

# DS DE PHYSIQUE N°6

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables sont interdits.

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4h.
- ✓ Ce devoir comporte trois problèmes indépendants :
  - Problème 1 (CCINP MP 2014) : Electromagnétisme GSM 4G
  - Problème 2 (Centrale MP 2020) : Proxima du Centaure
  - Problème 3 (CCINP MP 2013) : Propagation en électromagnétisme

*NB. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.

## Problème 1 : ELECTROMAGNETISME : GSM 4G (CCINP MP 2014)

### Données :

- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ou l'air :  $c = 3.10^8 \text{ m s}^{-1}$ ,
- permittivité diélectrique du vide ou de l'air :  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F m}^{-1}$ ,
- perméabilité magnétique du vide ou de l'air :  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ .

**Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutefois, la compréhension et la réalisation de la première partie permettent d'aborder plus rapidement les deux dernières parties.**

On s'intéresse à l'un des deux standards de télécommunication, candidat pour la 4<sup>e</sup> génération de la téléphonie mobile, « Long Term Evolution – Advanced ». Il est constitué, en France, de deux bandes de fréquences dites 800 MHz et 2 600 MHz. Par le déploiement de technologies particulières, des débits supérieurs à 30 Mbits / seconde pour des mobiles en mouvement sont visés.

L'espace est défini par un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et on considère un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On pose  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ .

## PARTIE III : PROPAGATION DANS L'AIR

### III.1. Propagation

**III.1.1.** Donner, en les nommant, les équations de Maxwell sous leurs formes locales dans l'air en l'absence de sources. On traitera des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  comme n'étant pas nécessairement ceux d'une Onde Plane Progressive Sinusoïdale (OPPS).

**III.1.2.** Etablir l'équation de propagation en champ électrique et en déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'onde, en fonction des données de l'énoncé.

**III.1.3.** On considère à présent que le champ  $\vec{E}(M, t)$  est celui d'une OPPS polarisée rectilignement parallèlement à  $\vec{e}_x$ , se propageant suivant les  $z$  croissants et dont la formulation générale est donnée par l'expression complexe  $\vec{E}(M, t) = \overrightarrow{E_m} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde de norme constante  $k$ ,  $\omega$  est la pulsation et  $\overrightarrow{E_m}$  est une constante complexe vectorielle.

**III.1.3.a.** Préciser et justifier l'expression de  $\vec{k}$  et la direction de  $\overrightarrow{E_m}$ .

**III.1.3.b.** Donner l'expression de  $\vec{E}(M, t)$  en fonction des coordonnées de  $M$  et en projection dans la base cartésienne  $\mathcal{B}$  associée à  $\mathcal{R}$ .

**III.1.3.c.** Expliciter les deux termes de l'équation de propagation en fonction de  $k$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}(M, t)$ .

**III.1.3.d.** En déduire la relation de dispersion du milieu.

**III.1.4.** Dans l'hypothèse de la question précédente, expliciter le champ  $\vec{B}(M, t)$  dans la base cartésienne  $\mathcal{B}$  en fonction de  $\underline{E}_m$ ,  $c$ ,  $k$  et  $\omega$ .

**III.1.5.** En notant  $\underline{E}_m = E_m e^{j\varphi}$ ,  $\varphi$  étant une constante, expliciter les champs réels  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ .

### III.2. Puissance et rayonnement

**III.2.1.** Donner la définition du vecteur de Poynting  $\vec{R}(M, t)$  en fonction des champs et son interprétation physique. Quelle est sa dimension physique ?

**III.2.2.** Montrer que la valeur moyenne temporelle de la norme de  $\vec{R}(M, t)$  peut s'écrire  $\langle \|\vec{R}\| \rangle = \alpha c \varepsilon_0 E_m^2$  pour les champs de l'OPPS définie dans la partie III.1. On donnera la valeur de la constante  $\alpha$ .

