Fonctions convexes

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définition géométrique

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $a, b \in I$ avec $a < b$, on appelle u_{ab} l'unique application affine qui coïncide avec f en a et b. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$u_{ab}(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

On dit que f est convexe sur I si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant u_{ab}$.

Géométriquement, la portion du graphe de f comprise entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est en dessous de la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

1.2 Définition analytique

Avec les notations précédentes, f est convexe si et seulement si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soient $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

- Si $x = y$, $\forall t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)x = x$ et $tf(x) + (1 - t)f(x) = f(x)$ donc $f(x) \leqslant f(x)$.
- Supposons $x \neq y$, par exemple $x < y$. Pour $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in [x, y]$ donc

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant u_{xy}(tx + (1 - t)y)$$

Posons, pour $\Omega \in \mathbb{R}$, $u_{xy}(\Omega) = \alpha\Omega + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{xy}(tx + (1 - t)y) &= \alpha(tx + (1 - t)y) + \beta \\ &= \alpha(tx + (1 - t)y) + (t + (1 - t))\beta \\ &= t(\alpha x + \beta) + (1 - t)(\alpha y + \beta) \\ &= tu_{xy}(x) + (1 - t)u_{xy}(y) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ et $x \in [a, b]$. Montrons alors que $f(x) \leqslant u_{ab}(x)$. On peut écrire

$$x = ta + (1 - t)b \quad t = \frac{b - x}{b - a} \in [0, 1]$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(ta + (1 - t)b) &\leqslant tf(a) + (1 - t)f(b) \\ &\leqslant tu_{ab}(a) + (1 - t)u_{ab}(b) = u_{ab}(ta + (1 -)b) \end{aligned}$$

En effet, u_{ab} est affine.

2 Théorèmes

2.1 Inégalités de pentes

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si $\forall x, y, z \in I$ avec $x \leqslant y \leqslant z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soient $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$. On écrit :

$$y = tx + (1-t)z \quad t = \frac{z-y}{z-x} \in [0,1]$$

– D'où $f(y) = f(tx + (1-t)z) \leqslant tf(x) + (1-t)f(z)$ car f est convexe. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &\leqslant tf(x) + (1-t)f(z) - f(z) \\ &\leqslant t(f(x) - f(z)) \\ &\leqslant \frac{z-y}{z-x}(f(x) - f(z)) \end{aligned}$$

$z - y > 0$ d'où

$$\frac{f(y) - f(z)}{z - y} \leqslant \frac{f(x) - f(z)}{z - x} \Leftrightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

– De même,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leqslant tf(x) + (1-t)f(z) - f(x) \\ &\leqslant (1-t)(f(z) - f(x)) \\ &\leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(x)) \end{aligned}$$

$y - x > 0$ d'où

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall x, y, z \in I$ avec x, y, z, on ait

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

En particulier, soient $a, b \in I$ avec $a < b$, et $c \in [a, b]$. Montrons que $f(c) \leqslant u_{ab}(c)$.

– Si $c = a$ ou $c = b$, c'est évident.

– Si $c \in]a, b[$,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(c) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) = u_{ab}(c)$$

2.2 Lien entre convexité et dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable [a]. Les assertions suivantes sont équivalentes [b] :

(1) f est convexe.

(2) f' est croissante.

(3) $\forall x, x_0 \in I$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a. Il est ici crucial de relater une autre éclatante victoire du sage M. Sellès contre le confus Aménofis :
– *Eh m'sieur c'est pas une vraie fonction ça !*
– *Comment ça c'est pas une vraie fonction ? Toi t'es pas un vrai élève !*

b. « LASSE *a encore frappé !* »

Cette dernière proposition s'interprète géométriquement comme le fait que le graphe de f est toujours au dessus de n'importe quelle de ses tangentes.

De plus, si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Soient $a, b \in I$ avec $a < b$, montrons que $f'(a) \leqslant f'(b)$. On sait que pour $a < t < b$,

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

On a donc pour $t \in]a,b[$, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Par passage à la limite lorsque $t \to a$, $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. De même, on obtient avec l'autre inégalité $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$ lorsque $t \to b$. Ainsi, $f'(a) \leqslant f'(b)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $x_0 \in I$, posons $\varphi : x \in I \longrightarrow f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$. φ est dérivable sur I et $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. f' est croissante donc si $x \geqslant x_0$, $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ et si $x \leqslant x_0$, $f'(x) \leqslant f'(x_0)$. On obtient donc le tableau de variations de la figure 1. Il est donc clair que φ admet un minimum en x_0 et $\varphi(x_0) = 0$

x		x_0	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	↘		↗

Figure 1 – Tableau de variations de $\varphi(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$

donc $\varphi(x) \geqslant 0$ pour $x \in I$, d'où le résultat.

(3) $\Rightarrow$ (1) Soient $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Notons $x_0 = tx + (1-t)y \in [x,y]$. On a par hypothèse,

$$\begin{cases} f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) & \text{(a)} \\ f(y) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(y-x_0) & \text{(b)} \end{cases}$$

Ainsi, comme t et $1-t$ sont positifs,

$$t\,\text{(a)} + (1-t)\,\text{(b)} \Leftrightarrow tf(x) + (1-t)f(y) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)[t(x-x_0) + (1-t)(y-x_0)]$$

Or $t = \dfrac{y-x_0}{y-x}$ et $1-t = \dfrac{x_0-x}{y-x}$ donc

$$\begin{aligned} t(x-x_0) + (1-t)(y-x_0) &= \frac{(y-x_0)(x-x_0)}{y-x} + \frac{(x_0-x)(y-x_0)}{y-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat escompté :

$$f(x_0) = f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

2.3 Fonctions concaves

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
On a tout de suite (avec les notations précédentes) les assertions suivantes équivalentes :

(1) f est concave.

