Devoir à rendre le 8/02/2021

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $(G, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ alors

— soit G est dense (i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists z \in G : x < z < t$)

— soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Soit $(G, +)$ un sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à 0. On considère

$$G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$$

1. *Montrer que G^+ admet une borne inférieure appartenant à $\mathbb{R}^+$ notée a.*
   Soit g un élément de $G \setminus \{0\}$. Soit $g > 0$ et alors g est un élément de G^+ soit $g < 0$ et alors $-g$ est un élément de G^+. Par suite G^+ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Elle possède donc une borne inférieure notée a.
   Comme 0 minore G^+, on en déduit que a est un réel positif.
2. *Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ puis que $G = a\mathbb{Z}$.*
   Supposons, par l'absurde, que $a \notin G$.
   Par définition de la borne inférieure, comme $a < 2a$, il existe $g_1 \in G$ tel que $a \leq g_1 \leq 2a$ et comme $a \notin G$, on a $a < g_1 \leq 2a$ donc il existe $g_2 \in G$ tel que $a < g_2 < g_1 \leq 2a$.
   Comme g est un groupe $g_1 - g_2$ appartient à G^+. Or, $g_1 - g_2 < a$ ce qui contredit le fait que a soit la borne inférieure de G^+.
   Par conséquent, si $a > 0$ alors $a \in G$.
   Comme a appartient à G, le groupe qu'il engendre $a\mathbb{Z}$ est inclus dans G
   Réciproquement, soit $g \in G$. On note k la partie entière de g/a alors $ka \leq g < (k+1)a$ donc $g - ka \in G^+ \cap [0, a[$ i.e. $g = ka$.
   Par suite, $G = a\mathbb{Z}$.
3. *Montrer que si $a = 0$ alors G est dense.*
   Soient x et y deux réels tels que $x < y$ alors $y - x > 0$.
   Comme $a = 0$, $y - x$ n'est pas un minorant de G^+ donc il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g \leq y - x$.
   On note k la partie entière de x/g alors $kg \leq x < (k+1)g \leq kg + y - x < y$.
   Or, comme somme d'éléments de G, $(k+1)g$ appartient à G.
   Le groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$.
4. *Application : soient a et b deux réels non nuls.*
   (a) *Montrer que $G_{a,b} = \{an + bm\ ,\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$*
   L'ensemble $G_{a,b}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, contient 0, est stable par la loi + ($(an + bm) + (an' + bm') = a(n + n') + b(m + m')$) et passage à l'inverse ($-(an + bm) = a(-n) + b(-m)$) donc $G_{a,b}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   (b) Supposons que $G_{a,b}$ ne soit pas dense. Il existe donc un réel c tel que $G_{a,b} = c\mathbb{Z}$.
   En particulier, il existe des entiers k et k' non nuls tels que $a = kc$ et $b = k'c$ donc $a/b = k/k'$ est un rationnel.
   (c) Supposons que a/b soit rationnel alors il existe deux entiers k et k' premiers entre eux tels que $a/b = k/k'$.
   On pose $c = a/k = b/k'$. Ainsi, pour tout couple (n, m) d'entiers relatifs, $an + bm = c(kn + k'm)$ donc $G_{a,b} \subset c\mathbb{Z}$.
   Réciproquement, comme k et k' sont premiers entre eux, il existe des entiers r et t tels que $rk + tk' = 1$. En particulier, $c = c(rk + tk') = ar + bt \in G_{a,b}$.
   Le groupe engendré par c est donc inclus dans $G_{a,b}$.
   Par conséquent, $G_{a,b} = c\mathbb{Z}$ donc $G_{a,b}$ n'est pas dense.
   On a donc montré que $G_{a,b}$ est dense si et seulement si a/b est irrationnel.

