Intégration

Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Intégrale des fonctions en escalier (réelles)

1.1 Fonctions en escalier

1.1.1 Subdivisions d'un intervalle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de réels tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Remarques

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$, pour $0 \leqslant k \leqslant m$, posons $x_k = a + k\dfrac{b-a}{m}$. Alors $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ appelée subdivision régulière d'ordre m.
- Si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, alors le pas de σ est le nombre :

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

- Soient $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ des subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ est plus fine que τ si $\{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \subset \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- Soient $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ des subdivisions de $[a, b]$. On note $\sigma \vee \tau$ la subdivision obtenue en listant par ordre croissant et éléments de $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$. Il est alors clair que $\sigma \vee \tau$ est plus fine que σ et τ.

1.1.2 Fonctions en escalier

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in [[0, n-1]]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est constante.

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f. On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier réelles sur $[a, b]$.

Remarques

- Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$, σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.
- Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + g$, fg, $|f|$, $\dfrac{1}{f}$ (si f ne s'annule pas), $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont des fonctions en escaliers.
  Ces résultats sont immédiats en considérant la subdivision $\sigma \vee \tau$ adaptée à f et à g.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$.

(1) Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, et notons pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ λ_i la valeur constante de f sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On pose alors :

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

(2) Si σ et τ sont deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f, alors $I_\sigma(f) = I_\tau(f)$.

(3) On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ notée $I(f)$ le nombre $I_\sigma(f)$, avec σ étant n'importe quelle subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Démonstration du (2)

- Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on notera λ_i la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Soit $c \in [a, b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, alors $\exists i \in [[0, n-1]]$ tel que $x \in]x_i, x_{i+1}[$ et posons $\sigma' = (x_0, \dots, x_i, c, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Alors

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f) &= \lambda_0 (x_1 - x_0) + \cdots + \underbrace{\lambda_i (c - x_i) + \lambda_i (x_{i+1} - c)}_{\lambda_i (x_{i+1} - x_i)} + \cdots + \lambda_{n-1} (x_n - x_{n-1}) \\ &= I_\sigma (f) \end{aligned}$$

  Ce résultat est donc valable pour toutes les subdivisions de $[a, b]$ plus fines que σ.
- Soient σ, τ deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f et ω une subdivision plus fine que τ et σ. Alors $I_\sigma (f) = I_\omega (f) = I_\tau (f)$, d'où le résultat.

1.3 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1.3.1 Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$. En particulier, $I(-f) = -I(f)$.

Démonstration Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et à g. Pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on note λ_i (respectivement μ_i) la valeur constante de f (respectivement g) sur $]x_i, x_{i+1}[$. Alors $\alpha f + g$ est constante égale à $\alpha\lambda_i + \mu_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ donc σ est également adaptée à $\alpha f + g$ et

$$\begin{aligned} I(\alpha f + g) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha\lambda_i + \mu_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= \alpha I(f) + I(g) \end{aligned}$$

1.3.2 Positivité

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $\forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0$. Alors $I(f) \geqslant 0$.

Démonstration $I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{>0}$, d'où le résultat.

Corollaires

(1) upient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ avec $f \leqslant g$. Alors $I(f) \leqslant I(g)$.
En effet, $g - f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $g - f \geqslant 0$ donc $I(g - f) = I(g) - I(f) \geqslant 0$.

(2) Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$, alors $|I(f)| \leqslant I(|f|)$.
En effet, $f \leqslant |f|$ donc $I(f) \leqslant I(|f|)$. De même, $-f \leqslant |f|$ donc $-I(f) \leqslant I(|f|)$ d'où le résultat.

1.3.3 Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $c \in]a, b[$, alors $f_{|[a,c]} \in \mathcal{E}([a, c])$, $f_{|[c,b]} \in \mathcal{E}([c, b])$ et $I(f) = I\left(f_{|[a,c]}\right) + I\left(f_{|[c,b]}\right)$.

Démonstration Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, on peut supposer que $c \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ quitte à le rajouter. Pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on notera λ_i la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Posons $c = x_j$:

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= I\left(f_{|[a,c]}\right) + I\left(f_{|[c,b]}\right) \end{aligned}$$

En effet, $(x_0, x_1, \dots, x_j)$ est une subdivision de $[a,c]$ adaptée à $f_{|[a,c]}$ et $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[c,b]$ adaptée à $f_{|[c,b]}$.

2 Intégrale de fonctions continues par morceaux réelles

2.1 Fonctions continues par morceaux

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que, $\forall i \in [[0, n-1]]$:
(1) f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.
(2) f admet une limite à droite finie en x_i et une limite à gauche finie en x_{i+1}.

On dit alors que σ est adaptée à f. On note $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Remarques
- Si $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b], \mathbb{K})$ et si σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, alors toute subdivision plus fine que σ est également adaptée à f.
- Si $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b], \mathbb{K})$, alors il existe toujours une subdivision adaptée à f et à g.
- Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b], \mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\alpha f + g$, fg, $\dfrac{1}{f}$ (si f ne s'annule pas), $|f|$ appartiennent à $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b], \mathbb{K})$.
  - Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont aussi continues par morceaux.
  - Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\Re\text{e}(f)$, $\Im\text{m}(f)$, $|f|$ et $\overline{f}$ sont aussi continues par morceaux.

