devoir à faire

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Prouver que la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.*
   Supposons, par l'absurde, que A soit semblable à une matrice diagonale.
   En considérant f l'endomorphisme canoniquement associé à A, il existe donc une base (X_1, X_2, X_3) tel que la matrice de f dans cette base soit diagonale.
   Il existe ainsi $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX_1 = \lambda X_1$ cad $X_1 \in \ker(A - \lambda I_3)$.
   Déterminons donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque, $\ker(A_\lambda I_3)$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a
   $$X \in \ker(A_\lambda I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda^3 z \\ x = \lambda^2 z \\ y = \lambda z \end{cases}$$
   Ainsi, si $\lambda \neq 0$, alors $\ker(A - \lambda I_3) = \{0\}$.
   Par suite, X_1, X_2 et X_3 appartiennent au noyau de A. Or, il est égal à $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui contredit la liberté de la famille (X_1, X_2, X_3).
   Par conséquent, la matrice A n'est pas semblable à une matrice diagonale.
2. *Calculer A^2 et A^3.*
   On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) *Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.*
   On a $AM = aA + bA^2 + cA^3 = MA$.
   (b) *Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.*
   Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
   On a alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$
   donc $b = c = f = 0$, $a = e = i$ et $d = h$.
   Ainsi, $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI_3 + dA + gA^2$.
   (c) *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.*
   On a donc $M \in \mathcal{S}$ si, et seulement s'il existe a, b et c trois réels tels que $M = aI_3 + bA + cA^2$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) *Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.*
   On a $M^2 = PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^2P^{-1}$. Comme P est inversible, on a $M^2 = 0 \Leftrightarrow M^2P = 0 \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$ donc $M^2 \neq 0$.
   De plus, $M^3 = PA^3P^{-1} = 0$ donc $M \in \mathcal{S}'$.

   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
   i. *Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.*
   On a $AM = MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$.
   ii. *Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.*
   On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient donc

ou $M^2 \neq 0$ donc son rang est strictement positif puis son noyau est de dimension strictement inférieur 3.

iii. *Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(X, MX, M^2X\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Il s'agit d'une famille de 3 vecteurs, les calculs pour montrer la liberté dépendent du vecteur choisi.

iv. *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

Elle est égale à A.

v. *En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.*

Cela découle de la formule de changement de bases.

(c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

i. *Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.*

Comme M^2 est non nul, un de ses vecteurs colonnes est non nul, s'il s'agit du premier, alors le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient

ou comme 4bi

ii. *En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.*

Comme dans l'exemple, on montre que la famille $\mathcal{B} = \left(X, MX, M^2X\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'une famille de 3 vecteurs.

Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 X + \lambda_2 MX + \lambda_3 M^2X = 0$.

Alors $M^2\left(\lambda_1 X + \lambda_2 MX + \lambda_3 M^2X\right) = \lambda_1 M^2X = 0$. Comme M^2X est non nul, on en déduit que $\lambda_1 = 0$ puis que $\lambda_2 MX + \lambda_3 M^2X = 0$. Ainsi, $M\left(\lambda_2 MX + \lambda_3 M^2X\right) = \lambda_2 M^2X = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$.

La matrice de f dans cette base étant égale à A, d'après la formule de changement de bases, il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$M = PAP^{-1}.$$

(d) *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.*

On a prouvé que $M \in \mathcal{S}'$ si, et seulement s'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.