Suites de fonctions

I. Modes de convergence

I.1. Convergence simple

Définition. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que la suite (f_n)* ***converge simplement*** *sur I vers une fonction f si, pour tout $t \in I$, la suite numérique $\big(f_n(t)\big)$ a pour limite le nombre $f(t)$.*

I.2. Convergence uniforme

Définition. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la suite (f_n)* ***converge uniformément*** *sur I vers une fonction f si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall t \in I \quad \big|f(t) - f_n(t)\big| \leqslant \varepsilon$$

Théorème I.1. *Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors elle converge simplement sur I vers f.*

Définition. *Soit g une fonction bornée sur un intervalle I. On note $\|g\|_\infty$ le nombre $\sup\big\{|g(t)|\ ;\ t \in I\big\}$.*

Proposition I.2. *Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction bornée, et $M \in \mathbb{R}$; alors :*
- *$\forall t \in I \quad |g(t)| \leqslant \|g\|_\infty$;*
- *$\big[\forall t \in I \quad |g(t)| \leqslant M\big] \iff \|g\|_\infty \leqslant M$.*

Théorème I.3. *La suite (f_n) converge vers f uniformément sur I si et seulement si*
- *les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang ;*
- *la suite $\big(\|f_n - f\|_\infty\big)$ a pour limite 0.*

Théorème I.4. *La suite (f_n) converge vers f uniformément sur I si et seulement si il existe une suite réelle (a_n) et un rang n_0 tels que*
- *$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall t \in I \quad \big|f(t) - f_n(t)\big| \leqslant a_n$;*
- *la suite (a_n) a pour limite 0.*

Proposition I.5. *S'il existe une suite (t_n) d'éléments de I telle que $f(t_n) - f_n(t_n)$ ne tende pas vers 0, alors la convergence n'est pas uniforme sur I.*

Proposition I.6. *Si $I = I_1 \cup I_2$, et si (f_n) converge vers f uniformément sur I_1 et sur I_2, alors elle converge uniformément sur I ; en particulier, si (f_n) converge vers f uniformément sur $[a, b[$ et si $f_n(b)$ tend vers $f(b)$, alors la convergence est uniforme sur $[a, b]$.*

II. Conséquences de la convergence uniforme

II.1. Fonctions continues

Théorème II.1. *Soit $t_0 \in I$. On suppose que*
- *la suite de fonctions (f_n) converge vers f uniformément sur I ;*
- *chaque fonction f_n est continue en t_0 (respectivement sur I).*

Alors, f est continue en t_0 (respectivement sur I).

L'hypothèse de convergence uniforme sur I peut être remplacée par la convergence uniforme sur un voisinage de t_0 (respectivement au voisinage de chaque point de I).

II.2. Théorème de la double limite

Théorème II.2 (de la double limite). *On suppose que :*
- *la suite (f_n) converge vers f uniformément sur I ;*
- *a est un point adhérent à I (éventuellement $a = \pm\infty$) ;*
- *chaque fonction f_n admet une limite finie λ_n en a.*

Alors la suite (λ_n) admet une limite finie λ, et f a pour limite λ en a.

II.3. Intégration

Théorème II.3. *Soit $a \in I$. On suppose que :*
- *la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment inclus dans I ;*
- *chaque fonction f_n est continue sur I.*

Pour tout n, soit $F_n : x \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,dt$. Alors, la suite (F_n) converge simplement sur I vers la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$. De plus, la convergence est uniforme sur chaque segment inclus dans I.

En particulier, si la suite (f_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$, alors $\int_a^b f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$.

II.4. Dérivation

Théorème II.4. *On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est de classe C^1 sur I ;*
- *la suite (f_n) converge vers f simplement sur I ;*
- *la suite (f'_n) converge vers une fonction g, uniformément sur tout segment inclus dans I.*

Alors, f est de classe C^1 sur I, $g = f'$, et la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

Théorème II.5. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :*
- *chaque fonction f_n est de classe C^p sur I ;*
- *pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge vers une fonction g_k simplement sur I ;*
- *la suite $(f_n^{(p)})$ converge vers une fonction g_p, uniformément sur tout segment inclus dans I.*

Alors, en posant $f = g_0 = \lim f_n$, f est de classe C^p sur I, et $g_k = f^{(k)}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

III. Approximation des fonctions

III.1. Approximation des fonctions continues par morceaux

Théorème III.1. *Si f est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, alors il existe une suite (φ_n) de fonctions en escaliers qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$.*

III.2. Théorème de Weierstrass

Théorème III.2 (de Weierstrass). *Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors il existe une suite (P_n) de fonctions polynômes qui converge vers f uniformément sur $[a, b]$.*