

Группа М3217

К работе допущен _____

Студент Бессонов Борис Александрович

Работа выполнена _____

Преподаватель Тимофеева Эльвира Олеговна

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1

Распределение случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определенного интервала времени

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией

3. Объект исследования. Результат измерения заданного промежутка времени

В качестве исследуемой случайной величины выбран результат измерения заданного промежутка времени.

4. Метод экспериментального исследования.

При помощи обычных часов с секундной стрелкой или стрелочного секундомера задают некоторый промежуток t времени и многократно измеряют его достаточно точным цифровым секундомером.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

$\rho(t)$ —плотность вероятности (функция Гаусса)

N —полное количество измерений

ΔN —количество результатов, попавших в интервал $[t; t + \Delta t]$

σ_N —выборочное среднеквадратичное отклонение

$\langle t \rangle$ —среднеарифметическое всех результатов измерений

$P(t_1 < t < t_2)$ –вероятность попадания результата каждого измерения в интервал $[t_1; t_2]$

α –доверительная вероятность

$[\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]$ –доверительный интервал

Плотность вероятности (закон распределения исследуемой величины) (1):

$$\rho(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}.$$

Функция Гаусса (2):

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Выборочное среднее как среднеарифметическое всех результатов измерений (3):

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$

Выборочное среднеквадратичное отклонение (4):

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}.$$

Максимальная плотность нормального распределения (5):

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$$

Соотношение для вероятности попадания результата измерения в интервал $[t_1, t_2]$ (6):

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \approx \frac{N_{12}}{N}$$

Вероятность (7):

$$\begin{aligned} t \in [\langle t \rangle - \sigma, \langle t \rangle + \sigma], & \quad P_\sigma \cong 0,683 \\ t \in [\langle t \rangle - 2\sigma, \langle t \rangle + 2\sigma], & \quad P_{2\sigma} \cong 0,954 \\ t \in [\langle t \rangle - 3\sigma, \langle t \rangle + 3\sigma], & \quad P_{3\sigma} \cong 0,997 \end{aligned}$$

Приближенные значения вероятностей (8):

$$\begin{aligned} & [\langle t \rangle_N - \sigma_N, \langle t \rangle_N + \sigma_N], \\ & [\langle t \rangle_N - 2\sigma_N, \langle t \rangle_N + 2\sigma_N], \\ & [\langle t \rangle_N - 3\sigma_N, \langle t \rangle_N + 3\sigma_N], \end{aligned}$$

Среднеквадратичное отклонение среднего значения (9):

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$$

Уравнение с коэффициентом Стьюдента (10):

$$\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}$$

Доверительная вероятность (11):

$$\alpha = P(t \in [\langle t \rangle - \Delta t, \langle t \rangle + \Delta t]) .$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Цифровой секундомер	Секундомер	5 с	0.01 с
2	Стрелочный секундомер	Секундомер	5 с.	0.01 с

7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

В работе используются устройство или прибор, в котором происходит периодический процесс с частотой порядка нескольких десятых долей герца (часы с секундной стрелкой, стрелочный секундомер, математический или физический маятник) и цифровой секундомер, с ценой деления не более 0,01 с. Первый прибор задает интервал времени, который многократно измеряется цифровым секундомером.

8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы).

№	t_i, C	$t_i - \langle t \rangle_N, C$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, C^2$
1	4,95	-0,09	0,01
2	4,49	-0,55	0,31
3	4,56	-0,48	0,23
4	5,23	0,19	0,03
5	5,19	0,15	0,02
6	4,6	-0,44	0,20
7	5,16	0,12	0,01
8	5,17	0,13	0,02
9	5,27	0,23	0,05
10	5,51	0,47	0,22
11	5,25	0,21	0,04
12	5,17	0,13	0,02
13	4,6	-0,44	0,20
14	4,49	-0,55	0,31
15	4,89	-0,15	0,02
16	4,87	-0,17	0,03
17	4,96	-0,08	0,01
18	5,01	-0,03	0,00
19	4,38	-0,66	0,44
20	5,06	0,02	0,00
21	5,3	0,26	0,07
22	5,29	0,25	0,06
23	4,75	-0,29	0,09
24	4,59	-0,45	0,21
25	5,03	-0,01	0,00
26	4,48	-0,56	0,32

