Devoir du 19/09/2020

Exercice 1 :

1. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.
   Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n puis prouver votre conjecture.
2. Soit v la suite définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = (n+1)(v_n + v_{n+1})$.
   Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n puis prouver votre conjecture.
3. Soit w la suite définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k w_{n-k}$.
   Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 2^{n-1}$.

Exercice 2 : Parmi les assertions suivantes, déterminer lesquelles impliquent que P_n est vraie pour tout naturel n. La réponse sera justifiée.

1. $P_0 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))$.
2. $P_0 \ \wedge\ P_1 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N}^*\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))$.
3. $P_0 \ \wedge\ P_1 \ \wedge\ P_2 \ \wedge\ (\forall n \geq 2,\ P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1}))$.
4. $P_1 \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \Rightarrow P_{n-1}) \ \wedge\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Rightarrow P_{2n})$.

Exercice 3 : Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (la réponse sera justifiée) et écrire leurs négations.

1. $\forall x \in]0,1],\ \exists y \in]0,1]\ :\ y < x$.
2. $\forall x \in]0,1],\ \exists y \in]0,1]\ :\ y > x$.
3. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p < q \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}\ :\ p < r < q$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}\ :\ x < z < y$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez
$S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$, $S_2 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j}$, $S_3 = \displaystyle\sum_{0\leq j\leq i\leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}$,
$S_4 = \displaystyle\sum_{0\leq k\leq j\leq i\leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}$ et $P = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^{i!j}$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$.
2. Soit k un entier, $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que : $\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{1}{k!}$.
3. En déduire que, pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
4. Montrer que : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

Exercice 6 :

1. On souhaite prouver l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n}{k-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \dbinom{n+1}{k}\dfrac{(-1)^{k-1}}{n+1}$.
   (c) En déduire le résultat souhaité par récurrence.
2. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.
3. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ en fonction de n et H_n.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kH_k$ en fonction de n et H_n.

Exercice 7 :
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (de sorte que l'on puisse considérer le réel $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.) On note L l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$, et N l'ensemble des fonctions g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que : $\exists!(h,g) \in L \times N$, $f = h + g$.