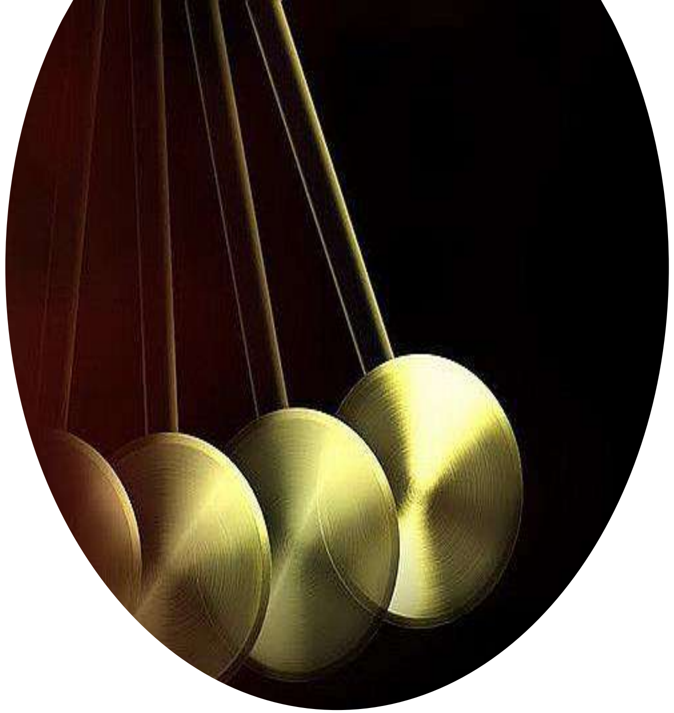


Колебания и волны

Лекция 9

Модуляция

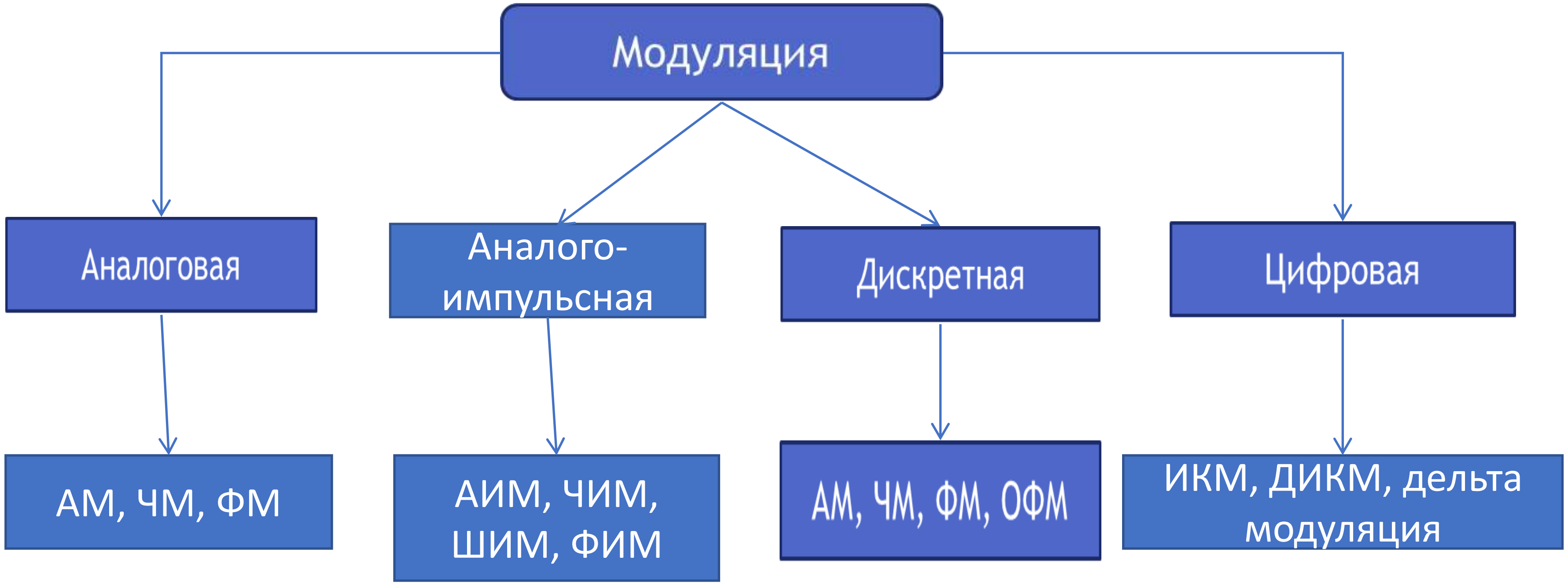
Зачем нужна модуляция?

- Главные задачи системы передачи информации – это передать без потерь и искажений по выбранной линии связи. И в организации такой системы основная проблема – согласование линии связи с первичным электрическим сигналом.
- Для этого согласования используется канал,как комплекс аппаратных средств, преобразующих сигнал к виду, ВОЗМОЖНОМУ для передачи по физической линии связи.

Основные понятия модуляции

- **МОДУЛЯЦИЯ** – это перенос спектра сигнала в другую область частот, применение дискретного представление сигналов и т.д.
- Для процесса преобразования первичного сигнала обычно привлекается дополнительный стационарный сигнал переносчик – **НЕСУЩИЙ СИГНАЛ**
- Вид переносчика определяется физической природой линии связи и выбранного метода передачи информации
- В качестве переносчика применяют гармонические колебания, различные виды импульсного представления сигнала, сложные многоуровневые сигналы или сцециальные функции и т.д.
- Информационный сигнал, который подвергают модуляции называют – **МОДУЛИРУЮЩИМ СИГНАЛОМ**

