8 Suites et séries de fonctions

« C'est par la logique que nous démontrons, mais c'est par l'intuition que nous découvrons; sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées. »
Henri Poincaré (1854–1912)

Plan de cours

Dans tout ce chapitre et sauf mention contraire, les fonctions étudiées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats seront ultérieurement étendus aux espaces vectoriels normés de dimension finie.

I | Suites de fonctions

A – Modes de convergence

On considère une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 8.1 : Convergence simple

On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x\in I,\quad f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon>0,\quad \forall x\in I,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant N,\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

Prouver la convergence simple d'une suite de fonctions revient donc à montrer la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x\in I$, c'est-à-dire point par point. On parle pour cette raison de *convergence ponctuelle*. La limite f ainsi obtenue est qualifiée de *limite simple*.

Exercice 1– le retour!

Étudier la convergence simple et représenter graphiquement les suites de fonctions suivantes :

$$a_n : x\longmapsto x^n \text{ sur } [0,1]\,;\quad b_n : x\longmapsto \arctan(nx) \text{ sur } \mathbb{R}\,;\quad c_n : x\longmapsto \min(n,\mathrm{e}^x) \text{ sur } \mathbb{R}_+\,;$$

$$d_n : x\longmapsto \frac{nx}{1+nx} \text{ sur } \mathbb{R}_+\,;\quad e_n : x\longmapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

Quelles sont, parmi les propriétés suivantes, celles qui semblent être conservées par passage à la limite : (stricte) monotonie, continuité, dérivabilité, parité, périodicité, caractère borné?

Afin d'assurer ne serait-ce que la continuité de la limite, introduisons une notion de convergence plus restrictive.

Définition 8.2 : Convergence uniforme

On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si f_n-f est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\quad\text{c'est-à-dire}\quad \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant N,\quad \forall x\in I,\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

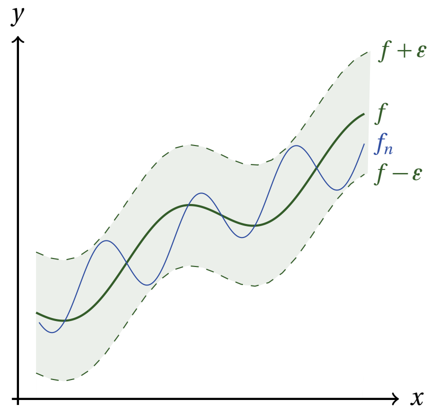


Illustration de la convergence uniforme

Cette définition appelle plusieurs remarques.

- La limite f au sens de la convergence uniforme est qualifiée de *limite uniforme*.
- La convergence uniforme se traduit graphiquement par l'existence d'un rang à partir duquel le graphe de f_n est compris entre ceux de $f-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$.
- Le mode de convergence dépendant intrinsèquement de l'intervalle considéré, l'assertion « (f_n) converge uniformément » est imprécise.
- La notation $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de convergence uniforme définie, par exemple, sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. S'il y a ambiguïté sur l'ensemble de départ des fonctions considérées, on utilisera la notation $\|\cdot\|_{\infty,I}$.

Qui peut le plus, peut le moins : la convergence uniforme implique la convergence simple, comme exprimé ci-dessous.

Proposition 8.3 : convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple

Si une suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.

Exercice 2

Soit une suite (f_n) de fonctions, où $f_n : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f.

(i) Montrer que f est bornée si, et seulement si, les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang.

(ii) Dans ce cas, montrer que $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty$.

Comment justifier qu'une suite de fonctions converge uniformément ? On commence dans tous les cas par déterminer la limite simple f de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. S'offrent alors deux possibilités :

❶ Nous sommes chanceux et en mesure de calculer la borne supérieure sur I de $|f_n-f|$ par une classique étude de fonction. Il suffit dans ce cas de passer à la limite.

❷ Le calcul explicite de la borne sup est malaisé, on procède alors par majoration en cherchant $M_n\in\mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x\in I,\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant M_n \quad\text{avec}\quad M_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Exemples

① Montrons que la suite de fonctions $\left(x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Donc la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f_n'(x)=\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n-1}}{n!}(n-x)$$

Une rapide étude donne le tableau de variations ci-contre.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

Ainsi, $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|=f_n(n)=\mathrm{e}^{-n}\frac{n^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ en vertu de la formule de Stirling.

