Informatique tronc commun - PCSI

# Cours 5 :
# Graphes et représentations

Florent Pompigne
pompigne@crans.org

Lycée Buffon

année 2021/2022

# Plan

# Graphes non orientés

# Graphes non orientés

## Définition

Un **graphe non orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'arêtes $A$, où une arête relie deux sommets.

# Graphes non orientés

## Définition

Un **graphe non orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'arêtes $A$, où une arête relie deux sommets.

On note $G = (S, A)$

# Graphes non orientés

## Définition

Un **graphe non orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'arêtes $A$, où une arête relie deux sommets.

On note $G = (S, A)$

On dit que deux sommets $x, y$ sont **voisins** s'ils sont reliés par une arête $\{x, y\}$. On notera que, le graphe étant non orienté, si $x$ est voisin de $y$, alors $y$ est voisin de $x$.

# Graphes non orientés

## Définition

Un **graphe non orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'arêtes $A$, où une arête relie deux sommets.

On note $G = (S, A)$

On dit que deux sommets $x, y$ sont **voisins** s'ils sont reliés par une arête $\{x, y\}$. On notera que, le graphe étant non orienté, si $x$ est voisin de $y$, alors $y$ est voisin de $x$.

**Exemples** :

- plan de métro (petit)
- réseau routier (gros)
- graphe du web (énorme)

# Graphes orientés

## Définition

Un **graphe orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'**arcs** $A$, où un arc relie un sommet à un autre.

# Graphes orientés

## Définition

Un **graphe orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'**arcs** $A$, où un arc relie un sommet à un autre.

On note toujours $G = (S, A)$

# Graphes orientés

## Définition

Un **graphe orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'**arcs** $A$, où un arc relie un sommet à un autre.

On note toujours $G = (S, A)$

Si $(x, y)$ est un arc, on dit que $x$ est un **prédécesseur** de $y$, et que $y$ est un **successeur** de $x$. Un arc peut être une **boucle**, de la forme $(x, x)$.

# Graphes orientés

## Définition

Un **graphe orienté** $G$ est défini par un ensemble de **sommets** $S$ et un ensemble d'**arcs** $A$, où un arc relie un sommet à un autre.

On note toujours $G = (S, A)$

Si $(x, y)$ est un arc, on dit que $x$ est un **prédécesseur** de $y$, et que $y$ est un **successeur** de $x$. Un arc peut être une **boucle**, de la forme $(x, x)$.

## Représentation graphique

Pour représenter graphiquement un graphe, on dessine les arêtes sous forme de traits, et les arcs sous forme de flèches.

# Degré

## Définition

Dans un graphe orienté, le **degré sortant** d'un sommet $u$ est le nombre de ses successeurs. On le note $d_+(u)$. Son **degré entrant** est son nombre de prédécesseurs, on le note $d_-(u)$. Son **degré** est la somme de son degré entrant et sortant, on le note $d(u)$.

# Degré

## Définition

Dans un graphe orienté, le **degré sortant** d'un sommet $u$ est le nombre de ses successeurs. On le note $d_+(u)$. Son **degré entrant** est son nombre de prédécesseurs, on le note $d_-(u)$. Son **degré** est la somme de son degré entrant et sortant, on le note $d(u)$.

Dans un graphe non orienté, il n'y a pas de notion de degré entrant ou sortant. On définit simplement le **degré** $d(u)$ d'un sommet $u$ comme son nombre de voisins.

# Degré

## Définition

Dans un graphe orienté, le **degré sortant** d'un sommet $u$ est le nombre de ses successeurs. On le note $d_+(u)$. Son **degré entrant** est son nombre de prédécesseurs, on le note $d_-(u)$. Son **degré** est la somme de son degré entrant et sortant, on le note $d(u)$.

Dans un graphe non orienté, il n'y a pas de notion de degré entrant ou sortant. On définit simplement le **degré** $d(u)$ d'un sommet $u$ comme son nombre de voisins.

## Propriété

$$\sum_{u \in S} d(u) = 2|A|$$

# Degré

## Définition

Dans un graphe orienté, le **degré sortant** d'un sommet $u$ est le nombre de ses successeurs. On le note $d_+(u)$. Son **degré entrant** est son nombre de prédécesseurs, on le note $d_-(u)$. Son **degré** est la somme de son degré entrant et sortant, on le note $d(u)$.

Dans un graphe non orienté, il n'y a pas de notion de degré entrant ou sortant. On définit simplement le **degré** $d(u)$ d'un sommet $u$ comme son nombre de voisins.

## Propriété

$$\sum_{u \in S} d(u) = 2|A|$$

**Corollaire (pré-Covid)** : Dans un groupe de personnes, un nombre pair d'entre elles a serré un nombre impair de mains.

# Chemins

## Définitions

Un **chemin** de longueur $k$ , de source $u_0$ et de destination $u_k$ est une liste $u_0, u_1, \ldots, u_k$ telle que $u_{i+1}$ soit toujours successeur (pour un graphe orienté) ou voisin (pour un graphe non-orienté) de $u_i$. On note bien qu'un chemin contient $k$ arcs ou arêtes mais $k + 1$ sommets.

# Chemins

## Définitions

Un **chemin** de longueur $k$ , de source $u_0$ et de destination $u_k$ est une liste $u_0, u_1, \ldots, u_k$ telle que $u_{i+1}$ soit toujours successeur (pour un graphe orienté) ou voisin (pour un graphe non-orienté) de $u_i$. On note bien qu'un chemin contient $k$ arcs ou arêtes mais $k + 1$ sommets.

Si $u_0 = u_k$, on dit que le chemin est un **cycle**.

