Trigonométrie

Olivier SELLÈS, transcrit par Denis MERIGOUX

Table des matières

1 Propriétés de sin, cos et tan

1.1 Sinus et Cosinus

sin et cos sont 2π-périodiques, indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$).

- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

Plus généralement, concernant les dérivées,

- $\sin^{[2k]} = (-1)^k \sin$
- $\sin^{[2k+1]} = (-1)^k \cos$
- $\cos^{[2k]} = (-1)^k \cos$
- $\cos^{[2k+1]} = (-1)^{k+1} \sin$

Pour $k \in \mathbb{Z}$,

- $\cos(k\pi) = (-1)^k$
- $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

La fonction cos est paire, tandis que sin est impaire. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

1.2 Tangente et Cotangente

On définit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction tan est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle I inclus dans le domaine de définition. De plus

$$\begin{aligned} \tan' &= 1 + \tan^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2} \end{aligned}$$

On définit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ la fonction

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

cotan est impaire et définie sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} \operatorname{cotan}' z &= -\left(1 + \operatorname{cotan}^2\right) \\ &= -\frac{1}{\sin^2} \end{aligned}$$

2 Valeurs remarquables

2.1 Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2.2 Relations

On a les relations suivantes :

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\operatorname{cotan}(\pi + x) = \operatorname{cotan} x$

3 Formules

Les formules sont valables sur tout réel appartenant au(x) domaine(s) de définitions de(s) la fonction concernée(s).

3.1 Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$
- $\sin(a-b) = \cos b \sin a - \cos a \sin b$

3.2 Formules de duplication

- $$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

3.3 Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

3.4 Formules de transformation d'une somme en produit

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

3.5 Formules pour tangente

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

3.6 Changement de variable $u = \tan \dfrac{a}{2}$

- $\tan a = \dfrac{2u}{1-u^2}$
- $\sin a = \dfrac{2u}{1+u^2}$
- $\cos a = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$