D'où la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction nulle.

② Montrons que la suite de fonctions $\left(x\longmapsto\sin\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

- La suite notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sin.
- Par ailleurs, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\left(x+\frac{1}{n}\right)-\sin(x)\right|=2\left|\cos\left(x+\frac{1}{2n}\right)\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

La suite (f_n) converge donc uniformément vers la fonction sinus.

Différentes méthodes permettent de justifier qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément. Par exemple :

- la non-convergence simple (c'est la condition *minimale*) ;
- le non-respect des théorèmes de continuité et de double limite énoncés dans la sous-section ci-dessous ;
- l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(u_n)-f(u_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, ce qui contredit $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple

Étudions la convergence uniforme de $(x\mapsto x^n)$ sur $[0,a]$ avec $a<1$, sur $[0,1[$ puis sur $[0,1]$.

Notons tout d'abord que $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x\mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$

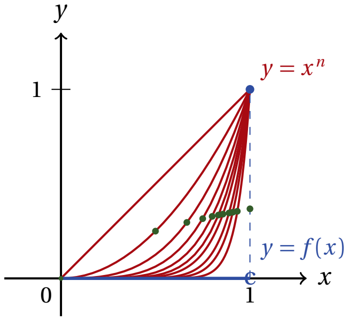
- Soit $a\in[0,1[$. $\sup\limits_{x\in[0,a]}|x^n| = a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais en revanche

$$\sup_{x\in[0,1[} x^n = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

  La suite $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur tout segment strictement inclus dans $[0,1]$ mais pas sur $[0,1]$, ni même sur $[0,1[$.
- Notons qu'en posant $u_n = 1-{}^1\!/_n$,

$$|f_n(u_n)-f(u_n)| = (1-{}^1\!/_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

  On retrouve la non-convergence uniforme sur $[0,1]$.



Représentation des points $(u_n, f_n(u_n))$

- Enfin, un dernier argument possible : la fonction f n'est tout simplement pas continue sur $[0,1]$.

Exercice 3

Déterminer si les suites de fonctions définies dans l'exercice 1 convergent uniformément ou non.

Exercice 4

Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle I.

(i) Montrer que (f_n+g_n) converge uniformément.

(ii) On suppose que les fonctions f_n et g_n sont bornées. Montrer que (f_ng_n) converge uniformément.

B – Convergence uniforme, continuité et double limite

En cas de convergence uniforme, la continuité se transmet par passage à la limite.

Théorème 8.4 : Continuité de la limite uniforme

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a\in I$.
Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Ainsi, si une suite de fonctions continues sur I converge uniformément, sa limite est également continue sur I.

Démonstration

Soient $\varepsilon>0$ et $x\in I$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)|$.
Il s'agit alors de majorer chacun de ces trois termes.
Par convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\|f_n-f\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit désormais un tel entier n.

$$|f(x)-f(a)| \leqslant \|f_n-f\|_\infty + |f_n(x)-f_n(a)| + \|f_n-f\|_\infty \leqslant |f_n(x)-f_n(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Comme enfin f_n est continue en a, il existe $\delta>0$ tel que si $|x-a|\leqslant\delta$, $|f_n(x)-f_n(a)|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
On a ainsi montré qu'il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x\in I$ vérifiant $|x-a|\leqslant\delta$, $|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon$. ■

On notera qu'il est possible de justifier la continuité de la limite même s'il n'y a pas convergence uniforme sur I tout entier, mais seulement au voisinage de chaque point de I. La continuité est en effet une propriété locale. Il est souvent judicieux de travailler sur un segment (et plus généralement sur un compact).

Exemple

> La suite $(x \mapsto x^n)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f. Comme elle converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$, f est continue sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$, donc sur $[0,1[$ (ce n'est pas une surprise, f est nulle sur $[0,1[$!). Et ceci, bien que la suite $(x \mapsto x^n)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$...

