

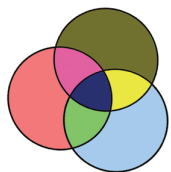
# فصل اول

## مجموعه‌ی عددهای صحیح

کتاب راهنما مخصوص معلّم

## فهرست مطالب

مجموعه	۱
تمرین	۱
نیت عبود	۳
تمرین	۱۳
عدد صحیح	۲۳
تمرین	۲۴
امیرو و صدف‌هایش	۲۶
نکاتی در مورد چهار عمل اصلی	۲۷
ترتیب عمل‌ها در محاسبات	۲۸
تمرین	۲۸



## مجموعه

توجه کنید که در این فصل نیازی به معرفی نماد اجتماع، اشتراک و یا هر عملگر مجموعه‌ای دیگر نیست. نیازی به نام بردن نمودارون<sup>۱</sup> هم نیست. در این قسمت از درس، سعی کنید دانش‌آموزان را با مفهوم مجموعه، عضو و زیرمجموعه آشنا کنید.

نکته‌ی جالب توجهی درباره‌ی موضع و موقعیت دانش مجموعه وجود دارد. یک دانش‌آموز ایرانی بسیار کم نیاز به دانستن جبر مجموعه‌ها (نحوه‌ی رفتار اجتماع  $\cup$ ، اشتراک  $\cap$  و ...) دارد و تقریباً همه‌ی دانشی که یک دانش‌آموز تا پایان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی خواهد دید، ریاضیات حداکثر قرن نوزدهمی است. این ریاضیات قبل از شکل‌گیری «نظریه‌ی مجموعه‌ها» موجودیت داشته است. بنابراین در یک کلام، در دوره‌ی راهنمایی تحصیلی عمر دانش‌آموزان را با یاد دادن اجباری انبوه رفتارهای عملگرهای ریاضی تلف نکنید!

[تدریس صفحه‌ی ۱، ۲، ۳ کتاب]

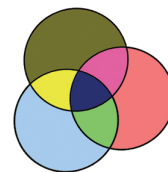
[حل تمرین صفحه‌ی ۱ کتاب تکمیلی]

## تمرین

۱) هدف از این تمرین، علت و ضرورت استفاده از نماد «...» است. از دانش‌آموزان بخواهید در قسمت «ب» تمام ۴۵ عضو را بنویسند. احتمالاً در هنگام انجام «ج» صدای اعتراض آنها بلند می‌شود. در این هنگام به آنها نماد «...» را معرفی کنید. البته یک دانش‌آموز خوش حافظه ممکن است به کاربرد این نماد در کتاب درسی سال اول اشاره کند (صفحه‌ی ۵ و صفحه‌ی ۱۲۷ کتاب ریاضی سال اول راهنمایی).

1) venn





ریاضیدان‌ها اگر نظم‌ی بین اعضای مجموعه تشخیص دهند، ابتدا (در ذهن) اعضای مجموعه را مرتب می‌کنند:

اگر تعداد اعضا محدود باشد، معمولاً سه عضو اول و عضو آخر را می‌نویسند. مگر اینکه سه عضو ابتدایی، نتوانند خاصیت مورد نظر را نشان دهند. در آن صورت چهار یا پنج عضو ابتدایی را باید نوشت. پاسخ «ج» برابر  $\{۱, ۳, ۵, \dots, ۹۹۹\}$  است.

اگر تعداد اعضا نامحدود باشد، معمولاً فقط سه عضو اول را می‌نویسند. بنابراین پاسخ «د» برابر  $\{۱, ۳, ۵, \dots\}$  است.

روی هم رفته وقتی از نماد «...» استفاده می‌کنیم، که (تقریباً) مطمئن باشیم حدس خواننده در مورد روند ادامه‌ی اعداد درست باشد.

(۲)

(۳) پس از حل «ب»، پرسید:

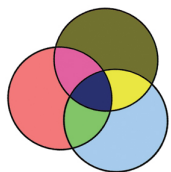
؟ درست یا غلط؟

$\{ر, ی, ا, ض, ی\} \in$  ریاضی

□ البته این ادعا نادرست است. توجه دانش‌آموزان را به دو عضو تکراری «ی» در مجموعه دعوت کنید. با برانگیختن حس کنجکاوی آنها که «آیا یک مجموعه می‌تواند عضو تکراری داشته باشد؟»، کلاس را برای شنیدن داستان «تیت عبود» آماده کنید.

[تدریس صفحه‌ی ۴ و صفحه‌ی ۵ تا سر زیرمجموعه]





## نیت عبدو

توصیه می‌شود داستان را خودتان با صدایی رسا بخوانید. اگر در داستان به کلمه‌ی شماره‌داری رسیدید (برای مثال عبدو) معنی آن را با صدای آهسته توضیح دهید.

(۱) الف) {خیط، بلت، خیط، توبره، خیط، بلت، توبره، بلت}

ب) {خیط، بلت، توبره}

ج) {بلت، خیط، توبره}

به دانش‌آموزان بگویید هر سه درست گفته‌اند. در یک مجموعه از اشیاء، نه تکرار عضو مهم است و نه ترتیب اعضا.

؟ چرا مجموعه‌ی سؤال «الف» با مجموعه‌ی سؤال «ب» یکی است؟

☐ اگر عضوهای تکراری «الف» را در نظر نگیریم، به «ب» می‌رسیم.

