

Электричество и магнетизм

Лекция 2

Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции

Поток вектора через замкнутую поверхность должен быть равен нулю.

Таким образом:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

*Это теорема Гаусса для Φ_B (в интегральной форме): **поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.***

В природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции.
Заменив поверхностный интеграл объемным, получим:

$$\int_V \nabla B dV = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0.$$

*Магнитное поле обладает тем свойством, что его **дивергенция** всюду равна нулю:*

Электростатического поля может быть выражено скалярным потенциалом φ , а *магнитное поле – вихревое, или соленоидальное*

Вихревой характер магнитного поля

- В электростатическом поле силовые линии начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Силовые линии разомкнуты.
- В магнитном поле силовые линии замкнуты.
- Поле, в котором силовые линии замкнуты называется вихревым.
- Магнитное поле – вихревое поле. Магнитных зарядов в природе не существует.

- Возникают магнитные поля в присутствии токов и являются вихревыми полями в области, где есть токи.

- Магнитные линии образуют петли вокруг токов.

- Не имея ни конца, ни начала, линии **B** возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли.

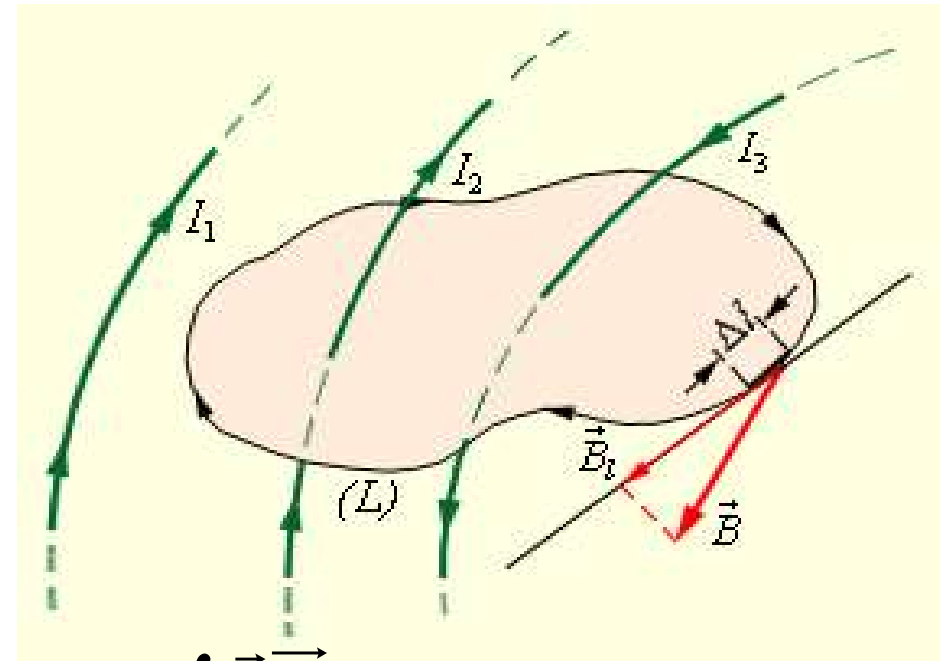
- В любых, самых сложных случаях линии **B** не исходят из точек.

- Утверждение, что $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, справедливо всегда.

ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

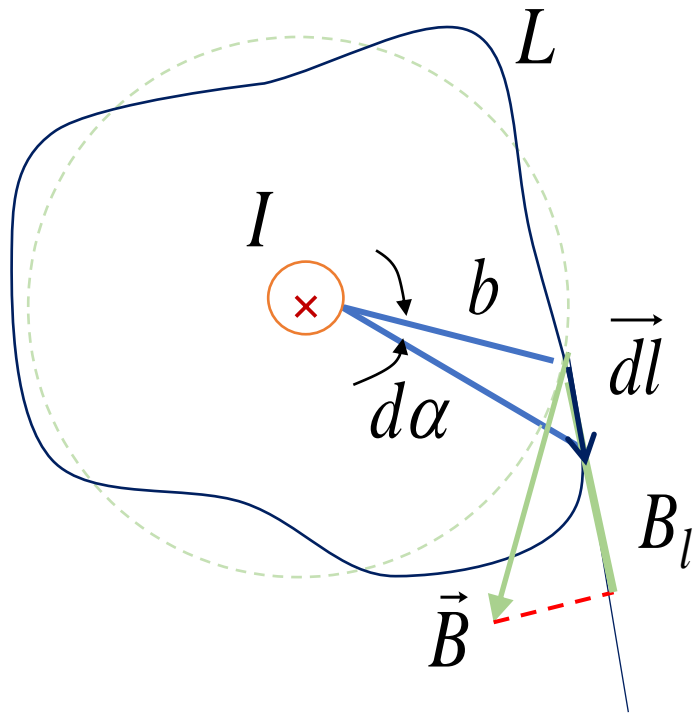
Циркуляция вектора магнитной индукции вдоль любого замкнутого контура пропорциональна алгебраической сумме токов, **охватываемых** этим контуром.



