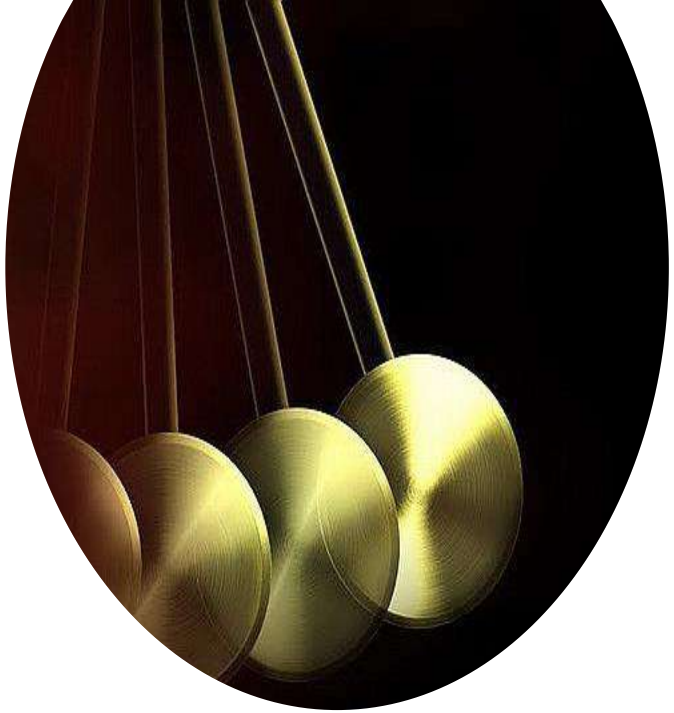


Колебания и волны

Лекция 10

Замкнутая система уравнений Максвелла.

Интегральная форма	Дифференциальная форма
$\oint\limits_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{B}d\vec{S}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oiint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	$div\vec{B} = 0$
$\oint\limits_l \vec{H}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{D}d\vec{S} + \iint\limits_S \vec{j}d\vec{S}$	$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$
$\oiint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint\limits_V \rho dV$	$div\vec{D} = \rho$
Материальные уравнения	
$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

Следствия из уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Скорость света.

Рассмотрим некоторые основные следствия, вытекающие из уравнений Максвелла, приведенных в таблице. Прежде всего, отметим, что эти уравнения ***линейные***. Отсюда следует, что ***электромагнитное поле*** удовлетворяют ***принципу суперпозиции.***

Одним из *главных* следствий, вытекающих из уравнений Максвелла, является то, что электромагнитное поле может существовать в виде ***электромагнитных волн*** в отсутствие всяких зарядов и токов

($\rho = 0; \vec{j} = 0$).

В этом случае уравнения Максвелла принимают вид (в дифференциальной форме):

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; div\vec{B} = 0 \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}; div\vec{D} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases}$$

Применяя к первому из этих уравнений операцию rot, будем иметь:

$$rot(rot\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(rot\vec{B}) \quad .$$

Но согласно третьему уравнению (с учетом материальных уравнений):

$$rot\vec{B} = \mu\mu_0 rot\vec{H} = \mu_0\mu\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad .$$

Используя это соотношение, получим:

$$rotrot\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad .$$

Далее, принимая во внимание, что $rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$, причем в силу четвертого уравнения $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}div\vec{D} = 0$, приходим к так называемому ***волновому уравнению*** для электрического поля $\vec{E}$

$$\Delta E - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

где обозначено

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа (в декартовых координатах).

Аналогичное волновое уравнение получается для магнитного поля $\vec{H}$:

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Совместным решением этих уравнений является векторная ***волновая функция*** электромагнитного поля:

$$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{H}_0\end{pmatrix}\exp\left[i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{v})\right], \qquad \vec{r} = \vec{r}(x, y, z).$$

Коэффициент υ имеет смысл ***фазовой скорости*** электромагнитной волны:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}}$$

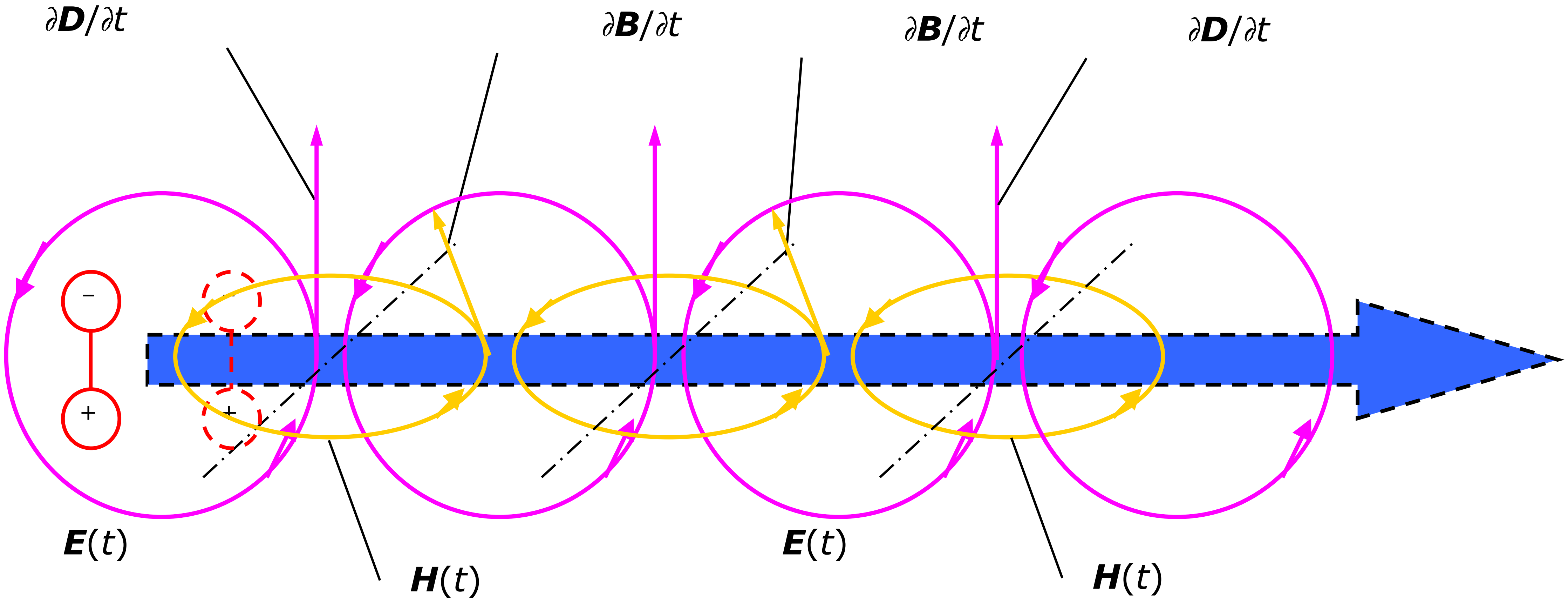
Для вакуума: $\varepsilon = 1; \mu = 1$. Тогда: $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot12{,}57\cdot10^{-7}}} = 3\cdot10^8$ м/с,

что совпадает со ***скоростью света*** в вакууме *c*. Таким образом, мы приходим к выводу, что ***свет*** – это ***электромагнитная волна.***

