DM 04 - Correction

Exercice 1 : Couleur du β-carotène

1) Une onde du type $\Psi(x,t) = \varphi(x)\phi(t)$ est une onde stationnaire, comme rencontré pour une corde fixée à ces deux extrémités.

2) Pour une corde, on a : $y(0,t)=0$, $y(L,t)=0$. Pour une particule décrite par une fonction d'onde dans un puits de potentiel, on a : $\Psi(0,t)=0$, $\Psi(L,t)=0$. On a bien une similitude de ces deux phénomènes ondulatoires. Par analogie, la longueur d'onde sera alors :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.}$$

3) On rappelle la relation de de Broglie :

$$\boxed{\lambda = h/p.}$$

4) On considère l'énergie d'un électron

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m},$$

l'énergie potentielle étant nulle dans le puits. On en déduit alors que :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\lambda^2 \cdot m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2,\ n \in \mathbb{N}.}$$

5) On calcule E_{11} et E_{12} :

$$\boxed{\begin{aligned} E_{11} &= 2,18 \cdot 10^{-18}\,J = 13,6\ eV \\ E_{12} &= 2,60 \cdot 10^{-18}\,J = 16,2\ eV \end{aligned}}$$

6) Lors de la transition d'un état à l'autre, la molécule émet ou absorbe un ~~photon~~ d'énergie $E_{h\nu}$:

$$\boxed{E_{h\nu} = E_{12} - E_{11} = 4,15 \cdot 10^{-19}\,J = 2,59\ eV}$$

On en déduit sa longueur d'onde :

$$E_{h\nu} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \boxed{\lambda = \frac{hc}{E_{h\nu}} = 480\ nm}$$

7) Cette longueur d'onde correspond à une couleur bleu-violet, absorbée. Par conséquent, les aliments contenant beaucoup de β-carotène absorbent cette couleur, il apparaissent alors orange.

8) On remarque que la molécule possède 11 doublets qui peuvent être délocalisés sur toute la molécule. Ainsi, dans son état fondamental, la molécule voit ses niveaux électroniques de 1 à 11 occupés, le 12 étant le premier vide. Ainsi, le photon capable de produire une transition électronique en

ayant la plus basse énergie possible est celui ayant une énergie $E_{R_Y} = E_{12} - E_{11}$.
Il est donc pertinent de considérer cette transition.

Exercice 2 : Synthèse du dihydrogène

1) On propose les deux demi équations suivantes :

$$CH_4 + H_2O = CO + 6H^+ + 6e^- \quad (\times 1)$$

et

$$H_2 = 2H^+ + 2e^- \quad (\times 3)$$

2) Par définition :

$$\boxed{K^0 = \prod_i a_i^{\nu_i} = \prod_i \left(\frac{P_i}{P^0}\right)^{\nu_i} = \frac{P_{CO,eq} \cdot P_{H_2eq}^3}{P_{CH_4eq} \, P_{H_2Oeq}} \, \frac{1}{P^{0^2}}}.$$

3) On a, à tout instant, la relation :

$$Qr = \frac{P_{CO} P_{H_2}^3}{P_{CH_4} P_{H_2O}} \cdot \frac{1}{P^{0^2}} = \frac{x_{CO} \, x_{H_2}^3}{x_{CH_4} \, x_{H_2O}} \cdot \frac{P_{tot}^2}{P^{0^2}}$$

d'où

$$\boxed{Qr = \frac{n_{CO} \cdot n_{H_2}^3}{n_{CH_4} \cdot n_{H_2O}} \cdot \frac{P_{tot}^2}{n_{tot}^2 \cdot P^{0^2}}}$$

avec les données, on obtient $\boxed{Qr_1 = 1,6.}$

4) On remarque que $Qr < K^0$, le système n'est pas à l'équilibre, donc

5) une évolution se produira dans le sens ①, le sens direct.

6) Dans ce nouvel état,
→ $Q_r = 0$ (absence de produits),
→ on a une évolution dans le sens ①,
et on dresse le tableau d'avancement,

	$CH_4(g)$ +	$H_2O(g)$ =	$CO(g)$ +	$3H_2(g)$	n_{tot}
EI	10	10	0	0	20
EF	$10-\xi_F$	$10-\xi_F$	ξ_F	$3\xi_F$	$20+2\xi_F$

en mol. A l'état final, état d'équilibre, on a :

$$K^0 = \frac{n_{CO\,eq} \cdot n_{H_2\,eq}^3}{n_{CH_4\,eq} \cdot n_{H_2O\,eq}} \left(\frac{P_{tot}}{n_{tot\,eq}\,P^0}\right)^2$$

$$= \frac{\xi_F\,(3\xi_F)^3}{(10-\xi_F)^2(20+2\xi_F)^2}\left(\frac{10}{1}\right).$$

Devant l'impossibilité de faire des hypothèses simplificatrices, on choisit une approche numérique :

$$\boxed{\xi_F = 3{,}6 \text{ mol}}$$

On détermine alors la composition de l'état final :

$n_{CH_4,F} = n_{H_2O,F} = 10 - \xi_F = 6{,}4$ mol

$n_{CO,F} = \xi_F = 3{,}6$ mol

$n_{H_2,F} = 3\xi_F = 10{,}8$ mol.