2.2 Théorèmes d'approximation

2.2.1 Énoncés

Théorème 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
Alors $\exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec :
(1) $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$
(2) $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varepsilon > 0$.
Alors $\exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec :
(1) $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$
(2) $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$

2.2.2 Démonstrations

Démonstration du théorème 1 f est continue sur le compact $[a,b]$ donc, d'après le théorème de Heine [a], f est uniformément continue : $\exists \alpha > 0 / \forall s,t \in [a,b], |s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{m} \leqslant \alpha$ et σ la subdivision régulière de $[a,b]$ d'ordre m. Soit $i \in [[0, m-1]]$,f est continue sur le compact $[x_i, x_{i+1}]$ donc f est bornée et atteint ses bornes [b] sur $[x_i, x_{i+1}]$. Posons $m_i = \min\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$ et $s_i, t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que $f(s_i) = m_i$ et $f(t_i) = M_i$.

On définit alors φ_ε et ψ_ε de la façon suivante :

- Pour $i \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_\varepsilon(x_i) = \psi_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$.
- Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, φ_ε est constante égale à m_i sur $]x_i, x_{i+1}[$ et ψ_ε est constante égale à M_i sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Alors on a bien $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$. En effet, pour $t \in]x_i, x_{i+1}[$,

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t) &= M_i - m_i \\ &= f(t_i) - f(s_i) \\ &\leqslant |f(t_i) - f(s_i)| \\ &\leqslant \varepsilon \quad \text{car } |s_i - t_i| \leqslant \alpha \end{aligned}$$

Et $\varphi_\varepsilon(x_i) = \psi_\varepsilon(x_i) = 0 \leqslant \varepsilon$.

Démonstration du théorème 2 Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et $i \in [\![0, n-1]\!]$. Posons :

$$\tilde{f} : \begin{array}{l} [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } x_i < t < x_{i+1} \\ \lim\limits_{x_i^+} f & \text{si } t = x_i \\ \lim\limits_{x_{i+1}^-} f & \text{si } t = x_{i+1} \end{cases} \end{array}$$

Il est clair que $\tilde{f}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ donc, d'après le théorème 1 appliqué à $[x_i, x_{i+1}]$, $\exists \varphi_\varepsilon^i, \psi_\varepsilon^i \in \mathcal{E}([x_i, x_{i+1}])$ avec $\varphi_\varepsilon^i \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon^i$ et $\psi_\varepsilon^i - \varphi_\varepsilon^i \leqslant \varepsilon$. Soit $t \in [a,b]$.

- Si $t \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,on pose $\varphi_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t) = f(t)$.
- Sinon, $\exists i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $t \in]x_i, x_{i+1}[$ donc on pose $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon^i(t)$ et $\psi_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon^i(t)$. Alors $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$, on a bien $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \varepsilon$.

Corollaire Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ et $I(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

En effet, d'après le théorème 2, $\exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. D'où

$$I(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leqslant I\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) = \varepsilon$$

2.3 Définition de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux réelles

Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$. On note $\mathcal{E}^+ = \{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \,|\, \psi \leqslant f\}$, $\mathcal{E}^- = \{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \,|\, \psi \leqslant f\}$, $\Lambda^+ = \{I(\psi) \,|\, \psi \in \mathcal{E}^+\}$ et $\Lambda^- = \{I(\psi) \,|\, \psi \in \mathcal{E}^-\}$.

Alors Λ^+ est minoré, Λ^- est majoré en $\inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^-$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f$ le nombre $\inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^-$.

a. Voir section 11.1.2.1 du cours complet page 178.

b. Voir section 11.1.2.3 du cours complet page 179.

Preuve D'après le théorème 2, $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ ne sont pas vides, ainsi que Λ^+ et Λ^-.

- Soit $\psi \in \mathcal{E}^+$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ donc $I(\varphi) \leqslant I(\psi)$ donc $I(\psi)$ majore Λ^- donc $\sup \Lambda^-$ existe et $\sup \Lambda^- \leqslant I(\psi)$. Ce qui précède étant valable pour tout $\psi \in \mathcal{E}^+$, on voit donc que $\sup \Lambda^-$ minore Λ^+ donc Λ^+ est minoré et $\inf \Lambda^+ \geqslant \sup \Lambda^-$.
- Soit $\varepsilon > 0$,$\exists \varphi \in \mathcal{E}^-, \psi \in \mathcal{E}^+$ avec $I(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$ d'où $I(\psi) \leqslant \varepsilon + I(\varphi)$. Ainsi

$$\inf \Lambda^+ \leqslant I(\psi) \leqslant I(\varphi) + \varepsilon \leqslant \sup \Lambda^- + \varepsilon$$

Cette inégalité étant valable $\forall \varepsilon > 0$, on a donc $\inf \Lambda^+ \leqslant \sup \Lambda^-$.
Vu les derniers résultats, $\inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^-$.

