

فصل ششم

نسبت‌های مثلثاتی

## نسبت‌های مثلثاتی

۱. به هر تساوی نسبت‌های مثلثاتی که برای بازه‌ای از زاویه‌ها<sup>۱</sup> درست باشد، «اتحاد مثلثاتی» (برای آن زاویه‌ها) می‌گویند. برای مثال دو تساوی زیر اتحاد مثلثاتی پرکاربردی هستند.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \theta \neq 0^\circ$$

(الف) اتحادهای مثلثاتی پرکاربرد زیر را ثابت کنید.

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1, \theta \neq 0^\circ, 90^\circ$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \theta \neq 90^\circ$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta}, \theta \neq 0^\circ$$

(ب) در مجموع، این پنج اتحاد مثلثاتی رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی را نشان می‌دهند. این رابطه‌ها را به خاطر بسپارید.

۲. اگر  $\alpha$  یک زاویه‌ی تند باشد، در هر مورد سایر نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  را بیابید.

$$\sin \alpha = \frac{1}{5} \quad (\text{الف})$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5} \quad (\text{ب})$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{5} \quad (\text{ج})$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5} \quad (\text{د})$$

---

۱. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد باشند، به مجموعه‌ی  $\{x \mid a^\circ < x < b^\circ\}$  بازه‌ای از زاویه‌ها می‌گویند.

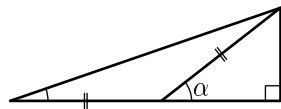
۳. الف) اگر  $\cot x = \frac{1}{3}$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{2} \sin x}{3 \sin x - 3 \cos x}$$

ب) اگر  $x$  زاویه ای تند باشد و  $\tan x = \frac{4}{3}$ ، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sin x + \cos x - \tan x}{\frac{1}{\cos x} + \cos x - \cot x}$$

۴. الف) با کمک شکل زیر، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

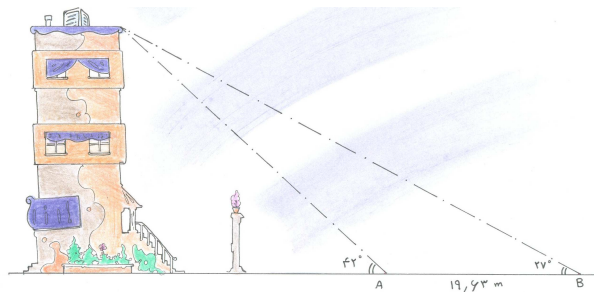
ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $۱۵^\circ$  را بیابید.

۵. می‌دانیم که  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  در مثلث  $ABC$  تند هستند؛ همچنین می‌دانیم که  $\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  و

$\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . با کمک یک ماشین حساب مهندسی، مقدار تقریبی  $\hat{A}$  را بیابید.

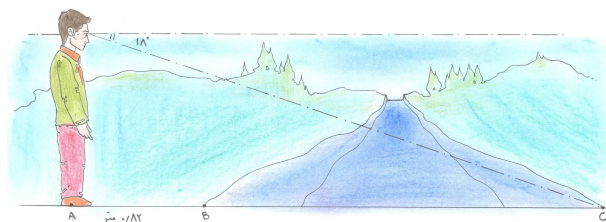
## مثلثات برای فاصله‌یابی<sup>۲</sup>

۱. می‌خواهیم ارتفاع آپارتمانی جنوبی<sup>۳</sup> را اندازه بگیریم که به علت رعایت حریم خصوصی، اجازه‌ی ورود به حیاط آن را نداریم! مطابق شکل،  $A$  و  $B$  دو نقطه روی سطح زمین هستند. از دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  که در فاصله‌ی  $۱۹/۶۳$  متری هم هستند به بام آپارتمان نگاه می‌کنیم و دو زاویه‌ی  $۴۲^\circ$  و  $۲۷^\circ$  به دست می‌آید.



ارتفاع آپارتمان را بیابید.

