

Travaux dirigés de physique

15 juin 2013

Liste des exercices

Thermodynamique	2
Exercice 1 <i>Onde de choc</i>	2
Exercice 2 <i>Pain de glace</i>	4
Exercice 3 <i>Nébuleuse</i>	6
Exercice 4 <i>Lampe à incandescence</i>	8
Mécanique	10
Exercice 5 <i>Mouvement dans un cône</i>	10
Exercice 6 <i>Yoyo</i>	12
Électrocinétique	14
Exercice 7 <i>Ligne de quadripôles</i>	14
Électromagnétisme	16
Exercice 8 <i>Méthode des images</i>	16
Exercice 9 <i>Caractéristique d'une diode à vide</i>	18
Exercice 10 <i>Haut-parleur électrodynamique</i>	21
Optique	23
Exercice 11 <i>Réflexion sur une surface périodique</i>	23
Exercice 12 <i>Cavité réfléchissante</i>	25
Exercice 13 <i>Autour du michelson</i>	27

Exercice 1 Onde de choc

On considère une onde de choc qui se propage dans une conduite de gaz ignifugée le long de (Ox) à la vitesse \vec{u} . Les caractéristiques du gaz avant passage de l'onde de choc sont indicées 1 et celle après le passage sont indicées 2. On sait que $v_1 = 0$ et $u > v_2$, et on suppose connaître T_1 , P_1 , μ_1 et P_2 .

Déterminer T_2 , μ_2 , u et v_2 .

Solution de l'exercice 1

Analyse

La transformation est irréversible à cause du gradient de pression et du flux de matière qu'il entraîne. Il nous faut 4 relations pour déterminer nos 4 inconnues :

- un bilan de matière ;
- une équation d'état ;
- le premier principe de la thermodynamique ;
- le PFD.

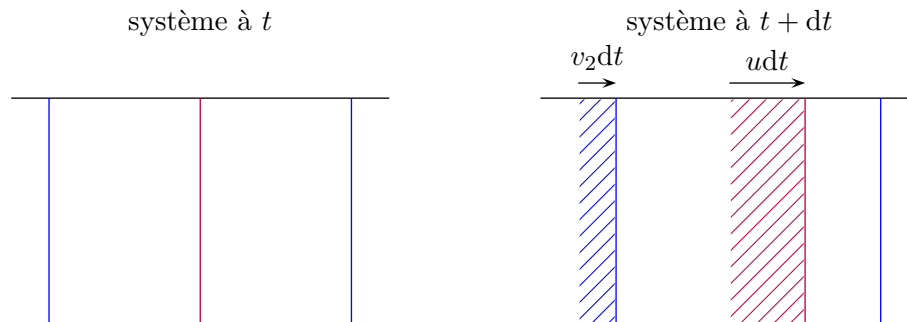
Équation d'état

On modélise le gaz qui a subi l'onde de choc par un gaz parfait, bien que cela puisse être discutable. Il en découle que

$$P_2 = \frac{\mu_2}{M} RT_2.$$

Conservation de la masse

On raisonne sur un système fermé dans le référentiel du laboratoire dont les limites sont en bleu (on aurait pu le faire sur un système ouvert). Le front de l'onde est en rouge.



Le bilan de matière s'écrit alors

$$-\mu_2 S v_2 dt + (\mu_2 - \mu_1) S u dt = 0 \Rightarrow \mu_2 (u - v_2) = \mu_1 u.$$

Le principe fondamental de la dynamique

On applique le théorème de la résultante cinétique à un système fermé dans le référentiel du laboratoire, avec le même dessin que précédemment. On comptabilise la variation de quantité de mouvement :

$$dp = \mu_1 S u dt \times v_2 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \mu_1 S u v_2.$$

La résultante des forces s'exerçant sur le système en projection sur (Ox) est $F_{\text{ext}} = P_2 S - P_1 S$. D'où la deuxième relation $P_2 - P_1 = \mu_1 u v_2$.

Le premier principe de la thermodynamique

On se place encore dans le référentiel du laboratoire et avec un système fermé. Durant dt , on a $dE = \delta Q + \delta W$. Globalement, une masse $dm = \mu_1 S u dt$ est passée des caractéristiques 1 aux caractéristiques 2. d'où

$$dE = \mu_1 S dt \left(C_{v,m}(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} v_2^2 \right) \quad \text{car } v_1 = 0.$$

De plus, $\delta Q = 0$: en effet pas de gradient de chaleur au niveau des parois latérales du système donc pas de flux de chaleur. $\delta W = P_2 S v_2 dt$, c'est un travail moteur car $dV < 0$. D'où la dernière équation :

$$\mu_1 u \left(C_{v,m}(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} v_2^2 \right) = P_2 V_2.$$

Résolution

On a donc un système de 4 équations à 4 inconnues dont je laisse la résolution aux bons soins du lecteur. Comme ne dirait pas M. Massias, je n'ai pas fait les calculs, et je trouve avec $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 \frac{P_1(\gamma - 1) + P_2(\gamma + 1)}{P_1(\gamma + 1) + P_2(\gamma - 1)} & v_2 &= (P_2 - P_1) \sqrt{\frac{2}{\mu_1(P_1(\gamma - 1) + P_2(\gamma + 1))}} \\ u &= \sqrt{\frac{P_1(\gamma - 1) + P_2(\gamma + 1)}{2\mu_1}} & T_2 &= T_1 \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1(\gamma + 1) + P_2(\gamma - 1)}{P_1(\gamma - 1) + P_2(\gamma + 1)} \end{aligned}$$

Commentaires

Effectuons des applications numériques avec des ordres de grandeurs judicieusement choisis :

P_1	T_1	μ_1	P_2	γ	μ_2	v_2	u	T_2
0,3 bar	300 K	0,7 kg · m ⁻³	3 bar	1,4	3,8 kg · m ⁻³	530 m · s ⁻¹	720 m · s ⁻¹	790 K

Les résultats fournis sont tout à fait réalistes : l'hypothèse du gaz parfait n'était donc pas farfelue. En effet la pression dans les conduites de gaz en temps normal est très inférieure à la pression atmosphérique, d'où la faible valeur de P_1 .

La transformation est irréversible donc $\Delta S > 0$. Or ici avec des quantités molaires

$$\Delta S_m = C_{p,m} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

Exercice 2 Pain de glace

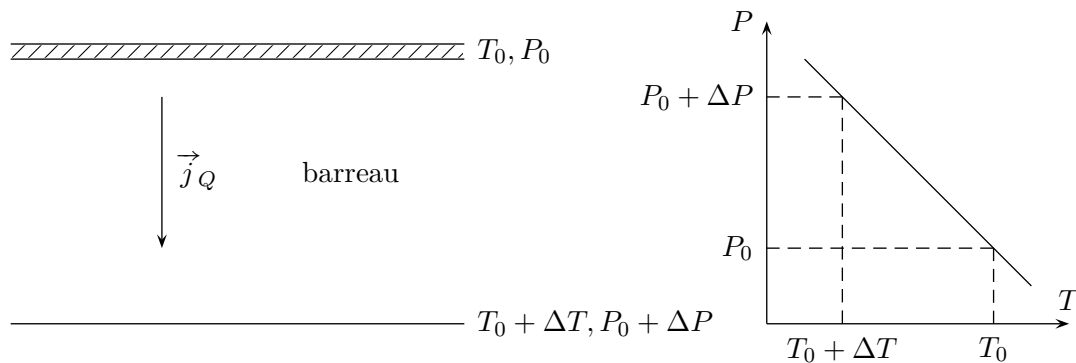
On considère un pain de glace à 0°C traversé horizontalement de part en part par une tige métallique qui descend progressivement dans le pain de glace.

1. Pourquoi la barre descend-t-elle ?
2. À quelle vitesse le fait-elle ?

Solution de l'exercice 2

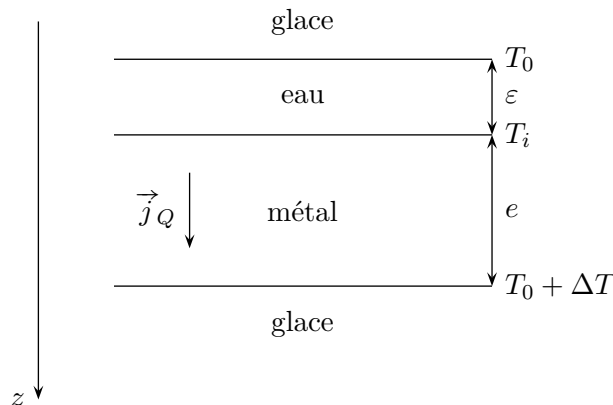
Analyse

La glace doit fondre en dessous du barreau pour le contourner et recongeler une fois le barreau passé. De plus si on note P_h et P_b les pressions respectivement au dessus et en dessous du barreau, alors $P_h = P_0 < P_b$ à cause de la surpression engendrée par le poids du barreau. Au vu de la pente négative de l'équilibre solide/liquide dans le diagramme (P, T) de l'eau, cette augmentation de pression à température constante va placer le système dans la zone liquide d'où la fonte. La fusion étant endothermique, il faut apporter de la chaleur en dessous du barreau, chaleur qui proviendra en régime permanent de la resolidification de l'eau au dessus du barreau. Mais pour amorcer le processus il faut un apport d'énergie initial. Voilà un schéma en régime permanent, attention $\Delta T < 0$:



Modélisation

On considère que tout ne dépend que de z , soit un pain de glace infini selon le plan (xOy) . De plus on se place en régime permanent.



