# Pense-bête : analyse

21 mai 2013

## Sommaire


1 **Formulaire** . . . . . 1

2 **Séries numériques** . . . . . 2

3 **Espaces vectoriels normés** . . . . . 3

4 **Intégrales impropres** . . . . . 3

5 **Suites et séries d'intégrales** . . . . . 4

6 **Suites et séries de fonctions** . . . . . 4

7 **Intégrales à paramètre** . . . . . 5

8 **Séries entières** . . . . . 6

9 **Séries de Fourier** . . . . . 7

10 **Équations différentielles linéaires** . . . . . 8

11 **Calcul différentiel** . . . . . 9

12 **Équations différentielles ordinaires** . . . . . 10

13 **Lemmes et résultats divers** . . . . . 11


Dans toute la suite, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et sans plus de précisions, $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

## 1 Formulaire

❒ **Proposition** [*Relations usuelles*] – On a les relations de convexité suivantes :

| Formule | Domaine de validité |
|---|---|
| $\sin x \leqslant x$ | $\mathbf{R}_+$ |
| $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$ | $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ | $\mathbf{R}$ |
| $\ln x \leqslant x - 1$ | $\mathbf{R}_+^*$ |
| $\tan x \leqslant x$ | $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\left\lvert\sqrt{x} - \sqrt{y}\right\rvert \leqslant \sqrt{\lvert x - y\rvert}$ | $(\mathbf{R}_+)^2$ |
| $\lvert ab\rvert \leqslant \frac{1}{2}\left(\lvert a\rvert^2 + \lvert b\rvert^2\right)$ | $\mathbf{C}^2$ |

❒ **Proposition** [*Trigonométrie*] – Toutes les formules suivantes sont valables sur tout domaine où les fonctions en jeu sont définies, et on pose $u = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin a = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos a = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

❒ **Théorème** [*Formules de Taylor*] – Soit $f : [a,b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Alors on a les formules suivantes :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{Taylor reste intégral}$$

$$\left\lvert f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\rvert \leqslant \frac{\lvert b-a\rvert^n}{n!} \left\lVert f^{(n)} \right\rVert_\infty \qquad \text{Taylor-Lagrange}$$

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right) \qquad \text{Taylor-Young}$$

❐ **Proposition** [*Primitives usuelles*] – Voici quelques primitives usuelles dont l'usage est courant, en particulier chez nos amis de Centrale. $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

| Primitive | Domaine de validité |
|---|---|
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a-ib} = \ln\lvert x-a-ib\rvert + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)$ | $\mathbf{R}$, avec $(a,b)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ |
| $\displaystyle\int^x \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln\lvert\cos x\rvert$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$ | $I$ ne contenant pas $\pm a$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$ | $\mathbf{R}$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+a^2}} = \mathrm{Argsh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ | $\mathbf{R}$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$ | $]-\lvert a\rvert,\lvert a\rvert[$ |
| $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-a^2}} = \mathrm{Argch}\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert$ | $I$ ne contenant pas $\lvert a\rvert$ |

## 2 Séries numériques

❐ **Définition** [*Connvergences*] – Soit $(u_n)$ une suite réelle ou complexe.

(1) On dit que la série de terme général $(u_n)$ converge si la suite de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ admet une limite quand $n\to+\infty$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

(2) On dit que la série de terme général $(u_n)$ converge absolument si la série de terme général $(\lvert u_n\rvert)$ converge.

❐ **Théorème** [*Comparaison avec une intégrale*] – Soit $f:[1,+\infty]\longrightarrow\mathbf{R}_+$ continue par morceaux décroissante. Alors la série de terme général $(f(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

❐ **Théorème** [*Séries de Riemann*] – Soit $\alpha\in\mathbf{R}$, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

❐ **Théorème** [*Séries de Bertrand*] – Soient $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, la série de terme général

$$\left(\frac{1}{n^\alpha\ln(n)^\beta}\right)_{n\geqslant 2} \text{ converge si et seulement si } \alpha>1 \text{ ou } (\alpha=1 \text{ et } \beta>1).$$

❐ **Proposition** [*Règles de convergence*] – Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ des suites de *réels positifs*.

– Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$, alors la série de terme général $(u_n)$ converge si la série de terme général $(v_n)$ converge et la série de terme général $(v_n)$ diverge si la série de terme général $(u_n)$ diverge.

– Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries ont même nature (convergence ou divergence).

❐ **Théorème** [*Règle de d'Alembert*] – Soit $(u_n)$ une suite de réels *strictement positifs* tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in[0,+\infty].$$

– Si $\ell<1$, la série de terme général $(u_n)$ converge.

– Si $\ell>1$, $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et la série diverge grossièrement.

– Si $\ell=1$, on ne peut rien dire.

❐ **Théorème** [*Règle de Riemmann*] – Soit $(u_n)$ une suite de réels *positifs*.

(1) Si la suite $(nu_n)$ admet une limite non nulle en $+\infty$, alors la série de terme général $u_n$ diverge.

(2) Si il existe $\alpha>1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ admet une limite finie en $+\infty$, alors la série de terme général $(u_n)$ converge.

❐ **Théorème** [*Critère de Leibniz*] – Soit $(a_n)$ une suite de réels positifs qui décroît vers 0. Alors la série de terme général $((-1)^n a_n)$ converge, et pour tout $N\in\mathbf{N}$, le reste $R_N=\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n a_n$ est du signe de son premier terme et vérifie

$$0\leqslant(-1)^N R_N\leqslant a_N.$$

❐ **Théorème** [*Fubini et suites doubles*] – Soit $(u_{n,m})_{n,m\in\mathbf{N}^2}$ une suite double telle que :

(1) $\forall n\in\mathbf{N}$, la série de terme général $(\lvert u_{n,m}\rvert)_{m\in\mathbf{N}}$ converge ;

(2) la série de terme général $\left(\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\lvert u_{n,m}\rvert\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Alors toutes les séries qui suivent sont absolument convergentes et on peut intervertir les sommations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}.$$