Remarque Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. Par définition de $\int_a^b f$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-$, $I(\varphi) \leqslant \int_a^b f$ et $\forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\int_a^b f \leqslant I(\psi)$. f est en escalier donc $f \in \mathcal{E}^-$ et $f \in \mathcal{E}^+$ donc :

$$I(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant I(f) \Leftrightarrow I(f) = \int_a^b f$$

2.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux réelles

2.4.1 Linéarité

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$$

En particulier, $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

Démonstration

1

1er cas : $\alpha < 0$ Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème 2, $\exists \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\omega_\varepsilon, \eta_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b])$ avec $\varphi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$, $\omega_\varepsilon \leqslant g \leqslant \eta_\varepsilon$, $I(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $I(\eta_\varepsilon - \omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. On a alors :

$$\alpha\psi_\varepsilon \leqslant \alpha f \leqslant \alpha\varphi_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{\alpha\psi_\varepsilon + \omega_\varepsilon}_{\in \mathcal{E}([a,b])} \leqslant \underbrace{\alpha f + g}_{\in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})} \leqslant \underbrace{\alpha\varphi_\varepsilon + \eta_\varepsilon}_{\in \mathcal{E}([a,b])}$$

Donc

$$I(\alpha\psi_\varepsilon + \omega_\varepsilon) \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \leqslant I(\alpha\varphi_\varepsilon + \eta_\varepsilon) \Rightarrow \alpha I(\varphi_\varepsilon) + I(\varphi_\varepsilon) \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \leqslant \alpha I(\varphi_\varepsilon) + I(\eta_\varepsilon) \quad \text{car } \alpha < 0$$

Or on a $I(\varphi_\varepsilon) \geqslant I(\psi_\varepsilon) - \varepsilon \Rightarrow \alpha I(\varphi_\varepsilon) \leqslant \alpha I(\psi_\varepsilon) - \alpha\varepsilon$ et $I(\psi_\varepsilon) \geqslant \int_a^b f \Rightarrow \alpha I(\psi_\varepsilon) \leqslant \alpha \int_a^b f$. De même, $I(\eta_\varepsilon) \leqslant I(\omega_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \int_a^b g + \varepsilon$. Ainsi :

$$\alpha I(\varphi_\varepsilon) + I(\eta_\varepsilon) \leqslant \alpha \int_a^b f + \int_a^b g + (1-\alpha)\varepsilon \quad \text{et} \quad \alpha I(\psi_\varepsilon) + I(\omega_\varepsilon) \geqslant \alpha \int_a^b f + \int_a^b g - (1-\alpha)\varepsilon$$

Donc on a $\forall \varepsilon > 0$:

$$\alpha \int_a^b f + \int_a^b g - (1-\alpha)\varepsilon \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \leqslant \alpha \int_a^b f + \int_a^b g + (1-\alpha)\varepsilon$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $\alpha > 0$ On a $\alpha\varphi_\varepsilon + \omega_\varepsilon \leqslant \alpha f + g \leqslant \alpha\psi_\varepsilon + \eta_\varepsilon$ d'où :

$$\underbrace{I(\alpha\varphi_\varepsilon + \omega_\varepsilon)}_{\alpha I(\varphi_\varepsilon)+I(\omega_\varepsilon)} \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \leqslant \underbrace{I(\alpha\psi_e + \eta_\varepsilon)}_{\alpha I(\psi_\varepsilon)+I(\eta_\varepsilon)}$$

Or $I(\psi_\varepsilon) - I(\varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ donc $I(\varphi_\varepsilon) \geqslant I(\psi_\varepsilon) - \varepsilon \geqslant \int_a^b f - \alpha$ car ψ_ε est en escalier et $\psi_\varepsilon \geqslant f$. De même, $I(\omega_\varepsilon) \geqslant \int_a^b g - \varepsilon$ d'où

$$\alpha\left(\int_a^b g - \varepsilon\right) + \int_a^b g - \varepsilon \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \Rightarrow \alpha\int_a^b f + \int_a^b g - (\alpha+1)\varepsilon \leqslant \int_a^b (\alpha f + g)$$

On a aussi $I(\psi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon + I(\varphi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon + \int_a^b f$ car φ_ε est en escalier et $\varphi_\varepsilon \leqslant f$, et $I(\eta_\varepsilon) \leqslant \varepsilon + \int_a^b g$. On obtient alors

$$\alpha\int_a^b f + \int_a^b g - (\alpha+1)\varepsilon \leqslant \int_a^b (\alpha f + g) \leqslant \alpha\int_a^b f + \int_a^b g + (\alpha+1)\varepsilon$$

Le résultat est obtenu en faisant tendre ε vers 0.

2.4.2 Positivité

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ positive. Alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

Démonstration Soit θ la fonction nulle. Alors $\theta \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\theta \leqslant f$ alors $\int_a^b f \geqslant \int_a^b \theta = 0$.

Corollaire

(1) Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \leqslant g$. Alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, alors $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Raffinement Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ positive et $x \in [a,b]$. Supposons f continue en x et $f(x) > 0$. Soit $\lambda \in]0, f(x)[$, f est continue en x donc $\exists a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ tels que $\forall t \in [c,d]$, $f(t) \geqslant \lambda$. Soit φ définie pat

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda & \text{si } t \in [c,d] \\ 0 & \text{si } t \in [a,b] \setminus [c,d] \end{cases}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\varphi \leqslant f$ donc $\int_a^b f \geqslant I(\varphi) = \lambda(d-c) > 0$. On en déduit :

(1) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est positive et différente de la fonction nulle, alors $\int_a^b f > 0$.

