DS06 - correction

Exercice 1 : A propos de l'iode et ses composés.

1) a) I : Z = 53

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^5$

d'après les principe de pauli, règles de Hund et Klechkowski.

b) 46 électrons de coeurs

7 électrons de valence ($5s^2 5p^5$), ces derniers sont responsables de la réactivité de l'élément.

c) On obtient : $|\overline{\underline{I}}\cdot$

2) a) L'énergie de ionisation est l'énergie de la transformation

$$X \rightarrow X^+ + e^-$$

b) On a, du fait de l'augmentation de l'énergie de ionisation lorsque Z diminue dans une colonne :

Élément	F	Cl	Br	I
Z	9	17	35	53
EI (eV)	17,4	13,0	11,8	10,8

3) a) Le résultat est prévisible, F étant plus électronégatif que Cl, même chose

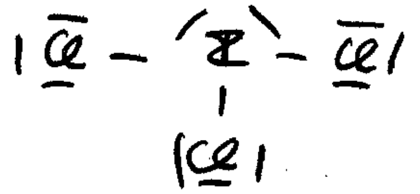
pour I_2 et Cl_2.

b) $I_{2(g)} + 3Cl_{2(g)} \rightarrow 2ICl_3$

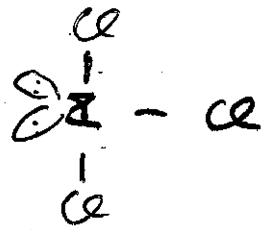
c) Comme $Z_{Br} < Z_I$, on peut supposer que le dibrome va oxyder le diiode

4) a) I : 7 électrons de valence.
Cl : 7 électrons de valence

Lewis:



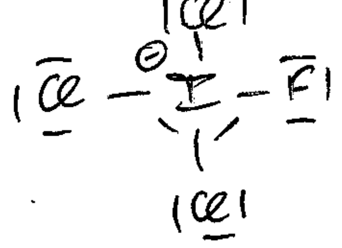
VSEPR : AX_3E_2



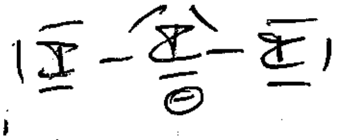
C'est une forme en T. Les angles de valence sont probablement proches de $\pi/2$.

b) La molécule est polaire, le barycentre des charges positives n'est a priori pas confondu avec celui des charges négatives (manque de symétrie)

c) F ; 7 électrons de valence :

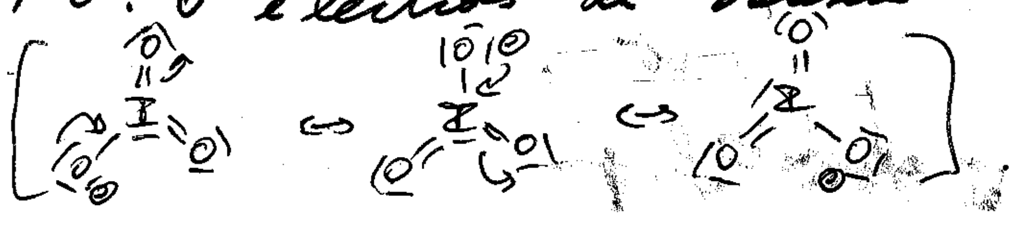


AX_4E_2
carré
(plan)



AX_2E_3
linéaire.

d) O : 6 électrons de valence



5) a) Cette solution est jaune-marron.

b) On choisit de travailler à la longueur d'onde où l'absorbance du composé est maximale (réduction des incertitudes)

c) On effectue une synthèse soustractive, la molécule absorbe dans le bleu.

d) Conservation de la matière :

$C_0 V_0 = CV$, $V_0 = \frac{CV}{C_0} = \frac{5.10^{-4}.20}{2.10^{-3}} = 5\ mL$.

1) Rincer la verrerie avec de l'eau distillée.
2) Prélever à l'aide d'une pipette jaugée (5 mL) la prise d'essai de la solution mère (concentration C_0)
3) Les verser dans une fiole jaugée de 20 mL
4) Compléter au 3/4, homogénéiser, puis totalement avec de l'eau distillée, et homogénéiser à nouveau.

e) On effectue le tracé $A = f([I_2])$. On obtient $R^2 = 0,9990$, et le coefficient directeur de la droite est $\delta = 190\ mol^{-1}.L$ et l'ordonnée à l'origine est presque nul, c'est bon.

