



سازمان ملی پژوهش استعدادهای ذهن

ریاضی طلایه‌داران

سال دوم راهنمایی

فصل دوم

حساب

فهرست مطالب

۱	توان
۲	تمرین
۳	تعیین علامت عبارت توان دار
۴	تمرین
۶	دستگاه‌های شمار
۶	تهران ۱۳۳۱
۲۴	مبناهای عددی
۲۷	تمرین
۳۰	جمع و تقریق و ضرب مبناها
۳۳	تمرین

٣٨	نیم
٣٩	تمرین
٤٠	ضرب مصر باستان
٤١	ضرب به روش تضعیف و تنصیف
٤٢	جذر
٤٢	طرح یک پرسش
٤٣	تمرین

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{\blacksquare} \times \textcolor{blue}{\blacksquare} &= \textcolor{blue}{(+)} = \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ \frac{\textcolor{blue}{\blacksquare}}{\textcolor{blue}{\blacksquare}} &= \textcolor{blue}{(-)} = \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ (\textcolor{red}{\blacksquare})^{\textcolor{blue}{\blacksquare}} &= \textcolor{blue}{(\textcolor{red}{\blacksquare} \times \textcolor{blue}{\blacksquare})} = \textcolor{blue}{\blacksquare} \\ (\textcolor{red}{\blacksquare} \times \textcolor{blue}{\blacksquare})^{\textcolor{blue}{\blacksquare}} &= \textcolor{blue}{(\textcolor{red}{\blacksquare} \times \textcolor{blue}{\blacksquare})} \\ \left(\textcolor{blue}{\blacksquare}\right)^{\textcolor{blue}{\blacksquare}} &= \frac{\textcolor{blue}{\blacksquare}}{\textcolor{blue}{\blacksquare}} \end{aligned}$$

توان

توان

نکته اول: می خواهیم حاصل عبارت $(-3)^3$ ، $(-3)^4$ ، $(-3)^5$ و $(-3)^6$ را به دست آوریم.

$$(-3)^3 = \underbrace{(-3) \times (-3)}_{+9} \times (-3) = (+9) \times (-3) = -27$$

$$\begin{aligned} (-3)^4 &= \underbrace{(-3) \times (-3)}_{(+9)} \times (-3) \times (-3) = \underbrace{(+9) \times (-3)}_{(-27)} \times (-3) \\ &= (-27) \times (-3) = +81 \end{aligned}$$

$$(-3)^5 = (-3)^4 \times (-3) = (+81) \times (-3) = -243$$

$$(-3)^6 = (-3)^5 \times (-3) = (-243) \times (-3) = +729$$

اگر پایه‌ی منفی به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی می‌شود.

اگر پایه‌ی منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت می‌شود.

نکته دوم: تفاوت -3^2 و $(-3)^2$ چیست؟

-3^2 را می خوانیم: منفی سه، به توان دو

-3^2 را می خوانیم: منفی سه به توان دو

در واقع داریم:

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$$

$$-3^2 = (-1) \times 3^2 = (-1) \times 9 = -9$$

مثال: $-(-4)^2$ را محاسبه می کنیم:

$$-(-4)^2 = (-1) \times (-4)^2 = (-1) \times (-4) \times (-4) = (-1) \times (+16) = -16$$



توان

تمرین

$$\begin{aligned} \textcolor{blue}{\blacksquare} &= (\textcolor{red}{+}\textcolor{blue}{\blacksquare}) = \textcolor{blue}{\blacksquare} \times \textcolor{red}{\blacksquare} \\ \textcolor{blue}{\blacksquare} &= (\textcolor{red}{-}\textcolor{blue}{\blacksquare}) = \frac{\textcolor{blue}{\blacksquare}}{\textcolor{red}{\blacksquare}} \\ \textcolor{blue}{\blacksquare} &= (\textcolor{blue}{\blacksquare} \times \textcolor{red}{\blacksquare}) = \textcolor{blue}{\blacksquare}(\textcolor{red}{\blacksquare}) \\ (\textcolor{blue}{\blacksquare} \times \textcolor{red}{\blacksquare}) &= \textcolor{blue}{\blacksquare}(\textcolor{red}{\blacksquare}) \\ \frac{\textcolor{blue}{\blacksquare}}{\textcolor{red}{\blacksquare}} &= \textcolor{blue}{\blacksquare} \left(\frac{\textcolor{red}{\blacksquare}}{\textcolor{blue}{\blacksquare}} \right) \end{aligned}$$

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

۱) $(-8)^2 =$

۲) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

۳) $-(-6)^2 =$

۴) $-\left(\frac{-2}{3}\right)^2 =$

۵) $-14^2 =$

۶) $-\left(-\frac{1}{5}\right)^3 =$

۷) $-4^3 =$

۸) $-\frac{(-2)^2}{-7^2} =$

۹) $(-4)^3 =$

۱۰) $-\frac{-\frac{1}{5}}{(-\frac{1}{3})^2} =$

۱۱) $-2^4 \times (-2)^4 =$

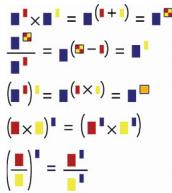
۱۲) $\frac{-(-2)^3}{-3^2} - \frac{(-4)^2}{(-3)^2} =$

۱۳) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 =$

۱۴) $-\frac{-6^2}{(-6)^2} \div \left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

۱۵) $(-1)^1 \times 1 + (-1)^2 \times 2 + (-1)^3 \times 3 + \dots + (-1)^{100} \times 100 =$





توان

تعیین علامت عبارت تواندار

ریاضی طلایه داران - سال دوم راهنمایی

«تعیین علامت» یک عبارت یعنی این‌که، مشخص کنیم حاصل یک عبارت مشبّت است یا منفی. برای مثال عبارت زیر را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+28)}{(+18) \times (-4) \times (+15)}$$

حاصل عبارت بالا عددی منفی است. زیرا در صورت کسر، دو عدد منفی و یک عدد مثبت در یکدیگر ضرب شده‌اند که حاصل عددی مثبت می‌شود. در مخرج کسر هم دو عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب شده‌اند که حاصل منفی می‌شود.

صورت کسر مثبت و مخرج آن منفی است. پس کل کسر منفی می‌شود.

در نتیجه در طرف راست، اعداد بدون علامت نوشته می‌شوند و تنها یک منفی پشت کسر قرار می‌گیرد.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)} = -\frac{4 \times 12 \times 38}{18 \times 7 \times 15}$$

بهتر است همیشه ابتدا کسر را تعیین علامت کنیم و سپس محاسبات را انجام دهیم.

مثال:

$$\frac{(-3)^6 \times (-6)^3}{(+16)^3 \times (-16)^4} = -\frac{3^6 \times 6^3}{16^3 \times 16^4}$$

نکته بسیار مهم: فقط زمانی می‌توانیم این گونه تعیین علامت کنیم که فقط در عبارت ضرب یا تقسیم داشته باشیم.

$$\begin{aligned} \textcolor{blue}{\square} &= (\textcolor{red}{+}\textcolor{blue}{\square}) = \textcolor{yellow}{\square} \times \textcolor{red}{\square} \\ \textcolor{blue}{\square} &= (\textcolor{red}{-}\textcolor{blue}{\square}) = \frac{\textcolor{yellow}{\square}}{\textcolor{red}{\square}} \\ \textcolor{blue}{\square} &= (\textcolor{yellow}{\times}\textcolor{blue}{\square}) = \textcolor{yellow}{\square}(\textcolor{red}{\square}) \\ (\textcolor{blue}{\square} \times \textcolor{red}{\square}) &= (\textcolor{yellow}{\square} \times \textcolor{red}{\square}) \\ \frac{\textcolor{blue}{\square}}{\textcolor{yellow}{\square}} &= \textcolor{blue}{\square} \left(\frac{\textcolor{red}{\square}}{\textcolor{yellow}{\square}} \right) \end{aligned}$$

توان

تمرین

۱. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

(الف) $\frac{(+18)^{12} \times (-8)^2}{(-7)^3 \times (+17)^4}$

(ب) $\frac{(-2)^3 \times (-3)^2}{(-4)^5 \times (-5)^6}$

(ج) $-(-2)^5 \times (-8)^2 \times (+6)^3 \div (-4)^3$

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۱) $6^3 \times (-6)^5 \times \left(\frac{-12}{2}\right)^2$

۲) $\left(\frac{39}{13}\right)^5 \times \left(\frac{57}{19}\right)^2$

۳) $\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{8}{20}\right)^{18} \times (0,4)^{14}$

۴) $\left(\frac{-6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 \times \left(\frac{6}{-7}\right)^7$

۵) $(-12)^6 \div (-12)^4$

۶) $(0,6)^7 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \times 6^7$

۷) $\frac{(0,1)^4}{(-4)^4 \div 4^4}$

۸) $(0,7)^6 \times \left(-\frac{5}{4}\right)^9 \times \left(\frac{3}{15}\right)^6 \div \left(\frac{14}{8}\right)^6$

۹) $2^5 \times 3^5 \times 23^5$

۱۰) $(-9)^3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{-1}{9}\right)^3$

۱۱) $\frac{(-8)^8}{-8}$

۱۲) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

۱۳) $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{73}}{\left(\frac{3}{7}\right)^{37}}$

۱۴) $\frac{(-8)^6}{4^6}$

۱۵) $(2,8)^7 \div (0,7)^7 \div 2^7$

۱۶) $\frac{16^{20}}{-4^{20}}$

۱۷) $6^8 \div 5^2 \div 5^4 \div 6^2$

۱۸) $\frac{38^2 \times 26^5 \times 11^7}{13^5 \times 44^7 \times 19^2}$

۱۹) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{12}\right)^5$

۲۰) $(-7)^4 \times (6)^4 \times (-7)^5 \times (-6)^5$

۲۱) $(-7)^6 \times 7^5 \times (-20)^{11}$

۲۲) $(-12)^6 \times 4^3 \times (-3)^3 \times 10^9$

۲۳) $\frac{18^6 \times 18^9}{315 \times 6^{15}}$

۲۴) $\frac{8^6 \times 8^3 \div 2^9}{\left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