Température sous la barre

La surpression est $\Delta P = mg/S$ où S est la surface en dessous de la barre. Or d'après la relation de Clapeyron, si L_F est l'enthalpie de fusion de la glace et en assimilant les différentielles à de petits écarts,

$$L_F = T \left[\underbrace{V_{m,\ell} - V_{m,g}}_{\Delta V_m < 0} \right] \frac{dP_e}{dT} \Rightarrow \Delta T \approx \frac{T}{L_F} \Delta V_m \Delta P \approx \frac{T}{L_F} \Delta V_m \frac{mg}{S}.$$

Flux de chaleur

On utilise la loi de Fourier, le flux de chaleur traversant le métal étant le même que celui qui traverse la glace :

$$j_Q = -\lambda_{\text{eau}} \frac{T_i - T_0}{\varepsilon} = -\lambda_{\text{métal}} \frac{T_0 + \Delta T - T_i}{e} \Rightarrow j_Q = -\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_{\text{eau}}} + \frac{e}{\lambda_{\text{métal}}}\right)^{-1} \Delta T.$$

On aurait pu retrouver ce résultat avec les résistances thermiques : celle de l'eau est $\frac{1}{\lambda_{\text{eau}}} \frac{S}{\varepsilon}$ et celle du métal $\frac{1}{\lambda_{\text{métal}}} \frac{S}{e}$ et donc par analogie électrocinétique, $\Delta T = -R_{\text{th}} \phi$ avec $R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda_{\text{eau}}} \frac{S}{\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{\text{métal}}} \frac{S}{e}$.

Quantité d'eau fondue et recongelée par unité de temps

D'après le premier principe, $dH = L_F dn$ or on a aussi $dH = j_Q S dt$ donc

$$\frac{dn}{dt} = \frac{j_Q S}{L_F}.$$

Vitesse de descente

Le volume de glace fondue par unité de temps est $(j_Q S / L_F) V_{m,\text{glace}}$ donc la vitesse de descente est, en regroupant toutes les expressions obtenues,

$$v = \frac{j_Q}{L_F} V_{m,\text{glace}} = \frac{mg}{S} \frac{T_0}{L_F^2} V_{m,\text{glace}} (V_{m,\text{glace}} - V_{m,\text{eau}}) \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\lambda_{\text{eau}}} + \frac{e}{\lambda_{\text{métal}}}}.$$

Ordres de grandeur

On va effectuer une application numérique avec les ordres de grandeur suivants :

$V_{m,\text{eau}}$	$V_{m,\text{glace}}$	λ_{eau}	$\lambda_{\text{métal}}$	L_f	m
$1 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$	$1,09 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$	$0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$60 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$6 \text{ kJ} \cdot \text{J}^{-1}$	1 kg
		e	S		
		$0,5 \text{ mm}$	10^{-4} m^2		

On remarque que l'on peut accélérer la descente de la barre en augmentant mg/S grâce à un système de poids qui appuient sur les extrémités de la barre hors du pain de glace. Néanmoins, il nous manque ε l'épaisseur de la couche d'eau au dessus de la barre qui est incalculable avec notre modèle. Faute de mieux, on négligera $\varepsilon/\lambda_{\text{eau}}$ devant $e/\lambda_{\text{métal}}$... On obtient donc une valeur de v un peu surestimée, qui est

$$v = 9 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Mais en réalité la descente se fait beaucoup plus rapidement, notre modélisation est donc peu précise. On peut chercher les problèmes du côté de l'hypothèse d'unidimensionnalité du problème, une chaleur importante passant sur les côtés de la barre.

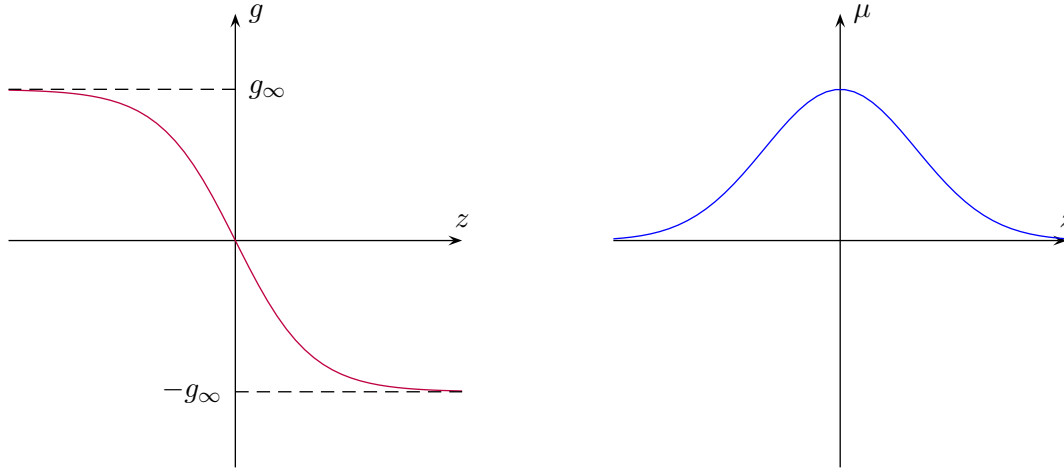
Exercice 3 Nébuleuse

On assimile une nébuleuse spatiale à un nuage de gaz parfait qui occupe une répartition symétrique par rapport au plan $z = 0$. Le problème étant supposé unidimensionnel, déterminer les fonctions $P(z)$, $\mu(z)$, $T(z)$ et $g(z)$. On posera $g_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$ et $P_0 = P(0)$.

Solution de l'exercice 3

Allure de g et μ

Le champ gravitationnel g tendant à ramener les objets vers le centre de la nébuleuse, g est fonction impaire de z et il semble clair que le nuage soit plus concentré au centre de la nébuleuse car les forces gravitationnelles sont attractives. D'où les graphiques suivants pour g et μ :



Relations

On écrit d'abord l'équation d'état et l'équilibre hydrostatique :

$$\mu(z) = \frac{MP(z)}{RT(z)} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dz} = +\mu g(z).$$

On applique le théorème de GAUSS à un petit élément de volume $d\tau$ compris entre les abscisses z et $z + dz$:

$$g(z + dz)dxdy - g(z)dxdy = -4\pi\mu(z)d\tau \Rightarrow \frac{dg}{dz} = -4\pi G\mu(z).$$

Il nous maintenant une quatrième relation portant sur $T(z)$, mais on peut la chercher longtemps puisqu'elle n'existe pas. Il nous faut donc proposer un modèle pour la répartition de température. On peut choisir classiquement entre $T = T_0$ ou $T = T_0 - \alpha z$, mais on prendra $T = T_0$ pour simplifier les calculs.

Résolution

On se fixe pour objectif de déterminer l'expression de g :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{M}{RT_0}g(z)P(z) \quad \text{et} \quad \frac{dg}{dz} = -4\pi G\frac{MP(z)}{RT_0} \Rightarrow P = -\frac{RT_0}{M4\pi G}\frac{dg}{dz},$$

d'où une équation différentielle sur g :

$$\frac{d^2g}{dz^2} = \frac{M}{RT_0}g\frac{dg}{dz} \Rightarrow \frac{dg}{dz} = \frac{M}{2RT_0}g^2 + \text{cte},$$

et puisque $\frac{dg}{dz} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, on prend $\text{cte} = -\frac{M}{2RT_0}g_\infty^2$. On peut poursuivre l'intégration :

$$\frac{dg}{dz} = \frac{M}{2RT_0}(g^2 - g_\infty^2) \Rightarrow \frac{dg}{g^2 - g_\infty^2} = \frac{M}{2RT_0}dz$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{g_\infty^2} \frac{dg}{1 - \left(\frac{g}{g_\infty}\right)^2} = -\frac{M}{2RT_0} dz \\
&\Rightarrow \operatorname{Argth} \left(\frac{g}{g_\infty} \right) = -\frac{Mg_\infty}{2RT_0} z + \underbrace{\text{cte}}_0 \\
&\Rightarrow g = -g_\infty \operatorname{th} \left(\frac{Mg_\infty}{2RT_0} z \right).
\end{aligned}$$

Puis on tire μ grâce à la relation donnée par le théorème de Gauss et P grâce à l'équation d'état :

$$\mu = \frac{Mg_\infty^2}{4\pi G 2RT_0} \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{Mg_\infty}{2RT_0} z \right) \right) \quad \text{et} \quad P = \frac{g_\infty^2}{8\pi g} \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{Mg_\infty}{2RT_0} z \right) \right);$$

Commentaires

$d = \frac{2RT_0}{Mg_\infty}$ est une distance caractéristique de la nébuleuse. De plus, la forme analytique en $-\operatorname{th}$ marche bien avec l'analyse du problème.

De manière plus intéressante, on a la relation $P_0 = \frac{g_\infty^2}{8\pi G}$. Ceci ne dépend pas de T_0 mais ne dépend pas non plus de notre modèle isothermique $T = T_0$. En effet, en éliminant μ entre la relation d'équilibre hydrostatique et celle donnée par le théorème de Gauss et en intégrant, il vient

$$P_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dP}{dz} = -\frac{1}{4\pi G} \int_0^{+\infty} g \frac{dg}{dz} = \frac{g_\infty^2}{8\pi G}.$$

Exercice 4 Lampe à incandescence

On considère une ampoule à incandescence qui consiste en un filament traversé par un courant d'intensité I dans du vide. Que dites vous ?

Solution de l'exercice 4

Analyse

Le filament est chauffé par effet JOULE et émet dans le visible, avec des longueurs d'onde comprises entre $\lambda_m/2$ et $8\lambda_m$ où λ_m est tel que $\lambda_m T = 2898 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$ d'après la loi de WIEN. Puisque l'on veut $\lambda_m/2 < 0,5 \mu\text{m}$ il faut un matériaux qui supporte au moins 3000 K sans fondre.

