Lycée Buffon	DS 4
MPSI	Année 2020-2021

Devoir du 28/11/2020

Exercice 1 : Soit $f\ :\ x \mapsto 2\arctan\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition noté $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée aux points de dérivation.
3. Tracer le graphe de f.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 - z + 1$.
Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : On souhaite démontrer que : $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ x^y + y^x \geq 1$.

1. (a) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère $f_a\ :\ t \mapsto t\ln(at)$.
   Étudier f_a : domaine de définition, de dérivation, variations, limites, valeur du minimum, tangente au point d'abscisse $1/a$ et graphe.
2. On suppose que $x \in]0,1]$ et que $0 < y \leq x$. On pose $a = \dfrac{y}{x}$.
   (a) On suppose dans cette question que $e^{-1} \leq a \leq 1$.
      i. Prouver que $x\ln(ax) \geq -1$ et que $ax\ln(x) \geq -e^{-1}$.
      ii. En déduire que $x^y + y^x \geq e^{-1} + e^{-1/e} \geq 1$.
   (b) On suppose dans cette question que $0 < a < e^{-1}$.
      i. Prouver que $x\ln(ax) \geq \ln(a)$ et que $ax\ln(x) \geq -ae^{-1}$.
      ii. En déduire que $x^y + y^x \geq 1$.
3. Conclure.

Pour tout complexe $z = a + ib$ et pour tout réel x strictement positif, on définit l'exponentielle complexe x^z par $x^z = e^{z\ln(x)} = x^a\left(\cos\left(b\ln(x)\right) + i\sin\left(b\ln(x)\right)\right)$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $f_z\ :\ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C},\ x \mapsto x^z$
   (a) Démontrer que la fonction f_z est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Justifier que f_z admet des primitives sur $\mathbb{R}^{+*}$ et les déterminer.
   (c) En déduire une primitive de $t \mapsto t\cos\left(\ln(t)\right)$.
   (d) Retrouver ce résultat de deux façons : grâce à un changement de variable puis à l'aide d'intégrations par parties.

Exercice 4 : On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''' - (4+i)y'' + (1-5i)y' + (2+6i)y = (2+6i)x^2 - 16ix - 9 + 3i - (2+7i)e^x$$

dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note (E_0) l'équation homogène associée dont on note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions.

1. Soit $r \in \mathbb{C}$. Prouver que la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) si et seulement si r est racine du polynôme $P = X^3 - (4+i)X^2 + (1-5i)X + 2 + 6i$.
2. Déterminer les racines complexes de P. On les note r_1, r_2 et r_3.
   On pourra remarquer que P possède une racine réelle simple et factoriser On pourra utiliser $289 = 17^2$ donc $4 \times 289 = ...^2$
3. Prouver que $\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \nu e^{r_3 t},\ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3\right\}$
4. Démontrer que si $f_p \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S} = \{f_p + f_0,\ f_0 \in \mathcal{S}_0\}$
5. Déterminer $\mathcal{S}$.

Exercice 5 : Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \mathrm{d}t$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Déterminer $I_{p,0}$ et trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Proposer une formule pour $I_{p,q}$ et la prouver.
3. Soit n un entier. On pose, $P_n\ :\ x \mapsto \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^x t^n(1-t)^n \mathrm{d}t$.
   (a) Prouver que $P_n(1) = 1$.
   (b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) + P_n(1-x) = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de la fonction P_n ?

Exercice 6 : On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ (4-x^2)y' - (4+x)y = 2 + x$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur $I =]-2,2[$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $I =]-2,2[$.
3. Prouver que parmi les solutions de (E), il y en a au plus qui possède une limite finie en 2.