سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ریاضی طلایه‌داران

سال دوم راهنمایی

فصل دوم

حساب

نسخه‌ی مخصوص معلم

فهرست مطالب

توان

[[تدریس صفحه‌های ۴۱ تا ۴۶]]

در این بخش هم، همانند بخش عدد صحیح، مهارت محاسباتی دانش‌آموزان باید افزایش پیدا کند.

در جدول تمرین شماره ۲، صفحه ۴۶ کتاب درسی، توان صفر آمده است. زمانی که به آن قسمت رسیدید، توان صفر را معرفی کنید. البته در قسمت تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی نیز می‌توانید توان صفر را معرفی کنید. اگر a صفر نباشد، داریم:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}$$

اگر $m = n$

$$۱ = \frac{a^m}{a^m} = a^m \div a^m = a^{m-m} = a^{۰}$$

از طریق الگویابی هم می‌توانید این نتیجه را بگیرید. به این صورت که در جدول تمرین ۲، هر عدد از تقسیم کردن عدد سمت راست به عدد ۴ به دست می‌آید.

در توضیح نکته دوم کتاب تکمیلی، برای محاسبه‌ی $-۳^{۲}$، باید اولویت محاسبات را رعایت کنیم که دانش‌آموزان در بخش عدد صحیح به این مهارت رسیده‌اند.

تمرین

۱. قسمت ۱۵: همان تمرین ۱ قسمت «و»، در بخش عدد صحیح است.

تعیین علامت عبارت تواندار

تمرین

۱.

ج) $$-(-3)^{5} \times (-8)^{2} \times (+6)^{3} \div (-4)^{3} = -3^{5} \times 8^{2} \times 6^{3} \div 4^{3}$$

۲.

۱۵) $$= (2{,}8)^{7} \times \frac{1}{(0{,}7)^{7}} \times \frac{1}{2^{7}} = \frac{(2{,}8)^{7}}{(0{,}7)^{7} \times 2^{7}} = 2^{7}$$

۱۷) $$= 6^{8} \times \frac{1}{5^{2}} \times \frac{1}{5^{4}} \times \frac{1}{6^{2}} = \frac{6^{8}}{5^{2} \times 5^{4} \times 6^{2}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{6}$$

۲۰) $$= (-42)^{4} \times (42)^{5} = (42)^{4} \times (42)^{5} = 42^{9}$$

۲۱) $$= 7^{6} \times 7^{5} \times (-20)^{11} = 7^{11} \times (-20)^{11} = (-140)^{11}$$

۳. الف)

$$(a + 0{,}2 \times a)^{2} = (1{,}2 \times a)^{2} = 1{,}44 \times a^{2} = a^{2} + 0{,}44 \times a^{2}$$

بنابراین مساحت مربع ۴۴ درصد افزایش می‌یابد.

۴.

الف) $6^{2} \times 18^{3} \times 3^{2} = 18^{5}$

ب) $18^{6} \div 2^{6} \times 3^{6} = 27^{6}$

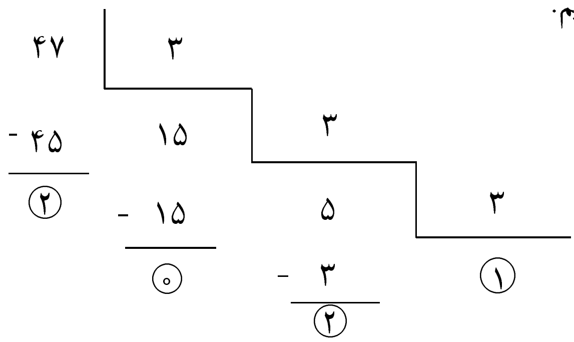
ج) $18^{5} \div 32 \times 9^{3} = 9^{8}$

۵. «الف» درست است.

تهران ۱۳۳۱

همان‌طور که می‌دانید، یک عدد را به دو طریق می‌توان به مبنای مورد نظر برد.

راه اول انجام تقسیمات متوالی است. یعنی یک عدد را از کوچک به بزرگ به مبنا ببریم. از کوچک به بزرگ یعنی از کوچک‌ترین ارزش مکانی به بزرگ‌ترین ارزش مکانی برسیم. برای مثال اگر بخواهیم ۴۷ را از راه تقسیمات متوالی به مبنای ۳ ببریم، ابتدا به رقم ۲ می‌رسیم و آن را در ارزش مکانی $۳^{۰}$ قرار می‌دهیم. سپس به عدد ۰ می‌رسیم و آن را در ارزش مکانی $۳^{۱}$ قرار می‌دهیم. بعد از آن به رقم ۲ رسیده و آن را در ارزش مکانی $۳^{۲}$ قرار می‌دهیم و در نهایت به رقم ۱ می‌رسیم و آن را در ارزش مکانی $۳^{۳}$ قرار می‌دهیم.



$$۴۷ = (\overleftarrow{۱\ ۲\ ۰\ ۲})_{۳}$$

راه دوم از بزرگ به کوچک رفتن است. یعنی از بزرگ‌ترین ارزش مکانی به کوچک‌ترین ارزش مکانی برسیم. برای مثال اگر بخواهیم ۴۷ را به مبنای ۳ ببریم، ابتدا باید بزرگ‌ترین توان ۳ کوچک‌تر از ۴۷ را تا جایی که می‌شود از آن جدا کنیم؛ یعنی $۲۷ = ۳^{۳}$. در نتیجه داریم: $۴۷ = ۱ \times ۲۷ + ۲۰$. سپس بزرگ‌ترین توان ۳ کوچک‌تر از ۲۰ را تا جایی که می‌شود باید از آن جدا کنیم؛ یعنی $۹ = ۳^{۲}$. در نتیجه $۴۷ = ۱ \times ۲۷ + ۲ \times ۹ + ۲$. روشن است که $۳^{۱}$ را نمی‌توان از ۲ جدا کرد؛ یعنی $۴۷ = ۱ \times ۲۷ + ۲ \times ۹ + ۰ \times ۳ + ۲$. در نهایت خواهیم داشت:

$$۴۷ = ۱ \times ۲۷ + ۲ \times ۹ + ۰ \times ۳ + ۲ \times ۱ \quad \longleftrightarrow \quad ۴۷ = (\overrightarrow{۱\ ۲\ ۰\ ۲})_{۳}$$

این فصل درکتاب تکمیلی دانش‌آموزان، با داستان شروع می‌شود. در تمام داستان، بدون این که اسمی از

مبنا و دستگاه‌های شمار آورده شده باشد، دانش‌آموزان با دو روش فوق آشنا می‌شوند. در طول داستان و تا انتهای آن به هیچ عنوان اسمی از مبنا و دستگاه‌های شمار آورده نشود. درکتاب درسی، فقط به روش اول اشاره شده است و اگرکسی تنها کتاب درسی را بخواند، فقط روش اول در ذهنش جا می‌افتد.

برای تدریس این فصل ابتدا داستان عمو حیدر درکلاس خوانده شود و تمرین‌های داستان به دقت انجام شود. بعد از خواندن داستان، درس ازکتاب تکمیلی تا ابتدای جمع و تفریق و ضرب مبناها ادامه پیدا کند و بعد از آن صفحات ۴۸ تا ۵۷ کتاب درسی درکلاس تورّق شود.

ورود به بحث، داستان عمو حیدر نفت فروش است که به همراه فرید، به کار فروش نفت مشغول است. فضایی که در داستان ایجاد شده، مربوط به دهه سی است. در هنگام خواندن داستان، تاریخچه‌ای نیز از فروش نفت در زمان‌های گذشته به دانش‌آموزان گفته شود و سعی شود فضای خوبی درکلاس ایجاد شود.

۱.

$$۱۷ = ۱ \times ۱۰ + ۷ \times ۱ = ۱۰ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

۲. ۷ لیتر. مطمئن شوید که دانش‌آموزان فهمیده باشند ۵ لیتر و ۶ لیتر، چگونه ساخته می‌شوند.

۳. ۸ لیتری

۴. ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و ۶۴ لیتری.

۵.

۶.

$$۱۴ = ۸ + ۴ + ۲$$

$$۲۴ = ۱۶ + ۸$$

۷.

الف) $32 + 2 = 34$

ه) $32 + 8 + 2 = 42$

۸. ۴۳ لیتر: یک‌بار، هیچی، یک‌بار، هیچی، یک‌بار، یک‌بار.

۹. هر دو روش یعنی یک‌بار از کوچک به بزرگ رفتن و یک‌بار هم از بزرگ به کوچک رفتن که در مقدمه این فصل به این دو روش اشاره شد. دقت داشته باشید که برای حل این مسأله از دو روش فرید استفاده شود؛ یعنی با استفاده از رسم شکل.