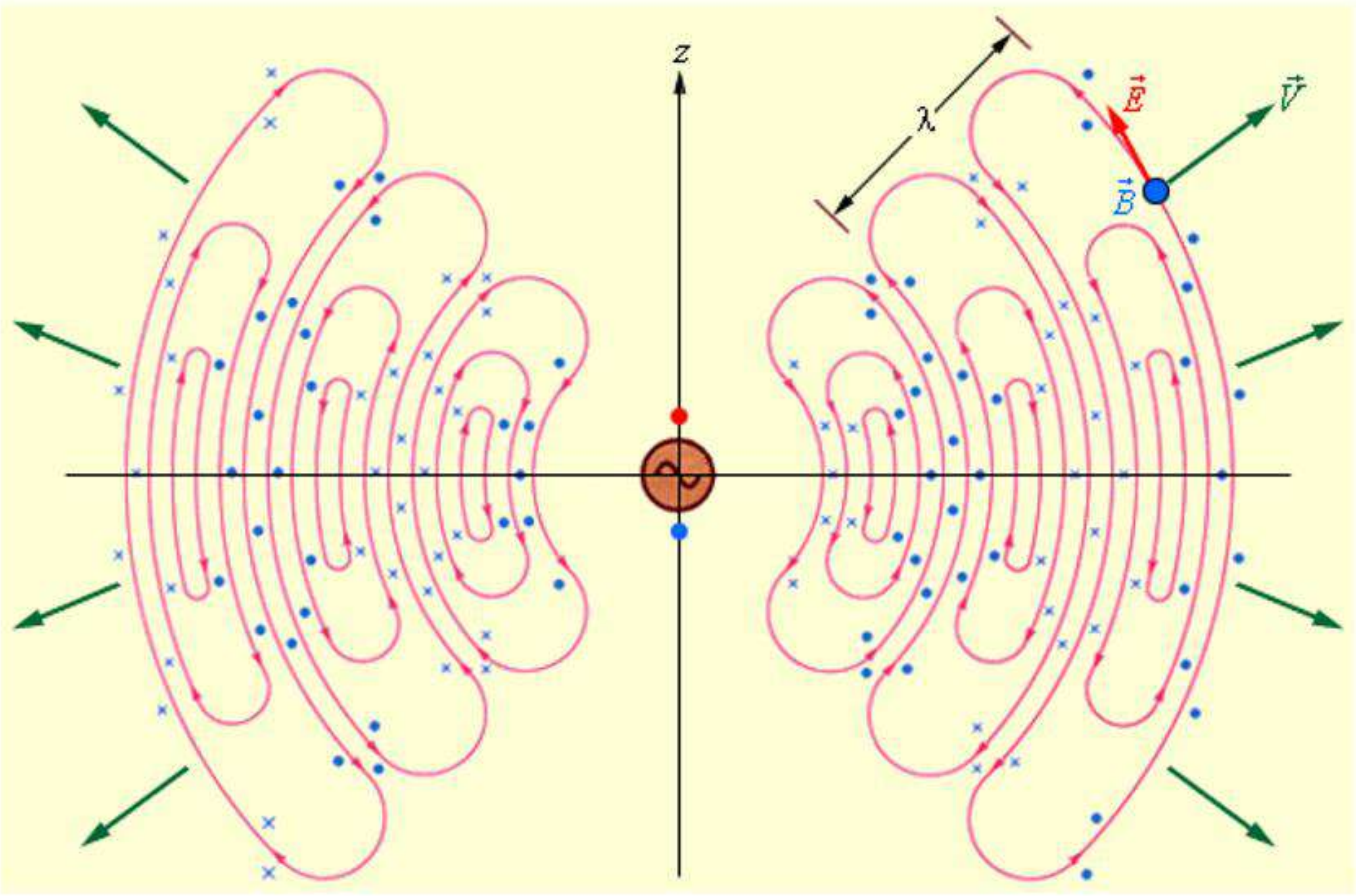
В прозрачной диэлектрической среде скорость света $\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$

где величина $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется ***показателем преломления*** среды. Для многих *оптически прозрачных* сред эта формула дает хорошие совпадения с измеренными на опыте значениями *n*, что также является одним из достижений теории Максвелла.

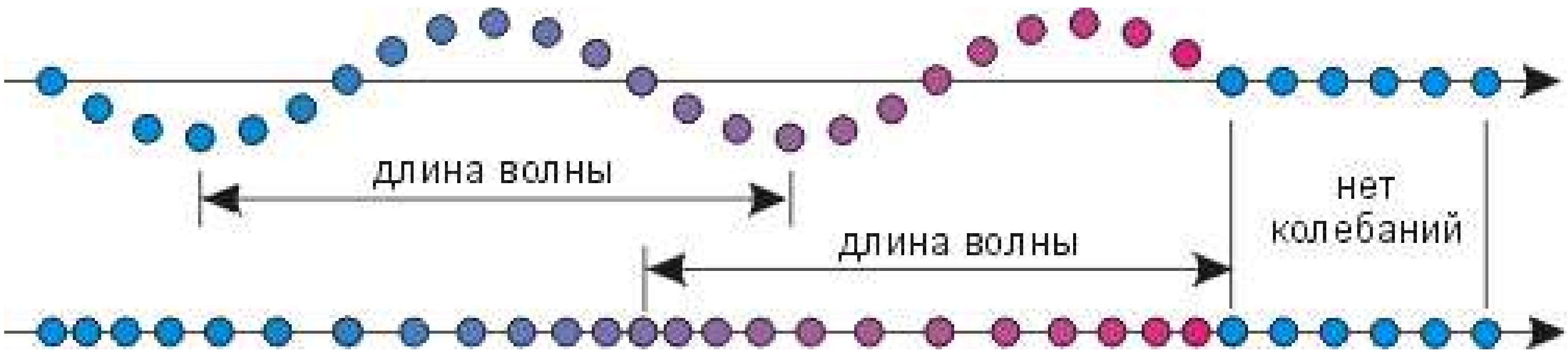
Излучение диполя



Излучение диполя



ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ



В зависимости от направления колебаний частиц среды по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают **продольные и поперечные волны.**

В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны (звуковая волна).

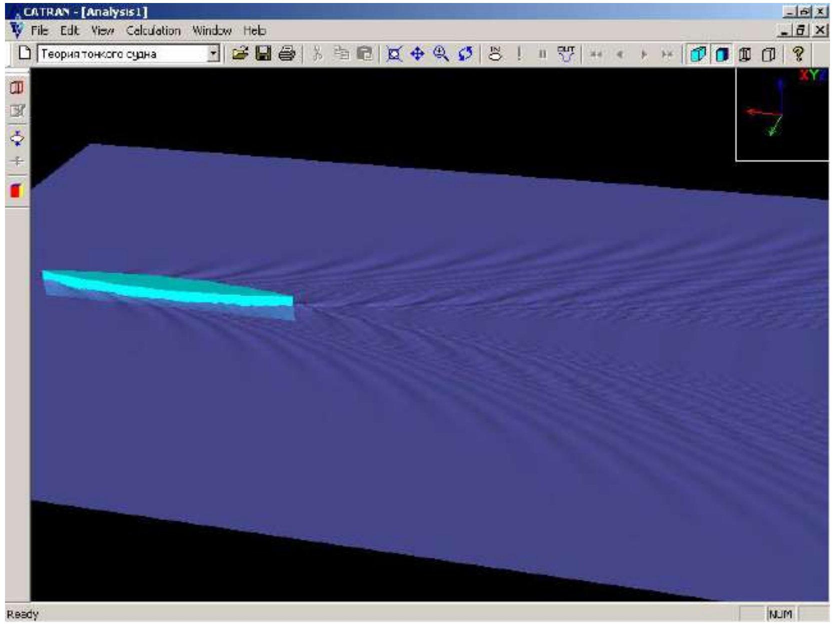
В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Упругие поперечные волны могут возникать лишь в средах, обладающих сопротивлением сдвигу (кристаллах).

Поэтому в жидкостях и газах возможны только **продольные волны.**

В твердых телах (кристаллах) возможно существование двух типов волн, как **продольных,** так и **поперечных волн.**

ВОЛНОВОЙ ФРОНТ.
ВОЛНОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ



Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые области пространства.

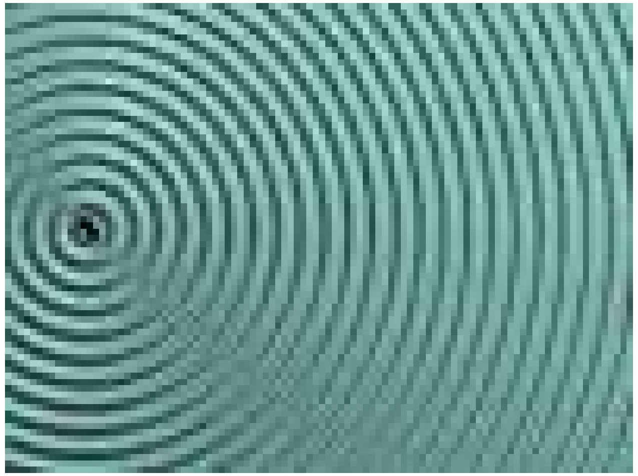
Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени, называется фронтом волны
или волновым фронтом.

Фронт волны отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс,
от области, в которой колебания еще не возникли.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью.

Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом.

Волновых поверхностей бесконечно много.



Математическая вставка 1. Векторные операции.

$$\mathrm{rot}E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$E(r,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\left(k_y E_z(r,t) - k_z E_y(r,t)\right)$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} i & j & k \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\left(\vec{k} \times \vec{E}\right)$$

Математическая вставка 1. Векторные операции.

