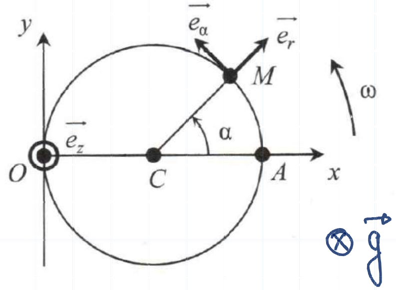
❑ Exercice 1.5. Oscillations en référentiel tournant*

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon r, est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre (R_T) supposé galiléen.

À partir de l'instant $t = 0$, on fait tourner cet anneau par rapport à (R_T), à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. À $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$), et sa vitesse par rapport à (R_T) est encore nulle.

On note $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.



$\otimes\, \vec{g}$

1. a) Le référentiel (R) lié à l'anneau est-il galiléen ?

b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans (R), et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha}, \vec{e_z})$.

On pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.

2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ est de la forme : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0$.

3. a) Déterminer les positions d'équilibre de M dans (R).

b) Préciser leur stabilité en utilisant l'équation différentielle précédente.

4. a) On suppose maintenant $\alpha \ll 1$ (petites oscillations). Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

b) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin\alpha$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.

5. a) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans (R), en fonction de α, $\dot{\alpha}$ et des paramètres du système.

b) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

1) a) Le référentiel (R) est en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) dans (R_T). Il n'est donc pas galiléen.

b) <u>Bilan des forces s'exerçant sur M dans (R) :</u>

* Poids : $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}}$

* Réaction normale de l'anneau : $\boxed{\vec{R} = R_r\,\vec{e_r} + R_z\,\vec{e_z}}$

* Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f_{ie}} = -m\,\vec{a_e}(M)$

$\vec{f_{ie}} = m\omega^2\,\overrightarrow{OM} = m\omega^2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{f_{ie}} = m\omega^2(r\cos\alpha\,\vec{e_r} - r\sin\alpha\,\vec{e_\theta} + r\,\vec{e_r})}$

* force d'inertie de Coriolis : $\vec{f_{ic}} = -m\,\vec{a_c}(M)$

$\vec{f_{ic}} = -2m\omega\,\vec{e_z} \wedge r\dot{\alpha}\,\vec{e_\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{f_{ic}} = 2m\omega r\dot{\alpha}\,\vec{e_r}}$

2) PFD pour M dans (R) :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}$ avec $\vec{a} = -r\dot{\alpha}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\alpha}\,\vec{e_\alpha}$

$$\begin{cases} -mr\dot{\alpha}^2 = R_r + m\omega^2 r(\cos\alpha + 1) + 2m\omega r\dot{\alpha} \\ mr\ddot{\alpha} = -m\omega^2 r\sin\alpha \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

Equation différentielle vérifiée par α :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0}$$

3) a) Positions d'équilibre : $\ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ (point A) et $\alpha = \pi$ (point O)

b) <u>Etude de la stabilité</u>

* On écarte légèrement M de $\alpha = 0$:
si $\alpha > 0$ alors $\sin\alpha > 0$ et $\vec{f_{ie}} \cdot \vec{e_\alpha} = -m\omega^2 r\sin\alpha < 0$
$\Rightarrow$ la force a tendance à ramener M vers A.

si $\alpha < 0$, alors $\sin\alpha < 0$ et $\vec{f_{ie}} \cdot \vec{e_\alpha} > 0$
$\Rightarrow$ la force a tendance à ramener M vers A.

$\boxed{\text{L'équilibre } \alpha = 0 \text{ est stable}}$

* On écarte légèrement M de $\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \pi + \varepsilon$
si $\varepsilon > 0$ alors $\sin(\pi + \varepsilon) = -\sin\varepsilon$ et $\vec{f_{ie}} \cdot \vec{e_\alpha} = m\omega^2 r\sin\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ la force a tendance à éloigner M de O.

si $\varepsilon < 0$ alors $\sin(\pi + \varepsilon) = -\sin\varepsilon > 0$
et $\vec{f}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta = m\omega^2 r \sin\varepsilon < 0$
$\Rightarrow$ la force a tendance à éloigner M de O.

$\boxed{\text{L'équilibre } \alpha = \pi \text{ est instable}}$

4) a) $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin\alpha \sim \alpha$

$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$

Solution générale : $\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Conditions initiales : $\alpha(0) = 0 = A$

$$\underbrace{\vec{v}(M/R_T, t=0)}_{\text{vitesse absolue}} = \vec{0} = \underbrace{\vec{v}(M/R, t=0)}_{\text{vitesse relative}} + \overbrace{\underbrace{\vec{v}_{ent}(M, t=0)}_{2r\omega\,\vec{u}_y}}^{\text{vitesse d'entraînement}}$$

$\Rightarrow \vec{v}(M/R, t=0) = -2r\omega\,\vec{u}_y = r\dot{\alpha}(0)\,\vec{u}_y$

$\Rightarrow \dot{\alpha}(0) = -2\omega = B\omega \Rightarrow B = -2$

Solution : $\boxed{\alpha(t) = -2\sin(\omega t)}$

b) D'après ce qui précède $\alpha \in [-2\text{ rad} ; 2\text{ rad}]$ donc α ne vérifie plus l'hypothèse $\alpha \ll 1$

On a $|\sin\alpha| < |\alpha|$ donc $|\ddot{\alpha}| < \omega^2|\alpha|$: l'accélération réelle est inférieure à celle obtenue dans l'approximation des petits angles

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{l'amplitude réelle des oscillations est plus faible que ce qu'on a calculé précédemment.}}$

