TD11 - Suites

Ex 1 :

1) Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Mq u cv ssi u cst

. Si u cst alors u cv

. Supp u cv Mq u cst

Soit l la limite de u

Mq u est cst à l càd $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = l$

Soit $n \in \mathbb{N}$ Mq $u_n = l$

Par hyp, il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tq u soit T-périodique.

Ainsi $\forall q \in \mathbb{N}$, $u_n = \underbrace{u_{n+kT}}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} l}$

D'où $u_n = l$

$\boxed{\text{ou}}$ Supp u non cst Mq u diverge

Il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tq $u_{n_1} \neq u_{n_2}$

Les suites $(u_{n_1+nT})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n_2+nT})_{n\in\mathbb{N}}$ (où T est une période de u) sont extraites de u et resp cst à u_{n_1} et u_{n_2}

Comme $u_{n_1} \neq u_{n_2}$, u diverge (car elles possèdent deux suites extraites convergeant vers des limites $\neq$)

Rq : Soit u une suite périodique

càd $\exists T \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+T} = u_n$

Posons $P = \{ T \in \mathbb{N}^*\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+T} = u_n \}$ l'ens des périodes de u

P est non vide car u est périodique

Comme P est une partie de $\mathbb{N}$, elle possède un minimum T_0.

Mq $P = \{kT_0,\ k \in \mathbb{N}^*\}$

$\supset$ par récurrence simple

$\subset$ Soit T une période de u

càd $T \in \mathbb{N}^*$
$\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = u_{n+T}$

Il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0; T_0 - 1]\!]$ tq $\quad T = qT_0 + r$

Mq $r = 0$

u est alors r-périodique car $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+r} = u_{n+qT_0+r} = u_{n+T} = u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+r} = u_{n+qT_0+r} = u_{n+r} = u_n$

Or $r < T_0$ donc $r \in P$

puis $r = 0$ et $T = qT_0$

2) Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

Mq u CV $\Leftrightarrow$ u stationnaire

$\Leftarrow$ OK

$\Rightarrow$ Supp u CV

Soit ℓ sa limite

Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$

Par déf : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$

On a :

$$\forall n \geq n_0 \begin{cases} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4} \\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc : $\forall n \geq n_0\ |u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - \ell) - (u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell| + |u_{n+1} - \ell|$

$\forall n \geq n_0\ |\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\in \mathbb{Z}}| \underset{IT}{\leq} 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

donc $\forall n \geq n_0\ u_{n+1} = u_n$

3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tq $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Etudions la cv de $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

Par hyp, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$ càd $\theta = \frac{p\pi}{q}$

La suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors $2q$- périodique car:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin((n+2q)\theta) = \sin\left((n+2q)\frac{p}{q}\pi\right) = \sin\left(\frac{np}{q}\pi + 2\pi\right) = \sin(n\theta)$$

Donc $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ cv ssi u est cst

ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(n\theta) = 0$

ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin\left(n\frac{p}{q}\pi\right) = 0$

ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{np}{q} \in \mathbb{Z}$

$\sin \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z} \overset{def}{=} \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Supp $u = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ cv

Mq $\underbrace{(\sin(2n\theta))_{n\in\mathbb{N}}}_{v}$ et $\underbrace{(\cos(2n\theta))_{n\in\mathbb{N}}}_{w}$ cv

v est extraite de u

Comme u est supposée cv, v cv vers la même limite que u

$\cos(2n\theta) = \sin\left(2n\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(2 + \frac{\pi}{2\theta}\right)\theta\right)$

$\cos(2n\theta) = \underbrace{1 - 2\sin^2(n\theta)}_{1-2\ell'}$

c) <u>Analyse:</u>

Supp $((\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$ cv et notons l sa limite

On a déjà $(\cos(2n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(2n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $(e^{2in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\downarrow \, \ell}{e^{2i(n+1)\theta}} = \underbrace{\underset{\downarrow \, \ell}{e^{2in\theta}} \; \underset{\downarrow \, \ell}{e^{2i\theta}}}_{\ell e^{2i\theta}}$$

$\ell(1-e^{2i\theta}) =$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |e^{2i\theta}| = 1$

donc $|\ell| = 1$

puis $\ell \neq 0$ et $e^{2i\theta} = 1$

càd $2\theta = 0\ [2\pi]$

càd $\theta = 0\ [\pi]$

Synthèse :

Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ alors $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est cst à 0

Ex 2 :

Dem ① :

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

donc $\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} \leqslant u_n$

Donc $u \searrow$ APCR

Comme u est minorée par 0 elle cv

Notons L sa limite Mq $L = 0$

Si $L \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{L}{L} = 1 \neq \ell$

Donc $L = 0$

Dem 2 :

Comme $\frac{1+\ell}{2} > \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$

Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

Par def, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0 \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leqslant \varepsilon$

donc $\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2}$

Comme $u > 0$

$\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right) u_n$

Par récurrence, on a :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

Donc $\forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ car $0 \leqslant \frac{1+\ell}{2} \leqslant 1$

