Probabilités

I. Ensembles dénombrables

I.1. Généralités

Définition. *Un ensemble D est dit* ***dénombrable*** *s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans D. Il est dit* ***au plus dénombrable*** *s'il est au plus dénombrable.*

Proposition I.1. *Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables.*

Proposition I.2. *Un ensemble A est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.*

I.2. Exemples

Proposition I.3. *Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

I.3. Propriétés

Proposition I.4. *Si I est un ensemble au plus dénombrable, et si, pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble au plus dénombrable, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.*

Exemple : racines n-ièmes de l'unité, n décrivant $\mathbb{N}$.

Proposition I.5. *Si les ensembles $A_1, \dots, A_n$ sont finis ou dénombrables, alors leur produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est au plus dénombrable.*

Définition. *Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres complexes, on appelle* ***support*** *de la famille, l'ensemble $J = \{j \in I \mid a_j \neq 0\}$.*

Proposition I.6. *Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable, alors son support est au plus dénombrable.*

II. Espace probabilisable

II.1. Rappels sur les opérations ensemblistes

En probabilités, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de travail Ω, le complémentaire $\Omega \setminus A$ d'une partie A de Ω sera noté $\overline{A}$.

On rappelle que, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille, finie ou infinie, de parties d'un même ensemble E, on pose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

On a alors, pour toute partie B de E :

- ○ $B \cap \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$ et $B \cup \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$;
- ○ $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

II.2. Tribus

Définition. *On dit qu'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble Ω est une* ***tribu*** *sur Ω si :*

- *$\Omega \in \mathcal{T}$;*
- *$\forall A \in \mathcal{T} \quad \overline{A} \in \mathcal{T}$;*
- *pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***dénombrable*** *d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.*

Les ensembles $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ (tribu grossière), $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ (où $A \in \mathcal{P}(E)$) sont des tribus sur Ω.

Définition. *On appelle* ***espace probabilisable*** *tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.*

L'ensemble Ω est alors appelé ***l'univers****. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés* ***événements*** *; $\varnothing$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain. L'événement $\overline{A}$ est appelé événement* ***contraire*** *de A ; deux événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits* ***incompatibles****.*

Une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable est appelée un ***système complet*** *d'événements si les A_i sont deux à deux incompatibles, et vérifient $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.*

Proposition II.1. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements et si $B \in \mathcal{T}$, alors $B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ et les $A_i \cap B$ sont deux à deux incompatibles.*

II.3. Propriétés

Proposition II.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Alors :*

- ○ *$\varnothing \in \mathcal{T}$;*
- ○ *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'événements, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;*
- ○ *si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille* ***finie*** *d'événements, alors $\bigcap_{i=1}^n A_i$ et $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sont dans $\mathcal{T}$;*
- ○ *si A et B sont des événements, alors $A \setminus B \in \mathcal{T}$.*

III. Espace probabilisé

III.1. Probabilité

Définition. *Si $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable, on appelle* ***probabilité*** *sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $P : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant*
- $\forall A \in \mathcal{T} \quad P(A) \in [0,1]$;
- $P(\Omega) = 1$;
- *pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles,* $P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Un ***espace probabilisé*** *est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.*

III.2. Premières propriétés

Proposition III.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Alors :*
- $P(\varnothing) = 0$;
- *si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille* ***finie*** *d'événements deux à deux disjoints, alors*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $\forall A \in \mathcal{T} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \quad \big(A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)\big)$.

III.3. Continuité monotone

Théorème III.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.*
- ▷ *Si la suite (A_n) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, alors*

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

- ▷ *Si la suite (A_n) est décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n, alors*

$$P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Corollaire III.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors* $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ *et* $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

Théorème III.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Alors* $P\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \leqslant \sum_{i\in I} P(A_i)$.

III.4. Événements négligeables, presque sûrs

Définition. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Un événement A est dit* ***négligeable*** *si $P(A) = 0$; il est dit* ***presque sûr*** *si $P(A) = 1$.*

Proposition III.5. *Un réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est encore négligeable ; une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est encore presque sûre.*

Définition. *Une famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements est appelée* ***système quasi-complet*** *si les A_i sont deux à deux incompatibles et $P\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.*

III.5. Probabilité discrète

Définition. *Soit Ω un ensemble. Une* ***distribution de probabilité discrète*** *sur Ω est une famille de réels positifs, indexée par Ω, et de somme 1.*

Proposition III.6. *Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilité discrète sur l'ensemble Ω. L'application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $A \longmapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$ définit une probabilité sur l'espace $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.*

Si Ω est fini ou dénombrable, toute probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ peut s'obtenir de cette manière.

IV. Conditionnement et indépendance

IV.1. Probabilité conditionnelle

Proposition IV.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors, l'application $P_B : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ définit une probabilité sur $\mathcal{T}$, appelée* ***probabilité conditionnée** à B.*

Le nombre $P(A \cap B)/P(B)$ sera noté $P_B(A)$ ou $P(A \mid B)$.

IV.2. Propriétés

Proposition IV.2 (Probabilités composées)**.** *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements vérifiant $P\big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\big) \neq 0$; alors*

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Proposition IV.3 (Probabilités totales)**.** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements, alors, pour tout événement B, la famille $\big(P(B \cap A_i)\big)_{i \in I}$ est sommable, et*

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Par convention, $P_{A_i}(B)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Proposition IV.4 (Formule de Bayes)**.** *Soient A et B deux événements, tels que $P(A)P(B) \neq 0$. Alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.*

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements, alors, pour tout $k \in I$ et tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, $P_B(A_k) = \dfrac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) P(A_i)}$.

IV.3. Indépendance

Définition. *Deux événements A et B sont dits* ***indépendants*** *si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; si $P(B) \neq 0$, cela revient à dire que $P(A|B) = P(A)$.*

Les événements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ sont dits ***mutuellement indépendants*** *si, pour toute partie finie J de I, on a*

$$P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Proposition IV.5. *Si les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants, alors c'est aussi le cas pour toute famille obtenue en remplaçant certains événements A_i par l'événement contraire $\overline{A}_i$.*

IV.4. Un espace utile

Soit Ω l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites dont les termes valent 0 ou 1 ("suite de succès (1) ou échecs (0)", ou "suite de pile ou face") ; soit (p_n) une suite de réels appartenant à $[0,1]$ ("p_n = probabilité de succès au rang n").

On admet qu'il existe une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω et une probabilité P sur $\mathcal{T}$ telles que

- pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, l'ensemble S_{n_0} des suites $u = (u_n)$ vérifiant $u_{n_0} = 1$ est un événement ("succès au rang n_0"), dont la probabilité vaut p_{n_0} ;
- les événements $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.