# Intégrales généralisées

**Feuille d'exercices #03**

## Partie A – Intégrales sur un segment

**Exercice 1 —** Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé, le cas échéant.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\,;\quad B=\int_{0}^{1}\frac{x+2}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x\,;\quad C=\int_{0}^{1}\frac{3x+2}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$D=\int_{-2}^{1}\frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x\,;\quad E=\int_{2}^{3}\frac{x^7}{\left(x^4-1\right)^2}\,\mathrm{d}x\,;\quad F=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}\,;$$

$$G=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,;\quad H=\int_{0}^{1}x\arctan x\,\mathrm{d}x\,;\quad I=\int_{0}^{1}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{4x}\sin(5x)\,\mathrm{d}x\,;\quad K=\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,;\quad L=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^3x\cos x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x\quad (u=\cos 2x)\,;$$

$$M=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\quad (u=\pi-x)\,;\quad N=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\,;\quad O=\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$P=\int_{0}^{\pi/2}\cos^2(x)\,;\quad Q=\int_{0}^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x\,;\quad R=\int_{0}^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

**Exercice 2 —** Calculer $\displaystyle\int_0^1\left\lfloor 4x+\frac{1}{2}\right\rfloor\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1\sup\left(x,(x-1)^2\right)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 3 —** Soient $a>0$, $\varphi\in\mathscr{C}^2([-a,a],\mathbb{R})$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos(nt)}{t}\cdot\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n$ est bien définie et déterminer sa limite.

**Exercice 4 —** Soient $\displaystyle I=\int_0^{\pi/6}\frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle J=\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2(x)}{\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

Déterminer les valeurs de $I$ et $J$ à l'aide de $I-J$ et $I+J$.

**Exercice 5 —** On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\int_0^{\pi/4}\tan^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et simplifier $u_n+u_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^n u_n$.
3. Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4n}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

**Exercice 6 —** On considère les intégrales $\displaystyle J_n=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ où $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $J_0$.
2. Montrer que, pour $n\geqslant 1$, $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{1}{n}$ ; en déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que :
$$\frac{1}{2}(J_n+J_{n+1})\leqslant J_n\leqslant\frac{1}{2}(J_{n-1}+J_n)$$
4. Calculer la valeur de $J_n+J_{n+1}$ en fonction de $n$.
5. En déduire un équivalent de $J_n$ en $+\infty$.

**Exercice 7 —** Soient $\displaystyle P=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Justifier l'existence du réel $\sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$ puis montrer que $|a_n|\leqslant\sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$.

**Exercice 8 —** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\forall t\in[a,b],\quad f(a+b-t)=f(t)$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. *Application* – Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 9 —** *Sommes de Riemann*

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.
2. a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un encadrement de $\sin(x)$ de la forme $P(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x$ où $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

**Exercice 10 —** *Sommes de Riemann (2)*

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)x + 1\right)$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2\cos(\theta)r + r^2)\,\mathrm{d}\theta$ pour $|r|<1$ puis $|r|>1$.

**Exercice 11 —** Soit $f$ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À l'aide d'un encadrement par des trapèzes, montrer que :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

**Exercice 12 —** *Inégalité de Jensen*
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On suppose $\phi$ convexe.

1. À l'aide de sommes de Riemann, établir l'inégalité de Jensen :

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

2. a) On suppose désormais $\phi$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $c \in \mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \geqslant \phi(c) + (x-c)\phi'(c)$.
   b) En choisissant convenablement $c$, retrouver l'inégalité $(*)$.
   c) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive, d'intégrale valant à 1.
   Établir l'inégalité $\displaystyle\phi\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_a^b \phi(f(t))g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Appliquer l'inégalité de Jensen pour $\phi_1 : x \mapsto x^2$ puis $\phi_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et retrouver ces résultats en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

