Intégrales doubles

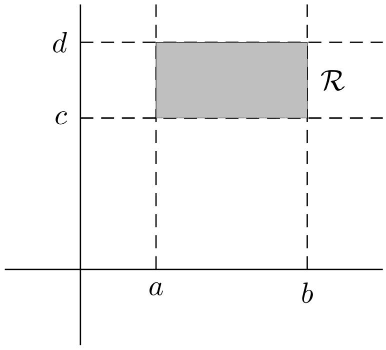
Olivier Sellès, transcrit par Denis Merigoux

Table des matières

1 Intégration sur un pavé

1.1 Intégration de fonctions en escalier

❒ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $c < d$. On pose $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$.



❒ Une subdivision de $\mathcal{R}$ est par définition un couple (σ, τ) où $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ est une subdivision de $[a, b]$ et $\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ est une subdivision de $[c, d]$. Pour $(i, j) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$, on pose $\mathcal{R}_{i,j} =]x_i, x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[$.
❒ Soit $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que φ est en escalier sur $\mathcal{R}$ si φ est bornée sur $\mathcal{R}$ et s'il existe une subdivision $\left((x_i)_{i \in [\![0,m]\!]}, (y_j)_{j \in [\![1,n]\!]}\right)$ de $\mathcal{R}$ telle que $\forall (i, j) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$, φ est constante sur $\mathcal{R}_{i,j}$. Une telle subdivision est dite adaptée à f. On note $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$.

Proposition Si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\varphi + \psi, \varphi\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Pour le démontrer, il suffit de prendre une subdivision s_1 adaptée à φ et une subdivision s_2 adaptée à ψ, et remarquer que si s est plus fine que s_1 et s_2, alors s est adaptée à φ et ψ [a].

Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, $s = \left((x_i)_{i \in [\![0,m]\!]}, (y_j)_{j \in [\![1,n]\!]}\right)$ une subdivision de $\mathcal{R}$ adaptée à φ. Pour $(i, j) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$, notons $C_{i,j}$ la valeur de φ sur $\mathcal{R}_{i,j}$. On pose alors

$$\iint_{\mathcal{R}} \varphi = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{i,j} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

On peut vérifier que cette définition est cohérente et que $\iint_{\mathcal{R}} \varphi$ ne dépende pas du choix de s.

Propriétés

(1) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} (\alpha\varphi + \psi) = \alpha \iint_{\mathcal{R}} \varphi + \iint_{\mathcal{R}} \psi$$

a. On définit le pas $\delta(\sigma)$ d'une subdivision σ par

$$\delta(\sigma) = \max\left(\max_{i \in [\![0,m-1]\!]} (x_{i+1} - x_i), \max_{j \in [\![0,n-1]\!]} (y_{j+1} - y_j)\right)$$

Une subdivision τ est dite plus fine que σ si $\delta(\tau) \leqslant \delta(\sigma)$. Toute ces notions sont définies dans la section 17.1.1.1 du cours complet page 263.

(2) Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, $\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi \geqslant 0$ d'où pour $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, $\varphi \leqslant \psi \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} \psi$ et $\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi\right| \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} |\varphi|$.

(3) Si $\lambda \in [a,b]$ et $\mu \in [c,d]$,

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi = \iint\limits_{[a,\lambda]\times[c,d]} \varphi + \iint\limits_{[\lambda,b]\times[c,d]} \varphi = \iint\limits_{[a,b]\times[c,\mu]} \varphi + \iint\limits_{[a,b]\times[\mu,d]} \varphi$$

1.2 Intégration de fonctions continues

1.2.1 Théorème d'approximation

Soit $f : \mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Démonstration $\mathcal{R}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ car fermé borné, f est continue sur $\mathcal{R}$ donc elle est uniformément continue : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathcal{R}$, $N_\infty(x,y) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas plus petit que α et $\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ une subdivision de $[c,d]$ de pas plus petit que α. Soit $(i,j) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$, si $x = (\lambda, \mu) \in \mathcal{R}_{i,j}$, alors

$$\begin{aligned} N_\infty((\lambda,\mu) - (x_i, y_j)) &= \max(\lambda - x_i, \mu - y_j) \\ &\leqslant \max(x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_i) \\ &\leqslant \alpha \end{aligned}$$

donc $|f(\lambda,\mu) - f(x_i,y_j)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ définie par $\forall x \in \mathcal{R}_{i,j}$, $\varphi(x) = f(x_i,y_j) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et pour $t \in [a,b]$ ou $t \in [c,d]$, $\varphi(x_i,t) = f(x_i,t)$ et $\varphi(t,y_j) = f(t,y_j)$. De même, soit $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ définie par $\forall x \in \mathcal{R}_{i,j}$, $\psi(x) = f(x_i,y_j) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et pour $t \in [a,b]$ ou $t \in [c,d]$, $\psi(x_i,t) = f(x_i,t)$ et $\psi(t,y_j) = f(t,y_j)$.