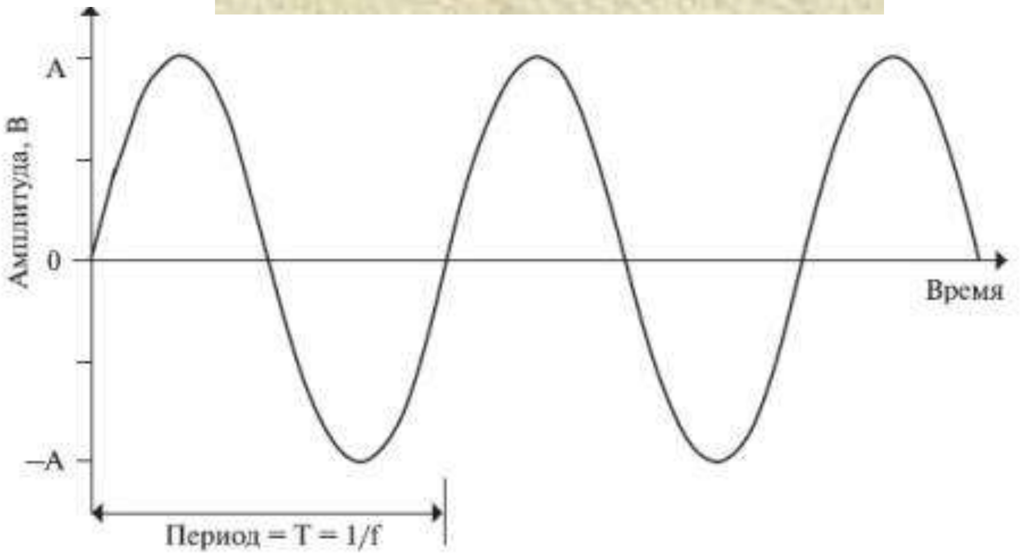
Классификация видов модуляции



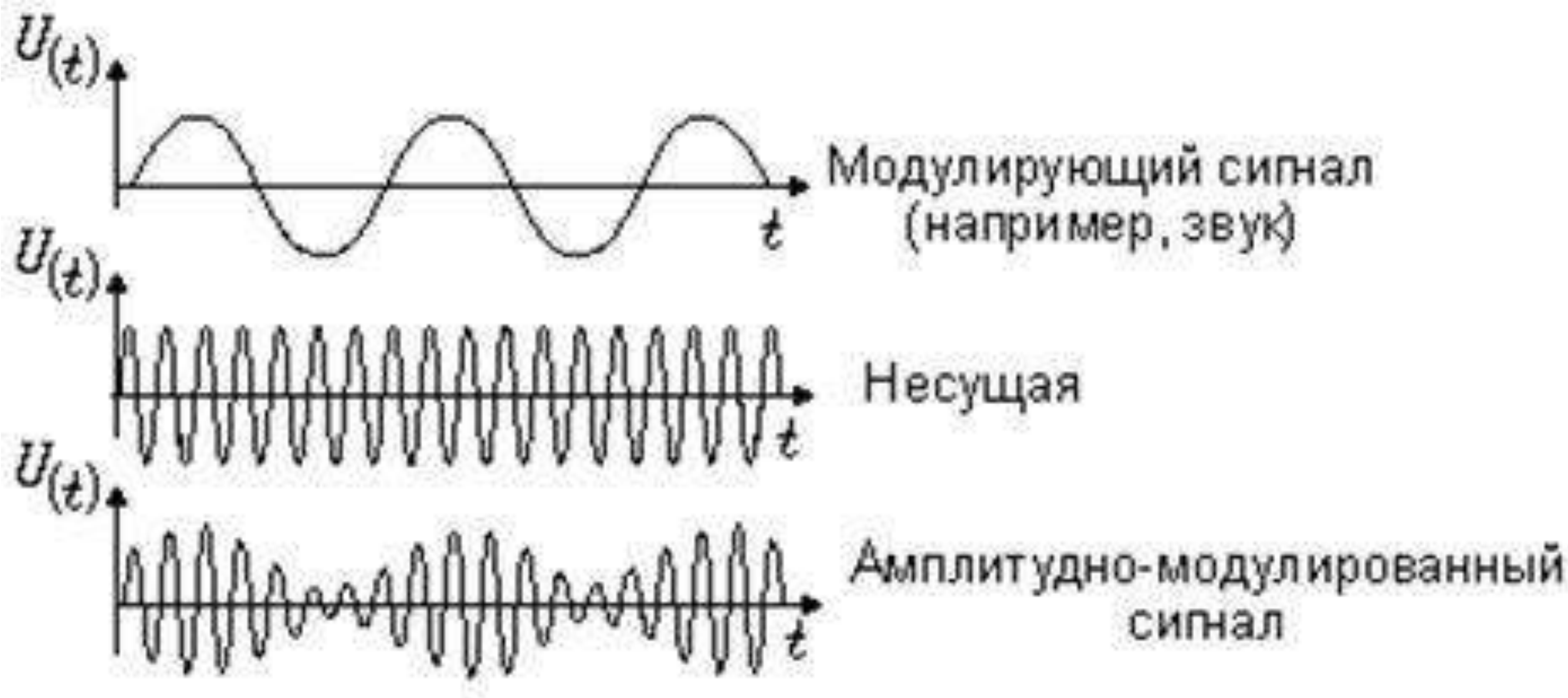
Аналоговая модуляция

- Модулируются аналоговые сигналы
- В качестве несущего используются гармонические колебания вида:

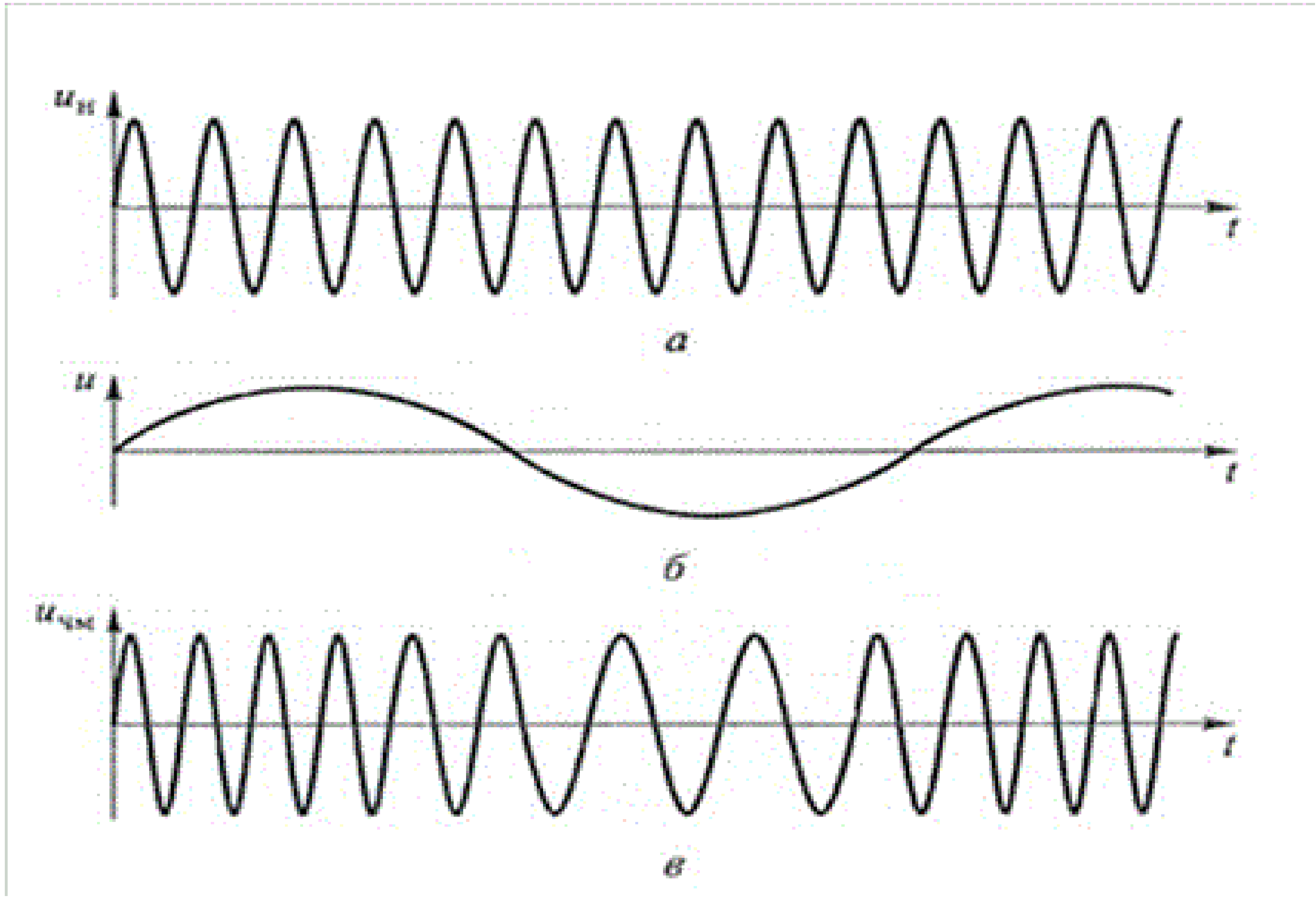
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