۲۵) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3^3$

۲۶) $\frac{2^2 \times 48^7 \times 6^3 \times 3^2 \times 8^5}{16^{12}}$

۲۷) $\frac{(1,4)^2 \times (0,2)^3 \times (7)^3}{(2,8)^5}$

۲۸) $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$



$$\begin{aligned}
 \textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{red}{x}}} \times \textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{yellow}{y}}} &= \textcolor{blue}{\boxed{(x+y)}} = \textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{yellow}{z}}} \\
 \frac{\textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{red}{x}}}}{\textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{yellow}{y}}}} &= \textcolor{blue}{\boxed{(x-y)}} = \textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{yellow}{z}}} \\
 (\textcolor{blue}{\boxed{x}})^{\textcolor{blue}{\boxed{y}}} &= \textcolor{blue}{\boxed{(x^y)}} = \textcolor{blue}{\boxed{\textcolor{yellow}{z}}} \\
 (\textcolor{blue}{\boxed{x}} \times \textcolor{blue}{\boxed{y}})^{\textcolor{blue}{\boxed{z}}} &= \textcolor{blue}{\boxed{(x^z \times y^z)}}
 \end{aligned}$$

توان

۳. الف) اگر طول ضلع مربعی 2^0 درصد افزایش یابد، مساحت آن چند درصد افزایش می‌یابد؟

ب) اگر طول ضلع مکعبی 2^0 درصد افزایش یابد، حدس می‌زنید حجمش چند درصد افزایش می‌یابد؟

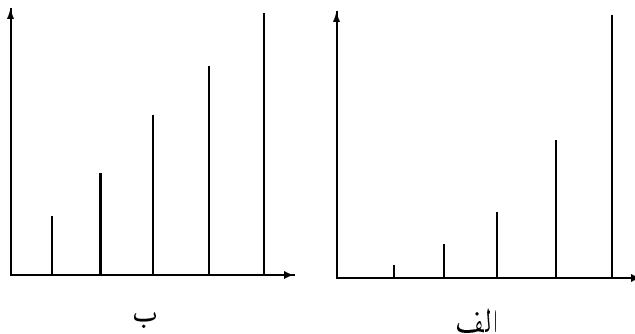
۴. در داخل مربع علامت \times یا \div قرار دهید، تا تساوی برقرار شود.

۱) $18^3 \square 3^2 = 18^5$

۲) $18^6 \square 2^6 \square 3^6 = 27^6$

۳) $18^5 \square 3^2 \square 9^3 = 9^8$

۵. اعداد $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ و 2^5 در کدام نمودار درست نشان داده شده‌اند؟





عمو حیدر، پیرمردی است که از قدیم در محله‌ی گلوبندک^۱ نفت‌فروشی دارد. او صبح‌ها در آنجا نفت می‌فروشد و بعد از ظهرها گاری‌دستی‌اش را برمی‌دارد و به کوچه‌پس کوچه‌های محله‌ی می‌رود و نفت می‌فروشد. عمو حیدر از قدیم برای فروش نفت، از دو پیمانه‌ی ۱ لیتری و ۱۰ لیتری استفاده می‌کرده است.

این اواخر، عمو حیدر به خاطر بالا رفتن سن و سالش دچار آزمایم^۲ شده است و به همین خاطر بعد از ظهرها، برادرزاده‌اش فرید، را که دانش‌آموز خوش فکر و خلاقی است، همراه خودش به فروش نفت می‌برد تا در فروش نفت کمکش کند.

عمو حیدر و فرید با گاری نفت وارد کوچه‌های محله می‌شوند و مردم پس از شنیدن صدای «آهای... نفیته...» پیت‌های^۳ نفت خود را می‌آورند و برای مصرف یک هفته خود نفت می‌خرند. چند وقت پیش، موقع فروش نفت، یک اتفاقی افتاد:

خاله نسرین که یک پیرزن تنها بود، مصرف هفتگی کمی داشت و هر دفعه فقط ۳ لیتر نفت می‌خرید. این بار هم فقط ۳ لیتر نفت سفارش داد. عمو حیدر هم با پیمانه‌ی ۱ لیتری، ۳ بار در پیت خاله نسرین

۱) نام محله‌ای در تهران قدیم

۲) نوعی بیماری فراموشی که در افراد پیر ظاهر می‌شود

۳) نوعی ظرف فلزی





دستگاه‌های شمار

نفت ریخت.

$$3 = 1 + 1 + 1 = 3 \times 1$$

در همسایگی خاله نسرين، مغازه نانوایی حاج اسماعيل^۱ بود. حاج اسماعيل، چون مصرف نفت بالايی داشت، مجبور بود به صورت روزانه از عمو حیدر نفت بخرد. او از عمو، ۲۸ لیتر نفت خواست. عمو حیدر هم ابتدا، دوبار با پیمانه‌ی ۱۰ لیتری در پیت حاج اسماعيل نفت ریخت؛



سپس پیمانه‌ی ۱ لیتری را برداشت تا با آن هشت دفعه داخل پیت نفت بزد. فرید هم عمل شمارش را انجام می‌داد. عمو حیدر هشت بار با پیمانه‌ی ۱ لیتری داخل پیت حاج اسماعيل نفت ریخت. ولی فکر می‌کرد که شش بار داخل پیت نفت ریخته، فراموشی باعث این مشکل شده بود؛ که فرید این اطمینان را به عمو داد که هشت بار داخل پیت نفت ریخته است.

مشکل فراموشی عمو حیدر، زمانی حاد می‌شد که مجبور بود از یک پیمانه چندین بار استفاده کند. عمو حیدر، برای پر کردن ظرف حاج اسماعيل، دوبار از پیمانه‌ی ۱۰ لیتری استفاده کرد و بعد از آن هشت بار از پیمانه‌ی ۱ لیتری. یعنی:

$$28 = 2 \times 10 + 8 \times 1 = 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

^{۱)} حاج اسماعيل



دستگاه‌های شمار



۱. عمو حیدر، برای فروش ۱۷ لیتر، ۲۲ لیتر و ۳۳ لیتر از چه پیمانه‌هایی باید استفاده کند؟

اون شب وقتی فرید رفت خانه، بیماری فراموشی عمو حیدر، تمام ذهنش را به خود مشغول کرده بود. چون فراموشی باعث می‌شد که عمو حیدر در شمارش چار مشکل بشود. فرید دنبال راهی می‌گشت تا عمو حیدر از یک پیمانه، بیش از یک بار استفاده نکند.

اولش با خود فکر کرد:

- عمو حیدر، از هر ظرفیتی یه^۱ پیمانه داشته باشه. یعنی هم پیمانه‌ی ۱ لیتری، هم ۲ لیتری، هم ۳ لیتری و همین جور تا آخر...

بعد با خودش گفت:

- این طوری اگه قرار باشه، مثلاً عمو حیدر به یه نفر ۴۷ لیتر نفت بفروشه، باید پیمانه‌ی ۴۷ لیتری داشته باشه. اگه یکی دیگه بیاد و ۴۸ لیتر نفت بخواهد، باید پیمانه‌ی ۴۸ لیتری هم داشته باشه. اونوقت باید عمو حیدر دنبال خودش، یه خاور پیمانه راه بیاندازه.

بعد با خودش این طور فکر کرد:

- باید پیمانه‌هایی تهیه کنیم به طوری که:

اولاً: تعدادشان، تا حد ممکن کم باشه.

ثانیاً: از هر پیمانه فقط یک بار استفاده بشه.

ثالثاً: حداقل تا ۵۰ لیتر رو بشه به راحتی فروخت.

فرید یک هفته روی این موضوع فکر کرد. تا این‌که یک شب موقع خواب، به نتیجه جالبی رسید:

- در هر شرایطی پیمانه‌ی ۱ لیتری رو باید داشته باشیم. چون ممکنه یه نفر، فقط بخواه ۱ لیتر نفت بخره. با همین استدلال به این نتیجه رسید که به پیمانه‌ی ۲ لیتری هم احتیاج داریم. چون ممکنه یه نفر دیگه، بخواه ۲ لیتر نفت بخره.

(۱) یک





دستگاه‌های شمار

سپس در ذهن خود، ۱ لیتر و ۲ لیتر را با هم جمع زد و گفت:

- به پیمانه‌ی ۳ لیتری احتیاجی نداریم. چون اگه کسی ۳ لیتر نفت بخواهد، با استفاده از پیمانه‌های ۱ لیتری و ۲ لیتری به او نفت می‌دهیم.

- پس سومین پیمانه‌ای که باید داشته باشیم، یه پیمانه‌ی ۴ لیتریه . چون با پیمانه‌های ۱ لیتری و ۲ لیتری نمی‌توانیم به کسی ۴ لیتر نفت بدیم. مگه این‌که از پیمانه‌ی تکراری استفاده کنیم که این کار برای عمو حیدر مشکله.

۲. با پیمانه‌های ۱ لیتری، ۲ لیتری و ۴ لیتری، عمو حیدر تا چه مقدار می‌تواند به مردم نفت بفروشد؟

۳. پیمانه‌ی بعدی که فرید باید برای عمو حیدر تهییه کند، چند لیتری است؟

۴. (با توجه به روش ساخت پیمانه‌های فرید) برای این‌که عمو حیدر بتواند تا ۷۰ لیتر را به راحتی

بفروشد، به چه پیمانه‌هایی احتیاج دارد؟

فردا صبح، فرید رفت راسته‌ی مسکرها^۱ و پیمانه‌های جدیدی خریداری کرد و رفت پیش عمو حیدر.

فرید: سلام عمو.

عمو حیدر: سلام، آق^۲ فرید گل ..

فرید: برای فروش نفت، شش تا پیمانه جدید خریدم که کلی کار رو راحت می‌کنن ..

عمو حیدر: راست می‌گی؟ این پیمانه‌ها چند لیتری‌اند؟

فرید: ۱ لیتری، ۲ لیتری، ۴ لیتری، ۸ لیتری، ۱۶ لیتری و ۳۲ لیتری.

عمو حیدر: جل‌الخالق^۳! با این‌آخه چه جوری نفت بفروشیم؟ این‌که خیلی بدتر شد.

فرید: نه عمو، با این پیمانه‌ها می‌توانی تا ۶۳ لیتر نفت بفروشی؛ موقع فروش از هر کدوم هم میتوانی فقط یک‌بار استفاده کنی.

۱) بخشی از بازار که در آنجا، ظروف مسی می‌سازند و می‌فروشنند

۲) آقا

۳) عجب



عمو حیدر: آخه من از کجا بفهمم که از کدام پیمانه استفاده کنم؟

فرید: الاووم ... اصلاً امروز خودم سفارش همه‌ی مشتری‌ها رو می‌گیرم؛ بعدش می‌گم که شما از کدام پیمانه‌ها استفاده کنی.