؟ چرا مجموعه‌ی سؤال «ب» با مجموعه‌ی سؤال «ج» یکی است؟

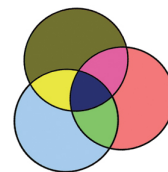
☐ اگر ترتیب اعضا را در «ب» عوض کنیم، به «ج» می‌رسیم.

به دانش‌آموزان بفهمانید هر بار که از مجموعه حرف می‌زنیم انگار مثلاً داریم به محتویات یک کاتوچو اشاره می‌کنیم؛ نه تکرار اعضا مهم است و نه ترتیب اعضا!

(۲) الف) دو عضو      ب) دو عضو      ج) سه عضو

(۳) ب) ۱۰ عضو. توضیح دهید که دو ماهی هر چقدر که شبیه هم باشند، دقیقاً یکسان نیستند.





۴) هدف از این تمرین آشنایی با مجموعه‌های یک عضوی است. واژه‌ی «مجموعه» هم ریشه‌ی جمع، اجتماع و جامعه است. وقتی در زبان فارسی واژه‌ی «مجموعه» را به کار می‌بریم، منظورمان دسته‌ای از اشیا با بیش از یک عضو است. اما در ریاضی مجموعه‌ی یک عضوی هم داریم.

۵) هدف از این تمرین آشنایی با مجموعه‌ی تهی است. در ریاضی به مجموعه‌ی صفر عضوی، مجموعه‌ی «تهی» یا «پوچ» می‌گویند.

۶) الف)

$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  = مجموعه‌ی ماهی‌های شوم

ب)

$\{11\}$  = مجموعه‌ی ماهی‌های هامور

ج) بگذارید خود دانش‌آموزان نمادی برای مجموعه‌ی تهی معرفی کنند (و احتمالاً یکی از آنها به نماد  $\{\}$  اشاره می‌کند) سپس شما هر دو نماد زیر را برای نمایش مجموعه‌ی تهی معرفی کنید.

$\{\}$        $\emptyset$

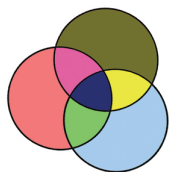
$\{\}$  = مجموعه‌ی ماهی‌های شوریده

پاسخ:

۷) این تمرین، توانایی تشخیص مجموعه‌ی تهی را بالا می‌برد. برای مثال:

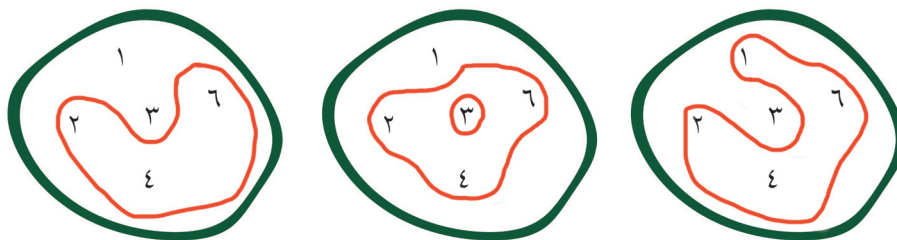
مجموعه‌ی اعداد یک رقمی که از ۱۰ بزرگتر هستند.





۸) توجه کنید، خطی که کشیده می‌شود خطی خمیده و بسته است.

؟ در کدام شکل به درستی دور اعداد زوج خط کشیده شده است؟



□ شکل سمت چپی.

پس از حل «الف» و «ب» بگویید ماهی‌هایی که در «الف» و یا «ب» جدا کرده‌اید، زیرمجموعه‌ی همه‌ی ماهی‌های شوم است. اگر با تعدادی عضو یک مجموعه، مجموعه‌ای جدید بسازیم، به آن مجموعه‌ی جدید، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اول می‌گوییم. برای مثال:

مجموعه‌ی ماهی‌های شوم پُرزرد، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی ماهی‌های شوم است.

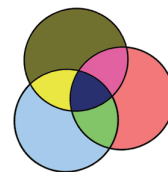
مهم: در این سؤال نماد «C» را معرفی نکنید.

۹) الف) درست ب) غلط

۱۰) پاسخ این سؤال را نگویند، تا زمانی که دانش‌آموزان قوانین «کنگره‌ی سراسری قرآن کریم» و همچنین «مسابقه‌ی پژوهشگران جوان سمپاد» را پیدا کنند.

طبق قوانین کنگره‌ی سراسری قرآن کریم، هیچ دانش‌آموزی نمی‌تواند در دو رشته شرکت کند.





طبق قوانین مسابقه‌ی پژوهشگران جوان سمپاد، یک دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد گروه علمی که خواست، شرکت کند.

بنابراین پاسخ «الف» شکل سمت راستی و پاسخ «ب» شکل میانی خواهد شد.

۱۱) پس از حل این سؤال به دانش‌آموزان نشان دهید که اعضای مجموعه‌ی «الف» سؤال ۱۱، در مجموعه‌ی «الف» سؤال ۶ وجود دارند.

$$\{1, 2, 3, 5, 8\} = \text{مجموعه‌ی «الف» سؤال ۱۱}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \text{مجموعه‌ی «الف» سؤال ۶}$$

اکنون بگویید که ریاضیدان‌ها از نماد « $\subset$ » برای نشان دادن «زیرمجموعه بودن» استفاده می‌کنند. آنها این‌طور می‌نویسند:

$$\{1, 2, 3, 5, 8\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

؟ قسمت «الف» سؤال ۹ را به زبان ریاضی بنویسید.