27	5,18	0,14	0,02
28	5,04	0,00	0,00
29	5,28	0,24	0,06
30	5,28	0,24	0,06
31	4,72	-0,32	0,11
32	4,55	-0,49	0,24
33	4,91	-0,13	0,02
34	4,52	-0,52	0,28
35	5,55	0,51	0,26
36	4,88	-0,16	0,03
37	5,38	0,34	0,11
38	5,51	0,47	0,22
39	5,15	0,11	0,01
40	6,25	1,21	1,45
41	4,6	-0,44	0,20
42	4,57	-0,47	0,23
43	4,41	-0,63	0,40
44	5,53	0,49	0,24
45	5,12	0,08	0,01
46	5,24	0,20	0,04
47	4,84	-0,20	0,04
48	5,55	0,51	0,26
49	4,96	-0,08	0,01
50	5,37	0,33	0,11
51	4,98	-0,06	0,00
52	5,09	0,05	0,00
53	4,6	-0,44	0,20
54	4,83	-0,21	0,05
55	5,03	-0,01	0,00
56	5,2	0,16	0,02
57	4,98	-0,06	0,00
58	5,67	0,63	0,39
59	5,43	0,39	0,15
60	5,56	0,52	0,27
61	4,87	-0,17	0,03
62	5,69	0,65	0,42
63	5,21	0,17	0,03
64	4,56	-0,48	0,23
65	4,94	-0,10	0,01
66	4,8	-0,24	0,06
67	5,01	-0,03	0,00
68	5,07	0,03	0,00
69	5,21	0,17	0,03
70	4,78	-0,26	0,07
71	4,6	-0,44	0,20
72	4,52	-0,52	0,28
73	5,4	0,36	0,13
74	4,97	-0,07	0,01
75	4,36	-0,68	0,47
76	5,03	-0,01	0,00
77	5,41	0,37	0,13
78	5,09	0,05	0,00
79	5,01	-0,03	0,00

80	4,7	-0,34	0,12
81	4,71	-0,33	0,11
82	6,09	1,05	1,09
83	5,65	0,61	0,37
84	4,41	-0,63	0,40
85	5,09	0,05	0,00
86	5,17	0,13	0,02
87	5,05	0,01	0,00
88	4,7	-0,34	0,12
89	5,13	0,09	0,01
90	5,8	0,76	0,57
91	3,8	-1,24	1,55
92	5,24	0,20	0,04
93	5,17	0,13	0,02
94	5,28	0,24	0,06
95	4,84	-0,20	0,04
96	5,39	0,35	0,12
97	5,2	0,16	0,02
98	4,87	-0,17	0,03
99	5,34	0,30	0,09
100	6,3	1,26	1,58
	$\langle t \rangle_N = 5.04 \text{ c}$	$\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N) = 0 \text{ c}$	$\sigma_N = 0.41$ $p_{max} = 0.97$

Границы интегралов, С	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
3.8	1	0.04	3.93c	0.02
4.1				
4.1	0	0.00	4.18c	0.10
4.3				
4.3	9	0.36	4.43c	0.31
4.6				
4.6	16	0.64	4.68c	0.65
4.8				
4.8	24	0.96	4.93c	0.93
5.1				
5.1	29	1.16	5.18c	0.92
5.3				
5.3	11	0.44	5.43c	0.63
5.6				
5.6	6	0.24	5.68c	0.30
5.8				
5.8	1	0.04	5.93c	0.10
6.1				
6.1	3	0.12	6.18c	0.02

6.3				
-----	--	--	--	--

	Интервал, С		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
5.04 ± 0.41	4.63с	5.46с	67	0.67	≈ 0.68
5.04 ± 0.82	4.22с	5.87с	96	0.96	≈ 0.95
5.04 ± 1.23	3.81с	6.28с	98	0.98	≈ 0.99

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы).