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$E(r,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -i\left(k_x E_x(r,t) + k_y E_y(r,t) + k_z E_z(r,t)\right)$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -i\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right)$$

Пусть $\vec{E} = \vec{E}(z,t), \vec{H} = \vec{H}(z,t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{E}(t - \dfrac{z}{v}), \\ \Delta \vec{H} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \Rightarrow \vec{H}(t - \dfrac{z}{v}), \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{v})] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \overbrace{\frac{\omega}{v}}^{k} z] = \vec{E}_0 \cos[\omega t - kz],$$

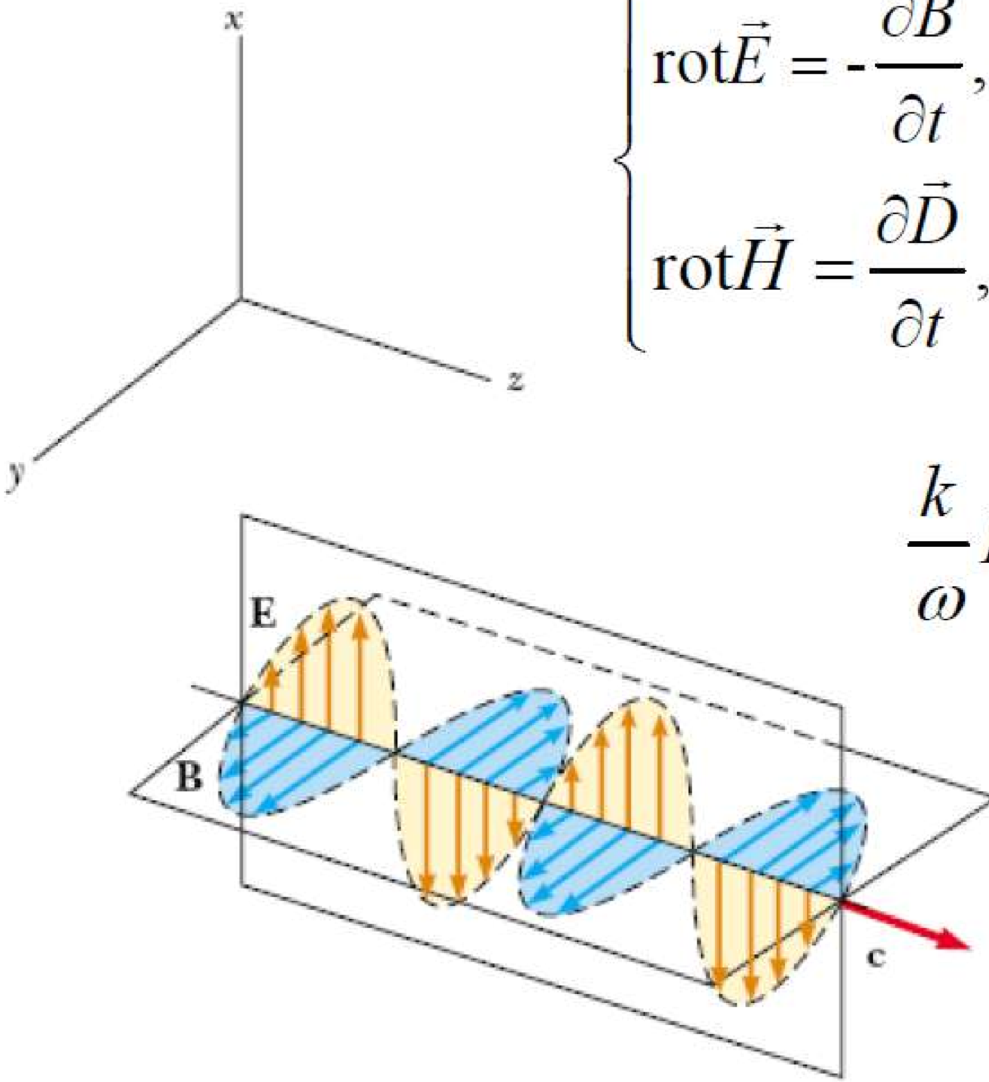
$\left(\dfrac{\omega}{k} = v \text{ по определению } k\right)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Аналогично $\vec{H}_0 \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r}] = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \mathrm{rot}\vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -i[\vec{k}, \vec{E}],$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}.$$



$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-i\vec{k}, \vec{E}] = -i\omega\vec{B} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}, \\ [-i\vec{k}, \vec{H}] = i\omega\vec{D} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \end{cases}$$

$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$

$$\frac{k}{\omega}E_x = \mu\mu_0 H_y, \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$$

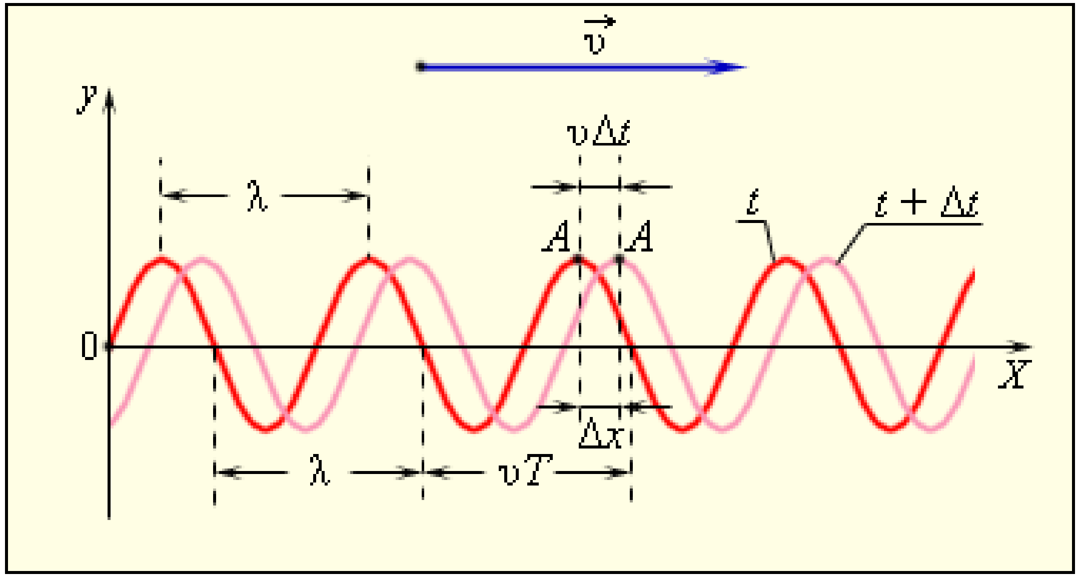
$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_x = \sqrt{\mu\mu_0}H_y,$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{\omega} = Tv$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

ДЛИНА ВОЛНЫ



На рисунке показано смещение y из положения равновесия точек с разными x в близкие моменты времени t и $t+\Delta t$.

Расстояние λ, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны. Очевидно, что $\lambda = VT$,

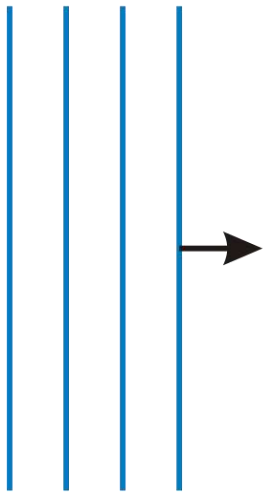
где V – скорость волны, T – период колебаний.

Длину волны можно определить также как расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися в одной фазе (с разностью фаз, равной 2π радиан).

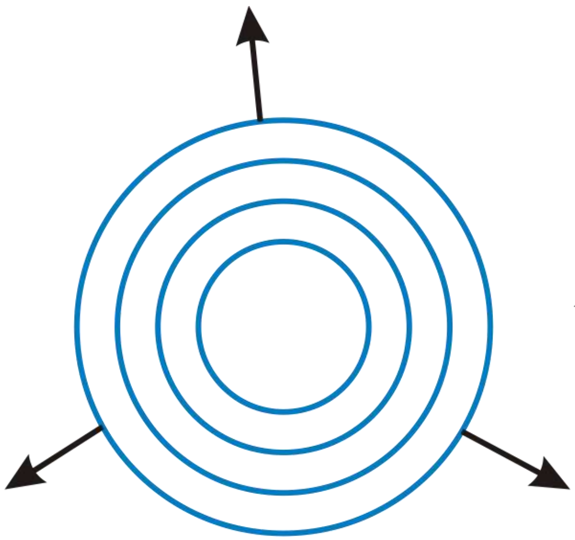
Выразив период колебаний T через частоту колебаний ν: $T = \dfrac{1}{\nu}$,