❒ **Théorème** [*Produit de Cauchy de séries*] – Si les séries réelles ou complexes $(u_n)$ et $(v_n)$ sont absolument convergentes, alors la série produit de terme général $\left(c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$ est aussi absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right).$$

❒ **Proposition**HP [*Raabe-Duhamel*] – Soit $(a_n)$ une suite de réels strictement positifs. On suppose avoir le développement asymptotique suivant :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n$ est le terme général d'une série convergente. Alors il existe $c > 0$ tel que $a_n \underset{+\infty}{\sim} cn^{\alpha}$.
[*Indication : on veut montrer que la suite $(u_n = a_n n^{-\alpha})$ converge. Pour cela, passer au logarithme et étudier la série de terme général $(u_n - u_{n-1})$.*]

## 3 Espaces vectoriels normés

❒ **Définition** [*Norme*] – Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, une norme est une application $N : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

(1) (positivité) $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ ;

(2) (séparation) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ;

(3) (homogénéité) $\forall \alpha \in \mathbf{K},\ \forall x \in E,\ N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$ ;

(4) (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

❒ **Lemme** [*Construction de normes*] – Si $N$ est une norme et $f$ une application linéaire injective, alors $N \circ f$ est une norme.

❒ **Définition**HP [*Distance*] – On appelle distance sur un ensemble $X$ non-vide une application $d : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que :

(1) (positivité) $\forall x \in X,\ d(x,x) \geqslant 0$ ;

(2) (séparation) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ ;

(3) (symétrie) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ ;

(4) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

❒ **Théorème** [*Continuité des applications linéaires*] – Soit $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est continue sur $E$ ;

(2) $f$ est continue en $0_E$ ;

(3) $f$ est lipschitzienne ;

(4) $\exists C > 0$ telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E$.

❒ **Théorème**HP [*Point fixe contractant*] – Soit $(X, d)$ un espace métrique complet non-vide, $f : X \longrightarrow X$ contractante, c'est-à-dire $k$-lipschitzienne avec $k \in ]0, 1[$. Alors :

(1) il existe un unique $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = x_0$ ;

(2) $\forall a \in X$, la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $x_0$

[*Indication : montrer que $(u_n)$ est de Cauchy.*]

❒ **Proposition** [*Exponentielle*] – Soit $A$ une $\mathbf{K}$-algèbre de Banach. $\forall a \in A$, la série de terme général $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ converge absolument (d'Alembert) et on définit l'exponentielle par

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

On a aussi les propriétés suivantes :

(1) si $a$ et $b$ commutent, alors $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) = \exp(b)\exp(a)$ ;

(2) pour $a \in A$, $\varphi : t \in (\mathbf{K}, +) \longmapsto \exp(ta) \in (A^*, \times)$ est un morphisme de groupes $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall t \in \mathbf{K},\ \varphi'(t) = a\exp(ta) = \exp(ta)a$.

❒ **Théorème** [*Équivalence de normes en dimension finie*] – Toutes les normes d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

❒ **Définition** [*Connexité par arcs*] – Soit $(X, d)$ un espace métrique. On dit que $X$ est connexe par arcs si $\forall a, b \in X,\ \exists \varphi : [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

❒ **Proposition**HP [*Composantes connexes*] – Soit $(X, d)$ un espace métrique, on munit $X$ de la relation binaire $\forall (a,b) \in X^2,\ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists \varphi : [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que $\varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont les composantes connexes de $X$.

## 4 Intégrales impropres

❒ **Définition** [*Convergence, intégrabilité, semi-convergence*] – Soit $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux.

(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{\leftarrow b} f$ est convergente si l'expression $\int_a^x f$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $b$ par valeurs inférieures.

(2) On dit que $f$ est intégrable en $b$ si $\int_a^{\leftarrow b} |f|$ est convergente.

(3) On dit que $\displaystyle\int_a^{\leftarrow b} f$ est semi-convergente si l'intégrale converge et si $f$ n'est pas intégrable en $b$.

**❒ Théorème** [*Règle de Riemmann*] – Soit $f : [a,+\infty] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux *positive*.

(1) Si $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in ]0,+\infty]$ non-nulle, alors $f$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(2) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mu \in [0,+\infty[$ finie, alors $f$ est intégrable en $+\infty$.

**❒ Proposition** [*Convergence de l'intégrale et limite*] – Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. *Si* $f$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$, alors $\ell = 0$.

**❒ Théorème** [*Changement de variable*] – Un changement de variable $\mathscr{C}^1$-difféomorhpisme ne change ni la nature ni la valeur d'une intégrale impropre.

## 5 Suites et séries d'intégrales

**❒ Théorème** [*Convergence dominée*] – Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $(f_n)$ une suite d'applications de $I$ dans $\mathbf{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$. On suppose que :

(1) les $f_n$ et $g$ sont continues par morceaux sur $I$ ;

(2) $(f_n)$ converge simplement vers $g$ sur $I$ ;

(3) $\exists\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $I$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors $g$ et les $f_n$ sont intégrables sur $I$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I g(t)\mathrm{d}t.$$

**❒ Théorème** [*Sommation $L^1$*] – Soit $(u_n)$ une suite de fonctions de $I$ vers $\mathbf{C}$ continues par morceaux. On suppose que :

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux ;

(2) $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n$ est intégrable sur $I$ ;

(3) la série de terme général $\displaystyle\int_I |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Alors $g$ est intégrable et

$$\int_I g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

**❒ Théorème** [*Convergence dominée des sommes partielles*] – Soit $(u_n)$ une suite de fonctions de $I$ vers $\mathbf{C}$ continues par morceaux. On suppose que :

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux ;

(2) $\exists\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n$ est intégrable, $g$ est intégrable et

$$\int_I g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

## 6 Suites et séries de fonctions

**❒ Théorème** [*Approximations de fonctions*] – Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$.

(1) Toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

(2) Toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue est limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux.