عمو حیدر: بگو ببینم مثلًا ۲۳ لیتر رو چطوری می‌تونی بفروشی؟

فرید: یه ۱۶ لیتری، یه ۴ لیتری، یه ۲ لیتری و یکی هم ۱ لیتری.

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1$$

عمو حیدر: عجَب ...

۵. برای فروش نفت به خاله نسرین و حاج اسماعیل، عمو حیدر از چه پیمانه‌هایی باید استفاده کند؟

۶. عمو حیدر ۱۴ لیتر، ۲۴ لیتر، ۳۴ لیتر، ۴۴ لیتر و ۵۴ لیتر نفت را چگونه باید بفروشد؟

بعد از ظهر، عمو حیدر پیمانه‌های جدید را داخل گاری گذاشت و مخزن بزرگ نفت را هم پر کرد و با فرید رفت برای فروش نفت.

اولین مشتری حاج مرتضی بود که ۱۷ لیتر نفت می‌خواست. فرید هم سریع محاسبات را انجام داد و به عمو حیدر گفت: «یه ۱۶ لیتری و یکی هم ۱ لیتری». عمو حیدر پیمانه‌های ۱۶ لیتری و ۱ لیتری را برداشت و با آن‌ها برای حاج مرتضی ۱۷ لیتر نفت ریخت.

بعد از حاج مرتضی، ننه عطیه آمد و ۱۱ لیتر نفت خواست. فرید هم سریع گفت: «یه ۸ لیتری، یه ۲ لیتری، یکی هم ۱ لیتری».

عمو حیدر: من این طوری نمی‌تونم!

فرید: چرا نمی‌تونی؟

عمو حیدر: نمی‌تونم دیگه ... گیج می‌شم. من پیمانه‌ها رو به ترتیب از بزرگ به کوچیک می‌چینم. تو بگو از کدام پیمانه استفاده کنم و از کدام استفاده نکنم.

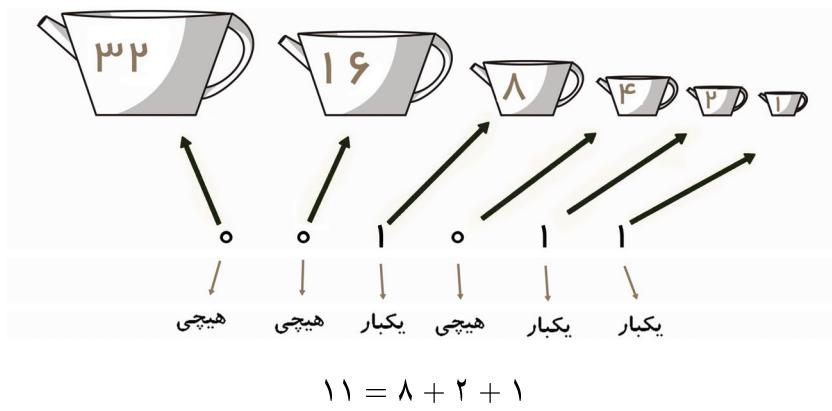




دستگاههای شمار

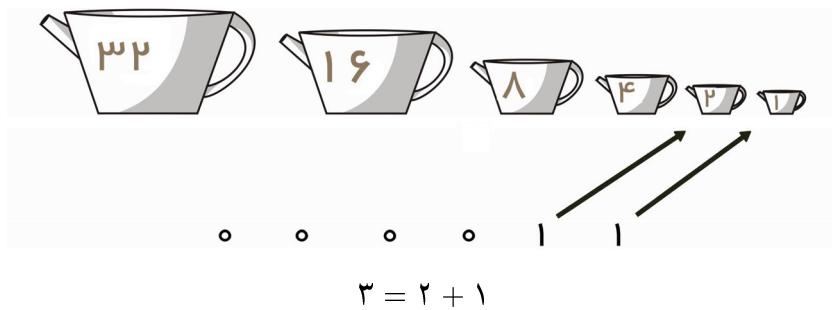
فرید: باشه.. الان ۱۱ لیتر رو باید این طوری بگم:

هیچی، هیچی، یکبار، هیچی، یکبار، یکبار



نه عطیه رفت و خاله نسرین آمد. فرید هم که می‌دانست خاله نسرین همیشه ۳ لیتر نفت می‌خواهد،

سریع به عمو حیدر گفت: هیچی، هیچی، هیچی، یکبار، یکبار



خاله نسرین هم نفتش را گرفت و رفت ...

۷. هر یک از موارد زیر که به زبان فرید بیان شده، نشان دهنده‌ی چند لیتر نفت است؟

(الف) یکبار، هیچی، هیچی، یکبار، هیچی

(ب) یکبار، یکبار، هیچی، یکبار، هیچی، یکبار

(ج) هیچی، هیچی، هیچی، یکبار، یکبار، هیچی



د) هیچی، یک بار، هیچی، یک بار، هیچی، یک بار

۱۰۱۰۱۰ (ه)

۱۱۱۰۱۱ (و)

۰۰۱۱۱۰ (ز)

۱۰۰۰۰۱ (ح)

۸. فرید برای فروش ۴۳ لیتر، ۵ لیتر، ۵ لیتر و ۱۵ لیتر نفت، به عمومیش چه باید بگوید؟
عمو حیدر، از دور اکبر بستنی فروش را دید که با چرخ دستی اش، مشغول فروختن بستنی بود. چند
قران^۱ به فرید پول داد و به او گفت: «بدو دو تا بستنی نونی^۲ بخر و بیا. امروز خیلی خسته شدیم».



از شانس عمو حیدر، همان موقعی که فرید رفت برای خریدن بستنی، یک مشتری آمد و ۱۱ لیتر نفت
خواست. عمو حیدر یادش افتاد که نیم ساعت قبل، نه عطیه آمده بود و ۱۱ لیتر نفت می‌خواست. ولی
هر چقدر فکر کرد، یادش نیامد که آن موقع فرید چه گفته بود.

خلاصه عمو حیدر گیج شد و...

فرید دو تا بستنی نونی خرید و دوان آمد پیش عمو حیدر..

(۱) ریال

(۲) بستنی زعفرانی که با نان مخصوصی خورده می‌شود





دستگاه‌های شمار

عمو حیدر: یه مشتری او مدد و ۱۱ لیتر نفت می‌خواست. منم بهش فروختم. ولی یه جوری شد که مجبور شدم از یه پیمانه، سه بار استفاده کنم.

فرید: چطوری؟!

عمو حیدر: اینجوری ریختم؛ یه ۴ لیتری، سه تا ۲ لیتری، یدونه هم ۱ لیتری.

$$11 = 1 \times 4 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 4 + 2 + 2 + 1$$

فرید: درستش این بود که یه ۸ لیتری، یه ۲ لیتری و یدونه هم ۱ لیتری می‌ریختی.
تا غروب کار ادامه داشت و فرید به اتفاقی که افتاده بود فکر می‌کرد تا این‌که خسته و کوفته به خانه رفت.
بعد از شام، فرید رفت پشت بام و تشک خواب خودش را پهن کرد و در رختخواب دراز کشید و آسمان پر از ستاره را تماشا می‌کرد. در حنکای^۱ هوای شب، ذهنش درگیر اتفاقات آن روز شد...

- جریان مشکل عمو چی بود..... اون مشکلی که از یه پیمانه، سه بار استفاده کرده بود...

- حب معلومه، عمو از پیمانه‌ها بد استفاده کرده بود...

- عمو محاسبات رو چه طوری انجام داده بوده که مجبور شده از یه پیمانه سه بار استفاده کنه...

- اصلاً بذار بیسم، بدترین حالت ممکن چیه...

- بدترین حالت اینه که یازده بار از پیمانه‌ی ۱ لیتری استفاده کنم...

- بذار روی کاغذ شکلش رو بکشم .. این طوری بهتره...

فرید بلند شد و رفت پایین داخل اتاقش. چراغ گردسوز را روشن کرد و از داخل گنجه^۲، دفترش را که از مدرسه مانده بود، برداشت. دو ماه از امتحانات خرداد گذشته بود و از آن موقع در گنجه باز نشده بود.

روی کاغذ، ۱۱ تا ستاره کشید و فرض کرد که هر ستاره یعنی ۱ لیتر:



(۱) خنکی

(۲) صندوقچه



دستگاه‌های شمار

با خودش گفت:

- بدترین حالت این بود که ۱۱ بار از پیمانه‌ی ۱ لیتری استفاده کنم. یعنی:



$$11 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{11 \text{ بار}}$$

- بهتر از این چیه؟ این‌که یه بار از پیمانه‌ی ۲ لیتری هم استفاده کنم. یعنی:



$$11 = \underbrace{2 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{9 \text{ بار}}$$

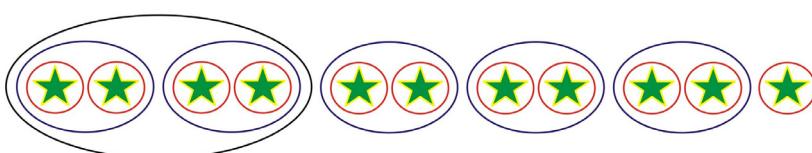
- بذار یه کاری بکنم. می‌خواه هر بار که از یه پیمانه استفاده می‌کنم، از اون پیمانه درست استفاده کنم. یعنی وقتی دارم از پیمانه‌ی ۲ لیتری استفاده می‌کنم، تا جایی که بتونم، از اون استفاده کنم.
یعنی:



$$11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$$

- دیگه از پیمانه‌ی ۲ لیتری نمیشه استفاده کرد.

- از این بهتر چیه؟ ... این‌که برم سراغ پیمانه‌ی ۴ لیتری ... یعنی به جای دو بار استفاده کردن از پیمانه‌ی ۲ لیتری، یک بار از پیمانه‌ی ۴ لیتری استفاده کنم. یعنی:



$$11 = 4 + 2 + 2 + 1$$

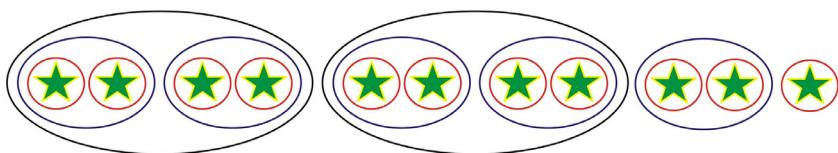




دستگاه‌های شمار

- این همون حالتیه که عمو حیدر به صورت اشتباه ۱۱ لیتر رو فروخته بود.

$$11 = 4 + \overbrace{2+2+2}^3 + 1$$



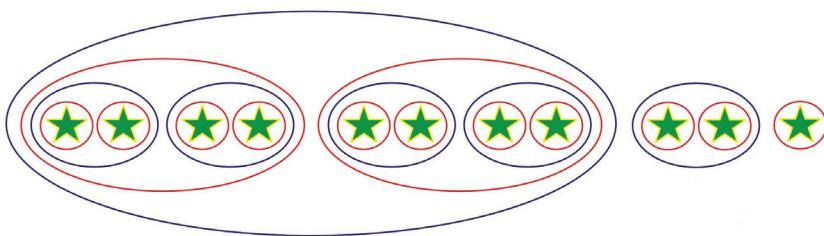
$$11 = 4 + 4 + 2 + 1$$

- حُب، از پیمانه‌ی ۴ لیتری هم دیگه نمی‌تونم استفاده کنم..

