Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Dans tout ce chapitre (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

I. Variables aléatoires

Définition. *On appelle variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E toute application de Ω dans E.*
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est réelle.

Remarque.
- *Une variable aléatoire n'a rien d'aléatoire*
- *On peut définir la somme, $X+Y$, et le produit, XY, de deux variables aléatoires réelles X et Y.*

Exemple. *Tout application constante définie sur Ω est appelée variable aléatoire constante ou certaine.*
Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la variable aléatoire, $\mathbf{1}_A \ : \ \Omega \to \mathbb{R}, \ \omega \mapsto \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$ est appelée variable aléatoire indicatrice de A.

Définition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E.*
Pour toute partie A de A, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A\}$ est un évènement qui est souvent noté plus simplement $(X \in A)$ ou « $X \in A$ ».
On notera $P(X \in A)$ sa probabilité plutôt que $P(X^{-1}(A))$ qui serait la notation rigoureuse.

Remarque. *Si $A = \{a\}$, on notera $P(X = a)$ plutôt que $P(X^{-1}(\{a\}))$ qui serait la notation rigoureuse.*
Si $A = [a, +\infty[\cap E$, on notera $P(X \leq a)$ plutôt que $P(X^{-1}(A))$ qui serait la notation rigoureuse
L'événement $(X \in A)$ est égal à l'évènement $(X \in A) \cap X(\Omega)$. En pratique, on ne s'intéresse donc qu'aux évènement $X \in A$ avec $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$.

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. L'application*

$$P_X \ : \ \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1], \ A \mapsto P(X \in A)$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelé loi de probabilité de X ou, plus simplement, loi de X.

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. L'ensemble $X(\Omega)$ est fini.*
P_X est donc entièrement déterminée par la donnée des probabilités

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) \ \textit{avec} \ x \in X(\Omega).$$

Plus précisément, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \ P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$
Se donner la loi de X revient donc à se donner des réels $(p_x)_{x \in X(\Omega)}$ positifs vérifiant :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1.$$

Remarque.

- *Lorsque l'on demande de déterminer la loi d'une variable aléatoire X, il faut donner $X(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.*
- *Lorsque l'on demande de vérifier que la loi donnée par l'énoncé est bien une loi, il faut vérifier que pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X = x) \geq 0$ et que $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.*

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. L'application $f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω et sa loi est définie par :*

$$\forall y \in f(X)(\Omega), \quad P(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)\,:\,f(x)=y} P(X = x)$$

II. Lois usuelles

Définition. *Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 < n_2$.*
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$ si $X(\Omega) = [\![n_1, n_2]\!]$ et si

$$\forall k \in [\![n_1, n_2]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}([\![n_1, n_2]\!])$.

Définition. *Soit $p \in [0, 1]$.*
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et si $P(X = 1) = p$.
On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.*
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

III. Variables aléatoires indépendantes

Définition. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs respectivement dans E et F. Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si*

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.*
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right) \times \mathcal{P}\left(Y(\Omega)\right), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.*
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω indépendantes.*
La loi de $X + Y$ est donnée par :

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad P(X + Y = z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\,:\,x+y=z} P(X = x)P(Y = y)$$

soit

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=z-x)$$

ou

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)P(X=z-y)$$

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω indépendantes.*
La loi de $Max(X,Y)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Max(X,Y) \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z)$$

La loi de $Min(X,Y)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Min(X,Y) \geq z) = P(X \geq z)P(Y \geq z)$$

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω à valeurs respectivement dans E et F ; et f, g deux fonctions respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.

Définition. *Les variables aléatoires X_1,..., X_n définies sur Ω sont dites indépendantes deux à deux si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.*

Définition. *Les variables aléatoires X_1,..., X_n définies sur Ω à valeurs respectivement dans E_1,..., E_n sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout $(A_1,...,A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times ... \times \mathcal{P}(E_n)$, on a :*

$$P((X_1 \in A_1) \cap ... \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes*

Proposition. *Si les variables aléatoires X_1,..., X_n sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.*

Exercice. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$. Montrer que les variables X, Y et XY sont indépendantes deux à deux mais pas mutuellement indépendantes.*

Proposition. *Si les variables aléatoires X_1,..., X_n sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $(X_1,\ldots,X_r)$ et $(X_{r+1},\ldots,X_n)$ sont indépendantes.*

Proposition. *Si les variables aléatoires X_1,..., X_n sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X_1,\ldots,X_r)$ et $g(X_{r+1},\ldots,X_n)$ sont indépendantes.*

Proposition. *Soient $X \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2,p)$.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.