(2) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue positive et si $\int_a^b f = 0$, alors $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = 0$.

Inégalités de la moyenne Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée donc $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Ainsi :

$$\int_a^b m \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M \, \mathrm{d}t \Leftrightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

De même, si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant \lambda$, alors $\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \lambda (b-a)$.

On remarque que $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \in [m, M] = f([a,b])$. donc il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f = (b-a) f(\xi)$.

2.4.3 Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b], \mathbb{R})$ et $c \in \,]a,b[$. Alors $f_{|[a,c]} \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,c], \mathbb{R})$ et $f_{|[c,b]} \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([c,b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f_{|[a,c]} + \int_c^b f_{|[c,b]}$, ce que l'on écrit :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. On peut supposer que $c \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, quitte à le rajouter. Il est alors clair que $f_{|[a,c]} \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,c], \mathbb{R})$ et $f_{|[c,b]} \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([c,b], \mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que $\varphi \leqslant f$. On sait que $\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}([a,c])$, $\varphi_{|[a,c]} \leqslant f_{|[a,c]}$, mais aussi que $\varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}([c,b])$ et $\varphi_{|[c,b]} \leqslant f_{|[c,b]}$. D'où $I\left(\varphi_{|[a,c]}\right) \leqslant \displaystyle\int_a^b f$ et $I\left(\varphi_{|[c,b]}\right) \leqslant \displaystyle\int_c^b f$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= I\left(\varphi_{|[a,c]}\right) + I\left(\varphi_{|[c,b]}\right) \\ &\leqslant \int_a^c f + \int_c^b f = A \end{aligned}$$

A majore $\{I(\varphi) \,|\varphi \in |\mathcal{E}([a,b])\}$ donc :

$$\begin{aligned} A &\geqslant \sup_{[a,b]} \{I(\varphi) \,|\varphi \in \mathcal{E}([a,b])\} \\ &\geqslant \int_a^b f \end{aligned}$$

On montre de même que pour $\psi \leqslant f$ et $\psi \in \mathcal{E}([a,b])$, $\displaystyle\int_a^b f \geqslant A$ d'où le résultat.

Conventions Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$ et $f : \underset{\leftrightarrow}{[x,y]} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On convient que

- $\displaystyle\int_x^x f = 0$
- Si $x > y, \displaystyle\int_x^y f = -\int_y^x f$.

Avec ces conventions, $\forall x, y, z \in [a,b]$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$$

3 Intégrale de fonctions continues par morceaux complexes

3.1 Définition

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{C})$, $u = \Re\text{e}(f)\,\mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ et $v = \Im\text{m}(f) \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. Par définition :

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i\int_a^b v$$

On a donc $\Re\text{e}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \Re\text{e}(f)$, $\Im\text{m}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \Im\text{m}(f)$, $\overline{f} \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{C})$ et $\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$.

3.2 Propriétés

3.2.1 Relation de Chasles

Évidente car vraie pour $\Re\text{e}(f)$ et $\Im\text{m}(f)$.

3.2.2 Linéarité

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha\int_a^b f + \int_a^b g$$

Démonstration Soient $u_f = \Re\text{e}(f)$, $v_f = \Im\text{m}(f)$, $u_g = \Re\text{e}(f)$, $v_g = \Im\text{m}(g)$, posons $\alpha = \sigma + i\tau$ avec $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Alors $\Re\text{e}(\alpha f + g) = \sigma u_f - \tau v_f + u_g$ et $\Im\text{m}(\alpha f + g) = \sigma v_f + \tau u_f + u_g$. D'où :

$$\int_a^b f = \int_a^b (\sigma u_f - \tau v_f + u_g) + \int_a^b \sigma v_f + \tau u_f + u_g$$

Toutes ces fonctions étant réelles et continues par morceaux, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \alpha f + g &= \sigma\int_a^b u_f - \tau\int_a^b v_f + \int_a^b u_g + i\sigma\int_a^b v_f + i\tau\int_a^b u_g + i\int_a^b v_g \\
&= (\sigma + i\tau)\int_a^b (u_f + iv_f) + \int_a^b (u_g + iv_g) \\
&= \alpha\int_a^b f + \int_a^b g
\end{aligned}$$

3.2.3 Positivité

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ [a].

4 Intégrales et primitives

4.1 Petite histoire

Soit I un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F_a(x) = \int_a^x f$. Cette fonction est bien définie :

– On a par convention $F_a(0) = 0$.

[a]. Pour la démonstration se reporter à la section 4.3.2.2 du cours complet page 55.

- Si $x > 0$, $F_a(x)$ est l'intégrale de la fonction continue $f_{|[a,x]}$.
- Si $x < 0$,$F_a(x)$ est l'opposée de l'intégrale de la fonction $f_{|[x,a]}$ continue.