Ce théorème est avant tout un théorème d'interversion de limites. Il montre qu'en cas de convergence uniforme sur I, et lorsque $a \in I$, $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$. On démontre la propriété plus générale suivante :

Théorème 8.5 : Théorème de la double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Ce théorème étend la relation $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ au cas où a est seulement adhérent à I ou même $a = \pm\infty$, en garantissant l'existence d'une limite. Rappelons que a est situé dans l'adhérence de I si pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(a,r) \cap I \neq \varnothing$. De façon équivalente, a est adhérent à $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe une suite de I convergeant vers a. Ex. : 1 est adhérent à $[0,1[$.

Démonstration

La démonstration du résultat est hors programme.
Plaçons-nous ici dans le cas où a un point adhérent à I et où les fonctions f_n admettent toutes une limite *finie* ℓ_n.

- Première étape : justifions la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Prouvons d'abord qu'elle est bornée. Puisque $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $M > 0$ et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :
  $$\forall n,p \geqslant N, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_p\|_\infty \leqslant 2M$$
  En faisant tendre x vers a, il vient $|\ell_n - \ell_p| \leqslant 2M$ pour tous $n,p \geqslant N$. La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bornée.
  En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(\ell_{\varphi(n)})$ convergente, de limite notée ℓ.
  Soit $n \geqslant N$.
  $$|\ell - \ell_n| \leqslant |\ell - \ell_{\varphi(n)}| + |\ell_{\varphi(n)} - \ell_n| \leqslant |\ell - \ell_{\varphi(n)}| + \|f_{\varphi(n)} - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
- Deuxième étape : prouvons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
  C'est peu ou prou la même preuve que pour le théorème de continuité. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I$.
  On sait qu'il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|f - f_n\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et pour tout $n \geqslant N'$, $|\ell - \ell_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ainsi
  $$\begin{aligned}\forall n \geqslant \max(N,N'), \quad |f(x) - \ell| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \\ &\leqslant \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - \ell_n|\end{aligned}$$
  De plus, pour un tel entier n, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| \leqslant \delta$, $|f_n(x) - \ell_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
  Pour un tel réel $\delta > 0$, $|x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. ■

Attention, le théorème tombe en défaut dès que l'on perd la convergence uniforme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} x^n = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$!

C – Convergence uniforme et intégration sur un segment

Nous énonçons dans ce paragraphe un nouveau résultat d'interversion limite/intégrale. Il repose sur la convergence uniforme et ne nécessite aucune domination. En revanche, contrairement au théorème de convergence dominée, il ne s'applique que sur un segment.

Théorème 8.6

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

On peut affaiblir les hypothèses en supposant les f_n seulement continues par morceaux, mais il faudra alors supposer la limite également continue par morceaux, la convergence uniforme n'y suffisant pas.

Démonstration

Notons f la limite uniforme sur le segment $[a,b]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. f est par théorème continue sur $[a,b]$ (donc intégrable) et par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = (b-a)\cdot\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ce théorème n'est malheureusement plus valable lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.

Exercice 5

Rappelons que $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Montrer cependant que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x \neq \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{d}x$$

Proposition 8.7 : Convergence uniforme et primitives

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Soit $x_0 \in I$. On définit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$,

$$F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

D – Convergence uniforme et dérivation

La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables f_n n'assure nullement la dérivabilité de la limite f. Et même si celle-ci est dérivable, rien ne nous assure de la convergence de (f_n') vers f'. C'est l'objet de l'exemple suivant.

Exemple

On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, dérivable.
- La convergence est en fait uniforme : $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable et $f_n'(x) = \cos(nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement .

Théorème 8.8

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.
- (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Démonstration

Soit $x_0\in I$. Pour tout $x\in I$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0)$.

- Par convergence uniforme de f_n' vers g,

$$\left(x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } x \mapsto \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sur tout segment de } I.$$

En passant à la limite (simple) dans l'égalité précédente, il vient :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0)$$

La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme sur tout segment de I de fonctions continues, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

- Il ne reste plus qu'à montrer la convergence uniforme sur tout segment de I de (f_n) vers f, qui découle de celle de (h_n) vers h avec $h_n : x \mapsto f_n(x) - f_n(x_0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(x_0)$.
Pour tout segment S inclus dans I,

$$\forall x \in S, \quad |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{\text{inég.}\\\text{triang.}}}{\leqslant} |h_n(x) - h(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Ainsi, par passage au sup, $\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,S} \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ et cette dernière quantité tend vers 0.
D'où le fait que $\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,S} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

Corollaire 8.9

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.
- Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction f_k.
- $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f_p.