La température du filament T_f est un paramètre que l'on ne maîtrise pas directement, au contraire de P , U et I . La température du verre T_v ne doit pas être trop élevée pour qu'on ne se brûle pas en touchant l'ampoule. On veut aussi optimiser le rendement

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{visible}}}{\mathcal{P}_{\text{injectée}}}.$$

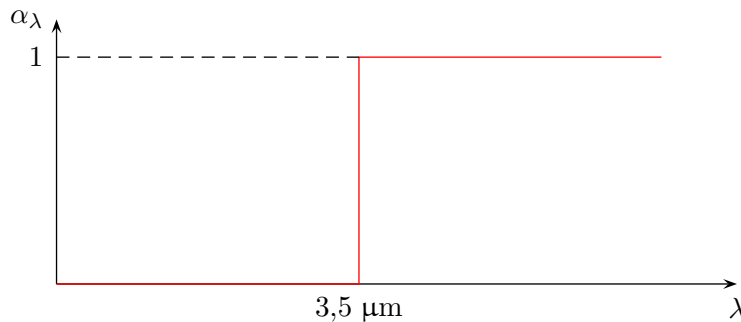
Il y a des transferts thermiques :

- du filament vers la face intérieure du verre de l'ampoule ;
- de l'atmosphère vers la face extérieure du verre ;
- du verre vers le filament et l'atmosphère.

Il y a aussi transfert conducto-convectif entre le verre et l'extérieur caractérisé par le coefficient h de conducto-convection.

On admet que l'atmosphère rayonne comme un corps noir, qui suit la loi de WIEN. Puisque $T_a \sim 300 \text{ K}$, $\lambda_m \sim 10 \mu\text{m}$ ce qui correspond à de l'infrarouge. L'atmosphère émet donc entre $5 \mu\text{m}$ et $80 \mu\text{m}$.

Le verre de l'ampoule n'est pas transparent pour tout le spectre. On fait l'hypothèse suivante sur le coefficient d'absorption α_λ :



L'ampoule rayonne-t-elle comme un corps noir ? C'est vrai si $\lambda_m/2 > 3,5 \mu\text{m}$, ce qui est équivalent avec la loi de WIEN à $T_v < 141 \text{ }^\circ\text{C}$, valeur réaliste. On admettra donc que le verre de l'ampoule rayonne comme un corps noir.

Le rayonnement qui sort du verre vers l'intérieur de l'ampoule presque entièrement forcé sur la paroi de verre opposée vu les faibles dimensions du filament. De plus, le verre absorbe tout le rayonnement atmosphérique et une partie du rayonnement du filament, celle au-dessus de $3,5 \mu\text{m}$.

Pour le filament, on fait l'hypothèse d'un corps gris avec $\varepsilon_f = 0,4$.

Température du filament

On fait un bilan énergétique sur le filament en régime permanent :

$$0 = dH = -\sigma T_f^4 S_f \varepsilon_f + \mathcal{P}_{\text{électrique}} + \varepsilon_f \sigma T_v^4 S_v \mu,$$

où μ est la fraction du rayonnement du verre que le filament reçoit. À l'équilibre et sans courant électrique, la relation est toujours valable et on en tire $S_v \mu = S_f$. De plus $T_v^4 \ll T_f^4$ donc

on néglige le rayonnement reçu du verre. On rappelle que σ est la constante de STEFAN et $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Enfin, on trouve

$$T_f = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{P}_{\text{électrique}}}{\varepsilon_f \sigma S_f}}.$$

Avec $\mathcal{P}_{\text{électrique}} = 60 \text{ W}$ et $S_f = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, l'application numérique donne $T_f = 3400 \text{ K}$.

Pour que le filament puisse supporter une telle température, il faut prendre du tungstène de température de fusion 3670 K .

On a bien $T_f \gg T_v$, l'hypothèse est validée. $\lambda_m = 0,85 \mu\text{m}$ et la gamme d'émission va de $0,43 \mu\text{m}$ à $6,8 \mu\text{m}$.

Température du verre

La puissance émise vient de $h(T_v - T_a)S_v$ émis vers l'atmosphère par conducto-convection et $\sigma T_v^4 S_v$ émis par le verre considéré comme un corps noir vers l'atmosphère.

Concernant la puissance absorbée, celle provenant de l'atmosphère est totalement absorbée et correspond à $\sigma T_a^4 S_v$, mais il y a aussi une partie de la puissance du filament

$$S_f \int_0^{+\infty} \varepsilon_f M_\lambda^0(\lambda, T_f) \alpha_\lambda d\lambda = S_f \int_{\lambda_0}^{+\infty} \varepsilon_f M_\lambda^0(\lambda, T_f) d\lambda.$$

Or $\int_0^{+\infty} M_\lambda^0(\lambda, T_f) d\lambda = \sigma T_f^4$, il faut donc calculer une fraction de cette quantité et la puissance reçue provenant du filament est, en utilisant la loi de PLANCK,

$$S_f \varepsilon_f \frac{\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_f}\right) - 1} d\lambda}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T_f}\right) - 1} d\lambda} \sigma T_f^4.$$

On pose le changement de variable $x = \frac{\lambda k_B T_f}{hc}$ et le quotient d'intégrale devient une fonction numérique, que l'on peut calculer approximativement ou symboliquement. Ainsi la puissance cherchée est

$$S_f \varepsilon_f \sigma T_f^4 F(x_0) \quad \text{où} \quad F(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1} dx}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1} dx} = 0,056.$$

On peut donc enfin faire le bilan énergétique sur le verre de l'ampoule en régime permanent :

$$h(T_v - T_a)S_v + \sigma T_v^4 S_v = S_v \sigma T_a^4 + \underbrace{S_f \varepsilon_f \sigma T_f^4 F(x_0)}_{\mathcal{P}_{\text{électrique}}}.$$

On prend un rayon $R = 2,5 \text{ cm}$ pour l'ampoule, ce qui nous donne S_v . La calculatrice se fait un plaisir de résoudre l'équation ci-dessus et on trouve $T_v = 329 \text{ K} = 56^\circ \text{C}$.

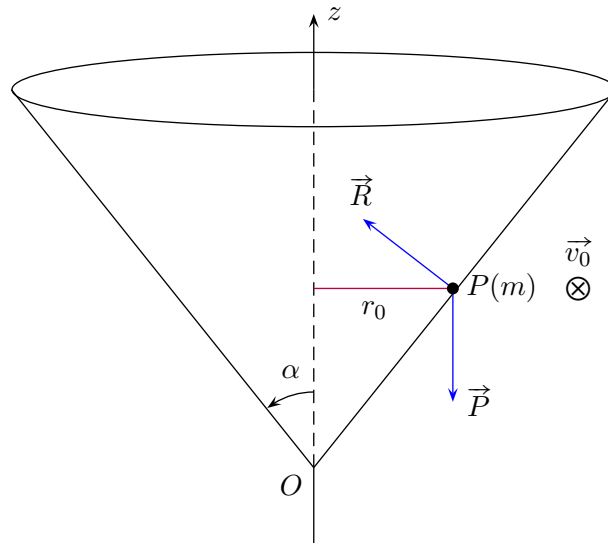
L'ordre de grandeur est satisfaisant, c'est chaud mais on peut toucher l'ampoule sans se brûler instantanément. $\lambda_m = 8,8 \mu\text{m}$ donc le verre émet entre $4,4 \mu\text{m}$ et $70 \mu\text{m}$. On peut de plus évaluer chacun des termes du bilan :

$\sigma T_v^4 S_v$	$h(T_v - T_0)S_v$	$F(x_0)S_f \varepsilon_f \sigma T_f^4$	$S_v \sigma T_a^4$
5,22 W	1,41 W	3,4 W	3,28 W

Les différents éléments pris en compte sont du même ordre de grandeur : on n'aurait rien pu négliger de plus.

Exercice 5 Mouvement dans un cône

On considère un point matériel $P(m)$ qui glisse sans frottements dans un cône d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet α . Les conditions initiales sont, en coordonnées cylindriques, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta$ et $r = r_0$. Déterminer le mouvement de P .



Solution de l'exercice 5

Analyse

On choisit bien sur les coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans lesquelles $r = z \tan \alpha$, le mouvement ne possède que deux degrés de liberté.

Il y a lutte entre \vec{P} et \vec{R} pour faire monter ou descendre le mobile. Plus P tourne vite, plus \vec{R} est important et tend à faire remonter P ; le poids \vec{P} est constant. Selon la valeur de \vec{v}_0 , le point peut initialement monter ou descendre. Le système est énergétiquement conservatif.

Mise en équation

On applique le PFD en projection sur la base cylindrique :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -R \cos \alpha & (1) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & (2) \\ m\ddot{z} = R \sin \alpha - mg & (3) \end{cases}$$

(2) est une équation classique qui apparaît dès que l'accélération orthoradiale est nulle. En multipliant par \dot{r} , il vient

$$\begin{aligned} 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cte} = r_0 v_0. \end{aligned}$$

On veut éliminer R : (3) devient

$$R = \frac{1}{\sin \alpha} (m \cotan \alpha \ddot{r} + mg),$$

d'où en injectant dans (1),

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow m\ddot{r} - r \frac{r_0^2 v_0^2}{r^4} = -\cotan \alpha (m \cotan \alpha \ddot{r} + mg) \\ &\Leftrightarrow m \underbrace{\ddot{r} (1 + \cotan^2 \alpha)}_{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} - m \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} + mg \cotan \alpha = 0 \end{aligned}$$

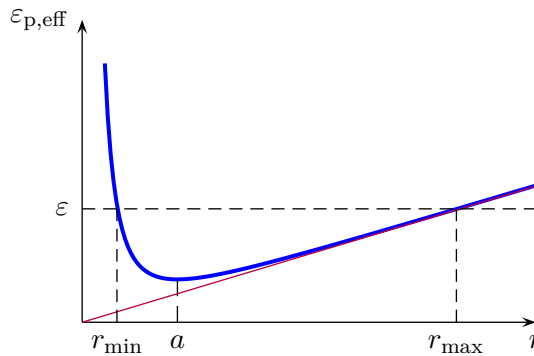
$$\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r^3} + g \cotan \alpha = 0.$$

En multipliant par \dot{r} et en intégrant, il vient

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} + gr \sin \alpha \cos \alpha = \text{cte} = \varepsilon. \quad (4)$$

Potentiel effectif

$\varepsilon_{c,\text{eff}} = \frac{1}{2} \dot{r}^2$ est un terme d'énergie potentielle massique; le reste de (4) ne dépendant que de r , c'est une énergie potentielle massique dite efficace et on la notera $\varepsilon_{p,\text{eff}}$. (4) est donc une équation de conservation de l'énergie. Traçons $\varepsilon_{p,\text{eff}}$ en fonction de r :



$$\varepsilon_{p,\text{eff}} = \frac{A}{r^2} + Br$$

On calcule a en sachant que la dérivée de (4) s'annule en a , on trouve $a = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/3}$.

