15 Géométrie euclidienne

« Il faut donc que l'élève se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture. »

Gaspard Monge – Cours de géométrie descriptive (1746–1818)

Plan de cours

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien, comme les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints.

$(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera par la suite un espace euclidien, de dimension notée n.

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. En guise de préambule, déterminons sa matrice M dans une base orthonormale $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\quad u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\langle u(e_j)|e_i\rangle e_i\quad \text{et donc}\quad M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{bmatrix}\langle u(e_1)|e_1\rangle & \dots & \langle u(e_n)|e_1\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle u(e_1)|e_n\rangle & \dots & \langle u(e_n)|e_n\rangle\end{bmatrix}$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de M s'écrit $C_j=(\langle u(e_j)|e_i\rangle)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et par conséquent, $M^\top M=\big(\langle u(e_i)|u(e_j)\rangle\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

I | Adjoint d'un endomorphisme

Commençons par définir, dans ce contexte euclidien, l'adjoint u^* de l'endomorphisme u. Cet endomorphisme est à u ce que la matrice $M^\top$ est à la matrice M (dans une base orthonormale).

Théorème 15.1 : Représentation des formes linéaires

Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Pour toute forme linéaire φ, il existe un unique vecteur $a\in E$ tel que :

$$\forall x\in E,\quad \varphi(x)=\langle a|x\rangle$$

Démonstration

Pour tout $a\in E$, $x\mapsto\langle a|x\rangle$ est une forme linéaire. Justifions maintenant que l'application suivante est un isomorphisme entre E et son dual $E^*=\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$:

$$\xi:\left|\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&E^*\\ a&\longmapsto&[x\mapsto\langle a|x\rangle]\end{array}\right.$$

La linéarité de ξ est immédiate et $\dim(E)=\dim(E^*)$. Il suffit donc de justifier l'injectivité de ξ. Soit $a\in\mathrm{Ker}(\xi)$. Cela signifie que $x\mapsto\langle a|x\rangle$ est l'application nulle de E. En évaluant en a, on obtient $\|a\|^2=0$ donc $a=0_E$. La bijectivité de ξ en découle. La surjectivité de ξ permet alors de conclure. ■

En dimension finie, toute forme linéaire est donc issue d'un produit scalaire. Dans cette perspective, toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de la forme $M\mapsto\mathrm{Tr}(AM)$.

Théorème / Définition 15.2 : Adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle$$

Un tel endomorphisme est appelé adjoint de u et est noté u^*.

Démonstration

- *Existence et unicité*
  Soit $y \in E$. L'application $x \mapsto \langle u(x)|y\rangle$ est une forme linéaire. D'après le théorème de représentation, il existe un unique vecteur $a_y \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|a_y\rangle$$

  On pose alors $u^*(y) = a_y$. Ainsi, pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$.
- *Linéarité*
  Il ne reste qu'à vérifier la linéarité de u^*. Soient $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \quad \langle u(x)|\lambda y_1 + y_2\rangle &= \langle x|u^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle \\ &= \lambda\langle u(x)|y_1\rangle + \langle u(x)|y_2\rangle = \lambda\langle x|u^*(y_1)\rangle + \langle x|u^*(y_2)\rangle = \langle x|\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)\rangle\end{aligned}$$

  Ainsi, $\langle x|u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.
  Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est nul : $u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)$. ■

On dispose des propriétés suivantes, simple adaptation des propriétés relatives aux transposées de matrices.

Proposition 15.3

(i) L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire.

(ii) Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iii) La passage à l'adjoint est involutif : pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $(u^*)^* = u$.

Démonstration

(i) Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle(\lambda u + v)(x)|y\rangle = \lambda\langle u(x)|y\rangle + \langle v(x)|y\rangle = \lambda\langle x|u^*(y)\rangle + \langle x|v^*(y)\rangle = \langle x|(\lambda u^* + v^*)(y)\rangle$$

Par unicité de l'adjoint, $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.

(ii) Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle u(v(x))|y\rangle = \langle v(x)|u^*(y)\rangle = \langle x|v^*(u^*(y))\rangle$$

Toujours par unicité, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iii) Enfin, pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle = \langle u^*(y)|x\rangle = \langle y|(u^*)^*(x)\rangle$. D'où l'égalité $(u^*)^* = u$. ■

Exercice 1

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

(i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Que vaut $\mathrm{rg}(u^*)$?

(ii) On suppose ici que $u \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $u^* \in \mathrm{GL}(E)$ et que $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Exposons un résultat dont on peut soupçonner l'intérêt majeur en matière de réduction.

Proposition 15.4

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors, $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration

Soit $y \in F^{\perp}$. Montrons que $u^*(y) \in F^{\perp}$. Pour tout $x \in E$, $\langle u^*(y)|x\rangle = \langle y|\underbrace{u(x)}_{x\in F}\rangle = 0$. ■

Proposition 15.5 : Matrice de l'adjoint dans une base orthonormale

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = M^{\top}$.