۱۰.

$$16 = 1 \times 9 + 2 \times 3 + 1 \times 1$$

$$19 = 2 \times 9 + 1 \times 1$$

۱۱. ۲۷ لیتری

۱۲.

$$2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = 80$$

۱۳.

حاج مرتضی: $17 = 9 + 3 + 3 + 1 + 1 = 1 \times 9 + 2 \times 3 + 2 \times 1$

۱۴.

۱۵. ۴۴ لیتر: یک‌بار، یک‌بار، دوبار، دوبار

۱۶.

۱۷. ۱ لیتر، ۴ لیتر، ۱۶ لیتر، ۶۴ لیتر و ...

$$۳ \times ۱۶ + ۳ \times ۴ + ۳ \times ۱ = ۶۳$$

۱۸. الف) اعداد هر بار دو برابر می‌شوند؛ چون عدد نخست ۱ است، پس این اعداد توان‌های ۲ می‌شوند.

ب) اعداد هر بار سه برابر می‌شوند؛ چون عدد نخست ۱ است، پس این اعداد توان‌های ۳ می‌شوند.

ج) اعداد هر بار چهار برابر می‌شوند؛ چون عدد نخست ۱ است، پس این اعداد توان‌های ۴ می‌شوند.

$$۴^{۰} = ۱ \,,\ ۴^{۱} = ۴ \,,\ ۴^{۲} = ۱۶ \,, \dots$$

د) پس از شنیدن نظر دانش‌آموزان، آنها را به خواندن «راز این اعداد» در وب‌گاه دعوت کنید.
برای این‌که دانش‌آموزان، پیش از تفکر بر روی تمرین، پاسخ آن را نبینند، بر روی فایلی که در وب‌گاه قرارگرفته است، رمز عبور گذاشته شده است.

رمز عبور فایل: ۱۳۵

نشانی وب‌گاه سمپاد: http://www.amoozeshshad.com

مبناهای عددی

تمرین

۱. در این تمرین، رسماً از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا یک عدد را به مبنای دلخواهی ببرد. برای انجام این تمرین، دانش‌آموزان باید دسته‌های مثلاً ۷ تایی تشکیل دهند. لذا انجام تقسیم‌های متوالی بهترین روش است. این همان روش کتاب درسی است. یعنی از کوچک‌ترین ارزش مکانی به بزرگ‌ترین ارزش مکانی رسیدن. دانش‌آموزان باید بتوانند در این تمرین، از بزرگ‌ترین ارزش مکانی نیز به کوچک‌ترین ارزش مکانی برسند. یعنی تا جایی که می‌شود، بزرگ‌ترین توان ۷، کوچک‌تر از عدد ۳۷۴ را از آن جدا کنند و همین طور تا آخر . . ..

۲. توجه داشته باشید که $(۱۰۴۳)_۷$ را نخوانید هزار و چهل و سه در مبنای۷. بلکه بخوانید یک صفر چهار سه، در مبنای ۷.

۳. در این تمرین، سعی کنید دانش‌آموزان از هر دو روش، اعداد را به مبنای خواسته شده ببرند.

۴.

۵. الف) زیرا اگر در مبنای ۲، از رقم ۲ استفاده کنیم، در واقع می‌توانیم ارزش مکانی بالاتر را داشته باشیم:

$$۲ \times ۲^k = ۲^{k+۱} = ۱ \times ۲^{k+۱}$$

بنابراین به جای این که ۲ بار، ۲^k را داشته باشیم، می‌توانیم یک بار، $۲^{k+۱}$ را داشته باشیم.
مهم: توجه کنید که این مطلب را با مثال عددی برای دانش‌آموزان مطرح کنید و از متغیر k به هیچ عنوان استفاده نکنید.

ب) زمانی که عمو حیدر و فرید با پیمانه‌های ۱ لیتری، ۲ لیتری، ۴ لیتری و... نفت می‌فروختند، از هر پیمانه نمی‌توانستند دوبار استفاده کنند. حجم پیمانه‌ها هم که توان‌های عدد ۲ بودند.

از قسمت «الف» هم دریافتیم که هنگام نوشتن یک عدد در مبنای ۲ از رقم ۲ نمی‌توانیم استفاده کنیم. بنابراین روشن است که عمو حیدر و فرید برای فروش نفت، اعداد را به مبنای ۲ می‌بردند.

۶. همانند تمرین قبل، جواب دهید.

۷.

۸. در این تمرین، مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ را باید به دانش‌آموزان آموزش دهید. در حالت کلی یک عدد در مبنای k را با k رقم $\{۰, ۱, ۲, \ldots, (k-۱)\}$ نمایش می‌دهیم. در واقع برای نمایش یک عدد در مبنای k، به k نماد احتیاج داریم که در مبناهای کمتر از ۱۰، می‌توانیم از رقم‌های شناخته شده استفاده کنیم.

برای مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰، مثلاً برای مبنای ۱۶، احتیاج به ۱۶ نماد داریم؛ زیرا، تبدیل یک عدد به مبنای ۱۶، یعنی دسته‌بندی در دسته‌های ۱۶تایی. این یعنی از یک توان ۱۶، می‌توانیم حداکثر ۱۵ بار استفاده کنیم. پس در نمایش یک عدد در مبنای ۱۶، احتیاج به نمادهای ۰، ۱، ۲، . . .، ۱۴ و ۱۵ داریم که می‌شوند ۱۶ نماد. این ۱۶ نماد را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ & ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & A & B & C & D & E & F \end{array}$$

برای پاسخگویی به دانش‌آموزان کنجکاو که از نمایش اعداد در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۶ می‌پرسند، بد نیست بدانید که نمایش ۱۳۸۸ در مبنای ۴۰، به‌صورت $(\overline{۳۴}\ \overline{۲۸})_{۴۰}$ نوشته می‌شود. یعنی:

$$۱۳۸۸ = ۳۴ \times ۴۰^{۱} + ۲۸ \times ۴۰^{۰}$$

البته این نحوه‌ی نمایش بی نقص هم نیست!!

۹. در تمرین قبل بیان شد.

۱۰. $$۱۳۸۸ = ۵ \times ۱۶^{۲} + ۶ \times ۱۶^{۱} + ۱۲ \times ۱۶^{۰} = (۵\ ۶\ C)_{۱۶}$$

[تدریس صفحات ٤٨ تا ٥٧ کتاب درسی]

تمرین ۴، صفحه ۵۷ را به دقت انجام دهید.

یکی	چهارتایی	شانزده‌تایی
۱	۵	۲
۱	$\longleftarrow \boxed{۴} + ۱$	۲
۱	۱	۳

$$(۲۵۱)_{۴} \longrightarrow (۳۱۱)_{۴}$$

جمع و تفریق و ضرب مبناها

پس از تدریس عمل تفریق در مبناها، از دانش‌آموزان بخواهید تا همیشه درستی محاسبه‌ی عمل تفریق را امتحان کنند.

امتحان تفریق:

$$\begin{array}{r} 2\,2\,0\,2\,0 \\ +\quad 2\,1\,1\,2\,2 \\ \hline 1\,2\,0\,2\,1\,2 \end{array} \quad \checkmark$$

تمرین

۱. $3 \times 4 = (20)_6$ و $3 + 4 = (11)_6$

۲.

۳. در مبنای ۷

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ + & 1 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

۴. الف) ۸ ب) ۷ ج) ۶ د) در مبنای بزرگ‌تر از ۳

۵. این تمرین را دانش‌آموزان باید با حدس و سعی و خطا حل کنند. به هیچ عنوان اسمی از معادله نیاورید.

الف) $1 \times b^2 + 2 \times b^1 + 4 = 39 \longrightarrow b^2 + 2 \times b = 35 \longrightarrow b = 5$

ب) $2 \times b^3 + 2 \times b^2 = 160 \longrightarrow b = 4$

ج) $2 \times 3^2 + b \times 3^1 + 2 = 26 \longrightarrow 18 + 3 \times b + 2 = 26 \longrightarrow b = 2$

با روش سعی و خطا، برای به‌دست آوردن جواب چنین مسائلی رفته رفته دانش‌آموزان به نیاز استفاده از نمادهای متغیری پی می‌برند.

۶. این تمرین باید با سعی و خطا حل شود.

$$(۳۰۱)_b = ۳ \times b^۲ + ۱$$

اگر $b = ۴$ باشد، حاصل مجذور کامل خواهد شد.

۷. الف)

$$۳ = (۱۰)_۳$$
$$۶ = (۲۰)_۳$$
$$۹ = (۱۰۰)_۳$$
$$\vdots$$

ب) اعدادی که رقم سمت راست آنها در مبنای ۳، صفر باشد.

ج) اعدادی که ۲ رقم سمت راست آنها در مبنای ۳، صفر باشد.