Alors (f_n) converge uniformément vers $f = f_0$ sur tout segment de I. La fonction f est de plus de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = f_k$.

II | Séries de fonctions

A – Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions

En vue d'adapter les définitions et résultats précédents aux séries de fonctions, fixons quelques notations. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On rappelle que la somme partielle au rang n désigne la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
- On rappelle que la série de terme général f_n désigne la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum f_n$.

Définition 8.10 : Convergence simple, convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I.
En cas de convergence, on appelle *fonction somme* de la série la fonction S définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Naturellement, la convergence uniforme d'une série entraîne sa convergence simple.

Exercice 6

- Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ pour $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.
- Sur quel intervalle la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ converge-t-elle simplement ? uniformément ?

Proposition 8.11

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Démonstration

L'hypothèse de convergence simple permet de définir le reste de la série au rang n, noté R_n.

$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = S - S_n$ en utilisant les notations précédentes.

De façon évidente, $\|S - S_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si, et seulement si $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

Exercice 7

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2} \right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Il n'est en général pas très commode de justifier la convergence uniforme d'une série de fonctions en s'appuyant sur la définition : il faut au préalable montrer la convergence simple puis étudier la convergence uniforme du reste vers 0. On dispose d'un procédé moins laborieux dans le cas d'une série de fonctions bornées reposant sur la convergence *normale*.

Définition 8.12 : Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Pour justifier la convergence normale, on se contentera en pratique de la majoration $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ convergente.

Théorème 8.13

Si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Dans ce cas, l'inégalité triangulaire $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty,I} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,I}$ est vérifiée.

Démonstration

Supposons les fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ toutes bornées et la série de fonctions $\sum f_n$ normalement convergente sur I.

(i) *Convergence simple*
Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ donc la convergence normale implique la convergence absolue de la série numérique $\sum f_n(x)$ par comparaison de séries à termes positifs, donc sa convergence.
On vient de montrer que $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$, la convergence simple est ainsi acquise.

(ii) *Convergence uniforme*
Montrons que la suite des restes converge uniformément vers 0. Pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Par passage au sup, $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.
Cette dernière n'est rien d'autre que le reste d'une série numérique convergente, qui tend donc vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La convergence uniforme est assurée. ■

En résumé,

$$\boxed{\text{Convergence normale}} \Longrightarrow \boxed{\text{Convergence uniforme}} \Longrightarrow \boxed{\text{Convergence simple}}$$

L'étude de la convergence normale pour justifier la convergence uniforme résout bien des problèmes !

Exemples

Étudions la convergence normale des trois séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x\mapsto\frac{\sin(nx)}{n^2}\right)\ ;\quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(x\mapsto\frac{x^n}{n!}\right)\ ;\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x\mapsto\frac{1}{n^x}\right)$$

- Posons $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. La série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $\|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge.
- Posons $g_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$. La fonction (g_n) n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. En revanche, pour tout segment $[a,b]$,

$$\|g_n\|_{\infty,[a,b]}=\frac{M^n}{n!}\qquad\text{avec}\qquad M=\max(|a|,|b|)$$

  Or $\sum\frac{M^n}{n!}$ converge absolument. Donc, $\sum g_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$ (vers exp).
- Posons $h_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$. La série $\sum h_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ mais comme $\|h_n\|_{\infty,]1,+\infty[}=\dfrac{1}{n}$, elle ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$. Néanmoins, pour tout $a>1$,

$$\forall x>a,\quad\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^a}\qquad\text{donc}\qquad\|h_n\|_{\infty,[a+\infty[}=\frac{1}{n^a}$$

  Ce qui assure la convergence normale de $\sum h_n$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$.

En revanche, la réciproque du théorème est fausse : toute série convergeant uniformément ne converge pas nécessairement normalement. Bien que pratique, la convergence normale ne sera pas la réponse à tout !

Exemple

Étudions le mode de convergence sur $[0,1]$ de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n(x)$, où l'on a posé $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$.