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_3 - I_2)$$

Пояснение: I_3 берется со знаком «+», так как составляет с обходом контура правовинтовую систему, соответственно I_2 - «-»

ЦИРКУЛЯЦИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ПРЯМОГО ТОКА



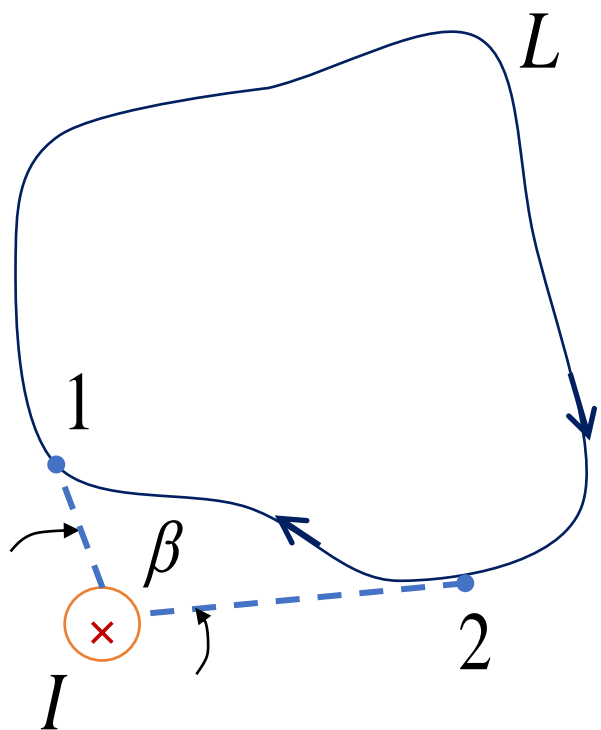
$$\vec{B}d\vec{l} = B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} b d\alpha$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\alpha$$

$$\oint_L d\alpha = 2\pi \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$$

ЦИРКУЛЯЦИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ПРЯМОГО ТОКА (ток вне контура)



$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_1^2 d\alpha + \int_2^1 d\alpha \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\beta - \beta) = 0$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$$

Таким образом, если ток **не** охватывается контуром, циркуляция вектора \vec{B} вдоль этого контура равна нулю!

РОТОР ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$\sum_{i=1}^N I_i = \int_S \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S}$$

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.}$$

СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0;$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$[\nabla \vec{E}] = 0$$

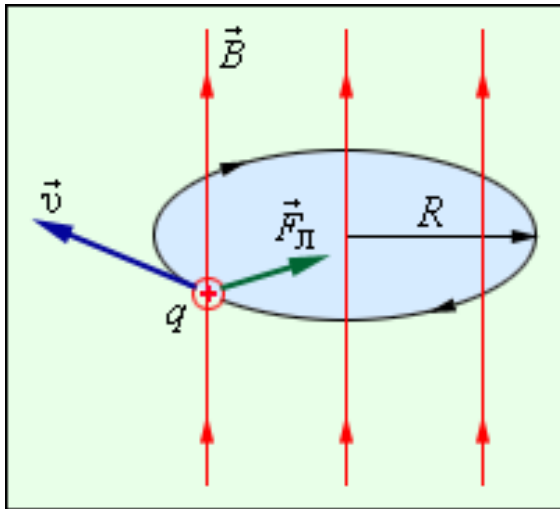
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}.$$

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Силой Лоренца называется сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся во внешнем электромагнитном поле.