۸. الف)

$$۷ = (۱۰)_۷$$
$$۱۴ = (۲۰)_۷$$
$$۲۱ = (۳۰)_۷$$
$$\vdots$$

ب) اعدادی که رقم سمت راست آنها در مبنای ۷، صفر باشد.

ج) اعدادی که ۲ رقم سمت راست آنها در مبنای ۷، صفر باشد.

۹. $(۴۴۴۴۴۴)_۵$ و $(۱۰۰۰۰۰)_۵$

۱۰. در قسمت «الف» و «ب» ابتدا باید عدد مورد نظر را به مبنای ۱۰ برد و سپس تبدیل را انجام داد. برای قسمت ج باید این سؤال مطرح شود: ۲ به توان چه عددی می‌شود ۴؟ $۲^? = ۴$

چون $۴ = ۲^۲$ پس هر **دو رقم** در مبنای ۲ تبدیل به یک رقم در مبنای ۴ می‌شود.

$$(\underbrace{۱۰}_{۲}\underbrace{۰۱}_{۱}\underbrace{۱۱}_{۳}\underbrace{۰۱}_{۱})_۲ = (۲۱۳۱)_۴$$

$$\begin{aligned}(۱۰۰۱۱۱۰۱)_۲ =& ۱ \times ۲^۷ + ۰ \times ۲^۶ + ۰ \times ۲^۵ + ۱ \times ۲^۴ + ۱ \times ۲^۳ + ۱ \times ۲^۲ + \\ & ۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰ \\ =& (۱ \times ۲^۷ + ۰ \times ۲^۶) + (۰ \times ۲^۵ + ۱ \times ۲^۴) + (۱ \times ۲^۳ + ۱ \times ۲^۲) + \\ & (۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰) \\ =& (۱ \times ۲^۱ + ۰ \times ۲^۰) \times ۲^۶ + (۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰) \times ۲^۴ + \\ & (۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰) \times ۲^۲ + (۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰) \times ۲^۰ \\ =& ۲ \times ۴^۳ + ۱ \times ۴^۲ + ۳ \times ۴^۱ + ۱ \times ۴^۰ = (۲۱۳۱)_۴\end{aligned}$$

د) این سؤال باید مطرح شود: ۸ هست ۲ به توان چه عددی؟ $۲^? = ۸$.

چون $۲^۳ = ۸$، پس هر رقم در مبنای ۸، تبدیل به **سه** رقم در مبنای ۲ می‌شود.

$$(۶۲۴)_۸ = (\underbrace{۱۱۰}_{۶}\underbrace{۰۱۰}_{۲}\underbrace{۱۰۰}_{۴})_۲$$

ه) چون $۹ = ۳^۲$، پس:

$$(\underbrace{۰۲}_{۲}\underbrace{۱۰}_{۳}\underbrace{۱۲}_{۵})_۳ = (۲۳۵)_۹$$

و)

$$(۱۳۵۷)_۸ = (\underbrace{۰۰۱}_{۱}\underbrace{۰۱۱}_{۳}\underbrace{۱۰۱}_{۵}\underbrace{۱۱۱}_{۷})_۲ = (\overbrace{۰۰۱۰}^{۲}\overbrace{۱۱۱۰}^{۱۴}\overbrace{۱۱۱۱}^{۱۵})_۲ = (۲EF)_{۱۶} = \dots$$

۱۱. اعداد را باید به مبنای ۱۰ تبدیل کرد و سپس از کوچک به بزرگ مرتب کرد.

$$(۲۰۰)_۳, (۱۰۱۱۰)_۲, (۴۴)_۸, (۱۱۱)_۶, (۱۰۰۳)_۴, (۷۴)_۹, (۲۰۲)_۷, ۱۱۲, (۱۳۰۰)_۵$$

۱۲. الف) ۴۴۴۴۴ و ۸۸۸۸۸

ب) برای حل این تمرین بهتر است عدد ۱۹ را به صورت یک عدد پنج رقمی به مبنای ۳ ببریم و در جواب آن، به جای ارقام ۰ و ۱ و ۲، ارقام ۴ و ۷ و ۸ را جایگزین کنیم.

$$۱۹ = (۰۰۲۰۱)_۳ \longrightarrow ۴۴۸۴۷ \quad \text{بیستمین عدد}$$

پس از حل «ب»، به دانش‌آموزان فرصت دهید تا برای قسمت «ج» فکر کنند.

ج)

$$۱۹۹ = (۲۱۱۰۱)_۳ \longrightarrow ۸۷۷۴۷ \quad \text{دویستمین عدد}$$

۱۳. باید رابطه زیر را اثبات کنید:

$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + \cdots + ۲^n = ۲^{n+۱} - ۱$$

که اثبات رابطه فوق در تمرین ۱۸، قسمت د، بخش «تهران ۱۳۳۱» گفته شد.

برای حل این تمرین، می‌توانید این گونه عمل کنید:

$$۱ = ۲^۰$$

$$۲ = ۲^۱$$

$$۳ = ۲^۱ + ۲^۰ = ۴ - ۱ = ۲^۲ - ۱$$

$$۴ = ۲^۲$$

$$۵ = ۴ + ۱ = ۲^۲ + ۲^۰$$

$$۶ = ۴ + ۲ = ۲^۲ + ۲^۱$$

$$۷ = ۴ + ۳ = ۲^۲ + (۲^۱ + ۲^۰) = ۸ - ۱ = ۲^۳ - ۱$$

$$۸ = ۲^۳$$

$$\vdots$$

چون اعداد ۱ تا ۷ را قبلاً ساخته‌ایم، اگر آنها را به ۸ اضافه کنیم، تا عدد ۱۵ ساخته می‌شوند. از ۱ تا ۱۵ را توانسته‌ایم با مجموع توان‌های ۲ بسازیم.

$$۱۵ = ۲^{۳} + ۲^{۲} + ۲^{۱} + ۲^{۰} = ۱۶ - ۱ = ۲^{۴} - ۱$$

$$۱۶ = ۲^{۴}$$

$$\vdots$$

همین استدلال را ادامه دهید و به این نتیجه برسید که هر عددی را می‌توان به صورت مجموع توان‌هایی از ۲، نوشت.

۱۴. مبنای ۶. کافی است سه عدد مذکور را در مبنای ۶ با هم جمع بزنید.

۱۵. الف) بله ـ مبنای ۶

ب) خیر. می‌دانیم $۱۲ = ۲ \times ۶$. چون $(۱۴)_{۸} = ۱۲$، پس مبنای مورد نظر باید ۸ باشد. از طرفی $(۱۰)_{۸} = ۸ = ۲ + ۶$. ملاحظه می‌کنید که در جمع مرتکب اشتباه شده‌ایم.

۱۶.

$$\frac{۱۷}{۴۳} = \frac{۵ \times ۳}{۵ \times ۷} = \frac{۳}{۷}$$

$$\begin{cases} ۵ \times ۳ = ۱۵ = (۱۷)_{b} \\ ۵ \times ۷ = ۳۵ = (۴۳)_{b} \end{cases}$$

اگر $b = ۸$ باشد، تساوی‌های بالا برقرار خواهد بود. بنابراین این کسر در مبنای ۸، به ۵ ساده شده است.

۱۷.

۱۸. ج) اگر مبنای مورد نظر زوج باشد، باید به رقم سمت راست عدد دقت کرد. به این صورت که اگر رقم سمت راست زوج باشد، عدد مورد نظر زوج خواهد بود و اگر فرد باشد، عدد مورد

نظر فرد خواهد بود.

اگر مبنای مورد نظر فرد باشد، باید به مجموع ارقام عدد مورد نظر دقت کرد. اگر مجموع ارقام، فرد باشد، عدد مورد نظر فرد خواهد بود و اگر مجموع ارقام زوج باشد، عدد مورد نظر زوج خواهد بود.

۱۹. $(۳۰۲۰۴)_x$

۲۰. $(۵۴۳)_۶$ و $(۱۰۲)_۶$

۲۱. $(۴۴۴)_۵ - (۴۴)_۵$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{rcl} ۴۴۴ & \longrightarrow & \text{بزرگ‌ترین عدد ۳ رقمی در مبنای ۵} \\ \underline{-۴۴} & \longrightarrow & \text{بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی در مبنای ۵} \\ ۴۰۰ & \longrightarrow & \text{تعداد اعداد ۳ رقمی در مبنای ۵} \end{array}$$

تعداد اعداد ۳ رقمی در مبنای ۵، $(۴۰۰)_۵$ خواهد بود.

$$(۴۰۰)_۵ = ۴ \times ۵^۲ = ۱۰۰$$

۲۲. کافی است تقسیمات متوالی را تا پنج مرحله انجام دهیم. جواب این تمرین، ۰ (صفر) است.