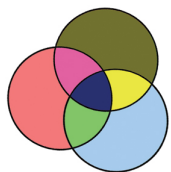
$$\{1, 2, 3, 6, 8, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \square$$

توجه دانش‌آموزان را به این ادعا جلب کنید: همه‌ی اعضای مجموعه‌ی سمت چپی، در مجموعه‌ی سمت راستی وجود دارند.

۱۲) هدف از این سؤال، آشنا شدن دانش‌آموزان با مفهوم برابری دو مجموعه است.







مجموعه

یک مجموعه می‌تواند نام‌های گوناگونی داشته باشد. برای مثال عبود به آن ده تا ماهی، ماهی شوم می‌گفت در حالی که هانی به آنها شانک می‌گفت. هر دو مجموعه‌ی زیر با هم برابر هستند.

مجموعه‌ی ماهی‌های شوم = مجموعه‌ی ماهی‌های شانک

از دانش‌آموزان بخواهید جمله‌ی زیر را بنویسند.

«اگر اعضای دو مجموعه یکسان باشند، می‌گوییم آن دو مجموعه با هم برابر هستند.»

برابر بودن دو مجموعه را با « $=$ » نشان می‌دهند.

(۱۳) الف) درست ب) غلط ج) غلط؛ چون مجموعه سمت راست، عضو ۳ را ندارد.

(۱۴) به دو روش می‌توان به «ج» پاسخ داد:

روش اول) بررسی تک‌تک اعضا

روش دوم) اثبات ریاضی اینکه «هر عددی که مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد، بر ۹ بخش‌پذیر است» و

«هر عددی که بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر است.»

(۱۵) این تمرین را با حوصله حل کنید.

در واقع واضح است که:





مجموعه‌ی نام استان‌هایی که «خ» در آنهاست  $\subset$  مجموعه‌ی نام استان‌هایی که با «خ» شروع می‌شوند

اما:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مجموعه‌ی نام استان‌هایی که «خ» در آنهاست} \in \text{چهار محال و بختیاری} \\ \text{مجموعه‌ی نام استان‌هایی که با «خ» شروع می‌شوند} \not\subset \text{چهار محال و بختیاری} \end{array} \right.$$

۱۶) برای مثال «هر که دانا بود تواند» و یا «هر که دانا بود توانا بود».

به چنین جمله‌هایی که حرف‌هایشان مشترک هستند «هم حرف» می‌گوییم.

می‌توانید دو مسابقه‌ی هیجان‌آمیز بین دانش‌آموزان بگذارید، به این صورت:

مسابقه اول) زمان مسابقه پنج دقیقه است. شما جمله‌ای به دانش‌آموزان می‌دهید. دانش‌آموزی برنده است که پس از این زمان، جمله‌ای هم حرف با جمله‌ی شما بنویسد به طوری که تعداد حرف‌هایش در بین جملات دانش‌آموزان دیگر کمترین تعداد باشد.

مسابقه دوم) شبیه مسابقه‌ی اول، ولی برنده به جای «کمترین تعداد حرف»، با «کمترین تعداد واژه» مشخص می‌شود.

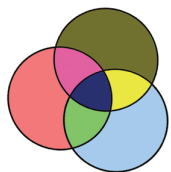
پنج دقیقه‌های شاد هستند که یک سال تحصیلی خاطره‌انگیز را می‌سازند. این مطلب را فراموش نکنید!

۱۷) الف)  $\{۴, ۵\}$ ,  $\{۴, ۷\}$ ,  $\{۴, ۱۰\}$ ,  $\{۵, ۷\}$ ,  $\{۵, ۱۰\}$ ,  $\{۷, ۱۰\}$

ب) ۶ تا. جواب را با شمردن مجموعه‌های بالا به دست آورید. هیچ اسمی از فرمول و اصل ضرب

نبرید!

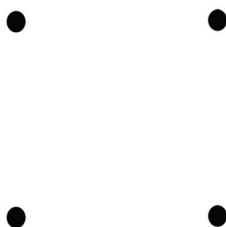




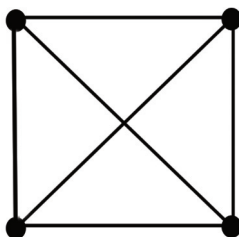
مجموعه

از دانش‌آموزان بخواهید که روش منظم و مرتب برای پیدا کردن همه‌ی حالت‌ها بیابند.

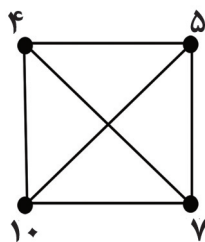
؟ کسی می‌تواند بین شکل پایین و ساختن مجموعه‌ها ارتباط برقرار کند؟



□ می‌توانید به آنها با کشیدن خط‌های اضافه راهنمایی کنید.

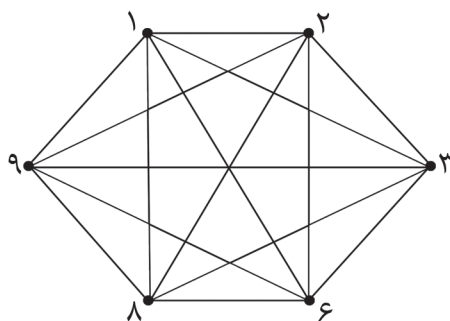
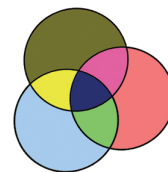


اگر هر یک از نقطه‌ها بیانگر یکی از چهار ماهی شوم سیاه باشد، اکنون می‌توانیم زیرمجموعه‌های مورد نظر را با خواندن نام پاره‌خط‌ها به دست آوریم.