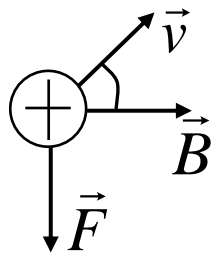
$$\vec{F} = [e \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}]$$



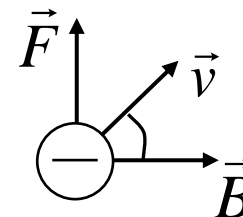
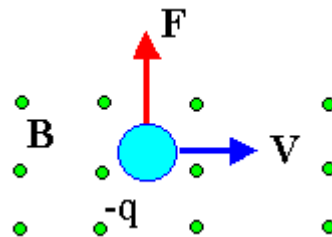
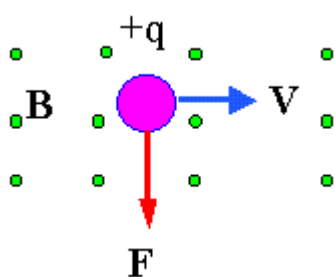
Направление силы Лоренца зависит от знака заряда и перпендикулярно к плоскости, в которой лежат вектора V и B

Таким образом сила Лоренца **максимальна**, если направление движения частицы перпендикулярно магнитному полю ($\alpha = \pi/2$),
равна нулю, если частица движется вдоль направления поля B ($\alpha = 0$).

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости и поэтому она не совершает работы, не изменяет модуль скорости заряда и его кинетической энергии. Но направление скорости изменяется непрерывно



$$\vec{F} = q \cdot [\vec{V} \times \vec{B}]$$



$$\vec{F} = -q \cdot [\vec{V} \times \vec{B}]$$

Сила Лоренца будет изменять только направление скорости, заставляя заряд описывать криволинейную траекторию.

Приравнивая силу Лоренца

$$\mathbf{F} = e \cdot V \cdot B \cdot \sin \alpha$$

центробежной силе

$$\mathbf{F} = \frac{mv^2}{R}$$

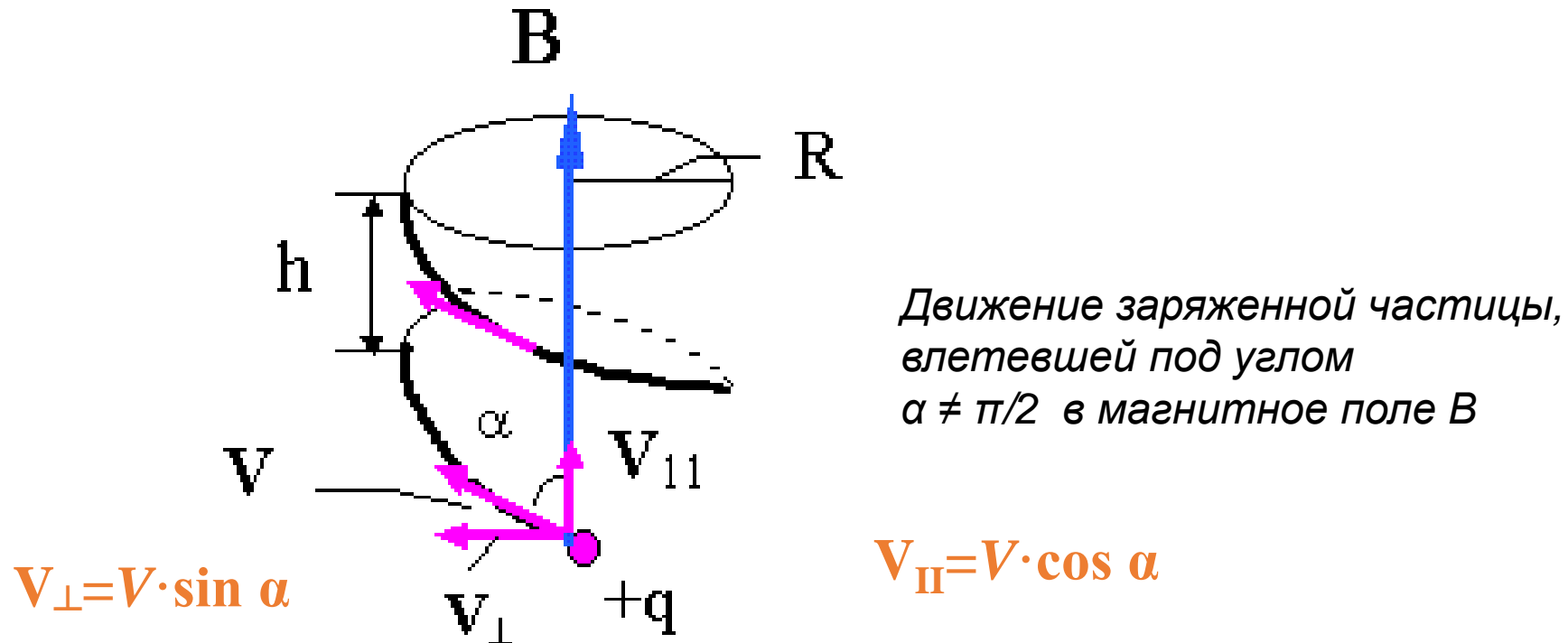
можно рассчитать радиус кривизны R траектории заряда в том месте, где существует магнитное поле B:

