devoir à rendre

Problème 1 :

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience.
Pour tout k non nul, on note B_k l'évènement "la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche".

I. Étude d'un cas particulier :
On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
   On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
   On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales
5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{X_n - 1}{n}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n.
   (b) Soit $x \in [0, 1]$.
   Prouver que, pour tout entier n, on a $P(Y_n \leq x) = \dfrac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor . \rfloor$ la partie entière.
   (c) Pour tout réel x, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x)$.

III. Retour au cas général :

1. Déterminer la probabilité des évènements B_1 et B_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\, P(X_{n-1} = k) = (N + n - 1) P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![N_1, N_1 + n - 1]\!]$.
   Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$
   (c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n.

Problème 2 :

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest.
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...
Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ \vdots \\ P(X_n=N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0,N]\!], \quad Y_{n,k} = P(X_n = k).$$

I. Matrice de transition

1. On suppose que $N = 2$.
   (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Une récurrence n'est pas nécessaire
   (b) La matrice A_2 est-elle semblable à une matrice diagonale ?

Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

   Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$. *Une récurrence n'est pas nécessaire*

3. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$, le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$.
4. Prouver que, dans le cas général, le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
5. En déduire que le noyau de $A - I_{N+1}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?
2. En déduire que $E(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N} E(X_n)$.
   On pourra utiliser le système complet $("X_n = k")_{0 \leq k \leq N}$
3. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de $E(X_0)$.
4. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question au noyau de $A - I_{N+1}$ que l'on notera E_1.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$.
   Prouver que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.
2. En déduire la dimension de E_1.
3. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.
4. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.
   On donnera son expression.
5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :
$$X_\infty(\Omega) = [\![0,N]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,N]\!],\ P(X_\infty = k) = \pi_k.$$
   Quelle est la loi suivie par X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.
6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
   Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.