6) On a les deux réactions :

$$I_2 + 2e^- = 2I^-_{(aq)} \qquad (\times -1)$$

$$S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} + 2e^- = 2SO_4^{2-}{}_{(aq)} \quad (\times 1)$$

$$S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} + 2I^-_{(aq)} = 2SO_4^{2-}{}_{(aq)} + I_{2(aq)}.$$

7) a) On a, à $t=0$:

$$C_0 = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2} = 2{,}34 \cdot 10^{-3}\ mol\cdot L^{-1}, \quad C = \frac{C_2V_2}{V_1+V_2} = 0{,}16\ mol\cdot L^{-1}$$

On remarque que $C \gg C_0$, alors, on peut supposer que $[S_2O_8^{2-}]_{(t)} \ll [I^-]_{(t)}$ à tout instant t.

La réaction admet un ordre, on écrit :

$$v = \underbrace{k[I^-]^\alpha}[S_2O_8^{2-}]^\beta$$
$$= k'[S_2O_8^{2-}]^\beta, \quad k' = k[I^-]^\alpha.$$

b) Tableau d'avancement,

	$S_2O_8^{2-}$	$+\ 2I^-$	$=\ 2SO_4^{2-}$	$+\ I_2$
EI	C_0	C	0	0
Et	$C_0 - x$	$C - 2x$	$2x$	x

soit $[S_2O_8^{2-}]_{(t)} = C_0 - x = C_0 - [I_2]_{(t)}$

c) On prend $\beta = 1$, alors :

$$-\frac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt} = +\frac{d[I_2]}{dt} = k'[S_2O_8^{2-}]_{(t)}.$$

$$\int_{[S_2O_8^{2-}]_0}^{[S_2O_8^{2-}]_{(t)}} \frac{du}{u} = -k'\int_{t=0}^{t} dv.$$

$$\ln[S_2O_8^{2-}]_{(t)} = \ln[S_2O_8^{2-}]_0 - k't$$
$$= C_0 - k't.$$

Pour vérifier que l'ordre est effectivement égal à 1, il faut tracer $\ln [S_2O_8^{2-}] = f(t)$.

8) a) On a établi que $[S_2O_8^{2-}] = C_0 - x$, alors :

$$\ln(C_0 - [I_2]) = -k't + \ln C_0$$

$$\ln\left(C_0 - \frac{A}{\varepsilon}\right) = -k't + \ln C_0.$$

On trace alors : $\ln\left(C_0 - \frac{A(t)}{\varepsilon}\right) = f(t)$.

$$\begin{cases} a = -0{,}034 & \text{coefficient directeur} \\ b = -6{,}06 & \text{ordonnée à l'origine.} \\ R^2 = 0{,}99995, \end{cases}$$

$R^2 \simeq 1$, on a une droite, on a effectivement

$$v = k'[S_2O_8^{2-}]_{(t)}.$$

b) On en déduit que $\boxed{k' = -a = 0{,}034 \text{ min}^{-1}}$

c) On suppose qu'on a :

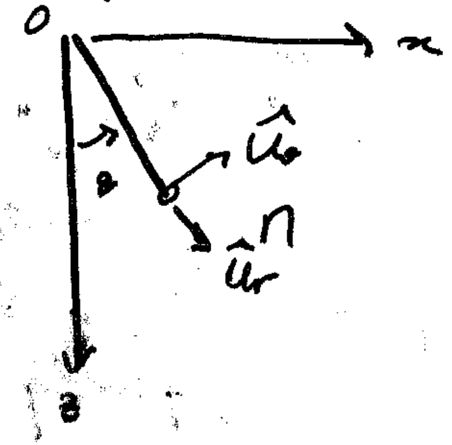
$$k' = k[I^-], \quad \boxed{k = \frac{k'}{[I^-]} = 0{,}22 \text{ mol}^{-1}\cdot L\cdot \text{min}^{-1}}$$

Exercice 2 : Pendule simple et mesure du temps

1) La trajectoire de M est circulaire ($l = cte$)

On utilise donc un repère cylindrique (polaire)

2)



2) Actions mécaniques :

→ Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\hat{u}_z$

→ Tension : $\vec{T} = -T\,\hat{u}_r$.

Système : Masse m (M)

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

3) PFD : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$$m\begin{pmatrix} -l\dot{\theta}^2 \\ l\ddot{\theta} \end{pmatrix} = mg\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On projette :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T & (1) \\ +ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta. & (2) \end{cases}$$

4) (2) conduit à l'équation du mouvement, c'est une équation différentielle non linéaire d'ordre 2, non résolvable en l'état analytiquement.