(2) $\forall a, b \in I$, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant u_{ab}(x)$.

(3) $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Lorsque f est dérivable sur I, les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) f est concave.
(2) f' est décroissante.
(3) $\forall x, x_0 \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ est concave} \Leftrightarrow f'' \leqslant 0$$

2.4 Exemples

– ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Ainsi, $\forall x > 0$,

$$\ln(x) \leqslant \ln 1 + \ln'(1)(x-1) \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant x - 1$$

– exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^0 + \exp(0)(t-0) \Leftrightarrow \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$$

–

$$\varphi : \begin{array}{l} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin t \end{array}$$

φ est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi''(t) = -\sin t < 0$. Par conséquent, φ est concave donc $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin t \geqslant u_{0, \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$$

3 Conséquence de la concavité : inégalités usuelles

3.1 Corollaire de la convexité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ et $\forall \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration Raisonnons par récurrence :

– Pour $n = 1$, c'est trivial. Pour $n = 2$, l'énoncé dit que $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ avec $\lambda + \mu = 1$,

$$f(\lambda x + \mu x) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(x)$$

Ce qui est vrai car $\lambda, \mu \in [0, 1]$ et $\lambda = 1 - \mu$. Cette inégalité a en fait déjà été démontrée.

– Montrons une propriété qui nous sera utile par la suite : soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. On pose alors $x = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ et $y = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$. On a donc pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i x \leqslant \lambda_i x_i \leqslant \lambda_i y$ car $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x}_{x} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y}_{y}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in [x, y] \subset I$.

- Supposons que la propriété est vraie pour $n \geqslant 2$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Montrons que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

  - Si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, c'est trivial.
  - Sinon, $\exists k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i > 0$. Ainsi, $S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j > 0$ donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} + S\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{S} x_i\right)$$

Posons alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = \frac{\lambda_i}{S}$. Par conséquent $\sum_{i=i}^{n} \mu_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{S} = 1$ donc $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \in I$. Or $\lambda_{n+1} \geqslant 0$, $S \geqslant 0$ et $\lambda_{n+1} + S = 1$ donc, puisque f est convexe :

$$f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + Sy) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + Sf(y)$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)$$

Donc

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &= f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + Sy) \\ &\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + Sf(y) \\ &\leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + S\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{S} f(x_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

3.2 Inégalité arithmético-géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \Leftrightarrow m_g(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leqslant m_a(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

Démonstration

- Si $\exists w \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_w = 0$, c'est trivial.
- Supposons $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \mathrm{e}^{b_i}$ avec $b_i = \ln a_i$ donc

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{b_1} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{b_2} + \cdots + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{b_n}$$

Si on pose pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_i = \frac{1}{n}$, alors $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. exp est convexe donc on a

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{b_i} \geqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i} \\
&= \left(\mathrm{e}^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\mathrm{e}^{b_1} \mathrm{e}^{b_2} \cdots \mathrm{e}^{b_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= m_g\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)
\end{aligned}$$

Corollaire Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on définit

$$\frac{1}{m_h\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)} = m_a\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$$

Alors

$$m_h\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right) \leqslant m_g\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m_h\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)} &= m_a\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}\right) \\
&\geqslant m_g\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}\right) \\
&\geqslant \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geqslant \frac{1}{m_g\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)}
\end{aligned}$$

3.3 Inégalité de Hölder

3.3.1 Couple d'exposants conjugués

On dit que $(p, q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ est un couple d'exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ceci impose $p > 1$ et $q > 1$.

Par exemple,$(2, 2)$ et $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ sont de tels couples.

3.3.2 Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$ et (p, q) un couple d'exposants conjugués. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour $(p, q) = (2, 2)$, on retrouve Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ [a].

[a] Voir section 1.2.2.4 du cours complet page 14.

Petit lemme Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

En effet :

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, c'est trivial.
- Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{p\ln a} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{q\ln b}$$

  Posons $p\ln a = x$ et $q\ln b = y$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et exp est convexe donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\mathrm{e}^x + \frac{1}{q}\mathrm{e}^y &\geqslant \mathrm{e}^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}\\ &\geqslant \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}\\ &\geqslant ab\end{aligned}$$

Démonstration

- Supposons que $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^q$. On a alors $x_i y_i \leqslant \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}$, d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{q}\\ &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q\\ &\leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\\ &\leqslant 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

- Revenons au cas général et essayons de nous ramener à la situation précédente.
  - Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ ou $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = 0$, l'inégalité est vraie.
  - Dans le cas contraire, $\sum_{i=1}^{n} x_i^p > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i^q > 0$. Posons $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ^ et $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, et pour $i \in [[i, n]]$, $x'_i = \frac{x_i}{\alpha}$ et $y'_i = \frac{y_i}{\beta}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i'^p &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{\alpha^p}\\ &= \frac{1}{\alpha^p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\\ &= \frac{\alpha^p}{\alpha^p}\\ &= 1\end{aligned}$$

  De même, $\sum_{i=1}^{n} y'_i = 1$. D'après le cas précédent,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \leqslant 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \alpha\beta\end{aligned}$$

Corollaire Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{C}$ et (p, q) un couple d'exposants conjugués. Alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i \omega_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\omega_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

En effet, d'après l'inégalité triangulaire, $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i \omega_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i| |\omega_i|$. On peut appliquer le théorème précédent aux réels positifs $|z_i|$ et $|\omega_i|$.

3.4 Inégalité de Minkowski

Soit $p \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hint ! Pour $p > 1$, considérer q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$. Écrire alors pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$(x_i y_i)^p = x_i \left(x_i + y_i\right)^{p-1} + y_i \left(x_i + y_i\right)^{p-1}$$

Appliquer ensuite Hölder intelligemment !