φ est ψ sont en escalier, et on a bien $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\varphi - \psi \leqslant \varepsilon$.

1.2.2 Définition et propriétés

Soit $f : \mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors l'ensemble $\Lambda^- = \left\{\iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R}), \varphi \leqslant f\right\}$ est majoré, l'ensemble $\Lambda^+ = \left\{\iint\limits_{\mathcal{R}} \psi | \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R}), \psi \geqslant f\right\}$ est minoré et

$$\sup \Lambda^- = \inf \Lambda^+$$

Par définition, on pose $\iint\limits_{\mathcal{R}} f = \inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^-$, que l'on note aussi $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Propriétés Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathbb{R})$.

(1) $\iint\limits_{\mathcal{R}} (\alpha + fg) = \alpha \iint\limits_{\mathcal{R}} f + \iint\limits_{\mathcal{R}} g$.

(2) $f \geqslant 0 \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{R}} f \geqslant 0$ et $f \leqslant g \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{R}} f \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} g$, $\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} f\right| \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} |f|$.

(3) Si $\lambda \in [a,b]$ et $\mu \in [c,d]$,

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{[a,\lambda]\times[c,d]} f + \iint_{[\lambda,b]\times[c,d]} f = \iint_{[a,b]\times[c,\mu]} f + \iint_{[a,b]\times[\mu,d]} f$$

1.3 Sommes de Darboux

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ de $[a,b]$ de pas plus petite que α, pour toute subdivision $\tau = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ de $[c,d]$ de pas plus petit que α et pour tout choix de points $\xi = (\xi_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,m-1]\!]\times[\![0,n-1]\!]}$ [a], on a

$$\left| \iint_{\mathcal{R}} f - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(\xi_{i,j}) \right| \leqslant \varepsilon$$

a. On a donc $\forall (i,j) \in [\![0,m-1]\!] \times [\![0,n-1]\!]$, $\xi_{i,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, f est continue sur le compact $\mathcal{R}$ donc elle est uniformément continue : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall M, P \in \mathcal{R}$, $N_\infty(M - P) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(M) - f(P)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas plus petit que α, $\tau = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ une subdivision de $[c,d]$ de pas plus petit que α, pour $(i,j) \in [\![0,m-1]\!] \times [\![0,n-1]\!]$ on choisit $M_{i,j} \in [x_{i+1} - x_i] \times [y_{i+1} - y_i]$. Soit

$$\begin{aligned}
\Delta &= \iint_{\mathcal{R}} f - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(M_{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint_{\mathcal{R}_{i,j}} f - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint_{\mathcal{R}_{i,j}} f(M_{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint_{\mathcal{R}_{i,j}} (f(x,y) - f(M_{i,j}))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\Delta| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint_{\mathcal{R}_{i,j}} |f(x,y) - f(M_{i,j})|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Or, si $M, P \in \mathcal{R}_{i,j}$, alors $N_\infty(P - M) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(P) - f(M)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$ d'où

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \iint_{\mathcal{R}_{i,j}} \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

1.4 Théorème de Fubini

Lemme Soit $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors :

(1) $x \in [a,b] \longmapsto \displaystyle\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y$ est bien définie et continue ;

(2) $y \in [c,d] \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x$ est bien définie et continue.

Montrons la première assertion, la deuxième s'en déduisant par symétrie des rôles de x et y. soit $x \in [a,b]$.

❒ Montrons d'abord que $f(x,\cdot) : y \in [c,d] \longrightarrow f(x,y)$ est continue. Soit $\varepsilon > 0$, $y_0 \in [c,d]$, f est continue en (x,y_0) donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall (s,t) \in [a,b] \times [c,d]$, $N_\infty((s,t)-(x,y_0)) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s,t) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon$. Pour $y \in [c,d] \cap [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$, on a $N_\infty((x,y)-(x,y_0)) = |y - y_0| \leqslant \alpha$ donc $|f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon$ donc $f(x,\cdot)$ est continue en y_0 donc sur $[c,d]$. On en déduit que $\displaystyle\int_c^{df} f(x,y)\ \mathrm{d}y$ est bien définie.