Prenons $x \in I$. Pour $y \in I \setminus \{x\}$:

$$\begin{aligned}\frac{F_a(y) - F_a(x)}{y - x} &= \frac{1}{y-x}\left(\int_a^y f - \int_a^x f\right)\\ &= \frac{\displaystyle\int_x^y f}{y-x}\end{aligned}$$

Montrons que cette dernière quantité tend vers $f(x)$ lorsque y tend vers x. Pour $y \in I \setminus \{x\}$, posons $\Delta(y) = \dfrac{\displaystyle\int_x^y f}{y-x} - f(x)$. Or $f(x) = \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}t$ donc :

$$\Delta(y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y (f(t) - f(x))\ \mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$, $f$amssymbntinue donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in I$, $|u - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Prenons alors $y \in I \setminus \{x\}$ tel que $|y - x| \leqslant \alpha$.

Si $y < x$: Pour $t \in [x, y]$, $|t - x| \leqslant |y - x| \leqslant \alpha$ donc $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ d'où :

$$\begin{aligned}|\Delta(y)| &= \frac{1}{y-x}\left|\int_x^y (f(t) - f(x))\ \mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{\leqslant \varepsilon}\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\end{aligned}$$

Si $y > x$: Pour $t \in [y, x]$, $|t - x| \leqslant |y - x| \leqslant \alpha$ donc $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$esinù :

$$\begin{aligned}|\Delta(y)| &= \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y (f(t) - f(x))\ \mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{x-y}\int_y^x |f(t) - f(x)|\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{x-y}\int_y^x \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall y \in I \setminus \{x\}$, $|y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |\Delta(y)| \leqslant \varepsilon$ donc $\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f \xrightarrow[\substack{x \to y\\ x \neq y}]{} f(x)$ donc :

$$\frac{F_a(y) - F_a(x)}{y - x} \xrightarrow[\substack{x \to y\\ x \neq y}]{} f(x)$$

Ainsi, f est dérivable en x et $F_a'(x) = f(x)$.

4.1.1 Théorème 1

> Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors f admet des primitives sur I.
> Plus précisément, $\forall x \in I$, $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ est une primitive de f sur I, c'est même la seule primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration La petite histoire se termine sur la première partie de ce théorème. Il ne nous reste plus qu'à démontrer la précision.

Soit $F_a : x \in I \longrightarrow \int_a^x f$, F_a est bien une primitive de f et $F_a(a) = 0$. Montrons l'unicité de F_a.

Petit lemme Soit G une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f est $\{t \longmapsto G(t) + \lambda | \lambda \in \mathbb{K}\}$.

En effet, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall t \in I$, $(G(t) + \lambda)' = G'(t) + f(t)$ donc $t \in I \longmapsto G(t) + \lambda$ est bien une primitive de f. Réciproquement, soit H une primitive de f. $H - G$ est dérivable sur I et $(H - G)' = 0$ donc $H - G$ est constante : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I, H(t) = G(t) + \lambda$.

Revenons à la démonstration principale : soit G une primitive de f qui s'annule en a. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I$, $G(t) = F_a(t) + \lambda \Rightarrow 0 = G(0) = F_a(0) + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$. Ainsi $G = F_a$.

4.1.2 Théorème 2

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Alors :
(1) f admet des primitives sur I.
(2) Si G est une primitive de f sur I, alors $\forall a, b \in I$, $\int_a^b f = G(b) - G(a)$. On note alors $\int_a^b f = [G(t)]_a^b$.

Démonstration

(1) *« Djàvu ! »*

(2) Soit G une primitive de f : F_a et G sont des primitives de f donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $lqt \in I$, $G(t) = F_a(t) + \lambda$. Donc, pour $b \in I$,

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F_a(b) + \lambda) - (F_a(a) + \lambda) \\ &= F_a(a) \\ &= \int_a^b f \end{aligned}$$

4.2 Théorèmes concernant l'intégration

4.2.1 Changement de variable

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors :

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u$$

4.2.2 Intégration par parties

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$. Alors :

$$\int_a^b f'g = [f(t)\, g(t)]_a^b - \int_a^b fg'$$

4.2.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, $f : \underset{\leftrightarrow}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$f(b) = T_{n,f,a}(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration Soit H_n : « Pour $f : \underset{\leftrightarrow}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f(b) = T_{n,f,a}(b) + \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$ ».

- Prouvons H_0. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, f est une primitive de la fonction continue f' donc $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ d'où

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= f(a) + f(b) - f(a) \end{aligned}$$

- Supposons H_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b], \mathbb{K})$. On sait que

$$f(b) = T_{n,f,a}(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Or $f^{(n+1)}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$et $\left(-\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)' = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$ donc, par intégration par parties :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b}_{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Or $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$ est le $n+2$-ième terme du polynôme de Taylor à l'ordre $n+1$, d'où le résultat.