**❒ Théorème** [*Approximation de Weierstrass*] – Toute fonction continue sur un segment de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

**❒ Théorème** [*Bernstein*] – Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$ on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

Alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

[*Indication : On utilisera l'uniforme continuité de $f$, la positivité de $x \in [0,1] \longmapsto \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ et le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$. Majorer les différents termes selon la position de $\left|x - \frac{k}{n}\right|$ par rapport $\delta > 0$ fixé.*]

❒ **Proposition** [*Séries uniformément convergentes*] – La série de fonctions de terme général $(u_n)$, applications de $A \subset \mathbf{R}$ dans $E$ complet est uniformément convergente sur $A$ si et seulement si

(1) la série converge simplement ;

(2) la suite de restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n\right)$ converge uniformément vers 0.

❒ **Théorème** [*Interversion des limites*] – Soit $(X, d)$ un espace métrique, $A \subset X$, $x_0 \in \overline{A}$, $(f_n)$ une suite d'applications de $A$ vers $E$, espace de Banach. On suppose que :

(1) $(f_n)$ converge uniformément sur $A$ vers $g : A \longrightarrow E$ ;

(2) $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell_n \in E$.

Alors la suite $(\ell_n)$ admet une limite finie $\lambda \in E$ et

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

❒ **Théorème** [*Continuité des limites uniformes*] – Une limite uniforme de fonctions continues est continue. C'est toujours vrai si la convergence est uniforme uniquement sur tout compact inclus dans l'ensemble de départ.

❒ **Théorème** [*Caractère $\mathscr{C}^1$ d'une limite uniforme*] – Soit $A$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $E$ un espace de Banach, $(f_n)$ une suite d'applications $\mathscr{C}^1$ de $A$ dans $E$. On suppose que :

(1) il y a convergence simple en au moins un point : $\exists a \in A / f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in E$.

(2) il y a convergence uniforme de $(f_n')$ vers $h : A \longrightarrow E$.

Alors $h$ est continue sur $A$, la suite $(f_n)$ converge simplement sur $A$ vers la fonction $\mathscr{C}^1$

$$g : x \in A \longmapsto \ell + \int_a^x h(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, la convergence de $(f_n)$ vers $g$ est uniforme sur tout compact de $A$.

❒ **Théorème** [*Caractère $\mathscr{C}^p$ d'une limite uniforme*] – Soit $A$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $(f_n)$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ de $A$ vers $E$, espace de Banach. On suppose que $\forall k \leqslant p$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $h_k : A \longrightarrow E$.

Alors $h_0 = \lim_{n \to +\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et $\forall x \in A$, $\forall k \leqslant p$,

$$h_0^{(k)}(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)}(x) = h_k(x).$$

❒ **Lemme** [*Convergence uniforme et adhérence*] – Soit $(f_n)$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $E$ espace vectoriel normé qui converge uniformément sur $A \subset \mathbf{R}$. Alors elle converge uniformément sur $\overline{A}$.

[*Indication : passer par le critère de Cauchy uniforme.*]

❒ **Proposition**HP [*Limite diagonale*] – Soit $(f_n)$ une suite d'applications de $A$ partie de $\mathbf{R}$ dans $E$ espace vectoriel normé, $(x_n) \in A^{\mathbf{N}}$. On suppose que $(f_n)$ converge uniformément sur $A$ vers $g$, que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$ et que les $(f_n)$ sont continus en $\alpha$. Alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(\alpha).$$

[*Indication : astuce taupinale avec $g(x_n)$.*]

# 7 Intégrales à paramètre

❒ **Proposition** [*Intégrale dépendant d'une borne*] – Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue et $a \in I$. Alors $F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.

❒ **Théorème** [*Continuité des intégrales à paramètre*] – Soit $(A, d)$ un espace métrique, $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que :

(1) $\forall x \in A$, $t \in I \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux ;

(2) $\forall t \in A$, $x \in A \longmapsto f(x, t)$ est continue ;

(3) $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \; |f(x, t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors $F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.

❒ **Théorème** [*Caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre*] – Soient $A$, $I$ deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que :

(1) $f$ est continue par morceaux par rapport $t$ et $F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t)\mathrm{d}t$ existe ;

(2) $f$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x} : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ ;

(3) pour $x \in A$, $t \in I \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux ;

(4) pour $t \in I$, $x \in A \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue ;

(5) pour tout compact $K \subset A$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, \; \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \varphi_K(t).$$

Alors $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ et $\forall x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

❒ **Théorème** [*Caractère $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre*] – Soient $A$, $I$ deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$. On suppose que :

(1) $\forall i \leqslant k$, $f$ admet une dérivée partielle $i$-ième par rapport à $x$ $\dfrac{\partial^i f}{\partial x} : A \times I \longrightarrow \mathbf{C}$ avec

  ($i$) pour $x \in A$ fixé, $t \in I \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux,

  ($ii$) pour $t \in I$, $x \in A \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x}(x,t)$ est continue ;

(2) pour tout compact $K \subset A$ et pour tout $i \leqslant k$ il existe $\varphi_{i,K} : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux intégrable telle que

$$\forall (x,t) \in K \times I,\ \left|\frac{\partial^i f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{i,K}(t).$$

Alors $F : x \in A \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et $\forall i \leqslant k$, $\forall x \in A$,

$$F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

❒ **Théorème** [*Fubini et intégrales doubles : cas de compacts*] – Soit $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbf{C}$ globalement continue. Alors

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_J \left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Le résultat est aussi valable dans le cas où $I \times J = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x \in [a,b] \text{ et } y \in [h(x), g(x)]\big\}$, $h, g$ continues et $g \geqslant h$.

❒ **Théorème** [*Fubini et intégrales doubles : cas général*] – Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : I \times J \longrightarrow \mathbf{C}$. On suppose que :

(1) $\displaystyle\int_I \left(\int_J |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ existe ;

(2) toutes les fonctions apparaissant dans les calculs sont continues par morceaux[1].