Exercice 2 : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

I Calcul de l'intégrale $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$:

On considère pour cela la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \mathrm{d}t$

1. *Calculez $f(0)$.*
   On a $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{4}}$
2. *Soit $x \geq 0$. Montrer que $\frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$.*
   Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \leq (1 + t^2)x \leq 2x$ puis $\frac{e^{-2x}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$ donc $e^{-2x} f(0) \leq f(x) \leq e^{-x} f(0)$ i.e.
   $$\boxed{\frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}}$$
3. *En déduire la limite de f en $+\infty$.*
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, le théorème d'encadrement implique que
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

4. *Prouver que* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Soit $x<0$. Pour tout $t\in[0,1]$, $(1+t^2)x\le x$ puis $\dfrac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\ge\dfrac{e^{-x}}{1+t^2}$ donc $f(x)\ge e^{-x}f(0)$. Comme $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$, le théorème d'encadrement donne :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.}$$

5. *Soit* $u\in\mathbb{R}$. *Montrer que* $0\le e^u-1-u\le\dfrac{1}{2}e^u u^2$.

Soit $\phi : u\mapsto e^u-1-u$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\phi' : u\mapsto e^u-1$. Donc ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\phi(0)=0$, on en déduit que ϕ est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $\psi : u\mapsto e^u-1-u-\dfrac{1}{2}u^2e^u$. La fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde $\phi" : u\mapsto e^u(-u^2/2-2u)$. Donc ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\psi'(0)=0$, on en déduit que ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\psi(0)=0$, on en déduit que ψ est négative sur $\mathbb{R}$. Par conséquent

$$\boxed{\forall u\in\mathbb{R}^+,\quad 0\le e^u-1-u\le\frac{1}{2}e^u u^2.}$$

Soit $g : u\mapsto e^u-1-u-\dfrac{1}{2}u^2e^{-u}$. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde $g" : u\mapsto e^{-u}(e^{2u}-2+3u-u^2/2)$. Donc $g"$ est négative sur $\mathbb{R}^-$ ($e^{2u}-2\le-1$ et $3u-u^2/2\le0$) donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Comme $g'(0)=0$, on en déduit que g est croissante sur $\mathbb{R}^-$. Comme $g(0)=0$, on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent

$$\boxed{\forall u\in\mathbb{R}^-,\quad 0\le e^u-1-u\le\frac{1}{2}e^{-u}u^2.}$$

Remarque : cette inégalité est beaucoup plus facile à obtenir avec la formule de Taylor ave reste intégral.

6. *Soit* $x\in\mathbb{R}$ *et* $h\in[-1,1]$. *En déduire que*

$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right|\le\frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}$$

On a

$$f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2}-\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}+he^{-(1+t^2)x}\right]\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2}-\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}-he^{-(1+t^2)x}\right|&=\left|\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\right|\left|e^{-(1+t^2)h}-1+(1+t^2)h\right|\\&\le\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\frac{1}{2}e^{(1+t^2)h}\left((1+t^2)h\right)^2\end{aligned}$$

Comme $(1+t^2)(h-x)\le(1+t^2)(1-x)\le(1+t^2)|1-x|\le2|1-x|$, on en déduit que

$$\left|\frac{e^{-(1+t^2)(x+h)}}{1+t^2}-\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}+he^{-(1+t^2)x}\right|\le\frac{h^2}{2}(1+t^2)e^{2|1-x|}$$

D'où :

$$\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right|\le\frac{h^2}{2}e^{2|1-x|}\int_0^1(1+t^2)\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\left|f(x+h)-f(x)+h\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right|\le\frac{2h^2}{3}e^{2|1-x|}}$$

7. *En déduire que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et donner l'expression de* f' *sous forme d'intégrale.*

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}^*$, on a

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t\right|\le\frac{2h}{3}e^{2|1-x|}$$

donc

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t=0$$

i.e.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, f est dérivable en x et

$$\boxed{f'(x)=-\int_0^1 e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t}$$

8. *Prouver que la fonction* $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x^2)+\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer sa dérivée.*

Les fonctions f et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto f(x^2)$ aussi.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = 2xf'(x^2) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\mathrm{d}t + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t.$$

Si $x = 0$ alors $g'(0) = 0$. Si $x \neq 0$ alors on effectue le changement de variable $u = tx$ ce qui est possible car $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on obtient :

$$\int_0^1 e^{-(tx)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

Par suite :

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$$

La fonction g est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ ce qui prouve que g est constante à sa valeur en 0 : $\frac{\pi}{4}$.

