

L'indice et le froid

I. Vérification de la loi de Gladstone-Dale

1. Approximation usuelle : l'air se comporte comme un gaz parfait.

$$\Rightarrow PV = nRT \quad \Rightarrow PV = \frac{m_{\text{air}}}{M_{\text{air}}} RT$$

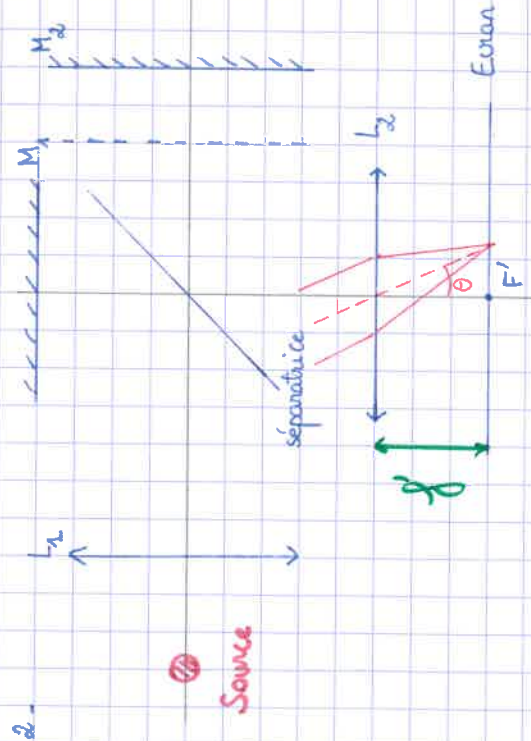
soit $PM_{\text{air}} = \rho RT$ ρ masse volumique de l'air.

$n-1$ est proportionnel à $\rho = \frac{PM_{\text{air}}}{RT}$ donc

$$n-1 \propto \frac{P}{T}$$

A température constante, $n-1 = kP$ et $n_0 - 1 = kP_0$ (k constante)

$$\Rightarrow n - n_0 = k(P - P_0)$$



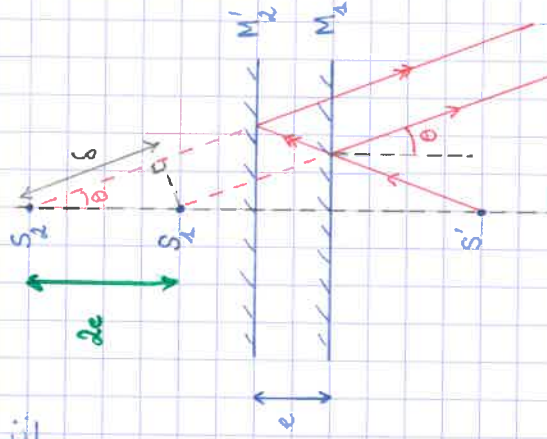
Les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaires. M'_2 image de M_2 par la séparatrice est parallèle à M_1 et distant de e de e dernier.

L_2 condenseur : lentille convergente permettant de condenser la lumière sur les miroirs

L_2 : lentille convergente avec l'écran dans son plan focal image. Elle permet de faire l'image du plan de séparation du plan de focalisation de l'écran (l'infini) sur l'écran.

Les 2 rayons interférant proviennent du même rayon incident. S' image de S (point source) par la séparatrice.

Schéma équivalent :



D'après le schéma, on obtient

$$\delta = 2e \cos \theta$$

Au centre de la figure d'interférence l'ordre est entier $p_0 = \frac{\delta_0}{\lambda} \in \mathbb{Z}$

Ordre du $k^{\text{ème}}$ anneau brillant : $p_0 - k = \frac{\delta_0}{\lambda} - k$