Alors

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_J \left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

1. Ceci implique en théorie d'étudier 6 fonctions différentes.

❒ **Proposition** [*Formule de Gauss*] – Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Alors $\Gamma$ est définie sur $\Lambda = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$, $\forall z \in \Lambda$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. On a de plus la formule de Gauss : $\forall z \in \Lambda$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

[*Indication : on applique le théorème de convergence dominée*[2] *à* $f_n(t) = t^{z-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ *pour* $t < n$ *et* 0 *sinon. On retrouve* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *grâce à la formule de Stirling.*]

## 8 Séries entières

❒ **Théorème** [*Règle de d'Alembert*] – Soit $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $\exists n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \geqslant n_0$, $a_n \neq 0$. On suppose que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty].$$

Alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\dfrac{1}{\ell}$.

❒ **Proposition** [*Séries entières usuelles*] – On a les développements en série entière suivants :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad z \in \mathbf{C},\ |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} z^n \qquad z \in \mathbf{C},\ |z| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots \qquad x \in \mathbf{R},\ |x| < 1$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots \qquad z \in \mathbf{C}$$

$$\mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \cdots \qquad z \in \mathbf{C}$$

$$\mathrm{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \cdots \qquad z \in \mathbf{C}$$

2. Voir page 4.

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \cdots \qquad z \in \mathbf{C}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \cdots \qquad z \in \mathbf{C}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad x \in \mathbf{R},\ |x| < 1$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad x \in \mathbf{R},\ |x| < 1$$

❒ **Proposition**HP [*Formule de Cauchy*] – On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors $\forall r \in ]-R, R[$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}.$$

[*Indication : intervetir somme et intégrale grâce au théorème de sommation $L^1$* [1].]

❒ **Lemme**HP [*Convergence radiale d'Abel*] – Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbf{C}^*$ telque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge. Alors le rayon de convergence de la série est plus grand que $|z_0|$ et la série converge uniformément sur $[0, z_0] = \{tz_0 \,|\, t \in [0,1]\}$.
[*Indication : utiliser la transformation d'Abel.*]

❒ **Définition**HP [*Caractère analytique*] – Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite analytique sur $\Omega$ si $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists \rho > 0$ tel que $D_f(x_0, \rho) \subset \Omega$ et $\exists (a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall z \in D_f(x_0, \rho)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - x_0)^n,$$

série entière de rayon de convergence au moins égal à $\rho$.

❒ **Théorème** [*Caractérisation des sommes de séries entières*] – Soit $R \in ]0, +\infty]$, une application $f : ]-R, R[ \longrightarrow \mathbf{C}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur à $R$ si et seulement si $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ et si $\forall x \in ]-R, R[$,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dans ce cas, $f$ est somme d'une unique série entière de rayon de convergence strictement positif, sa série de Taylor : $\forall x \in \mathbf{C}$ tel que $|x| < R$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

1. Voir page 4.

## 9 Séries de Fourier

❒ **Définition** [*Coefficients et série de Fourier*] – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ $2\pi$-périodique continue par morceaux.

(1) On pose pour $n \in \mathbf{Z}$ les coefficients de Fourier complexes de $f$ :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t.$$

(2) Les coefficients de Fourier sont les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définies par $a_0 = c_0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t.$$

(3) La $n$-ième somme partielle de la série de Fourier de $f$ est la fonction notée $S_n(f)$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \mathrm{e}^{ikx} = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx).$$

❒ **Théorème** [*Parseval et convergence quadratique*] – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux $2\pi$-périodique. Alors la série de terme général $\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et on a l'égalité de Parseval :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

De plus, si $f$ est partout continue, on a $S_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\|_2} f$.

❒ **Proposition** [*Parseval sesquilinéaire*] – Soit $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ $2\pi$-périodiques continues par morceaux. Alors la série de terme général $\left(\left|\overline{c_n(f)} c_n(g)\right| + \left|\overline{c_{-n}(f)} c_{-n}(g)\right|\right)$ converge et

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t.$$

[*Indication : dans le cas continu, cette formule découle de l'identité de polarisation associée au produit scalaire $f, g \in \mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{C}) \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f} g$.*]

❒ **Théorème** [*Convergence normale de Dirichlet*] – Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est $2\pi$-périodique, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et partout continue, alors la série de Fourier de $f$ converge normalement vers $f$ sur $\mathbf{R}$.

❒ **Théorème** [*Convergence simple de Dirichlet*] – Si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est $2\pi$-périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de $f$ converge simplement vers sur $\mathbf{R}$ vers la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

❒ **Définition** [*Fourier en période $T$*] – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ $T$-périodique continue par morceaux, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

(1) On pose pour $n \in \mathbf{Z}$ les coefficients de Fourier complexes de $f$ :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t.$$

(2) Les coefficients de Fourier sont les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par $a_0 = c_0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

(3) La $n$-ième somme partielle de la série de Fourier de $f$ est la fonction notée $S_n(f)$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{ik\omega x} = a_0(f) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x).$$

# 10 Équations différentielles linéaires

❒ **Définition** [*Équation résolue d'ordre 1*] – Soit $E$ un espace de Banach, $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $a : I \longrightarrow \mathscr{L}_c(E) : \forall t \in I$, $a(t)$ est un endormorphisme continu de $E$ et on suppose $a$ continue de $I$ dans $(\mathscr{L}_c(E), \|\!|\cdot|\!\|)$. On se donne aussi $b : I \longrightarrow E$ continue. On a alors l'équation différentielle résolue du premier ordre

$$x'(t) = a(t).x(t) + b(t) \quad \text{d'équation homogène associée} \quad x'(t) = a(t).x'(t)$$

❒ **Théorème** [*Solution générale de $X' = aX + b$*] – Si $a, b : I \longrightarrow \mathbf{K}$ sont continues, la solution général de l'équation différentielle $X' = aX + b$ est

$$X(t) = \left[C + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-A(s)\right) b(s)\mathrm{d}s\right] \exp(A(t)) \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s,\ t_0 \in I,\ C \in \mathbf{K}$$

❒ **Théorème** [*Cauchy pour les* EDL] – Soit $E$ un espace de Banach, $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $(t_0, x_0) \in I \times E$ et $(E) \quad X(t) = a(t).X(t) + b(t)$. Alors le problème de Cauchy $((E), (t_0, x_0))$ admet une unique solution $\varphi : I \longrightarrow E$ $\mathscr{C}^1$.

