13 Intégrales à paramètre

« Mais ces développements, si élégants, sont frappés de malédiction ; leurs dérivées n'ont aucun sens. L'Analyse retire d'une main ce qu'elle donne de l'autre. Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée. »
Charles Hermite, dans une correspondance avec Thomas-Joannes Stieltjes (mai 1893)

Plan de cours

Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notre objectif est d'étudier la régularité de la fonction g définie par une intégrale dite à paramètre :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

L'étude du domaine de définition de g est conditionnée par la nature de l'intervalle J :

- si J est un segment, la continuité (p.m.) sur J de $t \mapsto f(x,t)$ assure l'existence de l'intégrale $g(x)$.
- si J n'est pas un segment, l'étude de l'intégrale impropre $g(x)$ s'impose.

On rappelle que :

- si $f : I \times J \to \mathbb{K}$ est continue sur $I \times J$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I (pour tout $t \in J$) et l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J (pour tout $x \in I$).
  La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
- toute fonction numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. En particulier, si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ est continue, f est bornée.

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$g_1 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t\ ; \quad g_2 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\ ; \quad g_3 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x}$$

I | Continuité d'une intégrale à paramètre

Si $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, quelles hypothèses sur f sont suffisantes pour s'assurer de la continuité de g ?
Premier constat, la continuité de $x \mapsto f(x,t)$ n'y suffit pas, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple

L'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence, pour $x > 0$).

Pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto x\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pourtant, g n'est pas continue puisque un calcul direct montre que $g(0) = 0$ et $g(x) = 1$ lorsque $x > 0$.

Les lecteurs l'auront compris, le théorème de convergence dominée sera largement mis à contribution pour s'assurer des égalités suivantes et établir, ce faisant, la continuité de g :

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{CVD}}{=} \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(x_0,t)\,\mathrm{d}t = g(x_0)$$

Rappelons l'énoncé du théorème de convergence dominée formulé dans le chapitre « Intégrales généralisées ».

Théorème 13.1 : Convergence dominée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I\times J \to \mathbb{K}$. Soit également x_0 un point adhérent à I (éventuellement $x_0=\pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur J.
- Pour tout $t\in J$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell(t)$ où ℓ est une fonction continue par morceaux sur J.
- Il existe $\varphi : J\to\mathbb{R}_+$ intégrable sur J vérifiant : $\quad \forall (x,t)\in I\times J,\quad |f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$.

Alors, les fonctions $t\mapsto f(x,t)$ et ℓ sont intégrables sur J et $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_J \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

1 – Théorème de continuité

Théorème 13.2 : Continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I\times J\to\mathbb{K}$ une fonction vérifiant :

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur J.
- Il existe $\varphi : J\to\mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t)\in I\times J,\quad |f(x,t)|\leqslant\varphi(t)\quad\text{(hypothèse de domination)}$$

Alors, $g : x\mapsto\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

La vigilance est de mise : l'hypothèse centrale de domination exclut la dépendance en x de $\varphi(t)$.
On admettra que le théorème de continuité reste valable lorsque f est définie sur $A\times J$ où A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, pour peu que la continuité de $x\mapsto f(x,t)$ sur A soit vérifiée.

Exemple

Soit $g : x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Appliquons pour cela le théorème de continuité des intégrales à paramètre en posant $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $|f(x,t)|=|\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)|\leqslant\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 – Affaiblissement des hypothèses

Il est parfois délicat de dominer la fonction f sur l'intervalle I tout entier. On peut, en pratique, se contenter de dominer par exemple la fonction sur tout segment inclus dans I.

Théorème 13.3 : Continuité sous le signe $\int$ (domination locale)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I\times J\to\mathbb{K}$ une fonction vérifiant :

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur J.
- Pour tout segment $K\subset I$, il existe $\varphi_K : J\to\mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t)\in K\times J,\quad |f(x,t)|\leqslant\varphi_K(t)\quad\text{(hypothèse de domination)}$$

Alors, $g : x\mapsto\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Démonstration

Les hypothèses précédente assurent la continuité de g sur tout segment K inclus dans I, donc sur I. ■

Exemple

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

❶ Montrons que Γ est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$.

- La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Problèmes en $+\infty$: $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Problèmes en 0 : $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1}$ donc la fonction, positive, est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ c'est-à-dire si et seulement si $x>0$.