(۱۸ الف) از روش شکلی پاسخ سؤال ۱۷ کمک می‌گیریم.





$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{1, 8\}, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 9\}$   
 $\{3, 6\}, \{3, 8\}, \{3, 9\}, \{6, 8\}, \{6, 9\}, \{8, 9\}$

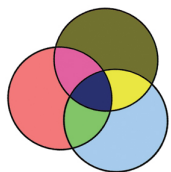
ب) ۱۵ تا.

همه‌ی این ۱۵ مجموعه، زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی شش عضوی ماهی‌های شوم سفید هستند. در یک مجموعه تعداد بسیار زیادی زیرمجموعه ممکن است وجود داشته باشند.  
؟ جدول زیر را پر کنید.

تعداد انتخاب‌های دو ماهی	تعداد ماهی‌ها
	۴
	۶

؟ بدون اینکه مجموعه‌ها را بنویسید یا بشمارید، حدس بزنید که به جای علامت «\*» در جدول، چه عددی باید بگذاریم؟





تعداد انتخاب‌های دو ماهی	تعداد ماهی‌ها
	۴
*	۵
	۶

□ این تمرین یک حدس است. نیازی به تشخیص پاسخ دقیق نیست! پاسخ دقیق برابر ۱۰ است.

یک دانش‌آموز باهوش ممکن است با دیدن عددهای بالایی و پایینی این‌طور حدس بزند:

۴	۶
۵	
۶	۱۵

چون ۵، میانگین ۴ و ۶ است پس \* هم، میانگین ۶ و ۱۵ است. چون  $\frac{۶+۱۵}{۲} = ۱۰/۵$  بنابراین

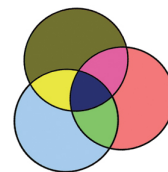
ممکن است \*، ۱۰ یا ۱۱ شود؛

و یا این‌طور حدس بزند:

۴	۶
۵	
۶	۱۵

در سطر ۱ و با ضرب  $\frac{۳}{۴}$ ،  $(\frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲})$  در عدد سمت چپ، به عدد سمت راست رسیدیم. در سطر آخر با ضرب  $\frac{۵}{۶}$ ،  $(\frac{۱۵}{۶} = \frac{۵}{۲})$  در عدد سمت چپ، به عدد سمت راست رسیدیم. بنابراین با ضرب  $\frac{۴}{۳}$  در ۵، به \* می‌رسیم. پس :





$$* = 5 \times \frac{4}{2} = 10$$

اجازه بدهید که دانش‌آموزان حدس بزنند و حدس‌های خود را بگویند. حدس زدن یک بخش بسیار مهم در توانایی‌های ریاضی است. در ادامه دانش‌آموزان را راهنمایی کنید تا در وب‌گاه «زیرمجموعه‌های ۲ عضوی» را بخوانند.

۱۹) در این تمرین بدون اینکه اسمی از مجموعه‌ی متمم و همچنین اجتماع دو مجموعه بیاوریم، به صورت غیرمستقیم دانش‌آموز را با این مفاهیم درگیر می‌کنیم.

الف) درست است. زیرا:  $6 + 4 = 10$

ب) غلط است. زیرا:

ماهی‌های شوم پرزرد یا سفید  $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\} =$

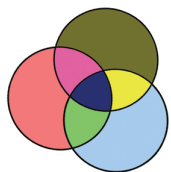
ماهی‌های شوم پرزرد  $\{1, 2, 3, 5, 8\} =$

ماهی‌های شوم سفید  $\{1, 2, 3, 6, 8, 9\} =$

داستان را تا آخر بخوانید.

[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۵، صفحه‌ی ۶ و صفحه‌ی ۷]

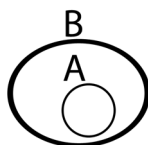




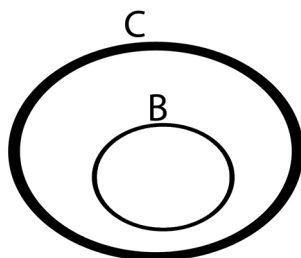
## تمرین

۱) (د) در بیان اثبات، حتی می‌تواند تنها شکل‌ها کشیده شود و هیچ متنی نوشته نشود. برای مثال:

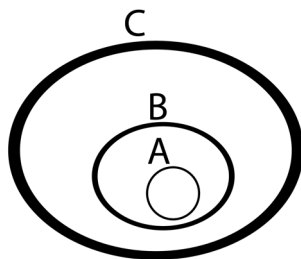
اگر  $A \subset B$ ، بنابراین شکل  $A$  خطی بسته در شکل  $B$  است.



اگر  $B \subset C$ ، بنابراین شکل  $B$  خطی بسته در شکل  $C$  است.



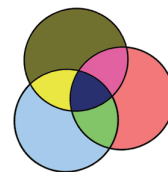
از دو شکل بالا نتیجه می‌گیریم که:



بنابراین  $A$  خطی بسته در  $C$  است. پس  $A \subset C$ .

بگذارید دانش‌آموزان این مفهوم را درک کنند؛ و سپس به خاطر بسپارند.





هـ) بله. یک دانش‌آموز باهوش می‌تواند فرض مسئله را مرتب کند و چنین بگوید:

می‌دانیم که  $A \subset B$  و  $B \subset C$  و  $C \subset D$ . پس

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array} \right\} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} A \subset C \\ C \subset D \end{array} \right\} A \subset D$$

دانش‌آموزان را با نمادهای مجموعه‌ها اذیت نکنید!

