Loi des successions de Laplace

1. $\mathbb{P}(B_p) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_p|E_k)\,\mathbb{P}(E_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_p|E_k)\right)\frac{1}{n+1}$ (les urnes sont équiprobables)

$$\boxed{\mathbb{P}(B_p) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)\frac{1}{n+1}}$$

2. $\mathbb{P}(E_{k_0}|B_p) = \dfrac{\mathbb{P}(B_p|E_{k_0})\,\mathbb{P}(E_{k_0})}{\mathbb{P}(B_p)} = \dfrac{\left(\frac{k_0}{n}\right)^p}{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p}$

Par croissance comparées $\forall k<n$ $\left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ donc $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$

Par suite $\mathbb{P}(E_{k_0}|B_p) \underset{p\infty}{\sim} \left(\frac{k_0}{n}\right)^p \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } k_0<n \\ 1 & \text{si } k_0=n \end{cases}$

<u>c'est normal</u> : si les boules tirées sont toutes blanches il est probable que l'urne tirée soit celle qui en a le plus.

3. $\mathbb{P}(B_{p+1}|B_p) = \dfrac{\mathbb{P}(B_{p+1}\cap B_p)}{\mathbb{P}(B_p)} = \dfrac{\mathbb{P}(B_{p+1})}{\mathbb{P}(B_p)}$ (car $B_{p+1}\subset B_p$)

Donc $\mathbb{P}(B_{p+1}|B_p) = \dfrac{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p+1}}{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\int_0^1 x^{p+1}\,dx}{\int_0^1 x^p\,dx} = \dfrac{p+1}{p+2}$ (on reconnaît en effet des sommes de Riemann)

4. On applique pour $p = 10^{10}\times 365$. La probabilité que le soleil ne se lève pas est $\frac{1}{p+2} \sim 3\,10^{-13}$