16 Fonctions vectorielles

« La ligne courbe est la ligne la plus jolie d'un point à un autre. »
Mae West, actrice américaine (1893–1960)

Plan de cours

I	Limite et continuité d'une fonction vectorielle	1
II	Dérivabilité d'une fonction vectorielle	2
III	Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment	4
IV	Suites et séries de fonctions vectorielles	6

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E=\mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (f_1(t),\dots,f_p(t)) \end{array} \right.$$

Les fonctions numériques $f_i : I \to \mathbb{R}$ pour $i \in \{1,\dots,p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$, $f=f_1e_1+\cdots+f_pe_p$. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie.

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ de dimension finie p.

I | Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition 16.1 : Limite

On dit que f admet $\ell\in E$ pour limite en $t_0\in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0}\|f(t)-\ell\|=0$, c'est-à-dire si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0,\quad \forall t\in I,\quad |t-t_0|<\eta \Longrightarrow \|f(t)-\ell\|<\varepsilon$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E=\mathbb{R}^p$, f admet $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_p)\in\mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0\in\mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Définition 16.2 : Continuité

- f est dite continue en $t_0\in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$, c'est-à-dire si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0,\quad \forall t\in I,\quad |t-t_0|<\eta \Longrightarrow \|f(t)-f(t_0)\|<\varepsilon$$

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Proposition 16.3 : Continuité et fonctions composantes

f est continue en $t_0\in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i\in\{1,\dots,p\}$.

Exemple

L'application $t\mapsto(\cos(t),\sin(t),t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.

II | Dérivabilité d'une fonction vectorielle

A – Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition 16.4 : Dérivabilité

- f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe.

  On appelle alors vecteur dérivé en t_0 le vecteur $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.
- f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle alors dérivée de f l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ existe. C'est équivalent à :

$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} f(t_0)+(t-t_0)\cdot f'(t_0)+\mathrm{o}(t-t_0) \quad \text{i.e.} \quad f(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+\mathrm{o}(h)$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions composantes.

Proposition 16.5

Si E est muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et $f = f_1 e_1+\cdots+f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f_1' e_1+\cdots+f_p' e_p$.

Exemple

L'application $R : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto R'(t) = R(t+\pi/2)$.

On peut, comme en dimension 1, définir le vecteur dérivé de f à droite ou à gauche, mais l'intérêt est mince.

Proposition 16.6

Toute application dérivable est continue.

Démonstration

Si f est dérivable en t_0, $f(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+\mathrm{o}(h)$ donc $f(t_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t_0)$. ■

B – Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 16.7 : Premières opérations

Soient $f,g : I \to E$ deux fonctions dérivables sur I.

(i) si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f+\mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f+\mu g)' = \lambda f'+\mu g'$;

(ii) si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, $\lambda\cdot f$ l'est également et $(\lambda\cdot f)' = \lambda'\cdot f+\lambda\cdot f'$;

(iii) si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f\circ\lambda$ l'est également et $(f\circ\lambda)' = \lambda'\cdot(f'\circ\lambda)$;

Attention, le produit $f\times g$ a rarement un sens lorsque $p \neq 1$!

Exercice 1

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

(i) Établir la dérivabilité de $t \mapsto A(t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et exprimer la dérivée.

(ii) Supposons que $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Même question avec $t \mapsto A^{-1}(t)$.

Proposition 16.8 : Dérivabilité et application linéaire

Soient $f : I \to E$ une fonction dérivable sur I et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $u\circ f$ est dérivable et $(u\circ f)' = u\circ f'$.

Démonstration

Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u). En effet,

$$\frac{u(f(t_0+h))-u(f(t_0))}{h}=u\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}u(f'(t_0))$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0+h))\underset{h\to 0}{=}u(f(t_0))+h\,u(f'(t_0))+\mathrm{o}(h)$ par continuité de u. ■

Proposition 16.9 : Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f:I\to F$ et $g:I\to G$ deux fonctions dérivables sur I et $B:F\times G\to E$ bilinéaire. Alors, $B(f,g)$ est dérivable sur I et :

$$B(f,g)'=B(f',g)+B(f,g')$$

- En particulier, si $E=\mathbb{R}^3$, $f\wedge g$ est dérivable sur I et $(f\wedge g)'=f'\wedge g+f\wedge g'$.
- si $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne un produit scalaire sur E, $\langle f|g\rangle$ est dérivable sur I et $\langle f|g\rangle'=\langle f'|g\rangle+\langle f|g'\rangle$;

Démonstration

Travaillons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0\in I$,

$$f(t_0+h)\underset{h\to 0}{=}f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+\mathrm{o}(h)\quad\text{et}\quad g(t_0+h)\underset{h\to 0}{=}g(t_0)+h\cdot g'(t_0)+\mathrm{o}(h)$$

Par bilinéarité de B,

$$B(f(t_0+h),g(t_0+h))\underset{h\to 0}{=}B(f(t_0),g(t_0))+h\left[B(f'(t_0),g(t_0))+B(f(t_0),g'(t_0))\right]+\mathrm{o}(h)$$

C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0),\mathrm{o}(h))=\mathrm{o}(h)$. ■

La propriété précédente s'étend à toute application multilinéaire.

