TD 19 - Espaces vectoriels

Ex 1 :

1) $F = \{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq u converge $\}$

9) $F = \{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq u arithmétique$\}$

$\rightarrow 0 \in F$

$\rightarrow$ Soit $(u, v) \in F$

Par def il existe $(r, r') \in \mathbb{R}^2$ tq pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ v_{n+1} = v_n + r' \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + r + v_n + r'$$
$$= (u_n + v_n) + (r + r')$$

Donc $u + v$ est une suite arithmétique de raison $(r + r')$ et $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

$\rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda u_{n+1} = \lambda(u_n + r) = \lambda u_n + \lambda r$$

Donc $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison (λr) et $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

Famille génératrice $\{ (An + B)_{n \in \mathbb{N}} , (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}$

10) Non pas stable par $+$

Contre ex $u = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ $v = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u + v = (2^n + 3^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\frac{u_1 + v_1}{u_0 + v_0} = \frac{5}{2} \neq \frac{u_2 + v_2}{u_1 + v_1} = \frac{13}{5}$$

11) $|(\lambda f + g)(y) - (\lambda f + g)(x)| \leq |\lambda(f(y) - f(x)) + g(y) - g(y) - g(x)|$

$$\leq |\lambda| \, |f(y) - f(x)| - |g(y) - g(x)|$$

$$\leq \underbrace{|\lambda| k |x - y| + k' |x - y|}_{(|\lambda| k + k') |x - y|}$$

13) Que si $\beta = 0$

Ex 2 :

1) → $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in (F \cap G)$

→ F et G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

→ Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in F^2$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$(\lambda u + v)_{2n} = \lambda u_{2n} + v_{2n}$

$= \lambda u_{2n+1} + v_{2n+1} \in F$

Soit $(u, v) \in G^2$

$(\lambda u + v)_{2n} = \lambda u_{2n} + v_{2n} = 0 \in G$

2) Mq F et G sont supplémentaires. càd $F \oplus G = E$

Mq $F \cap G = \{0_E\}$

$F \cap G = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \; u_{2n} = u_{2n+1} = 0 \} = \{0_E\}$

Mq $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$u = \underbrace{v}_{v_{2n} = v_{2n+1}} + w \, / \, w_{2n} = 0$

$u_{2n} = v_{2n} + \underbrace{\cancel{w_{2n}}}_{=0} = v_{2n+1}$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On pose v la suite tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_{2n} = v_{2n+1} = u_{2n}$

et $w = u - v$

Vérifions que $v \in F$ / $w \in G$

Mq $w \in G$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$w_{2n} = u_{2n} - v_{2n} = 0$

donc $w \in G$

Donc $F \oplus G = E$

Autre :

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$K_\lambda = \{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{2n+1} = \lambda u_{2n} \}$

Mq $F \oplus K_\lambda = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

. Soit $u \in F \cap K_\lambda$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+1} = u_{2n} = \lambda u_{2n}$

$$\underbrace{(1-\lambda)}_{\neq 0} u_{2n} = 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+1} = u_{2n} = 0$

Donc $F + K_\lambda = F \oplus K_\lambda$

Mq $F \oplus K_\lambda \supset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On pose w tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} w_{2n} = \dfrac{u_{2n+1} - u_{2n}}{\lambda - 1} \\ w_{2n+1} = \lambda w_{2n} \end{cases}$

et $v = u - w$

$\ulcorner \; u = v + w$

$\overline{v_{2n}} = v_{2n+1}$ $\quad w_{2n+1} = \lambda w_{2n}$

$u_{2n+1} - u_{2n} = \cancel{v_{2n}} - \cancel{v_{2n}} + w_{2n+1} - w_{2n}$

$= (\lambda - 1) w_{2n}$

$w_{2n} = \dfrac{u_{2n+1} - u_{2n}}{\lambda - 1}$

$=$

Mq $w \in K_\lambda$
$v \in F$
$u = v + w$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n+1} = u_{2n+1} - w_{2n+1} = u_{2n+1} - \lambda \left(\frac{u_{2n+1} - u_{2n}}{\lambda - 1} \right)$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{\lambda u_{2n} - u_{2n+1}}{\lambda - 1}$$

$$v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = \ldots$$

$$= v_{2n+1}$$

Donc $v \in F$

$$A = \{ u \underbrace{\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ u_{2n+1} = u_{2n} + 3 \}}_{\text{pas un eV}}$$

Ex 3:

1) → $E \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

→ $0_{\mathcal{C}([0,1])} \in E$

→ Mq stable par CL

→ Trouver supplémentaire.