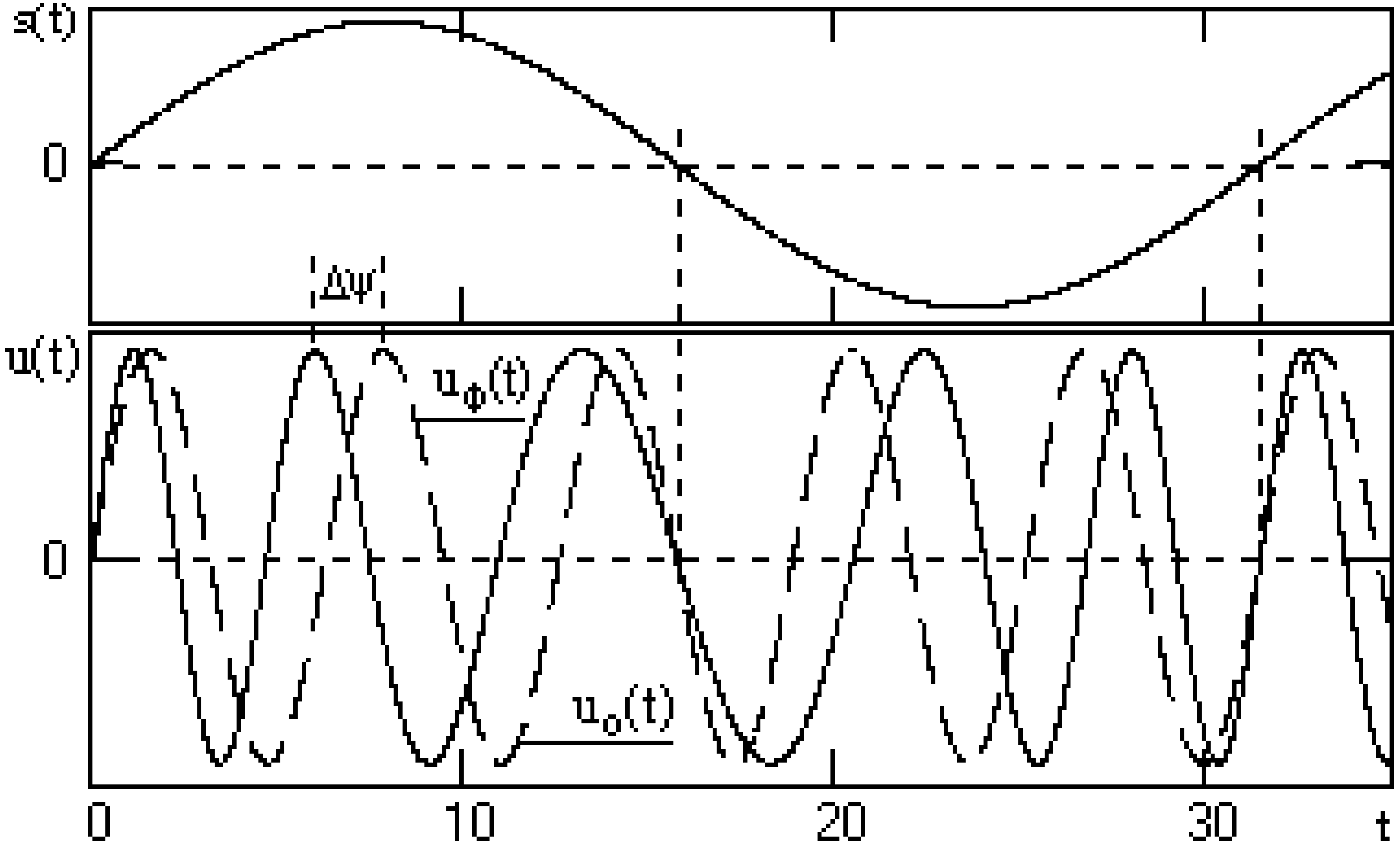
Амплитудная модуляция



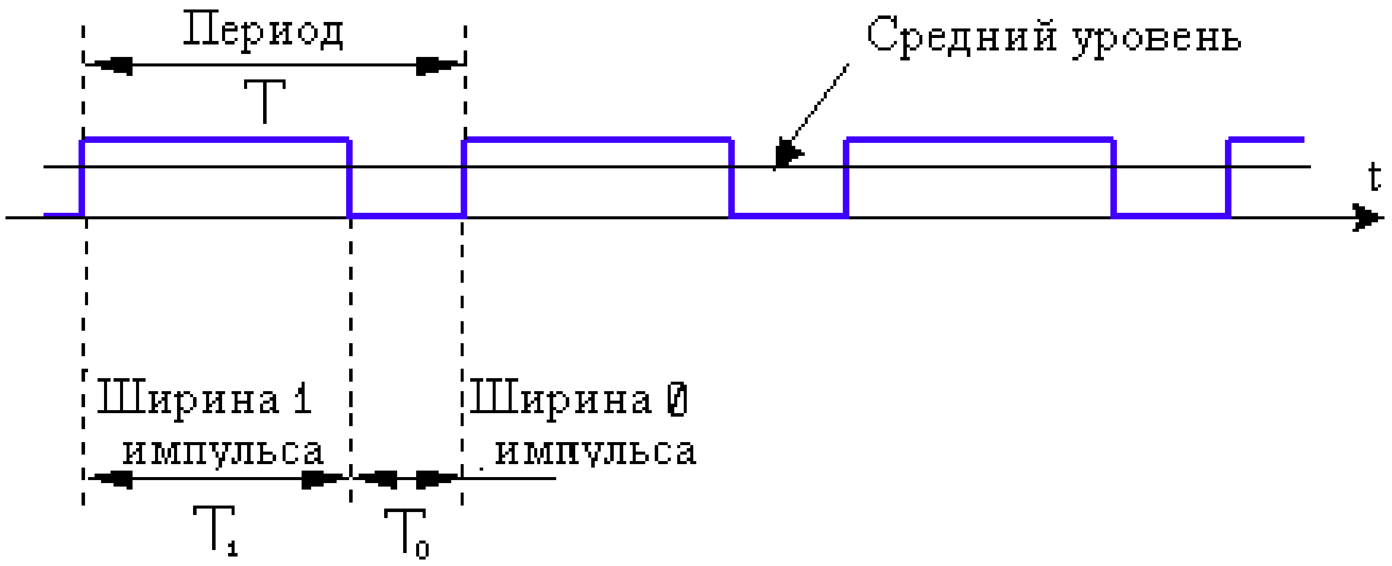
Частотная модуляция



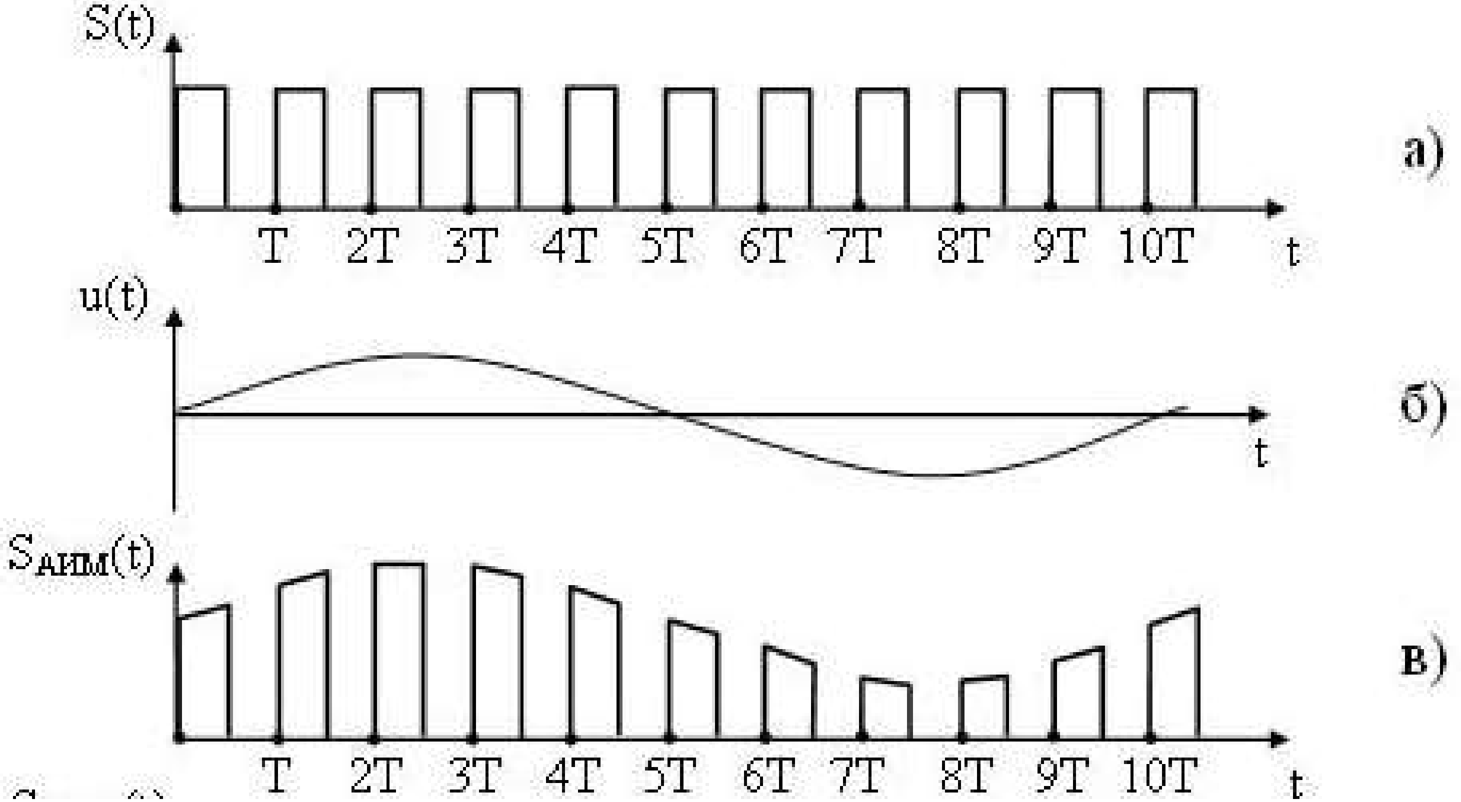
Фазовая модуляция



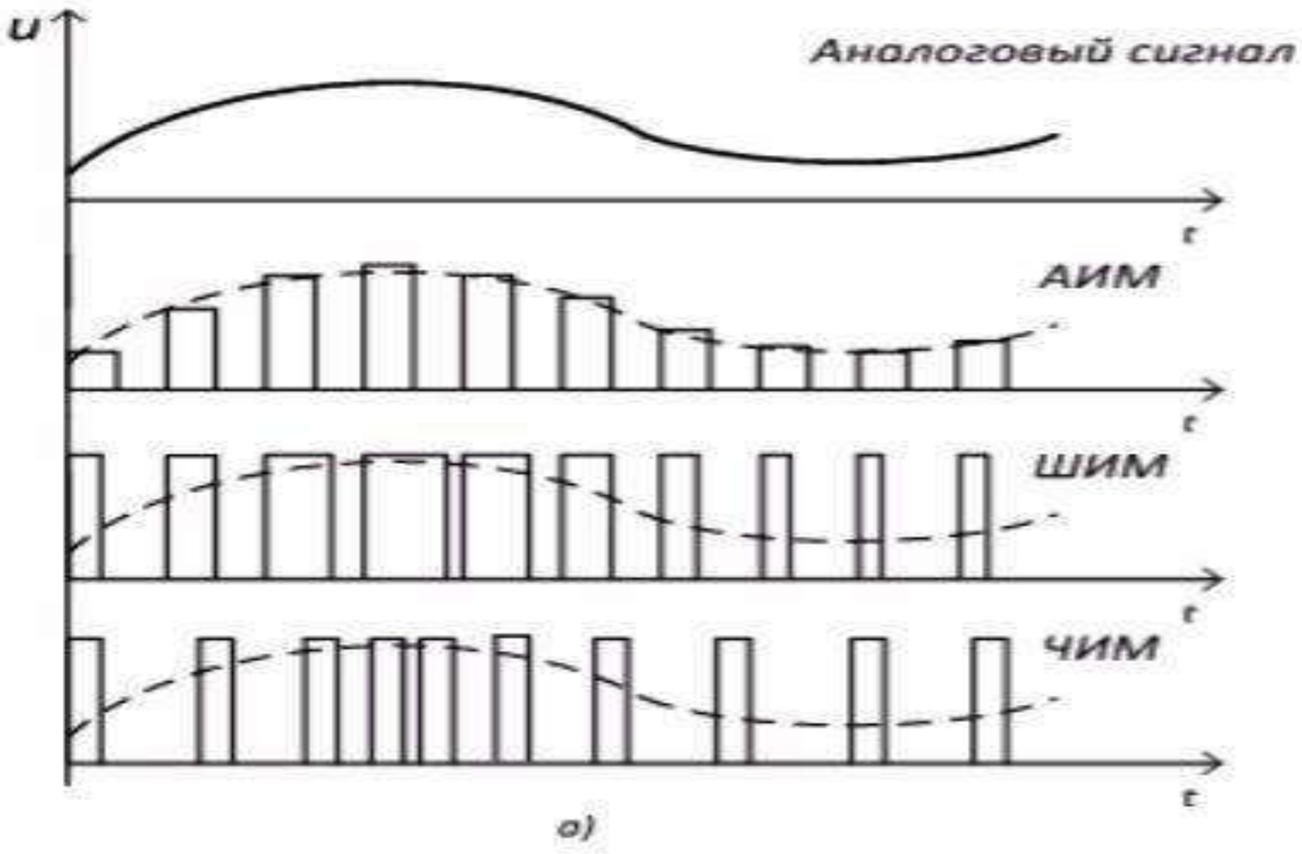
Аналого-импульсная модуляция



Амплитудно-импульная модуляция



Широтно-импульсная и частотно-импульсная модуляция



Комплексный ряд Фурье

Тригонометрические формы ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{T}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{T}kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad k = \overline{0,\infty}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad k = \overline{1,\infty}$$

Частоты гармоник ряда Фурье

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

основная частота – циклическая частота, соответствующая периоду функции

$$\omega_n = n\omega$$

частота гармоники с номером n

$$s(t) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

ряд Фурье

Постоянная составляющая ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

постоянная составляющая = среднее значение функции за период

$$n = 0, \quad \omega_0 = 0$$

Четные и нечетные функции

$$s(t) = s(t + mT)$$ Периодическая функция с периодом T

Любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной на интервале $[-T/2, T/2]$ функции

$$s(t) = E(t) + O(t) \qquad E(t) = \big(s(t) + s(-t)\big)/2 \qquad O(t) = \big(s(t) - s(-t)\big)/2$$

Ряд Фурье

$$s(t) = \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)} + \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)} = E(t) + O(t)$$

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \qquad O(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Четная функция

Нечетная функция

Равенство Парсеваля для ряда Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

ряд Фурье

Равенство Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt = \frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n{}^2 + b_n{}^2]$$

Равенство Парсеваля связывает
энергию сигнала во временной области
с коэффициентами Фурье

Амплитуды и фазы гармоник

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) =$$

гармоника ряда Фурье

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(n\omega t)\right) = \boxed{A_n}\cos(n\omega t + \boxed{\varphi_n})$$

амплитуда и фаза гармоники

Связь с коэффициентами Фурье

$$\boxed{\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \sin(\varphi_n) = -\dfrac{b_n}{A_n}, \quad \cos(\varphi_n) = \dfrac{a_n}{A_n} \end{cases}}$$

Эквивалентная форма ряда Фурье

$$\boxed{s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

Тригонометрические формы ряда Фурье

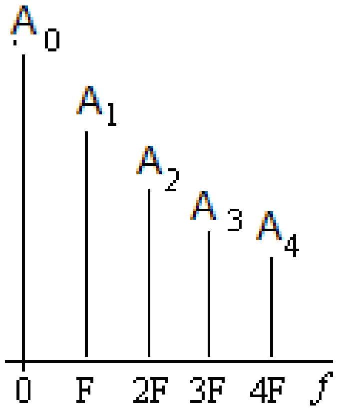
$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right),$$

частота 1-й гармоники

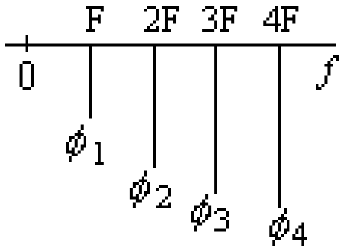