Par encadrement $\lim u = 0$

Supp $u > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$

Mq $\lim u = +\infty$

Dem 1 et 2 à adapter

Dem 3 :

Posons $v = \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$v > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\ell} \underset{\ell \neq 0}{} < 1$

D'après 1, $\lim v = 0$

donc $\lim \frac{1}{|v|} = +\infty$ càd $\lim \frac{1}{v} = +\infty$

D'où $\lim u = +\infty$

Ex :

- $u = (n+1)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $u > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

et u DV

- $v = (1)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $v > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ et v CN

Ex 3:

Supp $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \to \ell_1$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \to \ell_2$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}} \to \ell_3$ CV

Mq u CV

Mq $\ell_1 = \ell_2$

$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$

Donc elle CV vers ℓ_1 et ℓ_3

donc $\ell_1 = \ell_3$

$(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$

Donc elle CV vers ℓ_2 et ℓ_3

donc $\ell_2 = \ell_3$

Donc $\ell_1 = \ell_2$

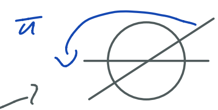
Ex 4:

5) $(1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \exp\Big(\underset{\downarrow \, 0}{\frac{1}{n}} \underbrace{\ln(1+x^n)}_{\to 0}\Big) \longrightarrow e^0 = 1$

6) n'importe

7) $\sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{\underbrace{\sqrt{n^2+n}+n}_{\sim 2n}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

8) Disjonction de cas.



9) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right) = \sin\left(\pi n + \pi\sqrt{n^2+an+b} - \pi n\right)$

$= (-1)^n \underbrace{\sin\big(\pi(\underbrace{\sqrt{n^2+an+b} - n}_{v_n})\big)}_{\to \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$

$v_n = \sqrt{n^2+an+b} - n = \dfrac{n^2+an+b-n^2}{\sqrt{n^2+an+b}+n}$ $\quad n^2+an+b-n^2 \sim an$ si $a \neq 0$ $\quad \sqrt{n^2+an+b}+n \sim 2n$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{a}{2}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)$

Donc u cv $\iff \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) = 0 \iff \frac{\pi a}{2} \equiv 0\,[\pi] \iff a \equiv 0\,[2]$

$\iff a \in 2\mathbb{Z}$

10) $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} \sim \frac{1}{n}$

Ex 5 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$w \nearrow$

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=0}^{\cancel{n+1}} \left(\frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!}\right)} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,n! + n\,n! - (n+1)\times(n+1)!}{(n+1)\times(n+1)!\times n \times n!}$$

$\div\, n!$

$$= \frac{n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)!}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)!} < 0$$

Donc $V \searrow$

$V_n - w_n = \frac{1}{n\,n!} \longrightarrow 0$

V_n et w_n sont des suites adjacentes.

Donc v_n et w_n cv la m̂ limite

2) $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt$

$= \frac{1}{(n+1)!} \left(\underbrace{\left[e^t (1-t)^{n+1} \right]_0^1}_{= 0} - \int_0^1 e^t \times (n+1)(1-t)^n \, dt \right)$

$t \mapsto e^t$
$t \mapsto (1-t)^n$ $\in \mathcal{C}([0;1])$

$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + u_n$

$u_n = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - w_n$

$u_0 = e - 1$

$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k!}$

3) $\forall t \in [0;1]$ $\quad 0 \leq (1-t)^n e^t \leq e^t$

donc $\quad 0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e^t \, dt \leq e$

d'où $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$

Par encadrement, $\lim u = 0$

Donc $\lim v = \lim w = e$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

4) Mq $e \notin \mathbb{Q}$

Supp par l'absurde qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tq $e = \frac{p}{q}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \Sigma$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \geqslant ab$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2+2ab}_{=(a+b)^2} \geqslant 0$$

Ex 6:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geqslant b_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n$$

$$= \frac{b_n - a_n}{2}$$

Or $a_n \geqslant b_n$

donc $b_n - a_n \leqslant 0$

donc $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$

donc $a \searrow$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} - b_n$$

et comme $a_n \geqslant b_n$

$a_n b_n \geqslant b_n^2$

d'où $\sqrt{a_n b_n} - b_n \geqslant 0$

donc $b \nearrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_1 \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant a_1$

Donc b est majorée par a_1 et croissante

donc b cv

Donc a est minorée par b_1 et décroissante

donc a cv

On prend $\lim a = l_1$
$\lim b = l_2$

Mq $l_1 = l_2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ l_1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{2} \longrightarrow \frac{l_1 + l_2}{2}$

Donc par unicité de la limite $l_1 = \frac{l_1 + l_2}{2}$

càd : $2l_1 = l_1 + l_2$

d'où : $l_1 = l_2$

C'est la moyenne arithmético-géométique

Ex 7:

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ cv de limite l

$V = \Big(\underbrace{\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}}_{\text{moyenne des } n+1 \text{ premiers termes de } u} \Big)_{n \in \mathbb{N}}$