- ولی از این بهتر هم میشه از پیمانه‌ها استفاده کرد. اینکه از پیمانه‌ی ۸ لیتری هم استفاده کنم.

الآن ۲ بار از پیمانه‌ی ۴ لیتری استفاده کردم. حُب... به جاش می‌تونم یک بار از پیمانه‌ی ۸ لیتری

$$11 = \overbrace{4+4}^8 + 2 + 1$$



$$11 = 8 + 2 + 1$$

- از اینجا به بعد دیگه نمی‌تونم جلوتر برم. چون از پیمانه‌ی ۸ لیتری، دیگه نمی‌شه استفاده کرد.

پیمانه‌ی ۱۶ لیتری هم به درد نمی‌خوره .. حُب ... پس؛ از بدترین حالت، به بهترین حالت رسیدم.

همون حالتی که به نه عطیه نفت فروختیم.

- چی باعث شد که کار بهتر و بهتر بشه؟ ... اینکه رفته رفته از پیمانه‌های بزرگ‌تر استفاده کردم

.... حُب چه کاریه ... از همون اول از بزرگ‌ترین پیمانه استفاده کنم...



دستگاه‌های شمار



- بزرگ‌ترین پیمانه که برای برداشتن ۱۱ لیتر، میشه از اون استفاده کرد، ۸ لیتریه... پس اول یکبار باید از پیمانه ۸ لیتری استفاده کنم..



- وقتی ۸ لیتر برداشت، بعدش باید ۳ لیتر دیگه هم بردارم. بزرگ‌ترین پیمانه بعدی که باید برای برداشتن ۳ لیتر از اون استفاده بشه، پیمانه ۲ لیتریه.



- از ۳ لیتر، ۲ لیتر برداشت. حالا می‌مونه ۱ لیتر که با پیمانه ۱ لیتری، اون رو برمی‌دارم:



$$11 = 8 + 2 + 1$$

- این روش، سریع‌ترین روش ممکنه ... والسلام.

نتیجه: اگر از بزرگ‌ترین پیمانه ممکن شروع به برداشتن نفت بکنیم، همیشه به بهترین روش می‌رسیم.





دستگاههای شمار

مثال: در شکل‌های زیر ۲۵ لیتر را از هر دو روش، به بهترین حالت می‌نویسیم.

روش اول: از بدترین حالت، به بهترین حالت می‌رسیم:

$$25 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{25 \text{ بار}} = 25 \times 1$$

$$25 = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{12 \text{ بار}} + 1 = 12 \times 2 + 1 \times 1$$

$$25 = \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{6 \text{ بار}} + 1 = 6 \times 4 + 1 \times 1$$

$$25 = 8 + 8 + 8 + 1 = 3 \times 8 + 1 \times 1$$

$$25 = 16 + 8 + 1 = 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 1$$

روش دوم: هر بار، از بزرگ‌ترین پیمانه ممکن استفاده کنیم؛ یعنی:

ابتدا یک ۱۶ لیتری،



دستگاه‌های شمار

۱۸
۲۰

سپس یک ۸ لیتری،



و در نهایت یک ۱ لیتری.



$$25 = 16 + 8 + 1$$

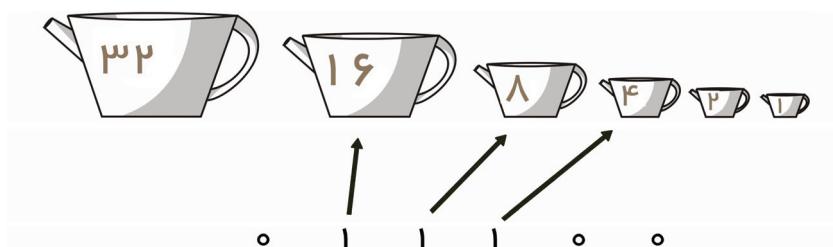
۹. ۱۶ لیتر و ۲۹ لیتر را با هر دو روش، به بهترین حالت بفروشید.

بعد از نتایج به دست آمده، فرید دوباره رفت پشت‌بام و خوابید.

فردا بعدازظهر، فرید دوباره با عمو حیدر رفت برای فروش نفت..

اولین مشتری حاج اسمال بود که مثل همیشه ۲۸ لیتر نفت می‌خواست.

فرید هم به عمو حیدر گفت: هیچی، یکبار، یکبار، هیچی، هیچی



$$28 = 16 + 8 + 4 = 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4$$

عمو حیدر هم پیمانه‌های ۱۶ لیتری و ۸ لیتری و ۴ لیتری را برداشت و درون پیت حاج اسمال نفت ریخت. چهره‌ی حاج اسمال نشان می‌داد که کاملاً متحیر شده است.

حاج اسمال: عمو حیدر، ای ول^۱ بابا، دست‌خوش .. با پیمانه‌های جدید کار می‌کنی .. دفعه‌های قبل

) اصطلاحی عامیانه



دستگاه‌های شمار

برای ریختن ۲۸ لیتر، ۱۰ بار پیمانه‌ها رو پر و خالی می‌کردی.. ولی الان با سه بار پر و خالی کردن پیمانه‌ها، ۲۸ لیتر نفت به من دادی.

عمو حیدر: خدا عمرش بده این آقا فرید رو.. فکر فرید بود این پیمانه‌های جدید..

حاج اسمال: فرید جان، فکرت خیلی خوبه‌ها. ولی شش تا پیمانه یه خورده زیاده.. راهی وجود نداره که تعداد پیمانه‌ها کمتر بشه؟ الان گاری‌تون با این شش تا پیمانه خیلی شلوغ شده وا.

فرید: چرا یک راه هست .. ولی برای عمو حیدر مشکله!

عمو حیدر: یعنی چی برا من مشکله؟ چیش سخنه؟

فرید: این‌که از هر پیمانه بیش از یک بار استفاده کنیم. مثلاً دوبار .. شما یادت میره که با هر پیمانه چند بار نفت ریختی.

حاج اسمال: حالا فکر نکنم با دو بار استفاده کردن از هر پیمانه مشکلی پیش بیاد. نه؟ عمو حیدر؟

عمو حیدر: آره فرید جان .. درسته پیر شدم. ولی می‌تونم از هر پیمانه دوبار استفاده کنم. فکر نکنم تو دوبار شمردن مشکلی داشته باشم.

فرید: خُب .. پس بباید پیمانه‌های جدیدی طراحی کنیم. به پیمانه‌ی ۱ لیتری که حتماً احتیاج داریم. چون ممکنه که یک نفر بخواهد یک لیتر نفت بخره. ولی این بار به ۲ لیتری احتیاج نداریم. چون می‌تونیم از پیمانه‌ی ۱ لیتری دوبار استفاده کنیم و ۲ لیتر نفت بفروشیم. پس پیمانه بعدی که باید تهیه کنیم، ۳ لیتری است.

عمو حیدر: فکر کنم، با همین دو تا پیمانه بتونیم تا ۸ لیتر رو به راحتی بفروشیم. چون از هر کدوم ۳ + ۳ + ۱ + ۱ = ۸ می‌توانیم دوبار استفاده کنیم..

فرید: درسته

عمو حیدر: پس سومین پیمانه‌ای که باید داشته باشیم، ۹ لیتری است.

حاج اسمال: فکر کنم داری درست می‌گی عمو حیدر .. نظر تو چیه فرید؟

فرید: کاملاً درسته؛ وقتی ۹ لیتری رو اضافه کنیم، می‌توانیم تا ۲۶ لیتر رو به راحتی بفروشیم.



دستگاه‌های شمار



چون از هر کدام می‌توینیم دوبار استفاده کنیم.. $۹ + ۹ + ۳ + ۳ + ۱ + ۱ = ۲۶$

عمو حیدر: صبر کن ببینم .. مثلاً برای ۲۴ لیتر، باید چی کار کنیم؟

فرید: دوبار از پیمانه‌ی ۹ لیتری استفاده می‌کنیم که روی هم می‌شه ۱۸ لیتر. می‌مونه ۶ لیتر که برای ریختن ۶ لیتر، دوبار از پیمانه‌ی ۳ لیتری استفاده می‌کنیم.

$$24 = 9 + 9 + 3 + 3 = 2 \times 9 + 2 \times 3$$

حاج اسمال: أحستت بر تو ... آفرین!

۱۰. با این سه پیمانه، از ۱ تا ۲۶ لیتر نفت را چگونه می‌توان فروخت؟

۱۱. چهارمین پیمانه‌ای که باید اضافه شود، چند لیتری است؟

۱۲. با این چهار پیمانه، حداقل تا چند لیتر می‌توان نفت فروخت؟

۱۳. با این چهار پیمانه، عمو حیدر چگونه می‌تواند به خاله نسرین، ننه عطیه، حاج مرتضی و حاج اسمال نفت بفروشد؟

عمو حیدر: فرید جان، این شش تا پیمانه‌ای که دیروز گرفتی رو دوباره بیز راسته‌ی مسکرها پس بده و به جاش، این چهار پیمانه‌ای که الان حرفش بود، بخر و بیار...

فردا صبح، فرید رفت راسته‌ی مسکرها و پیمانه‌های جدید را خریداری کرد و رفت پیش عمو حیدر. بعد از ظهر هم مثل روزهای قبل، با عمو حیدر رفتند برای فروش نفت.