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \qquad F_1 = \frac{1}{T}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \varphi_k = -arctg\,\frac{b_k}{a_k}$$

амплитудный спектр



фазовый спектр



Спектр периодического сигнала - дискретный

Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\Downarrow$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(in\omega t + i\varphi_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-in\omega t - i\varphi_n) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} \exp(i\omega_{-n} t + i\varphi_{-n})$$

$$\Downarrow$$

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n)$$

Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

$$C_n = \frac{1}{2} A_n \exp(i\varphi_n), \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

Соотношения для вещественной периодической функции

$$\begin{cases} \omega_{-n} = -\omega_n = -\omega n \\ A_{-n} = A_n \\ \varphi_{-n} = -\varphi_n \\ C_{-n} = C_n^* \end{cases}$$

Комплексный ряд Фурье

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$$

в общем случае комплексные

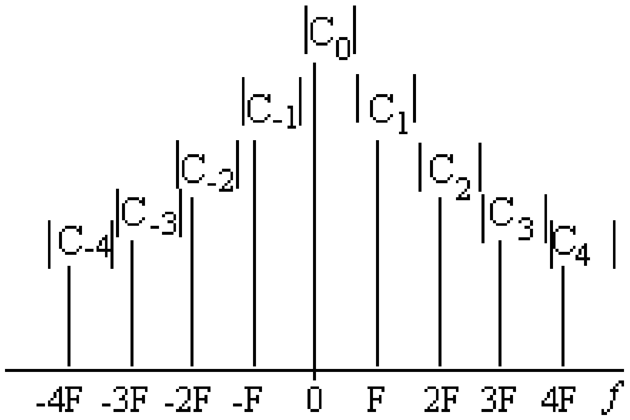
$$C_k = |C_k|e^{j\varphi_k}$$

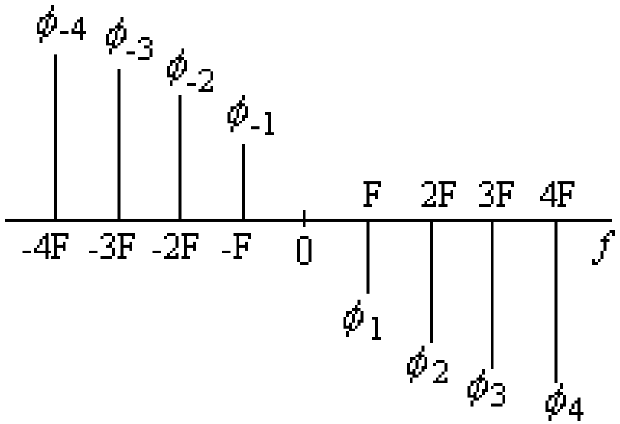
$$\left\{|C_k|, k = \overline{-\infty, \infty}\right\}$$

$$\left\{\varphi_k, k = \overline{-\infty, \infty}\right\}$$

амплитудный спектр

фазовый спектр





Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

ряд Фурье

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)dt$$

формула для расчета ***комплексной амплитуды*** гармоники

Замечание. Отрицательная частота является не физическим, а математическим понятием, вытекающим из способа представления комплексных чисел

Преобразование Фурье для непериодических функций

Непериодическая функция может рассматриваться как функция с бесконечно большим периодом => нужен предельный переход $T \to \infty$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_{\boxed{-T/2}}^{\boxed{T/2}} s(t)\exp(-in\omega t)dt$$

комплексная амплитуда гармоники

$$\delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

Расстояние между соседними отсчетами в частотной области

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega nt) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{G(\omega_n)}\exp(i\omega_n t)\delta\omega$$

ряд Фурье

$$\boxed{G(\omega_n)} = C_n T = 2\pi\frac{C_n}{\delta\omega} = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-i\omega_n t)dt$$

новая функция

Преобразование Фурье. Интеграл Фурье

$$\boxed{T \to \infty, \quad \delta\omega \to 0}$$

$$G(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-i\omega_n t)dt \Rightarrow G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-i\omega t)dt$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n)\exp(i\omega_n t)\delta\omega \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Здесь частоту нельзя определить, как величину, обратную периоду.