Rayon du 1^{er} anneau brillant :

$$r_k = f' \theta_k \quad (\theta_k \text{ petit})$$

$$\text{avec } \cos \theta_k = 1 - \frac{\theta_k^2}{2} \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{\delta_0} \Rightarrow \theta_k = \sqrt{2 \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0} \right)}$$

$$\Rightarrow \theta_k = \sqrt{2 \frac{R \lambda'}{\delta_0}} \Rightarrow r_k = f' \sqrt{2 \frac{R \lambda'}{\delta_0}}$$

3. Au centre de la figure d'interférence, $\theta = 0$. Les rayons lumineux qui traversent la cuve parcourent dans celle-ci un aller-retour de chemin optique $2nL$. Sur l'autre branche du Michelson, le chemin optique correspondant est parcouru dans l'air : $2n_0L$.

Différence de marche supplémentaire : $\delta_{\text{sup}} = 2(n - n_0)L$

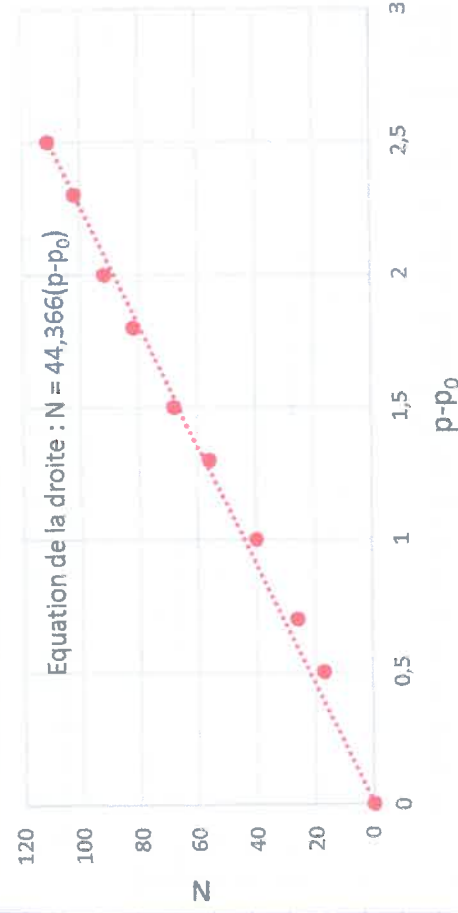
Une frange brillante défile à chaque fois que δ_{sup} varie de λ

$$\Rightarrow \delta_{\text{sup}} = N\lambda$$

D'après l'énoncé, on a $n - n_0 = \frac{\alpha}{T_0} (p - p_0)$

$$\Rightarrow N = \frac{2\alpha L}{\lambda T_0} (p - p_0)$$

4.



5.

On trace $N = f(p - p_0)$. On obtient une droite donc le modèle est vérifié.

Le coefficient directeur est $b = \frac{2\alpha L}{\lambda T_0} = 44,4 \text{ bar}^{-1}$

$$\Rightarrow a = \frac{b \lambda T_0}{2L} = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ K bar}^{-1} = 8,8 \cdot 10^{-7} \text{ K Pa}^{-1}$$

5. Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m_e \omega_0^2 \vec{r} - m_e \Gamma \vec{v}$$

en négligeant la partie magnétique de la force de Lorentz.

On peut négliger la force magnétique car les électrons ne sont pas relativistes.

$$\text{Pour une OPPM} \quad \vec{B} = \vec{r} \wedge \vec{E} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v}{c} \ll 1$. La partie magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la partie électrique.

$$\text{Notations complexes : } m_e i \omega \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m_e \omega_0^2}{i\omega} \vec{r} - m_e \Gamma \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{e}{m_e} \frac{\vec{E}}{i\omega + \frac{\omega_0^2}{\omega} + \Gamma}$$

6. Si on avait appliqué la même méthode au noyau, on aurait obtenu une expression de sa vitesse similaire à la précédente. Cependant, la masse du noyau est bien supérieure à celle de l'électron $\Rightarrow \|\vec{v}_{\text{noyau}}\| \ll \|\vec{v}\|$

On peut donc négliger le mouvement du noyau.

