Formulaire : ondes

3 avril 2013

1 Éléments de théorie du signal

❒ Transformée de Fourier – À une fonction $f(x)$ on associe $\widetilde{f}(k)$ définie par

$$\boxed{\widetilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ikx)\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

❒ Transformée de Fourier inverse – À une fonction $\widetilde{f}(k)$ on associe $f(x)$ définie par

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(k)\exp(ikx)\mathrm{d}k} \tag{1.2}$$

❒ Transformée d'une exponentielle complexe – Si $f(x) = \exp(ik_0x)$, alors

$$\boxed{\widetilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(k-k_0)} \tag{1.3}$$

❒ Transformée de Fourier en trois dimensions – A une fonction $f(x,y,z)$ on associe $\widetilde{f}(k_x,k_y,k_z)$ définie par

$$\boxed{\widetilde{f}(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\exp\left(-i(k_x+k_y+k_z)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \tag{1.4}$$

❒ Notation compacte – En notant $(x,y,z) = \overrightarrow{r}$, $(k_x,k_y,k_z) = \overrightarrow{k}$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}^3r$ et $\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z = \mathrm{d}^3k$, on a les formules de transformées directes et inverse de Fourier suivantes :

$$\boxed{\widetilde{f}(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint f(\overrightarrow{r})\exp\left(-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right)\mathrm{d}^3r \text{ et } f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint f(\overrightarrow{k})\exp\left(i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right)\mathrm{d}^3k} \tag{1.5}$$

2 Ondes

❒ Vitesse de phase – Pour une onde plane progressive sinusoïdale, la vitesse de propagation ou vitesse de phase est

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{\Re\mathrm{e}(k)}} \tag{2.1}$$

❒ Vitesses d'un paquet d'onde – Pour un paquet d'onde plane progressive sinusoïdale de pulsations respectivement spatiales et temporelles voisines de k_0 et ω_0 se propageant dans un milieu imposant une relation de dispersion $\omega(k)$ entre k et ω, les vitesses de phase et de groupe sont données par :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega_0}{\Re\mathrm{e}(k_0)} \text{ et } v_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Re\mathrm{e}(k)}} \tag{2.2}$$

❒ Passage en transformée de Fourier – Passer une équation en transformée de Fourier revient à effectuer les changements suivants :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega \text{ et } \overrightarrow{\nabla} \longleftrightarrow i\overrightarrow{k}} \tag{2.3}$$

❒ Puissance en complexes – Pour deux grandeurs a et b variant sinusoïdalement, la valeur moyenne du produit ab (qui correspond souvent au calcul de la puissance moyenne absorbée ou reçue) est donnée par la formule

$$\boxed{< ab > = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}(\underline{ab}^*)} \tag{2.4}$$

❒ Propagation d'un signal dans une ligne – Pour qu'un paquet d'onde voyage sans déformation dans une ligne électrique de résistance linéique r, d'inductance linéique λ, de capacité linéique γ et de conductance linéique g, il faut

$$\boxed{r\gamma = \lambda g} \tag{2.5}$$

❒ Impédance de ligne – Une ligne idéale ($r = g = 0$) peut être modélisée comme un dipôle d'impédance

$$\boxed{Z_e = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}} \tag{2.6}$$

❒ Effet Dopler non-relativiste – Soit une source émettant un signal sinusoïdal de fréquence ω_0, et ω_s la fréquence du signal tel qu'il est perçu par un observateur après un voyage à la vitesse c dans un milieu de propagation. Si il y a mouvement à la vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$ par rapport au milieu de propagation respectivement de l'observateur ou de la source, on a

$$\boxed{\omega_0 = \omega_s\left(1 - \frac{\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{v_0}}{c}\right) \text{ ou } \omega_0 = \omega_s\left(1 - \frac{\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{v_0}}{c}\right)^{-1}} \tag{2.7}$$

Bon courage pour apprendre ces 12 formules !