**III.2.3.** Dans le cas d'une antenne réelle, l'hypothèse de l'OPPS n'est valable que localement. On sait alors que la valeur de  $\langle \vec{R} \rangle$  dépend de la distance  $d$  à l'antenne, de la puissance  $P_a$  d'alimentation et de son gain  $G$ , lequel dépend de la direction d'observation. On peut ainsi écrire :  $4\pi d^2 \langle \|\vec{R}(d)\| \rangle = P_a G$ . Exprimer l'amplitude  $E_m$  du champ en fonction de  $c$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $P_a$ ,  $G$  et  $d$ .

### III.3. Exposition

Il est parfois nécessaire de privilégier un sens de fonctionnement de l'antenne. L'énergie rayonnée par une antenne est alors répartie de manière inégale dans l'espace et il existe des directions privilégiées, appelées "lobes de rayonnement". Ces différentes directions peuvent être visualisées à l'aide du diagramme de rayonnement réalisé en trois dimensions. Le lobe le plus important est appelé "lobe principal". Il est dirigé vers l'avant de l'antenne. Les lobes secondaires, moins importants, sont dirigés vers l'arrière ou sur les côtés de l'antenne.

La norme sanitaire pour ce type de rayonnement est actuellement en France  $E_{\max} = 61 \text{ V/m}$ . Elle correspond à un seuil défini sur la base des effets thermiques (échauffement) liés au champ électromagnétique. A titre de comparaison, la norme en Italie, Russie, Pologne et Chine est de  $E_1 = 6 \text{ V/m}$ .

**III.3.1.** Dans le cadre d'une implantation urbaine, il se peut que certains locaux interceptent le lobe principal. En considérant dans ce cas une puissance  $P_a = 50 \text{ W}$ , un gain  $G = 63$  et une distance  $d = 100 \text{ m}$ , calculer l'intensité du champ  $E_{m1}$ . Commenter le résultat.

- III.3.2.** Une autre possibilité d'être exposé au rayonnement d'une antenne relais concerne le lobe secondaire orienté vers le sol. Dans ce cas le gain est plus faible, mais la distance également. Calculer, pour la même puissance  $P_a = 50 \text{ W}$ , le champ  $E_{m2}$  dans le cas où  $G = 2$  et  $d = 10 \text{ m}$ . Commenter le résultat.

## PARTIE IV : REFLEXION D'UNE OPPS PAR UN MUR DE BETON

De façon préliminaire, on considère une interface air – métal parfait dans le plan  $z = 0$ . L'air occupe l'espace des  $z < 0$  et le métal celui des  $z > 0$ . L'onde incidente est une OPPS se propageant dans l'air, polarisée selon  $\vec{e}_x$  et qui arrive normalement à l'interface. On note  $\underline{E}_{mi} = E_m e^{j\varphi}$  et  $\underline{E}_{mr}$ , respectivement, les amplitudes complexes des champs incident et réfléchi. On note  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_r$ , les vecteurs d'ondes associés respectifs. On admet que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente.

### IV.1. Expressions des champs

- IV.1.1.** Exprimer les champs électrique  $\vec{E}_i(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}_i(M, t)$  incidents en fonction de  $\underline{E}_{mi}$ ,  $z$ ,  $\omega$ ,  $t$  et  $k = \|\vec{k}_i\| = \frac{\omega}{c}$ .
- IV.1.2.** Exprimer les champs électrique  $\vec{E}_r(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}_r(M, t)$  réfléchis en fonction de  $\underline{E}_{mr}$ ,  $z$ ,  $\omega$ ,  $t$  et  $k = \|\vec{k}_i\| = \frac{\omega}{c}$ .
- IV.1.3.** Rappeler les propriétés d'un conducteur à l'équilibre. Quelles sont les expressions des champs  $\vec{E}_c(M, t)$  et  $\vec{B}_c(M, t)$  dans le conducteur ?
- ~~**IV.1.4.** On donne la continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface.~~
- IV.1.5.** En déduire la valeur du coefficient de réflexion en champ  $\underline{r} = \frac{\underline{E}_{mr}}{\underline{E}_{mi}}$ .