Vecteur densité de courant : $\vec{j} = 2n^*e\vec{v}$

$$\vec{j} = \frac{2n^*e^2}{m_e} \underbrace{\frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}}_{\gamma} \vec{E}$$

(2 électrons par molécule)

$$\Rightarrow \kappa = 2$$

7. Comportements limites :

$$\begin{aligned} * \omega \rightarrow 0 : \gamma &\sim \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2} \rightarrow 0 \\ * \omega \rightarrow +\infty : \gamma &\sim \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{-\omega^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

γ correspond à un filtre passe-bande

Forme canonique : $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{1}{\Gamma + i\omega(\frac{1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$

Résonance pour $\omega = \omega_0$ On a alors $\gamma = \gamma_0 = \frac{2n^*e^2}{m_e\Gamma}$

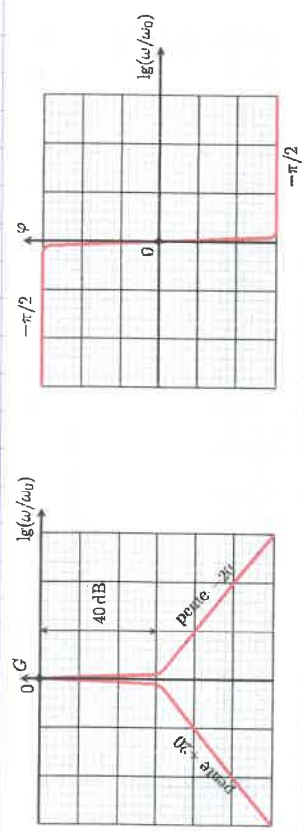
Fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

Diagramme de Bode :



8. Le milieu est neutre : $\rho = 0$

Equations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{Maxwell - Gauss : } \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{Maxwell Faraday : } \text{rot } \vec{E} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell flux : } \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{Maxwell - Ampère : } \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ en notation complexe} \end{aligned}$$

Equation de propagation : (notation complexes)

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = -\Delta \vec{E} \\ &= -\mu_0 \gamma i\omega \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \left(1 + \frac{\gamma}{i\epsilon_0 \omega} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\epsilon_0 \omega} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \epsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{i\epsilon_0 \omega}$$

9. On néglige les pertes : $\Gamma = 0$
 $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \gamma \sim \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2}$

$$\text{Permittivité relative : } \epsilon_r \approx 1 + \frac{2n^*e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

Vitesse de propagation de l'onde :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r = \frac{n^2}{c^2} \Rightarrow n^2 = \epsilon_r \\ n^2 - 1 &= \frac{2n^*e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} \ll 1 \text{ d'après l'énoncé} \end{aligned}$$

④

$$\Rightarrow n = \left(1 + \frac{2n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow n \approx 1 + \frac{n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

10. Equation d'état du gaz parfait: $p = n^* k_B T_0$ ($T = T_0$)

On remplace dans l'expression de l'indice

$$n = 1 + \frac{p^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2 k_B T_0}$$

Si $p = p_0$ alors $n = n_0 = 1 + \frac{p_0^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2 k_B T_0}$

$$\Rightarrow n - n_0 = \frac{e^2}{m_e \epsilon_0^2 k_B T_0} (p - p_0) = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$$

Par identification, $a = \frac{e^2}{m_e \epsilon_0^2 k_B}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{m_e \epsilon_0 k_B a}} = 1.5 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

domaine des UV

$\omega \ll \omega_0$ est vérifié dans le domaine du visible

II. Refroidissement par désaimantation adiabatique

11. Positions d'équilibre: $\vec{p} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

\Rightarrow 2 positions d'équilibre: \vec{p} et \vec{B} colinéaires et de même

\times \vec{p} et \vec{B} colinéaires et de sens contraires

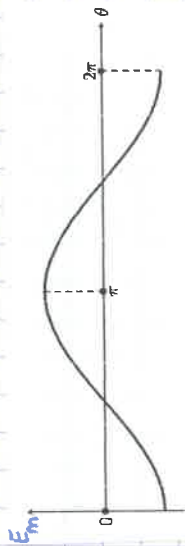
Etude de la stabilité: on s'écarte un peu de l'état d'équilibre.