Mq v cv vers l

càd Mq $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \ |v_n - l| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $\lim u = l$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \ |u_n - l| \leq \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$v_n - l = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} - l = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n - \overbrace{(l + \dots + l)}^{\times(n+1)}}{n+1} = \frac{(u_0 - l) + (u_1 - l) + \dots + (u_n - l)}{n+1}$

$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - l|$

Soit $n \geq n_0$

$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0 - 1} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - l|$

$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0 - 1} |u_k - l| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon$

$$\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k-\ell| + \frac{n-n_0+1}{n+1}\,\varepsilon$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k-\ell|}_{R_n} + \varepsilon$$

Ĉ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$

il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_1 \quad R_n \leqslant \varepsilon$

Donc $n \geqslant \text{Max}(n_0, n_1)$, $|v_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$

Ainsi $\lim v = \ell$

Récip : faux ex $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Mq $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \qquad v_n = \frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}$

càd Mq $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0\ v_n \geqslant M$

Soit $M \in \mathbb{R}$

Comme $\lim u = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant M$

Soit $n \geqslant n_0$

$$v_n = \frac{u_0+u_1+\dots+u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{u_{n_0}+\dots+u_n}{n+1}$$

$$v_n \geqslant \underbrace{\frac{u_0+\dots+u_{n_0-1}}{n+1} + M\underbrace{\frac{n-n_0+1}{n+1}}_{\to 1}}_{w_n}$$

$\lim w_n = M$

donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_1 \quad w_n \geqslant M-1$

Ainsi $\forall n \geqslant \text{Max}(n_0, n_1) \qquad v_n \geqslant M-1$

Donc $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_2 \quad v_n \geqslant M-1$

D'où $\lim v = +\infty$

Rq : $\forall M \in \mathbb{R}, \underbrace{\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad u_n \geq M}_{P(M)}$

On a montré $\forall M \in \mathbb{R} \quad P(M-1)$

Comme $\{M-1, M \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

donc $\forall M \in \mathbb{R} \quad P(M)$

3) Soit v une suite str positive ayant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Mq $\sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

$= (v_1 v_2 \dots v_n)^{\frac{1}{n}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(\sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n}\right) = \frac{1}{n} \ln(v_1 v_2 \dots v_n)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(v_k)$$

Or $v_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$

. Si $l = +\infty$ alors $\ln(v_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

. Si $l \in \mathbb{R}^+$ alors $\ln(v_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ln(l)$

. Si $l = 0$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \ln(u_k) = -\infty$

D'après les questions précédentes

$$\lim \ln\left(\sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } l = +\infty \\ -\infty & \text{si } l = 0 \\ \ln(l) & \text{si } l = -\infty \end{cases}$$

$$\lim \sqrt[n]{v_1 v_2 \dots v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } l = +\infty \\ 0 & \text{si } l = 0 \\ l & \text{si } l \in \mathbb{R}^{*+} \end{cases}$$

$$= l$$

4) Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$

Mq $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

D'après 1, comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \ell$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} (u_{n+1} - u_0) = \ell$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_0}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} = \ell$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$

5) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ tq $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Mq $\sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

D'après 3 appliquée à $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{v_{k+1}}{v_k}} = \ell$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{v_{n+1}}{v_1}} = \ell$$

càd $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_1}\right)\right) = \ell$

càd $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1}) - \frac{1}{n} \ln(v_1)\right) = \ell$

càd $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1})\right)}{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_1)\right)} = \ell$

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_1)\right) = 1$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1})\right) = \ell$

$$\exp\left(\frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1})\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(v_{n+1}) + \frac{1}{n+1} \ln(v_{n+1}) - \frac{1}{n} \ln(v_{n+1})\right)$$

$$= \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} \ln(v_{n+1})}_{\ln(\ell)} \times \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1}\right) \longrightarrow \ell \text{ disjonction de cas comme précédement}$$

Rappel :

Soit $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

u diverge

Verifions qu'elle cv en moyenne

. Si n est impair $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$

. Si n est pair $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}$

Si l'on pose $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$

On a : $\begin{cases} v_{2n} \longrightarrow 0 \\ v_{2n+1} \longrightarrow 0 \end{cases}$

donc $\lim v = 0$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone et $\underbrace{\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n+1}}_{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Mq $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

perdu car on aboutira

Supp $v \searrow$

Mq v minorée et donc d'après le théorème de la limite monotone, elle cv.

Mq ℓ est un minorant de v càd Mq $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n \geq \ell$

Mq $w \searrow$

Soit $n\in\mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n+v_{n+1}}{n+1} - \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}$$

$$= \frac{(v_1+v_2+\ldots+v_n+v_{n+1})\,n - (v_1+v_2+\ldots+v_n)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-(v_1+v_2+\ldots+v_n)+n v_{n+1}}{n(n+1)} \;)>0$$

Comme v est minorée, elle possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

D'après 1 et 2, w la moyenne des termes de v a une limite finie $\ell' \in \mathbb{R}$

Or w tend aussi vers ℓ d'après l'unicité de la limite $\ell' = \ell$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$