$$e \cdot V \cdot B \cdot \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{m \cdot v}{e \cdot B \cdot \sin \alpha}$$

Если магнитное поле однородное и постоянное, то радиус кривизны траектории не меняется (Const).

Если составляющая скорости вдоль направления поля $V_{||} = V \cdot \cos \alpha \neq 0$, то заряд будет описывать винтовую линию вокруг оси, ориентированной по направлению поля.



При $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$, заряд будет описывать окружность, плоскость которой перпендикулярна к направлению поля.

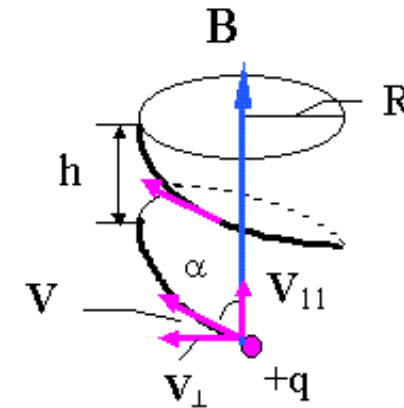
Период обращения частицы (время одного оборота) не зависит от скорости, если скорость частицы много меньше скорости света в вакууме. В противном случае период обращения частицы возрастает в связи с возрастанием релятивистской массы.

Частота обращения вокруг направления магнитного поля $\omega = \frac{v}{R} = \frac{e}{m} B$ не зависит от скорости электронов.

период обращения частицы:
$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Расстояние h , которое проходит частица за время T вдоль магнитного поля B (шаг винтовой траектории), определяется по форм

$$h = v \cdot \cos \alpha \cdot T$$

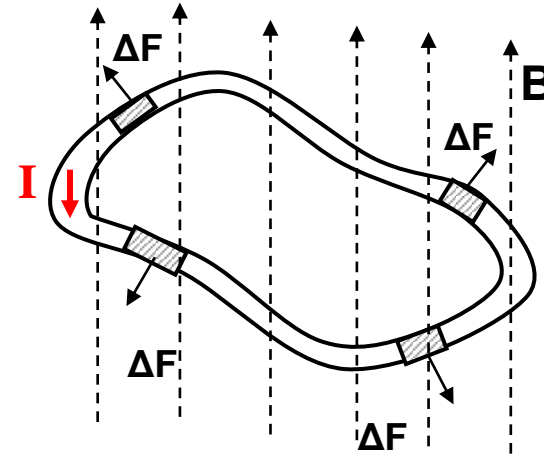
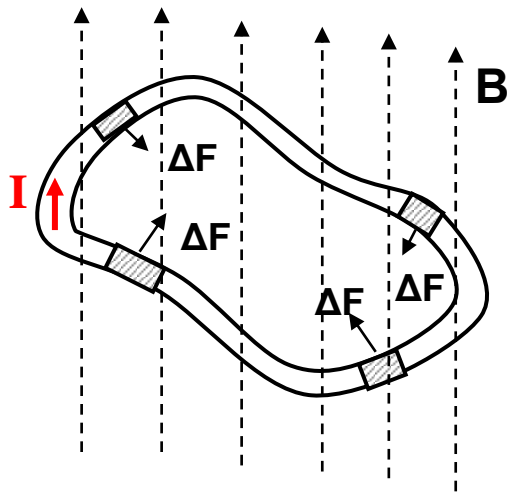


Действие магнитного поля на контур с током

на каждый из двух бесконечных прямолинейных проводника с током, находящихся в магнитном поле, действует сила

$$F = I_1 \cdot B_2 \cdot l = I_2 \cdot B_1 \cdot l = \mu \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l$$

действие магнитного поля на замкнутый проводник с током.