۲۳. حل این مسأله برای دانش‌آموزان اجباری نیست. دانش‌آموزان می‌توانند جواب این تمرین را در وب‌گاه سمپاد با نام «ترازو و وزنه‌ها» مشاهده کنند. ولی در کلاس جواب دانش‌آموزان را حتماً بشنوید. برای این‌که دانش‌آموزان، پیش از تفکر بر روی تمرین، پاسخ آن را نبینند، بر روی فایلی که در وب‌گاه قرار گرفته است، رمز عبور گذاشته شده است.

رمز عبور فایل: ۴۴۱

کارت‌های مرموز

این قسمت در کتاب دانش‌آموزان نیست و تدریس و ارائه‌ی آن در کلاس توسط معلم و در هنگام حل تمرین‌های ۲۴، ۲۵ و ۲۶ انجام می‌گیرد.

روی تخته‌سیاه شکل کارت‌های زیر را بکشید و به دانش‌آموزان بگویید که امروز به جای درس، می‌خواهیم شعبده‌بازی کنیم!!

«ث»

۲۴	۱۶
۲۵	۱۷
۲۶	۱۸
۲۷	۱۹
۲۸	۲۰
۲۹	۲۱
۳۰	۲۲
۳۱	۲۳

«ت»

۲۴	۸
۲۵	۹
۲۶	۱۰
۲۷	۱۱
۲۸	۱۲
۲۹	۱۳
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

«پ»

۲۰	۴
۲۱	۵
۲۲	۶
۲۳	۷
۲۸	۱۲
۲۹	۱۳
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

«ب»

۱۸	۲
۱۹	۳
۲۲	۶
۲۳	۷
۲۶	۱۰
۲۷	۱۱
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

«الف»

۱۷	۱
۱۹	۳
۲۱	۵
۲۳	۷
۲۵	۹
۲۷	۱۱
۲۹	۱۳
۳۱	۱۵

از یکی از دانش‌آموزان بخواهید تا روز تولد خود را در نظر بگیرد و به شما بگوید که آن عدد روی کدام یک از این کارت‌ها نوشته شده است. مثلاً دانش‌آموز به شما می‌گوید: الف، ب، ت.

شما می‌دانید که در واقع این کارت‌ها به این شکل هستند:

۱۶ = ث

۲۴	۱۶
۲۵	۱۷
۲۶	۱۸
۲۷	۱۹
۲۸	۲۰
۲۹	۲۱
۳۰	۲۲
۳۱	۲۳

۸ = ت

۲۴	۸
۲۵	۹
۲۶	۱۰
۲۷	۱۱
۲۸	۱۲
۲۹	۱۳
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

۴ = پ

۲۰	۴
۲۱	۵
۲۲	۶
۲۳	۷
۲۸	۱۲
۲۹	۱۳
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

۲ = ب

۱۸	۲
۱۹	۳
۲۲	۶
۲۳	۷
۲۶	۱۰
۲۷	۱۱
۳۰	۱۴
۳۱	۱۵

۱ = الف

۱۷	۱
۱۹	۳
۲۱	۵
۲۳	۷
۲۵	۹
۲۷	۱۱
۲۹	۱۳
۳۱	۱۵

شما هم اعداد مربوط به کارت‌های «الف»، «ب» و «ت» را با هم جمع زده و حاصل را درکلاس اعلام می‌کنید. به طور حتم عدد به دست آمده یعنی ۱۱، روز تولد آن دانش‌آموز خواهد بود.

$$\begin{array}{ccccc} \text{ت} & + & \text{ب} & + & \text{الف} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۱ & + & ۲ & + & ۸ = ۱۱ \end{array}$$

دقت داشته باشید که روی تخته سیاه عددهای بالای کارت (یعنی ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶) را ننویسید و فقط از حروف الفبا یعنی «الف»، «ب»، «پ»، «ت»، و «ث» استفاده کنید. در ابتدای کار، دانش‌آموزان اعداد بالای کارت را نباید ببینند.

این سؤال را از دیگر دانش‌آموزان بپرسید و از آنها بخواهید که اعلام کنند تاریخ تولدشان روی کدام کارت‌ها نوشته شده است. شما هم اعداد مربوط به بالای هر کارت را در ذهن خود جمع بزنید و در کلاس اعلام کنید.

در ابتدای کار دانش‌آموزان از این که شما چگونه می‌توانید تاریخ تولدشان را حدس بزنید، تعجب می‌کنند. بعد از این که چند بار این کار را تکرار کردید، می‌توانید حروف الف، ب، پ، ت و ث را از بالای کارت‌ها پاک کنید و به جای آنها، اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶ را بنویسید.

بعد از این کار دانش‌آموزان کم کم خواهند فهمید که شما اعداد بالای کارت‌ها را با هم جمع زده‌اید. همچنین به این موضوع نیز توجه خواهند کرد که این اعداد در واقع توان‌های عدد ۲ هستند. یعنی $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$ و $۲^{۴}$.

حال برای بیشتر دانش‌آموزان این سؤال ایجاد خواهد شد که این کارت‌ها چطور ساخته شده‌اند؟ آیا این اعداد اتفاقی به دست آمده‌اند؟

می‌توانید یک‌بار دیگر این بازی را انجام دهید و این‌بار محاسبات را روی تخته‌ی کلاس بنویسید. مثلاً عدد ۱۸ را روی کارت‌های ۱۶ و ۲ به بچه‌ها نشان دهید و روی تخته سیاه بنویسید:

$$۱۸ = ۱۶ + ۲ = ۲^{۴} + ۲^{۱}$$

همچنین عدد ۲۲ را هم روی کارت‌های ۴،۱۶ و ۲ نشان دهید و روی تخته سیاه بنویسید:

$$۲۲ = ۱۶ + ۴ + ۲ = ۲^۴ + ۲^۲ + ۲^۱$$

کم کم جرقه‌ای در ذهن بچه‌ها ایجاد خواهد شد که راز این کارت‌ها، ارتباطی با مبنای ۲ دارد.

در اینجا می‌توانید همه‌ی اعداد روی تخته سیاه را که روی کارت‌ها نوشته شده است، پاک کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که این کارت‌ها را یک بار خودشان بسازند. یعنی اعداد روی کارت‌ها را خودشان به دست آورند. شاید این کار برای بعضی دشوار باشد. چون هنوز متوجه نشده‌اند که چه اتفاقی دارد می‌افتد.

می‌توانید کم‌کم آنها را راهنمایی کنید که چه باید بکنند. مثلاً برای اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ این کار را انجام دهید به این شکل که:

روی کارت $۲^۰$، عدد ۱ را یادداشت کنید $\longrightarrow$ $۱ = ۲^۰$

روی کارت $۲^۱$، عدد ۲ را یادداشت کنید $\longrightarrow$ $۲ = ۲^۱$

روی کارت‌های $۲^۰$ و $۲^۱$، عدد ۳ را یادداشت کنید $\longrightarrow$ $۳ = ۲^۱ + ۲^۰$

روی کارت $۲^۲$، عدد ۴ را یادداشت کنید $\longrightarrow$ $۴ = ۲^۲$

روی کارت‌های $۲^۰$ و $۲^۲$ ، عدد ۵ را یادداشت کنید $\longrightarrow$ $۵ = ۲^۲ + ۲^۰$

$\vdots$

حال از دانش‌آموزان بخواهید برای دیگر اعداد نیز این کار را انجام دهند. سؤالی که ممکن است برای آنها پیش بیاید، این است که:

- خانم اجازه ـ تا چه عددی رو باید به صورت جمع توان‌های ۲ بنویسیم؟

یا سؤالی شبیه این. به آنها جواب این سؤال را ندهید تا خودشان جواب سؤال را دریابند. آنها وقتی به عدد ۳۱ برسند، متوجه می‌شوند که از این جلوتر نمی‌توانند بروند. چون عدد بعدی، ۳۲ است و ۳۲ را باید به صورت $۲^۵ = ۳۲$ نوشت که کارت $۲^۵$ درکارت‌های فعلی موجود نیست. بنابراین آخرین عدد به صورت زیر خواهد بود:

$$۳۱ = ۲^۴ + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰$$

و عدد ۳۱ را هم روی هر ۵ کارت باید بنویسند.

در این قسمت دانش‌آموزان باید فهمیده باشند که برای این کار، می‌توانستند اعداد را به مبنای ۲ ببرند و از آن طریق کارت‌ها را تکمیل کنند.

$$۲۴ = (\underset{\uparrow}{\overset{\text{کارت } ۲^۴}{۱}} \quad \underset{\text{کارت } ۲^۳}{\overset{}{\underset{\downarrow}{۱}}} \quad ۰ \quad ۰ \quad ۰)_۲ = ۲^۴ + ۲^۳$$

دانش‌آموزان در این قسمت سؤالات زیادی ممکن است بپرسند. از جمله این که:

- راه دیگری برای پر کردن کارت‌ها وجود ندارد؟
- چرا تعداد اعداد روی همه کارت‌ها، ۱۶ عدد است؟

و از این قبیل سؤالات...

