

## Corrigé du devoir à rendre le 14/12/2020

### Exercice 1 :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$ .

1. *Montrer que  $A$  admet une borne supérieure.*

Comme  $B$  est non vide, il existe  $b \in B$  et  $\forall a \in A, a \leq b$  donc  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure.

2. *Montrer que  $B$  admet une borne inférieure.*

Comme  $A$  est non vide, il existe  $a \in A$  et  $\forall b \in B, a \leq b$  donc  $B$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.

3. *Prouver que  $\text{Sup}A \leq \text{Inf}B$ .*

Soit  $a \in A$  alors, d'après la question précédente,  $a$  est un minorant de  $B$  donc  $a \leq \text{Inf}B$ . On a donc :  $\forall a \in A, a \leq \text{Inf}B$ ; ce qui prouve que  $\text{Inf}B$  est un majorant de  $A$  donc  $\boxed{\text{Sup}A \leq \text{Inf}B}$

### Exercice 2 :

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$ .

1. *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite avec plusieurs valeurs de  $a$ .*

On trace le graphe de la fonction  $f : x \mapsto 1 + x^2/4$ . Pour le positionner par rapport à la première bissectrice, on remarque que pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2) \geq 0.$$

Ainsi, le graphe de  $f$  est situé au-dessus de la première bissectrice et l'intersecte au point de coordonnées  $(2, 2)$ .

2. *Intuire le comportement de la suite  $u$  en fonction de  $a$ .*

Il semble que si  $a \in [-2, 2]$ , alors  $u$  converge vers 2 et que sinon elle diverge vers  $+\infty$ .

3. *Prouver votre conjecture.*

Comme on a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x$ , on a pour tout entier  $n, u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ . La suite  $u$  est donc croissante quelle que soit la valeur de  $a$ .

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle diverge vers  $+\infty$ .

Enfin, si la suite  $u$  converge vers  $\ell$ , alors en passant à la limite dans la relation  $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$ , on obtient  $\ell = 1 + \ell^2/4$  donc  $\ell = 2$ .

- Supposons  $a \in [-2, 2]$ .

Le segment  $[-2, 2]$  est stable par  $f$  car pour tout  $x \in [-2, 2], 0 \leq x^2 \leq 4$  donc  $1 \leq 1 + x^2/4 \leq 2$  soit  $f(x) \in [-2, 2]$ . Par conséquent, comme  $u_0 \in [-2, 2]$ , on a  $u_n \in [-2, 2]$  pour tout entier  $n$ .

La suite  $u$  est donc majorée puis convergente grâce au théorème de la limite monotone. La suite  $u$  converge donc vers 2.

- Supposons  $a \notin [-2, 2]$ .

et la suite  $u$  est croissante donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_1$ .

Si la suite était convergente elle convergerait vers 2. Comme la suite  $u$  est croissante, on obtiendrait alors  $2 \geq u_1$ . Or  $|u_0| > 2$  donc  $u_1 = 1 + u_0^2/4 > 2$ ; ce qui est absurde. Par conséquent, la suite diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice 3 :** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante.

1. *Soit  $E = \{x \in [0, 1] : x \leq f(x)\}$ . Montrer que  $E$  admet une borne supérieure.*

Comme  $f(0) \in [0, 1], 0 \in E$  donc  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide. De plus,  $E$  est majorée par 1. Par suite,  $E$  admet une borne supérieure.

Comme  $E$  est minorée par 0 et majorée par 1, on a  $s \in [0, 1]$ . La quantité  $f(s)$  est donc définie.

2. *On pose  $s = \text{Sup}E$  et on va montrer que  $f(s) = s$ .*

- (a) *On suppose (par l'absurde) que  $f(s) > s$ . En déduire que  $f(s) \in E$  et conclure à une absurdité.*

Si  $f(s) > s$  alors la croissance de  $f$  implique que  $f(f(s)) > f(s)$  donc  $f(s) \in E$ . En particulier,  $f(s) \leq \text{Sup}E = s$ . On aboutit à une contradiction.

- (b) *On suppose (par l'absurde) que  $f(s) < s$ . En déduire qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f(s) < x \leq s$  et conclure à une absurdité.*

Si  $f(s) < s = \text{Sup}E$  alors  $f(s)$  n'est pas un majorant de  $E$  donc il existe  $x \in E$  tel que  $f(s) < x$ . Comme  $x \in E$ , on a donc :  $f(s) < x \leq s$ .

Par croissance de  $f$ , on en déduit que  $f(x) \leq f(s)$ . Mais  $x \in E$  donc  $x \leq f(x)$  puis  $x \leq f(x) \leq f(s) < x$ ; ce qui est absurde.

- (c) *Conclure.*

Les hypothèses  $f(s) < s$  et  $f(s) > s$  conduisent à des absurdité donc

$$\boxed{f(s) = s}$$

On a donc montré que toute fonction de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  possède un point fixe.