Étude locale des fonctions

I. Comparaison

Dans tout ce qui suit, f, g, h… sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; et a est un point de I ou une borne de I, avec éventuellement $a = +\infty$ ou $-\infty$. Enfin, on suppose que la fonction à laquelle on compare (qui est au dénominateur des fractions) ne s'annule pas.

I.1. Négligeabilité et domination

Définition. *On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a sur lequel le rapport f/g est borné ; on écrit alors* $f(t) \underset{t\to a}{=} O\big(g(t)\big)$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si le rapport f/g a pour limite 0 en a ; on écrit alors $f(t) \underset{t\to a}{=} o\big(g(t)\big)$.

En posant $\varepsilon = f/g$, f est négligeable devant g en a si et seulement si il existe une fonction ε vérifiant

$$\forall t \in I \quad f(t) = g(t)\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$$

Proposition I.1. *Si* $f(t) \underset{t\to a}{=} o\big(g(t)\big)$, *alors* $f(t) \underset{t\to a}{=} O\big(g(t)\big)$.

Théorème I.2. *Si f et g sont négligeables devant h en a, et si λ et μ sont deux nombres, alors $\lambda f + \mu g$ est négligeable devant h en a ; autrement dit,*

$$\lambda \times o(h) + \mu \times o(h) = o(h)$$

De même, $\lambda \times O(h) + \mu \times O(h) = O(h)$.

Si g est négligeable devant h en a, alors le produit $f.g$ est négligeable devant $f.h$ en a ; autrement dit,

$$f \times o(h) = o(f \times h)$$

De même, $f \times O(h) = O(f \times h)$.

Proposition I.3. *Si f est négligeable devant g et g est dominée par h en a, alors f est négligeable devant h en a ; autrement dit,*

$$o\big(O(h)\big) = o(h)$$

De même, $O\big(o(h)\big) = o(h)$ *et* $O\big(O(h)\big) = O(h)$.

I.2. Équivalence

Définition. *On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si le rapport f/g a pour limite 1 en a ; on écrit alors* $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$.

Cela revient à dire qu'il existe une fonction ε vérifiant

$$\forall t \in I \quad f(t) = g(t)\big(1+\varepsilon(t)\big) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$$

Proposition I.4. $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$ *si et seulement si* $f(t) \underset{t\to a}{=} g(t) + o\big(g(t)\big)$.

Proposition I.5. *Si f est équivalente à g en a et si f admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors g a pour limite ℓ en a.*

Si f et g tendent vers une même limite ℓ ***finie et non nulle*** *en a, alors f est équivalente à g en a ; on a alors en particulier* $f(t) \underset{t\to a}{\sim} \ell$.

Proposition I.6. *La relation d'équivalence en a est une relation d'équivalence ; autrement dit elle est*
- *réflexive :* $f \sim f$;
- *symétrique :* $f \sim g \Longrightarrow g \sim f$;
- *transitive :* $(f \sim g \text{ et } g \sim h) \Longrightarrow f \sim h$.

Théorème I.7. *Si, au voisinage de a, $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors, au voisinage de a,*
- $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$;
- $\dfrac{f_1}{g_1} \sim \dfrac{f_2}{g_2}$;
- *pour α* ***fixé*** *dans $\mathbb{R}$ et sous réserves de définition,* $(f_1)^\alpha \sim (f_2)^\alpha$.

Attention, on n'a pas le droit d'additionner des équivalences : il est possible d'avoir $f \sim g$ et $f + h \not\sim g + h$.

Théorème I.8 (changement de variable). *Si* $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$, *si la fonction h prend ses valeurs dans I, et si $h(u)$ a pour limite a quand u tend vers b, alors* $f\big(h(u)\big) \underset{u\to b}{\sim} g\big(h(u)\big)$

Attention, le théorème affirme que $f \sim g \Longrightarrow f\circ h \sim g \circ h$; il ne fonctionne pas pour la composition en sens inverse, autrement dit on peut avoir $f \sim g$ et $h\circ f \not\sim h\circ g$.

II. Développements limités

II.1. Généralités

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n (DL_n) en a s'il existe des nombres $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} b_0 + b_1(t-a) + b_2(t-a)^2 + \cdots + b_n(t-a)^n + o\big((t-a)^n\big)$$

ou, de manière équivalente, $\quad f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + b_n h^n + o(h^n)$.

La partie $P(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + b_n h^n$ sera appelée partie polynômiale ou partie régulière du DL, le terme $o(h^n)$ sera appelé reste ou terme inconnu.

Proposition II.1. *Si f admet un DL_n en a, alors f en admet un seul.*

Autrement dit, si l'on connaît deux DL_n de f en a, alors leurs parties polynômiales ont les mêmes coefficients.

Théorème II.2 (formule de Taylor-Young). *Si f est de classe C^n sur I et si $a \in I$, alors f admet un DL_n en a, donné par*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, h^k + o(h^n) \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}\, h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, h^n + o(h^n) \end{aligned}$$

II.2. Opérations sur les DL

Théorème II.3 (combinaison linéaire et produit). *Si f et g admettent des DL_n en a, donnés par $\; f(a+h) = P(h) + o(h^n) \;$ et $\; g(a+h) = Q(h) + o(h^n)$ au voisinage de a, alors*

- *pour tout couple de nombres (λ,μ), $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a, donné par $[\lambda f + \mu g](a+h) = [\lambda P + \mu Q](h) + o(h^n)$ au voisinage de a ;*
- *le produit fg admet pour DL_n en a $\; [fg](a+h) = R(h) + o(h^n)$, où R est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré au plus n dans le produit PQ.*

Théorème II.4 (composition - hors programme). *On suppose que :*

- *f admet en a un DL_n de la forme $f(a+h) = b + P(h) + o(h^n)$ où P est un polynôme vérifiant $P(0) = 0$ (en particulier, f a donc pour limite b en a) ;*
- *g admet un DL_n en b : $g(b+u) = Q(u) + o(u^n)$.*

Alors, $g \circ f$ admet un DL_n en a donné par $\; [g\circ f](a+h) = R(h) + o(h^n) \;$ où R est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré au plus n dans le polynôme $Q \circ P$.

Théorème II.5 (inverse). *Si f admet un DL_n en a et a une limite non nulle en a, alors $1/f$ admet un DL_n en a.*

On obtient ce DL en composant le DL de f par le DL de $1/(b+u)$, où b est la limite de f en a. Le DL d'un rapport f/g s'obtient alors en multipliant le DL de f par celui de $1/g$.

Théorème II.6 (primitivation). *Si f est continue sur I et admet pour DL_n en $a \in I$:*

$$f(a+h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + o(h^n)$$

alors la primitive F de f qui prend la valeur c en a admet un DL_{n+1} en a, donné par

$$F(a+h) = c + b_0 h + b_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + b_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1})$$

II.3. DL usuels

Au voisinage de 0 :

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$.
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + o(x^n)$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$.
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$.
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$.