Lycée Buffon — DM 7
MPSI — Année 2020-2021

Corrigé du devoir à rendre le 4/01/2021

Exercice 1
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$. On définit la suite u par $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{avec} \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\},\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

On suppose que u_0 est tel que la suite soit bien définie.

1. On suppose que u converge.

   (a) *Montrer que si u converge alors sa limite est racine d'une équation du second degré $(*)$.*

   Supposons que la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (au_n+b) = a\ell+b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (cu_n+d) = c\ell+d$.

   Pour affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{au_n+b}{cu_n+d} = \dfrac{a\ell+b}{c\ell+d}$, il faut s'assurer que $c\ell+d \neq 0$.

   Si c'était le cas, alors on aurait $\ell = -d/c$ car $c \neq 0$ puis $a\ell+b \neq 0$ car $ad-bc \neq 0$; ce qui impliquerait la divergence de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

   Par conséquent, $c\ell+d \neq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{au_n+b}{cu_n+d} = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a\ell+b}{c\ell+d}$ et, par unicité de la limite $\ell = \dfrac{a\ell+b}{c\ell+d}$ puis $\ell\,(c\ell+d) = a\ell+b$.

   Ainsi, ℓ est racine du polynôme $\boxed{cX^2+(d-a)X-b}$ qui est de degré 2 car $c \neq 0$.

   (b) *Soit r une racine de $(*)$. Montrer que $u_{n+1} - r = (u_n - r)\dfrac{ad-bc}{(cu_n+d)(cr+d)}$*

   Par définition

   $$u_{n+1} - r = \frac{au_n+b}{cu_n+d} - r = \frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{ar+b}{cr+d}$$

   car r est racine de $(*)$. Ainsi,

   $$u_{n+1} - r = \frac{(au_n+b)\,(cr+d) - (cu_n+d)\,(ar+b)}{(cu_n+d)(cr+d)} = \boxed{\frac{(ad-bc)(u_n-r)}{(cu_n+d)(cr+d)}}$$

   (c) *En déduire que u est constante si et seulement si un de ses terme est racine de $(*)$*

   Si u est constante à ℓ, alors elle converge vers ℓ donc, d'après la première question, tous ses termes sont racines de $(*)$.

   Réciproquement, si un des termes de u, u_{n_0} est égal à une racine r de $(*)$, alors, d'après la question précédente, $u_{n_0+1} - r$ est nul, et par une récurrence évidente, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = r$.

   De plus, si $n_0 > 0$, alors $\dfrac{(ad-bc)(u_{n_0-1}-r)}{(cu_{n_0-1}+d)(cr+d)} = 0$. Comme $ad-bc \neq 0$, on en déduit que $u_{n_0-1} = r$; puis, par une récurrence finie évidente, que pour tout $n \leq n_0$, $u_n = r$. La suite u est donc constante.

Désormais on suppose que u n'est pas constante.

2. On suppose que $(*)$ a deux racines distinctes r_1 et r_2.

   (a) *Montrer que la suite $v = \left(\dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et géométrique de raison λ.*

   Comme la suite u a été supposée non constante, alors, aucun de ses termes n'est racine de $(*)$ donc, pour tout entier n, on a $u_n \neq r_2$. La suite v est donc bien définie.

   De plus, pour tout entier n, on a :

   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-r_1}{u_{n+1}-r_2}\,\frac{u_n-r_2}{u_n-r_1}$$

   ce qui d'après 1.b donne

   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(ad-bc)(u_n-r_1)}{(cu_n+d)(cr_1+d)}\,\frac{(cu_n+d)(cr_2+d)}{(ad-bc)(u_n-r_2)}\,\frac{u_n-r_2}{u_n-r_1} = \frac{cr_2+d}{cr_1+d}.$$

   La suite v est donc géométrique de raison $\boxed{\lambda = \dfrac{cr_2+d}{cr_1+d}.}$

   (b) *En déduire u en fonction de λ*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = v_0\,\lambda^n = \dfrac{u_n-r_1}{u_n-r_2}$ donc $u_n\,(1 - v_0\lambda^n) = r_1 - r_2 v_0 \lambda^n$.