получим $\lambda = V/\nu \Rightarrow \lambda\nu = V.$

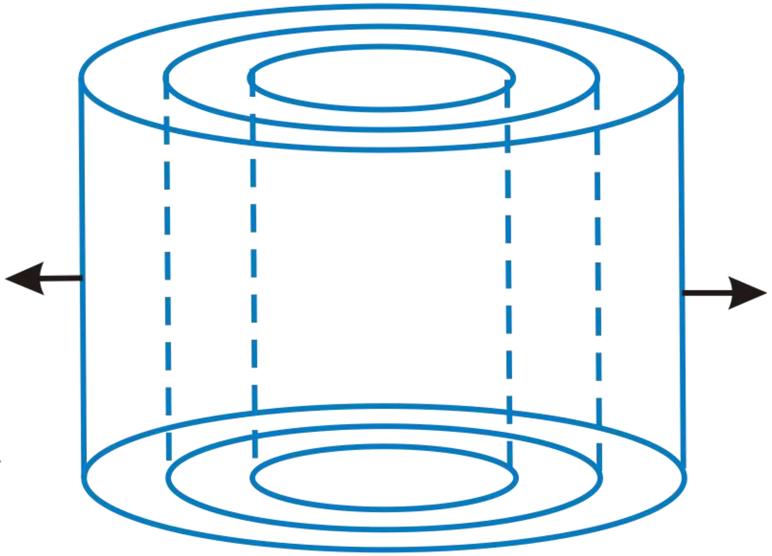
Основные типы волн



плоская волна



сферическая волна



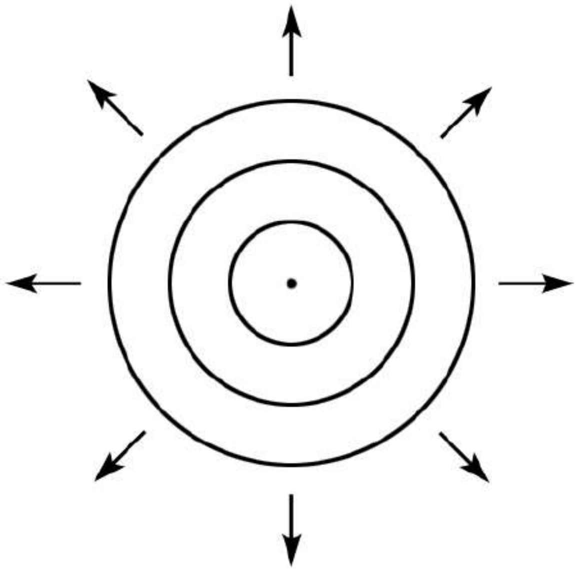
цилиндрическая волна

Уравнение сферической волны

Пусть $\phi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону $A \sim \dfrac{1}{r}$

Уравнение сферической волны:



$$\boxed{\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)}$$

или

$$k = \frac{\omega}{\upsilon}$$

$$\boxed{\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)}$$

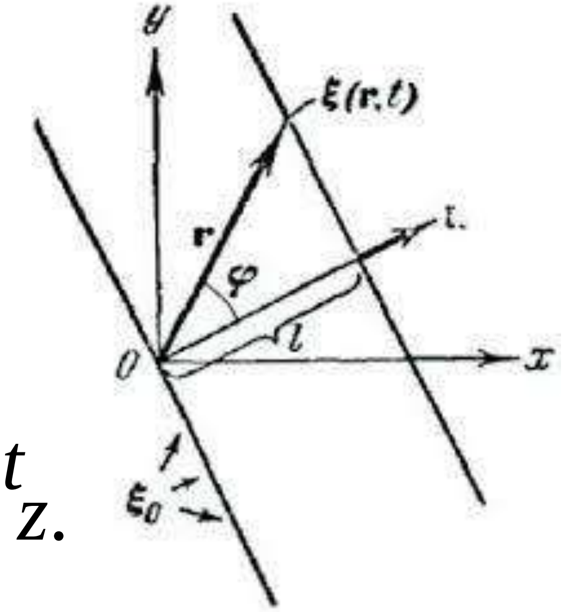
Цилиндрическая волна

Цилиндрическая волна расходится от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде.

Монохроматическая расходящаяся волна на расстояниях R, значительно превышающих ее длину волны, имеет вид

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR),$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

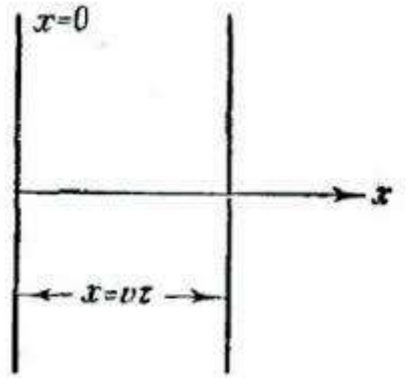


Уравнением волны называется выражение, которое определяет смещение колеблющейся частицы от её равновесного положения как функцию его координат и времени: $\xi = \xi(\vec{r}, t).$

Эта функция периодическая относительно времени t и относительно пространственных координат $x, y, z.$

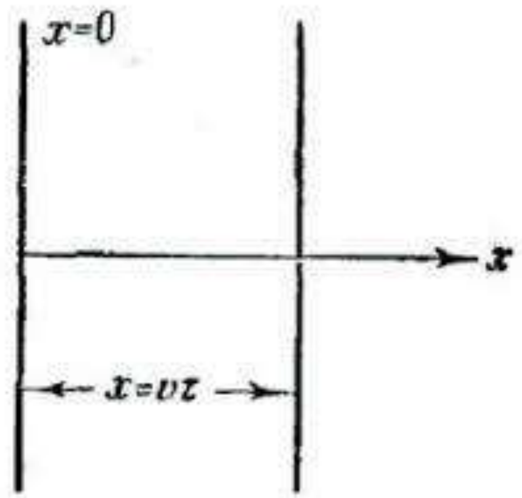
Упростим ситуацию, направив ось x по направлению распространения волны. Тогда плоские волновые поверхности будут перпендикулярными оси $x.$ Поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение ξ будет зависеть только от x и t:

$$\xi = \xi(x, t).$$



Колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$ имеют вид $\xi(0, t) = a\cos(\omega t + \varphi_0).$ Найдём вид колебаний в плоскости с произвольным значением $x.$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ



$$x = 0 \Rightarrow \quad \xi(0,t) = a\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для того, чтобы пройти путь от начала координат до плоскости с координатой x требуется время

$\tau = x/V, \quad V$ – скорость распространения волны.

Следовательно, колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц, лежащих в плоскости $x = 0,$ то есть

$$\xi(x,t) = a\cos[\omega(t-\tau)+\varphi_0] = a\cos[\omega(t - x/V) + \varphi_0].$$

Аргумент гармонической функции – это фаза волны: $\varphi = \omega(t - x/V) + \varphi_0.$

$$\varphi(x,t) = \omega t - \frac{\omega}{V}x + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0 \Rightarrow \xi(x,t) = a\cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

$$k \equiv \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi\nu}{V} = \frac{2\pi}{VT} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

При произвольной ориентации осей

$$\xi(\vec{r},t) = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

k – волновое число (модуль волнового вектора).

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания, возникающие при наложении двух плоских встречных волн с одинаковой амплитудой, называются стоячей волной.

$$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx + \varphi_{01}), \quad \xi_2 = a\cos(\omega t + kx + \varphi_{02}), \quad \xi = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow$$

$$\xi = 2a\cos\left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right).$$

Выбирая подходящим образом начало отсчёта x и $t,$ получим:

$$\xi = 2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t).$$

В каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что у встречных бегущих волн.

Амплитуда колебаний периодически меняется

$$A = \left|2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|.$$

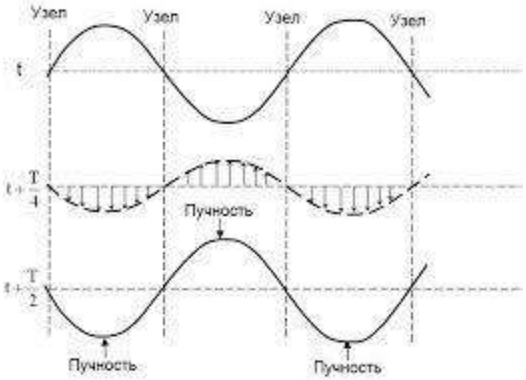
В точках, для которых:

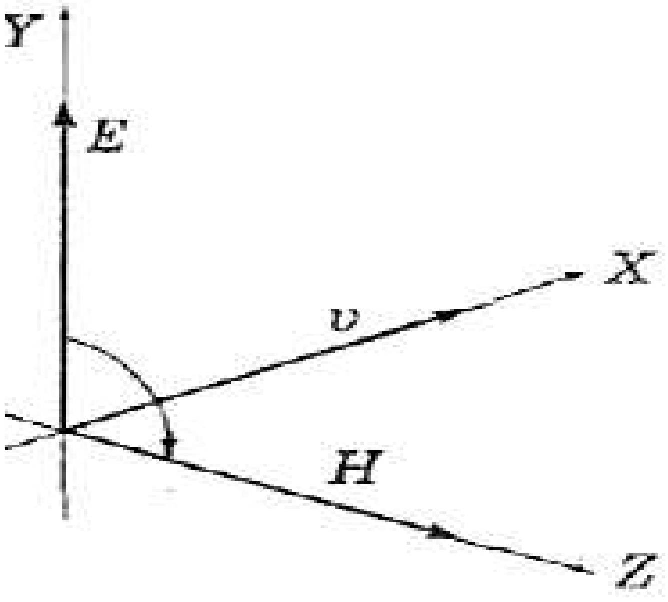
$$2\pi\frac{x}{\lambda} = n\pi \; (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