Donc Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

❷ Montrons que Γ est continue sur $]0,+\infty[$ en utilisant le théorème de continuité sous le signe $\int$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ est continue et même intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x>0$. Si $t<1$, $t^{x-1} < t^{-1}$ et $|\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}| < \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.
  Cette dernière majoration est optimale mais la fonction considérée n'est pas intégrable...
  Dominons plutôt f sur $[a,b]$ où $0<a<b$.
  Si $x \in [a,b]$ alors $a-1 \leqslant x-1 \leqslant b-1$ et $t^{x-1} \leqslant \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$
  Soit alors $\varphi : t \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\, t^{a-1} & \text{si } t<1 \\ \mathrm{e}^{-t}\, t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$ L'application φ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Γ est ainsi continue sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $]0,+\infty[$.

3 – Cas particulier d'une intégrale sur un segment

Lorsque que l'intervalle d'intégration est un segment, la seule hypothèse de continuité de f (et pas seulement celles de ses applications partielles) assure la continuité de g en vertu du théorème des bornes atteintes.

Théorème 13.4

Soit $f : I \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $I \times [a,b]$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a<b$.

Alors, $g : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Ce résultat doit être brièvement redémontré avant chaque utilisation.

Démonstration

- f continue sur $I \times [a,b]$ donc continue par rapport à t et par rapport à x.
- L'hypothèse de domination est vérifiée *a minima* sur tout segment $[c,d]$ inclus dans I.
  En effet, $[c,d]\times[a,b]$ étant une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ (en tant que fermé borné en dimension finie), la continuité de f justifie l'existence de $M_{c,d} \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [c,d]\times[a,b], \quad |f(x,t)| \leqslant M_{c,d} \longleftarrow \text{intégrable sur } [a,b]$$ ■

Exercice 2

Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/n} \frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\, \mathrm{d}t$.

II | Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème 13.5 : Dérivabilité sous le signe $\int$ (théorème de Leibniz)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{K}$ une fonction vérifiant :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue (p.m.) sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

On notera qu'il s'agit à nouveau d'un théorème d'interversion de limites et qu'on peut se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I. Observons enfin que l'hypothèse de domination portant que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ est requise pour s'assurer de l'existence de $g(x)$.

Démonstration

Reprenons les notations de l'énoncé. L'hypothèse de domination garantit l'existence de $x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ et même sa continuité sur I. Prouvons que g est dérivable, de dérivée $x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Soit pour cela $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_J \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t$$

Déterminons la limite de ce taux d'accroissement en x_0, point adhérent de $I \setminus \{x_0\}$, en appliquant le théorème de convergence dominée. Posons $\tau(x,t) = \dfrac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}$.

- Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $t \mapsto \tau(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Pour tout $t \in J$, $\tau(x,t) \xrightarrow[x \to x_0]{} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Hypothèse de domination – D'après l'inégalité des accroissements finis (pour t fixé),

$$\forall (x,t) \in I \setminus \{x_0\} \times J, \quad |\tau(x,t)| = \left|\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\right| \leqslant \varphi(t)$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_J \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$; la dérivabilité de g est acquise. ■

Exemple

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. L'application g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est dérivable.

On peut appliquer le théorème précédent car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à chacune de ses variables, l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ a déjà été justifiée et enfin,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad t\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$$

L'application g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

Comme dans la section précédente, si J est un segment, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée dès lors que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[c,d]\times[a,b]$, donc bornée.

On étend facilement par récurrence le théorème précédent aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

Théorème 13.6 : Théorème de Leibniz – version $\mathscr{C}^n$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I\times J \to \mathbb{K}$ une fonction vérifiant :

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- Pour tous $k\in[\![0,n-1]\!]$ et $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable et $t\mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue p.m. sur J.
- Il existe $\varphi_n : J\to\mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t)\in I\times J,\quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_n(t)$$

Alors, $g : x\mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$\forall x\in I,\quad g^{(n)}(x) = \int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

On peut une nouvelle fois se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I.

Exercice 3

Montrer que $g : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Revenons à la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. Rappelons que $\mathscr{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$.

❶ Montrons que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer Γ'. Posons pour $(x,t)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall (x,t)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \quad \text{et même,}\quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln^k(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu) et c'est le cas pour $t\mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
  En effet, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{1-x}}$ (intégrale de Bertrand)
- Hypothèse de domination : Soit $\varphi : t\mapsto \begin{cases} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si } t<1 \\ \ln(t)\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si } t\geqslant 1\end{cases}$
  $\forall (x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale de Bertrand).

Donc Γ est dérivable sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

❷ Généralisation : Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le même principe de domination.