۲) در شکل‌های داده شده، اعضای یک زیرمجموعه، رفته‌رفته حذف می‌شوند و زیرمجموعه‌های کوچک‌تر جدید به دست می‌آیند.

از شکل آخر نتیجه می‌شود که  $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13\}$

؟ درست یا غلط؟

«تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.»

□ رسیدن به درست بودن نتیجه‌ی بالا باید طی فرآیند مسئله‌ی ۲ و این پرسش به دست آید. نباید در

همان لحظه‌ی اول به دانش‌آموز بگویید «تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.»

۳) در شکل‌های داده شده به اعضای یک زیرمجموعه، رفته‌رفته اعضای جدیدی اضافه می‌شوند و زیرمجموعه‌های بزرگ‌تر جدید به دست می‌آیند.

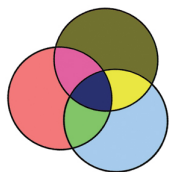
از شکل آخر نتیجه می‌شود که  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13\}$

؟ درست یا غلط؟

«هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است.»







□ رسیدن به درست بودن نتیجه‌ی بالا باید طی فرآیند مسأله‌ی ۳ و این پرسش به دست آید. نباید در همان لحظه‌ی اول به دانش‌آموز بگویید «هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است».

فراموش نکنید که کلمه‌ی پیشوند «زیر» در زبان کارآیی دیگری دارد. برای مثال «زیردست». هیچ‌کس زیردست خود نیست!

(۴)

(۵) ب) در این تمرین سنگی جلوی پای دانش‌آموز قرار داده می‌شود. با دیدن «ب» و سپس دیدن «ج» بگذارید دانش‌آموز لذت رسیدن به «ج» را دریابد. از دانش‌آموز بخواهید با دیدن اعداد به دست آمده در پاسخ «ب» یعنی ۴ و ۲ و ۱ رابطه‌ای حدس بزنند.

وقتی از سؤال «ب» خسته شدند، به سؤال «ج» پردازید.

ج) دو برابر.

د) «چون هر بار اعداد دو برابر شده‌اند، پس حدس می‌زنیم که عدد بعدی ۱۶ و عدد بعدی ۳۲ شود» می‌توانید به دانش‌آموزان بگویید:

می‌بینید که:

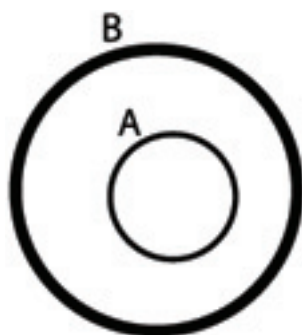
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی } n \text{ عضوی} = \underbrace{1 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

$n$  بار، چون هر بار این تعداد در ۲ ضرب می‌شود.

(۶) الف) حل چنین مسائلی را می‌توان هم از راه بررسی شکل و هم به صورت نمادهای ریاضی، شرح داد.

راه حل اول: اگر  $A \subset B$ ، یعنی با خطی بسته در درون  $B$ ، می‌توان  $A$  را نشان داد.





اکنون هر زیرمجموعه‌ی  $A$ ، خطی بسته درون  $A$  خواهد بود، پس خطی بسته درون  $B$  خواهد شد. بنابراین هر زیرمجموعه‌ی  $A$ ، زیرمجموعه‌ی  $B$  هم خواهد شد.

راه حل دوم: فرض می‌کنیم که  $X \subset A$ . در این صورت

$$\left. \begin{array}{l} X \subset A \\ A \subset B \end{array} \right\} \rightarrow X \subset B$$

ب) چون هر زیرمجموعه‌ی  $A$ ، زیرمجموعه‌ی  $B$  است و چون  $A \subset A$ ، بنابراین  $A$  هم زیرمجموعه‌ای از  $B$  خواهد شد.

سعی کنید خودتان اثباتی بر اساس شکل برای این تمرین بیابید.

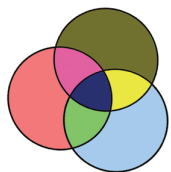
۷) دانش‌آموزان بالاخره با سعی و خطا این تمرین را انجام می‌دهند.

روش جالبی برای انجام این تمرین وجود دارد. این روش با کمک شکل مکعب داده شده است.

در ابتدا از هیچ ارتباطی بین مکعب و تمرین به دانش‌آموزان نگویید. بعضی از دانش‌آموزان باهوش به ارتباط این دو، پی می‌برند.

اما ارتباط بین این دو چیست؟





## مجموعه

گام اول) در مکعب داده شده رأس‌ها به روش ویژه‌ای شماره‌گذاری شده‌اند: «شماره‌ی هر رأس با شماره‌ی هر همسایه‌اش تنها در یک رقم اختلاف دارد.»

گام دوم) هر زیرمجموعه را می‌توان به صورت تعدادی رقم «۰» و «۱» نشان داد. برای مثال زیرمجموعه‌ی  $\{2, 3\}$  را چون فاقد ۱ است به صورت: ۱۱۰ نشان می‌دهیم.