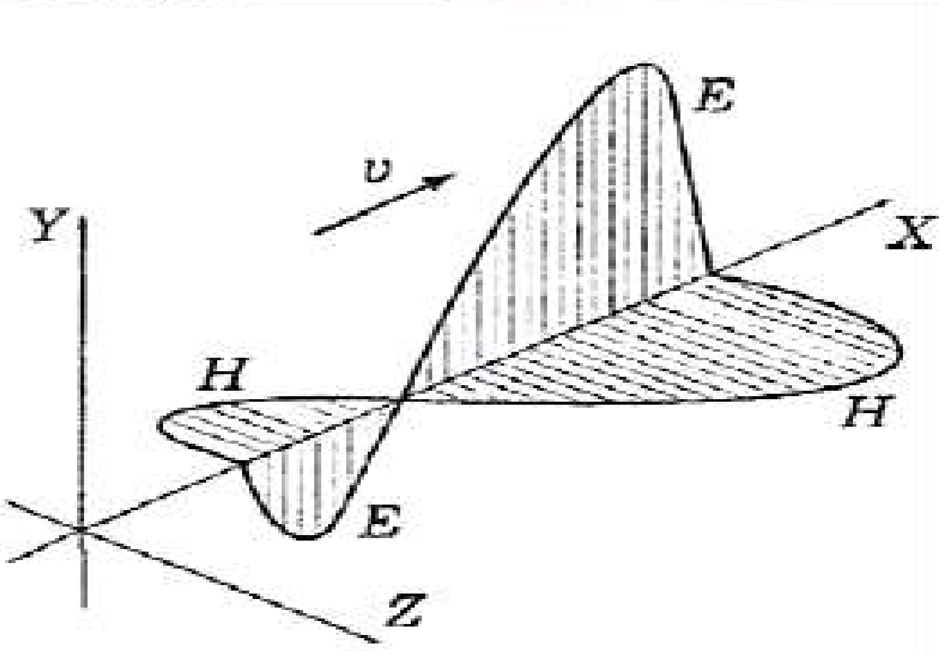
амплитуда максимальна – это пучности;

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = (n + \frac{1}{2})\pi,$$

минимальна – узлы.







Уравнение плоской бегущей гармонической волны:

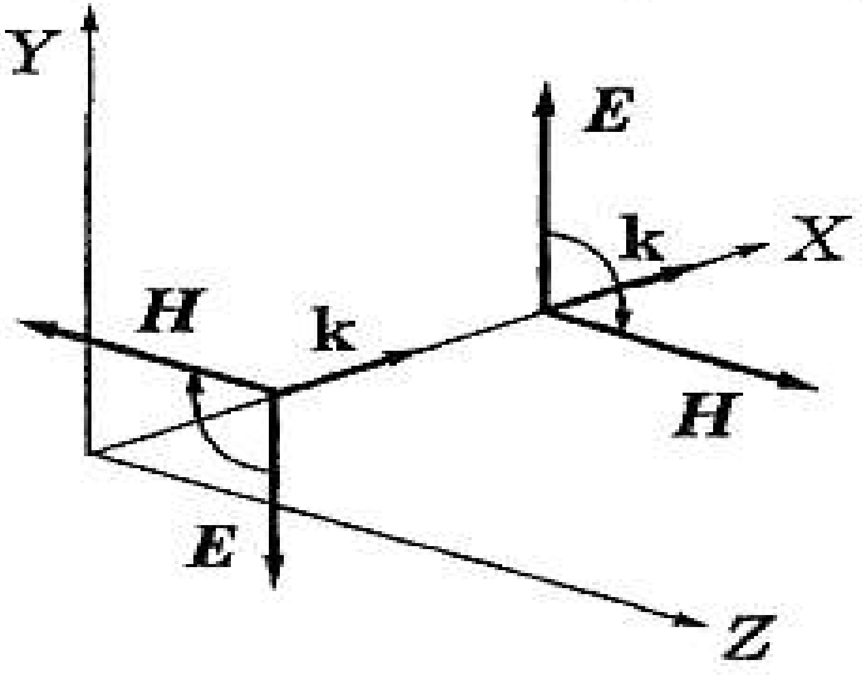
$$E = E_m \cos(\omega t - kx), \qquad H = H_m \cos(\omega t - kx),$$

ω — круговая (циклическая) частота колебаний,
k — волновое число , $k = 2\pi/\lambda$. λ - длина волны

Стоячая электромагнитная волна

Стоячая упругая волна это результат суперпозиции двух одинаковых волн, бегущих навстречу друг другу.

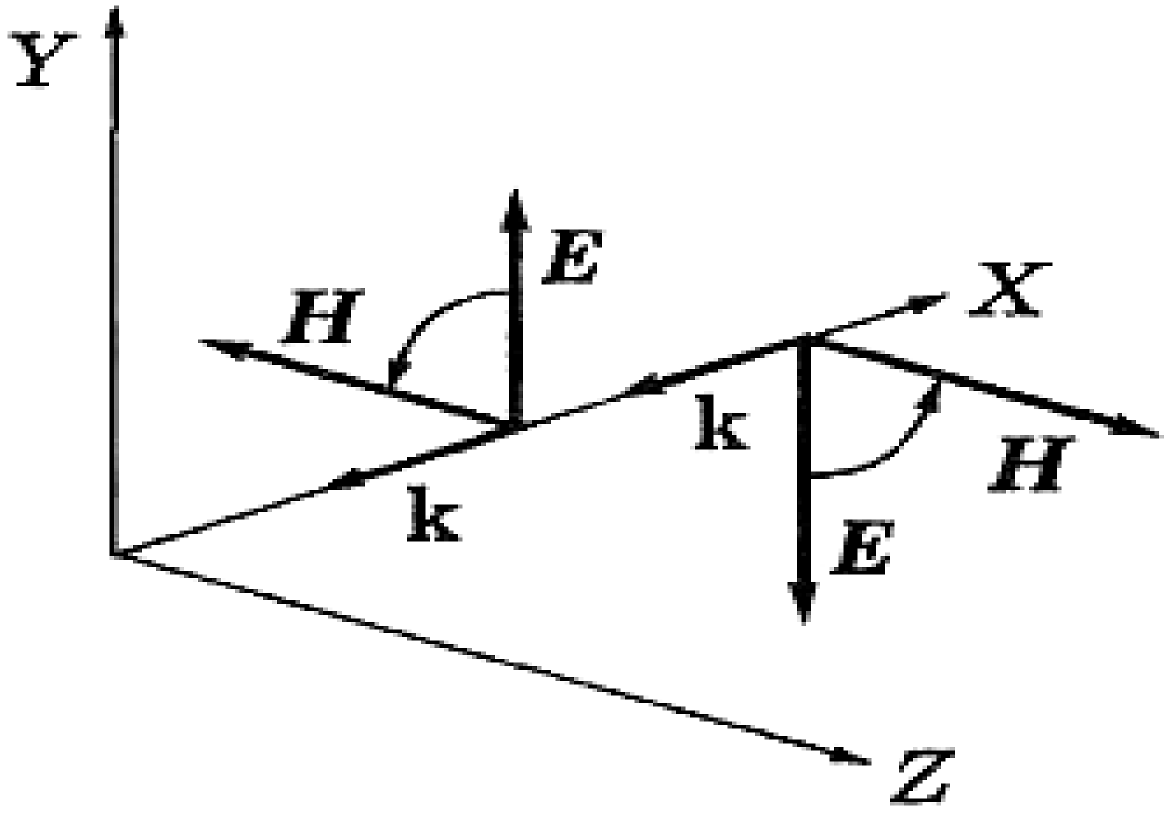
$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx), \qquad H_z = H_m \cos(\omega t - kx).$$



a)

Вдоль оси x уравнения **встречной в**олны (б) имеют вид:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx).$$