# Chemins

## Définitions

Un **chemin** de longueur $k$ , de source $u_0$ et de destination $u_k$ est une liste $u_0, u_1, \ldots, u_k$ telle que $u_{i+1}$ soit toujours successeur (pour un graphe orienté) ou voisin (pour un graphe non-orienté) de $u_i$. On note bien qu'un chemin contient $k$ arcs ou arêtes mais $k + 1$ sommets.

Si $u_0 = u_k$, on dit que le chemin est un **cycle**.

## Définition

Un graphe non orienté est **connexe** si pour tout couple de sommets $u$ et $v$, il existe un chemin entre $u$ et $v$.

# Plan

# Listes d'adjacence

Dans la suite, on suppose que $S = [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, on a numéroté les $n$ sommets).

# Listes d'adjacence

Dans la suite, on suppose que $S = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (autrement dit, on a numéroté les $n$ sommets).

## Principe

La **liste d'adjacence** d'un sommet `i` est la liste de tous ses voisins (pour un graphe non orienté) ou de tous ses successeurs (pour un graphe orienté).

# Listes d'adjacence

Dans la suite, on suppose que $S = [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, on a numéroté les $n$ sommets).

## Principe

La **liste d'adjacence** d'un sommet `i` est la liste de tous ses voisins (pour un graphe non orienté) ou de tous ses successeurs (pour un graphe orienté).

On peut représenter informatiquement un graphe par la liste de ses listes d'adjacence. `G[i]` contient ainsi la liste d'adjacence du sommet `i`.

# Listes d'adjacence

Dans la suite, on suppose que $S = [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, on a numéroté les $n$ sommets).

## Principe

La **liste d'adjacence** d'un sommet `i` est la liste de tous ses voisins (pour un graphe non orienté) ou de tous ses successeurs (pour un graphe orienté).

On peut représenter informatiquement un graphe par la liste de ses listes d'adjacence. `G[i]` contient ainsi la liste d'adjacence du sommet `i`.

## Exemples

```
G1 = [[2, 3], [], [0, 3, 4], [0, 2], [2]]
G2 = [[0, 2], [2, 3], [3], [1]]
```

# Listes d'adjacence

Dans la suite, on suppose que $S = [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, on a numéroté les $n$ sommets).

## Principe

La **liste d'adjacence** d'un sommet `i` est la liste de tous ses voisins (pour un graphe non orienté) ou de tous ses successeurs (pour un graphe orienté).

On peut représenter informatiquement un graphe par la liste de ses listes d'adjacence. `G[i]` contient ainsi la liste d'adjacence du sommet `i`.

## Exemples

```
G1 = [[2, 3], [], [0, 3, 4], [0, 2], [2]]
G2 = [[0, 2], [2, 3], [3], [1]]
```

**Remarque** : lorsque les sommets ne sont pas numérotés, on peut stocker les listes d'adjacences dans un dictionnaire.

# Matrice d'adjacence

## Principe

La **matrice d'adjacence** d'un graphe `G` est une matrice $n \times n$ dont le coefficient en position $(i, j)$ vaut 1 si `j` est un voisin (resp. successeur) de `i`, et 0 sinon.

# Matrice d'adjacence

## Principe

La **matrice d'adjacence** d'un graphe `G` est une matrice $n \times n$ dont le coefficient en position $(i, j)$ vaut 1 si `j` est un voisin (resp. successeur) de `i`, et 0 sinon.

## Exemples

Donner la représentation par matrice d'adjacence des graphes précédents.

# Matrice d'adjacence

## Principe

La **matrice d'adjacence** d'un graphe `G` est une matrice $n \times n$ dont le coefficient en position $(i, j)$ vaut 1 si `j` est un voisin (resp. successeur) de `i`, et 0 sinon.

## Exemples

Donner la représentation par matrice d'adjacence des graphes précédents.

## Avantages comparés

Une représentation par matrice d'adjacence demande en général plus d'espace pour être stockée qu'une liste de listes d'adjacences ($O(|S|^2)$ contre $O(|S| + |A|)$) mais permet de tester si deux sommets sont voisins en temps constant.

# Plan

# Graphes pondérés

## Définitions

Un graphe est **pondéré** si à chaque arc ou arête est associé un **poids** réel.

# Graphes pondérés

## Définitions

Un graphe est **pondéré** si à chaque arc ou arête est associé un **poids** réel.

Avec les listes d'adjacences, on représente un arc $(i, j)$ de poids $w$ en plaçant le couple $(j, w)$ dans la liste d'adjacence de $i$.

# Graphes pondérés

## Définitions

Un graphe est **pondéré** si à chaque arc ou arête est associé un **poids** réel.

Avec les listes d'adjacences, on représente un arc $(i, j)$ de poids $w$ en plaçant le couple $(j, w)$ dans la liste d'adjacence de $i$.

Dans une matrice d'adjacence, on représente un arc $(i, j)$ de poids $w$ en écrivant $w$ dans la case en position $(i, j)$. Pour ne pas confondre une absence d'arc avec un arc de poids nul, on écrira `None` en position $(i, j)$ s'il n'y a pas d'arc $(i, j)$

# Graphes pondérés

## Définitions

Un graphe est **pondéré** si à chaque arc ou arête est associé un **poids** réel.

Avec les listes d'adjacences, on représente un arc $(i, j)$ de poids $w$ en plaçant le couple $(j, w)$ dans la liste d'adjacence de $i$.

Dans une matrice d'adjacence, on représente un arc $(i, j)$ de poids $w$ en écrivant $w$ dans la case en position $(i, j)$. Pour ne pas confondre une absence d'arc avec un arc de poids nul, on écrira `None` en position $(i, j)$ s'il n'y a pas d'arc $(i, j)$

Un graphe **étiqueté** suit le même principe, mais on associe aux arcs ou aux arêtes une **étiquette** qui est une chaîne de caractères.