Démonstration

Rappelons que si l'on note X et Y les vecteurs coordonnées respectifs de $x, y \in E$ dans une base orthonormale $\mathscr{B}$, alors $\langle x|y\rangle = Y^{\top}X$. Ainsi, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle u(x)|y\rangle = Y^{\top}MX = (M^{\top}Y)^{\top}X = \langle x|u^*(y)\rangle$$

Ainsi, $u^*(y)$ a pour coordonnées $M^{\top}Y$ dans la base $\mathscr{B}$ et donc, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = M^{\top}$. ■

On en déduit en particulier que les endomorphismes u et u^* ont même rang, même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

Exercice 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un espace euclidien. Exprimer $\|u^*\|_{\mathrm{op}}$ à l'aide de $\|u\|_{\mathrm{op}}$.

II | Isométries vectorielles et matrices orthogonales

A – Matrices orthogonales

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthonormales de E.

On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \langle e'_j|e_i\rangle e_i \quad \text{et} \quad P_{i,j} = \langle e'_j|e_i\rangle$$

De même, $e_j = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j|e'_i\rangle e'_i$ donc $(P^{-1})_{i,j} = \langle e'_i|e_j\rangle$.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} = P$$

On remarque que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(P^{-1})_{i,j} = P_{j,i}$ donc $P^{-1} = P^{\top}$. Ainsi, $P^{\top}P = PP^{\top} = I_n$.

Définition 15.6 : Matrice orthogonale

On appelle matrice orthogonale toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{\top}M = MM^{\top} = I_n$.

Toute matrice orthogonale M est inversible, d'inverse $M^{\top}$. De plus, $\det(M^{\top}M) = \det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) = \pm 1$. Ce résultat nous amène à distinguer deux types de matrices orthogonales.

Théorème / Définition 15.7 : Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

- On appelle groupe orthogonal le groupe des matrices orthogonales ; ce groupe est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.
- On appelle groupe spécial orthogonal le groupe des matrices orthogonales de déterminant $+1$ également qualifiées de matrices orthogonales positives ; ce groupe est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De plus,

- pour tous $M_1, M_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $(M_1M_2)^{\top}M_1M_2 = M_2^{\top}M_1^{\top}M_1M_2 = M_2^{\top}M_2 = I_n$ donc $M_1M_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
- pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $M^{-1} = M^{\top}$ et $(M^{\top})^{\top}(M^{\top}) = MM^{\top} = I_n$ donc $M^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Quant à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ce n'est autre que le noyau du morphisme de groupes $\det : (\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times) \to (\{-1, 1\}, \times)$. ■

Notons que l'ensemble $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\}$ n'est pas stable par multiplication.

Attention, toute matrice de déterminant ± 1 n'est pas nécessairement orthogonale : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin O_2(\mathbb{R})$.

Proposition 15.8 : Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.

(ii) ses vecteurs lignes forment une famille orthonormale.

Démonstration

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \iff M^\top M = I_n \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad (M^\top M)_{i,j} = \delta_{i,j}$$
$$\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = C_i^\top C_j = \delta_{i,j}$$

Le résultat est identique pour $M^\top$, donc pour les lignes de la matrice M. ■

Exemple

On vérifie facilement – de tête – que $M = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$.

Une matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale. Réciproquement, tout matrice orthogonale s'interprète comme matrice de passage entre deux bases orthonormales.

On dira que deux matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP = P^\top AP$. A et B représentent alors le même endomorphisme dans deux bases orthonormales.

B – Orientation de l'espace, produit vectoriel et produit mixte

1 – Orientation de l'espace

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\det(P) = \pm 1$.

Définition 15.9 : Orientation de l'espace

On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définissent la même orientation si et seulement si $\det(P) = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E. Toutes celles qui définissent la même orientation seront dites directes. Les autres indirectes.

Orienter l'espace revient donc à choisir une des deux classes d'équivalence associées à la relation d'équivalence définie par « $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$ ssi $\det(P) = 1$ ». Par convention, les bases orthonormales directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou règle du tire-bouchon).

2 – Produit mixte (HP, pour votre culture)

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien orienté et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe de E.

Théorème / Définition 15.10 : Produit mixte

Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle produit mixte de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ le scalaire :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{déf.}}{=} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{not.}}{=} [x_1, \ldots, x_n]$$

Il est indépendant de la base orthonormale directe $\mathscr{B}$ choisie.