Détermination du mouvement

À $t = 0$, $\varepsilon_{c,\text{eff}} = 0$ donc $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$. Pour que $r = r_{\min}$ par exemple, il faut

$$\begin{aligned} r_0 < a &\Leftrightarrow r_0^3 < \frac{2r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g \sin \alpha \cos \alpha} \\ &\Leftrightarrow r_0 < v_0^2 \frac{\tan \alpha}{g} \\ &\Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{r_0 g}{\tan \alpha}}. \end{aligned}$$

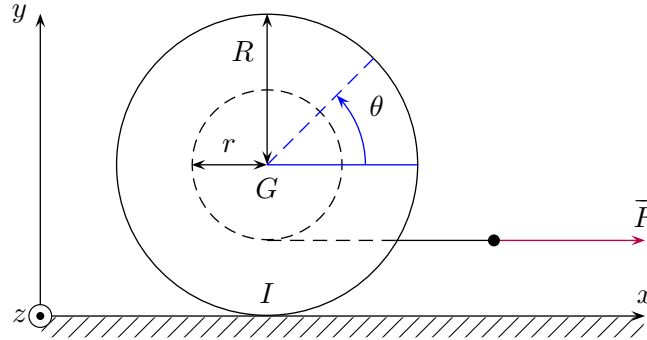
C'est homogène et l'inégalité est dans le bon sens. En effet, si $r_0 < a$, P va commencer à monter dans un mouvement hélicoïdal dont la vitesse orthoradiale diminue à mesure que P monte dans le cône. À une certaine altitude, c'est \vec{P} qui domine \vec{R} en projection sur \vec{u}_z et P commence à redescendre, effectuant ainsi des oscillations verticales.

Position d'équilibre

Si $r_0 = a$, P reste à la même altitude et à une trajectoire circulaire. Que dire de la stabilité de cet équilibre? On pose $r = r_0 + \rho$ avec $\frac{\rho}{r_0} \ll 1$, on injecte cette expression dans (4) et on obtient (après calculs) une équation différentielle du type oscillateur harmonique. L'équilibre est donc stable.

Exercice 6 Yoyo

On considère un yoyo de masse m dont le rayon extérieur est R et le rayon du tambour est r qui roule sur le sol avec un coefficient de frottement $f = f_0$. À $t = 0$, on exerce sur le bout du fil du yoyo une force \vec{F} constante en module et horizontale. Que se passe-t-il ?



Solution de l'exercice 6

Analyse

On devine l'existence d'une valeur F_ℓ limite pour le module de \vec{F} telle que si $F < F_\ell$, le yoyo roulera sans glisser et si $F > F_\ell$, le yoyo glissera. De plus une analyse dimensionnelle nous dit que puisque $F_\ell(m, r, R, f, g)$ et $[F_\ell] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, alors $F_\ell = mg\varphi\left(f, \frac{r}{R}\right)$ avec φ croissante selon f .

Le sens du déplacement du yoyo n'est pas intuitif, on verra bien ce que le calcul nous dit.

Cas du roulement sans glissement

La condition cinématique de roulement sans glissement se traduit par $\dot{x} = -R\dot{\theta}$. On s'intéresse au système {yoyo+fil} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les actions qui s'exercent sur le système sont $[\vec{P}]$, $[\vec{F}]$ et $[\vec{R}]$, le TRD donne

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F + \overline{T} \\ 0 = N - mg \end{cases}.$$

La TMC par rapport à $\Delta = (G, \vec{u}_z)$ donne

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} = Fr + \overline{T}R \Rightarrow \overline{T} = -\frac{J_\Delta}{R^2} - F\frac{r}{R}.$$

D'où finalement

$$m\ddot{x} = F - \frac{J_\Delta}{R^2}\ddot{x} - F\frac{r}{R} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m} \frac{1 - \alpha}{1 + \beta}, \quad \alpha = \frac{r}{R} \text{ et } \beta = \frac{J_\Delta}{mR^2}.$$

\ddot{x} donc quand on tire sur le fil, on ramène le yoyo. De plus à chaque tour du yoyo le fil se rembobine d'une longueur de $2\pi(R - r)$.

Si on incline la force \vec{F} d'un angle φ avec l'horizontale, alors la formule devient

$$\ddot{x} = \frac{F \cos \varphi - \alpha}{m(1 + \beta)},$$

et le numérateur de la fraction peut s'annuler pour $\cos \varphi = r/R$, ce qui correspond géométriquement à \vec{F} colinéaire à la tangente au tambour du yoyo passant par I le point de contact entre le yoyo et le sol.

Examinons la condition de non-glissement. La loi de COULOMB s'écrit $|\overline{T}| < fN$. Or $N = mg$ et $\overline{T} = -F\frac{\alpha + \beta}{1 + \beta}$. La condition de non-glissement est donc

$$F\frac{\alpha + \beta}{1 + \beta} < fmg \Leftrightarrow F < F_\ell = fmg\frac{1 + \beta}{\alpha + \beta}.$$

F_ℓ est bien de la forme indiquée par l'analyse. Mais c'est une condition nécessaire de non-glissement, et pas suffisante. Il faut donc étudier la réciproque, c'est à dire le roulement avec glissement.

Cas du roulement avec glissement

La vitesse de glissement est $\vec{v}_g = \vec{v}(I) = \vec{v}(G) + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\vec{u}_x$. Le système a deux degrés de liberté.

Le TRD donne toujours

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F + \overline{T} \\ 0 = N - mg \end{cases},$$

et le TMC par rapport à Δ : $J_\Delta \ddot{\theta} = \overline{T}R + Fr$. La loi de COULOMB s'écrit $T = fN$ où $T = \pm \overline{T}$. Il faut ici faire une hypothèse.

– Supposons d'abord $v_g > 0$. Alors $\overline{T} = -fmg$ et on peut résoudre :

$$\dot{x} = \left(\frac{F}{m} - fg \right) t \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{1}{J_\Delta} (Fr - fmgR) t \Rightarrow v_g = \left[-fg \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{F}{m} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] t.$$

Notre hypothèse est valable si $v_g > 0$, c'est-à-dire après calculs précisément si $F > F_\ell$. Cette hypothèse est validée et nous donne la réciproque : $F < F_\ell$ est donc une condition nécessaire et suffisante au roulement sans glissement.

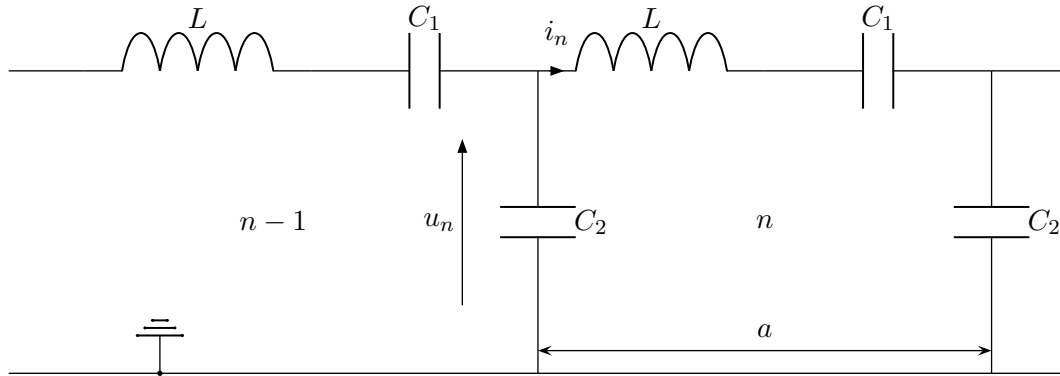
– Supposons $v_g < 0$, alors $\overline{T} = +fmg$ et on trouve

$$F < -fmg \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta}.$$

Or $F > 0$, ce cas de figure est impossible.

Exercice 7 Ligne de quadripôles

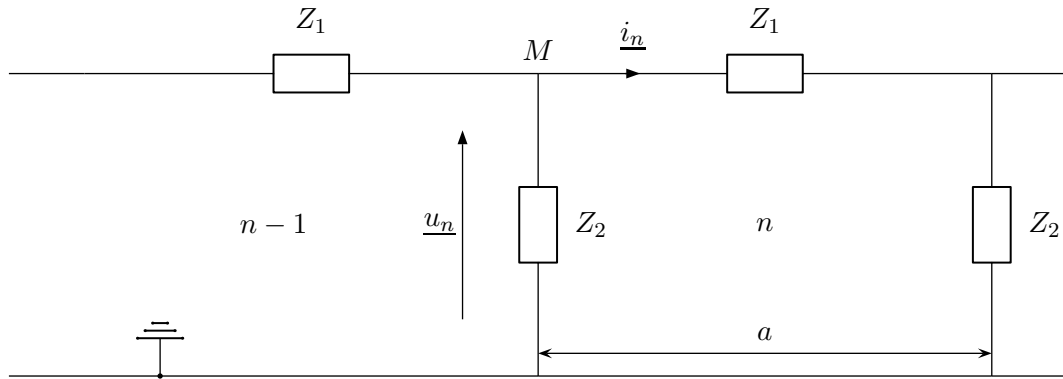
On considère la ligne de quadripôles suivante :



1. Quelle est la relation entre u_{n-1} , u_n et u_{n+1} ?
2. À quelle condition peut-il y avoir propagation sans atténuation d'un signal sinusoïdal sur la ligne ?
3. Étudier la réciproque à cette question.