Частотой теперь будем называть новую непрерывную независимую переменную, которая появилась в формулах для интеграла Фурье

Интеграл Фурье

$$G(\omega) = \Phi\left[s(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-i\omega t)dt$$

Прямое преобразование Фурье

$$s(t) = \Phi^{-1}\left[G(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Обратное преобразование Фурье

$G(\omega)$ - ***Фурье-образ*** или ***частотный спектр*** функции $s(t)$

$G(\omega),\ s(t)$ - ***функции, сопряженные по Фурье***

Условия существования интеграла Фурье

1. Функция должна быть ***абсолютно интегрируема***, т.е. должен существовать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|dt < \infty$$

2. Функция должна иметь только конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в пределах любого отрезка конечных размеров

3. Функция не должна иметь разрывов второго рода

Для функций, которые не удовлетворяют условиям существования, часто можно найти имеющее смысл преобразование, если эти функции удается определить как предел последовательности функций, поддающихся преобразованию Фурье. Преобразуя каждый член определяющей последовательности, мы получаем соответствующую последовательность Фурье-образов, предел которой называется обобщенным Фурье-образом исходной функции.

Основные свойства преобразования Фурье

1. Взаимная однозначность

$$\Phi^{-1}\left[\Phi\left[s(t)\right]\right]=s(t)$$

$$\Phi\left[\Phi^{-1}\left[G(\omega)\right]\right]=G(\omega)$$

2. Линейность

$$\Phi\left[\alpha s_1(t)+\beta s_2(t)\right]=\alpha\Phi[s_1(t)]+\beta\Phi[s_2(t)]$$

3. Теорема смещения

$$\Phi\left[s(t)\exp(i\omega_0 t)\right]=G(\omega-\omega_0)$$

$$\Phi^{-1}\left[G(\omega)\exp(i\omega t_0)\right]=s(t-t_0)$$

Основные свойства преобразования Фурье

4. Теорема о свертке

$$c(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(t')s_2(t-t')dt'$$ - свертка функций $s_1(t),\ s_2(t)$

Прямая теорема: преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье от этих функций

$$\Phi\left[s_1(t) \otimes s_2(t)\right] = \Phi[s_1(t)]\Phi[s_2(t)]$$

Обратная теорема: преобразование Фурье от произведения функций равно свертке их преобразований Фурье

$$\Phi\left[s_1(t)s_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\Phi[s_1(t)] \otimes \Phi[s_2(t)]$$

Основные свойства преобразования Фурье

5. Теорема Парсеваля для интеграла Фурье

$$G(\omega) = \Phi[s(t)]$$

Фурье-образ функции $s(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega,}$$

Равенство Парсеваля

$$\boxed{S(\omega) = |G(\omega)|^2}$$

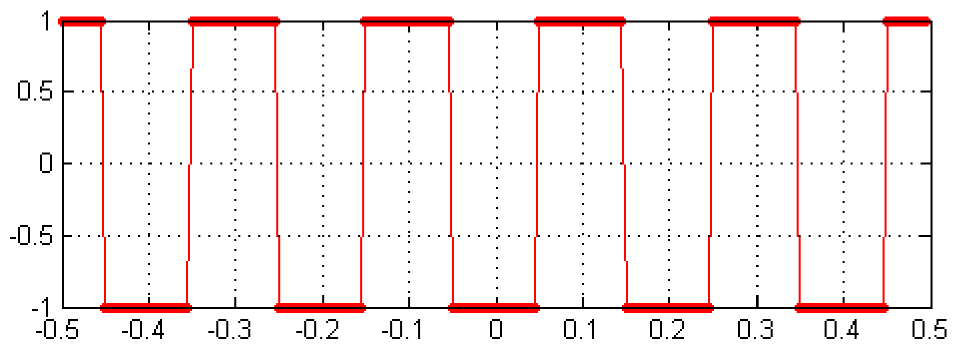
Спектральная плотность энергии детерминированного сигнала $s(t)$

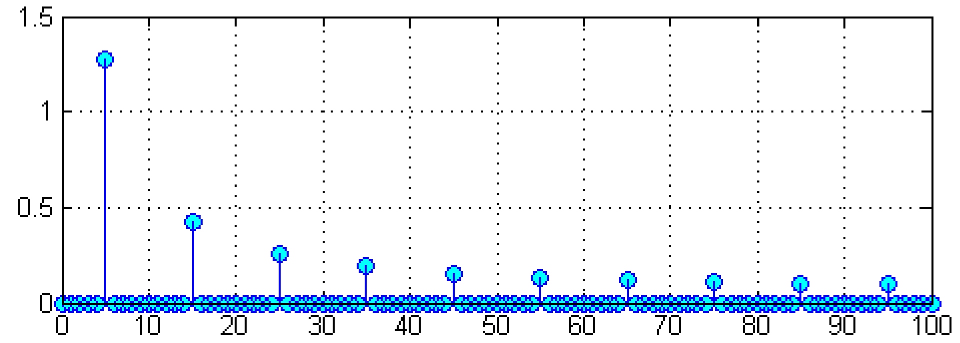
Характеризует распределение энергии по частотам

Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

1. Сигнал в форме меандра:

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \ldots\right)$$

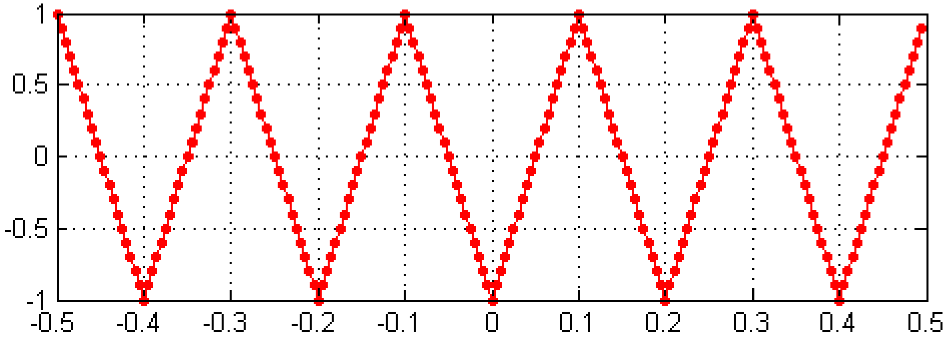


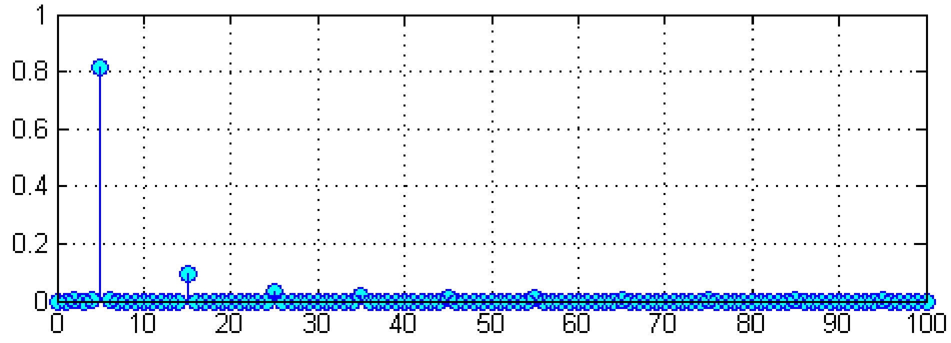


Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

2. Сигнал треугольной формы:

$$s(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right)+\frac{1}{5^2}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right)+\dots\right)$$