با توجه به فضای کلاس و این‌که دانش‌آموزان توانایی شنیدن پاسخ این سؤالات را دارند یا نه، می‌توانید به این سؤالات جواب دهید.

حداقل چیزی که دانش‌آموزان باید در این قسمت یاد بگیرند، ارتباط این کارت‌ها با مبنای ۲ است. و این‌که هر عدد را می‌توان به صورت مجموع توان‌هایی از عدد ۲ نوشت. نوشتن یک عدد به صورت توان‌هایی از عدد ۲، یعنی نوشتن آن عدد در مبنای ۲.

و امّا مطالبی مخصوص شما معلم گرامی

معرفی کردن و صحبت درباره کارت‌های مرموز، موجب می‌شود که دانش‌آموزان شناخت بیشتری نسبت به مبنای ۲ داشته باشند. قبلاً اشاره شد که هر عدد را می‌توان به صورت مجموع توان‌های ۲ نوشت. زیراکه هر عدد را می‌توان به مبنای ۲ برد. می‌دانیم که نوشتن یک عدد در مبنای ۲، یعنی نوشتن یک عدد به صورت مجموع توان‌های ۲. به عنوان مثال:

$$۲۱ = (۱۰۱۰۱)_۲ = ۲^۴ + ۲^۲ + ۲^۰$$

کارت‌های مرموز، کارت‌هایی هستند که بر روی آنها تعدادی عدد نوشته شده است و هرکارت اختصاص دارد به توانی از ۲. مثلاً کارت $۲^۰$، کارت $۲^۱$، کارت $۲^۲$ و همین طور تا آخر...

فرض کنید می‌خواهیم کارت $۲^۲$ را بسازیم. روی این کارت اعدادی نوشته می‌شوند که در نمایش مبنای ۲ آن اعداد، ارزش مکانی $۲^۲$، ۱ باشد.

$$\left(\underset{\overset{\downarrow}{۲^۴}}{\_}\ \underset{\overset{\downarrow}{۲^۳}}{\_}\ \underset{\overset{\downarrow}{۲^۲}}{\overset{۱}{\_}}\ \underset{\overset{\downarrow}{۲^۱}}{\_}\ \underset{\overset{\downarrow}{۲^۰}}{\_}\right)_۲$$

به‌عنوان مثال این اعداد در کارت $۲^۲$ ظاهر می‌شوند.

$$(۰۰۱۰۰)_۲ = ۲^۲ = ۴$$

$$(۰۱۱۰۱)_۲ = ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۰ = ۱۳$$

$$(۱۰۱۰۱)_۲ = ۲^۴ + ۲^۲ + ۲^۰ = ۲۱$$

بنابراین ۴، ۱۳ و ۲۱ روی کارت $۲^۲$ نوشته می‌شوند.

فرض کنید که ۵ کارت مرموز داریم. یعنی کارت‌های $۲^۰$، $۲^۱$، $۲^۲$، $۲^۳$ و $۲^۴$. اگر بخواهیم این ۵ کارت را بسازیم، باید اعدادی را روی این پنج کارت بنویسیم که با مجموعی از اعداد $۲^۰$، $۲^۱$، $۲^۲$، $۲^۳$ و $۲^۴$ ساخته می‌شوند. بنابراین بزرگ‌ترین عدد $۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴$ خواهد بود. یعنی ۳۱.

تا اینجا دریافتیم اعدادی که روی این کارت‌ها نوشته می‌شوند، از ۱ تا ۳۱ هستند.

اگر بخواهیم کارت $۲^۰$ را بسازیم، باید اعدادی را روی این کارت بنویسیم که در نمایش مبنای ۲ آنها، مرتبه $۲^۰$ آن ۱ باشد. به راحتی می‌توان فهمید که تعداد اعدادی که روی این کارت نوشته می‌شوند، ۱۶ عدد است. زیرا در نمایش مبنای ۲، مرتبه $۲^۰$ باید ۱ باشد. ولی مرتبه‌های $۲^۱$، $۲^۲$، $۲^۳$ و $۲^۴$ می‌توانند هم ۰ باشند و هم ۱.

(_	_	_	_	_)$_۲$
↑	↑	↑	↑	↑
مرتبه $۲^۴$	مرتبه $۲^۳$	مرتبه $۲^۲$	مرتبه $۲^۱$	مرتبه $۲^۰$
هم صفر	هم صفر	هم صفر	هم صفر	فقط یک
هم یک	هم یک	هم یک	هم یک	

پس ۱۶ عدد به دست می‌آیند که مرتبه‌ی $۲^{۰}$ آنها ۱ است.

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = ۱۶$$

$(۰۰۰۰۱)_۲ = ۱$	$(۰۱۰۰۱)_۲ = ۹$	$(۱۰۰۰۱)_۲ = ۱۷$	$(۱۱۰۰۱)_۲ = ۲۵$
$(۰۰۰۱۱)_۲ = ۳$	$(۰۱۰۱۱)_۲ = ۱۱$	$(۱۰۰۱۱)_۲ = ۱۹$	$(۱۱۰۱۱)_۲ = ۲۷$
$(۰۰۱۰۱)_۲ = ۵$	$(۰۱۱۰۱)_۲ = ۱۳$	$(۱۰۱۰۱)_۲ = ۲۱$	$(۱۱۱۰۱)_۲ = ۲۹$
$(۰۰۱۱۱)_۲ = ۷$	$(۰۱۱۱۱)_۲ = ۱۵$	$(۱۰۱۱۱)_۲ = ۲۳$	$(۱۱۱۱۱)_۲ = ۳۱$

کارت اول = $۲^{۰}$

۱۷	۱
۱۹	۳
۲۱	۵
۲۳	۷
۲۵	۹
۲۷	۱۱
۲۹	۱۳
۳۱	۱۵

اکنون به راحتی متوجه می‌شوید که روی هر کدام از این ۵ کارت، ۱۶ عدد نوشته خواهد شد.

اگر بخواهیم با روش فوق بقیه کارت‌ها را بسازیم، کمی وقت‌گیر خواهد بود. راه دیگری هم برای به دست آوردن اعداد روی کارت‌های مرموز وجود دارد که از گفتن آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۲۴. به کارت‌های $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$ و $۲^{۵}$ احتیاج داریم.

۲۵. به کارت‌های $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$، $۲^{۵}$ و $۲^{۶}$ احتیاج داریم.

۲۶. به کارت‌های $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، $۲^{۴}$، $۲^{۵}$، $۲^{۶}$ و $۲^{۷}$ احتیاج داریم. توجه داشته باشید که این مسأله حالت بهینه نیست و با این کارت‌ها، نه تنها تا ۱۳۰، بلکه تا ۲۵۵ را می‌توان حدس زد.

نیم

این بازی در کلاس حتماً انجام شود. به جای استفاده از لوبیا، دانش‌آموزان می‌توانند عدد تعداد هر دسته را همانند مثال در یک جدول روی کاغذ بنویسند و آن را تغییر دهند.

این بازی را در دو جلسه می‌توانید انجام دهید. در جلسه‌ی اوّل، تمرین‌های ۱ و ۲ را در کلاس انجام دهید.

تمرین

۱. تمام حالت‌ها را در کلاس تحلیل کنید. مثلاً در قسمت «الف» این حالت‌ها را بررسی کنید:

- اگر نفر اول از دسته‌ی اول یک لوبیا بردارد، تمام حرکت‌های ممکن برای نفر دوم را روی تخته سیاه بنویسید و بعد از آن در هر یک از حالت‌ها، تمام حرکت‌های ممکن برای نفر اول را پیش‌بینی کنید و به همین ترتیب ادامه دهید.
- اگر نفر اول از دسته‌ی اول دو لوبیا بردارد، همانند قبل تمامی حرکات را پیش‌بینی کنید.

بعد از بررسی تمام حالات، حالت‌های برد برای نفر اول مشخص می‌شود.

۲. اجازه دهید دانش‌آموزان با سعی و خطا این تمرین را انجام دهند.

۳. آنها را ترغیب کنید که «روش بردن» را می‌توانند از روی وب‌گاه نگاه کنند. برای این‌که دانش‌آموزان، پیش از تفکر بر روی تمرین، پاسخ آن را نبینند، بر روی فایلی که در وب‌گاه قرار گرفته است، رمز عبور گذاشته شده است.

رمز عبور فایل: ۲۴۶۸

۴. دقت کنید که دانش‌آموزان با استفاده از «روش بردن» این تمرین را انجام دهند.

یک هفته بعد، بازی نیم را به عنوان مسابقه می‌توانید در کلاس انجام دهید.