$F = \{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \text{ constante} \}$ Enlève valeur moyenne.

Mq $E + F = E \oplus F$

→ Mq $E \cap F \subset \{0\}$

Soit $f \in E \cap F$, f constant et $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$

Il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = c$

et $\int_0^1 f = \int_0^1 c = c = 0$

et $E + F = E \oplus F$

$\rightarrow$ Mq $E + F \supset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

Soit $g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$

$\ulcorner \; g = \overset{\in F}{f} + \overset{\in E}{h}$

$\int_0^1 h(t)\,dt = 0$

$f = c \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 g = \int_0^1 f = \int_c^1 c = c$

Donc $c = \int_0^1 g$

et $h = g - \int_0^1 g$ $\lrcorner$

On pose $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \int_0^1 g$

et $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) - \int_0^1 g(t)\,dt$

Mq $f \in F$ ✓
$h \in E$
$g = f + h$ ✓

$\int_0^1 h = \int_0^1 g - \int_0^1 \left(\int_0^1 g(t)\,dt \right) = \int_0^1 g - \int_0^1 g = 0$

Donc $h \in E$

$F \oplus E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

<u>Complément</u> : $f_0 \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \setminus E$

Mq $E \oplus \mathbb{R} f_0 = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

Mq $E \cap \mathbb{R} f_0 \subset \{0\}$

Soit $f \in E \cap \mathbb{R} f_0$, $\int_0^1 f = 0$

Il existe $r \in \mathbb{R}$ $f = r f_0$

Donc $\int_0^1 \underbrace{r}_{cst} f_0 = 0 = r \underbrace{\int_0^1 f_0}_{\neq 0_{\mathbb{R}}}$

donc $r = 0_{\mathbb{R}}$ puis $f = 0_{\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})}$

càd $E \cap \mathbb{R} f_0 \subset \{0\}$

donc $E + \mathbb{R} f_0 = E \oplus \mathbb{R} f_0$

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

$f = \underbrace{g}_{\in E} + \underbrace{h}_{\in \mathbb{R} f_0}$

$\int_0^1 g = 0$

Il existe $r \in \mathbb{R}$ tq $h = r f_0$

donc $\int_0^1 f = \int_0^1 r f_0$

$\int_0^1 f = r \int_0^1 f_0$

$r = \dfrac{\int_0^1 f}{\int_0^1 f_0}$

On pose : $h : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f_0(x) \dfrac{\int_0^1 f}{\int_0^1 f_0)}$ $\neq 0$ car $f_0 \notin E$

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) - h(x)$

Mq $f = g + h$ ✓

$g \in E$

$h \in \mathbb{R} f_0$

$\int_0^1 g = \int_0^1 f - \int_0^1 \left(f_0 \dfrac{\int_0^1 f}{\int_0^1 f_0} \right) = 0$

Donc $g \in E$ puis $E \oplus \mathbb{R} f_0 = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

2) $E = \{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \quad \int_0^1 f(t)dt = 0 \quad \text{et } f(0) = 0 \}$

On pose $F = \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b \end{array}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Mq $E \oplus F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

càd Mq $E \cap F = \{ 0_{\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})} \}$

Soit $f \in E \cap F$

il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x) = ax+b$

On a $f(0) = 0$ donc $b = 0$

De plus $\int_0^1 f = 0$

or $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 at\, dt = 0$

donc $a = 0$

Donc $f = 0_{\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})}$

$h = \overset{\in E}{g} + \overset{\in F}{f}$

il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x) = ax+b$

et on a : $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ et $g(0) = 0$

$h(0) = g(0) + f(0) = b$

$\int_0^1 g = \int_0^1 h - \int_0^1 f = 0$

$\int_0^1 h = \int_0^1 f = \frac{a}{2} + b = \frac{a}{2} + h(0)$

$a = 2\left(\int_0^1 h - h(0)\right)$

On pose : $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2\left(\int_0^1 h - h(0)\right) x + h(0)$