Taylor-Lagrange revisité Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$. On a alors, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} |f(b) - T_{n,f,a}(b)| &= \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \left|f^{(n+1)}(t)\right|\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \\ &\leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

5 Sommes de Riemann

5.1 Intégrales et sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$ d'ordre n. On a alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On pose :

$$U_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad V_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} U_n(f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n} f(k) \\ &= \int_a^b \varphi \end{aligned}$$

Avec φ la fonction en escalier égale à $f(x_i)$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$. De même, $V_n(f) = \displaystyle\int_a^b \psi$ où ψ est la fonction en escalier égale à $f(x_{i+1})$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Sommes de Darboux-Riemann Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision quelconque de $[a,b]$. On appelle choix de points associé à σ une liste $\xi = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ de points de $[a,b]$ telle que pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

La somme de Darboux-Riemann associée à σ et ξ est l'expression :

$$S_{f,\sigma,\xi} = \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

5.2 Théorème de Darboux-Riemann

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a,b]$ de pas plus petit que α et pour tout choix de points ξ associé à σ, on a le résultat suivant :

$$\left| S_{f,\sigma,\xi} - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration f est continue [a] sur le compact $[a,b]$ donc elle est uniformément continue : $\exists \beta > 0$ tel que $\forall s,t \in [a,b]$, $|s-t| \leqslant \beta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Prenons $\alpha = \beta$, et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision

a. Il convient ici de rapporter une petite mise au point nécessaire de M. Sellès sur la prononciation de certains mots de notre belle langue :

« – D'ailleurs on dit « Aukserres » et pas « Aussères » comme disent les petits parisiens.

– Mais m'sieur vous dites pas « amsile » !

– Mais tu est gentile ! Tu dis bien chenil non ? »

Inutile de préciser que l'autre protagoniste de ce dialogue qui fait preuve En effet, si e culture n'est autre qu'Aménofis !

de $[a,b]$ de pas inférieur ou égal à β et $\xi = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ un choix de points associé à σ : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - S_{f,\sigma,\xi} \\
&= \int_a^b f - \sum_{ki=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \quad \text{d'après Chasles} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - f(y_i))\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - f(y_i))\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - f(y_i)|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, pour $t \in [x_i, x_{i+1}]$, $|t - y_i| \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant \delta(\sigma) \leqslant \beta$ Ainsi,

$$|f(t) - f(y_i)| \leqslant \frac{\beta}{b-a} \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - f(y_i)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i)$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Conséquence sur les somme de Riemann Montrons que $U_n(f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème précédent, $\exists \alpha > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma =$ de $[a,b]$ de pas plus petit que α, et pour tout choix de points ξ associé à σ,

$$\left| S_{f,\sigma,\xi} - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$$

De plus, $\dfrac{b-a}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$ et σ la subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$. Alors $\delta(\sigma) = \dfrac{b-a}{n} \leqslant \varepsilon$ et $U_n(f) = S_{f,\sigma,\xi_1}$ avec $\xi_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. $\delta(\sigma) \leqslant \varepsilon$ donc $\left| U_n(f) - \displaystyle\int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$. De même, $V_n(f) = S_{f,\sigma,\xi_2}$ où $\xi_2 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc $\left| V_n(f) - \displaystyle\int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$.

On déduit des deux résultats précédents que $(U_n(f))$ et $(V_n(f))$ convergent toutes deux vers $\displaystyle\int_a^b f$.

5.3 Applications des somme de Riemann

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

En posant $f : x \in [0,1] \longrightarrow \dfrac{1}{1+x}$ continue, $u_n = \dfrac{1-0}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right)$. u est donc une somme de Riemann associée à f d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f$. Or :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t &= [\ln(1+t)]_0^1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Calcul d'une intégrale sans recherche de primitives Soit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$:

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\ \mathrm{d}\theta$$

Posons pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = x^2 - 2x\cos\theta + x^2$. Vérifions si cette intégrale est bien définie : fixons $\theta \in \mathbb{R}$, et soit $P(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$. Son discriminant est :

$$\begin{aligned} 4\cos^2\theta - 4 &= 4\left(\cos^2\theta - 1\right) \\ &= (2i\sin\theta)^2 \end{aligned}$$

Les racines de P sont donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$ donc $P(x) = \left(x - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(x - \mathrm{e}^{-i\theta}\right) = \left|x - \mathrm{e}^{i\theta}\right|^2$. De plus, on ne peut par avoir $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{i\theta}$ car on a supposé $|x| \neq 1$. Ainsi, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$ donc f est continue ; son intégrale est bien définie.

f est 2π-périodique donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = 2\int_0^{\pi} f$. f est continue sur $[0,\pi]$ donc, en utilisant les sommes de Riemann,

$$\int_0^{\pi} f = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{\pi}{n}\right)$$

Étudions donc la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ comme $u_n = \dfrac{\pi}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2x\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) + x^2\right)$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2x\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) + x^2\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2x\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) + x^2\right)\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(x - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

On se sert ici du résultat sur le polynôme T démontré en annexe : pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{aligned}
z^{2n} - 1 &= \prod_{u \in \mathbb{U}_{2n}} (z - u) \\
&= \prod_{k=0}^{2n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \cdot \prod_{k=n}^{2n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \prod_{k=n}^{2n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n} - 2\pi\right)}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \prod_{k=n}^{2n-1} \left(z - \mathrm{e}^{-i\frac{(2n-k)\pi}{n}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \prod_{p=1}^{n} \left(z - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) \\
&= \frac{z-1}{z+1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \left(z - \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\left(x^{2n} - 1\right) \frac{x-1}{x+1} \right]$$

- Si $|x| < 1$, $x^{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln \left[\left(x^{2n} - 1\right) \frac{x-1}{x+1} \right] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln \left[\frac{x-1}{x+1} \right]$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $|x| > 1$, $x^2 > 1$ d'où

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\pi}{n} \ln \left[\left(x^{2n} - 1\right) \frac{x-1}{x+1} \right] \\
&= \frac{\pi}{n} \left[\ln \left(x^{2n} - 1\right) + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{n} \left[2n \ln (|x|) + \ln \left(1 + x^{-2n}\right) + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] \\
&= 2\pi \ln |x| + \underbrace{\frac{\pi}{n} \ln \left(1 - x^{-2n}\right) + \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}$$

Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\pi \ln |x|$.