### IV.2. Champ total et ondes stationnaires

- IV.2.1.** Déterminer l'expression du champ total réel  $\overrightarrow{E_{total}}(M, t)$ .
- IV.2.2.** Quelle est sa particularité ? Justifier.
- IV.2.3.** Représenter l'amplitude de  $\overrightarrow{E_{total}}(M, t)$  en fonction de la position de  $M$  pour trois valeurs différentes de  $t$ .
- IV.2.4.** Localiser et nommer les points remarquables de la représentation.
- IV.2.5.** Donner la distance  $d_m$  entre un minimum et un maximum adjacents en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde.

On remplace à présent le métal parfait par du béton. On reprend l'ensemble du problème et des notations considérées dans les parties IV.1 et IV.2. On donne le nouveau coefficient de réflexion en champ  $\underline{r} = r e^{j\alpha}$  dans la gamme de fréquence de la bande 2 600 MHz avec  $r = 0,386$  et  $\alpha = 169^\circ$ .

**IV.3.** Mettre le champ total  $\vec{E}_{total}(M,t)$  dans l'air sous la forme  $\vec{E}_{total}(M,t) = [\underline{f}(z)] \vec{E}_i(M,t)$  et exprimer  $\underline{f}(z)$  en fonction de  $r$ ,  $\alpha$ ,  $z$  et  $k$ .

**IV.4.** En constatant que  $\|\vec{E}_{total}\| = |\underline{f}(z)| \|\vec{E}_i\|$ , exprimer les valeurs maximale  $\|\vec{E}_{total}\|_{\max}$  et minimale  $\|\vec{E}_{total}\|_{\min}$  de l'amplitude de  $\|\vec{E}_{total}\|$  en fonction de  $r$  et  $E_m$ .

**IV.5.** Pour le coefficient de réflexion donné ci-dessus pour le béton, calculer le rapport  $\rho = \frac{\|\vec{E}_{total}\|_{\max}}{\|\vec{E}_{total}\|_{\min}}$ , également appelé Rapport d'Onde Stationnaire ou ROS.

**IV.6.** Donner la distance  $d_m$  entre un minimum et un maximum adjacents.

**IV.7.** Pour un véhicule se déplaçant à  $v = 60$  km/h, calculer le temps qui s'écoule entre un maximum et un minimum de champ. En quoi cela peut-il affecter la communication ?

## PARTIE V : TECHNOLOGIE MIMO

L'une des clés pour l'élévation du débit de la 4G réside dans la capacité des antennes à différencier les signaux en fonction de leur direction d'arrivée (ou d'envoi). Pour illustrer cette fonction, considérons le cas de deux OPPS de même amplitude  $E_m$ , mais de phases à l'origine différentes. En associant cette origine à la première onde, on a  $\underline{E}_{m1} = E_m \neq E_m e^{j\varphi} = \underline{E}_{m2}$ . Elles utilisent le même canal et donc la même pulsation  $\omega$ . Elles ont la même polarisation rectiligne  $\vec{e}_x$ . Les directions d'arrivée en un point quelconque de l'espace sont  $\vec{k}_1 = k(\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$  et  $\vec{k}_2 = k(-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$ .

### V.1. Champs électriques

**V.1.1.** En vous appuyant sur un schéma clair, représenter dans le repère cartésien les vecteurs  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ , ainsi que les champs associés  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  et  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{B}_2$  en respectant la vraisemblance liée à la structure des OPPS.

**V.1.2.** Exprimer les composantes  $\underline{E}_{1x}(M,t)$  et  $\underline{E}_{2x}(M,t)$  respectivement des champs  $\vec{E}_1(M,t)$  et  $\vec{E}_2(M,t)$  selon la direction  $\vec{e}_x$  en fonction de  $E_m$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $k$ ,  $z$ ,  $y$  et  $\theta$ .