5) Si les oscillations sont petites, $\theta \ll 1$, $\sin\theta \sim \theta$, alors on a $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, et on identifie $\omega_0^2 = g/l$. C'est la pulsation propre du système, en $rad.s^{-1}$. On obtient alors un oscillateur harmonique.

6) On a : $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \theta(t=0) = A = \theta_0, \\ \dot{\theta}(t=0) = B\omega_0 = 0, \end{cases} \quad \theta(t) = \theta_0\cos\omega_0 t.$$

7) On remarque que ω_0 et donc T_0, la période propre est constante si les oscillations sont petites, quelques soient les

les conditions initiales. On a donc :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g},$$

on a donc un lien entre T_0 et $\sqrt{l/g}$, et la mesure de T_0 est aisée.

8) A la surface de la Terre on a :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_z \\ \vec{F_g} = -G\dfrac{m M_T}{(z+R_T)^2}\hat{u}_z \end{cases}, \ (\hat{u}_z \text{ ascendant}),$$

avec z, l'altitude du point considéré.

On égalise les deux relations,

$$\vec{g} = -\frac{G M_T}{(z+R_T)^2}\hat{u}_z.$$

9) On obtient alors :

$$g = +\frac{G M_T}{R_T^2}\cdot\frac{1}{(1+z/R_T)^2}, \text{ or, } z \ll R_T, \text{ alors :}$$

$$g \overset{(DL)}{=} +\frac{G M_T}{R_T^2}\left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$$

10) On effectue le calcul :

$$\frac{|g(z)-g(0)|}{g(0)} < 0{,}01, \quad \frac{2z}{R_T} < 0{,}01,$$

soit $z < 0{,}005\,R_T = 32$ km, une variation de g 1% de g nécessite une élévation de 32 km.

11) A Paris : $T_P = 2\pi\sqrt{l/g_P} = 1{,}0$ s.

A Cayenne : $T_g = 2\pi\sqrt{l/g_g}$.

Elle retarde de 2 min 28 s par jour, soit :

1 jour à Paris 86400 s $\qquad T_P = 1{,}00000$ s

1 jour à Cayenne : 86548 s, $T_g = 1{,}00171$ s.

or, $g_c = \frac{4\pi^2 l}{T_c^2} = g_P \left(T_P/T_c\right)^2 = 9{,}77\ m.s^{-2}$,

ce qui conduit à un écart relatif de 0,34 %. Une telle variation peut être expliquée par une variation d'altitude de 10 km. La différence d'altitude seule ne peut expliquer cet écart.

Exercice 3 : Microscopie à force électrostatique

---

1) a) Système : masse m (M)

Réf : terrestre supposé galiléen

Bdf : Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{u}_z$

Tension : $\vec{F} = T\,\hat{u}_z = k(z_P - z_M - l_0)\,\hat{u}_z$

Frottements $\vec{f} = -\beta\dot{\delta}\,\hat{u}_z$

avec $z_P = z_{P0} + a_0 \cos\omega t$

$z_M = z_0 + \delta(t)$.

On applique le principe fondamental de la dynamique (1D) :

$$-\beta\dot{\delta} - mg + k(z_{P0} + a_0\cos\omega t - z_0 - \delta - l_0) = m\ddot{\delta}$$

Note : A l'équilibre

$$+mg = k(z_{P0} - z_0 - l_0),$$

d'où $-\beta\dot{\delta} + ka\cos\omega t - \delta k = m\ddot{\delta}$

$$\ddot{\delta} + \frac{\beta}{m}\dot{\delta} + \frac{k}{m}\delta = \frac{k}{m}a\cos\omega t$$

b) En RSF, on a : $a(t) = \mathrm{Re}(A\exp(j\omega t))$

et $\delta = \mathrm{Re}(B \exp(j\omega t))$

$\dot{\delta} = \mathrm{Re}(B j\omega \exp(j\omega t))$

$\delta = \mathrm{Re}\left(\frac{B}{j\omega} \exp(j\omega t)\right)$.

d'où l'équation différentielle :

$$B\left(j\omega + \frac{\beta}{m} + \frac{k}{m j\omega}\right) = \frac{Ak}{m}.$$

d'où : $$\frac{B}{A} = \frac{k/m}{j\omega + \frac{\beta}{m} + \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{j\omega}} \times \frac{k}{\beta} \times \frac{\beta}{k}$$