❒ Posons donc pour $x \in [a,b]$ $\varphi(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y$. f est continue sur la compact $\mathcal{R}$ donc elle est uniformément continue : soit $\varepsilon > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que $\forall (s,t),(u,v) \in \mathcal{R}$, $N_\infty((s,t)-(u,v)) \leqslant \beta \Rightarrow |f(s,t) - f(u,v)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{d-c}$. Soient alors $x, x' \in [a,b]$ tels que $|x - x'| \leqslant \beta$, alors

$$\begin{aligned} \left|\varphi(x) - \varphi(x')\right| &= \left|\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y - \int_c^d f(x',y)\ \mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \int_c^d \left|f(x,y) - f(x',y)\right|\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Or $\forall y \in [c,d]$, $N_\infty((x,y)-(x',y)) = |x - x'| \leqslant \beta$ donc $|f(x,y) - f(x',y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{d-c}$ donc

$$\left|\varphi(x) - \varphi(x')\right| \leqslant \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\ \mathrm{d}y \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, φ est continue sur $[a,b]$ et considérer $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x$ est légitime.

Théorème

Soit $f : \mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Darboux il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ de $[a,b]$ de pas plus petit que α, pour toute subdivision $\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ de $[c,d]$ de pas plus petit que α et pour tout choix de point $(M_{i,j})_{(i,j) \in [\![0,m-1]\!] \times [\![0,n-1]\!]}$, on a

$$\left|\iint_{\mathcal{R}} f - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(M_{i,j})\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{b-a}{m} < \alpha$ et $\dfrac{d-c}{n} < \alpha$, on pose pour $(i,j) \in [\![0,m]\!] \times [\![0,n]\!]$ $x_i = a + k\dfrac{b-a}{m}$ et $y_j = c + k\dfrac{d-c}{n}$. $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ sont deux subdivision de $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement de pas plus petits que α donc, en prenant $\forall\,(i,j) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$, $M_{i,j} = f(x_i, y_j)$, on a

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} f - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n} f(x_i, y_j)\right| \leqslant \varepsilon$$

Fixons m et considérons n variable. On a alors, en réarrangeant l'expression, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{d-c}{n} < \alpha$,

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} f - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b-a}{m}\left(\frac{d-c}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_i, c + j\frac{d-c}{n}\right)\right)\right| \leqslant \varepsilon \quad (*)$$

Pour $i \in [\![0, m-1]\!]$, on remarque que $\dfrac{d-c}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_i, c + j\frac{d-c}{n}\right)$ est une somme de Riemann [a] associée à la fonction continue $f(x_i, \cdot)$. Ainsi,

$$\frac{d-c}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_i, c + j\frac{d-c}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_c^d f(x_i, y)\ \mathrm{d}y$$

En faisant tendre dans $(*)$ $n \to +\infty$ toujours à m fixé on obtient

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} f - \frac{b-a}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\int_c^d f(x_i, y)\ \mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon \quad (**)$$

Or $\dfrac{b-a}{m}\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\int_c^d f(x_i, y)\, y\, \mathrm{d}y$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \in [a,b] \longmapsto \displaystyle\int_c^d f(x_i, y)\ \mathrm{d}y$ donc

$$\frac{b-a}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\int_c^d f(x_i, y)\, y\, \mathrm{d}y \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

En faisant tendre $m \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ dans $(**)$, on a bien

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{R}} f - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\right| = 0$$

d'où le résultat. On aurait obtenu de même la deuxième inégalité en permutant les deux sommes.

Exemples

(1) Soit $f : (x,y) \in \mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow g(x)\,h(y)$ avec $g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}([c,d], \mathbb{R})$. Alors f est continue sur $\mathcal{R}$ et on retrouve un résultat utilisé en physique :

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,h(y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \times \int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

[a] Voir la section 17.5.1 du cours complet page 274.