Exercice 2

Si E est un espace euclidien et f dérivable, $\|f\|$ est constante si et seulement si le vecteur vitesse f' est orthoradial, c'est-à-dire s'il est orthogonal à f en tout point.

Exercice 3

Calculer, en dérivant, $D_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$.

C – Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 16.10

Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}\to E$ de classe $\mathscr{C}^n$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x)=(f(x)-f(0))/x$ si $x\neq 0$, $g(0)=f'(0)$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on multiplie f par une fonction λ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on retrouve un résultat bien connu.

Proposition 16.11 : Formule de Leibniz

Si $f:I\to\mathbb{R}^p$ et $\lambda:I\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, $(\lambda\cdot f)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{(k)}f^{(n-k)}$.

III | Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

A – Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p f_i(t)e_i\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème / Définition 16.12 : Intégrale d'une fonction vectorielle continue

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur E, e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$.

Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^p\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$, on l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$$

On retrouve les propriétés classiques de l'intégrale en raisonnant composante par composante, à l'exception de la positivité et de la croissance (propriétés découlant de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$).

Théorème 16.13 : Propriétés de l'intégrale

Soient $f,g:[a,b]\to E$ deux fonctions continues où $(E,\|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a<b$.

(i) *Linéarité de l'intégrale* : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\displaystyle\int_a^b(\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

(ii) *Relation de Chasles* : $\forall c\in[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

(iii) *Convergence des sommes de Riemann* : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

(iv) *Inégalité triangulaire* : $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$

Démonstration

Si les trois premières propriétés découlent directement d'un travail sur les fonctions composantes dans une base donnée, la dernière est un peu plus subtile. Appuyons-nous sur les sommes de Riemann en posant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^n f(t_k)$ où $t_k=a+k\cdot\dfrac{b-a}{n}$.

Par inégalité triangulaire (discrète),

$$\|S_n(f)\|=\left\|\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n f(t_k)\right\|\leqslant\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n\|f(t_k)\|$$

- Comme $S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_a^b f$ et $\|\cdot\|$ est continue, $\|S_n(f)\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left\|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|$.
- De même, par continuité de $\|f\|$, $\dfrac{b-a}{n}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^n\|f(t_k)\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b\|f\|$.

On peut conclure en passant à la limite dans l'inégalité : $\left\|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\displaystyle\int_a^b\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$. ■

B – Intégrale fonction de sa borne supérieure

On retrouve également les théorèmes classiques de première année qui établissent le lien entre dérivation et intégration.

Théorème 16.14 : Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Théorème 16.15

Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

C'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0! Il en découle presque immédiatement une autre propriété bien connue.

Corollaire 16.16 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \cdot |b - a|$$

Démonstration

Soient $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot |b - a|$$

Si $b < a$, il suffit d'intervertir les bornes de l'intégrale, la valeur absolue fait alors son œuvre. ■

C – Formules de Taylor

Théorème 16.17 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.

- *Formule de Taylor avec reste intégral* :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- *Inégalité de Taylor-Lagrange* :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n)}(t)\|$$

- *Formule de Taylor-Young* :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

IV | Suites et séries de fonctions vectorielles

En vue de l'étude prochaine des équations différentielles, on généralise sommairement les résultats du chapitre « Suites et séries de fonctions » aux fonctions vectorielles.

Par la suite, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition 16.18 : Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)

- On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

  Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Outre le fait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, on retrouve tous les résultats relatifs à la continuité, dérivabilité et intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Par exemple :

Théorème 16.19 : Continuité de la limite uniforme

La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions continues sur I est continue sur I.

On considère désormais la série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur I et à valeurs dans E.

Définition 16.20 : Convergences simple, uniforme et normale

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
  En cas de convergence, on appelle *fonction somme* de la série la fonction S définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Bien entendu, si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Théorème 16.21

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Attention aux liens et confusions possibles avec la convergence absolue telle que définie dans le chapitre « Norme sur un espace vectoriel normé ».

On admet l'extension suivante du théorème.

Théorème 16.22 : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E et a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et $\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$.

S'ajoutent les deux théorèmes suivants de dérivation et d'intégration terme à terme *sur un segment.*

Théorème 16.23 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Théorème 16.24 : Intégration terme à terme sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E, convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

Exercice 5

(i) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| < 1$ pour une certaine norme sous-multiplicative, $\sum M^k$ converge et préciser sa somme.

(ii) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 1$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geqslant 0$ tel que :

$$\forall r \geqslant R, \quad A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r\mathrm{e}^{i\theta})^{k+1} \left(r\mathrm{e}^{i\theta} I_n - A \right)^{-1} \mathrm{d}\theta$$

(iii) Retrouver le théorème de Cayley-Hamilton.

En revanche, le théorème de convergence dominée et son homologue, le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, ne s'appliquent pas dans le cadre du programme aux fonctions vectorielles.