TD 10 : Cinématique du point

1 Interpellation pour vitesse excessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ au bout de $10\,\mathrm{s}$.

1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?

2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?

3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

2 Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il ressent une accélération $a = g_0(R/r)^2$ où $R = 6400\,\mathrm{km}$ est le rayon de la Terre, $g_0 = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la terre sur elle-même.

1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis la vitesse angulaire Ω.

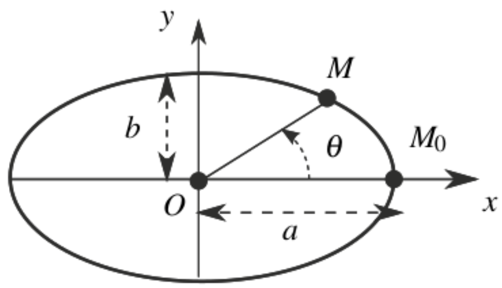
2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

3. Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.

3 Mouvement sur une ellipse

Un point M se déplace sur une ellipse d'équation cartésienne

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ .$$



On note θ l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Ox). Les coordonnées de M peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \alpha\cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) & = & \beta\sin(\omega t + \psi) \end{array}\right. ,$$

où l'on suppose que ω est une constante.

1. À $t = 0$, le mobile est en M_0. Déterminer α, φ et ψ.

2. Des autres données, déduire β.

3. Déterminer les composantes de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$.

4. Montrer que l'accélération est de la forme $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. Commenter.

4 Mouvement hélicoïdal

Un point matériel se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = ht \end{cases}$$

avec R, h et ω sont des constantes.

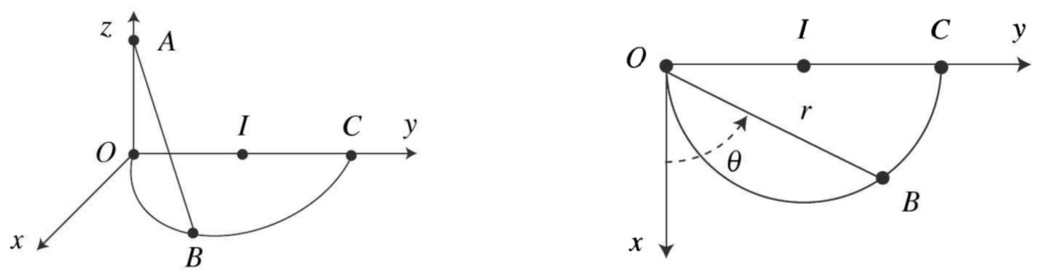
1. Donner l'expression de la vitesse.

2. En déduire que le module de la vitesse est constant.

3. Exprimer l'accélération.

5 Mouvement de l'extrémité d'une barre (ENAC)

Dans le référentiel R de repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ défini sur les figures ci-dessous, une barre rectiligne AB de longueur $2b$ se déplace de sorte que :
- son extrémité A se trouve sur le demi-axe positif (Oz) ;
- son extrémité B décrit le demi-cercle du plan (xOy) de centre $I(0, b, 0)$ et de rayon b, à la vitesse angulaire ω constante et positive. À l'instant $t = 0$, B se trouve en O.



1. Déterminer la durée Δt du mouvement.

2. On note φ l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$, déterminer une relation simple entre φ et θ.

3. Établir les expressions des coordonnées polaires r et θ de B au cours du temps t (figure de droite).

4. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ en fonction de ω et de t.

5. Décrire le mouvement de la barre entre l'instant initial et l'instant final.

6. Calculer les coordonnées cartésiennes X, Y et Z du milieu J de la barre.

7. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'accélération $\overrightarrow{a}$ de J, ainsi que leurs normes.

6 Course de voitures radio-commandées

Deux modèles réduits de voitures radio-commandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de $4{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, le second de $5{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$: cependant, l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer $1{,}0\,\mathrm{s}$ avant le second.

1. Déterminer le temps nécessaire au deuxième véhicule pour rattraper l'autre.

2. Les deux modèles réduits participent à des courses de $100\,\mathrm{m}$ et $200\,\mathrm{m}$. Est-il possible que le perdant du $100\,\mathrm{m}$ prenne sa revanche au $200\,\mathrm{m}$.

3. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.