- *Convergence simple* : il suffit d'appliquer le critère spécial des séries alternées pour établir la convergence simple.
- *Convergence normale* : $\|f_n\|_\infty=\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{(-1)^n}{n}x^n\right|=\frac{1}{n}$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
- *Convergence uniforme* : toujours en vertu du critère spécial des séries alternées,

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad\forall x\in[0,1],\quad|R_N(x)|=\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\right|\leqslant\frac{x^{N+1}}{N+1}\leqslant\frac{1}{N}$$

  Ainsi, $\|R_N\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$. La série converge ainsi uniformément sur $[0,1]$ (sans converger normalement).

B – Continuité et double limite

Ces théorèmes sont une simple adaptation des théorèmes relatifs aux suites de fonctions.

Théorème 8.14

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a\in I$.

Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue en a.

Ainsi, si une série de fonctions continues sur I converge uniformément, sa somme est également continue sur I.

En pratique, la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur I. Cette condition s'avère pratique lorsqu'il n'y pas convergence uniforme (ou mieux, normale) sur l'intervalle I tout entier.

Exemple

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x\mapsto\frac{1}{n^x}\right)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$.

On en déduit que $\zeta:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1,+\infty[$.

Exemple

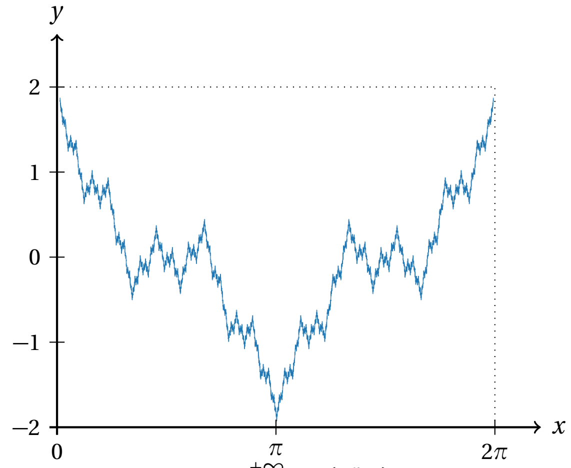
Soit la série de fonctions définie par $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(3^n x)}{2^n}$.

La série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

On en déduit que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction célèbre, nommée fonction de Weierstrass, est historiquement le premier exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part.



La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ *de Weierstrass*

Théorème 8.15 : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et $\displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

C – Dérivation et intégration d'une série de fonctions

Là encore, on adapte !

Théorème 8.16 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $t \mapsto e^{zt}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On généralise alors aux séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$.

Corollaire 8.17 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.
- Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Exercice 9

Montrer que $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exposons maintenant un nouveau théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. Si celui découlant du théorème de convergence dominée est valable sur tout intervalle, ce nouveau résultat requiert quant à lui la convergence uniforme sur un segment. C'est là sa principale limitation.

Théorème 8.18 : Intégration terme à terme sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

Exercice 10

On admet que pour tout $x\in]-1,1[$, $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

(i) Justifier la convergence et exprimer sous forme de somme l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Établir par ailleurs l'égalité $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

III | Approximation uniforme

Nous allons montrer dans cette partie que toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée uniformément par une suite de fonctions en escalier. L'enjeu est de taille : il est assez aisé de définir l'intégrale d'une fonction en escalier et un passage à la limite permet alors de définir [1], grâce à la convergence uniforme, ce qui s'appelle l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment au sens de Riemann.

Définition 8.19 : Fonctions continues par morceaux

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si pour une certaine subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$,

- $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$
- $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}

La subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ est dite adaptée à f.

Les fonctions en escalier et les fonctions continues sont toutes, en ce sens, continues par morceaux.

Proposition 8.20

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Démonstration

Soient $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $(x_0,\dots,x_n)$ une certaine subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

- Supposons f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ étant prolongeable par continuité sur $[x_i,x_{i+1}]$, ce prolongement est, en valeur absolue, borné en vertu du théorème des bornes atteintes. Notons M_i un tel majorant. Il suffit alors de considérer le maximum des réels positifs $M_0,\dots,M_{n-1}$ et $|f(x_0)|,\dots,|f(x_n)|$ pour obtenir un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$.
- Supposons maintenant f à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les deux fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$ donc bornées d'après ce qui précède, mettons par des constantes M et M'.
  Ainsi, $|f|=\sqrt{\mathrm{Re}(f)^2+\mathrm{Im}(f)^2}\leqslant\sqrt{M^2+M'^2}$. Bref, f est bien bornée ! ■

Attention, il n'est pas dit (contrairement aux fonctions continues) que les bornes soient atteintes.