## V.2. Détection MIMO

**V.2.1.** On dispose deux antennes de réception en mesure de détecter le champ électrique aux points  $P\left(x_P = 0, y_P = -\frac{\lambda}{4}, z_P = 0\right)$  et  $Q\left(x_Q = 0, y_Q = +\frac{\lambda}{4}, z_Q = 0\right)$ . Exprimer les composantes  $\underline{E}_{1x}(P, t)$ ,  $\underline{E}_{1x}(Q, t)$ ,  $\underline{E}_{2x}(P, t)$  et  $\underline{E}_{2x}(Q, t)$  des champs en fonction de  $E_m$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $t$  et  $\theta$ , puis exprimer les champs totaux  $\overrightarrow{E_{total}}(P, t)$  et  $\overrightarrow{E_{total}}(Q, t)$  en fonction de ces mêmes paramètres.

**V.2.2.** On introduit le paramètre réel et variable  $\phi$ . Grâce à un calculateur numérique, on peut estimer la quantité  $\vec{E}(t, \phi) = \overrightarrow{E_{total}}(P, t) + e^{j\phi} \overrightarrow{E_{total}}(Q, t)$  pour diverses valeurs de  $\phi$ . Montrer que les contributions issues des champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  font apparaître respectivement les facteurs  $\underline{f}_1(\phi) = 1 + e^{j(\phi + \pi \sin \theta)}$  et  $\underline{f}_2(\phi) = 1 + e^{j(\phi - \pi \sin \theta)}$ .

**V.2.3.** Proposer deux valeurs particulières  $\phi_1$  et  $\phi_2$  respectivement telles qu'après calcul de  $\vec{E}$  :

- on annule la contribution de  $\vec{E}_2$  dans  $\vec{E}(t, \phi_1)$ ,
- on annule la contribution de  $\vec{E}_1$  dans  $\vec{E}(t, \phi_2)$ .

**V.2.4.** On peut donc conclure que, si les directions d'arrivée sont connues et que l'on dispose d'une capacité de calcul suffisante, on peut séparer les deux signaux. Commenter l'intérêt de ce traitement dans le contexte du sujet.

**Fin de l'énoncé.**

### III Voyager vers Proxima du Centaure

Pour accomplir un voyage hypothétique vers Proxima du Centaure, on envisage un vaisseau à voile solaire, propulsé grâce à la réflexion du rayonnement électromagnétique du Soleil sur la voile. Plus la voile est grande et réfléchissante, plus grande est la force de propulsion.

Une onde plane progressive monochromatique, se propageant selon  $\vec{u}_x$  depuis les  $x < 0$ , arrive sur la voile solaire, métal de conductivité réelle  $\gamma$ , assimilée dans un premier temps à un demi espace infini  $x > 0$  (dénommé dans la suite approximation espace infini).

L'onde incidente dans le demi espace vide des  $x < 0$  s'écrit, en notation complexe,

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

et arrive en  $x = 0$  sur un métal de conductivité  $\gamma$ .

**Q 33.** Rappeler sans démonstration l'équation dont le champ électrique est solution dans le vide. En déduire la relation de dispersion liant  $k$  et  $\omega$  en fonction de la célérité  $c$  de l'onde. Comment qualifier la propagation de cette onde ?

**Q 34.** Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde incidente.

**Q 35.** Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde incidente.

Cette onde incidente donne naissance à l'interface avec la voile solaire à :

— une onde réfléchie (se propageant selon  $-\vec{u}_x$  dans l'espace  $x < 0$ ) de la forme

$$\vec{E}_r = \underline{r} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t + kx)) \vec{u}_y ;$$

— une onde transmise (se propageant selon  $+\vec{u}_x$  dans l'espace  $x > 0$ ) de la forme

$$\vec{E}_t = \underline{t} \underline{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}_m x)) \vec{u}_y.$$

Dans le métal (demi espace  $x > 0$ ), le champ électrique de l'onde transmise vérifie l'équation différentielle

$$\Delta \vec{E}_t = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2}. \quad (\text{III.1})$$

**Q 36.** Proposer une simplification de l'équation (III.1) pour une onde, dans le domaine du visible ou de l'infrarouge, se propageant dans l'or de conductivité  $\gamma = 45 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Q 37.** Exprimer le vecteur d'onde complexe  $\underline{k}_m$  en fonction d'une longueur  $\delta$  dont on donnera l'expression et la signification.