ضرب مصر باستان

دلیل بیان این روش برای دانش‌آموزان تأکید دوباره این خاصیت مبنای ۲ است که هر عدد را می‌توان به‌صورت توان‌هایی از عدد ۲ نوشت.

$$۵۸ = (۱۱۱۰۱۰)_۲ = ۲^۵ + ۲^۴ + ۲^۳ + ۲^۱$$

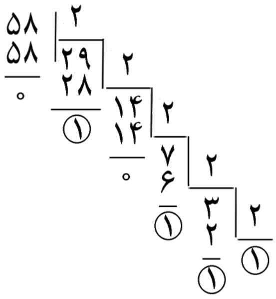
در واقع روش ضرب مصر باستان به‌صورت زیر است:

$$۵۸ = (\underset{\boxed{۲۶\times ۲^۵}}{۱}\quad \underset{\boxed{۲۶\times ۲^۴}}{۱}\quad \underset{\boxed{۲۶\times ۲^۳}}{۱}\quad \underset{۲۶\times ۲^۲}{۰}\quad \underset{\boxed{۲۶\times ۲^۱}}{۱}\quad \underset{۲۶\times ۲^۰}{۰})_۲$$

$$۲۶ \times ۵۸ = ۲۶ \times (۲^۵ + ۲^۴ + ۲^۳ + ۲^۱) = ۲۶ \times ۲^۵ + ۲۶ \times ۲^۴ + ۲۶ \times ۲^۳ + ۲۶ \times ۲^۱$$
$$= ۸۳۲ + ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۵۲ = ۱۵۰۸$$

ضرب به روش تضعیف و تنصیف

در واقع این روش، همان روش ضرب مصر باستان است. اگر بخواهیم عدد ۵۸ را به‌وسیله‌ی تقسیم‌های متوالی به مبنای ۲ ببریم، خواهیم دید که اعدادی باقیمانده‌شان به ۲، عدد ۱ می‌شود که فرد هستند. در تقسیم‌های متوالی زیر، اعداد ۲۹، ۷، ۳ و ۱ باقیمانده‌شان به عدد ۲، ۱ شده است.



$$\longrightarrow \quad ۵۸ = (۱\ \ ۱\ \ ۱\ \ ۰\ \ ۱\ \ ۰)_{۲}$$

به همین دلیل اعداد روبروی اعداد فرد ستون چپ را باید با هم جمع بزنیم.

جذر

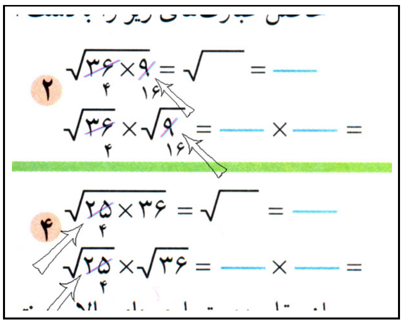
تدریس این بخش را از کتاب درسی شروع کنید و از آن جلو بروید.

‖ تدریس صفحه ۵۹ ‖

در انتهای صفحه ۵۹، این موضوع را به دانش‌آموزان تأکید کنید که جذر یک عدد و یا به‌عبارت دیگر مقدار رادیکال، همیشه یک عدد مثبت است و به هیچ عنوان نمی‌تواند منفی باشد. نیازی هم نیست که در کلاس به فرجه‌ی ۲ رادیکال اشاره کنید. در سال دوّم و سوّم راهنمایی، هر جا که رادیکال دیده می‌شود، از نوع فرجه ۲ است.

‖ تدریس صفحه ۶۰ ‖

در فعالیت صفحه ۶۰، در قسمت‌های ۲ و ۴، به اشتباه زیر رادیکال اعدادی نوشته شده و ساده سازی اشتباهی صورت گرفته است. به دانش‌آموزان بگویید که آن اعداد را ندید بگیرند.



② $\sqrt{۳۶ \times ۹} = \sqrt{۳۲۴} = ۱۸$

$\sqrt{۳۶} \times \sqrt{۹} = ۶ \times ۳ = ۱۸$

④ $\sqrt{۲۵ \times ۳۶} = \sqrt{۹۰۰} = ۳۰$

$\sqrt{۲۵} \times \sqrt{۳۶} = ۵ \times ۶ = ۳۰$

در وبلاگ گروهی معلمان ریاضی راهنمایی کشور، مطلبی با عنوان «اصلاحیه کتاب» به آدرس زیر آمده است. برای ایجاد نشاط! در کلاس، می‌توانید این مطلب را برای دانش‌آموزان تعریف کنید.

http://math-teachers.blogfa.com/post-169.aspx

‖ تدریس صفحه‌های ۶۱ و ۶۲ ‖

زمانی که در صفحه ۶۲ کتاب، و در قسمت «عددهای منفی جذر ندارند» به جمله‌ی «عدد ۲۵ دو جذر دارد، یکی ۵ و دیگری ۵−» رسیدید، از کتاب تکمیلی، «طرح یک پرسش» را در کلاس بخوانید.

(؟) طرح یک پرسش:

تصویر شماره ۱، مربوط به صفحه ۵۹ کتاب است. در آنجا جذر ۲۵، عدد ۵ معرفی شده است. همچنین جذر ۴۹ عدد ۷ معرفی شده است.

همان‌طور که در آنجا می‌بینید، جذر یک عدد را با نماد رادیکال «$\sqrt{\ }$» نشان می‌دهند.

جذر یک عدد همیشه مثبت است. بنابراین

$$\sqrt{۴۹} = ۷ \quad , \quad \sqrt{۴۹} \neq -۷$$

$$\sqrt{۲۵} = ۵ \quad , \quad \sqrt{۵} \neq -۵$$

و اما در تصویر شماره ۲، که مربوط می‌شود به صفحه ۶۲ کتاب، جمله‌ای می‌بینید که کمی عجیب به‌نظر می‌رسد. به‌طوری که با معلومات گذشته ما همخوانی ندارد؛

«عدد ۲۵ دو جذر دارد، یکی ۵ و دیگری ۵-»

ما می‌دانیم که عدد ۲۵ تنها یک جذر دارد. فقط ۵ .

؟ منظور از جمله‌ی زیر که در کتاب نوشته شده است، چیست؟

«عدد ۲۵ دو جذر دارد، یکی ۵ و دیگری ۵-»

☐ جمله‌ی کتاب را به این شکل اصلاح کنید:

«عدد ۲۵ مجذور دو عدد است، یکی ۵ و دیگری ۵-»

$$۵^{۲} = ۲۵ \quad , \quad (-۵)^{۲} = ۲۵$$

همان‌گونه که می‌بینید، جمله‌ی اصلاح‌شده با مطالب مربوط به همین قسمت از کتاب همخوانی دارد.

به دانش‌آموزان بگویید کتاب درسی هم گاهی اوقات می‌تواند اشتباه داشته باشد. توجه دانش‌آموزان را به تصویر شماره ۳ جلب کنید و آنها را تشویق کنید تا اشتباه کتاب را به «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی» اطلاع دهند.

[[ادامه تدریس صفحه ۶۲]]

نکاتی در مورد جذر

در اینجا سه نکته گفته خواهد شد که با توجه به سطح کلاس می‌توانید در روند تدریس، آنها را به دانش‌آموزان بگویید.

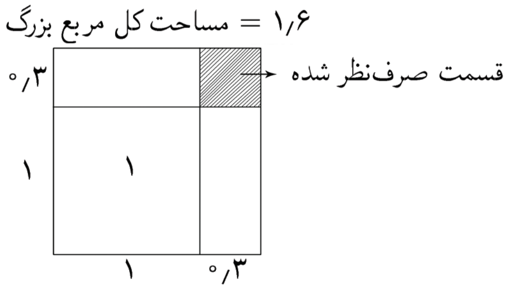
نکته اول:

در صفحه ۶۵ کتاب، $\sqrt{۱/۶}$ را به روش زیر توضیح داده است و مقدار ۱/۳ را برای آن به‌دست آورده است.

$$\sqrt{۱/۶} \cong ۱$$

$$\begin{array}{r|l} -۱ & \\ \hline ۰/۶ & ۲ \\ -۰/۶ & ۰/۳ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱/۶} \cong ۱ + ۰/۳ = ۱/۳$$



در اینجا $\sqrt{۱/۶}$ را از روش دیگری محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{۱/۶} = \sqrt{\frac{۱/۶ \times ۱۰۰}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۱۶۰}}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۱۶۰}}{۱۰}$$

$$\sqrt{۱۶۰} \cong ۱۲$$

$$\begin{array}{r|l} -۱۴۴ & \\ \hline ۱۶/۰ & ۲۴ \\ -۱۴۴ & ۰/۶۶ \\ \hline ۱/۶۰ & \\ -۱/۴۴ & \\ \hline ۰/۱۶ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۶۰} \cong ۱۲ + ۰/۶۶ = ۱۲/۶۶$$