Le couple ramène \vec{p} vers \vec{B}
 \Rightarrow l'équilibre est stable



Le couple éloigne \vec{p} de \vec{B}
 \Rightarrow l'équilibre est instable



$$E_m = -\mu B \cos \theta$$

$\theta = 0$ minimum de E_m : position d'équilibre stable.

$\theta = \pi$ maximum de E_m : position d'équilibre instable.

12. Mouvement circulaire: $L = m_e \hbar v$

intensité électrique: $i = -\frac{e}{T}$ or $T = \frac{2\pi \hbar}{E}$

$$\Rightarrow i = -\frac{e v}{2\pi \hbar}$$

Moment magnétique:

$$\mu = i \pi r^2 = -\frac{e v}{2\pi \hbar} \pi r^2 \Rightarrow \mu = -\frac{e v r}{2}$$

$$\vec{\mu} = i S \vec{B}$$

$$\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = -m_e \hbar v \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Conclusion: $\vec{\mu}$ est colinéaire à \vec{L} (de sens contraire)

Or $L = p \hbar \Rightarrow \|\vec{\mu}\| = p \frac{e \hbar}{2m_e} = p \mu_B \quad p \in \mathbb{N}^*$

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} = 9.10^{-24} \text{ A.m}^2$$

13. Loi de probabilité de Boltzman: $P_k = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)$

avec $E_k = -k g \mu_B B$

$$\Rightarrow x = \frac{g \mu_B B}{k_B T}$$

14. Normalisation de la probabilité: $\sum_k P_k = 1 = \sum_k \frac{1}{Z} \exp(kx)$

$$\Rightarrow Z = \sum_{k=-m}^m \exp(kx)$$

somme de termes d'une suite géométrique de raison e^x

$$\Rightarrow Z = \exp(-mx) \frac{1 - \exp[(2m+1)x]}{1 - \exp(x)} = \exp\left[\left(m + \frac{2m+1}{2}\right)x\right] \frac{\exp(-\frac{x}{2}) - \exp(\frac{x}{2})}{\exp(-\frac{x}{2}) - \exp(\frac{x}{2})}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\sinh[(2m+1)\frac{x}{2}]}{\sinh(\frac{x}{2})} \quad \text{fonction de partition}$$

15. Valeur moyenne: $\langle \mu_z \rangle = \sum_{k=-m}^m P_k k g \mu_B = \frac{g \mu_B}{Z} \sum_{k=-m}^m k e^{kx}$

$$\Rightarrow \langle \mu_z \rangle = g \mu_B \frac{d}{dx} (\ln Z)$$

Aimantation M des ions par unité de volume:

$$M = n^* \langle \mu_z \rangle \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = \frac{\sinh(2m+1)\frac{x}{2}}{\sinh(\frac{x}{2})} \left[\frac{(m+1)}{2} \frac{1}{\sinh(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(\frac{x}{2})} \right] = \frac{(m+1)}{2} \frac{\cosh(2m+1)\frac{x}{2}}{\sinh^2(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} \frac{\cosh(\frac{x}{2}) \sinh(2m+1)\frac{x}{2}}{\sinh^2(\frac{x}{2})}$$

$$\Rightarrow M = n^* g \mu_B \left[\frac{m+\frac{1}{2}}{\sinh(\frac{m+1}{2}x)} - \frac{1}{2 \cosh(\frac{x}{2})} \right]$$

$$M_\infty = n^* g \mu_B$$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sinh x} x = \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$

$$M = M_\infty \left[\frac{1}{x} \left(1 + \frac{(m+\frac{1}{2})^2 x^2}{3}\right) - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{12}\right) \right]$$