Solution de l'exercice 7

1. On se place en régime sinusoïdal forcé pour obtenir cette relation. La ligne de quadripôle devient :



Avec les impédances

$$Z_1 = jL\omega + \frac{1}{jC_1\omega} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega}.$$

On applique alors le théorème de MILLMAN en M :

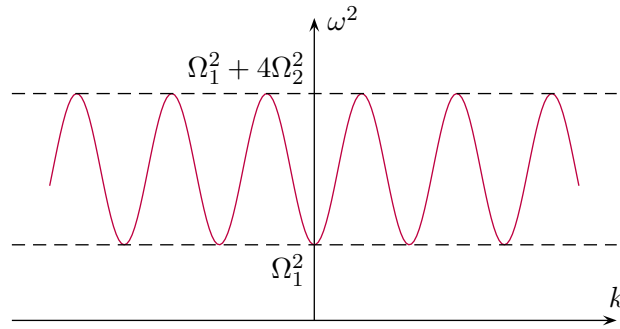
$$\begin{aligned} \underline{u_n} &= \frac{\frac{\underline{u_{n+1}}}{Z_1} + \frac{\underline{u_{n-1}}}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1}} \Rightarrow \left(\frac{2}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \underline{u_n} = \frac{1}{Z_1} (\underline{u_{n+1}} + \underline{u_{n-1}}) \\ &\Rightarrow \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \underline{u_n} = \underline{u_{n+1}} + \underline{u_{n-1}} \\ &\Rightarrow -LC_2\omega^2 \left(2 + \frac{C_2}{C_1} \right) \underline{u_n} = \underline{u_{n+1}} + \underline{u_{n-1}}. \end{aligned}$$

En repassant en réels, on peut réarranger le résultat pour obtenir

$$\ddot{u}_n = -\Omega_1^2 u_n + \Omega_2^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{avec} \quad \Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}.$$

2. On pose un signal de la forme $u_n(t) = \Re(\underline{U} \exp(i(kna - \omega t)))$ avec $k \in \mathbf{R}$ et l'équation ci-dessus devient

$$-\omega^2 = -\Omega_1^2 + \Omega_2^2 2(\cos(ka) - 1) \Rightarrow \omega^2 = \Omega_1^2 + 4\Omega_2^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right).$$



La propagation sans atténuation impose donc $\omega^2 \in [\Omega_1^2, \Omega_1^2 + 4\Omega_2^2]$.

3. On suppose $ka \ll 2\pi$ c'est à dire $a \ll \lambda$ longueur d'onde du signal, c'est-à-dire que l'on rend u une fonction continue de x . On a alors $\ddot{u}_n \leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n \leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(na)a - \frac{\partial u}{\partial x}(na)a \leftrightarrow a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x).$$

On remplace dans l'équation de propagation et on tombe sur l'équation de SINE-GORDON :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Omega_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Omega_1^2 u \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2 \Omega_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Omega_1^2}{a^2 \Omega_2^2} u.$$

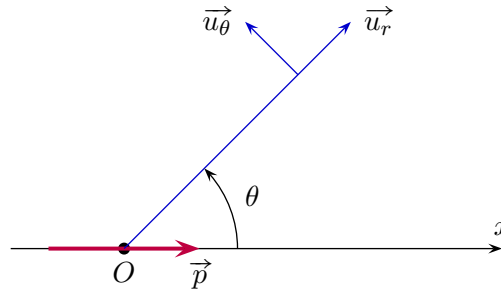
Ce qui conduit à la relation de propagation $k^2 = \frac{\omega^2 - \Omega_1^2}{c^2}$ où $c^2 = \Omega_1^2 a^2$.

- Si $\omega > \Omega_1$, $k \in \mathbf{R}$ et il y a propagation sans atténuation, ce qui prouve que la condition de la deuxième question est nécessaire et suffisante.
- Si $\omega < \Omega_1$, $k \in i\mathbf{R}$ et l'onde est stationnaire exponentielle, qui s'atténue sans se propager.

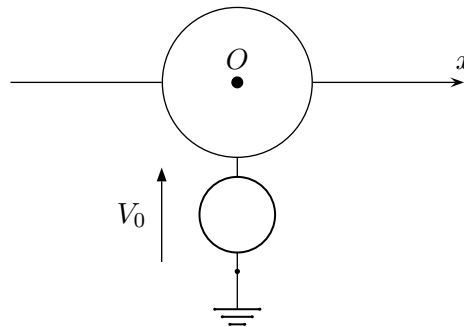
★ ★ ★

Exercice 8 Méthode des images

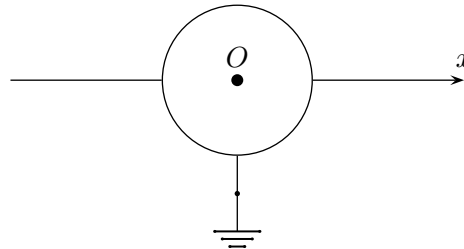
1. Soit un dipôle électrostatique $\vec{p} = p\vec{u}_x$ centré sur O plongé dans un champ uniforme stationnaire $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$. On pose $V(O) = V_0$. Montrer que l'équipotentielle $V = V_0$ est formée de deux nappes orthogonales.



2. On remplace le dipôle par une sphère de rayon R de conducteur maintenue au potentiel V_0 , \vec{E}_0 ne change pas. On veut la répartition surfacique σ des charges sur le conducteur.



3. Déterminer σ lorsque la sphère est directement reliée à la masse.



4. On place une boule de cuivre de rayon R au potentiel V_0 au centre d'un tétraèdre régulier d'arête $a \gg R$ relié à la masse. Quelle est la forme de l'équipotentielle $V = V_0/2$?

Solution de l'exercice 8

1. Additionnons les potentiels créés par \vec{E} et le dipôle : $E_0\vec{u}_x = -\vec{\nabla}V$ donc $V_{E_0} = -E_0x + V_0$. D'autre part, en coordonnées sphériques,

$$V_{\text{dipôle}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V = -E_0 r \cos \theta + V_0 + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Ainsi, l'équation $V = V_0$ se traduit par

$$r \cos \theta \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \right) = 0.$$

- Si $\cos \theta = 0$, alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ et l'ensemble décrit est le plan (yOz) .
- Sinon, l'ensemble a pour équation $r = R$ avec

$$R = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$$

C'est donc une sphère de rayon R .

La sphère et le plan se coupent bien orthogonalement et sur le cercle décrit par l'intersection de ces deux surfaces, $\vec{E} = \vec{0}$ car \vec{E} doit être orthogonal à deux surfaces orthogonales.

2. On déterminera σ par le théorème de COULOMB. Pour cela, il nous faut le champ \vec{E} à l'extérieur de la sphère, que l'on peut calculer par V qui est solution du problème de LAPLACE :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 V = 0 \\ V = V_0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} \leftrightarrow E_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur la sphère.} \\ \\ \text{à l'infini} \end{array}$$

C'est un problème de CAUCHY, pour lequel la solution est unique. Or on peut exploiter le résultat de l'exercice précédent : en prenant un dipôle tel que p mène à une équipotentielle de rayon R , le potentiel à l'extérieur de la sphère est soumis au même problème ! Par le théorème d'unicité, le potentiel est ici le même que celui calculé à l'exercice précédent, soit avec $p = R^3 4\pi\epsilon_0 E_0$:

$$V = E_0 \cos \theta \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right).$$

Puisque $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, il vient en sphériques

$$\vec{E} = E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \vec{u}_r - E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{u}_\theta.$$

D'après le théorème de COULOMB, $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$ à $r = R$, ce qui donne

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Puisque $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, la charge totale Q est nulle. On pouvait le prévoir en appliquant le théorème de GAUSS dans le cas du dipôle, puisque le champ est le même au travers de la surface la charge de la sphère est la même que la charge du dipôle, c'est à dire 0. Ce procédé est la méthode des images, on utilise le théorème d'unicité pour éviter d'avoir à résoudre l'équation de LAPLACE.