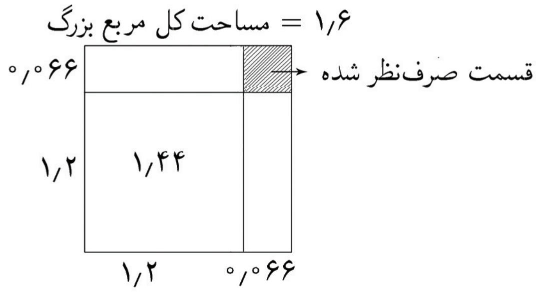
در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱/۶} = \frac{\sqrt{۱۶۰}}{۱۰} \cong \frac{۱۲/۶۶}{۱۰} = ۱/۲۶۶$$

می‌بینید که ۱٫۲۶۶ نسبت به ۱٫۳ جواب دقیق‌تری است. در واقع در این روش برای محاسبه $\sqrt{۱٫۶}$ اینگونه عمل کردیم:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{۱٫۶} \cong ۱٫۲ & \\ -۱٫۴۴ & \\ \hline ۰٫۱۶ & ۲٫۴ \\ \hline & \\ ۱٫۶ & ۲۴ \\ -۱۴۴ & \overline{۰٫۰۶۶} \\ \hline ۱۶۰ & \\ -۱۴۴ & \\ \hline ۰٫۰۱۶ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱٫۶} \cong ۱٫۲ + ۰٫۰۶۶ = ۱٫۲۶۶$$



اگر بخواهیم به جواب دقیق‌تری نسبت به ۱٫۲۶۶ دست پیدا کنیم، باید به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\sqrt{۱٫۶} = \sqrt{\frac{۱٫۶ \times ۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{\sqrt{۱۶۰۰۰}}{\sqrt{۱۰۰۰۰}} = \frac{\sqrt{۱۶۰۰۰}}{۱۰۰}$$

همانند قبل باید $\sqrt{۱۶۰۰۰}$ را به‌صورت تقریبی محاسبه کنیم.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{۱۶۰۰۰} \cong ۱۲۶ & \\ -۱۵۸۷۶ & \\ \hline ۱۲۴٫۰ & ۲۵۲ \\ -۱۰۰٫۸ & \overline{۰٫۴} \\ \hline ۲۳٫۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۶۰۰۰} \cong ۱۲۶ + ۰٫۴ = ۱۲۶٫۴$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱٫۶} = \frac{\sqrt{۱۶۰۰۰}}{۱۰۰} = \frac{۱۲۶٫۴}{۱۰۰} = ۱٫۲۶۴$$

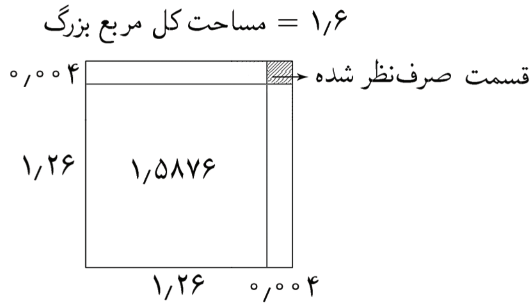
واضح است که ۱٫۲۶۴ نسبت به ۱٫۲۶۶ جواب دقیق‌تری است. در واقع در اینجا برای محاسبه $\sqrt{۱٫۶}$ این کار را انجام داده‌ایم:

$$\sqrt{۱٫۶} \cong ۱٫۲۶$$

$$\begin{array}{r|l} -۱٫۵۸۷۶ & \\ \hline ۰٫۰۱۲۴ & ۲٫۵۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۱٫۲۴۰ & ۲۵۲ \\ \hline -۱٫۰۰۸ & ۰٫۰۰۴ \\ \hline ۰٫۲۳۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱٫۶} \cong ۱٫۲۶ + ۰٫۰۰۴ = ۱٫۲۶۴$$



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هر مرحله، قسمتی که از آن صرف‌نظر می‌کنیم کوچک‌تر می‌شود و همین موضوع باعث می‌شود که جواب جذر دقیق‌تر شود.

نکته دوم:

با توجه به فعالیت صفحه ۶۶ کتاب، چرا در اعدادی که یک واحد از یک مربع کامل کوچک‌تر هستند، در هنگام محاسبه جذر به‌صورت تقریبی دچار مشکل می‌شویم؟

توجه داشته باشید، توضیحاتی که در این قسمت گفته خواهد شد، به‌صورت جبری است. اگر دانش‌آموزان توانایی فهم آن را دارند، توضیحات را به آنها بگویید.

فرض کنید می‌خواهیم جذر یک عدد مانند y بین ۳۶ و ۴۹ را به‌صورت تقریبی محاسبه کنیم:

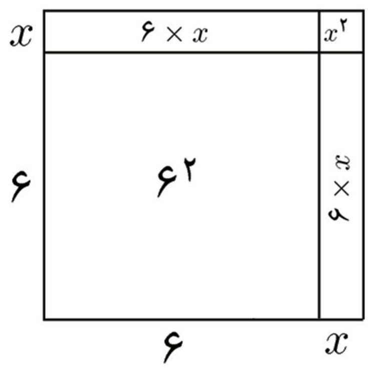
$$۳۶ < y < ۴۹ \iff ۶^۲ < y < ۷^۲ \iff ۶ < \sqrt{y} < ۷$$

ملاحظه می‌کنید که جذر y یک عدد است بین ۶ و ۷. در نتیجه:

$$\sqrt{y} = ۶ + x \qquad ۰ < x < ۱$$

خواهیم داشت:

$$y = \text{مساحت مربع} = (۶ + x)^۲ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x + x^۲$$



می‌دانید در محاسبه‌ی جذر تقریبی از مساحت مربع کوچک (یعنی $x^۲$) صرف‌نظر می‌کنیم.

به‌عنوان مثال جذر ۴۳ را محاسبه می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم اندازه ضلع مربعی را به‌دست آوریم که مساحت

آن ۴۳ است. یعنی $y = ۴۳$.

$$۴۳ = ۳۶ + ۷ = (۶ + x)^۲ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x + x^۲$$

$$\Longrightarrow ۶^۲ + ۷ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x + x^۲$$

از مقدار $x^۲$ صرف نظر می‌کنیم.

$$۶^۲ + ۷ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x \Longrightarrow ۲ \times ۶ \times x = ۷ \Longrightarrow x = \frac{۷}{۲ \times ۶} = \frac{۷}{۱۲} = ۰/۵۸$$

در نتیجه:

$$\sqrt{۴۳} \cong ۶ + ۰/۵۸ = ۶/۵۸$$

حال به محاسبات زیر توجه کنید:

$$۴۹ = ۷^۲ = (۶ + ۱)^۲ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times ۱ + ۱$$

$$۴۸ = ۴۹ - ۱ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times ۱ + ۱ - ۱ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times ۱$$

می‌دانیم اگر بخواهیم جذر ۴۸ را به‌دست آوریم، عددی می‌شود بین ۶ و ۷ . پس داریم:

$$۴۸ = (۶ + x)^۲ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x + x^۲$$

از طرفی می‌دانیم $۴۸ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times ۱$. پس:

$$۶^۲ + ۲ \times ۶ \times x + x^۲ = ۶^۲ + ۲ \times ۶ \times ۱$$

از مقدار $x^۲$ صرف نظر می‌کنیم:

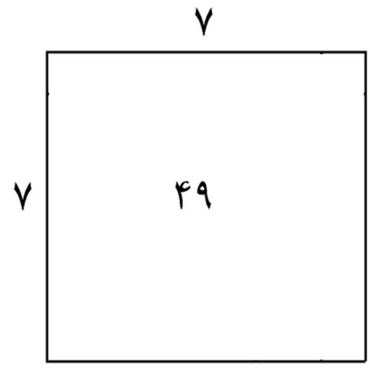
$$\Longrightarrow ۲ \times ۶ \times x = ۲ \times ۶ \times ۱ \Longrightarrow x = ۱$$

که این با فرض $۰ < x < ۱$ در تضاد است.

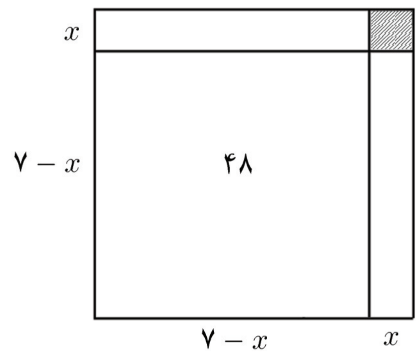
بنابراین از این روش نمی‌توان جذر ۴۸ را محاسبه کرد.