5)

$$M = M_\infty \frac{x}{3} \left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \Rightarrow M = \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{3 k_B} m(m+1) \frac{B}{T}$$

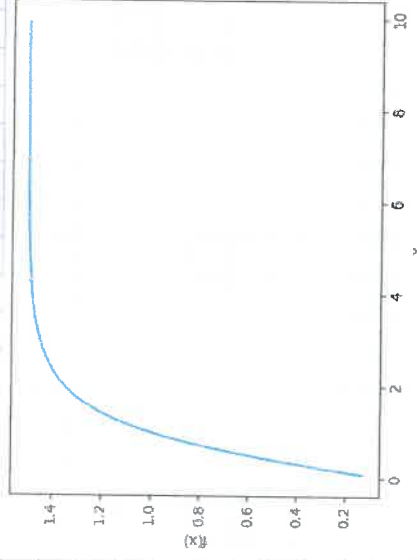
$$\chi = \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{3 k_B} m(m+1)$$

17. $\chi = \frac{g^2 \mu_B^2}{k_B T} \rightarrow$ Champs magnétiques faibles ou températures élevées

L'agitation thermique entraîne l'orientation aléatoire des moments magnétiques. Par conséquent, l'aimantation est nulle.

$\chi \rightarrow +\infty$ (champs magnétiques forts ou températures faibles)
Tous les moments magnétiques alignés dans la direction du champ magnétique. L'aimantation tend vers une valeur d'aimantation à saturation.

Allure de $f(x)$:



Susceptibilité magnétique: $\chi = \frac{\mu_B}{T} \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{3 k_B} m(m+1)$

$$\chi = \frac{5 \mu_B}{T} \frac{n^* \mu_B^2}{k_B} = 7,5 \cdot 10^{-5}$$

même ordre de grandeur que la valeur expérimentale.

18. Gaz soumis à des forces de pression: $dU = T dS - p dV$

Equivalent du terme B dM: $-p dV$

⑥

Enthalpie volumique: $h = u - B M$

$$dh = du - B dM - M dB \Rightarrow dh = T ds - M dB$$

$$dh = c_B dT = T ds - M dB \quad \text{avec } M = \gamma \frac{B}{T}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{c_B}{T} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB$$

19. On a $ds = \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial B} dB$

Théorème de Schwarz: $\left(\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right) \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial B} \right) \right)_B$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{c_B}{T} \right) \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\gamma \frac{B}{T^2} \right) \right)_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{\partial c_B}{\partial B} \right)_T = - \frac{2 \gamma B}{T^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial c_B}{\partial B} \right)_T = - 2 \frac{\gamma B}{T^2} \quad \eta = -2$$

On intègre la relation précédente:

$$c_B(B, T) = c_B(B=0, T) + \int_0^B - 2 \frac{\gamma B}{T^2} dB = c_B(B=0, T) - \underbrace{\frac{\gamma B^2}{T^2}}_{\frac{\alpha}{T^2}}$$

$$\Rightarrow c_B = \alpha - \frac{\gamma B^2}{T^2}$$

20. Evolution adiabatique réversible (= isentropique): $ds=0$

$$\frac{c_B}{T} dT = \alpha - \frac{\gamma B^2}{T^3} dT = \gamma \frac{B}{T^2} dB$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\gamma B}{\gamma B^2 - \alpha} dB \quad \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = \int_{B_i}^{B_f} \frac{\gamma B}{\gamma B^2 - \alpha} dB$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma B_f^2 - \alpha}{\gamma B_i^2 - \alpha} \right)$$

Dans le cas considéré, on a $\alpha = 0$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_f}{T_i} = \ln \frac{B_f}{B_i}$$

$$\Rightarrow T_f = T_i \frac{B_f}{B_i} = 35 \text{ mK}$$