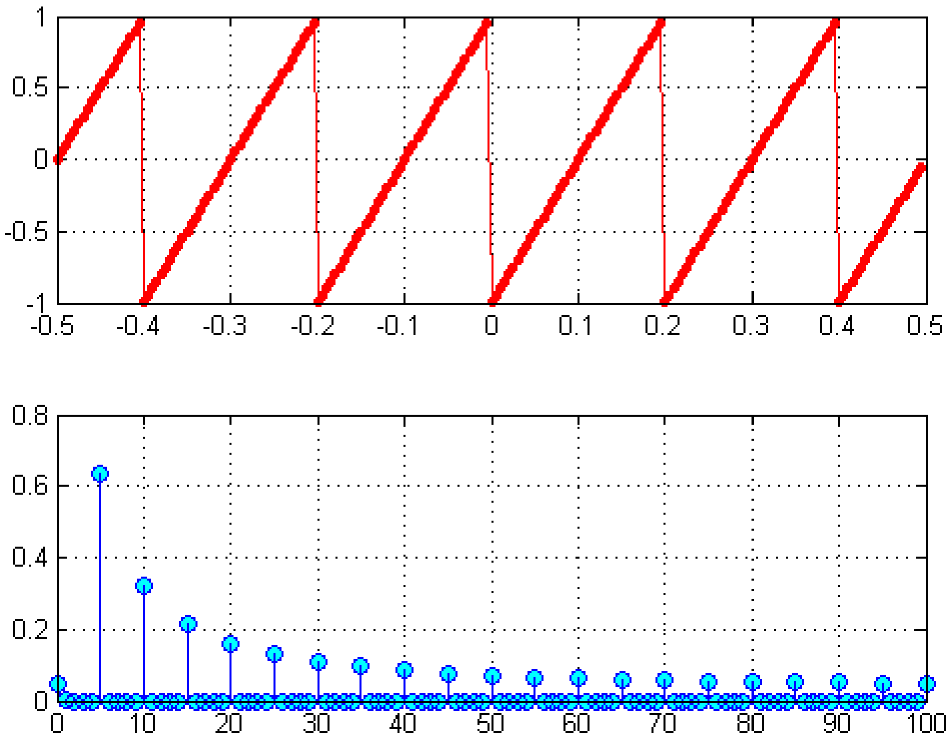




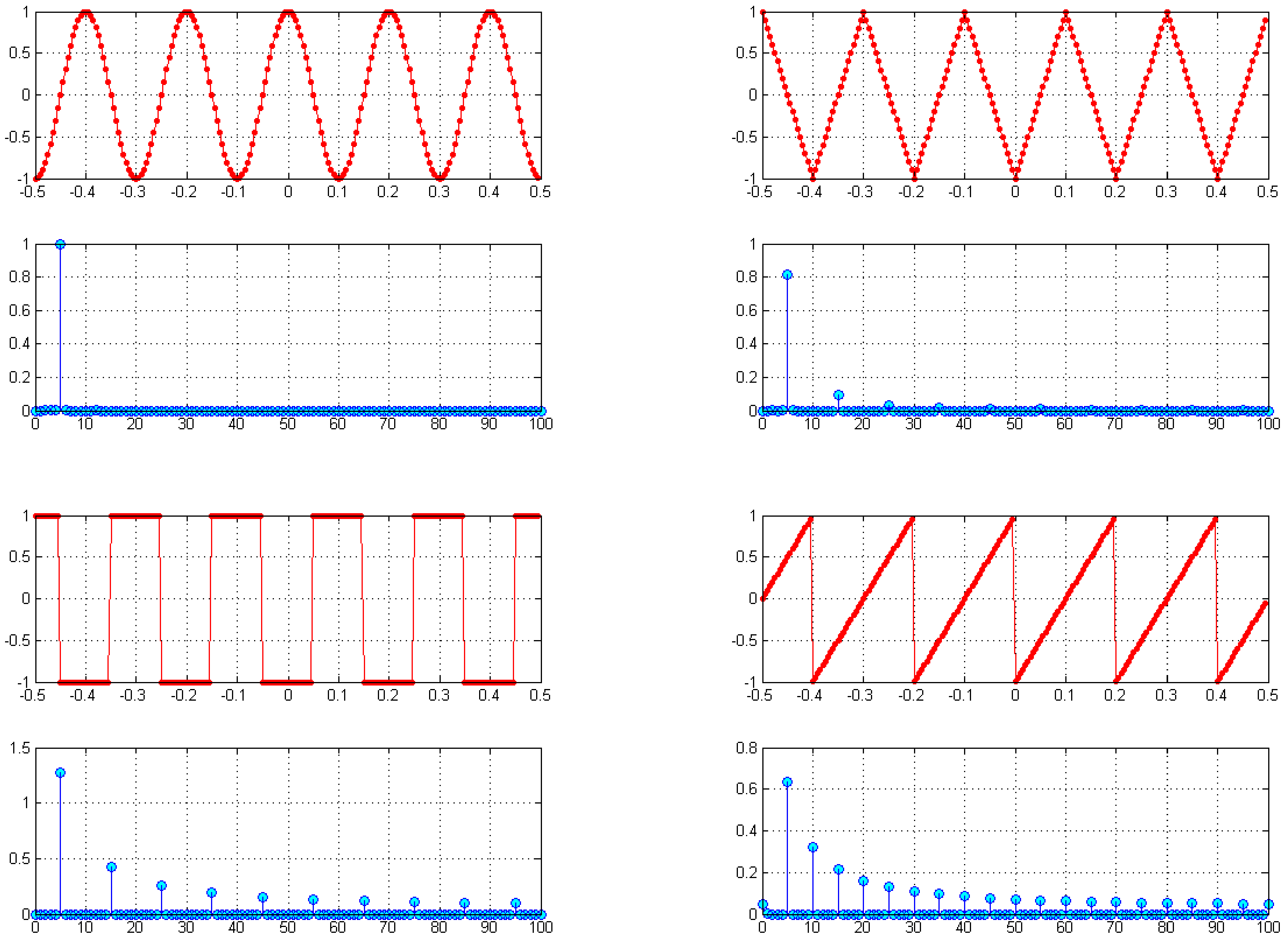
Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

3. Пилообразный сигнал:

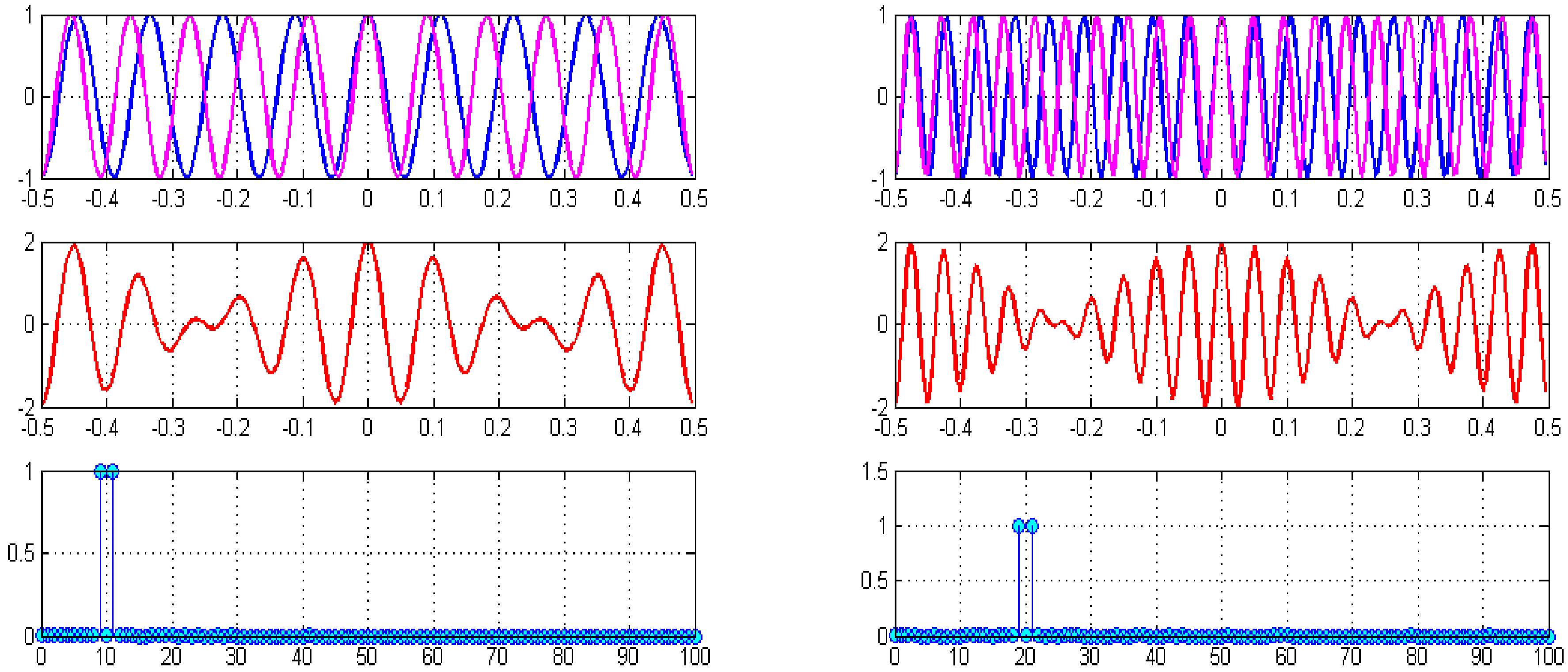
$$s(t)=\frac{2A}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right)-\frac{1}{4}\sin\left(4\frac{2\pi}{T}t\right)+\ldots\right)$$