Démonstration

Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormale directe de E. Alors,
$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ car $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \det(P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}) = +1$. ■

Le produit mixte s'interprète géométriquement :

- dans $\mathbb{R}^2$: $[\vec{x}, \vec{y}]$ est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
- dans $\mathbb{R}^3$: $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

3 – Produit vectoriel (HP, pour votre culture)

On considère dans ce paragraphe un espace E orienté de dimension 3.

Théorème / Définition 15.11 : Produit vectoriel

Soient $x, y \in E$. L'application $z \mapsto [x, y, z]$ étant une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur de E, noté $x \wedge y$, tel que :

$$\forall z \in E, \quad [x, y, z] = \langle x \wedge y | z \rangle$$

On appelle produit vectoriel de x et y le vecteur $x \wedge y$.

L'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$ est antisymétrique : pour tous $x, y \in E$, $x \wedge y = -y \wedge x$.

Si l'on note (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) les coordonnées respectives de x et y dans une base orthonormale directe de E, la relation $\det(x, y, z) = \langle x \wedge y | z \rangle$ nous permet de vérifier aisément la propriété :

$$x \wedge y = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

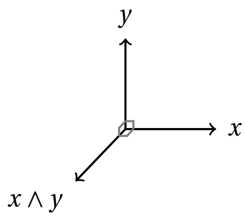
Voici quelques propriétés usuelles du produit vectoriel, utiles en physique comme en sciences industrielles.

Théorème 15.12 : Propriétés du produit vectoriel

Soient x, y et z trois vecteurs de E.

- $x \wedge y \perp x$ et $x \wedge y \perp y$.
- $x \wedge y = 0_E$ si et seulement si (x, y) est liée.
- Si x et y ne sont pas colinéaires, $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.
- Si (x, y) est une famille orthonormale, $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormale directe de E.
- Identité de Lagrange : $(x|y)^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$.
- Double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = \langle x|z \rangle y - \langle x|y \rangle z$. *(1 2 3 = 1 3 2 - 1 2 3)*

Si (x, y) est orthonormale, $x \wedge y$ est l'unique vecteur z telle que (x, y, z) soit une base orthonormale directe de E.



C – Isométrie vectorielle

1 – Définition et propriétés

Définition 15.13 : Isométrie vectorielle

1. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) u conserve la norme : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$.
   (ii) u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

   On dit alors que u est un endomorphisme orthogonal ou une isométrie vectorielle de E.
2. On appelle groupe orthogonal de E et on note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Démonstration

- Supposons que u conserve le produit scalaire. Soit $x \in E$.
  $\|u(x)\|^2 = \langle u(x)|u(x)\rangle = \langle x|x\rangle = \|x\|^2$ donc u préserve la norme.
- Supposons que u conserve la norme. Soient $x, y \in E$. On utilise l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned}\langle u(x)|u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x|y\rangle\end{aligned}$$

  u préserve donc le produit scalaire. ■

Le terme isométrie signifie *même mesure*, le terme orthogonal provient de la conservation de l'orthogonalité.

Exercice 3

Donner un exemple d'isométrie vectorielle de E.
Une projection orthogonale est-elle une isométrie vectorielle ?

Proposition 15.14 : Bijectivité d'une isométrie vectorielle

Toute isométrie vectorielle est un automorphisme.

Démonstration

E étant de dimension finie, il suffit de prouver que l'isométrie vectorielle u est injective.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, $\|x\| = \|u(x)\| = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. ■

Proposition 15.15

$\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 15.16

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors, $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration

Supposons F stable par $u \in \mathrm{O}(E)$. Observons que $u(F) = F$ par inclusion évidente et égalité des dimensions.
Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x' \in F$, il existe $x \in F$ tel que $u(x) = x'$ et donc, $\langle u(y)|x'\rangle = \langle u(y)|u(x)\rangle = \langle y|x\rangle = 0$.
Ainsi, $u(y) \in F^\perp$. ■

Exercice 4

Déterminer le spectre d'une isométrie vectorielle. Que dire de ses sous-espaces propres ?

Théorème 15.17 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle (1)

Un endomorphisme est une isométrie ssi l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une base orthonormale de E car $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.
Supposons que $\mathscr{B}' = (u(e_1),\dots,u(e_n))$ soit une base orthonormale de E.
Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ par linéarité. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont des b.o.n. donc,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|u(x)\|^2 \text{ (théorème de Pythagore)}$$

u conserve la norme donc $u \in \mathrm{O}(E)$. ■

Théorème 15.18 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle (2)

Un endomorphisme u est une isométrie ssi $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. $u \in \mathrm{GL}(E)$ donc pour tous $x, y \in E$, $\langle x, u^{-1}(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. Ainsi, $u^{-1} = u^*$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si u est bijective, d'inverse u^*, pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^*(u(y))\rangle = \langle x, y\rangle$. D'où $u \in \mathrm{O}(E)$.