❒ **Lemme**[HP] [*Gronwall*] – Soit $I = [a, b[$ ou $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ fermé à gauche, $u, v : I \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continues positives et telles que $\forall t \in I$, $u(t) \leqslant C + \displaystyle\int_a^t u(s)v(s)\mathrm{d}s$. Alors $\forall t \in I$,

$$u(t) \leqslant C\exp\left(\int_a^t v(s)\mathrm{d}s\right).$$

[*Indication : on majore la quantité de droite, pour cela on pose pour $t \in I$*

$$\varphi(t) = \left(C + \int_a^t u(s)v(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_a^t v(s)\mathrm{d}s\right).$$

*On montre ensuite que $\varphi$ est décroissante par le calcul de $\varphi'$.*]

❒ **Proposition** [*Variation des deux constantes*] – Soient $a, b \in \mathbf{K}$, $(\varphi_1, \varphi_2)$ une base de solutions de l'équation différentielle $(e) : X''(t) = a'X(t) + bX$, $t \in I$. Pour résoudre $(E) : X''(t) = a'X(t) + bX + c(t)$ où $c : I \longrightarrow \mathbf{K}$, si $X \in \mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$ on pose $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbf{K}$ telles que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}}_{R(t)} \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

$\lambda$ et $\mu$ sont uniques et de classe $\mathscr{C}^1$ car $R(t)$ est inversible $\forall t \in I$. Alors $X$ est solution de $(E)$ si et seulement si

$$R(t)\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{c(t)\varphi_2(t)}{\det(R(t))} \\ \mu'(t) = \frac{c(t)\varphi_1(t)}{\det(R(t))} \end{cases}.$$

❒ **Théorème** [*Équations d'Euler*] – Soient $a_0, \ldots, a_r \in \mathbf{C}$, $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$, $b : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue et l'équation différentielle

$$(E_r) \quad x^r y^{(r)}(x) + a_{r-1}x^{r-1}y^{(r-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x).$$

On peut lui associer le polynôme caractéristique d'inconnue $\alpha$ :

$$(*) \quad \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1) + a_{r-1}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+2) + \cdots + a_1\alpha + a_0.$$

Si $(*)$ se scinde en $\displaystyle\prod_{j=1}^{N}(\alpha - \alpha_j)$ avec $\forall(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, $m_j \in \mathbf{N}^*$ et $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$, alors la famille des

$$\left(x \in I \longmapsto (\ln|x|)^k\, |x|^{\alpha_j}\right)_{k\in[\![0, m_j-1]\!],\ j\in[\![1,N]\!]}$$

est un système fondamental de solutions de $(E_r)$.

❐ **Proposition** [*Zéros isolés*] – Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ non nulle de classe $\mathscr{C}^2$ solution de $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, $a, b : I \longrightarrow K$ continues. Alors $\{t \in I \mid f(t) = 0\}$ est une partie discrète de $I$, c'est-à-dire que $\forall [a, b] \subset I$, $\{t \in [a, b] \mid f(t) = 0\}$ est fini.
[*Indication : démontrer la deuxième caractérisation en utilisant une suite de zéros distincts à laquelle on appliquera la propriété de Bolzanno-Weierstrass. $f$ et $f'$ ne peuvent s'annuler en même temps (Cauchy).*]

## 11 Calcul différentiel

❐ **Définition** [*Différentiabilité*] – Soient $E$, $F$ deux $\mathbf{K}$-espace de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow F$. $f$ est dite différentiable en $M_0 \in U$ si $\exists \varphi \in \mathscr{L}_c(E, F)$ telle que l'on ait le développement limité suivant pour $h$ voisin de $0_E$ :

$$f(M_0 + h) \underset{h \to 0_E}{=} f(M_0) + \varphi(h) + o\left(\|h\|_E\right).$$

On note alors $\varphi = (\mathrm{d}f)(M_0)$, et cette application est en fait unique.
❐ **Définition** [*Dérivées partielles*] – Soient $E$, $F$ deux $\mathbf{K}$-espace vectoriels normés de dimensions finies, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow F$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, la $j$-ième dérivée partielle de $f$ par rapport à $\mathscr{B}_E$ est l'application, lorsqu'elle est définie,

$$\partial_{j,\mathscr{B}_E} f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ M_0 & \longmapsto & \displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(M_0 + te_j) - f(M_0)}{t} \end{array}.$$

❐ **Théorème** [*Condition de différentiabilité*] – Soient $E$, $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow F$, $M_0 \in U$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On suppose que $f$ admet une dérivée partielle $\left(\partial_{j,\mathscr{B}_E} f\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ définies et continues au voisinage de $M_0$. Alors $f$ est différentiable et

$$(\mathrm{d}f)(M_0) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\partial_{j,\mathscr{B}_E} f\right)(e_j) \end{array}.$$

❐ **Proposition** [*Matrice jacobienne*] – Soient $E$, $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une $\mathbf{R}$-base de $E$, $\mathscr{B}_F = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de $F$, $U$ un ouvert de $E$, $M_0 \in U$, $f : U \longrightarrow F$ différentiable en $M_0$. Si on note $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les fonctions coordonnées de $f$ relativement à $\mathscr{B}_F$, alors l'application linéaire $(\mathrm{d}f)(M_0)$ peut être représentée par la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}((\mathrm{d}f)(M_0)) = \mathrm{Jac}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)(M_0) = \left(\left(\partial_{j,\mathscr{B}_E} f_i\right)(M_0)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}.$$

❐ **Théorème** [*Formule de la chaîne*] – Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{B}_E$ une base de $E$, $F$, $G$ des espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$, $f : U \longrightarrow F$, $g : V \longrightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$, $M_0 \in U$, $N_0 = f(M_0) \in V$. Si $f$ et $g$ sont respectivement différentiables en $M_0$ et $N_0$, alors $g \circ f$ a des dérivées partielles selon $\mathscr{B}_E$ en $M_0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(\partial_{i,\mathscr{B}_E} g \circ f\right)(M_0) = [(\mathrm{d}g)(N_0)]\left(\left(\partial_{i,\mathscr{B}_E} f\right)(M_0)\right).$$