(2) Calculons :

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x+y} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \left(\ln(2+y) - \ln(1+y)\right)\,\mathrm{d}y$$

Or pour $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(a+x)\,\mathrm{d}x &= \left[x\ln(a+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{a+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(a+1) - \int_0^1 \left(1 - \frac{a}{x+a}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(a+1) - 1 + a\left(\ln(a+1) - \ln(a)\right) \\
&= (1+a)\ln(a+1) - 1 - a\ln a
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x+y} &= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 2 \\
&= \ln\left(\frac{27}{16}\right)
\end{aligned}$$

2 Fonctions intégrables

2.1 Fonctions bornées intégrables sur un rectangle

Soit $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle, $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée : $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall P \in \mathcal{R}$, $m \leqslant f(P) \leqslant M$. L'ensemble $\mathcal{E}^+ = \{\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\,|\psi \geqslant f\}$ n'est pas vide et $\forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\psi \geqslant m \Rightarrow \iint\limits_{\mathcal{R}} \psi \geqslant m(b-a)(d-c)$. Ainsi, $\left\{\iint\limits_{\mathcal{R}} \psi | \psi \in \mathcal{E}^+\right\}$ est minorée et admet une borne inférieure notée $\overset{\sup}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f$.

De même, $\mathcal{E}^- = \{\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\,|\varphi \leqslant f\}$ n'est pas vide et $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-$, $\forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ donc $\iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} f \leqslant \iint\limits_{\mathcal{R}} \psi$ donc l'ensemble $\left\{\iint\limits_{\mathcal{R}} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}^-\right\}$ est majoré et on note $\overset{\inf}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f$ sa borne supérieure. On a donc toujours

$$\overset{\inf}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f \leqslant \overset{\sup}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f$$

f est dite intégrable si $\overset{\inf}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f = \overset{\sup}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f$, on pose alors $\iint\limits_{\mathcal{R}} f = \overset{\inf}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} = \overset{\sup}{\iint\limits_{\mathcal{R}}} f$.

Par exemple, toute les fonctions en escalier et toutes les fonctions continues sur $\mathcal{R}$ sont intégrables sur $\mathcal{R}$.

Petite histoire Donnons nous A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ [a], soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, $\mathcal{R}$ un rectangle tel que $A \subset \mathcal{R}$.

On définit

$$\widetilde{f} : \begin{array}{l} \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases} \end{array}$$

On remarque que $\widetilde{f} = f \times \chi_A$ où χ_A est la fonction caractéristique de A : pour $(x,y) \in \mathcal{R}$, $\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}$. Il est clair que $\widetilde{f}$ est bornée.

On dit que f est intégrable sur A et $\widetilde{f}$ est intégrable sur $\mathcal{R}$. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\iint_A f = \iint_{\mathcal{R}} \widetilde{f}$.

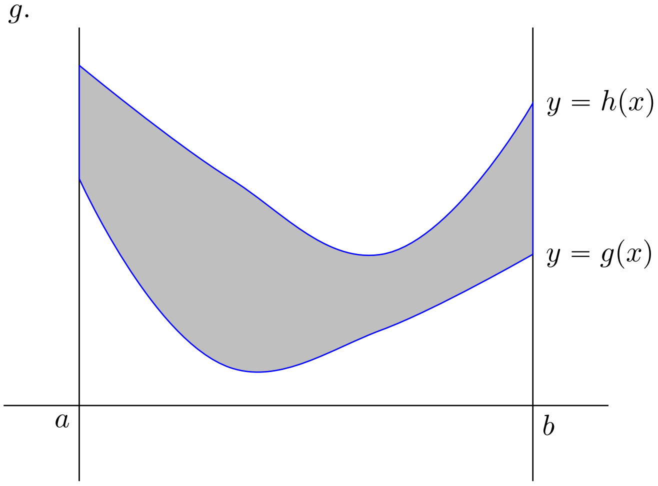
On dit que A est mesurable si la fonction constante égale à 1 est intégrable sur A. Si c'est le cas, l'aire de A est $\displaystyle\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On peut vérifier que la définition ne dépend pas du rectangle $\mathcal{R}$ choisi.

2.2 Compacts élémentaires, compacts simples

2.2.1 Compacts élémentaires

❒ Un compact élémentaire de type 1 est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b] \text{ et } y \in [h(x), g(x)]\}$avec $a < b$ et $g, h \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $h \geqslant g$.



❒ Un compact élémentaire de type 2 est une partie de $\mathbb{R}^2$ du type $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c,d] \text{ et } x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$ où $c < d$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([c,d], \mathbb{R})$, $\varphi \leqslant \psi$.