Théorème 15.19 : Caractérisation d'une isométrie vectorielle (3)

Un endomorphisme est une isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Démonstration

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $\mathscr{B}' = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{O}(E) &\iff \mathscr{B}' \text{ est une base orthonormale de } E \\ &\iff M \text{ est la matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n.} \iff M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

En corollaire, si $f \in \mathrm{O}(E)$ alors $\det(f) = \pm 1$. Ceci motive la définition suivante.

Définition 15.20

1. On appelle isométrie positive (resp. isométrie négative) une isométrie de dét. 1 (resp. de dét. -1).
2. On appelle groupe spécial orthogonal le groupe des isométries positives, noté $\mathrm{SO}(E)$ ou $\mathrm{O}^+(E)$.

On prouve facilement que l'image par u d'une base orthonormale directe est une base orthonormale directe si et seulement si u est une isométrie positive. $(\mathrm{SO}(E), \times)$ est bien entendu un groupe.

2 – Symétries orthogonales

Définition 15.21 : Symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, $E = F \oplus F^\perp$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Si F est un hyperplan de E, on parle alors de réflexion.

Rappels :

1. $s \circ s = \mathrm{id}_E$ donc $s^{-1} = s$. Pour tout $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$, $s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$.
2. $F = E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $F^\perp = E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. $\mathrm{Mat}(s) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$ dans une base adaptée.
3. $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $\chi_s = (X-1)^p (X+1)^{n-p}$. Cas particuliers : $\pm \mathrm{id}_E$.

Théorème 15.22

Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Théorème 15.23 : Caractérisation des symétries orthogonales

Une symétrie vectorielle est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Démonstration

Supposons que s soit une symétrie vectorielle.
Soit M la matrice de s dans une base orthonormale. $M^2 = I_n$ donc $M^{-1} = M$.
s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est de plus orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (base orthonormale). Cela s'écrit encore $M^{-1} = M^\top = M$. ■

Exercice 5

Donner l'expression analytique de $s(x)$, où s est la réflexion d'hyperplan H et $x \in E$.

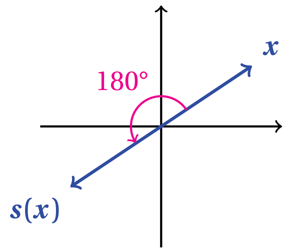
3 – Symétries orthogonales du plan ($E = \mathbb{R}^2$)

- $\dim F = 0$ c'est-à-dire $F = \{0_E\}$.

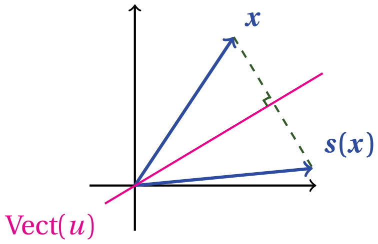
  Alors $s = -\mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$,

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

  C'est également une rotation d'angle π.



- $\dim F = 1$ c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec u non nul.



  C'est une réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$.
  Si $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base orthonormale de E,

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$

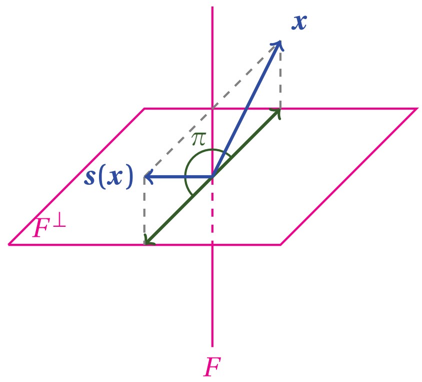
- $\dim F = 2$ c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^2$.
  $s = \mathrm{id}_E$ et dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (isométrie directe)

Exercice 6

> Identifier l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

4 – Symétries orthogonales de l'espace ($E = \mathbb{R}^3$)

- $\dim F = 0$, $s = -\mathrm{id}_E$ (isométrie indirecte)
- $\dim F = 1$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u)$.

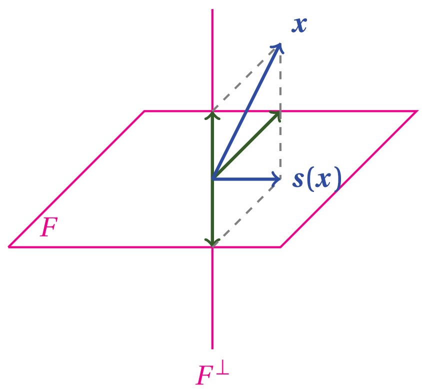


  Rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle π, c'est un retournement.

  Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(isométrie directe)}$$

- $\dim F = 2$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.



  s est la réflexion par rapport au plan F.

  Dans une certaine base $\mathscr{B}$,

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(isométrie indirecte)}$$

- $\dim F = 3$, c'est-à-dire $F = \mathbb{R}^3$. $s = \mathrm{id}_E$.