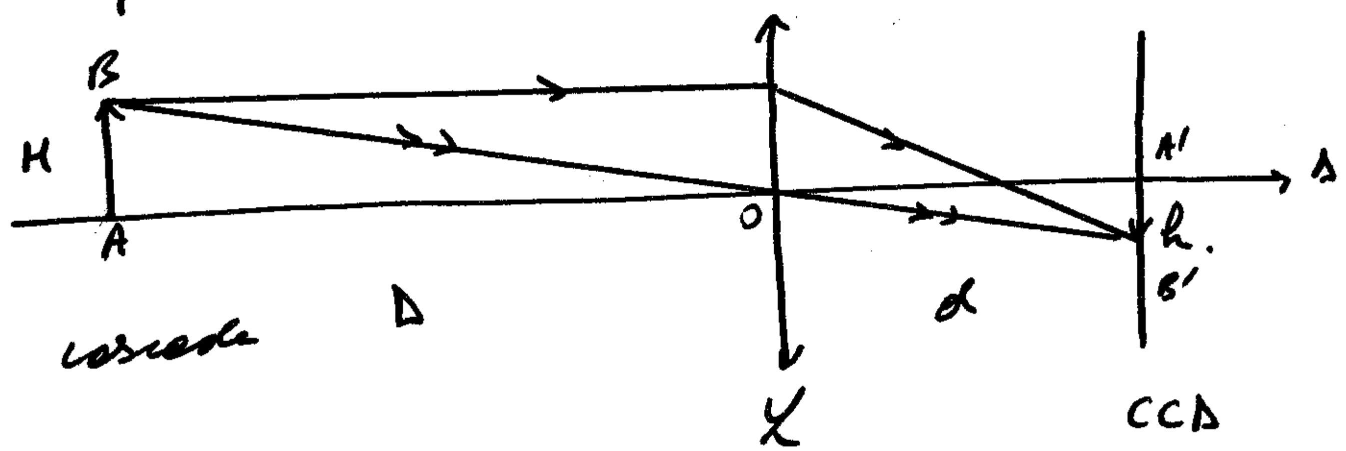
<u>Note</u>, remarquons qu'une identité

remarquable permet de résoudre l'équation d'ordre 4 directement.

Exercice 3 : Hauteur d'une chute d'eau

On modélise la chute d'eau par un objet de hauteur H, vu à travers une lentille convergente (objectif) et imagée sur un écran (CCD). L'écran a une hauteur de 14,9 mm, et l'image a une hauteur notée h.

On représente un appareil photo simplifié



La distance entre l'objet et l'appareil est notée D, la distance entre l'objectif et le CCD d.

1) La photo mesure, sur le papier, 12 x 8,1 cm.
2) La chute d'eau mesure, sur le papier $h' = 5,3$ cm.
3) Le CCD mesurant 22,3 x 14,9 mm, il y a un facteur 5,4 entre le papier et le CCD,

on en déduit que la hauteur de la chute sur le CCD est alors :

$$\boxed{h = \frac{h'}{5,4} = 9,8\ mm}.$$

4) De la vue satellite, on peut déduire que la distance entre l'observateur est

$$\boxed{D = \frac{200 \times 10,5}{1,6} \simeq 1300\ m.}$$

5) Cette distance étant "grande", il est possible (raisonnable) de considérer que l'appareil observe un objet à l'infini.

Dans ce cas, $\boxed{d \simeq f' = 135\ mm}$

6) Les triangles ABO et A'B'O sont semblables, et le théorème de Thalès donne alors :

$$\frac{h'}{H} = \frac{f'}{D},$$

$$\boxed{H = h' \cdot \frac{D}{f'} \simeq 95\ m}$$

Contrôle du résultat : Les arbres observés en altitude, sur les bords de la cascade sont probablement des mélèzes. Une recherche rapide nous apprend qu'un tel arbre mesure entre 30 et 40 m de haut. La cascade est environ trois fois plus grande que les arbres, l'ordre de grandeur obtenu est bon.