Relations

Exercice 1 : Soit $f \in \mathbb{R}^E$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

1. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ? Lorsque la réponse dépend de f donner un exemple où la propriété est vérifié et un où elle ne l'est pas.
2. Donner une CNS sur f pour que $\mathcal{R}$ soit une relation d'ordre.
3. Dans ce cas, la relation d'ordre est-elle totale ou partielle ?

Exercice 2 : Soit $f \in \mathbb{Z}^E$ et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \equiv f(y)\,[2]$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.

Exercice 3 : Soit $f \in F^E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur F et $\mathcal{R}'$ la relation sur E définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$$

1. La relation $\mathcal{R}'$ est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ? Lorsque la réponse dépend de f donner un exemple où la propriété est vérifié et un où elle ne l'est pas.
2. Donner une CNS sur f pour que $\mathcal{R}'$ soit une relation d'ordre.
3. Dans ce cas, la relation d'ordre est-elle totale ou partielle ?

Exercice 4 : Soit $f \in F^E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur F et $\mathcal{R}'$ la relation sur E définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in E$. Déterminer la classe de x.

Exercice 5 :
Déterminer (sans justifications formelles) :

1. le nombre de relations sur $[\![1,n]\!]$
2. le nombre de relations réflexives sur $[\![1,n]\!]$
3. le nombre de relations symétrique sur $[\![1,n]\!]$.
4. le nombre de relations antisymétriques sur $[\![1,n]\!]$.
5. le nombre de relations réflexives et symétrique sur $[\![1,n]\!]$.
6. le nombre de relations réflexives et antisymétriques sur $[\![1,n]\!]$.
7. le nombre de relations symétriques et antisymétriques sur $[\![1,n]\!]$.
8. le nombre de relations d'ordre total sur $[\![1,n]\!]$.

Exercice 6 : : Soit $f \in F^E$,

1. Démontrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F),\ f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$$

Exercice 7 : : Soit $f \in F^E$. On définit les applications suivantes :

$$d \,:\, \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)\,,\ A \mapsto f(A) \quad \text{et} \quad i \,:\, \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)\,,\ A \mapsto f^{-1}(A)$$

1. Simplifier $d \circ i \circ d$ et $i \circ d \circ i$.
2. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow$ d est injective $\Leftrightarrow$ i est surjective
3. Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow$ d est surjective $\Leftrightarrow$ i est injective