**Q 38.** Proposer une épaisseur raisonnable pour la voile solaire afin que l'approximation espace infini puisse être conservée. Sachant que la masse volumique de l'or est  $\rho = 19,3 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , estimer la masse d'une voile solaire de surface  $100 \text{ m}^2$ .

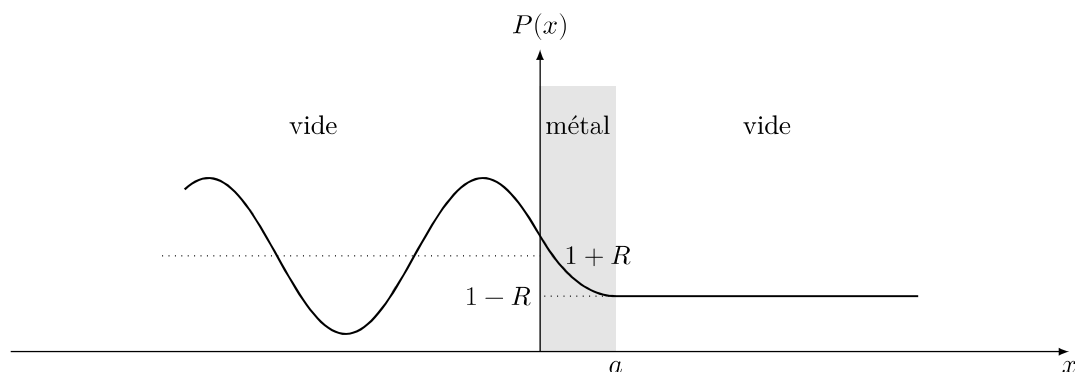


Figure 6

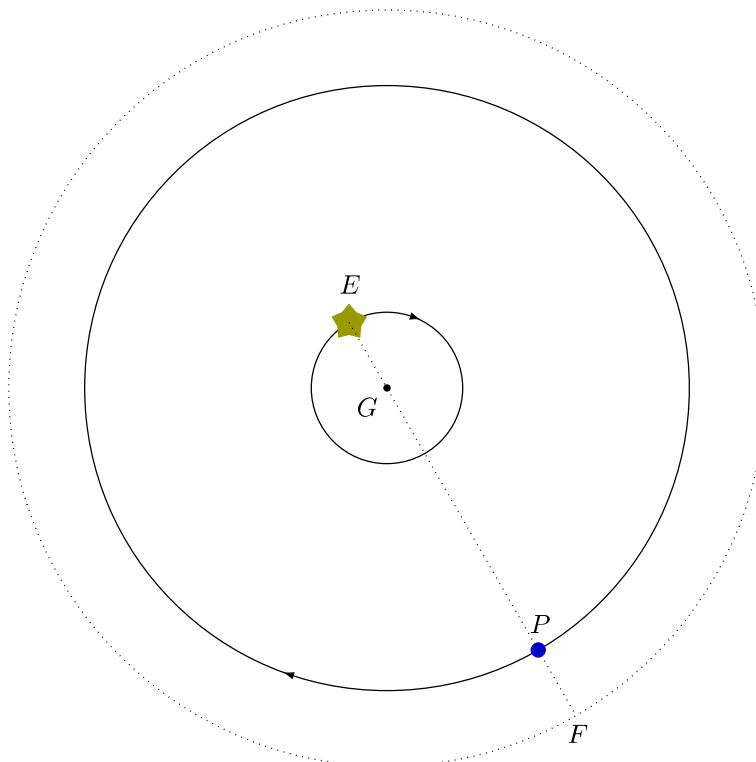
La figure 6 représente l'évolution spatiale de la norme du vecteur de Poynting moyen pour une voile pour laquelle l'approximation espace infini n'est plus vérifiée.  $R$  est le coefficient de réflexion en énergie de la voile.