Corollaire 8.21

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, est un espace vectoriel normé.

On note parfois $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b];\mathbb{C})$ ou même $\mathscr{C}\mathscr{M}([a,b];\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

1. Encore faut-il montrer que la limite existe et qu'elle ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escalier choisie.

Théorème 8.22 : Approximation uniforme sur un segment

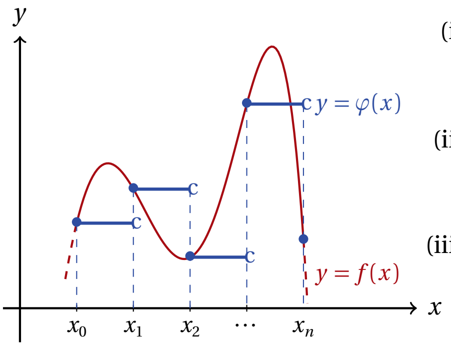
Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Démonstration

Démontrons ce résultat dans le cas d'une fonction continue sur $[a,b]$. Pour justifier le résultat général, il suffit de « recoller les morceaux ». Soit donc $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème de Heine, f est même uniformément continue sur $[a,b]$. Autrement dit,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\alpha>0,\quad \forall x,y\in[a,b],\quad |x-y|<\alpha \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Soit $\varepsilon>0$. Construisons une fonction en escalier $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$.



(i) Choisissons d'abord une bonne subdivision. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha$. On pose, pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $x_i=a+i\cdot\dfrac{b-a}{n}$.

(ii) Notons alors φ la fonction définie sur $[a,b]$ par $\varphi(b)=f(b)$ et pour tous $i\in[\![0,n]\!]$ et $x\in[x_i,x_{i+1}[$, $\varphi(x)=f(x_i)$. Par construction, φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

(iii) Montrons que $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$. Pour cela, considérons $x\in[a,b]$. Il existe $i\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $x\in[x_i,x_{i+1}[$. Alors, $|x-x_i|<x_{i+1}-x_i=\dfrac{b-a}{n}<\alpha$ donc $|f(x)-\varphi(x)|=|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon$. Ainsi, par passage au sup, $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

Il suffit maintenant de construire une suite de fonctions en escalier en considérant pour $p\in\mathbb{N}$, la fonction φ_p précédemment construite pour $\varepsilon=\dfrac{1}{p+1}$. On a ainsi exhibé une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f puisque $\|f-\varphi_p\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{p+1}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$. ■

Muni de ce résultat, nous ne sommes plus très loin de la construction de l'intégrale de Riemann. Laissons cependant de côté cette idée pour montrer que toute fonction continue sur un segment peut aussi s'écrire comme limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 8.23 : Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Pourquoi ce résultat ne peut-il être valable pour une simple fonction continue par morceaux ?

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible. Donnons néanmoins un aperçu sous forme d'exercice d'une preuve possible au moyen des polynômes dits de Bernstein. Nous croiserons un peu plus tard dans l'année une autre démonstration de nature cette fois-ci probabiliste.

Exercice 11 – Polynômes de Bernstein

Soient $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ une fonction continue et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le polynôme B_n défini par :

$$\forall x\in[0,1],\quad B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

1. Calculer B_n pour $f:x\mapsto 1$, $f:x\mapsto x$ et $f:x\mapsto x(x-1)$.
2. Déduire des calculs précédents que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)\leqslant\frac{n}{4}$$

3. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier l'existe d'un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$ vérifiant $|x-y|\leqslant\alpha$, $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En déduire que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, $|B_n(x)-f(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
   (c) Prouver alors que la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.
4. Généraliser le résultat précédent à un segment $[a,b]$ quelconque à l'aide de la fonction affine $x\mapsto(b-a)x+a$ et de sa réciproque (à déterminer !).