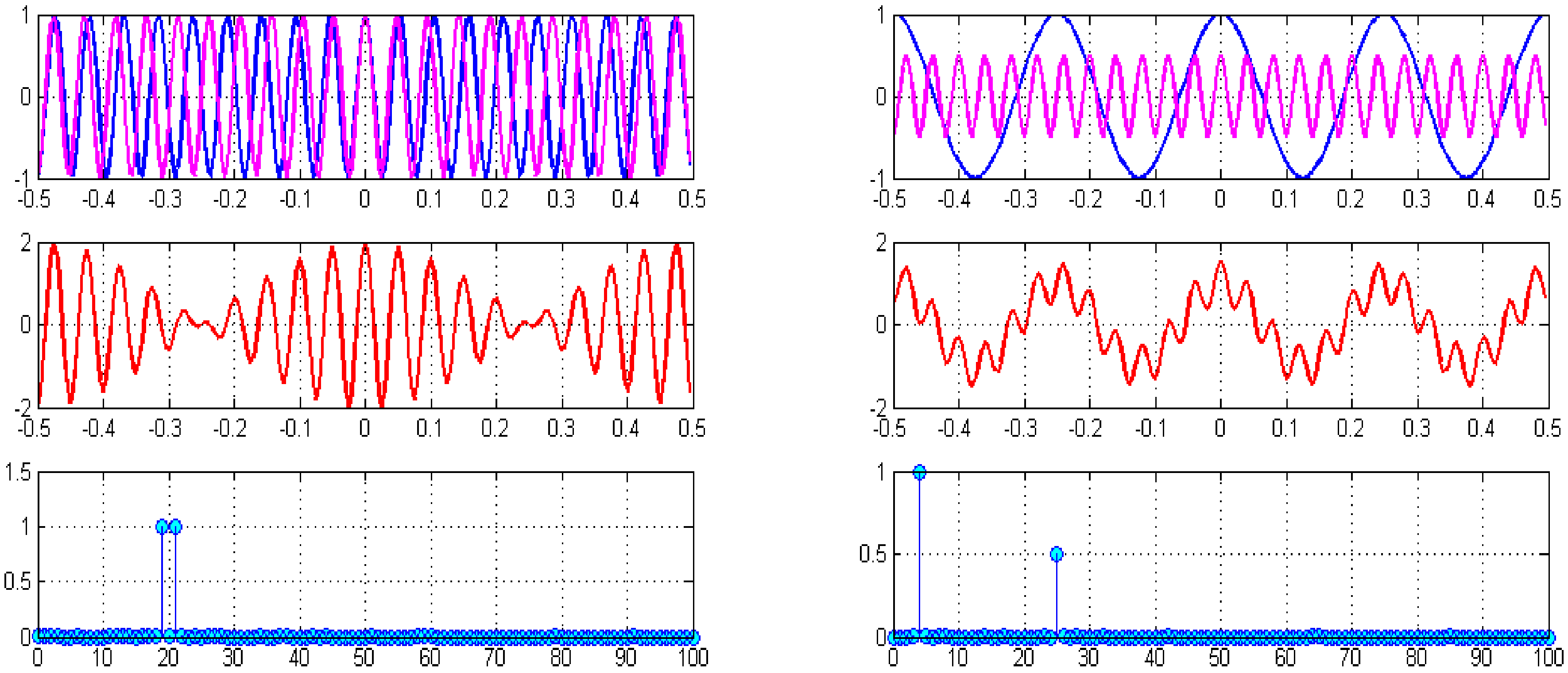
Спектр периодических сигналов



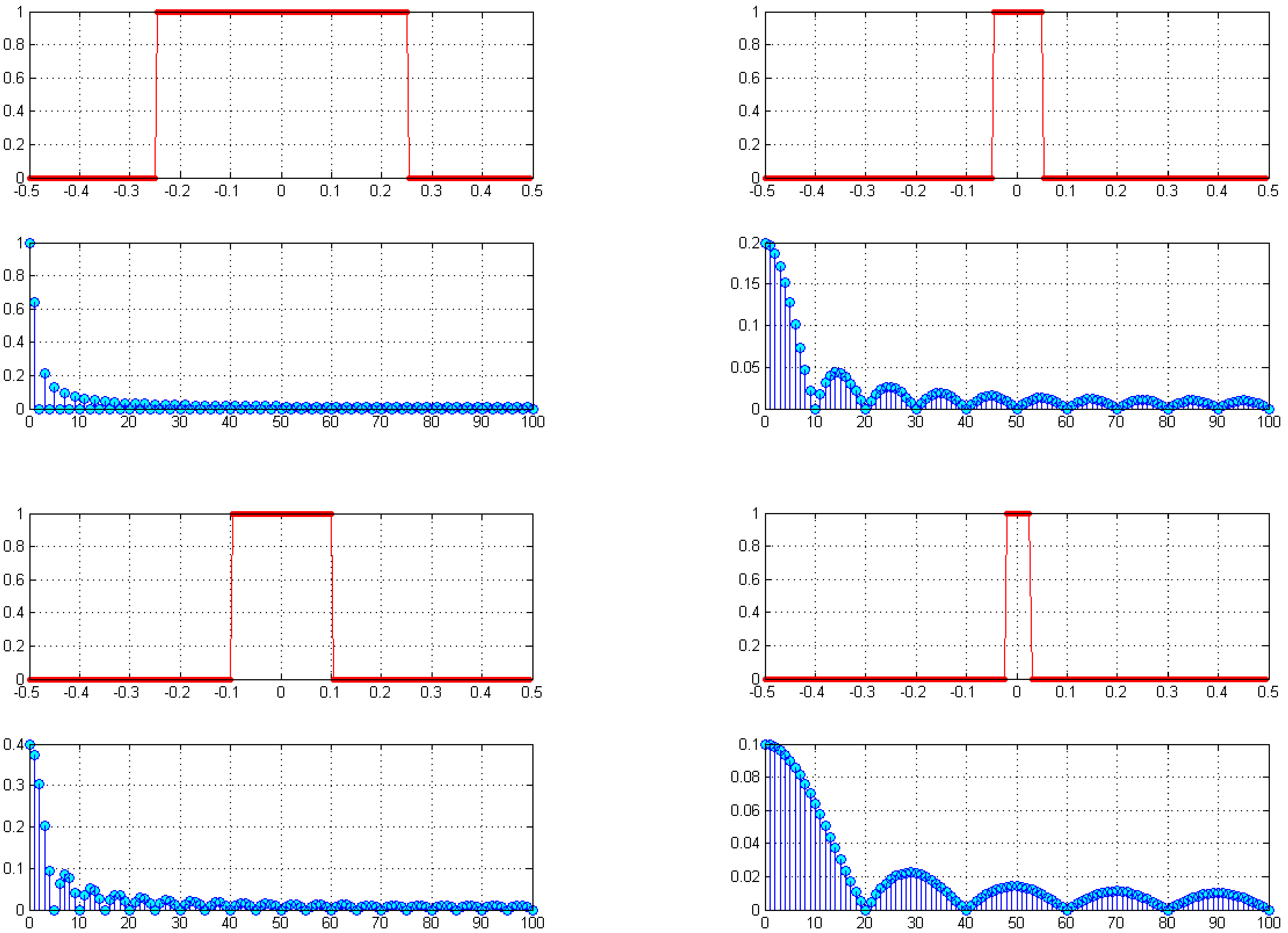
Суммирование двух гармонических сигналов с близкими частотами