**Q 39.** Commenter cette figure. À quel phénomène la situation étudiée est-elle analogue ?

**Q 40.** En utilisant le modèle corpusculaire de la lumière, proposer une expression de la force qui s'exerce sur la voile en fonction, entre autres paramètres, de la puissance électromagnétique moyenne incidente par unité de surface et de  $R$ , coefficient de réflexion en énergie de la voile. Évaluer l'ordre de grandeur de cette force à proximité de la Terre où la puissance surfacique du rayonnement solaire est d'environ  $1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

## IV Une exoplanète : *Proxima Centauri b*

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de *Proxima Centauri b*, une planète « super Terre » rocheuse de masse  $M_P$  d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de *Proxima Centauri* (soit dans la zone habitable). Cette exo-planète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.



**Figure 7** Schéma représentant l'étoile  $E$  et la planète  $P$  en rotation autour du point  $G$ , centre de masse du système {étoile + planète} ; le point  $F$  est un point utilisé pour étudier le mouvement de  $E$  et  $P$  autour de  $G$

### IV.A – Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse  $G$  du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile  $E$  et la planète  $P$  tournent toutes les deux autour du centre de masse  $G$  du système complet (figure 7).

Le centre de masse  $G$  est défini par l'une des deux relations

$$(M_E + M_P)\overrightarrow{AG} = M_E \overrightarrow{AE} + M_P \overrightarrow{AP} \quad \text{pour tout point } A$$

$$M_E \overrightarrow{GE} + M_P \overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre  $G$  dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

**Q 41.** Établir la relation  $\overrightarrow{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \overrightarrow{EP}$ . Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite  $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$  et  $\|\vec{r}\| = r$ .

**Q 42.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète  $P$  dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{r}$ .

On considère le point  $F$  défini par  $\vec{r} = \overrightarrow{GF}$ . Ce point est en mouvement circulaire, de période  $T$ , autour de  $G$ .

**Q 43.** Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(M_E + M_P)}{4\pi^2}.$$

Quel nom porte cette loi ?

**Q 44.** Justifier que  $E$  a un mouvement circulaire uniforme autour de  $G$  et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de  $M_P$ ,  $M_E$ ,  $r$  et  $T$ .



### Problème 3 (CCINP MP 2013)

## ELECTROMAGNETISME : PROPAGATION EN ELECTROMAGNETISME

Les **parties III, IV et V** sont indépendantes. Conformément aux usages internationaux, les vecteurs sont notés en gras tandis que les grandeurs complexes sont soulignées d'une barre.

### PARTIE III : REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Dans l'espace, défini par le repère  $(O, x, y, z)$ , une onde plane électromagnétique, progressive, sinusoïdale, monochromatique de pulsation  $\omega$  et polarisée rectilignement suivant  $Ox$  arrive, conformément à la **figure 7**, avec l'incidence  $i$  sur l'interface en  $z=0$  séparant le vide ( $z < 0$ ) d'un milieu conducteur métallique parfait non chargé ( $z > 0$ ) de permittivité et perméabilité assimilables respectivement à  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . On s'intéresse aux champs complexes caractérisant les ondes.