۰	۱	۱
↓	↓	↓
یعنی عضو ۱ را ندارد	یعنی عضو ۲ را دارد	یعنی عضو ۳ را دارد

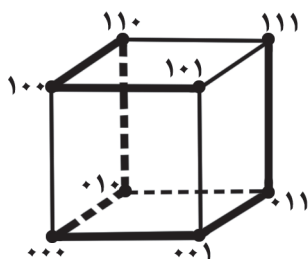
؟  $\{1, 2\}$  را چطور نشان می‌دهیم؟

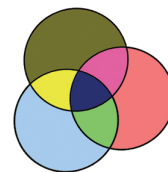
۱۱۰ ☐

؟ .... بیانگر چه زیرمجموعه‌ای است؟

☐ .... یعنی زیرمجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد! یعنی  $\emptyset$ .

گام سوم) از گام اول و دوم می‌توان نتیجه گرفت که هر مسیری که روی یال‌ها (اضلاع) مکعب برویم، (به شرط اینکه از یک رأس دوبار رد نشویم) جواب درستی برای تمرین ۶ می‌شود. برای مثال:





۱۰۱, ۱۰۰, ۱۱۰, ۰۱۰, ۰۰۰, ۰۰۱, ۰۱۱, ۱۱۱

$\{1, 3\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \emptyset, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

یک سؤال سخت:

؟ همین تمرین را با مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, 4\}$  انجام دهید.

□ برای پاسخ باید ابتدا شکل مکعب چهار بعدی را بکشیم. شکل مکعب چهار بعدی در وب‌گاه به اسم Hypercube وجود دارد. اما جواب مسأله را می‌توانید در وب‌گاه به اسم «زنجیره‌ی زیرمجموعه‌ها» بیابید.

۸) الف) برای مثال:

○ سه مجموعه داریم. اگر مجموعه‌ی اول، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی دوم باشد و همچنین مجموعه‌ی دوم زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی سوم باشد، در این صورت مجموعه‌ی اول زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی سوم می‌شود.

○ سه عدد داریم. اگر عدد اول، کوچکتر از عدد دوم باشد و همچنین عدد دوم کوچکتر از عدد سوم باشد، در این صورت عدد اول کوچکتر از عدد سوم می‌شود.

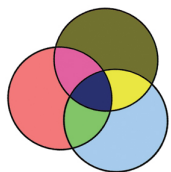
ب) برای مثال:

○ هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است.

○ هر عدد، کوچکتر از خودش نیست.

در حل این مسأله به هیچ وجه از متغیرهای ریاضی استفاده نکنید! برای مثال ننویسید  $a < b$ ,  $b < c$  در  $a < c$ .





بسیار مهم: به دانش‌آموزان بگویید که بخش بزرگی از ریاضیات، به پیدا کردن شباهت‌ها و تفاوت‌های بین دو چیز مربوط است.

؟ در اعداد طبیعی، جمع (+) و ضرب ( $\times$ ):

الف) چه شباهتی دارند؟

ب) چه تفاوتی دارند؟

□ الف) برای مثال:

○ جمع دو عدد طبیعی، عدد طبیعی می‌شود.

○ ضرب دو عدد طبیعی، عدد طبیعی می‌شود.

ب) برای مثال:

○ همه‌ی اعداد طبیعی با جمع تعدادی از یک عدد خاص به دست می‌آیند. برای مثال:

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

○ همه‌ی اعداد طبیعی با ضرب تعدادی از یک عدد خاص به دست نمی‌آیند.

؟ در اعداد صحیح، جمع (+) و ضرب ( $\times$ ):

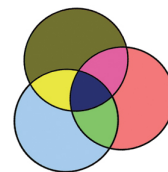
الف) چه شباهتی دارند؟

ب) چه تفاوتی دارند؟

□ برای پاسخ به این سؤال باید فصل «عدد صحیح» را (در کتاب ریاضی امسال) بخوانیم. یادتان

نرود که پیدا کردن شباهت‌ها و تفاوت‌های بین دو مفهوم بسیار مهم است.





هرگاه در هر جایی در هر زمانی دانش‌آموزی شباهت و تفاوتی بین دو مفهوم پیدا کند، کار ریاضی ارزشمندی انجام داده است!

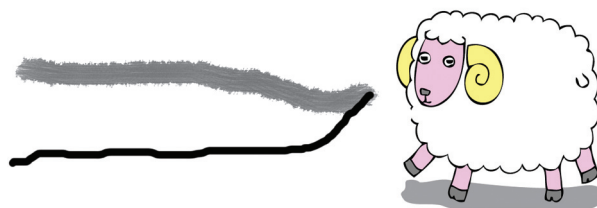
۹) این سؤال بخشی از کتاب «دیدار با خدامراد» است. این کتاب درباره‌ی «هندسه متناهی» است. پاسخ

این تمرین را از همان کتاب نقل می‌کنیم:

«دقیقاً چهار طناب داریم.

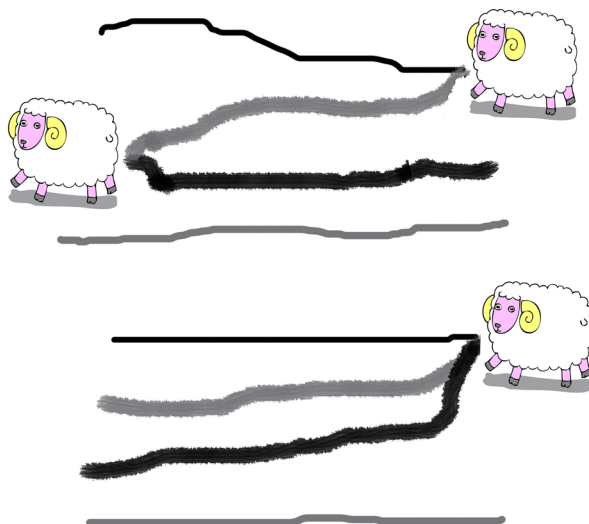
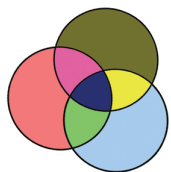