Indépendamment de la dimension de E, une réflexion est toujours une isométrie indirecte.

Exemple

> Identifions l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}-8&4&1\\4&7&4\\1&4&-8\end{bmatrix}$.
>
> $M\in O_2(\mathbb{R})$ et $M^\top=M$: M est la matrice d'une symétrie orthogonale.
> Il s'agit d'une rotation d'axe $u=\mathrm{Ker}(M-I_3)=\mathrm{Vect}(1,4,1)$ et d'angle π.

5 – Classification des isométries planes

On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $O(\mathbb{R}^2)$ et $SO(\mathbb{R}^2)$.
Soient $u\in O(\mathbb{R}^2)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

On note $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. $M^\top M=I_2\iff\begin{bmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{bmatrix}=I_2\iff\begin{cases}a^2+c^2=1\\b^2+d^2=1\\ab+cd=0\end{cases}$

$a^2+c^2=1\iff\exists\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}a=\cos\theta\\c=\sin\theta\end{cases}$ et $b^2+d^2=1\iff\exists\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}b=\cos\varphi\\d=\sin\varphi\end{cases}$.

À ce stade, $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&\cos\varphi\\\sin\theta&\sin\varphi\end{bmatrix}$. De plus, $ab+cd=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=\cos(\theta-\varphi)$.

Donc $ab+cd=0\iff\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\iff\varphi=\theta+\varepsilon\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ avec $\varepsilon=\pm1$.

$$\cos\varphi=\cos\left(\theta+\varepsilon\frac{\pi}{2}\right)=-\varepsilon\sin\theta\ ;\quad \sin\varphi=\sin\left(\theta+\varepsilon\frac{\pi}{2}\right)=\varepsilon\cos\theta$$

D'où $M\in O_2(\mathbb{R})\iff\exists\theta\in\mathbb{R}$ tel que $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\varepsilon\sin\theta\\\sin\theta&\varepsilon\cos\theta\end{bmatrix}$. Et alors, $\det(M)=\varepsilon$.

Théorème 15.24 : Isométries du plan

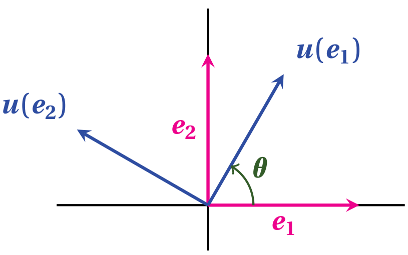
1. $M\in O_2(\mathbb{R})\iff\exists\theta\in\mathbb{R}$ tel que $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&\mp\sin\theta\\\sin\theta&\pm\cos\theta\end{bmatrix}$.
2. $M\in SO_2(\mathbb{R})\iff\exists\theta\in\mathbb{R}$ tel que $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$.

- ⋆ Isométries positives : $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

  Les isométries positives du plan sont les rotations (d'angle θ).

  $$\chi_M=X^2-2\cos\theta X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$$

  Il n'y a des valeurs propres réelles que pour $\theta=0$ ou $\theta=\pi$.



- ⋆ Isométries négatives : $M=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}\neq\pm I_2$; les isométries négatives du plan sont les réflexions.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	s.e. propres	matrice dans une bon qcq
identité	1	$\{1\}$	$E_1=\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
- identité	1	$\{-1\}$	$E_{-1}=\mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$
rotation d'angle θ ($\neq0,\pi$)	1	$\varnothing$	/	$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$
réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1,1\}$	$E_1=\mathrm{Vect}(u),E_{-1}=E_1^\perp$	$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$

Classification des isométries du plan

Proposition 15.25

L'application $R : \theta \mapsto R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un morphisme surjectif de groupes, dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est en particulier abélien.

Démonstration

On vérifie aisément que $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$ pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. La surjectivité a déjà été prouvée. Enfin, $R(\theta) = I_2$ si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. La commutativité du groupe $(\mathbb{R}, +)$ se transporte dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. ■

Le réel θ est défini de façon unique à 2π-près. Il est qualifié de mesure d'angle de la rotation.

6 – Réduction des isométries

Lemme 15.26 : Stabilité d'une droite ou d'un plan par un endomorphisme réel

Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable.

Démonstration

Notons π_u le polynôme minimal d'un endomorphisme u donné.

