Chapitre 27 : Probabilités

I - Expériences aléatoires et univers

Objectif : décrire une expérience aléatoire càd dont l'issue n'est pas connue

Ex : lancer de dés, pile ou face

Le résultat de l'expérience aléatoire n'est pas connue mais on connaît l'ens des issues possibles.

L'ens de ces issues est appelé l'univers et noté Ω

Ex : Pile ou face

$\Omega = \{P, F\}$

$\Omega = \{1, 0\}$

Ex : Lancer de dés avec gain de $\begin{cases} 1 & \text{si le résultat est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Omega = [\![1, 6]\!]$

$\Omega = \{P, I\}$

On appelle événement toute partie de Ω

$\emptyset$ est appelé l'événement impossible

Ω est appelé l'événement certain

Soit A et B deux événements

$\bar{A}$ est appelé l'événement contraire

$A \cup B$ est appelé l'événement A ou B

$A \cap B$ est appelé l'événement A et B

Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les événements A et B sont incompatibles

L'inclusion $A \subset B$ se lit ⚠ A implique B Pas de cause à effet

Si y A, y a B

On dit $(A_i)_{i \in [\![1, N]\!]}$ est un système complet d'événements lorsque :

(= SCE)

. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$

. $\forall (i,j) \in [\![1 ; N]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

On le note :

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i$$

↳ union carrée → disjoint

⚠ Mettre flèche pour préciser unions disjoints

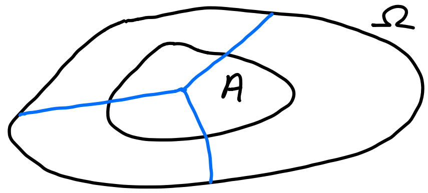
⚠ $\sqcup$ Hors prog

Il s'agit simplement d'une partition

<u>Ex:</u> $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système d'événements

Si $(A_i)_{i \in [\![1, N]\!]}$ est un sce
alors pour tout événement A

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{N} (A \cap A_i)$$



Dem :

$$A = A \cap \Omega$$
$$= A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \right)$$
$$= \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N}}_{\text{union disjointe}} (A \cap A_i)$$

II - Espaces probabilisés finis

Ω est un ens finis

On appelle **probabilité** sur Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ tq :

. $P(\Omega) = 1$

. $\forall (A, B) \in \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{partie de } \Omega}{}^2, \; A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Soit P une proba sur Ω

On a : ① . $P(\underbrace{\emptyset}_{\text{évén impossible}}) = 0$

② . $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

③ . $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

④ . $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ tq :

$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dem :

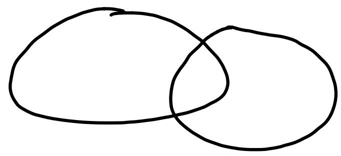
② $A \cap \bar{A} = \emptyset$

donc $\underbrace{P(A \cup \bar{A})}_{\substack{P(\Omega) \\ \shortparallel \\ 1}} = P(A) + P(\bar{A})$

En particulier ①

③ Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$

$$P(A \cup B) = P\Big((A \cap \bar{B}) \underset{\text{disjointe}}{\cup} \big((A \cup B) \overset{\text{disjointe}}{\cup} (B \cup \bar{A})\big)\Big)$$



$$= P(A \cap \bar{B}) + P\big((A \cup B) \cup (B \cup \bar{A})\big)$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(A \cup B) + P(B \cup \bar{A})$$

Or $A = (A \cap \bar{B}) \underset{\text{disjointe}}{\cup} (A \cap B)$

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

De même :

$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$

D'où : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

④ Récurrence

Si $(A_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est un sce et si P est une proba sur Ω

Alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A\cap A_i)$

Dem :

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{N} (A\cap A_i)$$

On appelle espace probabilisé tout couple (Ω, P) où P est une proba sur Ω

Soit (Ω, P) un espace probabilisé

$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\quad P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ $\quad$ Dem avec prop ↑ et singleton

Donc P est entièrement déterminée par la connaissance des $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$

Réciproquement :