عمو حیدر این بار نیز، پیمانه‌ها را به ترتیب کنار هم گذاشته بود و به فرید گفته بود که با توجه به سفارش مشتری‌ها،

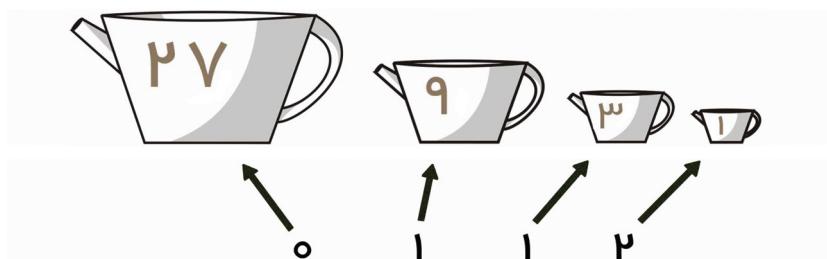




دستگاههای شمار

اولین مشتری که آمد، ۱۴ لیتر نفت خواست. فرید با خودش گفت: «اینجا هم مثل دیروز بهترین کار رو می‌کنم. اول از بزرگ‌ترین پیمانه ممکن استفاده می‌کنم» و خیلی سریع اعلام کرد:

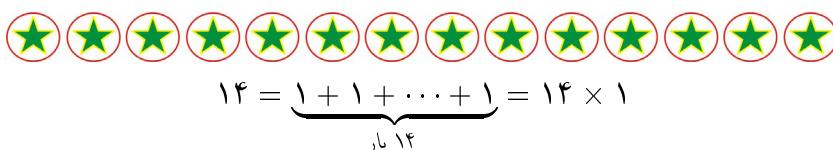
هیچی، یک



فرید با خودش فکر کرد:

- اگه قرار بود ۱۴ لیتر رو از بدترین حالت تا بهترین حالت بکشم چه طوری می‌شد؟

- بدترین حالت این بود که ۱۴ بار از پیمانه‌ی ۱ لیتری استفاده کنم.

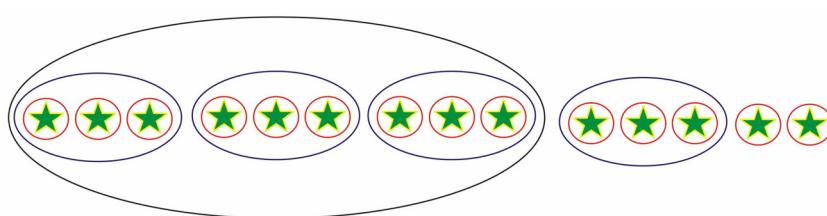


- بعدش ببینم، چند بار میشه از پیمانه‌ی ۳ لیتری استفاده کرد.



- حالا به جای این که چهار بار از پیمانه‌ی ۳ لیتری استفاده کنم، فقط یکبار از این استفاده کنم و

به جای سه بار دیگه، یک بار از پیمانه‌ی ۹ لیتری استفاده کنم. یعنی:



دستگاه‌های شمار

۱۴۰

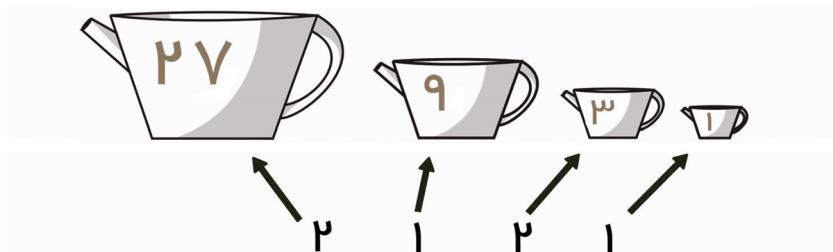
- و این همون بهترین حالت برای فروختن ۱۴ لیتره..

۱۴. با پیمانه‌های جدید، ۲۷ لیتر را از بدترین حالت، تا بهترین حالت بکشید.

مشتری بعدی، سید رضا، کارگر گرمابه^۱ بود که هر دفعه برای آنجا، ۷۰ لیتر نفت می‌خرید. محاسبه ۷۰ لیتر برای فرید یک خورده دشوار آمد. با خودش گفت:

- دوبار می‌تونم از پیمانه‌ی ۲۷ لیتری استفاده کنم که روی هم می‌شوند ۵۴ لیتر. می‌مونه ۱۶ لیتر. برای ۱۶ لیتر، یک بار از پیمانه‌ی ۹ لیتری استفاده می‌کنم که بعدش می‌مونه ۷ لیتر. برای ۷ لیتر هم دوبار از ۳ لیتری و یک بار از ۱ لیتری استفاده می‌کنم.

فرید به عموم حیدر گفت: دوبار، یک بار، دوبار، یک بار



$$۷۰ = ۲۷ + ۲۷ + ۹ + ۳ + ۳ + ۱ = ۲ \times ۲۷ + ۱ \times ۹ + ۲ \times ۳ + ۱ \times ۱$$

عموم حیدر رو کرد به فرید و گفت: «فکر کنم، حالا دیگه ما بهترین کمپانی^۲ فروش نفت رو داشته باشیم.»

۱۵. عموم حیدر با این چهار پیمانه جدید، ۱۱ لیتر، ۲۲ لیتر، ۳۳ لیتر، ۴۴ لیتر، ۵۵ لیتر، ۶۶ لیتر و ۷۷ لیتر نفت را چگونه می‌تواند بفروشد؟ این مقادیر را به زبان فرید بنویسید.

(۱) حمام عمومی
(۲) شرکت





دستگاه‌های شمار

۱۶. هر یک از موارد زیر که توسط فرید بیان شده، نشان دهنده چند لیتر نفت است؟

- (الف) یکبار، هیچی، دوبار، یکبار
 - (ب) دوبار، یکبار، هیچی، هیچی
 - (ج) هیچی، دوبار، یکبار، یکبار
 - (د) هیچی، یکبار، دوبار، دوبار
- ۱۱۲۲
- ۰۲۲۲
- ۱۰۰۲
- ۱۱۱۲

۱۷. پیمانه‌هایی طراحی کنید به‌طوری که از هر کدام بتوان تا سه‌بار استفاده کرد. اگر از این پیمانه‌هایی

که طراحی کرده‌اید، سه‌تای اول را داشته باشیم، حداکثر تا چند لیتر می‌توانیم نفت بفروشیم؟

۱۸. (الف) وقتی قرار بود پیمانه‌هایی طراحی کنیم که از هر کدام حداکثر یک بار استفاده کنیم، حجم

پیمانه‌هایی که ساخته شدند، به‌ترتیب چنین اعدادی شدند:

۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲

چه رابطه‌ای بین این اعداد می‌بینید؟ حدس می‌زنید، پنج عدد بعدی چه باشند؟

۱۹. (ب) وقتی قرار شد پیمانه‌هایی طراحی کنیم که از هر کدام حداکثر دوبار استفاده کنیم، حجم

پیمانه‌هایی که ساخته شدند، به‌ترتیب چنین اعدادی شدند:

۱, ۳, ۹, ۲۷

چه رابطه‌ای بین این اعداد می‌بینید؟ حدس می‌زنید، پنج عدد بعدی چه باشند؟

۲۰. (ج) اگر قرار باشد، پیمانه‌هایی طراحی کنیم که از هر کدام آنها بتوان حداکثر سه‌بار استفاده کرد،

آن پیمانه‌ها چند لیتری خواهند شد؟ پنج پیمانه اول را بگویید.

۲۱. (د) رابطه‌هایی که در قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» به‌دست آوردید، چرا درست هستند؟ چه

رازی در این اعداد نهفته است؟ آیا می‌توانید روند به‌دست آمده را اثبات کنید؟



مبناهای عددی

آن کاری که به عنوان عمل شمارش انجام می‌دهید، قراردادی بیش نیست! ریاضیدانان قرارداد کرده‌اند تا برای عمل شمارش از بسته‌های دهتایی استفاده کنیم.

به عنوان مثال اگر بخواهیم ۳۷۴ عدد مداد را بشماریم، به این شکل عمل می‌کنیم.

ابتدا ۳۷۴ مداد را در بسته‌های ۱۰ تایی قرار می‌دهیم. ۳۷ بسته‌ی دهتایی به وجود می‌آید و ۴ مداد به صورت تکی باقی می‌ماند. این ۴ مداد تعدادشان کمتر از ۱۰ است و در نتیجه تشکیل یک بسته ۱۰ تایی نمی‌دهند.

$$\begin{array}{r}
 374 \\
 - 370 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad \text{بسته‌های ۱۰ تایی} \rightarrow
 \begin{array}{c}
 | 10 \\
 37 \\
 \hline
 \end{array}$$

تکی →

حال ۳۷ بسته مداد داریم که یک جور هستند. یعنی همهی آن‌ها بسته‌های ۱۰ تایی هستند. چون قرارداد کرده‌ایم که هر ۱۰ تا چیزی که مثل هم هستند، در یک بسته‌ی جدید قرار می‌گیرند، پس می‌توانیم ۳۷ بسته مداد را باز بسته‌بندی کنیم. بنابراین هر ۱۰ تا این بسته‌ها را در یک بسته جدید قرار می‌دهیم. در نتیجه ۳ بسته‌ی جدید تشکیل می‌شوند که در هر کدام از این بسته‌ها، ۱۰ بسته‌ی ۱۰ تایی مداد قرار دارد. یعنی بسته مدادهای ۱۰۰ تایی ($10^2 = 100 = 10 \times 10$).

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 - 30 \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \quad \text{بسته‌های ۱۰۰ تایی} \rightarrow
 \begin{array}{c}
 | 10 \\
 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

بسته‌های ۱۰ تایی →

۷ بسته هم باقی می‌ماند که چون تعدادشان کمتر از ۱۰ است، تشکیل یک بسته‌ی ۱۰ تایی نمی‌دهند.

در نهایت این ۳۷۴ مداد را توانستیم در ۳ بسته‌ی ۲۰۰ تایی یا ۱۰۰ تایی و ۷ بسته‌ی ۱۰ تایی قرار





دستگاههای شمار

دهیم. ۴ مداد هم به صورت تکی باقی مانندند.

$$374 = 3 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 4 \times 10^2 = 3 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 4 \times 10^2$$

در واقع بنا و مبنای شمارش‌مان را عدد ۱۰ قرار داده‌ایم. یعنی بسته‌های ۱۰ تایی درست کرده‌ایم.

سؤال این است که چرا این مدادها را در بسته‌های ۱۰ تایی قرار داده‌ایم.

همان‌طور که در ابتدا اشاره شد، این کار قراردادی است که ریاضیدانان انجام داده‌اند.

بگذارید این مدادها را در بسته‌های ۵ تایی بسته‌بندی کنیم.