Par exemple, le disque unité $\overline{\mathcal{D}}$ est l'ensemble

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-1,1] \text{ et } y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [-1,1] \text{ et } x \in \left[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\right]\right\} \end{aligned}$$

[a] En pratique, A est un compact.

Théorème (admis)

❒ Soit A un compact élémentaire de type 1 : $\exists a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\exists g, h \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ avec $g \leqslant h$ tels que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b] \text{ et } y \in [g(x), h(x)]\right\}$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est intégrable sur A et

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$

En particulier, A est mesurable et l'aire de A est $\displaystyle\int_a^b (h(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$.

❒ Soit A un compact élémentaire de type 2 : $\exists c, d \in \mathbb{R}$ avec $c < d$, $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}([c,d], \mathbb{R})$ avec $\varphi \leqslant \psi$ tels que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c,d] \text{ et } x \in [\varphi(y), \psi(y)]\right\}$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est intégrable et

$$\iint_A f = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$

En particulier, A est mesurable et son aire est $\displaystyle\int_c^d (\psi(y) - \varphi(y))\ \mathrm{d}y$.

Exemples

(1) Posons $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ le quart de cercle unité. Calculons $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, pour cela on remarque que $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1] \text{ et } y \in \left[0, \sqrt{1-x^2}\right]\right\}$ est un compact élémentaire de type 1 et donc, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{1+x^2}\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2-\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[2\arctan x - x\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2) Calculons l'aire de l'ellipse :

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-a,a] \text{ et } y \in \left[-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]\right\}$$

D'après le théorème,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{E}) &= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= 4b\int_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

car $x \longmapsto \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ est paire. En posant $x = a\sin u$, $\mathrm{d}x = a\cos u\mathrm{d}u$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{E}) &= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cos u\,\mathrm{d}u\\ &= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \text{ car } \forall u \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \cos u \geqslant 0\\ &= 4ab\left[\frac{1}{2}u - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \pi ab\end{aligned}$$

2.2.2 Compacts simples

Un compact simple est une réunion finie de compacts élémentaires.

Théorème (admis)

Soit $L = \bigcup_j K_j$ où $\forall j$, K_j est un compact élémentaire tel que si $i \neq j$, $K_i \cap K_j$ est d'aire nulle. Si $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est intégrable et

$$\iint_L f = \sum_j \iint_{K_j} f$$

Remarque

- Le graphe d'une fonction continue $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un compact élémentaire d'aire nulle : si $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a,b] \text{ et } y \in [\varphi(x), \varphi(x)]\right\}$.

3 Changements de variable

3.1 Changements de variable affine

Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ affine : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x_0,y_0) + \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ est la matrice de la partie linéaire de T.

3.1.1 Théorème (admis)

Soit K une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, $f : T(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, alors $f \circ T$ est intégrable et

$$\iint_{T(K)} f = \iint_K |\det T| \, f \circ T$$

En particulier, si K est une partie mesurable, alors $T(K)$ aussi et $\mathcal{A}(T(K)) = |\det T| \, \mathcal{A}(K)$.

Exemples

- Retrouvons l'aire de l'ellipse. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $0 < b < a$ est l'image du disque $\overline{\mathcal{D}}(0,a)$ par l'affinité orthogonale T d'axe (Ox) et de rapport $\dfrac{b}{a}$: $T : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left(x, \dfrac{b}{a} y\right)$. En effet, si $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $M'(x',y') = T(M)$, alors
$$\begin{aligned} M \in \overline{\mathcal{D}}(0,a) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow M' \in A \end{aligned}$$
On a de plus $\det T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{vmatrix} = \dfrac{b}{a}$ donc $\mathcal{A}(A) = \dfrac{b}{a} \mathcal{A}\left(\overline{\mathcal{D}}(0,a)\right) = \pi a b$.
- Une isométrie affine conserve l'aire, une similitude de rapport $k > 0$ multiplie l'aire par k^2.
- Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x - y \leqslant 3 \text{ et } -2 \leqslant x + 2y \leqslant 1\right\}$. Il s'agit de calculer $\displaystyle\iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

