}=0\iff A=0.$
- $\|\lambda A\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n|\lambda a_{i,j}|=|\lambda|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|=|\lambda|\times\|A\|.$
- Pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$,
$$|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\quad\text{donc}\quad\sum_{j=1}^n|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^n|b_{i,j}|\leqslant\|A\|+\|B\|$$
Donc un passage au max nous assure que $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

(ii) Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\|AB\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|$. Majorons la double somme par $\|A\|\cdot\|B\|$.
$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad\sum_{j=1}^n\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|\underset{\substack{\text{inég.}\\\text{triang.}}}{\leqslant}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{i,k}b_{k,j}|=\sum_{k=1}^n\left(|a_{i,k}|\sum_{j=1}^n|b_{k,j}|\right)\underset{\substack{\text{déf.}\\\text{de }\|B\|}}{\leqslant}\sum_{k=1}^n|a_{i,k}|\cdot\|B\|\underset{\substack{\text{déf.}\\\text{de }\|A\|}}{\leqslant}\|A\|\cdot\|B\|$$
En passant au max sur i, on obtient bien $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$. ■

Par récurrence simple, on a donc, pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$$

Théorème / Définition 2.26 : Exponentielle de matrice

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge. Sa somme est appelée exponentielle de A et est notée :

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Démonstration

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il suffit d'étudier la convergence absolue de la série. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Or la série à termes positifs $\sum \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge (c'est même la série exponentielle...).

Dès lors, la série matricielle $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument donc converge. ∎

Nous étudierons les propriétés de l'exponentielle matricielle dans un prochain chapitre mais retenons d'ores et déjà que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

Exercice 7

Déterminer l'exponentielle d'une matrice de rotation en dimension 2.

On peut de façon analogue définir l'exponentielle d'un endomorphisme (en dimension finie) :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E), \quad \exp(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$$