۳۷۴ مداد داریم. در آغاز، این مدادها را پنج تا، پنج تا جدا می‌کنیم. تعداد بسته‌هایی که به دست می‌آیند،

۷۴ عدد است. زیرا

$$\begin{array}{r} 374 \\ \hline 5 \\ 74 \\ \hline 70 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

بسته‌های ۵ تایی →

تکی →

پس ۷۴ بسته ۵ تایی خواهیم داشت و ۴ مداد هم به صورت تکی باقی می‌مانند؛ که این ۴ مداد تشکیل یک بسته‌ی ۵ تایی نمی‌دهند. در مرحله‌ی بعد، باید این ۷۴ بسته‌ی ۵ تایی را در بسته‌های ۵ تایی جدید قرار دهیم، چون قرارداد کرده‌ایم که هر ۵ تایی شیبیه هم را در یک بسته‌ی جدید قرار دهیم؛ بنابراین ۱۴ بسته‌ی جدید تشکیل می‌شود که در هر کدام از این بسته‌ها، ۵ بسته‌ی ۵ تایی مداد قرار دارد. یعنی بسته‌های ۵ تایی ۲۵ تایی. ($5 \times 5 = 25$)

۴ بسته‌ی ۵ تایی هم باقی می‌ماند که نمی‌توانند تشکیل یک بسته‌ی ۵ تایی جدید دهند.

$$\begin{array}{r} 74 \\ \hline 5 \\ 14 \\ \hline 10 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

بسته‌های ۲۵ تایی →

بسته‌های ۵ تایی →

پس تا به اینجا ۱۴ بسته‌ی ۲۵ تایی، ۴ بسته‌ی ۵ تایی و ۴ تا مداد تکی داریم. ۱۴ بسته‌ی ۲۵ تایی را



دستگاه‌های شمار



هم دوباره می‌توانیم در بسته‌های ۵ تایی قرار دهیم. ۲ بسته‌ی جدید تشکیل می‌شود که در هر کدام از این بسته‌ها، ۵ بسته‌ی مداد قرار دارد. یعنی بسته‌های ۱۲۵ تایی ($5 \times 25 = 5 \times 5^2 = 5^3 = 125$)

۴ بسته ۲۵ تایی هم باقی می‌ماند که تشکیل بسته جدید نمی‌دهند.

$$\begin{array}{r}
 & 5 \\
 & | \\
 14 & \quad \text{بسته‌های } 125 \text{ تایی} \rightarrow 2 \\
 - & 10 \\
 \hline
 & 4 \\
 & \text{بسته‌های } 25 \text{ تایی} \rightarrow
 \end{array}$$

در نهایت این مدادها را توانستیم این‌گونه بسته‌بندی کنیم:

۲ بسته‌ی ۱۲۵ تایی، ۴ بسته‌ی ۲۵ تایی، ۴ بسته‌ی ۵ تایی و ۴ تا مداد تکی.

در اینجا مبنای شمارش‌مان را عدد ۵ قرار دادیم. یعنی بسته‌های ۵ تایی درست کردایم.

$$374 = 2 \times 125 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 \times 1 = 2 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

؟ اگر یک مداد دیگر به این مدادها اضافه کنیم، بسته‌بندی چه تغییری می‌کند؟





دستگاه‌های شمار

تمرين

ریاضی طلایه داران - سال دوم راهنمایی

۱. ۳۷۴ را در میناهای ۷، ۸ و ۹ بنویسید (یعنی بسته‌های ۷ تایی، ۸ تایی و ۹ تایی بسازید).
 ۲. اعداد به دست آمده در تمرین قبل را به ترتیب در میناهای ۷، ۸ و ۹ نمایش دهید.

به عنوان مثال عدد ۳۷۴ را در مبنای ۵ به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$374 = (\overset{2}{\underset{\downarrow}{\text{٢}}}) \overset{4}{\underset{\downarrow}{\text{٤}}} (\overset{4}{\underset{\downarrow}{\text{٤}}}) \overset{5}{\underset{\downarrow}{\text{٥}}} \text{ تکی } (5^{\circ}) \quad \text{٢٥ تکی } (5^{\circ}) \quad \text{١٢٥ تکی } (5^{\circ})$$

۳. اعداد زیر را به مبنای خواسته شده بپریل.

$$\text{الف} \quad ٤٨٢ = (\quad) \quad \text{ج} \quad ٣٥٦ = (\quad)$$

$$\text{b) } 954 = (\quad)_r \qquad \qquad \text{d) } 596 = (\quad)_v$$

۴. به مثال زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned}(24444)_6 &= 2 \times 6^4 + 4 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 4 \times 6^0 \\&= 2 \times 1296 + 4 \times 216 + 4 \times 36 + 4 \times 6 + 4 \times 1 \\&= 2592 + 864 + 144 + 24 + 4 = 3724\end{aligned}$$

اکنون اعداد داده شده را همانند مثال، در مبنای ۱۰ بنویسید.

الف) (١٣٢٤) =

ب) (۵۳۱۴) =

ج) (٢٤٤٤) =

$$d) (12121)_x =$$

۵. نوشتن یک عدد در مبنای ۲، به معنی نوشتن آن عدد با مجموعی از توان‌های عدد ۲ است. به طوری که از هر توان ۲، حداکثر یک بار استفاده کنیم. این یعنی «برای نمایش دادن یک عدد در مبنای ۲، فقط می‌توان از دو رقم ۰ و ۱ استفاده کرد».

$$51 = (\underbrace{11}_{2})_{\circ}$$

فقط از ۰ و ۱ استفاده شده است

- الف) در مبنای ۲ چرا نمی‌توان از رقم ۲ در نمایش اعداد استفاده کرد؟
- ب) زمانی که عمرو حیدر و فرید با پیمانه‌های ۱ لیتری، ۲ لیتری، ۴ لیتری، ۸ لیتری و... نفت می‌فروختند، در واقع اعداد را به مبنای ۲ می‌بردند. چرا؟

۶. نوشتن یک عدد در مبنای ۳، به معنی نوشتن آن عدد با مجموعی از توان‌های عدد ۳ است. به طوری که از هر توان ۳، حداکثر دوبار استفاده کنیم. این یعنی «برای نمایش دادن یک عدد در مبنای ۳، فقط می‌توان از سه رقم ۰ و ۱ و ۲ استفاده کرد».

$$51 = (\underbrace{122}_{3})_{\circ}$$

فقط از ۰ و ۱ و ۲ استفاده شده است

- الف) در مبنای ۳ چرا نمی‌توان از رقم ۳ در نمایش اعداد استفاده کرد؟
- ب) هنگامی که عمرو حیدر و فرید با پیمانه‌های ۱ لیتری، ۳ لیتری، ۹ لیتری و ۲۷ لیتری نفت می‌فروختند، در واقع اعداد را به مبنای ۳ تبدیل می‌کردند. چرا؟

۷. برای نمایش یک عدد در مبنای ۸، حداکثر به چند نوع رقم احتیاج داریم؟ آن رقم‌ها را بنویسید.
۸. عدد ۴۱۹ را به مبنای ۱۶ برد و آن را در مبنای ۱۶ نمایش دهید.

۹. برای نشان دادن اعداد در مبنای بزرگ‌تر از ۱۰، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟





دستگاه‌های شمار

۱۰. اعداد زیر را به مبنای خواسته شده ببرید.

$$1388 = (\quad)_{16} \quad \text{(الف)}$$

$$1430 = (\quad)_{14} \quad \text{(ب)}$$

$$2009 = (\quad)_{12} \quad \text{(ج)}$$

$$1376 = (\quad)_{18} \quad \text{(د)}$$

$$1375 = (\quad)_{13} \quad \text{(ه)}$$



جمع و تفریق و ضرب مبنایها

تا به حال هنگامی که می‌خواستید دو عدد را با هم جمع بزنید و یا آن‌ها را در هم ضرب کنید، در مبنای ۱۰ این کار را انجام می‌دادید. در مبنای‌های دیگر نیز می‌توانید به همان راحتی مبنای ۱۰، اعمال جمع و تفریق و ضرب را انجام دهید؛ اما اعمالیات تقسیم احتیاج به دقت بیشتری دارد!

در زیر چند نمونه از این اعمال را شرح می‌دهیم.

نمونه‌ای از عمل جمع:

$$(16234)_7 + (320526)_7 = (\quad)_7$$

ابتدا دو عدد را زیر هم می‌نویسیم به‌طوری که یکان زیر یکان باشد. بعد از آن شروع به جمع زدن می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 6+4=(10)_{10}=(12)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1+2+3=(6)_{10}=(6)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 7 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 6 \ 3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5+2=(7)_{10}=(10)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 6 \ 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+0+6=(7)_{10}=(10)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 0 \ 6 \ 3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1+2+1=(4)_{10}=(4)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 4 \ 0 \ 0 \ 6 \ 3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2=(3)_{10}=(3)_7 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 3 \ 2 \ 0 \ 5 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array} \\ \longrightarrow + \begin{array}{r} 1 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 3 \ 4 \ 0 \ 0 \ 6 \ 3 \end{array} \end{array}$$

$$(16234)_7 + (320526)_7 = (340063)_7$$

نمونه‌ای از عمل ضرب:

$$(31202)_5 \times (42)_5 = (\quad)_5$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad 4 \ 2 \\ \hline \end{array}$$



دستگاههای شمار

رقم اول از سمت راست (یکان) عدد $_{\text{۵}}(42)$ را انتخاب می‌کنیم و در عدد اول ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}
 2 \times 2 = (4)_{10} = (4)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 2 \times 0 = (0)_{10} = (0)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 0 \ 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 2 \times 2 = (4)_{10} = (4)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \times 1 = (2)_{10} = (2)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 2 \times 3 = (6)_{10} = (11)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

سپس رقم دوم (یعنی ۴) را در عدد $_{\text{۵}}(31202)$ ضرب می‌کنیم. قبل از شروع ضرب، یک عدد صفر زیر یکان عدد $_{\text{۵}}(112404)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r}
 4 \times 2 = (8)_{10} = (13)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 4 \times 0 + 1 = (1)_{10} = (1)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 4 \times 2 = (8)_{10} = (13)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4 \times 1 + 1 = (5)_{10} = (10)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{r}
 4 \times 3 + 1 = (13)_{10} = (23)_5 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \\
 \times \quad \quad \quad 4 \ 2 \\
 \hline
 2 \ 3 \ 0 \ 3 \ 1 \ 3 \ 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