اما ۲ می‌گوید «هر دو طناب متفاوت به یک گوسفند بسته شده‌اند». پس اینطور کار را شروع کردم:

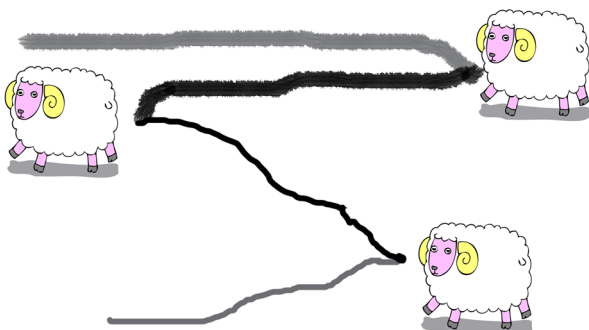


حالا می‌توانستم به سراغ دیگری بروم. به دو روش متفاوت می‌توانستم طناب دومی و سومی را به هم وصل کنم:

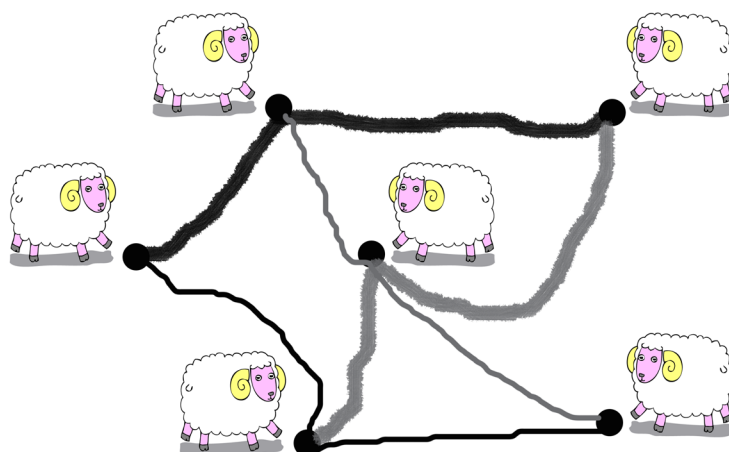
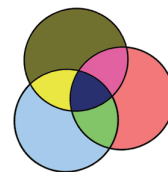




... ۳ می‌گوید «به هر گوسفند دقیقاً دو طناب بسته شده است». پس تکلیف روشن شد. شکل  
دومی به درد نخور بود. با توجه به ۲ و ۳ کار را این طور ادامه دادیم.



اما هنوز طناب‌های زیادی به هم وصل نشده بودند:



... شکل گله را پیدا کرده بودم.»

به دانش‌آموزان بگویید: «این طناب‌ها مثل مجموعه می‌مانند و این گوسفندها مثل اعضای آنها.

مسأله‌ی مرتع چهار طنابی به زبان مجموعه‌ها چنین بیان می‌شود:

چهار زیرمجموعه از اعداد طبیعی مثال بزنید به طوری که

(الف) هر دو زیرمجموعه از آنها دقیقاً یک عضو مشترک باشند.

(ب) هر عضو (از این چهار زیرمجموعه) دقیقاً عضو دو تا از این زیرمجموعه‌ها باشند.

(۱۰) نکته‌ی جالب در این سؤال، این مطلب است:

در هنگام پاسخگویی باید از مربع کار را شروع کرد، در حالی که در شکل داده شده نمودار از متوازی‌الاضلاع

شروع شده است.







## عدد صحیح

در بخش اعداد صحیح هدف بر این است تا مهارت محاسباتی دانش‌آموزان افزایش پیدا کند. که این مهم فقط با انجام تمرین‌های فراوان توسط دانش‌آموزان محقق می‌شود.

از این بخش درس اضافی در کتاب تکمیلی وجود ندارد و تنها به چند نکته در مورد چهار عمل اصلی و ترتیب آنها اشاره شده است.

ابتدا صفحات ۱۲ تا ۲۷ کتاب درسی را که یادآوری است از سال اول راهنمایی، در کلاس تدریس، و تمامی تمرین‌های آن را حل کنید و تلاش کنید تا هیچ‌گونه اشکالی در ذهن دانش‌آموزان باقی نماند.

بعد از آن صفحات ۲۹ تا ۳۹ که ضرب و تقسیم اعداد صحیح است، تدریس شود. در این قسمت توجه داشته باشید که به دانش‌آموزان تفهیم شود، عبارت «منفی در منفی می‌شود مثبت» و یا «منفی در مثبت می‌شود منفی» در ضرب و تقسیم اعداد صحیح کاربرد دارد. بسیاری از دانش‌آموزان در جمع و تفریق نیز به اشتباه از این قاعده استفاده می‌کنند. به عنوان مثال،  $5 + 3 = \square$  را می‌گویند منفی در مثبت می‌شود منفی و جواب را به اشتباه ۸- و یا ۲- بیان می‌کنند.

بعد از اینکه تا صفحه ۳۹ کتاب درسی تدریس شد و تمرین‌های آن به طور کامل انجام شد، به دانش‌آموزان بگویید تمرین‌های کتاب تکمیلی را حل کنند و بعد از آن می‌توانید قسمت «نکاتی در مورد چهار عمل اصلی» و «ترتیب عمل‌ها» را از کتاب تکمیلی تدریس کنید.