۲. می‌خواهیم عرض یک کانال آب عمیق را بیابیم که به علت خطرناک بودن اجازه‌ی ورود به آن را نداریم! مطابق شکل، از فاصله‌ی  $۰/۸۲$  متری این سوی کانال به حاشیه‌ی آن سوی کانال نگاه می‌کنیم و زاویه‌ی  $۱۸^\circ$  به دست می‌آید. اگر خط‌گذرنده بر  $A$ ،  $B$  و  $C$  بر امتداد کانال عمود باشد و همچنین فاصله‌ی بین چشم‌ناظر تا سطح زمین  $۱/۶۵$  متر باشد، عرض کانال آب را بیابید.



۲. در تمرین‌های داده شده از وسیله‌ی توصیف شده در صفحه‌ی کتاب درسی استفاده شده است، در حل این تمرین‌ها می‌توانید از ماشین حساب مهندسی کمک بگیرید.

۳. عموم خانه‌ها بر دو نوع هستند: شمالی و جنوبی. حیاط خانه‌های جنوبی بین فضای خانه و کوچه قرار دارد ولی در خانه‌های شمالی، فضای خانه بین حیاط و کوچه قرار گرفته است.

۳. از دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  که به فاصله‌ی  $۱۱/۶$  متری همدیگر، در دو طرف یک درخت هستند، به نوک آن درخت نگاه می‌کنیم و زاویه‌های  $۳۶^\circ$  و  $۴۲^\circ$  به دست می‌آید. اگر  $A$ ،  $B$  و پای درخت هم‌خط باشند، ارتفاع درخت را بیابید.

۴. مطابق شکل زیر، در نقطه‌ی  $A$  ایستاده‌ایم و می‌خواهیم عرض یک دریاچه را در حد فاصل دو نقطه‌ی  $B$  و  $C$  اندازه بگیریم. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  از نقاط  $B$  و  $C$  به ترتیب  $۳۵$  متر و  $۶۸$  متر باشد و همچنین زاویه‌ی  $\widehat{BAC}$ ،  $۴۳^\circ$  شود، عرض دریاچه چقدر خواهد بود؟

۵. مطابق نقشه‌ی زیر، در ماشینی در جاده‌ای یک طرفه حرکت می‌کنیم. دوست داریم بدانیم که فاصله‌ی مان از نقطه‌ی  $A$  تا چشمه‌ای که در چند ده‌متری جاده در نقطه‌ی  $B$  دیده می‌شود چقدر است. باران شدیدی می‌بارد و نمی‌خواهیم از ماشین پیاده شویم. چه روشی برای پیدا کردن فاصله پیشنهاد می‌کنید.



## اتحادهای مثلثاتی

۱. درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

- الف)  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$   $\alpha \neq 0^\circ, 90^\circ$
- ب)  $\tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \beta} = \tan^2 \beta + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$   $\alpha, \beta \neq 90^\circ$
- ج)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- د)  $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha$
- ه)  $(\tan \alpha - 1)(\cot \alpha + 1) = \tan \alpha - \cot \alpha$   $\alpha \neq 0^\circ, 90^\circ$
- و)  $\cos^2 \alpha (2 + \tan^2 \alpha) = 2 - \sin^2 \alpha$   $\alpha \neq 90^\circ$
- ز)  $\sin \alpha \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha$   $\alpha \neq 90^\circ$

۲. درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

- الف)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}$   $x \neq 90^\circ$
- ب)  $1 - \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$   $x \neq 0^\circ$
- ج)  $\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} - \frac{1}{1 + \tan^2 x}$   $x, y \neq 90^\circ$
- د)  $\frac{1}{\cot^2 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$   $x \neq 90^\circ$

۳. ثابت کنید که حاصل عبارت زیر همواره منفی خواهد شد.

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

۴. اعداد  $a, b, c$  و  $c$  را طوری بیابید که ادعای زیر همیشه درست باشد.

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a \sin x + b \cos x + c \quad , x \neq 0^\circ, 90^\circ$$