❐ **Théorème** [*Schwarz*] – Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow E$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On suppose que $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 continue, c'est à dire que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\left(\partial_{i,\mathscr{B}_E}\left(\partial_{j,\mathscr{B}_E} f\right)\right) : U \longrightarrow E$ est définie et continue sur $U$. Alors $\forall M \in U$, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\left(\partial_{i,\mathscr{B}_E}\left(\partial_{j,\mathscr{B}_E} f\right)\right)(M) = \left(\partial_{j,\mathscr{B}_E}\left(\partial_{i,\mathscr{B}_E} f\right)\right)(M).$$

❐ **Théorème**HP [*Inversion locale*] – Soient $E$, $F$ deux espaces de Banach, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$, $A \in U$. On suppose que $(\mathrm{d}f)(A) \in \mathscr{L}_c(E, F)$ est inversible et bicontinue[1]. Alors il existe deux ouverts $\omega$ et $\omega'$ voisinages respectivement de $A$ et $f(A)$ tels que $f_{|\omega} : \omega \longrightarrow \omega'$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.
[*Indication : on peut réduire la problème en supposant $E = F = \mathbf{R}^n$, $A = 0$ et $(\mathrm{d}f)(A) = \mathrm{I}_n$ quitte à composer par $((\mathrm{d}f)(A))^{-1}$. Pour trouver un voisinage sur lequel $f$ est injective, on considère une boule dans laquelle la différentielle de $f$ ne s'éloigne pas trop de $\mathrm{I}_n$ puis on montrer que $h(t) = f(t) - t$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne en dérivant $\varphi(t) = f(ty + (1 - t)x)$.*]
❐ **Théorème** [*Inversion globale*] – Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $U$ un ouvert de $E$, $V$ un ouvert de $F$, $f : U \longrightarrow V$, $k \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$. $f$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $U$ sur $V$ si et seulement si :

(1) $f$ est $\mathscr{C}^k$ ;

(2) $\forall A \in U$, $\det(\mathrm{Jac}(f)(A))$ ne s'annule pas ;

(3) $f$ est bijective de $U$ dans $V$.

❐ **Proposition** [*Égalité de la moyenne*] – Soit $U$ un ouvert de $E$ espace vectoriel complet de dimension finie (ou Banach), $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $A, B \in U$ tels que $[AB] \in U$. Alors

$$f(B) = f(A) + \int_0^1 [(\mathrm{d}f)(tB + (1 - t)A)](B - A)\mathrm{d}t,$$

et si $E = \mathbf{R}^n$ alors

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tB + (1 - t)A)\mathrm{d}t.$$

1. Continue de réciproque continue

❒ **Définition** [*Gradient*] – Soit $E$ un espace euclidien, $U$ un ouvert de $E$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$. Si $f$ est différentiable en $M_0 \in U$, l'unique vecteur noté $\nabla f(M_0)$ tel que $\forall H \in E$ $(\mathrm{d}f)(M_0)(H) = (H|\nabla f(M_0))$ s'appelle gradient de $f$ en $M_0$.
❒ **Théorème** [*Inégalité des accroissements finis*] – Soit $U$ un ouvert de $E$ espace vectoriel normé de dimension finie (ou Banach), $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tous points $A, B \in U$ tels que $[AB] \in U$,

$$\|f(B) - f(A)\| \leqslant \|B - A\| \sup_{M \in [AB]} \|(\mathrm{d}f)(M)\|,$$

et si $E$ est euclidient et $F = \mathbf{R}$,

$$|f(B) - f(A)| \leqslant \|B - A\| \sup_{M \in [AB]} \|\nabla f(M)\|.$$

❒ **Définition** [*Hessienne*] – Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle matrice hessienne de $f$ en $A \in \mathbf{R}^n$ la matrice symétrique réelle

$$\mathscr{H}(f)(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}.$$

La forme quadratique hessienne de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associée à $\mathscr{H}(f)(A)$ est alors

$$\mathscr{H}(f)(A) : (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

❒ **Théorème** [*Taylor-Young à l'ordre 2*] – Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors $\forall A \in U$, $f$ admet le développement limité suivant pour $H$ voisin de 0 :

$$f(A + H) = f(A) + (\mathrm{d}f)(A)(H) \frac{1}{2} \mathscr{H}(f)(A)(H) + o\left(\|H\|^2\right).$$

❒ **Théorème**HP [*Extrema et hessienne*] – Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $A$ un point critique de $f$ ($(\mathrm{d}f)(A) = 0$) et $q = \mathscr{H}(f)(A)$ la forme quadratique hessienne de $f$ en $A$.

(1) Si $f$ présente un minimum (respectivement maximum) local en $A$, alors $q$ est positive (respectivement négative).

(2) Si $q$ est définie négative (respectivement positive), alors $f$ admet un maximum (respectivement minimum) local en $A$.

❒ **Théorème** [*Étude locale d'un point critique*] – Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $A \in U$, on pose les notations de Monge suivantes :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(A),\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(A),\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(1) Si $f$ présente un extremum local en $A$, alors $p = q = 0$ ;

(2) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 > 0$, alors $f$ présente en $A$ un extremum local strict :
 ($i$) minimum si $r \geqslant 0$ ou $r + t \geqslant 0$,
 ($ii$) maximum si $r \leqslant 0$ ou $r + t \leqslant 0$ ;

(3) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 < 0$, alors $f$ présente un col en $A$ : pour tout voisinage $V$ de $A$, il existe $M, N \in V$ tels que $f(M \leqslant f(A‘ \leqslant f(N)$ ;

(4) si $p = q = 0$ et $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

❒ **Proposition**HP [*Convexité et maximum*] – Soit $K$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ convexe, $f : K \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite convexe si $\forall t \in [0, 1]$, $\forall M, N \in K$, $f(tM + (1-t)N) \leqslant tf(M) + (1-t)f(N)$. Si de plus $K$ est compact et $f$ continue, le maximum de $f$ sur $K$ est atteint en un point de $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$, en un point $A$ tel que $K \setminus A$ reste convexe.

