# TD 26 - Séries

Ex 1 :

1) $\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$

Donc $\sum\left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ DVG

2) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

$\frac{1}{n^\alpha} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right) \iff \left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right)$ bornée

$\iff \alpha > \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre $\alpha = 1$

Donc $\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right)$

Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ DV

3) $\frac{1}{\sqrt{n^3-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} = \frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{n^3-1}$

$= \frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{n^3-1}$

$= \frac{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)}{n^3-1}$

$\sim \frac{n^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{n^3}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$

$\frac{9}{2} > 1$ et $\sum \frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}$ et $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{n^3-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ sont de mêmes natures

Donc elle CV

4) $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$= e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e\left(\underbrace{1-\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\sim\frac{1}{2n}}\right) \sim \frac{e}{2n}$

Par critère de comparaison des séries de Riemann, $\sum\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ DV

5)

$$\sum \left( \underbrace{\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln(n)-\lfloor \ln(n)\rfloor+n}}_{\sim \frac{e}{2n^2}} \right) \quad \text{CV}$$

6) $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

$$= \exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right] - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

$$= \exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln(n)+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)}_{\longrightarrow 1}\left[\underbrace{e^{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}-1}_{\sim \frac{1}{n^2}}\right]$$

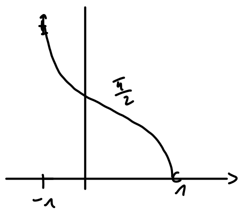
$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\sim 1}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1\right) \sim e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1 \sim \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

D'après le critère de Riemman, $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$ cv

7) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(\pi n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$

$$= \sin\left(n\pi\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right)+n\pi\right)$$

$$= \cos(n\pi)\sin\left(n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right) + \sin(n\pi)\cos\left(n\pi\sqrt{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right)$$




$$= (-1)^n \sin\left(n\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le th des séries alternées

⚠ On ne peut pas conclure avec les séries à termes posits.

Comme $\left(\frac{\pi}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$, $\sum \frac{(-1)^n\pi}{2}$ CV

8) $\cos(\arccos(1-h)) = 1-h$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\arccos(1-h)^2) + o\left((\arccos(1-h))^2\right)$$

$$h \sim \frac{1}{2}(\arccos(1-h))^2$$

$$\arccos(1-h) \sim \sqrt{2h}$$

$$\frac{n^3+1}{n^3+2} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\arccos\left(1-\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{3}{2} > 1$ donc d'après le critère de Riemann

$\Sigma\left(\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)\right)$ CV

9) $\Sigma\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Donc $\Sigma\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$ DV

10) $$\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}\right) = \underbrace{-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}}_{CV} \underbrace{-\frac{1}{2n(n+2)}}_{CV} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

grâce au th des séries alternées

grâce au critère de Riemann

Donc $\Sigma\left(\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}\right)\right)$ CV

Ex 2:

1) Soit $u, v$ deux suites à termes général str positifs tq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_0}$$

càd $\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} \geqslant \frac{v_0}{u_0}$

càd $v_{n+1} \geqslant \frac{v_0}{u_0} u_{n+1}$

càd $u_n = O(v_n)$

Or $\sum v_n$ CV

Donc d'après le critère de comparaison des séries à terme positifs, $\sum u_n$ CV

2) $v_n = \frac{1}{n^\beta}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$a \neq b$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{\alpha-\beta}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\alpha - \beta}{n}$$

. Si $\beta > \alpha$, alors APCR $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$

puis $\frac{1}{n^\beta} = O(\underbrace{u}_{\geqslant 0})$

Intéressant si $\beta \leqslant 1$

Si $\alpha < 1$ en prenant $\beta = 1$, on a : $\frac{1}{n} = O(u)$ et $\sum u_n$ DV

. Si $\beta < \alpha$ alors : APCR $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Donc $u = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$

Intéressant si si $\beta > 1$

. Si $\alpha > 1$ alors : en prenant $\beta = \frac{1+\alpha}{2} \in ]1; \alpha[$

$u_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ et $\beta > 1$

Donc $\sum u_n$ CV

3). On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n!\, e^n (n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{n+1}\, n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{e\, n^n}$

$$= \frac{1}{e} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(-\frac{1}{2n}\right)$$

càd $\alpha = \frac{1}{2}$ donc $\sum u_n$ DV

$\boxed{\text{On:}}$ $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

D'après Rieman, $\sum u_n$ DV

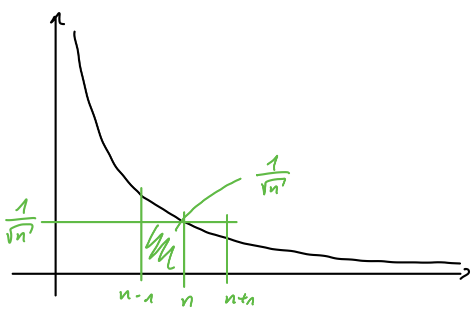
. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin(1/\sqrt{k})}{\sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(1/\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-1)!}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Ex 3:

$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$




Soit $k \geqslant 2$ $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$[2\sqrt{t}]_2^{n+1} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq [2\sqrt{t}]_1^{n}$$

$$\underbrace{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2}}_{\sim 2\sqrt{n}} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \underbrace{2\sqrt{n} - 2}_{\sim 2\sqrt{n}}$$

÷ par le sup équivalent

$$\underbrace{\frac{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}}_{\to 1} \leq \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{2\sqrt{n} - 2}{2\sqrt{n}}}_{\to 1}$$

ĉ tend vers 1 alors équivalent

Encadr

$\Rightarrow$ CCL $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$

Ex 4:

1) $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}} \times \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$$

$$= (n+1) \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \times e^{-n+(n+1)} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$v_n = \ln\left(e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \ln(e) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et $$v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$v_n = \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{3n^2} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$