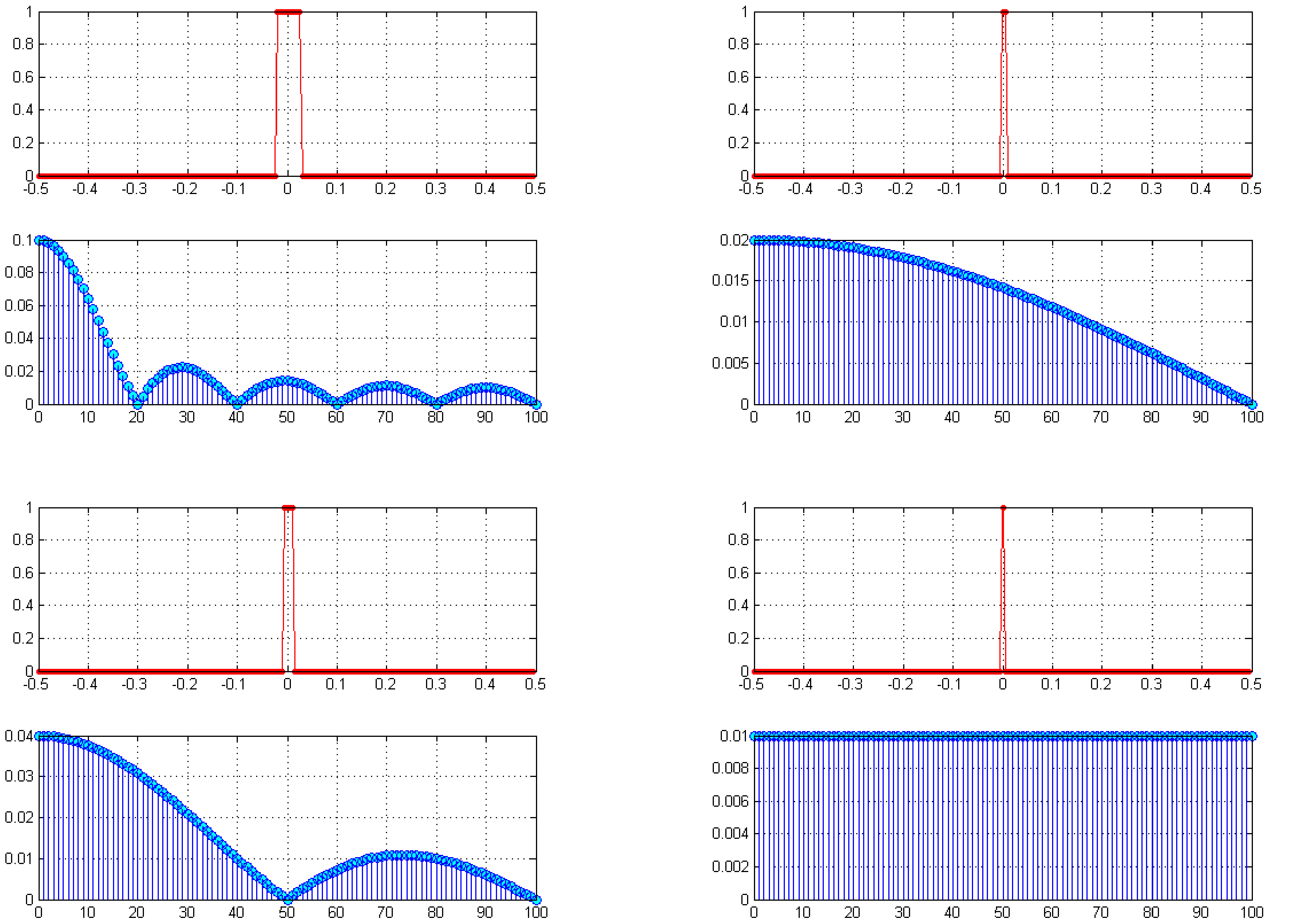
Суммирование гармонических сигналов с далекими частотами



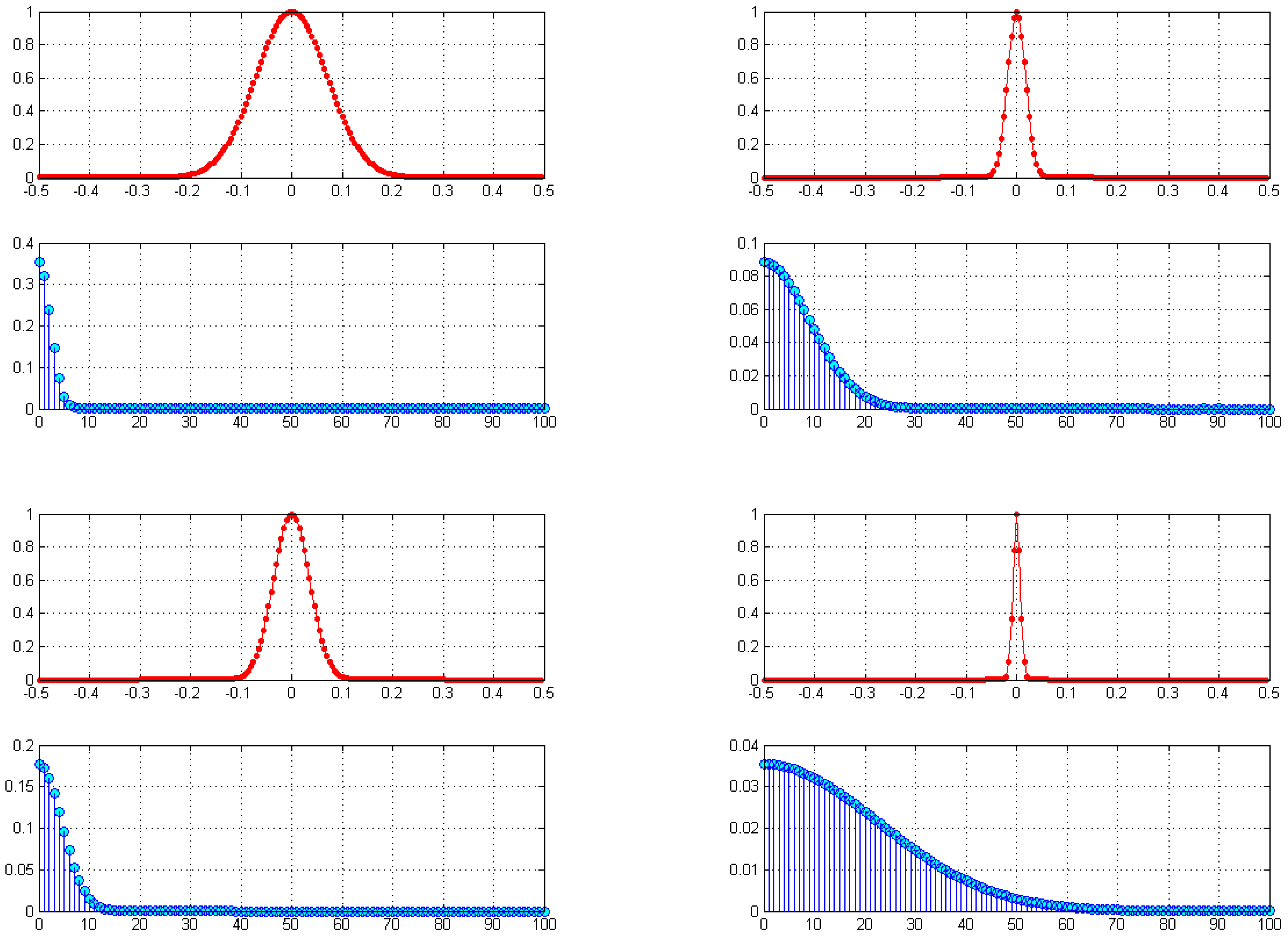
Спектр прямоугольного импульса (1)



Спектр прямоугольного импульса (2)



Спектр Гауссова импульса



Дискретное преобразование Фурье

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)dt$$

комплексный коэффициент Фурье

$$C'_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-i2\pi nk/N\right)$$

прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

комплексный ряд Фурье

$$s_k = \sum_{k=0}^{N-1} C'_n \exp(i2\pi nk/N)$$

Обратное ДПФ

Двумерное ДПФ

Преобразование прямоугольных матриц (двумерных массивов)

$$C_{mn} = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} s_{lk}\exp\left(-i2\pi\left[\frac{lm}{M}+\frac{nk}{N}\right]\right)$$

прямое двумерное ДПФ

$$s_{lk} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} C_{mn}\exp\left(i2\pi\left[\frac{lm}{M}+\frac{nk}{N}\right]\right)$$

обратное двумерное ДПФ