## 12 Équations différentielles ordinaires

❒ **Définition** [*Équation différentielle d'ordre 1*] – Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie ou un Banach, $U$ un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, $f : U \longrightarrow E$ continue. L'équation d'ordre 1 résolue associée à $f$ est

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t)).$$

Une solution de $(E)$ est un couple $(I, \varphi)$ où $I$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. La donnée d'une condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour $(E)$ constitue un problème de Cauchy.
❒ **Lemme** [*Prolongement en une borne*] – Soit $I = [a, b[$ ou $I = ]a, b[$, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b \in \mathbf{R}$, $(I, \varphi)$ une solution de $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$ où $f : U \subset \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$ continue. On suppose que $\varphi(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} \ell \in E$ avec $(b, l) \in U$. Alors si $J = I \cup \{b\}$ et $\psi$ définie par $\psi_{|I} = \varphi$ et $\psi(b) = \ell$, $(J, \psi)$ est une solution de $(E)$ qui prolonge strictement $(I, \varphi)$.
[*Indication : c'est le théorème du relèvement $\mathscr{C}^1$*]
❒ **Théorème** [*Cauchy-Lipschitz*] – Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $U$ un ouvert de $\mathbf{R} \times E$, $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$. Alors tout problème de Cauchy $((E), (t_0, x_0)$ où $(t_0, x_0) \in U$ admet une unique solution maximale $(I, \varphi)$. De plus, $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et tout autre solution du même problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.
❒ **Proposition**HP [*Solution maximale sur* $\mathbf{R}$] – Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : \mathbf{R} \times E \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ bornée. Alors toute solution de $(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$ est bornée sur $\mathbf{R}$.
[*Indication : Cauchy-Lipschitz s'applique, prendre une solution maximale définie sur un intervalle ouvert et supposer par l'absurde qu'une borne est finie. Utiliser le prolongement en une borne.*]
❒ **Proposition** [*Système autonome*] – Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ $\mathscr{C}^1$, $(E) \quad x'(t) = f(x(t))$ l'équation autonome associée à $f$.

(1) Pour toute fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}^n$ $\mathscr{C}^1$, $(I, \varphi)$ est solution (respectivement solution maximale) de $(E)$ si et seulement si $\forall a \in \mathbf{R}$, $(I-a, t \in I-a \longmapsto \varphi(t+a))$ est solution (respectivement solution maximale) de $(E)$.

(2) Une solution maximale de $(E)$ est soit injective soit définie sur $\mathbf{R}$ et périodique.

❒ **Proposition** [*Trajectoires*] – Soit $(E)$ $x'(t) = f(x(t))$ une équation autonome d'ordre 1 avec $f : U \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ $\mathscr{C}^1$ et $(I\varphi)$ une solution maximale de $(E)$. La trajectoire associée à la fonction $(I, \varphi)$ est le support de la courbe paramétrée $t \in I \longmapsto \varphi(t)$. De plus, deux trajectoires associées à des solutions maximales sont soit disjointes, soit confondues.

## 13 Lemmes et résultats divers

❒ **Lemme**EXO [*Césaro*] – Soit $(u_n)$ une suite d'un espace vectoriel normé $E$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

*[Indication : revenir à la définition de la limite.]*

❒ **Proposition** [*Dérivée d'une quantité bilinéaire*] – Soient $A$ une partie de $\mathbf{R}$, $E_1$, $E_2$, $F$ des espaces vectoriels normés, $f : A \longrightarrow E_1$, $g : A \longrightarrow E_2$ dérivables en $a$ et $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ bilinéaire continue. Alors $h : x \in A \longmapsto B(f(x), g(x))$ est dérivable en $a$ et

$$h'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

❒ **Proposition**EXO [*Suites sous-additives*] – Une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ est sous-additive si $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sous-additive, alors

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \inf_{p\geqslant 1} \frac{u_p}{p} \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}.$$

*[Indication : montrer que $\forall k > \ell$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{n} < k$.]*

❒ **Théorème**HP [*Sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$*] – Les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sont soit denses dans $\mathbf{R}$, soit de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$

*[Indication : si $G$ est le sous-groupe, introduire $\inf G \cap \mathbf{R}_+^*$ et discuter son appartenance à $G$.]*

❒ **Proposition**EXO [*Wallis*] – Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$. On a alors les propriétés suivantes :

(1) $\forall n \geqslant 1$, $(n+1)Wn+1 = nW_{n-1}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$ ;

(2) $W_n$ est décroissante positive ;

(3) $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

*[Indication : tout part d'une intégration par parties.]*

❒ **Proposition**EXO [*Polynômes de Tchebycheff*] – Pour $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme $T_n$ tel que $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. De plus, $T_n$ est de degré $n$, de coefficient dominant $2^{n-1}$, ses racines sont les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ et on a une expression de $T_n$ :

$$T_n = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p \binom{2p}{n} (1-X^2)^p X^{n-2p}.$$

❒ **Théorème**HP [*Baire*] – Soit $(\Theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses dans $\mathbf{R}$. Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Theta_n$ est dense dans $\mathbf{R}$.

*[Indication : utiliser le théorème des segments emboîtés.]*

❒ **Théorème**HP [*Borel-Lebesgue*] – Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $E$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement de $E$ par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Alors $E$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement si on peut lui appliquer le théorème de Bolzanno-Weierstrass ; c'est-à-dire si toute suite de $E$ admet une valeur d'adhérence.

❒ **Proposition** [*Série harmonique*] – On a le développement limité de la série harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ suivant, avec $\gamma$ la constante d'Euler :

$$H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

*[Indication : utiliser des suites adjacentes.]*

❒ **Proposition**EXO [*Ensemble des valeurs d'adhérences*] – L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est le fermé $\displaystyle\bigcap_{p\geqslant 0} \overline{\{u_n \,|\, n \geqslant p\}}$.