Corollaire. *Soient $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$,..., $X_r \sim \mathcal{B}(n_r,p)$. Si les variables aléatoires X_1,..., X_r sont mutuellement indépendantes, alors $X_1+...+X_r \sim \mathcal{B}(n_1+...+n_r,p)$.*

Corollaire. *Soient X_1,..., X_n mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1+...+X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.*

Proposition. *Soient X_1,..., X_n des variables aléatoires réelles définies sur Ω mutuellement indépendantes.*
La loi de $Max(X_1,...,X_n)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Max(X_1,...,X_n) \leq z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq z)$$

La loi de $Min(X_1,...,X_n)$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Min(X_1,...,X_n) \geq z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq z)$$

IV. Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On appelle espérance de X le réel*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x).$$

Exemple. *Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = P(A)$.*
Soit X la variable aléatoire constante à a, on a $\mathbb{E}(X) = a$.

Proposition. *Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 \leq n_2$.*
Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket)$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n_1 + n_2}{2}$.

Proposition. *Soit $p \in [0,1]$.*
Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.*
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Proposition (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $X + Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et :*

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$$

Définition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.*
Lorsque $E(X) = 0$, on dit que X est un variable aléatoire centrée. $X - \mathbb{E}(X)$ est la variable aléatoire centré associée à X.

Proposition (Positivité de l'espérance)**.**
Soit X une variable aléatoire positive définie sur Ω, i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. On a :
- $\mathbb{E}(X) \geq 0$ *;*
- $\mathbb{E}(X) = 0$ *si, et seulement si, $P(X = 0) = 1$; ont dit que X est presque certainement nulle.*

Proposition (Croissance de l'espérance)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définie sur Ω telle que $X \geq Y$, i.e. $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$. On a :*
- $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ *;*
- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ *si, et seulement si, $P(X = Y) = 1$; ont dit que X et Y sont presque sûrement égales.*

Proposition. *(Inégalité de Markov)*
Soit X une variable aléatoire réelle ***positive*** *définie sur Ω. On a*

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème. *(de transfert)*
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. On a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Théorème. *Si les variables X et Y sont indépendantes, alors*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

V. Variance d'une variable aléatoire

Définition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $k \in \mathbb{N}$. On appelle moment d'ordre k de X le réel $\mathbb{E}(X^k)$ et moment centré d'ordre k, le réel $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.*

Remarque. *D'après le théorème de transfert, on a*

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x) \text{ et } \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^k P(X = x)$$

Définition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle variance de X, le moment centré d'ordre deux de X i.e.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x)$$

Proposition (Formule de Huygens)**.** *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On a :*

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$;
- $\mathbb{V}(X) = 0$ *si, et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = m) = 1$; ont dit que X est presque sûrement constante. Dans ce cas, $m = \mathbb{E}(X)$.*

On appelle écart-type le réel $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remarque. *La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion.*

Proposition. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*
On a

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.*

Corollaire. *Soient n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 < n_2$.*
Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(n_2 - n_1 + 1)^2 - 1}{12}$.

Proposition. *Soit $p \in [0, 1]$.*
Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.*
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème. *Si les variables X et Y sont indépendantes, alors*

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

VI. Covariance de deux variables aléatoires

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires. On a :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)$$

Définition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle covariance de X et Y, le réel :*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

de sorte que

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2Cov(X,Y)$$

Définition. *Deux variables aléatoires réelles X et Y sont dites non corrélées si $Cov(X,Y) = 0$*

Proposition. *Deux variables aléatoires réelles indépendantes sont non corrélées mais il n'y a pas de réciproque.*

Exercice. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Prouver que $X+Y$ et $|X-Y|$ sont non corrélées mais non indépendantes.*

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Proposition. *Soient X, X', Y et Y' quatre variables aléatoires réelles définies sur Ω. On a :*
- $Cov(X + \lambda X', Y) = Cov(X,Y) + \lambda Cov(X',Y)$;
- $Cov(X, Y + \lambda Y') = Cov(X,Y) + \lambda Cov(X,Y')$;
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$;
- $Cov(X,X) = V(X) \geq 0$;

Ainsi, $(X,Y) \mapsto Cov(X,Y)$ est bilinéaire, symétrique et positive.

Proposition. *Soient X_1,... X_n n variables aléatoires réelles. On a :*

$$\mathbb{V}(X_1 + ... + X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{k=I}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Corollaire. *Si on pose $C = \left(Cov(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, alors*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=I}^{n} \lambda_k X_k\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Théorème. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On a :*

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sigma_X \sigma_Y$$

avec égalité si, et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(aY + bX = c) = 1$.

Définition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle facteur de corrélation le réel $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$*

Proposition. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho_{X,Y} = 0$ mais il n'y a pas de réciproque.
On a $\rho_{X,Y} = \pm 1$ si, et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(aY + bX = c) = 1$.