   Comme $r_1 \neq r_2$, $v_n \neq 1$ donc

   $$u_n = \frac{r_1 - r_2 v_0 \lambda^n}{1 - v_0\lambda^n} = \boxed{\frac{r_1(u_0-r_2) - r_2(u_0-r_1)\lambda^n}{u_0 - r_2 - (u_0-r_1)\lambda^n}.}$$

   (c) *En déduire la nature convergente ou divergente de u.*

   - Si $|\lambda| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$ donc u converge vers $\boxed{r_1.}$

- Si $|\lambda| > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda^{-n} = 0$ et , pour tout entier n,

$$u_n = \frac{r_1(u_0 - r_2)\lambda^{-n} - r_2(u_0 - r_1)}{(u_0 - r_2)\,\lambda^{-n} - (u_0 - r_1)}$$

donc u converge vers $\boxed{r_2.}$

- Sinon $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$ car $r_1 \neq r_2$. La suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

Or, pour tout entier n, on a $v_0\,\lambda^n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$. Comme $v_0 \neq 1$, si la suite u converge vers $\ell \neq r_2$, alors la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si la suite u converge vers r_2, alors, comme $r_1 \neq r_2$, la suite $(|\lambda|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Comme la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente et la suite $(|\lambda|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 1, on en déduit que la suit u diverge.

3. On suppose que $(*)$ a une seule racine r_0.

(a) *Montrer que si* $w = (\dfrac{1}{u_n - r_0})_{n\in\mathbb{N}}$ *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + \frac{2c}{a+d}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1.b, on a

$$w_{n+1} = \frac{(cu_n + d)(cr_0 + d)}{(ad - bc)(u_n - r_0)} = \frac{cr_0 + d}{ad - bc}\ \frac{c(u_n - r_0) + cr_0 + d}{u_n - r_0}$$

De plus, comme le polynôme $cX^2 + (d-a)X - b$ n'a qu'une racine r_0, on en déduit que $ad - bc = \dfrac{(a+d)^2}{4}$ et $cr_0 + d = \dfrac{a+d}{2}$ puis

$$w_{n+1} = \frac{2}{a+d}\left(c + \frac{a+d}{2} w_n\right)$$

donc $\boxed{w_{n+1} = w_n + \dfrac{2c}{a+d}}$

(b) *En déduire la nature de* u.

La suite w est arithmétique de raison $\dfrac{2c}{a+d}$ donc, pour tout entier n, on a $w_n = w_0 + \dfrac{2cn}{a+d}$.puis $u_n = r_0 + \dfrac{a+d}{w_0 + 2cn}$.
Comme $|w_0+2cn| \geq 2|c|n-|w_0|$, on a $\lim_{n\to+\infty} w_0+2cn = +\infty$. Par conséquent, la suite u tend vers $\boxed{r_0.}$

Exercice 2 :

On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$.

1. *Montrer que la suite u est bien définie et que* $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq \sqrt{n}$.
Pour tout entier n, on pose $H(n)$: "u_n est bien défini et $\sqrt{n} \leq u_n$".
Initialisation : $H(0)$ est vraie par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. On a $u_n + n + 1 \geq 0$ donc u_{n+1} est bien défini et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \geq \sqrt{n+1}$$

Ainsi, la suite u est bien définie et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq \sqrt{n}}$$

2. (a) *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}(1+x)$.

La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction g est donc décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc un minimum global en 1 égal à $g(1) = 0$.
La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}^+$ i.e.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x).}$$

(b) *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que $u_n = o(n^2)$.