5) a) Forces conservatives : $\vec{P}$ et $\vec{f}_{ie}$

<u>Energie potentielle de pesanteur</u> : $E_{pp} = mgz + cte$
Choix $E_{pp}(z=0) = 0 \Rightarrow E_{pp} = 0$

<u>Energie potentielle d'inertie d'entraînement</u> :

$$\delta W(\vec{f}_{ie}) = m\omega^2\,\vec{OM} \cdot d\vec{OM} = -d\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 OM^2\right) = -dE_{pie}$$

$$\Rightarrow E_{pie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 OM^2 + cte = -\frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + r^2 + 2r^2\cos\alpha) + cte$$

$$\Rightarrow E_p = E_{pie} = -m\omega^2 r^2(1 + \cos\alpha) + cte$$

Choix $E_p(\alpha = 0) = 0 \Rightarrow -2m\omega^2 r^2 + cte = 0$

$\Rightarrow \boxed{E_p = -m\omega^2 r^2(\cos\alpha - 1)}$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\,v(M/R)^2$

$\Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}m r^2 \dot{\alpha}^2}$

b) Théorème de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}^{NC})$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \underbrace{\mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})}_{=0}$$

car les 2 forces sont orthogonales à $\vec{v}(M/R)$

$$\Rightarrow \cancel{m r^2}\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} + \cancel{m}\omega^2 \cancel{r^2}\sin\alpha\,\cancel{\dot{\alpha}} = 0$$

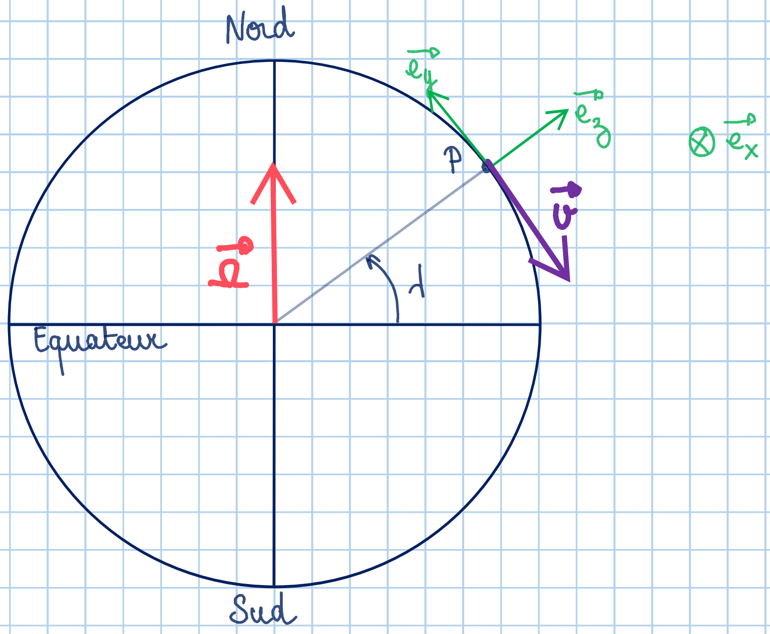
Equation du mouvement : $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2\sin\alpha = 0}$

❑ Exercice 1.6. Force de Coriolis sur un train

Un train à grande vitesse, de masse $m = 7{,}8 \cdot 10^5$ kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300$ km·h^{-1} ; à l'instant considéré il se trouve à la hauteur de Valence à la latitude $\lambda = 45°$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormale $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ avec $\vec{e_x}$ vers l'est, $\vec{e_y}$ vers le nord et $\vec{e_z}$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre, et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne : $\Omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad·s^{-1} ; $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

1)



2) Force d'inertie de Coriolis : $\vec{f_{ic}} = -m\,\vec{a_c}(M) = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega\cos\lambda \\ \Omega\sin\lambda \end{vmatrix}$ $\qquad \vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{vmatrix}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\vec{f_{ic}} = -2m\Omega v \sin\lambda \, \vec{e_x}}$

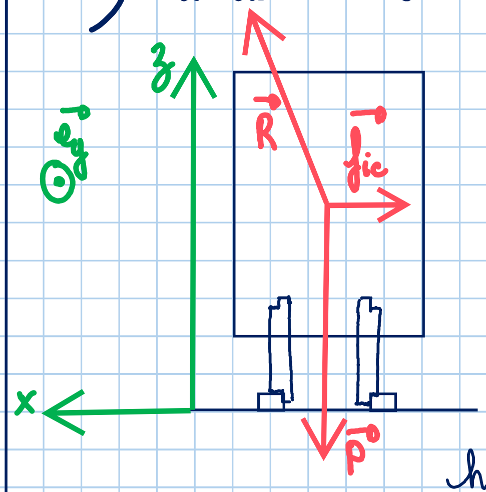
(dirigée vers l'Ouest)

A.N. $f_{ic} = 6{,}7$ kN

Poids $P = mg = 7{,}6 \times 10^6$ N

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{f_{ic}}{P} = 0{,}09\,\%}$

3) Vue de l'arrière :



En ne tenant pas compte de la courbure de la Terre, le train a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{a} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_{ic}} = \vec{0}$

$\vec{R} \cdot \vec{e_x} = -f_{ic} = 2m\Omega v \sin\lambda > 0$

C'est donc le rail de droite qui exerce une force de poussée horizontale sur la roue droite du train.

$\Rightarrow$ le rail de droite subit donc en retour une force de poussée (opposée à $\vec{e_x}$) de la part de la roue. Il s'usera donc plus vite.

Si on change le sens de la vitesse, $\vec{f_{ic}}$ est dirigée vers l'Est. C'est donc le rail du côté Est qui s'use le plus. C'est donc le rail de droite (côté est), en vue de derrière qui s'usera le plus vite.