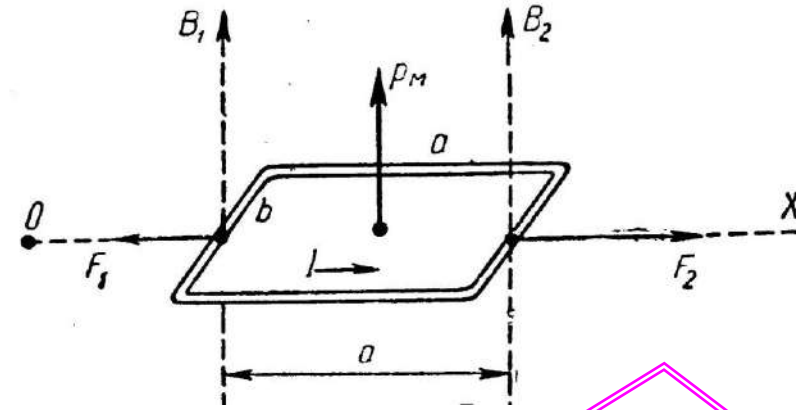
В случае если магнитное поле однородно, то силы только деформируют контур (в зависимости от направления тока), а равнодействующая этих сил равна нулю.

Если магнитное поле неоднородно, то контур не только деформируется, но и перемещается в ту область, куда направлена равнодействующая сил.

1) *первый случай* - прямоугольная рамка, плоскость которой перпендикулярна направлению поля, причем вектор B возрастает вдоль оси Ox по линейному закону.

$$B_2 - B_1 = \frac{\partial B}{\partial x} a$$

$$F_2 > F_1$$



Направление силы определяется по правилу левой руки

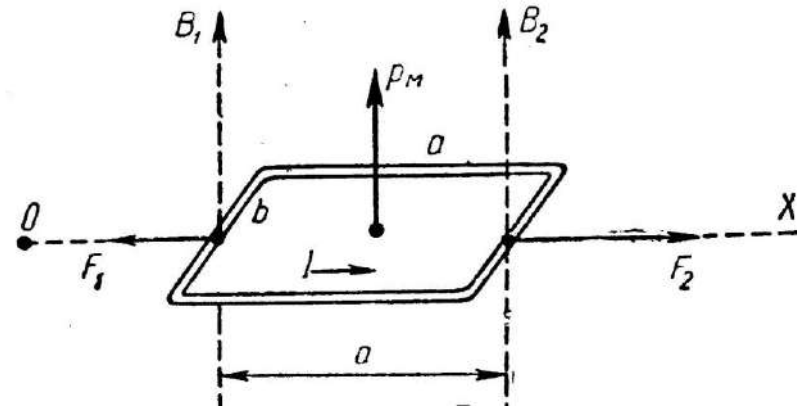
На контур действует сила $F = F_2 - F_1 = I \cdot b \cdot B_2 - I \cdot b \cdot B_1 =$

$$= \frac{\partial B}{\partial x} I \cdot a \cdot b = \frac{\partial B}{\partial x} I \cdot S$$

Условимся характеризовать контур с током вектором \vec{p}_m , численно равным $\mathbf{p}_m = \mathbf{I} \cdot \mathbf{S}$ и направленным перпендикулярно к плоскости контура в соответствии с правилом правого буравчика, ручка которого вращается по току.

В случае неоднородного поля

Если $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{p}_m$ на контур действует сила, направленная в сторону увеличения \vec{B} , т.е. контур будет **втягиваться** в поле



Если $\vec{B} \uparrow \downarrow \vec{p}_m$, то сила направлена в сторону уменьшения \vec{B} , т.е. контур будет **выталкиваться** из поля.

Если поле однородно и $B_2 = B_1$, то силы равны и только деформируют контур (сжимают или растягивают его в зависимости от направления тока).