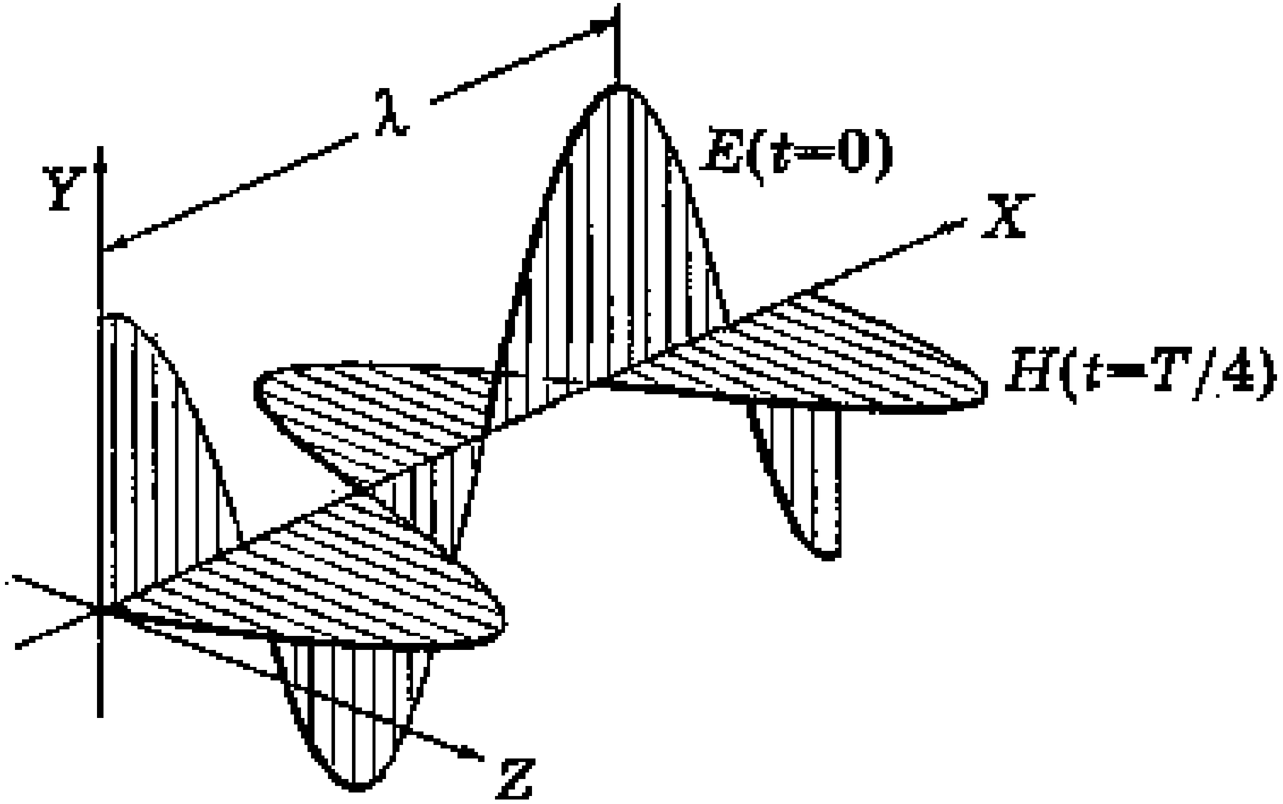
б)

В результате суперпозиции этих двух встречных волн

$$E_y = 2E_m \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad H_z = 2H_m \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Это уравнения стоячей электромагнитной волны. Они состоят из двух стоячих волн — электрической и магнитной.

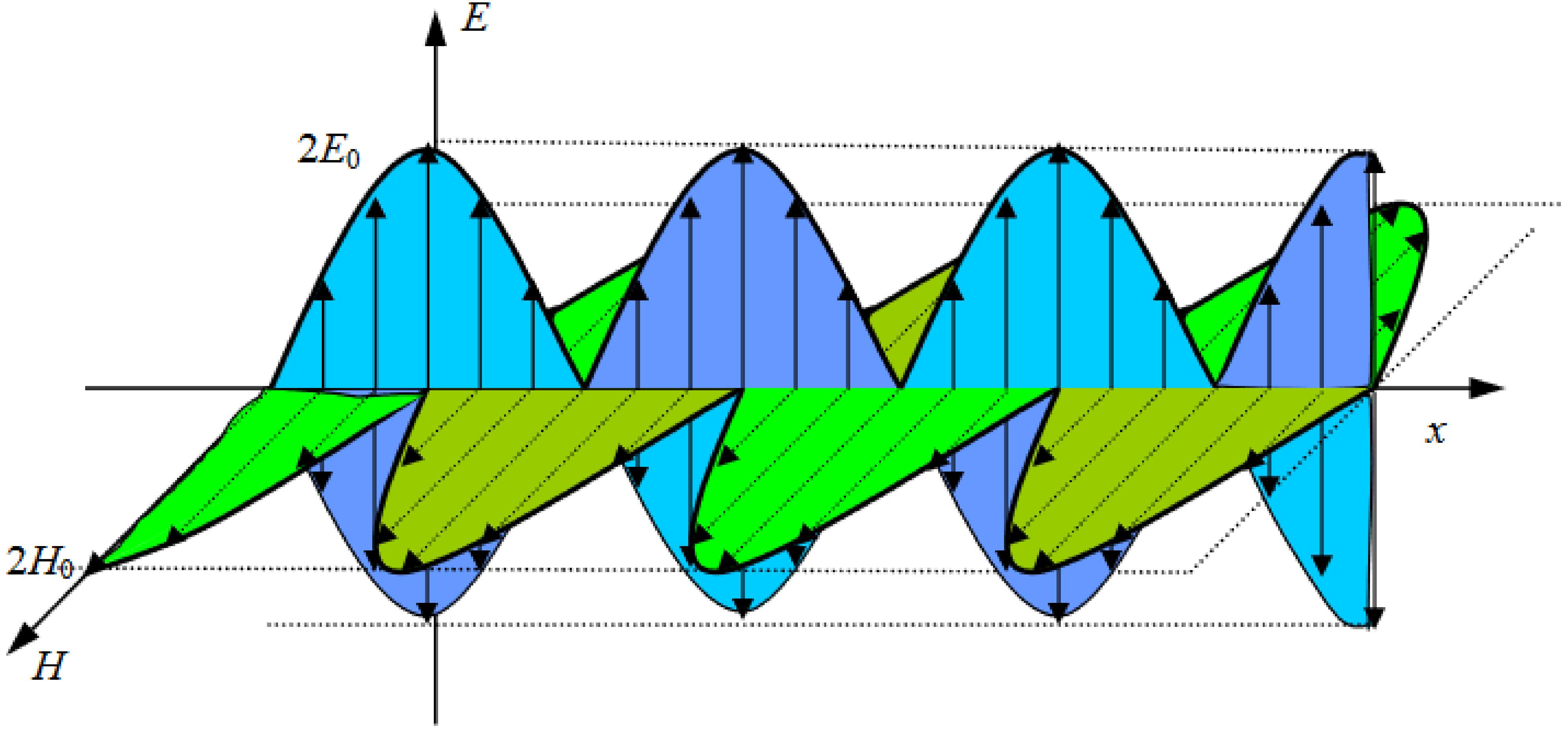
В этой волне колебания векторов ***E*** и ***H*** сдвинуты по фазе на **π/2** как в пространстве, так и во времени.



В процессе колебаний электрическое поле постепенно переходит в магнитное, магнитное — в электрическое и т. д.

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}.$$

Стоячая электромагнитная волна



В процессе колебаний электрическое поле постепенно переходит в магнитное, магнитное - в электрическое и т. д.

$$E_m \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}.$$

В стоячей электромагнитной волне энергия переходит из чисто электрической, имеющей максимумы в пучностях ***E***, в магнитную с максимумами в пучностях вектора ***H***, т. е. смещенным в пространстве на $\lambda/4$

ЭНЕРГИЯ ЭМВ

Электромагнитные волны переносят энергию.
Плотность потока энергии волны можно получить, умножив объемную плотность энергии волны на её фазовую скорость:

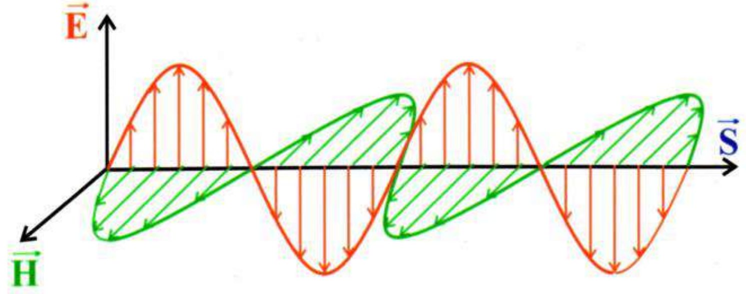
$$\vec{j} \equiv \vec{S} = w\vec{V}.$$

Плотность энергии ЭМВ слагается из плотности энергии электрического и магнитного полей:

$$w = w_E + w_H.$$

$$w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad w_H = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}, \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}H_0 \Rightarrow \quad w_E = w_H = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}EH;$$

$$j \equiv S = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EHV, \quad \sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} = \frac{1}{V} \Rightarrow \quad j \equiv S = EH.$$



В векторном виде $\vec{S} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right], \; [S] = 1\frac{Вт}{м^2}.$

Вектор плотности потока энергии ЭМВ называется вектором Пойнтинга.