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto h(x) - f(x)$

Mq $h \in E$
$g \in F$ ✓
$f = g + h$ ✓

$$g(0) = h(0) - f(0)$$
$$= h(0) - h(0) = 0$$

et $\int_0^1 f = \int_0^1 g - \int_0^1 h$

$$= \int_0^1 g - \int_0^1 2t\left(\int_0^1 h - h(0)\right) dt - \int_0^1 h(0)$$
$$= \cdots$$
$$= 0$$

$(f_1, f_2) \in (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), E)^2$
tq $f_2 \notin \mathbb{R} f_1$

Mq $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) \oplus E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

Bonus choisir f_1 et f_2

3) $F = \ker \varphi$ $\quad \varphi : \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

$$f \mapsto \Big(\underbrace{f(0)}_{\text{lin}}, \underbrace{f'(0)}_{\text{lin}}, \underbrace{\textstyle\int_0^1 f}_{\text{lin}}\Big) \Rightarrow \ker \varphi \Rightarrow \text{ev}$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto at^2 + bt + c \end{array}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^k \end{array} \right)_{k \in [\![0;2]\!]}$$

Mq $F \cap G \subset \{0\}$

Mq $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \subset F + G$

$\ulcorner$ $h = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$

il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\quad g : x \mapsto ax^2 + bx + c$

$h(0) = f(0) + g(0) = c$

$h'(0) = f'(0) + g'(0) = b$

$$\int_0^1 h = \int_0^1 f + \int_0^1 g = \int_0^1 g(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c$$

4) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$

Si $u \in E \cap F$, $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

alors on a : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x = y = z = t \end{cases}$ donc $x = y = z = t = 0$

càd $u = (0,0,0,0)$

càd $E + F = E \oplus F$

Soit $w \in \mathbb{R}^4$ tq $w = (x, y, z, t)$

On pose $v = \left(\frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+y+z+t}{4} \right)$

et $u = w - v$

Verifions que $v \in F$, $u \in E$ et $w = u - v$

On a $x' + y' + z + t' = 0$ avec $u = (x - \underbrace{\quad}_{x'}, y - \underbrace{\quad}_{y'}, z - \underbrace{\quad}_{z'}, t - \underbrace{\quad}_{t'})$

donc $u \in E$

5) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ x + y = 0\}$ Base $(-3, -1, 1)$

Mq $E + F = E \oplus F$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x = -y \\ z = -y \\ -4y = 0 \end{cases}$

donc $(x, y, z) = (0,0,0)$

→ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^4$

$(x, y, z) = (x', y', z') + v$

$(x, y, z) = \lambda(-3, -1, 1) + (\overbrace{x', y'}^{x'+y'=0}, z')$

$= (-3\lambda + x', -\lambda + y', \lambda + z')$

$$x+y=-4\lambda$$

donc $\lambda = -\dfrac{x+y}{4}$

On pose $v = -\dfrac{x+y}{4}(-3,-1,1)$

et $w = (x,y,z) - v$

Vérifions que $w \in F$, $v \in E$ et $v + w = (x,y,z)$

6) $F = \{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u_0 = 0 = u_1 \}$

Mq $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F \oplus G$

où $G = \{ (an+b)_{n\in\mathbb{N}} , (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

. Soit $u \in F \cap G$

Par def il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = an+b$

Donc $\begin{cases} u_0 = b \\ u_1 = a+b \end{cases}$

Comme $u_0 = u_1 = 0$, $a = b = 0$

donc $u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$u = \overset{\in F}{v} + \overset{\in G}{w}$$

$w \hookrightarrow an+b$

$v_0 = v_1 = 0$

$$u_0 = v_0 + w_0 = b = 0$$
$$u_1 = v_1 + w_1 = a+b$$

On a $\begin{cases} b = u_0 \\ a = u_1 - u_0 \end{cases}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_n = ((u_1 - u_0) n + u_0)$

et $v = u - w$

Mq $w \in G$ ✓

$u \in F$

$w + v = u$ ✓

$$v_0 = u_0 - w_0 = u_0 - u_0 = 0$$
$$v_1 = u_1 - w_1 = u_1 - ((u_1 - u_0) + u_0) = 0$$

$v \in F$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = E \oplus G$

$F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(2) = f(13) = 0 \}$ $\quad G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \; f \text{ affine} \}$