  Posons $\varphi(x,y) = (x - y, x + 2y)$. φ est affine (car linéaire) et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{BC}_2}\left(\varphi^{-1}\right) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{R} = [0,3] \times [-2,1]$, alors $\mathcal{D} = \varphi^{-1}(\mathcal{R})$ et $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi^{-1}(u,v) = \dfrac{1}{3}(2u + v, -u + v)$ donc d'après le théorème précédent,
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\mathcal{R}} \frac{2u+v}{3} \frac{-u+v}{3} \left|\det \varphi^{-1}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\int_{-2}^1 \left(-2u^2 + uv + v^2\right) \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \left[-2u^2 v + \frac{uv^2}{2} + \frac{v^3}{3} \right]_{-2}^1 \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(-2u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{3} - 4u^2 - 2u + \frac{8}{3} \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(-6u^2 - \frac{3}{2} u + 3 \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{27} \left[-2u^3 - \frac{3}{4} u^2 + 3u \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{27} \left(-2 \times 27 - \frac{27}{4} + 9 \right) \\ &= -2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{23}{12} \end{aligned}$$

3.2 Changement de variable en coordonnées polaires

Théorème (admis)

Soit A un compact de $\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi]$ on pose $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. φ est continue donc $\varphi(A)$ est un compact. Soit f une fonction intégrable sur $K = \varphi(A)$ [a], alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur A et

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f\circ\varphi(r,\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

a. En pratique, $\varphi(A)$ est un compact simple et f est continue donc intégrable sur $\varphi(A)$.

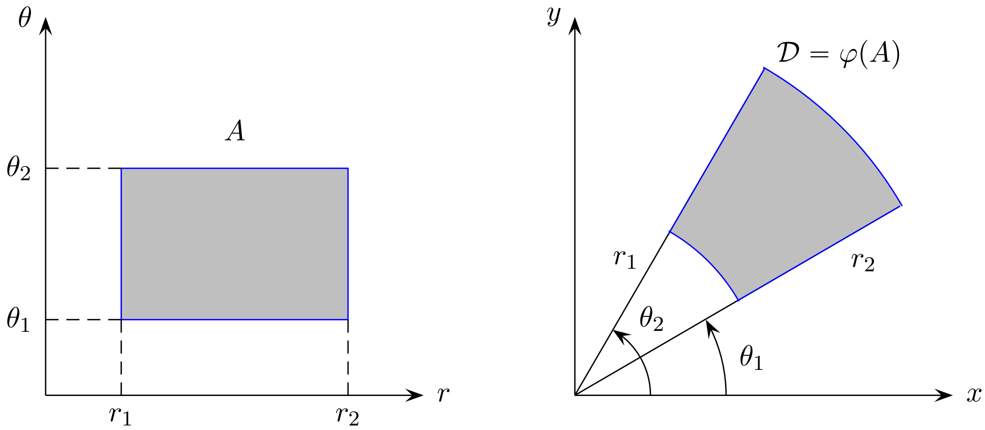
Exemples

(1) Soit $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}(0,R)$, alors $\mathcal{D} = \varphi(A)$ où $A = [0,R]\times[0,2\pi]$. Pour toute fonction continue $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a donc

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_A f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^R r\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta\right)\ \mathrm{d}r\end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_0^R r\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\ \mathrm{d}r = \pi R^2$.

(2) Soit $A = [r_1, r_2]\times[\theta_1,\theta_2]$ avec $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2$ et $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$, $\mathcal{D} = \varphi(A)$.

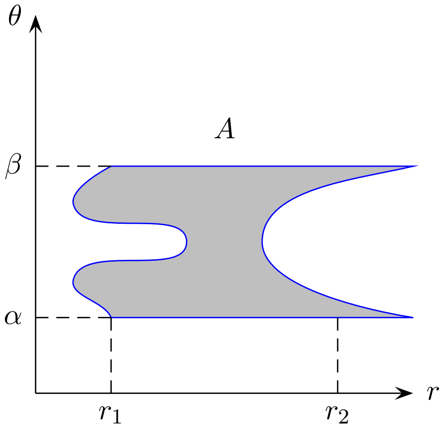


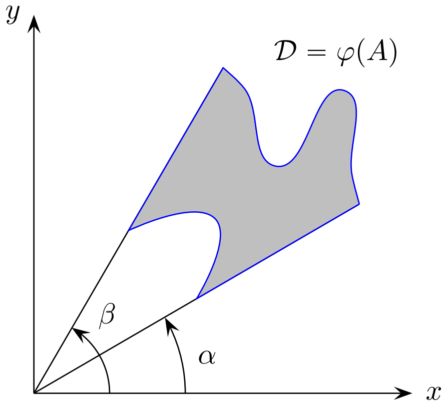
Si $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f = \int_{r_1}^{r_2} r\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r$. En particulier,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \int_{r_1}^{r_2} r\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta\right)\ \mathrm{d}r \\ &= \frac{(\theta_2-\theta_1)\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2}\end{aligned}$$