و در نهایت عمل جمع را در مبنای ۵ انجام می‌دهیم:



$$\begin{array}{r} 1\overset{1}{1}\overset{1}{2}404 \\ + 230313 \\ \hline 2421034 \end{array}$$

پس داریم:

$$(31202)_5 \times (42)_5 = (2421034)_5$$

نمونه‌ای از عمل تفریق:

$$(120212)_3 - (21122)_3 = (\quad)_3$$

$$\begin{array}{r} 120212 \\ - 21122 \\ \hline \end{array}$$

دو عدد را زیر هم می‌نویسیم و از سمت راست رقم‌ها را از هم کم می‌کنیم. فقط دقت داشته باشید که در مبنای ۱۰، عمل ۱۰ بر ۱ را انجام می‌دادیم. منتها در این مثال عمل ۳ بر ۱ را انجام می‌دهیم!

$$\begin{array}{ccc} 2 - 2 = 0 & (3+1) - 2 = 2 & 1 - 1 = 0 \\ \begin{array}{c} 12021\cancel{2} \\ - 2112\cancel{2} \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 120\cancel{2} | \cancel{2} | 2 \\ - 211\cancel{2} | 2 \\ \hline 20 \end{array} & \begin{array}{c} 120 | 1 | (3+1)2 \\ - 21 | 1 | 2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \end{array} \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \begin{array}{c} (3+0) - 1 = 2 \\ 1\cancel{2} | \cancel{2} | 1 (3+1)2 \\ - 2 | 1 | 1 2 2 \\ \hline 2020 \end{array} & \begin{array}{c} (3+1) - 2 = 2 \\ 11 (3+0) 1 (3+1)2 \\ - 2 | 1 | 1 2 2 \\ \hline 2020 \end{array} & \begin{array}{c} (3+1) - 2 = 2 \\ \cancel{X} | \cancel{X} | (3+0) 1 (3+1)2 \\ - \cancel{2} | 1 | 1 2 2 \\ \hline 22020 \end{array} \end{array}$$

در نتیجه:

$$\begin{array}{r} 120212 \\ - 21122 \\ \hline 22020 \end{array}$$





دستگاه‌های شمار

تمرین

۱. جدول جمع و ضرب زیر را در مبنای ۶ کامل کنید.

$+$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	\times	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰							۰						
۱							۱						
۲							۲						
۳							۳						
۴							۴						
۵							۵						

۲. محاسبات زیر را انجام دهید.

- (الف) $(54321)_6 + (12345)_6 = (\quad)_6$
 (ب) $(34252)_7 + (42312)_7 = (\quad)_7$
 (ج) $(1000000)_5 - (1)_5 = (\quad)_5$
 (د) $(1000100)_2 - (10101)_2 = (\quad)_2$
 (ه) $(54321)_6 - (12345)_6 = (\quad)_6$
 (و) $(101101)_2 \times (101)_2 = (\quad)_2$
 (ز) $(54321)_8 \times (7)_8 = (\quad)_8$

۳. مشخص کنید که جمع زیر در چه مبنایی انجام گرفته و جاهای خالی را هم با اعداد مناسب بر کنید.

$$\begin{array}{r} & 5 & 2 & \square & 3 & 5 \\ + & 1 & \square & 3 & 5 & \square \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

۴. در هر مورد بگویید محاسبه در چه مبنایی انجام شده است؟

- الف) $2 \times 4 = 11$
 (ب) $2 \times 4 = 10$
 (د) $10 \times 123 = 1230$
 (ج) $2 \times 4 = 12$





دستگاه‌های شمار

۵. در هر مورد مقدار b را بیابید.

$$\text{الف) } ۳۹ = (۱۲۴)_b$$

$$\text{ب) } ۱۶۰ = (۲۲۰۰)_b$$

$$\text{ج) } ۲۶ = (۲۶۲)_3$$

۶. کوچک‌ترین پایه‌ای را که در آن (۱۰۰) نمایش یک مجذور کامل باشد، بیابید.

۷. الف) هشت مضرب اولیه‌ی عدد ۳ را بنویسید و آن‌ها را به مبنای ۳ ببرید.

ب) در مبنای ۳، چه اعدادی بر ۳ بخش‌پذیرند؟

ج) در مبنای ۳، چه اعدادی بر ۹ بخش‌پذیرند؟

۸. الف) هشت مضرب اولیه‌ی عدد ۷ را بنویسید و آن‌ها را به مبنای ۷ ببرید.

ب) در مبنای ۷، چه اعدادی بر ۷ بخش‌پذیرند؟

ج) در مبنای ۷، چه اعدادی بر ۴۹ بخش‌پذیرند؟

۹. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد ۶ رقمی در مبنای ۵ کدام است؟

۱۰. اعداد زیر را به میناهای خواسته شده تبدیل کنید.

$$\text{الف) } (۳۵۱)_6 = (\quad)_9$$

$$\text{ب) } (۱۲۵)_9 = (\quad)_5$$

$$\text{ج) } (۱۰۰۱۱۱۰۱)_2 = (\quad)_4$$

$$\text{د) } (۶۲۴)_8 = (\quad)_2$$

$$\text{ه) } (۲۱۰۱۲)_3 = (\quad)_9$$

$$\text{و) } (۱۳۵۷)_8 = (\quad)_2 = (\quad)_{16} = (\quad)_4 = (\quad)_2$$





دستگاههای شمار

۱۱. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$(10\ 110)_2$, $(200)_3$, $(100\ 3)_4$, $(1300)_5$, $(111)_6$, $(202)_7$, $(44)_8$, $(74)_9$, 112_{10}

۱۲. با ارقام ۴، ۷ و ۸ همه اعداد پنج رقمی را نوشته ایم.

الف) کوچکترین و بزرگترین آنها کدام است؟

ب) بیستمین آنها کدام است؟

ج) دویستمین آنها کدام است؟

۱۳. نشان دهید با جمع توانهای عدد ۲، می‌توان هر عددی را ساخت.

۱۴. معلمی می‌گوید که از ۱۰۰ دانشآموز کلاسشن، ۲۱ نفر علاقه‌مند به مبحث مجموعه، ۲۳ نفر علاقه‌مند به مبحث اعداد صحیح و ۱۲ نفر بقیه علاقه‌مند به مبنا هستند. معلم در این گفتار، از چه مبنایی در شمارش استفاده کرده است؟

۱۵. در هر مورد آیا مبنایی وجود دارد که تساوی‌های داده شده در آن همزمان درست باشد؟

$$4 \times 2 = 12 \quad \text{و} \quad 4 + 2 = 10 \quad \text{(الف)}$$

$$6 \times 2 = 14 \quad \text{و} \quad 6 + 2 = 8 \quad \text{(ب)}$$

۱۶. کسر سمت چپ به ۵ ساده شده است. مبنا چیست؟

$$\frac{17}{43} = \frac{3}{7}$$

۱۷. زوج یا فرد بودن اعداد زیر را مشخص کنید.

$(100\ 101)_2$ = (الف)	$(210\ 211)_3$ = (ب)
$(1222102)_4$ = (ج)	$(410\ 13223)_5$ = (د)
$(13524)_6$ = (ه)	$(1234565)_7$ = (و)
$(1234567)_8$ = (ز)	$(1234567)_9$ = (ح)



دستگاه‌های شمار



۱۸. در هر یک از قسمت‌های زیر، شرایطی را پیدا کنید که بتوان تشخیص داد عددی زوج است یا فرد.

الف) اعداد در مبنای ۳

ب) اعداد در مبنای ۴

ج) اعداد در مبنای n

۱۹. $4 + 2 \times x^2 + 3 \times x^4$ در مبنای x چه عددی است؟

۲۰. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی در مبنای ۶ را بنویسید به‌طوری که ارقام آن تکراری نباشد.

۲۱. چند عدد سه رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

۲۲. رقم پنجم از سمت راست عدد ۱۸۴۵۳۷۴۷ در مبنای ۳ چیست؟

۲۳. در یک کارگاه جواهرسازی، برای وزن کردن طلا، از ترازوی ۲ کفه‌ای مخصوصی استفاده می‌شود که دقیق‌تر آن بسیار بالاست. برای این ترازو، می‌خواهیم وزنه‌های جدیدی خریداری کنیم. در هر یک از موارد زیر، تعیین کنید وزنه‌هایی که باید تهییه شوند، چند گرمی باید باشند.

الف) با این ترازو بتوانیم از ۱ تا ۱۵ گرم طلا را وزن کنیم، با این سه شرط که:

۱. تعداد وزنه‌ها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲. از هر وزن فقط یکی داشته باشیم.

۳. وزنه‌ها را فقط بتوانیم در یک کفه ترازو قرار دهیم.

ب) با این ترازو بتوانیم از ۱ تا ۴۰ گرم طلا را وزن کنیم، با این سه شرط که:

۱. تعداد وزنه‌ها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲. از هر وزن فقط یکی داشته باشیم.

۳. وزنه‌ها را بتوانیم در هر دو کفه ترازو قرار دهیم.





دستگاههای شمار

ج) با این ترازو بتوانیم از ۱ تا 80° گرم طلا را وزن کنیم، با این سه شرط که:

۱. تعداد وزنهای کمترین مقدار ممکن باشد.

۲. از هر وزن، دقیقاً ۲ تا داشته باشیم.

۳. وزنهای را فقط بتوانیم در یک کفه ترازو قرار دهیم.

د) با این ترازو بتوانیم از ۱ تا 312 گرم طلا را وزن کنیم، با این سه شرط که:

۱. تعداد وزنهای کمترین مقدار ممکن باشد.

۲. از هر وزن، دقیقاً ۲ تا داشته باشیم.

۳. وزنهای را بتوانیم در هر دو کفه ترازو قرار دهیم.

۲۴. کارت‌های مرموزی درست کنید به‌طوری که بتوان با آن‌ها، تا عدد 63 را حدس زد.

۲۵. برای این‌که بتوان تا عدد 127 را حدس زد، به چند کارت مرموز احتیاج داریم؟

۲۶. برای این‌که بتوان تا عدد 130 را حدس زد، به چند کارت مرموز احتیاج داریم؟



نیم^۱ یک بازی جذاب دو نفره است. این بازی علی‌رغم ظاهر بی‌نظم‌اش، یک بازی دقیق است. اگر «روش بردن» را در این بازی یاد بگیرید، می‌توانید تقریباً به‌راحتی همه‌ی حریفان خود را شکست دهید. مطمئن باشید کمتر کسی «روش بردن» را در این بازی می‌داند. در مهمانی‌های خانوادگی بُردن همه بسیار لذت‌بخش است!