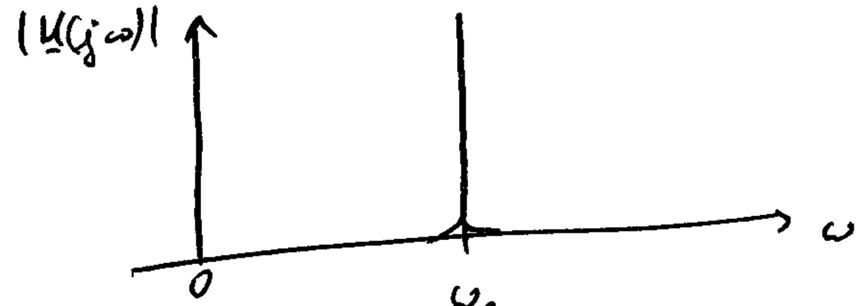
d'où $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\beta/m}{j\omega + \frac{\beta}{m} + \frac{k}{m}\frac{1}{j\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{\beta}\left(j\omega + \frac{k}{m}\frac{1}{j\omega}\right)}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $Q = \sqrt{km}/\beta$.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{km}}{\beta}\left(j\omega\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{j\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On reconnaît un filtre passe-bande.

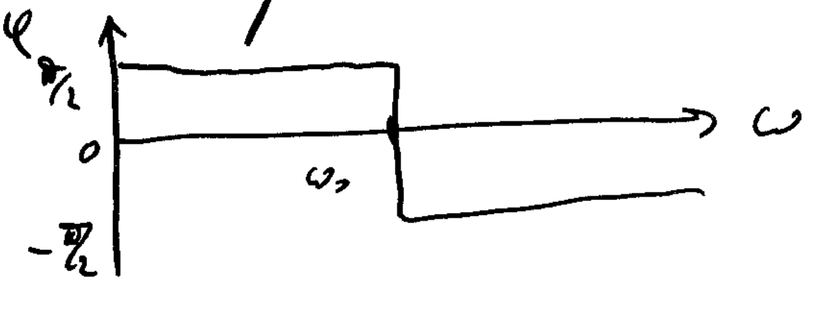
c) Si $Q \gg 1$, la résonnance en intensité sera très importante, on aura alors :



$\omega_0 \rightarrow$ pulsation propre du circuit

$Q \rightarrow$ facteur de qualité

d)



On a établit $\underline{H}(j\omega)$, d'où :

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi = -\arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$$

$$\tan\varphi = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right),$$

φ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, essentiellement autour de ω_0. On pose alors x la pulsation réduite : $\tan\varphi = -Q(x - 1/x)$.

$$\frac{d\tan\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}\cdot\left(1 + \tan^2\varphi(\omega=\omega_0)\right)$$

or, $\tan\varphi(\omega=\omega_0) = 0$, d'où

$$\frac{d\tan\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = \frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}$$ d'une part,

et d'autre part, $$\frac{d\tan\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\frac{Q}{\omega_0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\bigg|_{\omega=\omega_0}$$

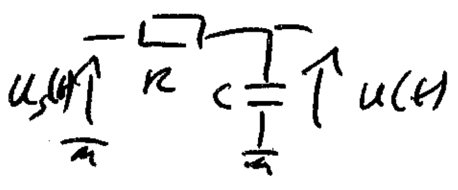
d'où : $$\frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\frac{Q}{\omega_0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0}.$$

2) d) On a : $\delta = c\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ d'après la question précédente, et $u_A(t) = u_0\cos(\omega t)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_S(t) &= K\, u_A(t)\, u_B(t) \\ &= KCu_0\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t) \\ &= D\cos(2\omega t + \varphi) + E\cos(\varphi). \end{aligned}$$

On a une composante à la pulsation 2ω et une autre continue. On peut la filtrer avec un filtre RC passe-bas.



On obtiendra alors :

$$u(t) = F\cos(\varphi)$$

On définit alors la sensibilité du capteur :

$$\frac{du}{d\omega} = -F\sin\varphi\ \frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Or, pour $\omega \simeq \omega_0$, $\sin\varphi \simeq 0$. La sensibilité du capteur sera alors faible. Ce n'est pas optimal

b) On a alors : $\delta = b\cos(\omega t + \varphi)$

d'où, avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre $\dot{\delta}$ et δ :

$$\dot{\delta} = -b\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

On cherche alors $u_S'(t)$, produit de $u_A(t)$ et $u_C(t)$ image de $\dot{\delta}(t)$, soit :

$$u_S'(t) = K'\,u_A(t)\cdot u_C(t)$$
$$= -K u_0 b\cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)$$
$$= H\sin(2\omega t + \varphi) + I\sin(\varphi).$$