3. On utilise le théorème de superposition des conditions limites. En effet, les conditions limites pour le champ à l'extérieur de la sphère sont :

$$\begin{cases} r = R & V = 0 \\ r \rightarrow +\infty & \frac{\partial V}{\partial n} \leftrightarrow E_0 \end{cases} = \begin{cases} r = R & V = V_0 \\ r \rightarrow +\infty & \frac{\partial V}{\partial n} \leftrightarrow E_0 \end{cases} + \begin{cases} r = R & V = -V_0 \\ r \rightarrow +\infty & \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \end{cases}.$$

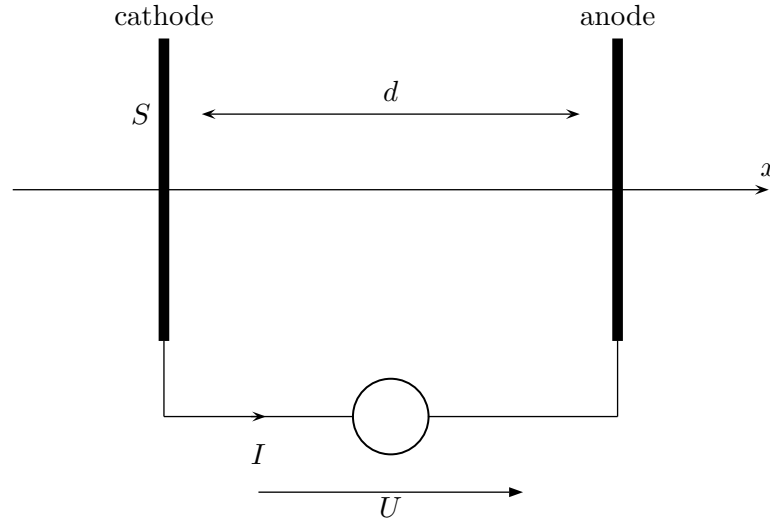
Le dernier jeu de conditions limites est celui d'une sphère seule dans l'espace au potentiel $-V_0$, la charge est $Q = -4\pi\epsilon_0 R V_0$ et $\sigma = -\frac{\epsilon_0 V_0}{R}$. Les solutions s'ajoutant comme les conditions limites, on a la nouvelle valeur de σ :

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{R} + 3E_0\epsilon_0 \cos \theta.$$

4. Puisque l'équipotentielle $V = 0$ est un tétraèdre et l'équipotentielle $V = V_0$ une sphère de rayon R , on s'attend à ce que l'équipotentielle cherchée soit d'une forme intermédiaire entre une sphère et un tétraèdre. Or puisque $a \gg R$ au centre du tétraèdre, c'est la charge de la boule de cuivre qui domine dans l'expression du potentiel créée, et on a donc une variation en $1/r$ ainsi, puisque l'équipotentielle $V = V_0$ est la sphère de rayon R , l'équipotentielle $V_0/2$ est la sphère de rayon $2R$!

Exercice 9 Caractéristique d'une diode à vide

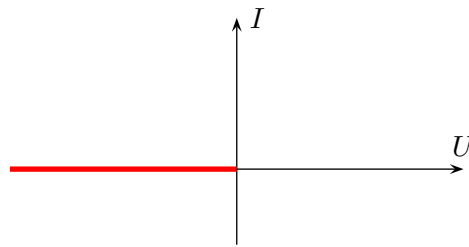
On considère une diode formée de deux plaques métalliques de surface S séparées d'une distance d . La cathode est chauffée et par effet thermoélectrique, elle émet un flux d'électrons vers l'anode. On demande la caractéristique de ce dipôle.



Solution de l'exercice 9

Analyse

Pour tracer la caractéristique, il nous faut la valeur de I à U fixée. Le fait que la diode ne conduise le courant que dans un sens nous donne déjà une partie de cette caractéristique :



On négligera les effets de bord des plaques, c'est à dire que si $S \gg d^2$, on considérera le problème unidimensionnel.

Les grandeurs pertinentes à introduire sont le potentiel $V(x)$ entre les deux plaques, le vecteur densité de courant $j(x)$ du flux d'électrons, et la vitesse $v(x)$ des électrons. De plus, on a la relation $j(x) = \rho(x)v(x)$ où ρ est la densité spatiale de charges entre les deux plaques. L'électron porte la charge $-e$ donc $\rho < 0$, $v > 0$ donc $j < 0$ et $I = -jS$. En régime permanent, I est constante donc j aussi.

Équation de Poisson

Elle s'écrit, puisque le régime permanent est établi,

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}.$$

On choisit $V(0) = 0$, donc $V(d) = U$.

Théorème de conservation de l'énergie mécanique

On l'applique à un électron subissant la force $-e\vec{E}$, laquelle dérive de l'énergie potentielle $-eV(x)$. Le théorème s'écrit avec m la masse d'un électron :

$$\frac{1}{2}mv^2 - eV = \frac{1}{2}mv_0^2 - \underbrace{eV(0)}_0$$

Quid de v_0 ? On supposera que les électrons sont éjectés de la plaque avec une vitesse négligeable devant celle qu'ils acquièrent durant leur parcours, d'où l'expression de v suivante :

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Résolution

Puisque $I = -\rho v S$, on tire une expression de ρ en fonction de I et V :

$$\rho = -\frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{-\frac{1}{2}}$$

En injectant cette expression dans l'équation de POISSON, on aboutit à l'équation différentielle en V suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= \underbrace{\frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2e}}}_{\alpha} V^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = 2\alpha V^{\frac{1}{2}} + \text{cte en multipliant par } \frac{dV}{dx} \text{ et en intégrant} \\ &\Rightarrow \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = 4\alpha \sqrt{V} + \beta \end{aligned}$$

On veut la valeur de la constante β . Étudions cette équation en $x = 0$. On sait que $V(0) = 0$

- Si $\frac{dV}{dx} > 0$, cela va induire une force sur les électrons au niveau de leur émission sur la cathode qui va tendre à les faire revenir d'où ils viennent, et cela est impossible puisque les électrons traversent bien l'espace entre les plaques.
- Si $\frac{dV}{dx} < 0$, l'effet thermoélectrique ne sert à rien car les électrons sont attirés naturellement hors de la cathode. De plus en plus d'électrons partent, et un régime permanent ne peut pas être atteint.

Ainsi, pour toutes ces raisons, $\frac{dV}{dx}(0) = 0$ et $\beta = 0$. On peut donc poursuivre notre calcul en prenant la racine avec $\frac{dV}{dx} \geq 0$ sur le trajet :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 2\sqrt{\alpha} V^{\frac{1}{4}} \Rightarrow V^{-\frac{1}{4}} dV = 2\sqrt{\alpha} dx \\ &\Rightarrow \frac{4}{3} V^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\alpha} x \end{aligned}$$

D'où pour $x = d$,

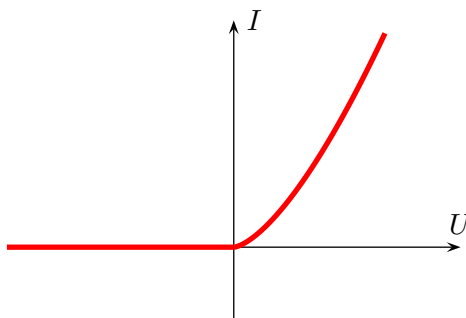
$$\frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\alpha} d$$

Puisque α dépend de I , on tire la relation entre I et U demandée :

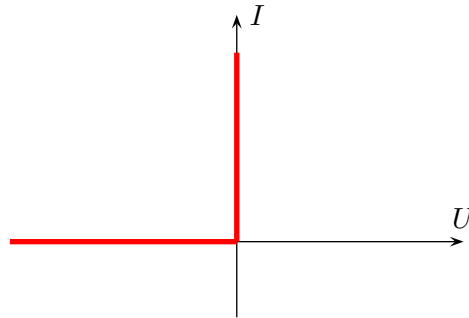
$$I = \frac{4\varepsilon_0 S}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{\frac{3}{2}}$$

Commentaires

Voici la caractéristique de la diode tracée selon l'équation trouvée ci-avant.



La courbe $I = f(U)$ ne tend pas vers l'infini lorsque U est grand : en effet, l'effet thermoélectrique est vite saturé et la courbe se stabilise sur une valeur asymptote. On retrouve ici la caractéristique bien connue d'une diode, que l'on modélise de façon abrupte par :

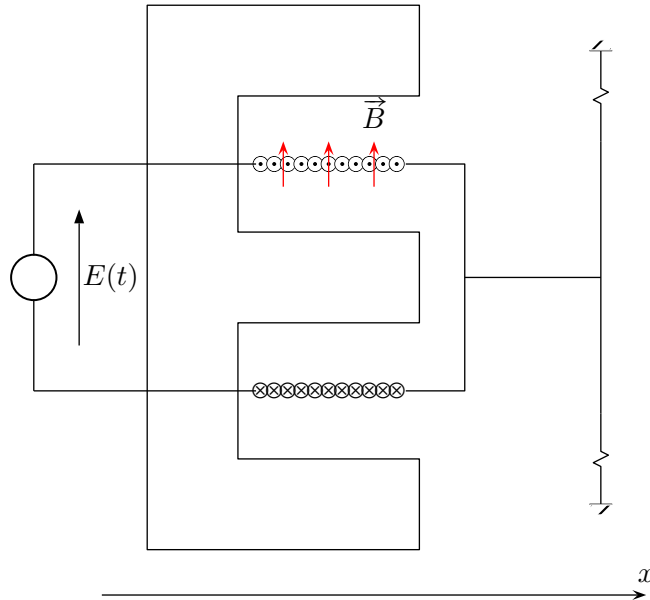


Le coefficient multiplicatif devant $U^{\frac{3}{2}}$ est proportionnel à S , ce qui est raisonnable, mais il est à noter la variation en d^{-2} . Les autres termes sont des constantes universelles, ainsi la mesure de la caractéristique peut par exemple est un moyen indirect de mesure de ε_0 , e ou m .

Le raisonnement effectué ici est la base de la théorie de CHILD-LANGMUIR, et la formule obtenue est une variante de la formule du même nom.

Exercice 10 Haut-parleur électrodynamique

On considère le dispositif de la figure suivante. Le bobinage a une résistance R , une autoinductance L et totalise N spires de rayon a . Dans l'entrefer de l'aimant qui possède la symétrie de révolution autour de (Ox) , le champ magnétique est $\vec{B} = B(r)\vec{u}_r$. La masse totale de l'attelage (bobine et membrane) est m , il est soumis à une force élastique $-kx$ de la part du bâti et à une force de frottement visqueux en $-f\dot{x}$. Déterminer l'impédance complexe du haut-parleur en régime sinusoïdal puis effectuer un bilan énergétique.