Si l'on se donne des réels positifs $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ tq $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$

alors : $\quad P' : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$A \longmapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Dem :

Mq P' est une proba sur Ω

P' est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$

car pour tout $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

* A est fini donc la somme est finie

* $\sum_{\omega\in A} p_\omega \geqslant 0$ comme somme de positifs

$$\sum_{\omega\in A} p_\omega + \underbrace{\sum_{\omega\in\overline{A}} p_\omega}_{\geqslant 0} = \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega}_{1}$$

donc $\sum_{w \in A} p_w \leq 1$

. $P(\Omega) = \sum_{w \in \Omega} p_w = 1$

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tq $A \cap B = \emptyset$

$$P'(A \cup B) \overset{def}{=} \sum_{w \in A \cup B} p_w$$

$$\overset{A \cap B = \emptyset}{=} \sum_{w \in A} p_w + \sum_{w \in B} p_w$$

$$= P'(A) + P'(B)$$

Soit Ω fini

On appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité tq :

$$\forall w \in \Omega, \ P(\{w\}) = \frac{1}{\# \Omega}$$

Dans ce cas, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \sum_{w \in A} \frac{1}{\# \Omega} = \frac{\# A}{\# \Omega}$

III- Probabilité conditionnelle

(Ω, P) désignera un espace probabilisé fini

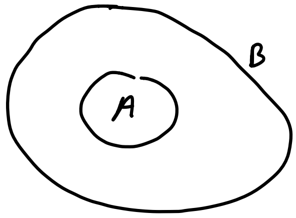
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tq $P(B) \neq 0$

On appelle probabilité de A sachant B et l'on note $P(A \backslash B)$ ou $P_B(A)$

le réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A) = P(A | B)$

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dem :



Supp $A \subset B$ $\quad B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

On a alors $B = A \underset{\text{disjointe}}{\cup} (B \cap \bar{A})$

donc $P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0} \geq P(A)$

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tq $P(B) \neq 0$

$$\begin{aligned} P_B : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto P_B(A) \end{aligned}$$ est une proba sur Ω

Dem :

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)^{\geq 0}}{P(B)_{\geq 0}} \geq 0$$

De plus $A \cap B \subset B$

donc $P(A \cap B) \leq P(B)$

vient de la prop préc

donc P_B est à valeurs dans $[0,1]$

On a : $P_B(\Omega) = P(\Omega \mid B)$

$$= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)}$$

$B \subset \Omega$
donc $B \cap \Omega = B$

$$= 1$$

Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tq $A_1 \cap A_2 \neq 0$

Mq $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$

Par def :

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2))}{P(B)}$$

Or $B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$

disjointe car $A_1 \cap A_2$

Donc, comme P est une proba, $P\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$

En divisant par $P(B) \neq 0$, on a :

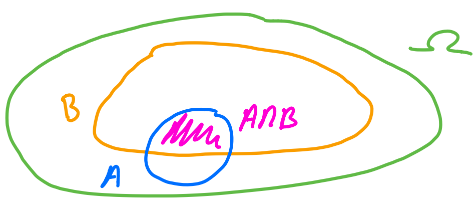
$$P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

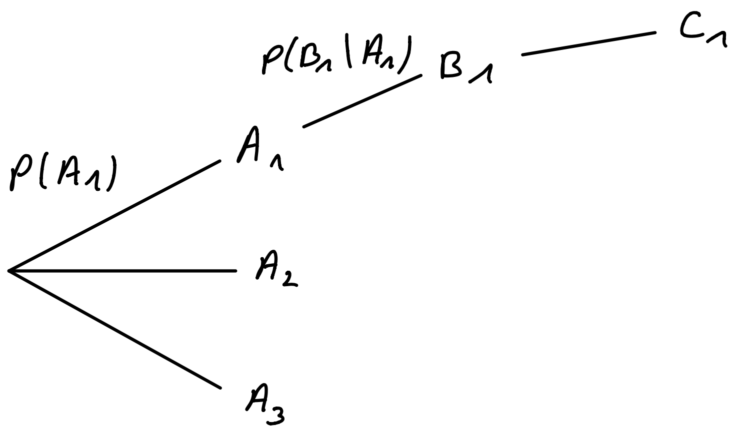
donc P_B est une proba.