$F = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(2) = f(15) = f(-1) = 0 \}$ $\quad G = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax^2 + bx + c \end{array} , (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

7) $E = \{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad f' + 2f = 0 \} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-2x} \end{array} , c \in \mathbb{R} \right\}$

$F = \{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(3) = 0 \}$ Degré de libertés infini - 1

$E \cap F = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$

Mq $E \oplus F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$h = g + f$

$g : x \mapsto Ce^{-2x}$ $\quad f(3) = 0$

$h(3) = Ce^{-6}$
$C = h(3)e^{6}$

On pose $g : x \mapsto h(3)e^{6-2x}$

$f = h - g$

Mq $g \in E$, $f \in F$, $h = f + g$

$f(3) = h(3) - g(3) = h(3) - h(3) = 0$

donc $f \in F$

Ex 4:

1) → avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
→ deux vecteurs non colinéaires

2) Voir Photo dim 12h16

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 2 \quad \lambda_4 = -1$

$2e_3 - e_1 - e_4 = 0$

3) Voir Photo dim 12h21

4) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin x + \gamma = 0$

En particulier $\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \; (x = 0) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \; (x = \frac{\pi}{2}) \quad -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \; (x = \pi)$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ famille libre

Ex 5:

1) $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\}$

$=\{(x,y,z,-x-y-z),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$=\{x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1)\ ,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$=\mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0,-1)}_{\text{par CL de }\nearrow},\underbrace{(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)}_{\text{non colinéaire}}\big)$ => échelonné => libre

2) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \ x-y+2z=y+z=0\}$

$=\{(3y,\ y,-y\ ,y\in\mathbb{R}\}$

$=\mathrm{Vect}(3,1,-1)$

4) $E=\{(an+b)_{n\in\mathbb{N}}\ \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

$=\mathrm{Vect}\big(\underbrace{\underset{\text{“}\times a\text{”}}{(n)_{n\in\mathbb{N}}},\underset{\text{“}\times b\text{”}}{(1)_{n\in\mathbb{N}}}}_{\text{non colinéaire}}\big)$ => CL

non colinéaire car si colinéaire à 1 alors suite cst

4) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$

$P(2)=0 \iff \exists\, Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\quad P=(X-2)Q$

$\iff \exists\,(a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} : P=(X-2)\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

$\iff \exists\,(a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} : P=\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k(X-2)$

$E=\mathrm{Vect}\left(X^k(X-2)\right)_{0\leq k\leq n-1}$

Pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$ $\deg X^k(X-2)=k+1$

Donc la famille est constituée càd de polynômes de degré $\neq$, elle est libre

5) $\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f'+2f=0\}$

$=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \underbrace{x\mapsto e^{-2x}}_{\neq 0}\end{pmatrix}$

6) $\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f''+f=0\}=\mathrm{Vect}(\underbrace{\cos\ ,\sin}_{\text{non col}})=0$

Ex 6:

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels distincts

Mq $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$

Quitte à permuter $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$

On a $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ $\quad \times e^{-\alpha_n x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_n) x} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_n) x} + \lambda_n = 0$

puis on fait tendre x vers $+\infty$, $\lambda_n = 0$

Supp par l'absurde que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$

Soit $i_0 = \underbrace{\operatorname{Max}\{k \in [\![1, n]\!] : \lambda_k = 0\}}_{\text{partie finie non vide}}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{\sum_{i=1}^{i_0 - 1} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_{i_0}) x} + \lambda_{i_0}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} \lambda_{i_0}} = 0$

Donc $\lambda_{i_0} = 0$ Absurde

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, 0, 0)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels distincts

Mq $(g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n})$ libre

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

Si $\underbrace{g_{\alpha_i}}_{\text{pas dérivable}} \in \underbrace{\mathrm{Vect}\,(\underbrace{g_{\alpha_j}}_{\text{dérivable en } \alpha_i})_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}}}_{\text{dérivable en } \alpha_i}$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{\alpha_i} = 0$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

Si $\lambda_i \neq 0$ alors $\underbrace{g_{\alpha_i}}_{\text{non dérivable en } \alpha_i} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} g_{\alpha_k}}_{\text{dérivable en } \alpha_i}$

$\to$ <u>Absurde</u>

$\to \lambda_i = 0$