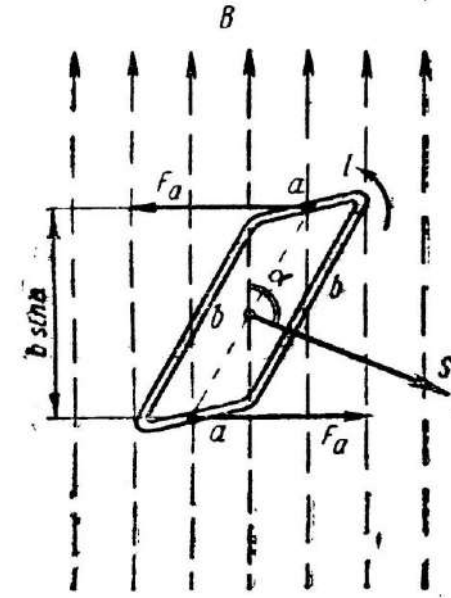
2) второй случай – пусть теперь плоскость контура составляет некоторый угол α с направлением поля, а поле - однородно.

Пусть стороны b перпендикулярны индукции B , тогда на стороны a будут действовать силы: $F_a = I \cdot B \cdot a$, составляющие пару сил с моментом

$$M = F_a \cdot b \cdot \sin \alpha = I \cdot B \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha = B \cdot I \cdot S \cdot \sin \alpha$$

На стороны b действуют силы, лежащие в плоскости рамки и деформирующие ее

максимальное значение вращающего момента, действующего на замкнутый контур с током, помещенный в магнитное поле



$$M = B \cdot I \cdot S$$

Этот момент стремится повернуть контур с током так, чтобы плоскость контура была бы перпендикулярна к \vec{B}

В общем случае, когда поле неоднородное, а контур с током имеет произвольную форму, магнитное поле деформирует контур, поворачивает его и перемещает его к областям с большей индукцией \vec{B}

Если контур с током представляет собой катушку или соленоид с n витками, то вращающий момент $M = B \cdot I \cdot S$ нужно умножить на число витков n .

Посчитаем работу, совершаемую моментом M при повороте контура с током на угол $d\alpha$:

$$dA = M \cdot d\alpha = I \cdot B \cdot S \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = I \cdot d(B \cdot S \cdot \cos\alpha) = I \cdot d\Phi$$

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Для неоднородного магнитного поля.

$$d\Phi = B \cdot \cos \alpha \cdot dS$$

$$\Phi = \int_S B \cos \alpha dS$$

Тогда работа, совершаемая моментом M , действующим на контур с током, при повороте на угол α равна:

$$\Delta A = M \cdot \Delta\alpha = I \cdot \Delta\Phi$$

$\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, охватываемого контуром

Произведение $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}$ или для соленоида с n витками $\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$

$$I \cdot S = p_m$$

магнитный момент
замкнутого контура

Если представить магнитный момент в виде вектора, ориентированного перпендикулярно площадке S (в направлении куда двигался бы буравчик, вращаемый по направлению тока), тогда

$$M = B \cdot I \cdot S \cdot \sin \alpha = [\vec{p}_m \vec{B}]$$

Магнитный момент
измеряется в ($A \cdot m^2$)

Частицы, входящие в состав атома, обладают также магнитными моментами, вовсе не связанными с какими-либо движениями зарядов, то есть с токами. Для них магнитный момент является таким же «врожденным» качеством, как заряд, масса и т. п.

Магнитным моментом обладает даже частица, не имеющая электрического заряда,— нейтрон, составная часть атомных ядер. Магнитным моментом обладают поэтому и атомные ядра. Это- **спиновый** магнитный момент

Электроны, вращающиеся по замкнутым орбитам, также имеют магнитный момент, он называется **орбитальным**

Пусть электрон вращается по окружности радиуса R с постоянной скоростью v

Сила тока такого движения

$$I = e \cdot \frac{v}{2\pi R}$$

число оборотов в единицу времени

тогда

$$p_m = IS = e \frac{v}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2} evR$$

Умножив и разделив выражение на массу электрона, получим

магнитный момент
электронной орбиты

$$p_m = \frac{e}{2m} mvR = \frac{e}{2m} p$$

механический момент
количества движения
электрона на орбите

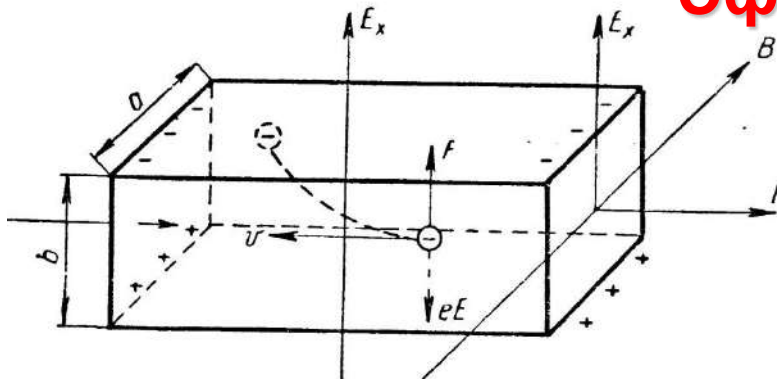
В атомах и молекулах различных тел имеется множество электронов, вращающихся по орбитам. Так как магнитный момент – вектор, ориентированный перпендикулярно к плоскости орбиты, то можно найти векторную сумму магнитных моментов всех электронов, входящих в состав атомов или молекул.