- Si π_u admet un facteur réel de degré 1, u admet une valeur propre réelle donc un vecteur propre associé noté x. $\mathrm{Vect}(x)$ est alors stable par u.
- Sinon, on peut toujours factoriser π_u sous la forme :

$$\pi_u = P_1 \times \cdots \times P_r \quad \text{où } P_i \text{ est un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients réels}$$

  Par définition, $\pi_u(u) = P_1(u) \circ \cdots \circ P_r(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et aucun des $P_i(u)$ ne peut être bijectif. Fixons alors $i \in [\![1, r]\!]$ quelconque et $x \neq 0_E$ tel que $x \in \mathrm{Ker}\, P_i(u)$. Si $P_i = X^2 + aX + b$, $u^2(x) + a\,u(x) + b\,x = 0_E$, soit $u^2(x) = -a\,u(x) - b\,x$ et $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Comme $x \neq 0$, c'est une droite ou un plan. ■

Ce lemme de portée générale va en particulier s'appliquer aux isométries. Notons que l'endomorphisme induit par une isométrie sur une droite ou un plan est lui-même une isométrie.

Théorème 15.27 : Réduction des isométries

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors, il existe une base orthonormale de E pour laquelle la matrice représentative de u est :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{bmatrix}$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2r = \dim(E)$, $R(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i \end{bmatrix}$ et $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

Il suffit de raisonner par récurrence forte sur $n = \dim(E)$. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.

- **Initialisation –** Le résultat est évident pour $n = 1$ et reste valable pour $n = 2$. En effet, d'après la classification précédente, il existera une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ associé à l'un des quatre configurations suivantes :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

- **Hérédité –** Soit F un plan ou une droite stable par u. Rappelons que $F^\perp$ est stable par u. Les deux endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont des isométries donc l'hypothèse de récurrence peut s'appliquer. Puisque $E = F \oplus F^\perp$, il suffit concaténer les deux bases orthonormales de F et $F^\perp$ ainsi obtenues. ■

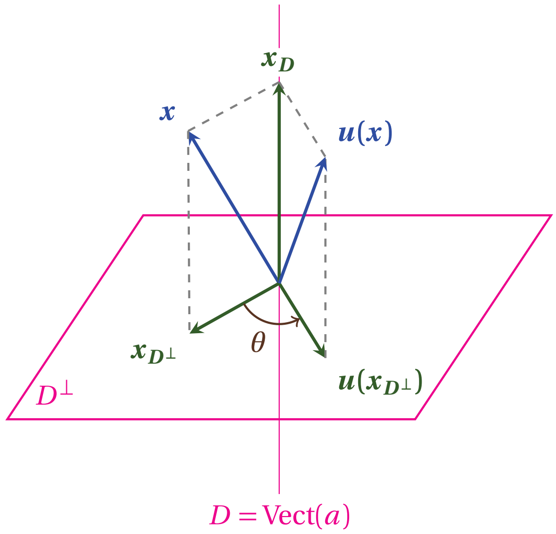
7 – Application à la classification des isométries de l'espace

On cherche dans cette partie à identifier et à interpréter géométriquement les éléments de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$. Soit $u \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$. On sait qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice représentative de u est :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Il n'est guère étonnant que χ_u, de degré impair, admette au moins une racine réelle ! Les racines complexes sont $\pm 1, \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$, avec donc, trois racines réelles si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

- ⋆ Isométries positives : $u \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$
  Dans ce cas, $\det(u) = 1$. Les 3 racines de χ_f sont donc $1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)



Soit a un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : $u(a) = a$. Introduisons alors $D = \mathrm{Vect}(a)$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

u laisse invariant les vecteurs de D et opère comme une rotation plane sur les vecteurs de $D^\perp$. u est appelée rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(a)$ (ou dirigée par a) et d'angle de mesure θ.

Le signe de θ dépend de l'orientation de $\mathrm{Vect}(a)$. Le choix de $-a$ comme vecteur propre associé à 1 aurait conduit à $-\theta$. Mais comment déterminer θ ?

On peut déjà remarquer que $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$ ce qui nous permet de déterminer θ au signe près.
On choisira pour a un vecteur unitaire. Soient $b \in D^\perp$ unitaire et $c = a \wedge b$.
(a, b, c) est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$. D'où l'égalité :

$$\begin{aligned}[a, b, u(b)] = \det(a, b, u(b)) = (u(b)|a \wedge b) &= (\cos(\theta)\cdot b + \sin(\theta)\cdot c|c) \\ &= \sin(\theta)\cdot(c|c) = \sin(\theta)\cdot\|c\|^2 = \sin(\theta)\end{aligned}$$

- Dans la pratique, comme on connaît $\cos\theta$, seul le signe de $\sin\theta$ nous intéresse.
  On peut donc se contenter de vecteurs non unitaires et calculer le signe du produit mixte.
- Cas particuliers : Si $\theta = 0$ alors $u = \mathrm{id}_E$. Si $\theta = \pi$ alors $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

  u est alors une rotation d'angle π par rapport à $\mathrm{Vect}(a)$, c'est un retournement (ou demi-tour).

<u>Plan d'identification</u> :

Soit u l'endomorphisme canoniquement associée à une certains matrice donnée A.