(3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C}([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ avec $\rho_1 \leqslant \rho_2$. On pose

$$A = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [\alpha,\beta] \text{ et } \rho_1(\theta) \leqslant r \leqslant \rho_2(\theta)\right\}$$





Pour toute fonction f continue sur $\mathcal{R}$, on a

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \mathrm{d}r \right)\ \mathrm{d}\theta$$

En particulier, $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)}{2} \mathrm{d}\theta$ et si $\rho \in \mathcal{C}([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ est positive et $\mathcal{D} = \varphi(A)$ où

$$A = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [\alpha,\beta] \text{ et } r \in [0, \rho(\theta)] \right\}$$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\ \mathrm{d}\theta$.

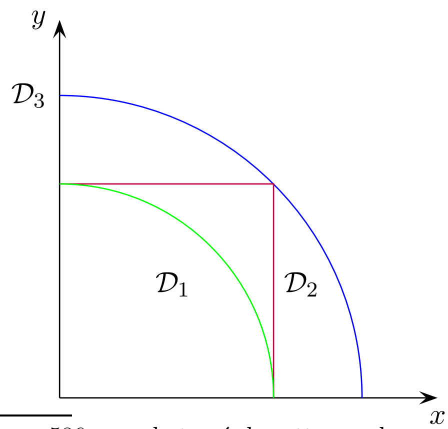
(4) Calculons l'aire de la cardioïde [a] $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$ et $\theta \in [-\pi,\pi]$. On pose $\mathcal{D} = \varphi(A)$ avec

$$A = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [-\pi,\pi] \text{ et } r \in [0, a(1+\cos\theta)] \right\}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2\ \mathrm{d}\theta \\
&= a^2 \int_0^\pi \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\ \mathrm{d}\theta \text{ car cos est paire} \\
&= a^2 \left(\pi + 2\left[-\sin\theta\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^\pi \right) \\
&= \frac{3\pi}{2} a^2
\end{aligned}$$

(5) Calculons l'aire de la surface de Gauss : $L = \lim\limits_{r\to+\infty} I(r) = \displaystyle\int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$. Posons pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $\mathcal{D}_1 = \overline{\mathcal{D}}(0,r)$, $\mathcal{D}_2 = [0,r]^2$ et $\mathcal{D}_3 = \overline{\mathcal{D}}\left(0, r\sqrt{2}\right)$. On a tout de suite $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_3$.



a. Voir section 29.2.3.2 du cours complet page 586 pour le tracé de cette courbe

f est positive donc $0 \leqslant \displaystyle\iint_{\mathcal{D}_1} f \leqslant \iint_{\mathcal{D}_2} f \leqslant \iint_{\mathcal{D}_3} f$ or

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}_2} f &= \iint_{[0,1]^2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= I^2(r) \\
\iint_{\mathcal{D}_1} f &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right]_0^r \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} \\
\iint_{\mathcal{D}_3} f &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2r^2}\right) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$\lim I(r)$ existe car $r \longmapsto I(r)$ est croissante est majorée [a], alors $I(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ par encadrement.

4 Complément : intégrales triples

4.1 Sur des pavés

❐ Un pavé [a] est une partie de $\mathbb{R}^3$ du type $\mathcal{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ avec $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $a_i < b_1$.
❐ Une subdivision de P est la donnée de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ où $\forall i \in [\![1,3]\!]$, σ_i est une subdivision de $[a_i, b_i]$.
❐ On définit les fonctions en escalier sur un pavé : $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier si φ est bornée et s'il existe une subdivision $\sigma = \left((x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}, (y_j)_{j\in[\![0,m]\!]}, (z_k)_{k\in[\![0,l]\!]}\right)$ de $\mathcal{P}$ telle que $\forall (i,j,k) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, m-1]\!] \times [\![0, l-1]\!]$, φ est constante sur $\mathcal{P}_{i,j,k} =]x_i, x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[\times]z_k, z_{k+1}[$. On note $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{P}$.

a. « Il y a deux manières de définir un pavé : soit c'est ce que vous jetez sur les flics quand vous êtes étudiant en colère, soit c'est un parallélépipède rectangle. »

Théorèmes

a. « Left to the reader ! »