Solution de l'exercice 10

Analyse

La bobine est parcourue par un courant, qui engendre des forces de LAPLACE qui déplacent la bobine. Le flux de \vec{B} à travers la bobine varie et induit une force électromotrice : il y a donc un couplage électromécanique. On est ni dans le cas de LORENTZ ni dans celui de NEUMANN, puisque le champ propre créé par autoinduction du bobinage varie en même temps que l'attelage constitué de la bobine et de la membrane se déplace suivant (Ox) . La relation qui définit l'impédance en régime sinusoïdal est $\underline{E} = Z\underline{I}$.

Équation mécanique

On oriente d'abord le circuit (dessin des spires), bien que cela n'ait pas d'importance pour le résultat final. On applique le TRD à l'attelage :

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} + F_L.$$

Reste à calculer F_L . Pour cela, deux méthodes.

- D'abord le calcul direct. Toutes les spires sont parcourues par la même intensité et voient le même champ $\vec{B} = B(a)\vec{u}_r$. On décompose $\vec{F}_L = N\vec{f}$ où \vec{f} est la force qui s'exerce sur une spire. D'après la loi de LAPLACE,

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= I d\vec{\ell} \wedge B\vec{u}_r \\ &= I a d\theta B \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r \\ &= -I a B d\theta \vec{u}_x \\ \Rightarrow \vec{f} &= -2I\pi B a \vec{u}_x \\ \Rightarrow \vec{F}_L &= -2\pi N B a I \vec{u}_x = -K I \vec{u}_x. \end{aligned}$$

Où l'on a posé $K = 2\pi N B a$. On ne prend pas en compte les forces de LAPLACE créées par le champ propre du bobinage, car ce sont des actions intérieures au système qui n'entrent pas en compte dans l'application du PFD.

- On peut aussi utiliser le théorème des travaux virtuels qui nous dit

$$F_L = I \frac{\partial \phi_c}{\partial t} = I \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Ici, ϕ_c est plus aisé à calculer que ϕ car on ne connaît pas le champ au centre des spires, qui est à l'intérieur de l'aimant, alors que la surface coupée est de forme cylindrique et le flux de \vec{B} s'y calcule. On prend $d\vec{\ell} = ad\theta \vec{u}_\theta$ on élément d'une spire, dont on imagine un déplacement virtuel de $d\vec{\lambda} = dx \vec{u}_x$. D'où

$$\begin{aligned} \delta^2 S_c &= d\vec{\lambda} \wedge d\vec{\ell} \\ &= -ad\theta dx \vec{u}_r \\ \Rightarrow d\phi_c &= -2\pi a dx B \\ \Rightarrow d\phi_c &= -2\pi Na B dx. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a bien l'équation mécanique

$$m\ddot{x} + fx + kx = -KI.$$

Équation électrique

D'après la loi d'OHM, $RI = E + e$ où e est la force électromotrice d'autoinduction. D'après le théorème de FARADAY, il vient

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{auto}}}{dt} - \frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}.$$

Or $\phi_{\text{auto}} = LI$ et la variation de ϕ_{ext} est la même que celle de ϕ_c déjà calculé pour le théorème des travaux virtuels, il vient donc l'équation avec L constant :

$$RI + L \frac{dI}{dt} = E + K\dot{x}.$$

Régime sinusoïdal

On passe les deux équations en complexes en utilisant la convention des électriciens $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$:

$$\begin{cases} \underline{x}(-m\omega^2 + j\omega f + k) = -K\underline{I} \\ \underline{E} = (R + jL\omega)\underline{I} - j\omega K\underline{x} \end{cases} \Rightarrow Z = R + jL\omega + \frac{j\omega K^2}{(k - m\omega^2) + jf\omega}.$$

Commentaires

On a deux termes dans Z : $R + jL\omega$ qui est l'impédance classique de la bobine, et un terme d'impédance électromécanique.

C'est K^2 et non K qui intervient, ainsi le sens dans lequel le bobinage a été effectué n'a pas d'influence.

Z dépend de ω , le haut-parleur ne transmettra pas de la même façon les basses et les aiguës. Il y a de plus une fréquence de résonance pour $\omega \sim \sqrt{k/m}$. Ainsi pour avoir un son de bonne qualité, il faut plusieurs haut-parleurs dont les fréquences de résonance sont réglées de manière à couvrir un large spectre. Dans ce cas il faudrait plutôt raisonner sur Y telle que $\underline{E} = Y\underline{x}$ puisque c'est le déplacement de la membrane qui crée le son.

La force de frottement visqueux est indispensable dans notre modèle : c'est ce qui modélise le transfert d'énergie entre la membrane et l'air, à l'origine du son.

Pour aller plus loin

Le courageux lecteur pourra s'entraîner à faire un bilan énergétique, sous la forme d'une application du TEC, d'un bilan de puissance électrique en multipliant la loi d'OHM par I et un bilan global grâce au premier principe de la thermodynamique. Pour ma part, il se fait déjà tard et, veille de DS oblige, le devoir m'appelle ailleurs !

Exercice 11 Réflexion sur une surface périodique

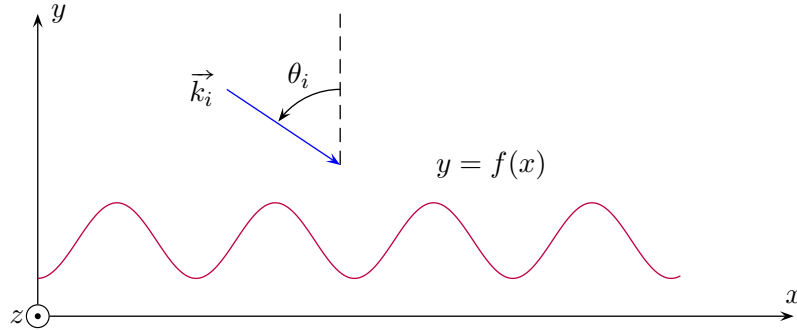
On éclaire la surface d'un conducteur parfait définie par l'équation $y = f(x)$ avec f a -périodique et invariante par translation le long de (Oz) par une onde plane progressive sinusoïdale de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 \exp\left(i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\right) \vec{u}_z.$$

On admet que l'onde réfléchi est de la forme

$$\vec{E}_r = E_r(x, y, z) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z.$$

Déterminer $E_r(x, y, z)$.



Solution de l'exercice 11

Analyse

\vec{E}_r doit satisfaire les équations de MAXWELL et les conditions aux limites, toute la physique du problème a été énoncée. Le 5/2 vigilant reconnaîtra ici un réseau, à cause de la périodicité de f . Un réseau est en effet la convoluée d'un peigne de DIRAC avec un motif géométrique.

Équations de Maxwell

MAXWELL-GAUSS : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_r = 0$ donc ici $\frac{\partial E_r}{\partial z} = 0$, $E_r(x, y)$ ne dépend pas de z . MAXWELL-AMPÈRE et MAXWELL-FARADAY : en combinant ces deux équations, on obtient $\square \vec{E}_r = \vec{0}$, soit

$$\frac{\partial^2 E_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_r = 0.$$

Conditions aux limites

La continuité de la composante tangentielle du champ total au niveau de la surface s'écrit $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$. Or $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c}(\sin \theta_i \vec{u}_x - \cos \theta_i \vec{u}_y)$, d'où $\forall x$,

$$E_0 \exp\left(i\frac{\omega}{c}(\sin \theta_i x - \cos \theta_i f(x))\right) + E_r(x, f(x)) = 0.$$

Périodicité

$\forall x$, $f(x) = f(x + a)$ et la condition précédente évaluée en $x + a$ donne une deuxième égalité que l'on peut diviser par la première pour obtenir

$$E_r(x + a, f(x)) = E_r(x, f(x)) \exp\left(i\frac{\omega}{c} \sin \theta_i a\right).$$

Séparation des variables

On cherche un champ $E_r(x, y)$ de la forme $E_r(x, y) = X(x)Y(y)$, l'équation d'onde devient alors en injectant la forme postulée et en divisant par XY :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

x et y étant des variables indépendantes, chacun des termes sont indépendamment constants et on pose $\frac{X''}{X} = -\alpha^2$ et $\frac{Y''}{Y} = -\beta^2$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. On reprend l'équation aux conditions limites :

$$X(x+a) = X(x) \exp\left(i\frac{\omega}{c} \sin \theta_i a\right).$$

Ceci montre que le module de X ne décroît pas globalement avec la distance : X varie donc sinusoidalement en $\exp(i\alpha x)$ et la condition limite impose l'existence de $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha a = \frac{\omega}{c} \sin \theta_i a + 2m\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\omega}{c} \sin \theta_i + \frac{2m\pi}{a}.$$

On en déduit donc le terme général de X :

$$X(x) = \exp\left(i \underbrace{\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta_i + \frac{2m\pi}{a}\right)}_{k_x} x\right).$$

Concernant Y qui vérifie $Y'' + \beta^2 Y = 0$, or $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2$ et on note $\beta = k_y$, pour avoir $Y(y) = \exp(ik_y y)$.