Rq :

Si P est uniforme sur Ω

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\# B}$$





$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)P(B_1 \mid A_1)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C \mid A \cap B)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)$$
$$\times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$
$$\vdots$$
$$\times P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Ex:

$P(R \equiv 0 [3] \mid R \equiv 0 [2])$

$= \dfrac{P(R=6)}{P(R \equiv 0 [2])}$

$= \dfrac{P(R=6)}{P(R = \{2,4,6\})}$

$= \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{3}$

Formule des proba composées

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ tq $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= P(A_1) \times \prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

Dem:

$$P(A_1) \times \prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$= P(A_1) \times \prod_{i=2}^{n} \frac{P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right)}{P\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)}$$

télescopage

$$= P(A_1) \times \frac{P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)}{P(A_1)}$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Rq :

Pour tout $i \in [\![2 ; n]\!]$

$$\underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{\text{de proba non nulle}} \subset \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

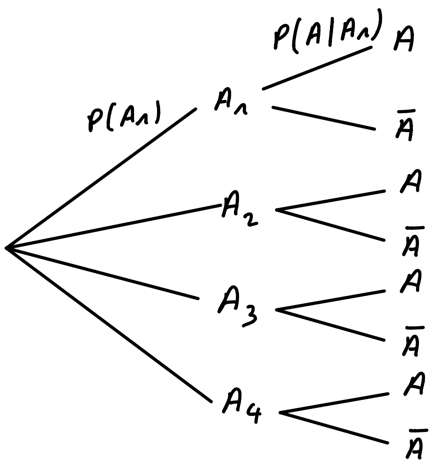
donc de proba non nulle

Formule des proba totales

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un SCE tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $P(A_i) \neq 0$

pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) \times P(A \mid A_i)$$



Dem :

On a : $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$

$$= \sum_{i \in I} P(A_i) \times P(A \mid A_i)$$

Formule de Bayes

Soit A et B deux événements

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B)$$

Dem:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Ex:

malade

$$P(M | \text{Positif}) = \frac{P(M)}{P(\text{Positive})} \underbrace{P(\text{Positive} | M)}_{\text{fiabilité}}$$

IV - Indépendance

Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque :

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

Rq :

Si $P(B) \neq 0$ alors A et B ind $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

Ex :

Lancers de deux dés

Sans ordre	Avec ordre
$\Omega = \{ \{i,j\} , (i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \}$	$\Omega' = \{ (i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \} = [\![1,6]\!]^2$
$\# \Omega = 1 + 2 + \dots + 6 = \frac{6\times 7}{2} = 21$	$\# \Omega' = 36$

P définie par

$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2$

$P(\{i,j\}) = \cancel{\frac{1}{21}}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } i=j \\ \frac{1}{18} & \text{sinon} \end{cases}$$

P' est définie par:

$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^n : P'((i,j)) = \frac{1}{36}$

Rq: $6 \times \frac{1}{36} + \frac{15}{18} = \frac{6+30}{36} = 1$

Prob d'avoir un 4 et un 2

$P(A)$

$A = \{2,4\}$

$P(A) = \frac{1}{18}$

$A = \{(2,4),(4,2)\}$

$P'(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

B: "avoir un double"

$B = \{\{i,i\}, i \in [\![1,6]\!]\}$

$P(B) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$P(A) = \sum_{\{i,j\} \in A} P((i,j))$

$B = \{(i,i), i \in [\![1,6]\!]\}$

$P'(B) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$P'(A) = \sum_{(i,j) \in A} P((i,j))$