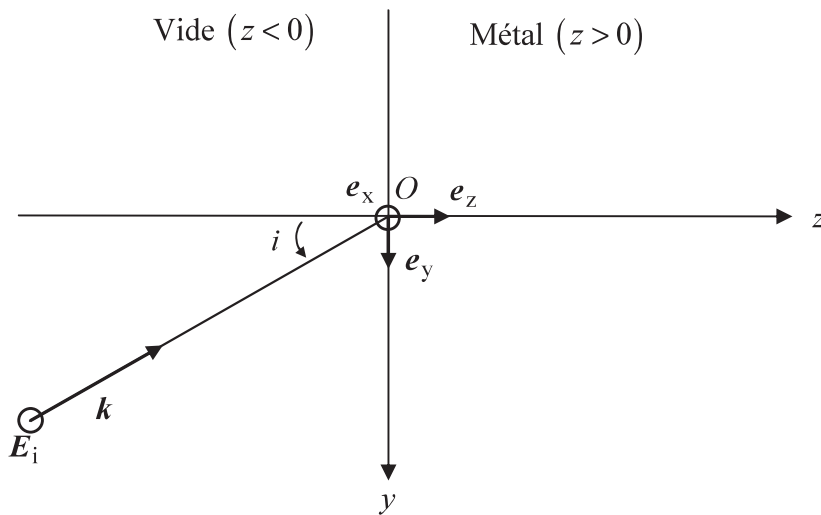


Figure 7 : onde plane électromagnétique incidente

#### III.1. Onde incidente

**III.1.a** Rappeler ce qu'est une onde progressive.

**III.1.b** Déterminer les composantes du vecteur de propagation  $k$  de l'onde incidente.

**III.1.c** Ecrire en notations complexes, en un point  $M$  du vide repéré par ses coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z < 0$  et à un instant  $t$  donné, l'expression du champ électrique  $\underline{E}_i$ . On notera  $E_0$  son amplitude et on prendra la convention  $\exp[-j(\omega t - \varphi)]$  avec  $j^2 = -1$ .

**III.1.d** Dédire, des équations de Maxwell, l'équation de structure de l'onde.

- III.1.e** Ecrire en notations complexes en fonction de  $E_0$ , en  $M$  et à l'instant  $t$ , l'expression du champ magnétique  $\underline{B}_i$  associé à  $\underline{E}_i$ . Quelle est la direction de polarisation de  $\underline{B}_i$  ?
- III.1.f** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting réel  $\mathbf{R}$  de l'onde incidente. Quelle est sa valeur moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R} \rangle$  ? Quelle est la direction de  $\mathbf{R}$  ? Justifier.

### III.2. Onde réfléchie

- III.2.a** Après avoir énoncé les lois de Descartes pour la réflexion, déterminer l'expression du vecteur de propagation  $\mathbf{k}_r$  de l'onde réfléchie. On suppose que la polarisation de l'onde réfléchie est du même type et de même direction que celle de l'onde incidente.
- III.2.b** Donner l'expression générale, en  $M$  et à l'instant  $t$ , du champ électrique  $\underline{E}_r$  de l'onde réfléchie, d'amplitude  $E_{0r}$ .
- III.2.c** En déduire l'expression générale du champ magnétique  $\underline{B}_r$  de l'onde réfléchie.
- III.2.d**  
On donne la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, rappeler les propriétés d'un conducteur parfait. En déduire l'expression de  $E_{0r}$ , en fonction de  $E_0$ .
- III.2.e** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting réel  $\mathbf{R}_r$  de l'onde réfléchie. Quelle est sa valeur moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R}_r \rangle$  ? Comparer  $\langle \|\mathbf{R}_r\| \rangle$  avec  $\langle \|\mathbf{R}\| \rangle$ . Quelle est la direction de  $\mathbf{R}_r$  ? Justifier.

### III.3. Onde résultante

- III.3.a** Déterminer les expressions des champs réels résultants électrique  $E_t$  et magnétique  $B_t$  dans le vide.
- III.3.b** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting résultant  $\mathbf{R}_t$  ainsi que sa valeur moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ . Commenter.

## PARTIE IV : COURANT DANS UN CONDUCTEUR EN REGIME VARIABLE

Le conducteur métallique ci-dessus n'est plus supposé parfait mais possède une conductivité  $\gamma$ , ce dernier paramètre intervenant dans la loi d'Ohm locale. Ce conducteur est le siège d'un courant volumique  $\mathbf{J}$  sinusoïdal de pulsation élevée  $\omega$ . On admet que la loi d'Ohm locale liant le courant volumique et le champ électrique est vérifiée dans le domaine de fréquences considérées.