Среднее по времени значение модуля вектора Пойнтинга – это интенсивность волны:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}E_0H_0.$$

ИНТЕНСИВНОСТЬ СВЕТА

Частоты видимых световых волн лежат в пределах $\nu = (0,39 - 0,75)\cdot 10^{15}\,Гц.$

Частота изменений плотности потока энергии будет в два раза больше:

$$\vec{S} = w\vec{V} = \left[\vec{E}\times\vec{H}\right] \Rightarrow \qquad S = EH = E_m H_m \cos^2(2\pi\nu t - kr + \alpha).$$

Глаз или какой-либо иной приемник световой энергии не может уследить за столь частыми изменениями потока энергии, вследствие чего они регистрируют усредненный по времени поток.

Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии световой волны носит название интенсивности света в данной точке:

$$I = \left|\left\langle \vec{S}\right\rangle\right| = \left|\left\langle\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right\rangle\right| = E_m H_m \left\langle \cos^2(\omega t - kr + \alpha)\right\rangle = \frac{E_m H_m}{2}.$$

Усреднение производится за время «срабатывания» регистрирующего прибора, которое много больше чем период колебаний волны $(T \sim 10^{-15}\,c).$

Измеряется интенсивность света либо в энергетических единицах (например, в ваттах на квадратный метр),
либо в световых единицах, называемых «люмен на квадратный метр» .

ИНТЕНСИВНОСТЬ СВЕТА

Амплитуды векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$
в электромагнитной волне связаны между собой соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\mu_0}H_m = \sqrt{\mu_0}H_m \Rightarrow \quad H_m = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m \quad (\mu = 1).$$

Тогда выражение для интенсивности ЭМВ примет вид:

$$I = \frac{1}{2}E_m H_m = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2 = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2 \Rightarrow \quad I \sim nA^2.$$

Следовательно, интенсивность света пропорциональна показателю преломления среды и квадрату амплитуды светового вектора.

При рассмотрении распространения света в однородной среде интенсивность пропорциональна квадрату светового вектора $(I \sim A^2)$.

Однако в случае прохождения света через границу раздела сред выражение для интенсивности без множителя n приводит к не сохранению светового потока.

Математическая вставка 2. Векторные операции.

- Тождество Якоби: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$

$\vec{a}\rightarrow\vec{\nabla}\qquad\vec{b}\rightarrow\vec{E}\qquad\vec{c}\rightarrow\vec{H}$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\left(\vec{H}\times\vec{\nabla}\right)-\vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{E}\cdot\left(rot\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(rot\vec{E}\right)$$

Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга

$$w = \vec{E}\vec{D}/2 + \vec{H}\vec{B}/2$$

Учитывая равенства $\vec{D} = -[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}]$, $\vec{B} = [\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}]$, имеем

$$w = -\vec{E}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{H}]/2 + \vec{H}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}]/2 = \vec{H}[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}] = \frac{\vec{k}}{\omega}[\vec{E}, \vec{H}].$$

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – вектор Умова-Пойтинга, $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$,

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{\omega}{k} w = vw = \left|\text{для вакуума}\right| = cw.$$

$$P=\int\limits_{\infty}\vec{J}\vec{E}dV=\int\limits_{\infty}(\mathrm{rot}\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\vec{E}dV=|\,\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]=\mathrm{rot}\vec{E}\cdot\vec{H}-\mathrm{rot}\vec{H}\cdot\vec{E}\,|=$$

$$=\int\limits_{\infty}(\underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}\cdot\vec{H}-\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{E})dV=-\int\limits_{\infty}\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]dV+$$

$$+\int\limits_{\infty}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\vec{E})dV=|\,\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H};\quad \vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,|=$$

$$-\int\limits_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec{E},\vec{H}]}_{\vec{S}}d\vec{\sigma}-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}\underbrace{(\frac{\vec{H}\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\vec{D}}{2})}_{w}dV;$$

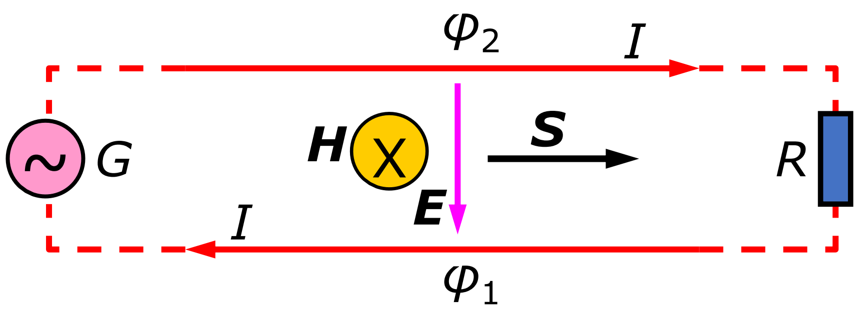
$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int\limits_{\infty}wdV}_{W_{\text{электр.поля}}}=-P-\int\limits_{S_{R\to\infty}}\underbrace{[\vec{E},\vec{H}]}_{\vec{S}}d\vec{\sigma};\Rightarrow\vec{S}=[\vec{E},\vec{H}]-$$ поток энергии электромагнитного поля.

Применение вектора Пойнтинга

Анализ электрических цепей с точки зрения распрост-ранения э/м энергии показывает, что в местах действия сторонних сил (источники тока) вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{E}^{*} \times \boldsymbol{H})$ направлен наружу: там энергия «выходит» в окружающее пространство в виде потока $\Phi_S = S \cdot A$.

А в проводниках с сопротивлением, где действует только электрическое поле $\boldsymbol{E}$ происходит «прием» этой энергии и выделение ее в виде джоулевой теплоты.

Пример: Имеется участок двухпроводной линии с током I и известными потенциалами проводов φ_1 и φ_2, причем $\varphi_1 < \varphi_2$. Определить: где находится источник тока?

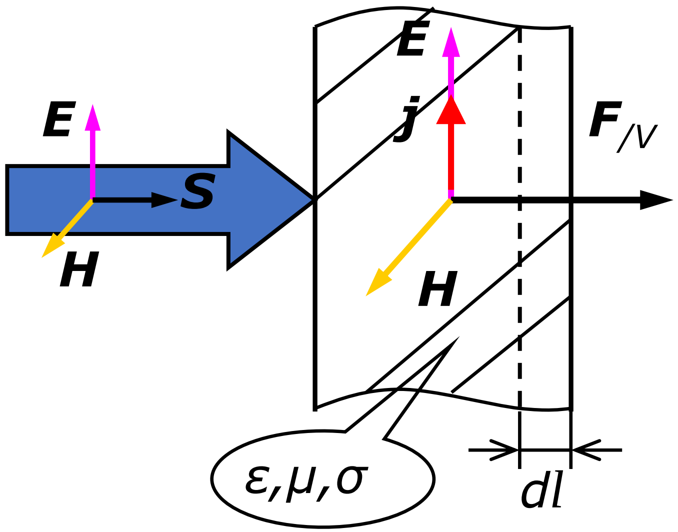


Определив направления векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, по вектору Пойнтинга $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$ будет направлен поток э/м энергии – слева направо. Следовательно, источник (G) находится слева, а потребитель (R) – справа.

Импульс электромагнитной волны

Максвелл теоретически показал, что э/м волна, отражаясь или поглощаясь в теле (веществе), на которое она падает, сообщает этому телу некоторый импульс, т.е. оказывает на него давление. Это давление возникает в результате силового воздействия магнитного поля (***H***) волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем (***E***) этой волны.

Так, если на плоскую поверхность слабо проводящего, поглощающего тела нормально падает плоская э/м волна, то ее электрическое поле возбудит в теле, согласно закону Ома, ток $\boldsymbol{j} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}$, где σ – электропроводность тела. Тогда на единицу объема тела будет действовать амперова сила $\boldsymbol{F}_{/V} =$
$= (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) = \mu \cdot \mu_0 \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H})$.



Эта сила направлена в сторону распространения волны, как ***S***, вызывает давление э/м волны.

Таким образом, поверхностному слою тела с единичной площадью и толщиной dl сообщается за промежу-ток времени dt импульс:

$$d\boldsymbol{p}_{/S} = \boldsymbol{F}_{/V} \cdot dl \cdot dt = \mu \cdot \mu_0 \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}) \cdot dl \cdot dt \ .$$

Импульс электромагнитной волны

При этом в том же слое dl поглотится э/м энергия в количестве: $dW_{/S} = (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}) \cdot dl \cdot dt$, которая выделится в виде джоулева тепла.