On a donc le résultat final suivant :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 2\pi \ln |x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

6 Approximations numériques de intégrales

6.1 Méthode des rectangles

Estimation de l'erreur Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{K})$, $M_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a donc $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Soit

φ_n la fonction en escalier qui prend la valeur $f(x_k)$ sur $]x_k, x_{k+1}[$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left|\int_a^b f - \int_a^b \varphi_n\right| \\
&= \left|\int_a^b f - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)\right| \\
&= \left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right|
\end{aligned}$$

D'après le théorème sur les sommes de Riemann, on sait que $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$, mais il s'agit là de majorer l'erreur δ_n. Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $|f(t) - f(x_k)| = \left|\displaystyle\int_{x_k}^{t} f'(u)\,\mathrm{d}u\right|$ car f est une primitive de la fonction continue f'. Ainsi :

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x_k)| &\leqslant \int_{x_k}^{t} |f'(u)|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant M_1(t - x_k)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t &\leqslant M_1\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M_1}{2}\left[(t - x_k)^2\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\leqslant \frac{M_1}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 \\
&\leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\delta_n &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} \\
&\leqslant \frac{M_1}{2n}(b-a)^2
\end{aligned}$$

L'erreur diminue proportionnellement à $\dfrac{1}{n}$: on peut mieux faire !

Preuve du caractère optimal de la majoration Cette égalité est optimale car il y a des fonction pour lesquelles cette inégalité est une égalité.

Prenons $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \in [0,1] \longrightarrow t$, ici $M_1 = 1$. Alors $\displaystyle\int_a^b f = \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left|\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1\cdot(1-0)^2}{2n}
\end{aligned}$$

6.2 Méthode des rectangles médians

Estimation de l'erreur Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{K})$, $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$. On pose pour $k \in [[0, n-1]]$, $y_k = \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}$ et φ_n la fonction en escalier égale à $f(y_k)$ sur $]x_k, x_{k+1}[$. Alors :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left|\int_a^b f - \int_a^b \varphi_n\right| \\
&= \left|\int_a^b n - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y_k)\ \mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(y_k))\ \mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

Petite remarque Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta (t-\gamma)\ \mathrm{d}t = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (t-\gamma)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left[(t-\gamma)^2\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{2}\left((\beta-\gamma)^2 - (\alpha-\gamma)^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ici, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(y_k))\ \mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(y_k) - \underbrace{f'(y_k)(t-y_k)}_{\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-y_k)\ \mathrm{d}t = 0}\ ]\ \mathrm{d}t$$

Donc $\delta_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|f(t) - \left[f(y_k) + f'(y_k)(t-y_k)\right]\right| \text{ d}t$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [x_k, x_{k+1}]$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\underset{\leftrightarrow}{y_k}, t]$ et $\forall u \in [\underset{\leftrightarrow}{y_k}, t]$, $|f''(u)| \leqslant M_2$ donc , d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|f(t) - \left[f(y_k) + f'(y_k)(t-y_k)\right]\right| \leqslant \frac{M_2}{2}(t-y_k)^2$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|f(t) - \left[f(y_k) + f'(y_k)(t-y_k)\right]\right| \text{ d}t &\leqslant \frac{M_2}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-y_k)^2 \text{ d}t \\
&\leqslant \frac{M_2}{2}\left[\frac{(t-y_k)^3}{3}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\leqslant \frac{M_2}{6}\underbrace{\left[(x_{k+1}-y_k)^3 - (x_k-y_k)^3\right]}_{2\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^3} \\
&\leqslant \frac{M_2}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}
\end{aligned}$$

D'où

$$\delta_n \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$$

Preuve du caractère optimal de la majoration Cette égalité est optimale car il y a des fonction pour lesquelles cette inégalité est une égalité.

En effet, prenons $f : \begin{array}{l}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2\end{array}$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $M_2 = 2$. $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{3}$ et de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n}\right)\right) &= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 \\
&= \frac{1}{4n^2}\left[4\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + 4\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1\right] \\
&= \frac{1}{4n^2}\left[4\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 4\frac{n(n-1)}{2} + n\right] \\
&= \frac{1}{4n^2}\left(2\frac{(n-1)(2n-1)}{3} + 2(n-1) + 1\right) \\
&= \frac{1}{12n^2}\left[2(n-1)(2n-1) + 6(n-1+3)\right] \\
&= \frac{1}{12n^2}\left(4n^2-1\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left|\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{12n^2} \\
&= \frac{2\cdot(1-0)^3}{24n^2}
\end{aligned}$$