9. *En déduire l'existence et la valeur de I.*
Comme g et f admettent des limites en $+\infty$ égales respectivement à $\frac{\pi}{4}$ et 0, la fonction $x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ aussi et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Pour tout $x \geq 0$, on a $\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \geq 0$ donc

$$\boxed{I = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

10. En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto \sqrt{2}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2}\sqrt{2}\mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2}I$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est paire, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

II Étude de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$:

1. *Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
Soit $(x, A) \in \mathbb{R}$, la relation de Chasles donne

$$\int_{-A}^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_{-A}^0 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t + \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

Ainsi, $F(x)$ est bien définie et $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\right)$ i.e.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.}$$

2. *Calculer $F(0)$.*
On a $\boxed{F(0) = \frac{1}{2}}$

3. *Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On notera G sa réciproque.*
La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} > 0$.
La fonction F est donc strictement croissante et réalise, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim_{-\infty} F, \lim_{+\infty} F\right[$.
Or $\lim_{-\infty} F = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0$ et

$$\lim_{\infty} F = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$.*
Par définition

$$F(-x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

car la fonction $t\mapsto e^{-t^2/2}$ est paire. Donc

$$\boxed{F(-x)=1-F(x)}$$

5. *Soit $y \in]0,1[$. Exprimer $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$.*
On a
$$G(1-y)=G\left(1-F(G(y))\right)=G\left(F(-G(y))\right)=-G(y)$$

6. *Tracer le graphe de F et G.*

7. *Soit $x<0$. Montrer que $\forall u \in]-\infty,x]$, on a $\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)h'(u)\leq e^{-u^2/2}\leq h'(u)$ où $h\,:\,\mathbb{R}^{-*}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -\dfrac{1}{x}e^{-x^2/2}$.*
La fonction Soit $u\in]-\infty,x]$, on a

$$h'(u)=\left(\frac{1}{u^2}+1\right)e^{-u^2/2}\geq e^{-u^2/2}$$

Comme $u\leq x<0$, $x^2\leq u^2$ donc $1-\dfrac{1}{x^2}\leq 1-\dfrac{1}{u^2}\leq \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u^2}}$. Comme $f'(u)>0$, on a donc

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)h'(u)\leq e^{-u^2/2}\leq h'(u)}$$

8. *En déduire que, pour tout $x<0$, on a*

$$-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\leq F(x)\leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$$

D'après la question précédente, pour tout $x<0$ et $A>-x$, on a :

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(h(x)-h(-A))\leq \int_{-A}^{x} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\leq (h(x)-h(-A))$$

Par croissance comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} h(-A)=0$ donc :

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)h(x)\leq \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{x} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\leq h(x)$$

i.e.

$$\boxed{-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\leq F(x)\leq -\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

9. *En déduire un équivalent de F en $-\infty$ puis de $1-F$ en $+\infty$.*
Soit $x<0$, on a

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\leq F(x)\frac{-x\sqrt{2\pi}}{e^{-x^2/2}}\leq 1$$

Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)\dfrac{-x\sqrt{2\pi}}{e^{-x^2/2}}=1$ i.e.

$$\boxed{F(x)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

Comme, pour tout x, $F(-x)=1-F(x)$, on a :

$$\boxed{1-F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$$

10. *Trouver un équivalent de $\ln F$ en $-\infty$.*
Comme $F(x)=-\dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1+\underset{+\infty}{o}(1)\right)$,

$$\ln F(x)=\ln\left(e^{-x^2/2}\right)-\ln\left(x\sqrt{2\pi}\right)+\ln\left(1+\underset{+\infty}{o}(1)\right)$$

Comme $\ln\left(x\sqrt{2\pi}\right)+\ln\left(1+\underset{+\infty}{o}(1)\right)=\underset{+\infty}{o}(x^2)$, on a donc

$$\boxed{\ln F(x)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{x^2}{2}}$$

11. *Donnez un équivalent de G en 0 et en 1.*
Comme $\lim\limits_{0} G=-\infty$, on a $\ln F(G(x))\underset{0}{\sim}-\dfrac{G(x)^2}{2}$ i.e. $G(x)^2\underset{0}{\sim}-2\ln x$.
Comme G est négative au voisinage de $-\infty$, on a donc :

$$\boxed{G(x)\underset{0}{\sim}-\sqrt{-2\ln x}}$$

Comme, pour tout x, $G(1-x)=-F(x)$, on a :

$$\boxed{G(x)\underset{1}{\sim}\sqrt{-2\ln(1-x)}}$$