Определим отношение модулей сообщенного импульса к поглощенной энергии, опустив за ненадобностью на данном этапе символы дифференциалов (d): $\frac{p}{W} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{H}{E}$,

а с учетом $\sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot E = \sqrt{\mu \cdot \mu_0} \cdot H$, откуда имеем $\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}}$ и, таким образом получаем:

$$\frac{p}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \mu} = \frac{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}{c} \qquad (12)$$

Или для случая волны в вакууме (ε, μ = 1):

$$\frac{p}{W} = \frac{1}{c} \qquad (13)$$

Иначе говоря, э/м волна, переносящая энергию W в вакууме, обладает импульсом:

$$p = \frac{1}{c} \cdot W \qquad (14)$$

Из (14) следует, что импульс единицы объема или **плотность импульса**: $p_{/V} = (1/c) \cdot w$ или, выразив объемную плотность энергии волны в вакууме через вектор Пойнтинга, т.е. $w = S/c$

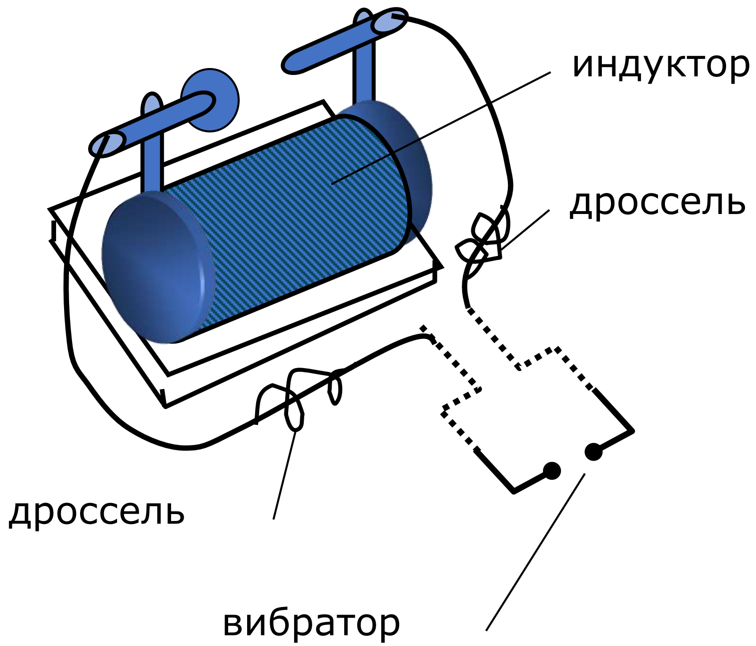
получаем:

$$\vec{p}_{/V} = \frac{1}{c^2} \cdot \vec{S} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \qquad (15)$$

Вибратор Герца

Процесс возбуждения электромагнитных волн какой-либо системой в окружающем пространстве называют **излучением э/м волн**, а саму систему – **излучателем**. Поле э/м волны называют **полем излучения**.

Впервые, в 1887 г., экспериментально были получены э/м волны немецким физиком Генрихом Герцем. Для этого он воспользовался так называемым открытым контуром. Это был разработанный и сконструированный им самим же первый в мире излучатель, названный в последствии **вибратором Герца**.

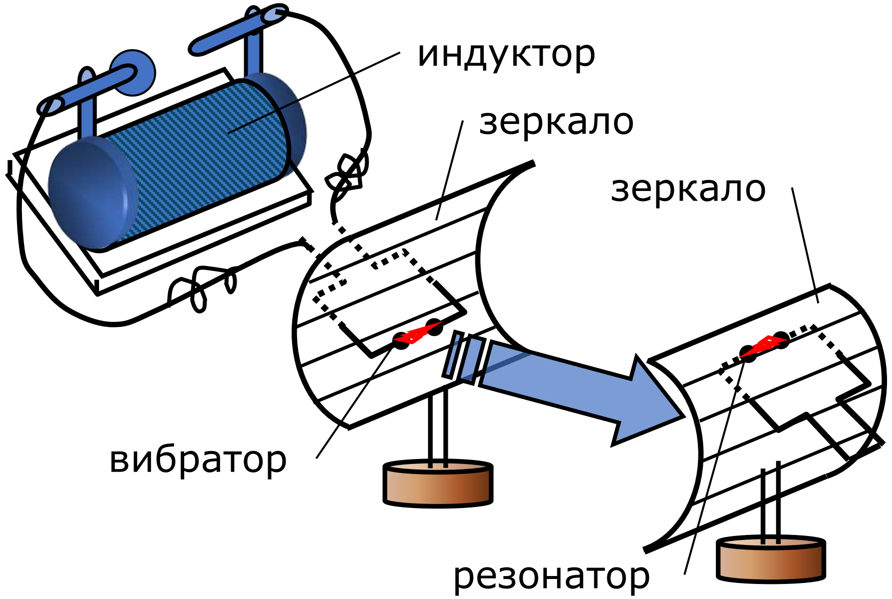


Вибратор состоял из двух медных стержней с шариками-наконечниками, разделенных искровым промежутком. Питание вибратора осуществлялось от индукционной машины (индуктора), на обкладках конденсатора которой создавалось высокое напряжение. Напряжение прикладывалось через дроссели к вибратору (последние нужны для «отсечки» высокочастотных колебаний (тока) в обмотку индуктора).

Вибратор Герца

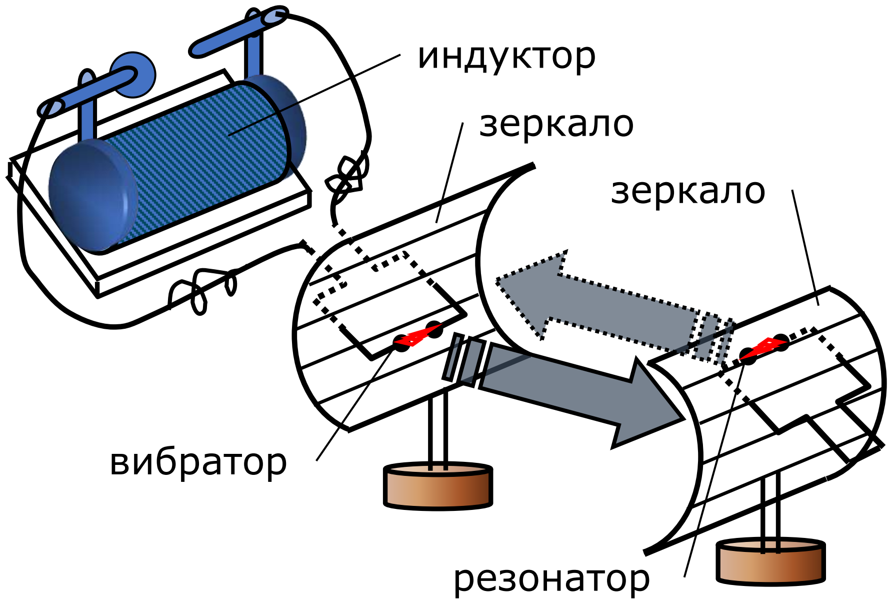
При достижении некоторого критического напряжения, соответствующего данной геометрии (форма наконечников и длина зазора), происходил пробой промежутка; возникала искра, которая замыкала контур вибратора. В контуре возникали затухающие электрические колебания высокой частоты ($\nu \approx 5 \cdot 10^8$ Гц при длине вибратора l = 0,26 м); эти колебания порождали цуг э/м волн, длина которых приблизительно в 2 раза превышала l, т.е. $\lambda \approx$ 0,5 м.

Помещая вибратор в фокусе параболического металлического зеркала, Герц получал направленные плоские э/м волны с λ = 0,5…10 м. Другое такое же зеркало устанавливалось напротив первого. В его фокусе находилось устройство, подобное вибратору, **резонатор** – контур с замкнутыми на себя внешними концами. При настройке резонатора на наилучший прием волн в нем также проскакивала искра



Вибратор Герца

Отразив бегущую плоскую волну с помощью второго зеркала в обратном направлении, Герц получал стоячую волну, при этом в местах нахождения вибратора и резонатора наблюдались интенсивные искровые разряды. По расстоянию между пучностями (расстояние между вибратором и резонатором) можно было определить длину волны λ $[x_{пуч}=\pm n\cdot(\lambda/2)]$.



Герц также экспериментировал с плоской решеткой в виде набора параллельных медных проволочек. Вращая решетку вокруг луча, он получал периодическое изменение интенсивности волны после решетки. Причем I_{max} получалась при поперечном к вектору $\boldsymbol{E}$ волны положении проволочек.