6.3 Méthode des trapèzes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{K})$, $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$,$\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ la subdivision régulière d'ordre n sur $[a,b]$ et φ_n la fonction affine par morceaux qui, pour $k \in [\![0,n]\!]$ coïncide avec f en x_k. Posons là encore $\delta_n = \left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \right|$. On a $\int_a^b \varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles. Or pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = (x_{k+1} - x_k) \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \qquad \text{(aire d'un trapèze)}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - \varphi_n(t))\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - \varphi_n(t)|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Lemme Soient $\alpha < \beta$, $g \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{K})$, M un majorant de g'' sur $[\alpha, \beta]$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi(\alpha) = g(\alpha)$ et $g(\beta) = \varphi(\beta)$. Alors, $\forall t \in [\alpha, \beta]$:

$$|g(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta - t)$$

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $h(t) = g(t) - \varphi(t) - \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta-t)$, h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\forall t \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned}
h''(t) &= g''(t) - \varphi''(t) + M \\
&= g''(t) + M \geqslant 0
\end{aligned}$$

  h est convexe sur $[\alpha, \beta]$ donc $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $h(t) \leqslant u(t)$ où u est la fonction affine qui coïncide avec h en α et β. Or $h(\alpha) = h(\beta)$ donc $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $u(t) = 0$ donc $h \leqslant 0$ donc :

$$g(t) - \varphi(t) \leqslant \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta - t)$$

  En considérant $k : t \longrightarrow g(t) - \varphi(t) + \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta-t)$, on montre que $g(t) - \varphi(t) \leqslant -\frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta-t)$ d'où le résultat.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Utiliser le lemme fantastique [a] !

Ici, pour $k \in [[0, n-1]]$ et $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $|f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \frac{M_2}{2}(t - x_k)(x_{k+1} - t)$ d'après le lemme. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - \varphi_n(t)|\ \mathrm{d}t &\leqslant \frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)(x_{k+1} - t)\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M_2}{2} \left(\left[\frac{(t-x_k)^2}{2} (x_{k+1} - t) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)^2\ \mathrm{d}t \right) \\
&\leqslant \frac{M_2}{4} \left[\frac{(t-x_k)^3}{3} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\leqslant \frac{M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3}
\end{aligned}$$

a. Voir section 4.3.2.2 du cours complet page 56.

D'où finalement :

$$\delta_n \leqslant \frac{M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

Cette inégalité est aussi optimale.

7 Complément : résultat sur les polynômes

7.1 Résultat

Pour $z \in \mathbb{C}$, soit $T(z) = z^{2n} - 1$. T est polynômiale de degré $2n$ et T admet $2n$ racines distinctes qui forment $\mathcal{R}_{2n}(z)$ [a]. On peut donc écrire :

$$T(z) = 1 \cdot \prod_{u \in \mathbb{U}_{2n}} (z-u)$$

Avec 1 le coefficient dominant de T.

7.2 Explication

- Soit S polynômiale non constante de degré . Si $u \in \mathbb{C}$ est racine de f, alors $S(z) = (z-u)\,Q(z)$ avec Q polynômial de degré inférieur ou égal à celui de S moins 1.
  En effet,

$$\begin{aligned} S(z) &= S(z) - S(u) \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_d z^d - \left(\lambda_0 + \lambda_1 u + \cdots + \lambda_d u^d\right) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \left(z^k - u^k\right) \\ &= (z-u) \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \sum_{l=1}^{k-1} z^k u^{k-1-l} \end{aligned}$$

  D'où le résultat, la double somme correspondant à Q.
- Soit S polynômiale non constante admettant r racines distinctes $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$. Alors on peut écrire :

$$S(z) = (z-a_0)(z-a_1)\cdots(z-a_{r-1})\,Q(z)$$

  Avec Q polynômiale.
  En effet, procédons par récurrence :
  - C'est vrai pour $r = 1$.
  - Supposons le résultat vrai pour r et montrons sa validité pour $r+1$. Soit S polynômiale admettant $r+1$ racines distinctes $a_0, a_1, \ldots, a_r$. Alors $S(z) = (z-a_r)\,U(z)$ avec U polynômiale. Or, pour $i \in [[0, r-1]]$, $0 = S(a_i) = (a_i - a_r)\,U(a_i)$ avec $a_i - a_r \neq 0$ donc U admet r racines distinctes donc U s'écrit $U(z) = (z-a_0)\cdots(z-a_{r-1})\,Q(z)$ avec Q polynômiale, d'où le résultat.
- Soit S polynômiale de degré m supérieur ou égal à 1 admettant m racines distinctes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Alors

$$S(z) = \lambda(z-a_0)\cdots(z-a_{m-1}) \quad \text{où } \lambda \text{ est le coefficient dominant de } S$$

  En effet, S s'écrit $S(z) = (z-a_0)\cdots(z-a_{m-1})\,Q(z)$ avec Q polynômiale. L'égalité de degré impose que le degré de Q soit 1, c'est-à-dire que Q est une constante non nulle. Il est de plus clair que pour retrouver l'expression de f, il faut que Q soit le coefficient dominant de S.

a. Ensemble des racines $2n$-ièmes de z : se reporter à la section 1.3.3.2 du cours complet page 22.