[تدریس صفحات ۱۲ تا ۳۹ کتاب]





(۱) راه اول: اعداد منفی را با هم و اعداد مثبت را با هم جمع بزنید: به عنوان مثال برای جمع اعداد مثبت اینگونه عمل کنید:

$$\begin{array}{r} 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 \\ + \quad 100 + 98 + 96 + \dots + 4 + 2 \\ \hline 102 + 102 + 102 + \dots + 102 + 102 = 102 \times 50 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 = \frac{102 \times 50}{2} = 2550$$

اعداد منفی را نیز همین گونه با هم جمع بزنید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = \frac{100 \times 50}{2} = 2500$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 99 + 100 = \frac{102 \times 50}{2} - \frac{100 \times 50}{2} = 2550 - 2500 = 50$$

راه دوم:

$$(-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \dots + (-99 + 100) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \times 1 = 50$$

(۲) یک مسأله الگویابی بسیار ساده است.

(۳)





## مجموعه‌ی عددهای صحیح

(۴) هر دو عدد، از قرینه  $۱۰-$ ، کوچکتر هستند.

(۵) این تمرین بی‌نهایت جواب دارد.

(۶) غلط است. چون این مجموعه ۴ عضو دارد.

(۷)

(۸) اعداد منفی را هم در نظر بگیرید. مانند  $(-۳) \times (-۶)$

(۹)  $(-۶)$  و  $(-۱۴)$

(۱۰) در این تمرین ممکن است دانش‌آموزان اعداد را با یکدیگر جمع بزنند. ولی نکته‌ای که در این تمرین است، این است که هر عدد در این جدول یک قرینه دارد. در نتیجه مجموع اعداد صفر خواهد شد.





## امیرو و صدف‌هایش

(۱)

$$\text{ب)} \quad = 12 \times (-12) + 12 \times 7/2 = -144 + 86/4 = -57/6$$

$$\text{د)} \quad -(14 + 18 - 33) = (-1) \times (14 + 18 - 33) = -14 - 18 + 33$$

$$\text{و)} \quad 7^2 \times 3^3 \times (2^3 - 6 + 15) = 7^2 \times 3^3 \times 2^3 - 7^2 \times 3^3 \times 6 + 7^2 \times 3^3 \times 15$$

$$\text{ز)} \quad -12 \times (3 + 7 \times 2) = (-12) \times 3 + (-12) \times 7 \times 2 = -36 - 12 \times 7 \times 2$$

$$\text{ح)} \quad 3^2 \times 4 \times (17 - (6 \times 5)) = 3^2 \times 4 \times 17 - 3^2 \times 4 \times 6 \times 5$$

(۲)

$$\text{ب)} \quad 2 \times 12 + 2 \times 18 - 2 \times 21 = 2 \times (12 + 18 - 21)$$

$$\text{د)} \quad 120 + 24 - 72 = 24 \times 5 + 24 \times 1 - 24 \times 3 = 24 \times (5 + 1 - 3)$$

$$\text{ه)} \quad 2^2 \times 6 - 2 \times 14 + 4 \times 10 = 2^2 \times 6 - 2 \times 2 \times 7 + 2^2 \times 10 = 2^2 \times (6 - 7 + 10)$$

$$\text{و)} \quad 2^2 \times 3^3 - 2^2 \times 3^2 = 2^2 \times 3^2 \times 3 - 2^2 \times 3^2 \times 2 = 2^2 \times 3^2 \times (3 - 2)$$

$$\text{ح)} \quad 40 + 400 - 8 \times 25 = 40 \times 1 + 40 \times 10 - 8 \times 5 \times 5 = 40 \times (1 + 10 - 5)$$





## نکاتی در مورد چهار عمل اصلی

در توضیح رابطه  $a \div b = a \times \frac{1}{b}$  که در قسمت «نکاتی در مورد چهار عمل اصلی» ذکر شده، می‌توان چنین گفت:

در فعالیت صفحه ۳۸ کتاب، رابطه‌ی بین ضرب و تقسیم چنین بیان شده است:

$$a \div b = \square \Leftrightarrow b \times \square = a$$

در تساوی سمت راست، به جای مربع چه عددی باید قرار دهیم تا تساوی برقرار بماند؟

$$\begin{aligned} b \times \square = a &\Rightarrow b \times \boxed{a \times \frac{1}{b}} = a \Rightarrow \square = a \times \frac{1}{b} \\ &\Rightarrow a \div b = a \times \frac{1}{b} \end{aligned}$$

در این قسمت در واقع دانش‌آموزان باید بفهمند که عمل تقسیم همان عمل ضرب و عمل تفریق همان

عمل جمع است.





## ترتیب عمل‌ها در محاسبات

سال گذشته دانش‌آموزان با ترتیب عمل‌ها در محاسبات آشنا شده‌اند و این قسمت جنبه یادآوری دارد.

### تمرین

$$\text{ح) } (43 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^{(3-1 \times 2)} - 4 \times (8 + 3^2) = 49 - 8 \div 1 - 4 \times 17 = -27$$

$$\text{ی) } ((1 \times 2 \div (3 \times 4) - 5) \times 6 - 7) \div (8 \times 9) = ((-\frac{29}{6}) \times 6 - 7) \div 72 = -\frac{1}{2}$$