On obtient alors une tension filtrée :

$$u'(t) = J\sin\varphi,$$

et la sensibilité sera alors bien meilleure :

$$\frac{du'}{d\omega} = J\cos\varphi\ \frac{d\varphi}{d\omega}$$

et $\cos\varphi$ est maximal autour de ω_0, on pourra alors réaliser une mesure plus précise.

c) On rappelle : $\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0}$, alors :

$$\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta \ell}{2\ell}.$$

d/ On obtient $\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = 2 \cdot 10^{-5}$, d'où $\delta \omega_0 = 1{,}2 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

3) a) On ajoute une nouvelle force :

$$F_c(z_m) = F_c(z_0 + \delta(t))$$

$$\overset{DL}{=} F_c(z_0) + \delta(t) \left.\frac{dF_c}{dz_n}\right|_{z_n = z_0}.$$

Ce DL à l'ordre 1 fournit une relation où le premier terme est à négliger. On rapporte le second dans l'équation différentielle :

$$\ddot{\delta} + \frac{\beta}{m}\dot{\delta} + \frac{k}{m}\delta = \frac{1}{m}\delta \left.\frac{dF_c}{dz_n}\right|_{z_0} + \frac{k}{m} a_0 \cos \omega t.$$

On réécrit alors :

$$\ddot{\delta} + \frac{\beta}{m}\dot{\delta} + \left(\frac{k}{m} - \frac{1}{m}\left.\frac{dF_c}{dz_n}\right|_{z_0}\right)\delta = \frac{k}{m} a_0 \cos \omega t.$$

Tout se passe alors comme si le ressort avait un δk supplémentaire, avec $\delta k = -\left.\frac{dF_c}{dz_n}\right|_{z_0}$.

b) On identifie alors une nouvelle pulsation propre : $\omega_0' = \sqrt{\frac{k + \delta k}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\delta k}{k}}$

or, $\frac{\delta k}{k} \ll 1$, d'où $\omega_0' \overset{DL}{=} \omega_0 \left(1 + \frac{\delta k}{2k}\right)$.

On a alors un décallage en pulsation :

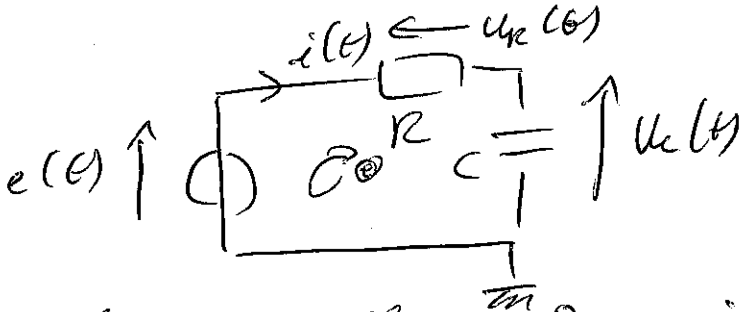
$$\delta \omega_0 = \frac{\omega_0 \, \delta k}{2k}.$$

c/ On a établit $\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta \ell}{2\ell}$. On doit avoir $\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} < \frac{\delta \omega_{0p}}{\omega_0}$, d'où $\frac{\delta k}{k} > \delta \ell / 2\ell$.

Ainsi, plus Q sera élevé, plus la sensibilité sera importante. Cela, car il sera plus facile de détecter les changements de phase et donc la pulsation propre de l'oscillateur.

Exercice 4 : Boîtes à décodes.

On modélise la situation par le circuit



La loi des mailles fournit :

$$e(t) = R\,i(t) + u_c(t).$$

$$e(t) = RC\frac{du_c}{dt} + u_c(t).$$

d'où, pour une charge,

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \quad \tau = RC, \quad E = 10V.$$

d'où $\begin{cases} u_c(t) = E + A\exp(-t/\tau) \\ u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0, \text{ continuité de } u_c(t). \end{cases}$

d'où $\begin{cases} u_c(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)). \\ \text{et } i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau). \end{cases}$

Lors de la charge, l'intensité maximale est E/R, soit ici, 83 mA. Les résistances utilisées ici sont dans les calibres × 10 et

×100. Celles du premier calibre ne sont pas affectées, mais les secondes vont dissiper une ~~puissance~~ puissance trop importante, elles vont chauffer (et probablement fumer et se détériorer).

<u>Note</u>: Il faut vérifier que :

$83\ mA < 1\ A \rightarrow OK$

$1/\tau = 8{,}3 \cdot 10^5\ Hz >> f \rightarrow OK$.