(i) On vérifie que $A^\top A = I_3$, c'est-à-dire $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. f est une isométrie vectorielle.

(ii) On vérifie que $\det(A) = 1$.
u est une isométrie positive, c'est donc une rotation d'axe dirigée par a et d'angle θ.

(iii) On détermine l'axe $\mathrm{Vect}(a)$ de la rotation en résolvant $AX = X$

(iv) L'angle de la rotation est donné par :
$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = [a, b, u(b)]$ avec $\|a\| = \|b\| = 1$ et $b \in \mathrm{Vect}(a)^\perp$.

Exemple

Déterminons les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$$

(a) $A^\top A = I_3$ et $\det(A) = 1$. C'est donc une rotation.

(b) $AX = X \Longleftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. On pose alors $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. L'axe de la rotation est $\operatorname{Vect}(a)$.

(c) $\operatorname{Tr}(A) = 2$ donc $\cos\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ et on montre que $\sin\theta \geqslant 0$. Donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

⋆ Isométries négatives : $u \in O^-(\mathbb{R}^3)$ (pour votre culture, hors programme)
Dans ce cas, $\det(u) = -1$. Les 3 racines de χ_u sont donc $-1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}$. (éventuellement multiples)

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

u est donc la composée d'une rotation d'axe dirigé par a et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\operatorname{Vect}(a)^\perp$. Ces deux isométries commutent car les matrices commutent.

Cas particuliers : si $\theta = \pi$, $u = -\mathrm{id}_E$; si $\theta = 0$, $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. u est la réflexion d'hyperplan $\operatorname{Vect}(a)^\perp$.

<u>Plan d'identification</u> :

Soit u l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice A.

(i) On vérifie que $A^\top A = I_3$, c'est-à-dire $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. u est une isométrie vectorielle.

(ii) On vérifie que $\det(A) = -1$. $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$ et u est la composée d'une rotation d'axe dirigée par a et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\operatorname{Vect}(a)^\perp$.

(iii) On détermine l'axe $\operatorname{Vect}(a)$ de la rotation en résolvant $AX = -X$ (cas 2).

(iv) L'angle de la rotation est donné par : $\operatorname{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta) = [a, b, u(b)]$ avec $\|a\| = \|b\| = 1$ et $b \in \operatorname{Vect}(a)^\perp$. Si $\theta = 0$, f est une simple réflexion.

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine b.o.n.
identité	1	$\{1\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
demi-tour	1	$\{1, -1\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
rotation d'angle θ ($\neq 0, \pi$)	1	$\{1\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- identité	-1	$\{-1\}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
réflexion	-1	$\{1, -1\}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
composée rotation/réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Classification des isométries de l'espace

III | Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

A – Définition et propriétés

Définition 15.28 : Endomorphisme autoadjoint

On appelle endomorphisme autoadjoint tout endomorphisme u de E tel que $u^* = u$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Les endomorphismes autoadjoints sont également qualifiés d'endomorphismes *symétriques*.

Proposition 15.29

$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exemples

Les symétries orthogonales et les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints.

On dispose même d'un résultat un peu plus précis.

Proposition 15.30

Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que p est un projecteur orthogonal sur un sous-espace F. Soient $x, y \in E$.
Comme $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in F^\perp$,

$$\langle p(x)|y\rangle = \langle x_1|y_1 + y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle \quad \text{et} \quad \langle x|p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2|y_1\rangle = \langle x_1|y_1\rangle$$

Alors, $\langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$. D'où $p \in \mathscr{S}(E)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit p un projecteur symétrique sur F parallèlement à G. Soient $(x, y) \in F \times G$.

$$\langle x|y\rangle = \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle = \langle x|0_E\rangle = 0$$

Et donc $F \perp G$, ce qui donne bien $G = F^\perp$. ∎

Proposition 15.31 : Caractérisation des endomorphismes autoadjoints (1)

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors, $u \in \mathscr{S}(E)$ si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\langle u(e_i)|e_j\rangle = \langle e_i|u(e_j)\rangle$.

Démonstration

L'implication est évidente, justifions la réciproque. Soient $x, y \in E$. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

$$\langle u(x)|y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \Big| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle u(e_i)|e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i|u(e_j)\rangle = \dots = \langle x|u(y)\rangle$$

∎

Théorème 15.32 : Caractérisation des endomorphismes autoadjoints (2)

Un endomorphisme f est symétrique ssi sa matrice dans une (toute) base orthonormale est symétrique.

Démonstration

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ avec $u \in \mathscr{L}(E)$.

