Applications linéaires

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Définitions et premières propriétés

Définition. *Une application f de E dans F est dite linéaire si*
- $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

ce qui est équivalent à :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple. $I\,:\,\mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{K}\right) \to \mathbb{K},\ f \mapsto \int_a^b f.$

Exemple. $\phi\,:\,\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R},\mathbb{K}\right) \to \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R},\mathbb{K}\right),\ f \mapsto af'' + bf' + cf$ *avec* $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$.

Définition. *Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.*
On note $\mathcal{L}(E)$ plutôt que $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Définition. *On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphismes de E dans F.*

Exemple. *Soient u et v deux vecteurs non colinéaires, alors le plan $P = Vect(u,v)$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes car $\mathbb{R}^2 \to P,\ (\lambda,\mu) \mapsto \lambda u + \mu v$ est une application linéaire bijective.*

Exemple. $\mathbb{R}^2$ *et* $S = \{f \in \mathcal{C}^2\,:\, f'' = af' + bf\}$ *sont isomorphes car* $S \to \mathbb{R}^2,\ f \mapsto (f(1), f'(1))$ *est une application linéaire bijective d'après le théorème de Cauchy.*

Définition. *On appelle homothétie toute application linéaire de la forme λId_E avec $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors*

$$f(0_E) = 0_E \qquad et \qquad \forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$$

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors*

$$\forall (x_1,...,x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Proposition. *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$*

Proposition. *Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$ alors*

$$\forall (g_1,g_2) \in \mathcal{L}(F,G)^2,\ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1\ g_1 \circ f + \lambda_2\ g_2 \circ f$$

et

$$\forall (f_1,f_2) \in \mathcal{L}(F,G)^2,\ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\ g \circ f_1 + \lambda_2\ g \circ f_2$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

II. Structures

Théorème. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.*

Théorème. $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ *est un anneau*

Corollaire. *L'ensemble des automorphismes de E noté $GL(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.*

Corollaire. *(Binôme de Newton et formule de Bernoulli)*
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ alors pour tout entier n,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \quad \text{et} \quad f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$$

où pour tout entier k, f^k représente Id_E si $k=0$ et $\underbrace{f \circ ... \circ f}_{k\,fois}$ sinon.

III. Applications linéaires et espaces vectoriels

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
- *Si H est un sous-espace vectoriel de E alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F,*
- *Si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
On appelle image de f et on note $\mathrm{Im} f$ le sous-espace vectoriel de F, $f(E)$.
On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker} f$ le sous-espace vectoriel de E, $f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors*
- *f est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Im} f$ si, et seulement si, $F \subset \mathrm{Im} f$,*
- *f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ si, et seulement si, $\mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$.*

Remarque : La caractérisation de la surjectivité n'utilise pas la linéarité de f contrairement à la caractérisation de l'injectivité.

Théorème. *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $f(Vect A) = Vect(f(A))$.*
En particulier, si A est une partie génératrice alors $f(A)$ engendre l'image de f.

IV. Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*
- *Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre et si f est injective, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.*
- *Si $(x_i)_{i\in I}$ engendre E et si f est surjective, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ engendre F.*
- *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E et si f est bijective, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*
Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$

Exercice. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*
- *Si $(f(x_i))_{i\in I}$ engendre F, alors f est surjective.*
- *Si $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*

Exercice. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
- *f est surjective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ génératrice de E, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ engendre F.*
- *f est injective si, et seulement si, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de E libre, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.*

— *f est bijective si, et seulement si, pour toute base $(x_i)_{i\in I}$ de E, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Théorème. *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E alors*
- *f est surjective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice de F,*
- *f est injective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre,*
- *f est bijective si et seulement si la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est une base de F,*

Proposition. *Soit $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E et $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. Alors*

$$f = g \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ f(e_i) = g(e_i)$$

Remarque : Le résultat est conservé si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E.

Théorème. *Soit $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base de E et $(y_i)_{i\in I} \in F^I$ alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall i \in I$, $u(e_i) = f_i$.*
On dit qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

V. Projections et symétries

Définition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose donc de façon unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_g \in G$.*
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe x_F.

Théorème. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G alors*
- *p est linéaire*
- $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}(p - Id) = F$
- $\mathrm{Ker} p = G$
- $p \circ p = p$

Définition. *On dit que p est une projection vectorielle de E s'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tel que p soit la projection sur F parallèlement à G*

Théorème. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ alors p est une projection si et seulement si $p \circ p = p$.*
Dans ce cas, p est la projection sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\mathrm{Ker} p$.

Définition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose de façon unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_g \in G$.*
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $x_F - x_G$.

Théorème. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors*
- *s est linéaire et bijective*
- $\mathrm{Ker}(s - Id) = F$
- $\mathrm{Ker}(s + Id) = G$
- $s \circ s = Id$

Définition. *On dit que s est une symétrie vectorielle de E s'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tel que s soit symétrie par rapport à F parallèlement à G.*

Théorème. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id$.*
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$

VI.Formes linéaires et hyperplans

Définition. *On appelle hyperplan de E tout sev F de E admettant pour supplémentaire une droite vectorielle i.e. H est un hyperplan si, et seulement si,*

$$\exists a \in E \setminus \{0\} \ : \ E = H \oplus \mathbb{K}a$$

Exemple. *Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles, les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.*

Exemple. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$

Exemple. *Soit a un réel, $\{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \ : \ f(a) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dont un supplémentaire est l'ensemble des fonctions constantes de I dans $\mathbb{R}$.*

Proposition. *Soit H un hyperplan. Si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}a$.*

Proposition. *Si H et H' sont deux hyperplans de E tels que $H \subset H'$, alors $H = H'$.*

Proposition. *Si H est un hyperplan et F un sev de E tels que $H \subset F$, alors $F = H$ ou $F = E$.*

Définition. *On appelle forme linéaire sur E tout élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

Proposition. *Si E possède une base $(e_1, ..., e_n)$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et E sont isomorphes.*

Théorème. *Un sev de E est un hyperplan de E si, et seulement si, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Proposition. *Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors*

$$\text{Ker}\phi = \text{Ker}\psi \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ : \ \phi = \lambda\psi$$

Exercice. *Soient ϕ et ψ deux formes linéaires. Alors*

$$\text{Ker}\phi \subset \text{Ker}\psi \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{K} \ : \ \psi = \lambda\phi$$