Ex : 2 dés

On s'intéresse à la somme

$\Omega'' = [\![2, 12]\!]$

$P''(\{i\}) \quad i \in [\![2, 12]\!]$

$P''(\{2\}) = \frac{1}{36} \qquad P''(\{3\}) = \frac{1}{18} \qquad P''(\{4\}) = \frac{3}{36}$

$$P''(\{i\}) = P'\left(\{(k, \ell) \in [\![1, 6]\!]^2 \text{ tq } k + \ell = i\}\right)$$

$$= \frac{\#\{(k, \ell) \in [\![1, 6]\!]^2 \text{ tq } k + \ell = i\}}{36}$$

$$\{(k, \ell) \in [\![1, 6]\!]^2 : k + \ell = i\} = \left\{(k, i-k) \text{ avec } \begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ 1 \leq i-k \leq 6 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{(k, i-k) \text{ avec } \begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ i-6 \leq k \leq i-1 \end{cases}\right\}$$

$$= \{(k, i-k), k \in [\![\mathrm{Max}(1, i-6) ; \mathrm{Min}(6, i-1)]\!]\}$$

$$P''(\{i\}) = \frac{\mathrm{Min}(6, i-1) - \mathrm{Max}(1, i-6) + 1}{36}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i-1-1+1}{36} & \text{si } i \leq 7 \\[2ex] \dfrac{6-(i-6)+1}{36} & i \geq 7 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{i-1}{36} & i \leq 7 \\[2ex] \dfrac{13-i}{36} & i \geq 7 \end{cases}$$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\boxed{\text{on :}}$

$$P''(\{k\}) = P'(\underbrace{\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 : i+j=k\}}_{S_k})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P'(S_k \mid A_i)\, P(A_i) \quad \text{où } A_i = \text{"le 1}^{\text{er}}\text{ lancer vaut } i\text{"}$$

$$= \{(i,j),\ j \in [\![1,6]\!]\}$$

$$= \sum_{i=1}^{6} P'(B_{k-i})\, P'(A_i)$$

$B_j =$ "le 2ème lancer vaut j"

$$P''(\{k\}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}\, \delta_{1 \leq k-i \leq 6}\ \frac{1}{6}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ k-6 \leq i \leq k-1}}^{n} \frac{1}{36}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{si } k \leq 7 \\[2ex] \dfrac{13-k}{36} & k > 7 \end{cases}$$

Rq :

$(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$

A_i et B_j sont-ils indépendants ? OUI

$$P'(A_i \cap B_j) = P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P'(A_i) = \frac{1}{6} = P'(B_j)$$

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements

On dit qu'ils sont indépendants 2 à 2 lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$$

On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si pour toute sous-famille $(j_1, \ldots, j_p)$ de $(1, \ldots, n)$

$$P\left(\bigcap_{h=1}^{p} A_{j_h}\right) = \prod_{k=1}^{p} P(A_{j_k})$$

Ex :

A, B, C sont mutuellement ind

$P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$P(A \cap C) = P(A) P(C)$

$P(B \cap C) = P(B) P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$

A, B, C, D mutuellement ind ssi :

$P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$P(B \cap C) =$

$P(C \cap D) =$

$P(D \cap A) =$

$P(A \cap B \cap C) =$

$P(A \cap B \cap D) =$

$P(A \cap C \cap D) =$

$P(B \cap C \cap D) =$

$P(A \cap B \cap C \cap D) =$

A compléter

$\rightarrow \binom{n}{2}$ test pour les sous-familles à 2 éléments

$\binom{n}{3}$ " " " 3 "

En tout $\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n - (1+n)$

. L'indépendance mutuelle implique l'ind 2 à 2

. Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements $\begin{cases} \text{2 à 2 ind} \\ \text{mutuellement ind} \end{cases}$

Alors toute sous-famille l'est aussi

Ex: Lancers de 2 dés

$A =$ "le 1^{er} est pair"

$B =$ "le $2^{ème}$ est pair"

$C =$ "la somme est pair"

$\Omega = \{(P,P), (P,I), (I,P), (I,I)\}$

P proba uniforme

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ A et B ind

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$ A et C ind

$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$ B et C ind

A, B, C ind 2 à 2

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$

donc A, B, C pas mutuellement ind