Quantification des directions

On voit que k_x est quantifiée, ainsi que k_y . Quelles sont les directions ainsi privilégiées pour l'onde réfléchie ? On a $\vec{k}_r = \frac{\omega}{c}(-\sin \theta_r \vec{u}_x + \cos \theta_r \vec{u}_y)$ et on identifie k_x dans l'expression, avec $\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda_0$:

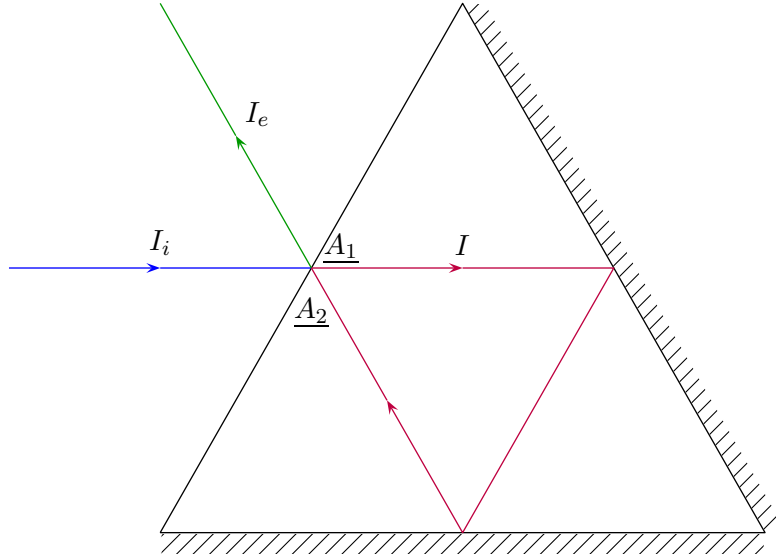
$$-\sin \theta_r = \sin \theta_i + \frac{2m\pi c}{a\omega} \Leftrightarrow \sin \theta_i + \sin \theta_r = m \frac{\lambda_0}{a}.$$

Le 5/2 avisé aura reconnu la formule des réseaux par réflexion ! Les directions de l'onde réfléchie sont donc quantifiées, et ces dernières ne dépendent que de la périodicité de la surface, et pas de sa forme. On reconnaît là la signature du peigne de DIRAC.

La dernière étape serait de déterminer les poids respectifs des différentes directions pour la répartition en amplitude ou en énergie de l'onde incidente. Pour cela, il faut s'intéresser à \vec{B} . \vec{B}_i est une onde plane progressive sinusoidale dans le vide, et \vec{B}_r est la superposition des différentes ondes dirigées selon les directions déjà déterminées. On détermine le champ magnétique réfléchi par les équations de MAXWELL et des conditions aux limites. Plus précisément, la répartition que nous cherchons sera donnée par la continuité de la composante normale de \vec{B} .

Exercice 12 Cavité réfléchissante

On considère une cavité en forme de triangle équilatéral dont deux des côtés sont réfléchissants et le troisième semi-réfléchissant de coefficients de transmission et de réflexion R et T , éclairée par un rayonnement d'intensité I_i . On note I_e l'intensité émergente et I l'intensité à l'intérieur de la cavité.



1. Déterminer I .
2. Déterminer I_e .

Solution de l'exercice 12

1. Ici la longueur des trains d'onde est supposée suffisante pour que tous les rayons soient cohérent entre eux. On sommera donc les amplitudes complexes et non les intensités. Si on note $\underline{A_1}$ et $\underline{A_2}$ les deux composantes de l'onde à l'intérieur de la cavité à proximité du point de séparation, alors en notant φ le déphasage accumulé par $\underline{A_2}$ sur $\underline{A_1}$ lors de son tour dans la cavité,

$$\underline{A_1} = r_1 \underline{A_2} + t_1 \underline{A_i} \quad \text{et} \quad \underline{A_2} = \underline{A_1} e^{i\varphi} \Rightarrow \underline{A_1} = \frac{t_1 \underline{A_i}}{1 - r_1 e^{i\varphi}}.$$

En multipliant par le complexe conjugué,

$$I = \frac{I_i t_1^2}{(1 - r_1 e^{i\varphi})(1 - r_1 e^{-i\varphi})} = \frac{I_i t_1^2}{1 + r_1^2 - 2r_1 \cos \varphi}.$$

2. On écrit une relation similaire à celle de la question précédente concernant les amplitudes :

$$\begin{aligned} \underline{A_e} &= t_2 \underline{A_2} + r_2 \underline{A_i} \\ &= -r_1 \underline{A_i} + t_2 e^{i\varphi} \frac{t_1 \underline{A_i}}{1 - r_1 e^{i\varphi}} && \text{car } r_2 = -r_1 \\ &= \underline{A_i} \left(-r_1 + \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 e^{i\varphi}} \right) \\ &= \underline{A_i} \left(\frac{-r_1 + r_1^2 e^{i\varphi} + t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 e^{i\varphi}} \right). \end{aligned}$$

Or $r_1^2 = R$ et $t_1 t_2 = T$, $R + T = 1$ et finalement le dénominateur et le numérateur de la fraction ont même module dont on trouve tout simplement en multipliant par le complexe conjugué $I_e = I_i$.

Ce résultat était prévisible. En effet, la cavité ne consomme pas d'énergie et on se place en régime permanent, donc l'égalité des intensités est une nécessité énergétique. C'est comme le fait que $r_2 = -r_1$, le changement de signe au passage de l'interface est nécessaire pour assurer la conservation de l'énergie.

De plus, le raisonnement que l'on a effectué ici pour un rayonnement très particulier est valable plus généralement, car les rayons ne boucleront pas en un mais plusieurs tours et les relations que l'on a écrit sont globales, elles ne tiennent pas compte du fait que le rayon reconverge au même endroit ou pas.

★ ★ ★

Exercice 13 Autour du michelson

On observe la lumière qui sort d'un interféromètre de MICHELSON dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f .

1. Le michelson est monté en lame d'air, éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On place une cellule photoélectrique de diamètre $2R \ll f$ dans le plan de la lentille. Quel est le signal détecté par la cellule ? Comment varie-t-il avec e ?
2. On monte maintenant le michelson en coin d'air d'angle α , et on observe les franges d'interférences sur l'écran à l'aide d'une cellule quasi-ponctuelle. Le michelson est éclairé par plusieurs longueurs d'ondes $\lambda_{0,i}$ d'intensités respectives $I_{0,i}$. Un petit moteur permet de faire varier $\alpha = \Omega t$, on détecte le signal $S(t)$ et un analyseur de spectre permet d'avoir $\tilde{S}(\omega)$. Montrer que l'on peut ainsi déterminer le spectre de la lumière incidente.

Solution de l'exercice 13

1. Puisque le montage est en lame d'air, on observera des franges d'interférences d'égale inclinaison et les deux ondes qui interfèrent ont la même amplitude. Le détecteur est sensible à la puissance qu'il reçoit globalement sur sa surface, et donc il faudra intégrer I qui est susceptible de varier sur la surface du détecteur.

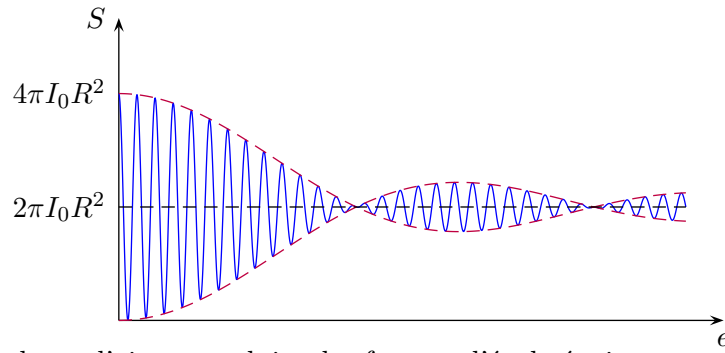
On paramètre par ρ l'écart du détecteur par rapport au foyer de la lentille, on sait que le déphasage pour le michelson est $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2e \cos i$ et $i \ll 1$ donc $\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$. On a aussi par conjugaison avec la lentille $\rho = f \tan i = fi$. L'intensité étant donnée par $I = 2I_0(1 + \cos \varphi)$ donc la puissance reçue par le détecteur est

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_0^R 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \right)\right) 2\pi \rho d\rho \\ &= \int_0^R 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2}\right) \right)\right) 2\pi \rho d\rho \\ &= 2I_0 \left(-\frac{\lambda_0 f^2}{2e}\right) \int_{u_1}^{u_2} (1 + \cos(u)) du \quad \text{en posant } u = \frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2}\right) \\ &= -I_0 \frac{\lambda_0 f^2}{e} \left[2 \sin \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) \cos \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) + u_2 - u_1 \right] \end{aligned}$$

Or $u_1 = \frac{4\pi e}{\lambda_0}$ et $u_2 = \frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{R^2}{2f^2}\right)$ donc $u_2 - u_1 = -\frac{4\pi e}{\lambda_0} \frac{R^2}{2f^2}$ et $u_2 + u_1 \approx \frac{8\pi e}{\lambda_0}$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= I \frac{\lambda_0 f^2}{e} \left[\frac{4\pi e}{\lambda_0} \frac{R^2}{2f^2} + 2 \sin \left(\frac{4\pi e R^2}{\lambda_0 2f^2} \right) \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) \right] \\ &= 2\pi I_0 R^2 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi e R^2}{\lambda_0 f^2} \right) \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme le signal est proportionnel à la puissance et que le cosinus varie beaucoup plus rapidement que le sinus car $f \gg R$, le graphe de $S(e)$ est de la forme :



2. Le montage en lame d'air va produire des franges d'égale épaisseur rectilignes localisées sur le coin d'air, la lame et l'écran étant conjugués par la lentille. La cellule étant considérée comme ponctuelle, on raisonne sur l'intensité : $S(t) = \beta I(t)$. Or on a toujours pour une longueur d'onde $I_i = 2I_{0,i}(1 + \cos \varphi_i)$ mais ici la différence de marche est, avec x l'abscisse du conjugué de la cellule sur la lame d'air, $\delta = 2\alpha x = 2\Omega tx$ car $\alpha \ll 1$ donc en sommant les intensités des différentes longueurs d'onde,

$$I = \sum_i 2I_{0,i} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0,i}} 2\Omega tx \right) \right) \Rightarrow S(t) = 2\beta \sum_i I_{0,i} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_{0,i}} \Omega tx \right) \right).$$

Grâce à l'analyseur de spectre, on a accès aux pulsations $\omega_0 = 0$ et $\omega_i = \frac{4\pi}{\lambda_{0,i}} \Omega x$ et donc on peut retrouver les $\lambda_{0,i}$.