Расчёт среднеквадратичного отклонения среднего значения по формуле (9):

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = 0.041$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$:
 $t_{\alpha, N} \approx 1,98$ при $N=100$

Расчёт доверительного интервала для измеряемого в работе промежутка времени по формуле (10):

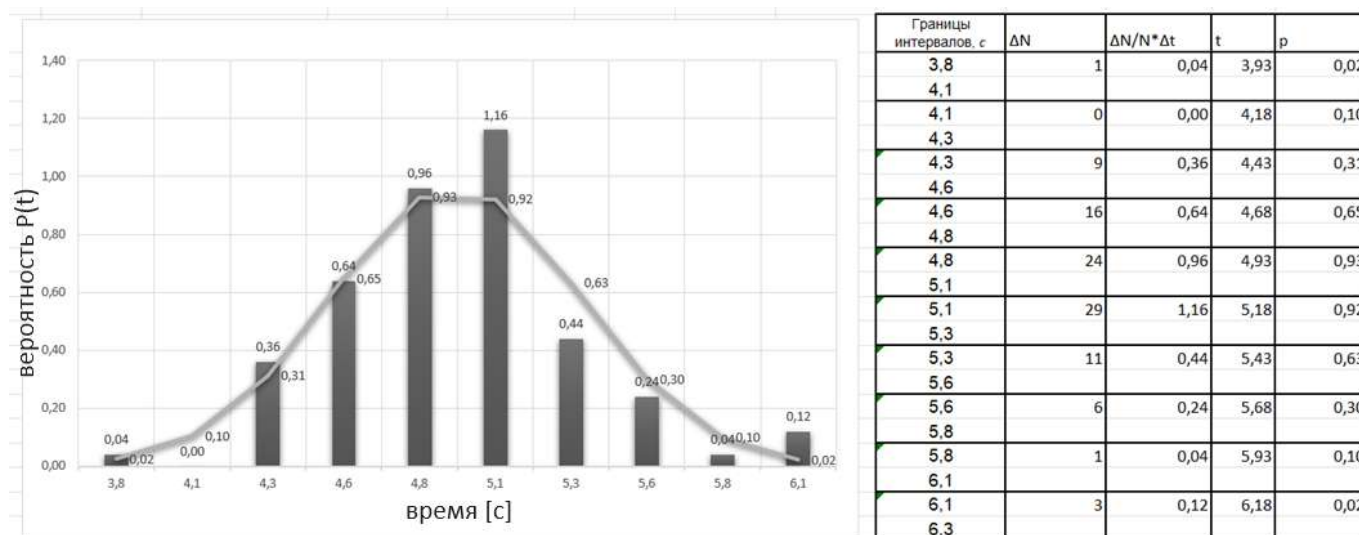
$$\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 0.082$$

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

$\frac{|x - a|}{|a|}$ – относительная погрешность
 $|x - a|$ – абсолютная погрешность
 $|a|$ – приближенное значение x

$$\frac{|5.04 - 5.00|}{5} \cdot 100\% = 0.8\%$$

11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).



12. Окончательные результаты.

$$\langle t \rangle = 5.04 \text{ с}$$

$$\sigma_N = 0.41$$

$$\rho_{max} = 0.97$$

$$\sigma_{\langle t \rangle} = 0.041$$

$$\Delta t = 0.082 \text{ с при } \alpha = 0.95, N = 100, t_{\alpha, N} = 1.98$$

Относительная погрешность: $Y = 0.8\%$

13. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе лабораторной работы я исследовал распределение случайной величины. Для этого я провёл многократные измерения определенного интервала времени (5 секунд)

После того, как был задан промежуток времени, разброс t по секундомеру не превышал нескольких десятых секунд. На разброс повлиял человеческий фактор – человеческая реакция и невнимательность. Из-за этого имеется подобная погрешность.

Гистограмма не полностью соответствует графику плотности вероятностей из-за малого количества измерений и человеческого фактора.

14. Дополнительные задания.

15. Выполнение дополнительных заданий.

16. Замечания преподавателя (исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещают в этот пункт).

- Примечание:**
1. Пункты 1-6,8-13 Протокола-отчета **обязательны** для заполнения.
 2. Необходимые исправления выполняют непосредственно в протоколе-отчете.
 3. При ручном построении графиков рекомендуется использовать миллиметровую бумагу.
 4. Приложения 1 и 2 вкладывают в бланк протокола-отчета.