- IV.1** Ecrire les équations locales de Maxwell pour ce milieu non chargé.

- IV.2** Définir le courant de déplacement  $J_D$  et montrer, qu'à très haute fréquence, son amplitude est négligeable devant celle du courant de conduction  $J_C$ . Pour cela, on prendra l'exemple du cuivre de conductivité  $\gamma = 5,7 \cdot 10^7$  S.I. à la fréquence  $\nu = 100$  MHz. On négligera par la suite le courant de déplacement dans le conducteur.
- IV.3** Montrer que  $J$  satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme  $\Delta J - \alpha \frac{\partial J}{\partial t} = 0$ , où  $\alpha$  est une constante à déterminer en fonction de  $\mu_0$  et de  $\gamma$ . On rappelle, que pour le champ de vecteurs  $F$ ,  $\nabla \wedge (\nabla \wedge F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$ , dans laquelle  $\nabla$  représente l'opérateur nabla.
- IV.4** Le courant volumique  $J$  est parallèle à l'axe  $Oy$  et ne dépend que du temps  $t$  et de la coordonnée  $z$ .
- IV.4.a** Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par  $J(z, t)$ .
- IV.4.b** Vérifier qu'en notation complexe l'expression de  $\underline{J}(z, t)$  peut être du type  $\underline{J}(z, t) = J_0 \exp(-z/\delta) \exp[j((z/\delta) - \omega t)]$  où  $\delta$  et  $\omega$  sont des constantes.
- IV.4.c** Expliciter  $\delta$  en fonction de  $\omega$ ,  $\mu_0$  et  $\gamma$ .
- IV.4.d** Calculer  $\delta$  en utilisant les données numériques fournies au **IV.2**. Préciser son unité et conclure sur la pénétration du courant dans un conducteur à très haute fréquence.
- IV.5** Donner l'expression réelle de  $J$  dans le conducteur et en déduire l'expression du champ électrique réel  $E(M, t)$  en tout point  $M$  du conducteur. Déterminer l'expression de la puissance volumique moyenne  $\ll P_j \gg$  dissipée par effet Joule sur une période d'oscillation du champ et dans la totalité du conducteur, en fonction du module de  $J_0$ , des paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  et de la surface  $S$  du conducteur.

## PARTIE V : SUPRACONDUCTIVITE / EFFET MEISSNER

Certains conducteurs métalliques, comme le plomb, deviennent supraconducteurs à température suffisamment basse. On se replace dans les configurations géométriques précédentes avec le vide ( $z < 0$ ) et le milieu conducteur ( $z > 0$ ). **Le potentiel vecteur  $A$  associé au champ magnétique est défini par la relation suivante :  $\vec{B} = \text{rot } A$ .**

- V.1.** On admettra qu'un tel supraconducteur est un conducteur parfait pour lequel la densité volumique de courant  $J_c$  est reliée au potentiel vecteur  $A$  par  $J_c = -\frac{ne^2}{m_e} A$ ,  $A$  étant choisi de façon à ce que sa divergence soit nulle,  $n$ ,  $e$  et  $m_e$  représentant respectivement le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, la charge élémentaire et la masse de l'électron.

- V.1.a** Rappeler la contrainte imposée sur le champ électrique intérieur au matériau.

**V.1.b** Calculer une quantité  $\delta$  de même nature physique que dans la partie précédente (partie **IV**) et qui peut se mettre ici sous la forme  $\delta = \left( \frac{m_e}{ne^2\mu_0} \right)^{1/2}$  dans le cas du plomb en considérant  $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**V.2** Ecrire les équations de Maxwell à l'intérieur du supraconducteur pour les champs électrique et magnétique. Montrer que ce dernier vérifie une équation de la forme  $\Delta \mathbf{B} - \lambda^2 \mathbf{B} = 0$ , où  $\lambda$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\delta$ .

**Fin de l'énoncé.**