❒ Soit $\varepsilon > 0$. Si $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.
❒ Si φ est en escalier sur $\mathcal{P}$ alors, avec les notations de la définition, on pose

$$\iiint_{\mathcal{P}} \varphi = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{z=0}^{l-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)\lambda_{i,j,k}$$

où $\lambda_{i,j,k}$ est la valeur de φ sur $\mathcal{P}_{i,j,k}$.
❒ Si f est une fonction continue sur $\mathcal{P}$, alors l'intégrale triple de f est définie comme :
– la borne supérieure de $\left\{ \iiint_{\mathcal{P}} \varphi | \varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}) \text{ et } \varphi \leqslant f \right\}$;
– la borne inférieure de $\left\{ \iiint_{\mathcal{P}} \psi | \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{P}) \text{ et } \psi \geqslant f \right\}$.
Ces deux quantités étant égales.

Propriétés On a tout de suite la linéarité, positivité et additivité par rapport au domaine de la triple intégrale.

Théorème de Fubini

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors

$$\iiint_{\mathcal{P}} f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Et l'ordre des intégrations est indifférent.

4.2 Sur une partie bornée

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^3$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ un pavé tel que $A \subset \mathcal{P}$. On dit que f est intégrable sur A si $f\chi_A$ est intégrable sur $\mathcal{P}$ [a].

a. Pour la définition de χ_A, voir la section 2.1 page 8.

Proposition Il y a des façons simples de calculer des intégrales sur certains domaines. Pour

$$A = \left\{ \left(x, y, z \in \mathbb{R}^3\right) | x \in [a, b], \, y \in [c, d] \text{ et } z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)] \right\}$$

où $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$, f est intégrable et

$$\iiint_A f = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Donc A est mesurable si et seulement si χ_A est intégrable et, si on note $\mathcal{V}(A)$ le volume de A, alors

$$\mathcal{V}(A) = \iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Exemple Prenons

$$\begin{aligned} A = \overline{\mathcal{B}}\,(0,R) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | z\in[-R,R] \text{ et } x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2\right\} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{A} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \left(\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}\left(0,\sqrt{R^2-z^2}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2-z^2\right)\,\mathrm{d}z \\ &= \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

4.3 Changements de variable

4.3.1 Affine

Soit A une partie bornée, T une transformation affine et $f : T(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, alors

$$\iiint\limits_{T(A)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\det T| \iiint\limits_{A} f\circ T(u,v,w)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

En particulier, le volume de $T(A)$ est $\mathcal{V}(T(A)) = |\det T|\,\mathcal{V}(A)$

4.3.2 Sphériques

On pose pour $(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ $\psi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. La matrice jacobienne [a] de ψ en (r,θ,φ) est alors

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

d'où, en prenant le déterminant,

$$\begin{aligned} \operatorname{Jac}\psi(r,\theta,\varphi) &= r^2 \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\left[(-1)^4\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + (-\sin\theta)(-1)^5 \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}\right] \\ &= r^2\left[\cos\theta(\cos\theta\sin\theta) + \sin\theta\left(\sin^2\theta\right)\right] \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

a. Voir section 31.2.3.1 du cours complet page 634.

Théorème

Soit A un compact de $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, si $f : \psi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\iiint\limits_{\psi(A)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{A} r^2 \sin\theta f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

En particulier,

$$\mathcal{V}(\psi(A)) = \iiint\limits_{A} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Exemple Recalculons le volume de la sphère : $\overline{\mathcal{B}}(0, R) = \psi([0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])$ donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\left(\overline{\mathcal{B}}(0, R)\right) &= \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}r \\
&= \left(\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) \times \left(\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{1}{3}R^3 \left[-\cos\theta\right]_0^\pi 2\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

4.3.3 Cylindriques

Soit $\psi : (r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. La jacobienne de ψ en (r, θ, z) est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Jac}\psi(r, \theta, z) = r$$

Théorème

Soit A un compact de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, $f : \psi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, alors

$$\iiint\limits_{\psi(A)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{A} r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

En particulier, si $\psi(A)$ est mesurable, alors

$$\mathcal{V}(\psi(A)) = \iiint\limits_{A} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Exemple Soit $\mathcal{C}$ le cylindre $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in [0, h] \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$. $\mathcal{E} = \psi(A)$ où $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{E}) &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}r \\
&= \left(\int_0^R r\,\mathrm{d}r\right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_0^h \mathrm{d}z\right) \\
&= \pi R^2 h
\end{aligned}$$