Pour tout entier n, on pose $H(n)$: "$u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$".
Initialisation : $H(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. On a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + n + 1} \leq \frac{1}{2}(1 + u_n + n + 1) \leq \frac{1}{2}\left(1 + n + \frac{u_0}{2^n} + n + 1\right)$$

donc

$$u_{n+1} \leq n + 1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}}$$

En particulier, $0 \leq \dfrac{u_n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{u_0}{n2^n}$. Le théorème d'encadrement implique alors que :

$$\boxed{u_n = o(n^2)}$$

(c) *Montrer que $u_n = o(n)$ et en déduire un équivalent de u_n.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_n}{n} = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{n^2} + \dfrac{1}{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$ i.e.

$$\boxed{u_n = o(n)}$$

Ainsi, $n + u_{n-1} \sim n$ donc

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{n}}$$

(d) *Soit $v = \left(u_n - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Prouver que la suite v converge et donner sa limite.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + u_{n-1}/n} - 1\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$, on a $\sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}} - 1 \sim \dfrac{u_{n-1}}{2n} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.}$$

(e) *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - 1/n}\right) \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2n}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = 0}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n - u_{n-1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1) - \left(\sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + o(1)\right) = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + o(1) = o(1)$$

i.e.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1} = 0}$$

(f) *Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $1 + u_n - u_{n-1}$ et en déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + n + 1} - \sqrt{u_{n-1} + n} = \frac{u_n + 1 - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + n + 1} + \sqrt{u_{n-1} + n}}$$

donc $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $1 + u_n - u_{n-1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1} + 1 = 1$, on en déduit qu'à partir d'un certain la suite $(u_n - u_{n-1} + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive donc la suite u est monotone à partir de ce rang.

Exercice 3 :

1. *Prouver que, pour tout entier n non nul, l'équation $\dfrac{e^{-x^2}}{x} = \dfrac{1}{n}$ admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une unique solution que l'on notera x_n.*

   On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2} - 2\right) e^{-x^2} < 0$$

   La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $f\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$.

   Comme $\lim\limits_{0} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   En particulier, pour tout entier n non nul, le réel strictement positif $1/n$ admet un unique antécédent.

2. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.*

   Par définition, pour tout entier n, on a $x_n = f^{-1}(1/n)$.

   Comme $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, on a $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = 0$ donc

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

3. *Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :*

   $$x_n^2 + \ln x_n = \ln n$$

   et en déduire un équivalent de x_n.

   Pour tout entier n non nul, on a :

   $$e^{-x_n^2} = \frac{x_n}{n}$$

   donc $-x_n^2 = \ln(x_n) - \ln n$ i.e.

   $$\boxed{x_n^2 + \ln x_n = \ln n}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{x_n^2} = 0$ i.e. $\ln x_n = o(x_n^2)$ donc $x_n^2 \sim x_n^2 + \ln x_n = \ln n$ puis

   $$\boxed{x_n \sim \sqrt{\ln n}}$$

4. *Soit* $u = \left(x_n - \sqrt{\ln n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Trouver un équivalent de* u *et sa limite.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(u_n + \sqrt{\ln n}\right)^2 + \ln\left(u_n + \sqrt{\ln n}\right) = \ln n$$

soit

$$u_n^2 + 2u_n\sqrt{\ln n} + \ln\left(u_n + \sqrt{\ln n}\right) = 0.$$

Comme $x_n \sim \sqrt{\ln n}$, $u_n = o\left(\sqrt{\ln n}\right)$ puis $u_n^2 = o\left(2u_n\sqrt{\ln n}\right)$. Ainsi,

$$u_n^2 + 2u_n\sqrt{\ln n} \sim 2u_n\sqrt{\ln n}\,.$$

D'autre part,

$$\ln\left(u_n + \sqrt{\ln n}\right) = \frac{1}{2}\ln(\ln n) + \ln\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right)$$

Comme $u_n = o\left(\sqrt{\ln n}\right)$, on a $\dfrac{u_n}{\sqrt{\ln n}} = o(1)$ puis $\ln\left(1 + \dfrac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right) = o(1)$ et, a fortiori,$\ln\left(1 + \dfrac{u_n}{\sqrt{\ln n}}\right) = o(\ln(\ln n))$. Par suite,

$$\ln\left(u_n + \sqrt{\ln n}\right) \sim \frac{1}{2}\ln(\ln n)$$

puis

$$\boxed{u_n \sim \frac{\ln(\ln n)}{4\sqrt{\ln n}}.}$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$