Известно, что электрон, вращающийся по орбите как волчок, независимо от своего движения по орбите имеет определенный магнитный и механический момент (спин), причем

$$\frac{p_m}{p} = \frac{e}{m}$$

Суммируя магнитные моменты, существующие в данном атоме, молекуле нужно учитывать не только моменты замкнутых орбит, но и собственные магнитные моменты самих электронов.

Эффект Холла



Магнитное поле действует также и на те электроны внутри проводников, упорядоченное движение которых образует ток.

Американский ученый Э.Холл обнаружил, что в проводнике, помещенном в магнитное поле, возникает разность потенциалов (поперечная) в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции ***V*** и току ***I***, вследствие действия силы Лоренца на заряды, движущиеся в этом проводнике.

Под действием силы Лоренца $F = e \cdot v \cdot B$ электроны будут описывать криволинейную траекторию.

На верхней поверхности проводника появится избыточное количество электронов, и она зарядится отрицательно. Между верхней и нижней поверхностями появится разность потенциалов - **эффект Холла**

Напряженность электрического поля между этими поверхностями E_x перпендикулярна к v и поэтому на электрон действует сила $F = e \cdot E_x$, направленная против силы Лоренца.

В установившемся состоянии должно соблюдаться равенство

$$e \cdot E_x = e \cdot v \cdot B$$

сила тока через проводник

$$I = n \cdot e \cdot V \cdot S \quad S = a \cdot b$$

Тогда напряженность поля

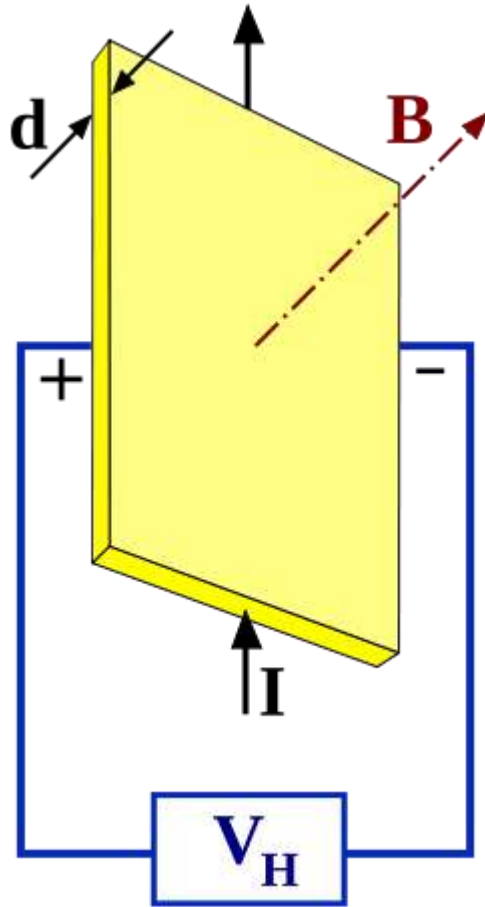
$$E_x = \frac{1}{n \cdot e} \cdot B \cdot \frac{I}{S}$$

а разность потенциалов между верхней и нижней поверхностями равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_x b = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{I \cdot B}{a}$$

$$\frac{1}{n \cdot e} = R$$

коэффициент Холла.



измерение коэффициента Холла R позволяет определить характер проводимости (электронный - постоянная Холла имеет отрицательное значение или дырочный - постоянная Холла имеет положительное значение), а также концентрацию носителей тока n .

Электромагнитные левитаторы

Магнитная левитация — технология, метод подъёма объекта с помощью одного только магнитного поля. Магнитное давление используется для компенсации ускорения свободного падения или любых других ускорений.

Теорема Ирншоу для электростатического поля: Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания никакие другие силы не действуют.