❒ **Proposition** [*Stirling*] – On a l'équivalent suivant :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

❒ **Définition**HP [*Module de continuité*] – Soit $f : I \longrightarrow E$ où $I$ est un intervalle non-vide de $\mathbf{R}$, $E$ un espace vectoriel normé. Pour $\delta \geqslant 0$ on pose

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|f(x) - f(y)\| \,\middle|\, (x, y) \in I^2,\ |x-y| \leqslant \delta\right\}.$$

Si $f$ est uniformément continue sur $I$, alors $\omega(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

❒ **Proposition** [*Moments*] – Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue vérifie $\forall n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est nulle.
*[Indication : Par linéarité pour toute fonction polynômiale. Conclure en construisant $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $Pf$ est de signe constant ou appliquer le théorème d'approximation de Weierstrass.]*
❒ **Théorème** [*Relèvement $\mathscr{C}^1$*] – Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbf{U}$[1] de classe $\mathscr{C}^1$. Alors il existe $\theta \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{R})$ telle que $\forall t \in I,\ f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$.
*[Indication : procéder par analyse et synthèse. Il existe aussi un théorème de relèvement continu mais plus difficile à démontrer.]*
❒ **Lemme** [*Riemann-Lebesgue*] – Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0.$$

*[Indication : suivre la méthode de construction de l'intégrale.]*
❒ **Théorème**EXO [*Critère de Weyl*] – On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de $[0, 1]$ est équirépartie si $\forall [a, b] \subset [0, 1]$, $\dfrac{1}{n}\operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid u_k \in [a, b]\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b - a$. Alors cette condition est équivalente au fait que $\forall p \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2ip\pi u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*[Indication : montrer d'abord $(u_n)$ est équirépartie si et seulement si pour toute fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

*Conclure en appliquant le théorème de Weirstrass trigonométrique.]*
❒ **Lemme**EXO [*Dini*] – Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, $(f_n)$, $g$ des applications de $X$ dans $E$ continues. On suppose que $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - g(x)\|_E \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant. Alors $(f_n)$ converge uniformément vers $g$ sur $X$.

Cette fiche comporte 106 entrées dont 52 théorèmes, 31 propositions, 15 définitions et 8 lemmes.

1. On rappelle que $\mathbf{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

# Index

Égalité de la moyenne, 9
Équation différentielle d'ordre 1, 10
Équation résolue d'ordre 1, 8
Équations d'Euler, 8
Équivalence de normes en dimension finie, 3
Étude locale d'un point critique, 10

Approximation de Weierstrass, 4
Approximations de fonctions, 4

(HP) Baire, 11
Bernstein, 4
(HP) Borel-Lebesgue, 11

(EXO) Césaro, 11
Caractérisation des sommes de séries entières, 7
Caractère $\mathscr{C}^1$ d'une limite uniforme, 5
Caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, 5
Caractère $\mathscr{C}^k$ des intégrales à paramètre, 6
Caractère $\mathscr{C}^p$ d'une limite uniforme, 5
(HP) Caractère analytique, 7
Cauchy pour les EDL, 8
Cauchy-Lipschitz, 10
Changement de variable, 4
Coefficients et série de Fourier, 7
Comparaison avec une intégrale, 2
(HP) Composantes connexes, 3
Condition de différentiabilité, 9
Connexité par arcs, 3
Connvergences, 2
Construction de normes, 3
Continuité des applications linéaires, 3
Continuité des intégrales à paramètre, 5
Continuité des limites uniformes, 5
Convergence de l'intégrale et limite, 4
Convergence dominée, 4
Convergence dominée des sommes partielles, 4
Convergence normale de Dirichlet, 8
(HP) Convergence radiale d'Abel, 7
Convergence simple de Dirichlet, 8
Convergence uniforme et adhérence, 5
Convergence, intégrabilité, semi-convergence, 3
(HP) Convexité et maximum, 10
Critère de Leibniz, 2
(EXO) Critère de Weyl, 12

Dérivée d'une quantité bilinéaire, 11
Dérivées partielles, 9
Différentiabilité, 9
(EXO) Dini, 12
(HP) Distance, 3

(EXO) Ensemble des valeurs d'adhérences, 11
Exponentielle, 3
(HP) Extrema et hessienne, 10

(HP) Formule de Cauchy, 7
Formule de Gauss, 6
Formule de la chaîne, 9
Formules de Taylor, 1
Fourier en période $T$, 8
Fubini et intégrales doubles : cas de compacts, 6
Fubini et intégrales doubles : cas général, 6
Fubini et suites doubles, 2

Gradient, 10
(HP) Gronwall, 8

Hessienne, 10

Inégalité des accroissements finis, 10
Intégrale dépendant d'une borne, 5
Interversion des limites, 5
Inversion globale, 9
(HP) Inversion locale, 9

(HP) Limite diagonale, 5

Matrice jacobienne, 9
(HP) Module de continuité, 11
Moments, 12

Norme, 3

Parseval et convergence quadratique, 7
Parseval sesquilinéaire, 7
(HP) Point fixe contractant, 3
(EXO) Polynômes de Tchebycheff, 11
Primitives usuelles, 2
Produit de Cauchy de séries, 3
Prolongement en une borne, 10

Règle de d'Alembert, 2, 6
Règle de Riemmann, 2, 4
Règles de convergence, 2
(HP) Raabe-Duhamel, 3
Relèvement $\mathscr{C}^1$, 12
Relations usuelles, 1
Riemann-Lebesgue, 12

Série harmonique, 11
Séries de Bertrand, 2
Séries de Riemann, 2
Séries entières usuelles, 6
Séries uniformément convergentes, 5
Schwarz, 9
Solution générale de $X' = aX + b$, 8
(HP) Solution maximale sur $\mathbf{R}$, 10
Sommation $L^1$, 4
(HP) Sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$, 11
Stirling, 11
(EXO) Suites sous-additives, 11
Système autonome, 10

Taylor-Young à l'ordre 2, 10
Trajectoires, 11
Trigonométrie, 1

Variation des deux constantes, 8

(EXO) Wallis, 11

Zéros isolés, 9