La décomposition $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j)|e_i\rangle e_i$ donne $m_{i,j} = \langle u(e_j)|e_i\rangle$. De même, $m_{j,i} = \langle u(e_i)|e_j\rangle = \langle e_j|u(e_i)\rangle$.

$$M^\top = M \iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ m_{i,j} = m_{j,i} \iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \langle u(e_j)|e_i\rangle = \langle e_j|u(e_i)\rangle \iff u \in \mathscr{S}(E)$$ ■

On en déduit en particulier que si $\dim(E) = n$, alors $\dim(\mathscr{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

B – Réduction d'un endomorphisme autoadjoint

Rappelons que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. En découle la propriété suivante.

Proposition 15.33

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 15.34

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.

Démonstration

Soient $u \in \mathscr{S}(E)$ et λ, μ deux valeurs propres distinctes de u. Soient maintenant $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$.

$$\langle u(x)|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle = \mu\langle x|y\rangle$$

Comme $\lambda \neq \mu$, $\langle x|y\rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. ■

Lemme 15.35

Tout endomorphisme autoadjoint du plan est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration

Supposons E de dimension 2 et considérons un endomorphisme autoadjoint u.

Dans une base orthonormale, la matrice de u est symétrique, donc de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\chi_u = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$. Son discriminant $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ est positif ou nul. Deux possibilités :

- χ_u admet deux racines réelles distinctes, auquel cas u est diagonalisable. Les deux droites propres sont orthogonales donc la propriété est démontrée.
- χ_u admet une racine double mais alors $a = c$ et $b = 0$ puisque $\Delta = 0$, donc $u = a\,\mathrm{id}_E$. u est là encore diagonalisable dans une base orthonormale. ■

Étendons ce résultat à un espace de dimension finie quelconque et rappelons pour cela que tout endomorphisme (autoadjoint ou non) admet une droite ou un plan stable.

Théorème 15.36 : Théorème spectral

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. En d'autres termes, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u.

Démonstration

On raisonne par récurrence forte sur $\dim(E) = n$. On considère $u \in \mathscr{S}(E)$.

- **Initialisation –** Le résultat est vrai pour $n \leqslant 2$ comme montré précédemment.
- **Hérédité –** Soit u un plan ou une droite stable par u. Rappelons que $F^\perp$ est stable par u. Les deux endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont autoadjoints donc diagonalisables par hypothèse de récurrence. Comme $E = F \oplus F^\perp$, il ne reste plus qu'à concaténer les deux bases orthonormales de F et $F^\perp$ constituées de vecteurs propres de u. ■

On vérifie réciproquement que si E est la somme directe de sous-espaces propres deux à deux orthogonaux d'un endomorphisme u, alors u est autoadjoint.

On déduit du théorème précédent la version matricielle du théorème spectral.

Théorème 15.37 : Théorème spectral (version matricielle)

Toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad P^{-1}MP = P^\top MP \text{ diagonale}$$

Exemple

La matrice $M = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale. On trouve $\chi_M = (X-3)(X-6)(X-9)$ et $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
On peut déterminer le dernier vecteur propre à l'aide du produit vectoriel des deux premiers.
On remarquera que P est la matrice d'une rotation (passage d'une b.o.n.d. à une b.o.n.d).

Le théorème ne s'applique pas lorsque les coefficients de la matrice sont complexes.

Exemple

$M = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$. $\chi_M = X^2$. Si M était diagonalisable, M serait nulle. D'où la contradiction.

C – Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Définition 15.38 : Endormophisme autoadjoint positif / défini positif

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On dit qu'il est :

- positif si pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$.
- défini positif si pour tout $x \in E$ non nul, $\langle u(x)|x\rangle > 0$.

Proposition 15.39 : Caractérisation spectrale

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.

- u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Le spectre de tout endomorphisme autoadjoint est réel.

- Supposons u positif et soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ associée au vecteur propre x.
  Alors, $\langle u(x)|x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \lambda\|x\|^2 \geqslant 0$. Et comme $x \neq 0_E$, $\lambda \geqslant 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- Supposons réciproquement que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale constituée de vecteurs propres de u. Alors, avec des notations évidentes,

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x)|x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i|e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

La preuve du cas défini positif varie peu. ■

Proposition 15.40 : Caractérisation matricielle

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans une certaine base orthonormale.

- u est positif si et seulement s'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^\top A$.
- u est défini positif si et seulement s'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^\top A$.

Démonstration

D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale D et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^\top$.

- Supposons u positif. Alors, $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$. $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C^2$ avec $C = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Ainsi, $M = PC^2P^\top = PCC^\top P^\top = A^\top A$ en posant $A = CP^\top$.
- Supposons que $M = A^\top A$. Alors, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle MX | X \rangle = X^\top MX = X^\top A^\top AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$.

Notons que si u est défini positif, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ comme produit de deux matrices inversibles. Inversement, si A est inversible, $\|AX\| = 0$ si et seulement si $X = 0$. ■