مقدار دلخواهی لوبيا را به چند دسته تقسیم کنید. تعداد لوبيا در دسته‌ها می‌تواند متفاوت باشد. هر نفر در نوبت خود یک دسته را انتخاب می‌کند و از آن دسته به هر تعداد که بخواهد لوبيا برمی‌دارد. کسی حق ندارد در نوبت خود چیزی بر ندارد. برنده بازی کسی است که آخرین لوبياها را بردارد.

به عنوان مثال در بازی زیر نفر دوم برنده شده است.

دسته‌ی یکم	دسته‌ی دوم	دسته‌ی سوم
۵	۱۰	۲۰
۶۲	۱۰	۲۰
۲	۱۰	۲۰
۲۱	۱۰	۱
۱	۲۰۰	۱
۱	۰	۲۰
۰	۰	۰

۱) Nim، واژه‌ای انگلیسی است که معنای جالبی دارد.





دستگاههای شمار

تمرین

۱. بازی نیم معمولاً با ۳ دسته انجام می‌شود. بازی نیم را در حالات زیر انجام دهید.

دسته‌ی ۱	دسته‌ی ۲	دسته‌ی ۳	
۲	۲	۲	الف
۲	۳	۲	ب
۲	۳	۳	ج

۲. بازی نیم را با بیش از ۳ دسته هم می‌توان انجام داد. بازی نیم را در حالات زیر انجام دهید.

دسته‌ی ۱	دسته‌ی ۲	دسته‌ی ۳	دسته‌ی ۴	دسته‌ی ۵	
-	۲	۳	۵	۲	الف
۴	۱	۲	۵	۵	ب

۳. روش بردن در این بازی چگونه است؟

۴. در هر کدام از حالت‌های زیر و در صورت امکان، از کدام دسته و به چه اندازه لوبیا برداریم تا

بتوانیم حتیاً برنده بازی باشیم.

دسته‌ی ۱	دسته‌ی ۲	دسته‌ی ۳	دسته‌ی ۴	دسته‌ی ۵	دسته‌ی ۶	
-	-	-	۵	۱۵	۲۵	الف
-	-	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	ب
-	-	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	ج
۱۸	۱۵	۱۲	۹	۶	۳	د



ضرب مصر باستان

به روش ضرب کردن زیر دقت کنید.

$$۲۶ \times ۵۸ =$$

$$۵۸ = (\begin{array}{c} ۱ \\ ۸۳۲ \end{array} \times ۲) + (\begin{array}{c} ۱ \\ ۴۱۶ \end{array} \times ۲) + (\begin{array}{c} ۱ \\ ۲۰۸ \end{array} \times ۲) + ۰ + (\begin{array}{c} ۱ \\ ۵۲ \end{array} \times ۲) + (\begin{array}{c} ۰ \\ ۲۶ \end{array} \times ۲)$$

$$۲۶ \times ۵۸ = ۸۳۲ + ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۵۲ = ۱۵۰۸$$

۱. دلیل درستی روش ضرب مصر باستان را توضیح دهید.

۲. حاصل ضرب‌های زیر را با روش ضرب مصر باستان به دست آورید.

(الف) 8×13

(ب) 16×15

(ج) 14×29

(د) 103×15





دستگاه‌های شمار

ضرب به روش تضعیف و تنصیف (دو برابر کردن و نصف کردن)

در این روش یکی از اعداد را در هر مرحله بر ۲ تقسیم می‌کنیم و عدد دیگر را در هر مرحله در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$58 \qquad 26$$

$$29 \longrightarrow 52$$

$$14 \qquad 104$$

$$7 \longrightarrow 208$$

$$3 \longrightarrow 416$$

$$1 \longrightarrow 832$$

سپس اعداد رو به روی اعداد فرد ستون چپ را با هم جمع می‌کنیم.

$$26 \times 58 = 832 + 416 + 208 + 52 = 1508$$

۱. دلیل درستی روش ضرب تضعیف و تنصیف را توضیح دهید.

۲. حاصل ضرب‌های زیر را به روش ضرب تضعیف و تنصیف به دست آورید.

(الف) 93×14

(ب) 74×22

(ج) 42×13

(د) 17×19



جذر



(؟) طرح یک پرسش:

\times	+	-
+	+	-
-	-	+

با توجه به جدول ضرب علامت‌ها، ملاحظه می‌کنیم که مجذور هر عدد مثبت، عددی مثبت و مجذور هر عدد منفی هم عددی مثبت است؟

متلاً

$5^2 = 25$
 $(-5)^2 = 25$

عدد ۲۵ دو جذر دارد، یکی ۵ و دیگری -۵.

دیدیم که مجذور هر عدد مثبت یا منفی، عددی مثبت است. پس، عددی که مجذور آن منفی باشد وجود ندارد؛ یعنی، **اعداد منفی جذر ندارند**.

می‌دانیم $9^2 = 81$ است. عدد ۹ را مجذور ۳ می‌نامیم. مجذور هر عدد، توان دوم آن عدد است؛ متلاً مجذور ۴، 4^2 یعنی ۱۶ است.

مجذور ۵ چیست؟
 مجذور ۲ چیست؟

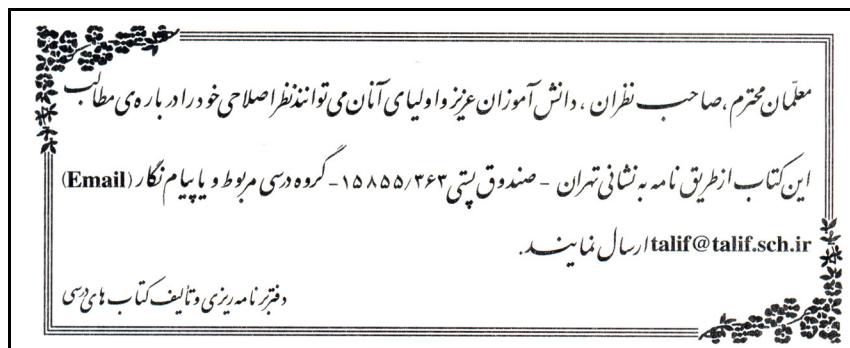
عدد ۴۹ مجذور عدد ۷ است. عدد ۷ جذر ۴۹ است. جذر ۴ عدد ۲ است. جذر ۲۵ عدد ۵ است. جذر ۴۹ را به صورت $\sqrt{49}$ هم نمایش می‌دهیم و آنرا می‌خوانیم رادیکال $\sqrt{49} = 7$

تصویر شماره‌ی دو

تصویر شماره‌ی یک

دو تصویر بالا را با هم مقایسه کنید.

آیا متن این دو تصویر با هم جور در می‌آیند؟!



تصویر آخرین صفحه‌ی کتاب درسی



جذر

تمرین

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$1) \sqrt{5^2}$$

$$3) \sqrt{15 \times 35 \times 21}$$

$$5) \sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}}$$

$$7) \sqrt{\frac{9+16}{36+64}}$$

$$9) \sqrt{(-25) \times (-4)}$$

$$11) \sqrt{10^4 \times 81}$$

$$13) \sqrt{\sqrt{625}}$$

$$15) \sqrt{\frac{10^4 \times 18}{10^8}}$$

$$17) \sqrt{10^7 \times 6^3}$$

$$19) \sqrt{1 + 2 \times \sqrt{1 + 3 \times \sqrt{1 + 4 \times \sqrt{1 + 5 \times \sqrt{(1+6)^2}}}}}$$

$$2) \sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{64}}$$

$$4) \sqrt{4^0 - \sqrt{16}}$$

$$6) \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}}$$

$$8) \sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}}$$

$$10) \sqrt{\frac{64}{100} \times 10^3 \times 36}$$

$$12) \sqrt{4 \times 25 \times 9 \times 36}$$

$$14) \sqrt{3^3 \times 2^4 \times 12}$$

$$16) \sqrt{5000 \times 10^4}$$

$$18) \sqrt{\frac{\sqrt{51/2}}{\sqrt{10/2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$$

۲. در جای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

$$(الف) 3 \times \sqrt{\square} = 21$$

$$(ج) 3 \times 4 \times \sqrt{\square} = \frac{120}{2}$$

$$(ب) \sqrt{\frac{28}{\sqrt{\square}}} = 2$$

$$(د) \sqrt{1 + 2 \times \sqrt{\square}} = 3$$



جذر



۳. برای هر یک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

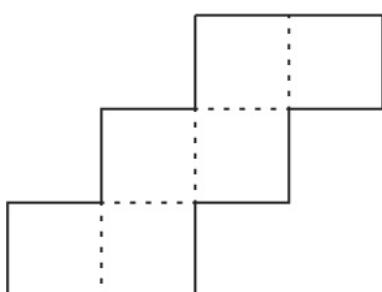
ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مادر مریم برای تولد او، یک کادو خریده که جعبه آن به شکل مکعب است. اگر برای کادوکردن این جعبه،

به $2/16$ متر مربع کاغذ کادو احتیاج باشد، اندازه هر ضلع این جعبه، چند سانتی‌متر است؟

۵. شکل زیر از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل 216° سانتی‌متر مربع

است.



الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را پیدا کنید.

ج) محیط تمام شکل را بحسب سانتی‌متر پیدا کنید.

۶. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

(الف) $\sqrt{^{\circ} 27}$

(ب) $\sqrt{28}$

(ج) $\sqrt{47/3}$

(د) $\sqrt{35/5}$

(ه) $\sqrt{74^{\circ}}$

(و) $\sqrt{^{\circ} 74}$





جذر

۷. الف) مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ را به دست آورید.
- ب) تلاش کنید جواب دقیق تری برای $\sqrt{3}$ به دست آورید.
۸. $2\sqrt{3} \times 2$ یعنی $\sqrt{3} \times \sqrt{4}$. مقدار تقریبی عبارت‌های زیر را به دست آورید. سعی کنید جواباتان بهترین جواب ممکن باشد.
- (الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$ (ب) $3\sqrt{2}$
 (ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$ (د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$
 (ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$
۹. اولین رقم بعد از اعشار کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

الف) $\sqrt{15}$ ب) $\sqrt{17}$

۱۰. حاصل جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۱۱. مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{88}$ را بنویسید.

۱۲. اگر هر یک از حروف نشان‌دهنده‌ی یک رقم باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً غلط است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$

ب) $\sqrt{abc} = def$

ج) $\sqrt{\circ/ab} = \circ/c$

د) $\sqrt{ab} = c$