در توضیح روش محاسبه جذر ۴۸ که در صفحه ۶۷ کتاب، پرسشی درباره آن مطرح شده، این چنین می‌توان گفت:

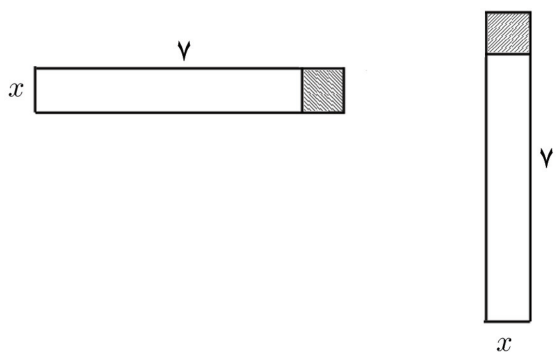
مربعی به طول ۷ در نظر می‌گیریم:



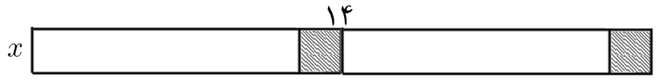
مساحت این مربع ۴۹ است. در داخل این مربع، یک مربع دیگر جدا می‌کنیم به‌طوری که مساحت آن ۴۸ باشد.



واضح است که مجموع مساحت نوار بالایی و کناری به‌وجود آمده، ۱ است.



اگر این دو نوار را کنار هم قرار دهیم، می‌توانیم مقدار x را محاسبه کنیم.



$$۱۴ \times x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۴} = ۰/۰۷$$
$$\Rightarrow \sqrt{۴۸} \cong ۷ - ۰/۰۷ = ۶/۹۳$$

واضح است که برای محاسبه‌ی x، مربع کوچک هاشور خورده در شکل را ۲ بار حساب کرده‌ایم. به همین خاطر در اینجا هم، مقدار جذر تقریبی است.

نکته سوم:

سؤالات زیر را از دانش‌آموزان بپرسید.

؟ $\sqrt{۲}$ را به صورت تقریبی حساب کنید.

☐ $\sqrt{۲} \cong ۱/۵$

؟ $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ را به‌دست آورید.

☐ دانش‌آموزان به دو روش به این سؤال پاسخ می‌دهند.

۱) $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \cong ۱/۵ \times ۱/۵ = ۲/۲۵$

۲) $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۴} = ۲$

؟ کدام جواب برای $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ بهتر است؟

☐ پاسخ‌های دانش‌آموزان را بشنوید و آنها را ترغیب کنید که به ادامه‌ی مبحث دقت کنند.

؟ $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۶}$ را به‌صورت تقریبی محاسبه کنید.

☐ $\sqrt{۵} \cong ۲/۲۵ \quad , \quad \sqrt{۶} \cong ۲/۵$

؟ $\sqrt{۵} \times \sqrt{۶}$ را به‌صورت تقریبی محاسبه کنید.

☐

۱) $\sqrt{۵} \times \sqrt{۶} \cong ۲/۲۵ \times ۲/۵ = ۵/۶۲۵$

۲) $\sqrt{۵} \times \sqrt{۶} = \sqrt{۳۰} \cong ۵/۵$

؟ کدام جواب برای $\sqrt{۶} \times \sqrt{۵}$ بهتر است؟

☐ ابتدا پاسخ دانش‌آموزان را بشنوید و سپس به دانش‌آموزان بگویید که اعداد به‌دست آمده را به توان ۲ برسانند و ببینند که کدام مقدار به عدد ۳۰ نزدیک‌تر است.

$$(۵/۶۲۵)^{۲} = ۳۱/۶۴۰۶۲۵$$

$$(۵/۵)^{۲} = ۳۰/۲۵$$

و در نهایت نتیجه بگیرید که راه دوم برای محاسبه $\sqrt{۶} \times \sqrt{۵}$ بهتر است.

$$\sqrt{۵} \times \sqrt{۶} = \sqrt{۳۰} \cong ۵/۵$$

در حالت کلی، اگر a و b دو عدد بزرگ‌تر از ۱ باشند، برای محاسبه‌ی $\sqrt{b} \times \sqrt{a}$ بهتر است مقدار تقریبی $\sqrt{a \times b}$ را حساب کنیم.

تمرین

.۱

۳) $\sqrt{۱۵ \times ۳۵ \times ۲۱} = \sqrt{۳ \times ۵ \times ۵ \times ۷ \times ۳ \times ۷} = \sqrt{۳^۲ \times ۵^۲ \times ۷^۲} = \sqrt{۳^۲} \times \sqrt{۵^۲} \times \sqrt{۷^۲} = ۳ \times ۵ \times ۷$

۵) $\sqrt{\frac{۶۴}{۴۹} \times \frac{۴}{۸۱}} = \sqrt{\frac{۶۴}{۴۹}} \times \sqrt{\frac{۴}{۸۱}} = \frac{\sqrt{۶۴}}{\sqrt{۴۹}} \times \frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۸۱}} = \frac{۸}{۷} \times \frac{۲}{۹}$

۷) $\sqrt{\frac{۹ + ۱۶}{۳۶ + ۶۴}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$

در حل قسمت ۷، اشتباهات رایج دانش‌آموزان را تذکر دهید.

$$\sqrt{\frac{۹ + ۱۶}{۳۶ + ۶۴}} \neq \sqrt{\frac{۹}{۳۶}} + \sqrt{\frac{۱۶}{۶۴}} \dots$$
$$\sqrt{\frac{۹ + ۱۶}{۳۶ + ۶۴}} = \frac{\sqrt{۹ + ۱۶}}{\sqrt{۳۶ + ۶۴}} \neq \frac{\sqrt{۹} + \sqrt{۱۶}}{\sqrt{۳۶} + \sqrt{۶۴}} \dots$$

۱۷) $\sqrt{۰/۷ \times ۶/۳} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۷ \times ۶۳} = \sqrt{(۰/۱)^۲ \times ۷^۲ \times ۳^۲} = ۰/۱ \times ۷ \times ۳ = ۲/۱$

۲. در حل این تمرین، اسمی از معادله و متغیر برده نشود و دانش‌آموزان تنها با حدس باید به جواب درست برسند.

الف) ابتدا این سوال برای دانش‌آموزان طرح شود: ۳ ضرب‌در چه عددی می‌شود ۲۱؟ و سپس نتیجه بگیرید که $\sqrt{\square}$ باید ۷ باشد و در نتیجه داخل مربع عدد ۴۹ را بنویسید.

۳. الف) ۱ ب) ۴ ج) ۰/۰۱

۴.

۵. پس از حل این تمرین، این سؤال را بپرسید:

؟ ارتباط این تمرین با تمرین ۴ در چیست؟

☐ شکل این تمرین، گسترده‌ی مکعب تمرین ۴ است.

تلاش کنید تا دانش‌آموزان بتوانند در ذهن خود تجسم کنند که چگونه با بازکردن یک مکعب، می‌توانند به شکل این تمرین برسند.

برای دیدن تصویر متحرک این گسترده، دانش‌آموزان را به «گسترده یک مکعب» در وب‌گاه ارجاع دهید.

۶.

د) راه اول: $\sqrt{۳۵/۵} = \frac{\sqrt{۳۵۵۰}}{۱۰} \cong \frac{۵۹/۵۸}{۱۰} = ۵/۹۵۸$

راه دوم: $\sqrt{۳۵/۵} \cong ۶ - ۰/۰۴۱ = ۵/۹۵۹$

$$۳۶ - ۳۵/۵ = ۰/۵$$

$$\frac{۰/۵}{۱۲} = ۰/۰۴۱$$

ه) $\sqrt{۷۴۰} \cong ۲۷/۲۰۳$

و) $\sqrt{۰/۰۷۴} = \sqrt{\frac{۷۴۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{\sqrt{۷۴۰}}{۱۰۰} \cong \frac{۲۷/۲۰۳}{۱۰۰} = ۰/۲۷۲۰۳$

۷. الف) ۱/۷۵

ب) برای حل این تمرین باید از نکته اول «صفحه‌ی ۲۸» استفاده کرد.

$$\sqrt{۳} = \sqrt{\frac{۳۰۰}{۱۰۰}} = \dots$$

۸. برای حل این تمرین باید از نکته سوم «صفحه‌ی ۳۵» استفاده کرد.

الف) $\sqrt{۶} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۱۸} = \dots$

ب) $۳\sqrt{۲} = ۳ \times \sqrt{۲} = \sqrt{۹} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۱۸} = \dots$

ج) $= \sqrt{۴ \times ۵ \times ۹۹} = \sqrt{۱۹۸۰} = \dots$

د) $= \sqrt{۸۸ \times ۸ \times ۸} = \sqrt{۵۶۳۲} = \dots$

ه) $= \sqrt{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷} = \sqrt{۵۰۴۰} = \dots$

۹. $\sqrt{۱۵}$

۱۰. ۵۵ عدد طبیعی

۱۱.

۱۲. گزینه ب. چون حاصل جذر یک عدد ۳ رقمی، حتماً یک عدد ۲ رقمی است.