## Partie B – Intégrales impropres

**Exercice 13 —** Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes.

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\,;\quad B = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t\,;\quad C = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,;$$

$$D = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}\,;\quad E = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,;\quad F = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\,;$$

$$G = \int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,;\quad H = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(at+b)^2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\,;\quad I = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 14 —** Étudier la nature de l'intégrale des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u-\sqrt{u}}\,;\quad I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+u^\alpha}\,\mathrm{d}u\,;\quad I_3 = \int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,;$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty}\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\mathrm{d}u\,;\quad I_5 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\,;\quad I_6 = \int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{th}(u)}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

**Exercice 15 —** Déterminer la nature des intégrales suivantes.

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\mathrm{d}x\,;\quad J_2 = \int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,;$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,;\quad J_4 = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|x^\alpha-1|^\beta}\,;\quad J_5 = \int_0^{+\infty}\frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 16 —** Établir la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ où $p>0$.

**Exercice 17 —** Montrer que pour tout $a>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln(a)}{a}$.

**Exercice 18 —** Établir la convergence des intégrales et calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha > 0) \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

**Exercice 19 —** Soit $f \in \mathscr{C}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exercice 20 —** Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
$$\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$$
2. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bu} - \mathrm{e}^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$.

**Exercice 21 —** On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Montrer que $f$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 22 —** On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) + \ln(x)$ a une limite finie lorsque $x \to 0^+$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$.
4. On pose $I = \int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que l'intégrale converge et calculer $I$.

**Exercice 23 —** Soit Li la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Déterminer un développement asymptotique à $n$ termes en $+\infty$ de $\mathrm{Li}(x)$.

**Exercice 24 —** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ possédant deux limites $\ell$ et $\ell'$ en $\pm\infty$.

Justifier l'existence et calculer $\int_{\mathbb{R}} \big(f(t+1) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 25 —** Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner un équivalent au voisinage de 0 de $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Donner de même un équivalent au voisinage de 1 de $\arccos(x)$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

**Exercice 26 —** Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\varphi$ est définie, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient $I = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in I$.
   a) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant |\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-yt}| \leqslant |x-y| t\mathrm{e}^{-at}$.
   b) En déduire que $\varphi$ est lipschitzienne sur $I$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

## Partie C – Convergence dominée et intégration terme à terme

**Exercice 27 —** On pose $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Retrouver ce résultat en étudiant la monotonie de $\varphi_x : t \mapsto \frac{xt^{3/2}}{1+x^2t^2}$ et en appliquant le théorème de convergence dominée.

**Exercice 28 —** Justifier l'existence et déterminer la limite de :

$$\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x\,; \quad \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x\,; \quad \int_1^{+\infty} \frac{nx^\alpha \arctan(nx)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

**Exercice 29 —** Justifier les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

**Exercice 30 —** Développer en série $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{e^t-1}\,dt$ où $x \in \mathbb{R}$.

🚲 **Exercice 31 —** Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

**Exercice 32 —** Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it}-\zeta}\,dt$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta| \neq 1$.

**Exercice 33 —** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ supposée continue et bornée.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

1. Justifier l'existence de $(I_n)$ et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent simple de $I_n$ en $+\infty$ lorsque $f(0) \neq 0$.

**Exercice 34 —** Soit $f \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{C})$. On considère les deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f(t)t^n\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 f(t)\ln(1+t^n)\,dt$$

1. Trouver les limites de $I_n$ et $J_n$.
2. On suppose désormais que $f(1) \neq 0$.
   Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $I_n$ puis de $J_n$.

🚲 **Exercice 35 —** *Intégrales de Wallis*

1. Prouver que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{4}$.
2. À l'aide d'un développement limité de $\cos(t)$ en 0, déterminer un changement de variable judicieux pour établir que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

**Exercice 36 —** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}$.

1. Montrer que la suite $(J_n)$ est bien définie et calculer $J_1$.
2. Déterminer la limite $\ell$ de $J_n$.
3. Prouver que $J_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{3/2}}$. (*on ne calculera pas la constante* $C$)