Calcul de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1) Une expression de $\frac{1}{n^2}$ sous forme intégrale.

On cherche des réels a et b tels que $\forall n \geqslant 1$, $\int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{n^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (at^2+bt)\cos(nt)\ dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)\sin(nt)\ dt = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)(-\sin(nt))\ dt \\ &= \frac{1}{n}\left(\left[(2at+b)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2a)\frac{\cos(nt)}{n}\ dt\right) \\ &= \frac{1}{n^2}((2a\pi+b)(-1)^n - b) - \frac{2a}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nt)\ dt = \frac{(-1)^n(2a\pi+b)-b}{n^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, si les réels a et b vérifient $2a\pi + b = 0$ et $-b = 1$ ou encore si $b = -1$ et $a = \frac{1}{2\pi}$, alors $\forall n \geqslant 1$, $\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{n^2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\ dt.$$

2) Expression de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sous forme intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. D'après 1),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\ dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ dt.$$

3) Calcul de $C_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

1er calcul. Soit t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right).$$

- Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors chaque $\cos(kt)$ vaut 1 et dans ce cas, $\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = n$.
- Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ et dans ce cas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})t}\frac{e^{-int/2}-e^{int/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \varphi_n(t) \text{ où } \varphi_n(t) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2} \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \text{ si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

2ème calcul. Soient t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) \\ &= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ (somme télescopique).} \end{aligned}$$

et pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

4) Nouvelle expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

φ_n est continue sur $[0,\pi]$ (car pour tout t de $[0,\pi]$, $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$) et d'après ce qui précède, et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(-\frac{1}{2} + \varphi_n(t)\right)\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\varphi_n(t)\,dt \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\varphi_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $t \in]0,\pi]$, $\left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\varphi_n(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)$. Pour $t \in]0,\pi]$, on pose alors $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

f est continue sur $]0,\pi]$. De plus, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \dfrac{-t}{2 \times \frac{t}{2}} = -1$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt \text{ où } f(t) = \begin{cases} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ si } t \in]0,\pi] \\ -1 \text{ si } t = 0 \end{cases}.$$

Il reste à étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente, f étant continue sur $[0,\pi]$.

5) Le lemme de Lebesgue. Il s'agit de montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0$ et donc aussi $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$.

a) Cas des fonctions de classe C^1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une intégration par parties, licite puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, fournit pour $\lambda > 0$

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{i\lambda}\left(\left[f(t)e^{i\lambda t}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt\right) = \frac{1}{i\lambda}\left(f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt\right),$$

et donc, pour $\lambda > 0$

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ ce qui démontre le lemme de Lebesgue pour les fonctions de classe C^1 sur un segment.

b) Cas des fonctions continues par morceaux.

On a d'abord $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}\,dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} = 0$ ce qui démontre le lemme de Lebesgue quand f est la fonction constante 1.

Mais alors, par linéarité de l'intégrale puis additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, le lemme de Lebesgue est démontré pour les fonctions en escaliers sur $[a,b]$.

Soit maintenant f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe g une fonction en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t) - g(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (approximation uniforme sur un segment d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escaliers).

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))e^{i\lambda t}\,dt + \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque g est en escaliers sur $[a,b]$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\left|\displaystyle\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda_0 > 0 /\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\left(\lambda \geqslant \lambda_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \varepsilon\right)$ et donc

Lemme de Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0,$$

les deux dernières limites étant obtenues par passage aux parties réelles et imaginaires.

6) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

La fonction f définie en 4) est continue sur $[0,\pi]$ et d'après le lemme de Lebesgue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt = 0$.

Le 5)b) montre alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On a $S - S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}S$ et donc

$S' = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12}$. On a aussi $S + S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2} = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2}(S + S') = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

