سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ریاضی طلایه‌داران

سال دوم راهنمایی

فصل سوم

هندسه ۱

نسخه‌ی مخصوص معلم

فهرست مطالب

مثلث قائم‌الزاویه

طرح درس هندسه‌ی ۱، عمدتاً از دو کتاب «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی» نوشته‌ی «ماروین جی گرینبرگ» و «هندسه» نوشته‌ی «مویز و دانز» می‌باشد.

قضایا و گزاره‌هایی که در کتاب درسی آموزش و پرورش آمده، بدون اثبات است و فقط صورت آن‌ها ذکر شده است.

در کتاب تکمیلی تمام آن قضایا اثبات شده و تمرین‌ها و گزاره‌های مرتبط با آنها نیز به درس دانش‌آموزان و یا به تمرین‌ها اضافه شده است.

[[تدریس صفحه ۷۲]]

این قسمت جنبه‌ی یادآوری دارد. می‌دانیم که دو مثلث، در سه‌حالت «ض‌زض»، «زض‌ز» و «ض‌ض‌ض» با هم مساوی می‌شوند.

این سه‌حالت را به‌طور مستقل نمی‌توان اثبات کرد. اگر یکی از حالت‌ها را به عنوان اصل بپذیریم (یعنی بدون اثبات بپذیریم)، دو حالت دیگر را می‌توان از روی حالت اول ثابت کرد.

برای مطالعه‌ی بیشتر، می‌توانید صفحات ۲۰۲ تا ۲۰۴ از کتاب «مویز و دانز» را مطالعه کنید.

[[تدریس صفحه‌های ۷۳ تا ۷۹]]

در صفحه‌ی ۷۶ و ۷۷، تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه را در دو حالت معرفی کرده است.

۱. **وتر و یک زاویه‌ی تند (حاده):** برای این حالت، درکتاب درسی اثباتی ذکر نشده و فقط به آن اشاره شده است. به دانش‌آموزان بگویید که در جلسات آینده این حالت را برایشان ثابت می‌کنید و فعلاً آن را بدون ثابت بپذیرند.

۲. **وتر و یک ضلع:** برای این حالت درکتاب درسی اثباتی آمده که در برهان آن، دوگزاره احتیاج به اثبات دارند. در خط هفتم، هشتم و نهم، چنین آمده است:

گزاره‌ی یک: « چون $BC = B'C'$ است، پس C یک نقطه از عمودمنصف پاره‌خط BB' است.»

گزاره‌ی دو: « از C هم فقط یک عمود بر BB' می‌توان رسم کرد. پس، CA عمودمنصف BB' و $BA = B'A'$ است.»

از دانش‌آموزان بخواهید در کلاس گزاره‌های یک و دو را که در بالا آمده، ثابت کنند؛ سپس به آنها بگویید که می‌توانند اثبات گزاره‌ی یک را با نام «قضیه‌ی عمودمنصف» و اثبات گزاره‌ی دو را با نام «رسم عمود از یک نقطه خارج خط» از روی وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینند.

همچنین به آنها بگویید که اثبات دیگری در جلسات آینده برای حالت وتر و یک ضلع ارائه خواهید کرد.

توازی

سخنی با معلم. همان‌طورکه می‌دانیم، اصل را نمی‌توان ثابت کرد و درستی آن را باید پذیرفت. بعد از پذیرفتن یک سری اصول بنیادی است که می‌توانیم یک‌سری قضیه و گزاره را ثابت کنیم و دنیایی جدید را به‌وجود آوریم. هندسه‌ای که امروزه ما آن را می‌شناسیم و آن را تدریس می‌کنیم، بر پایه‌ی پنج اصل بنا شده که بنیان‌گذار آن را اقلیدس می‌دانند. از همان ابتدا از بین پنج اصل اقلیدس، چهارتای اول را همه‌ی ریاضیدانان قبول کرده‌اند و پذیرفته‌اند. اما در مورد اصل پنجم همیشه حرف‌وحدیث زیادی وجود داشته است. در طول تاریخ، بسیاری از ریاضیدانان تلاش کردند تا اصل پنجم اقلیدس را از روی چهار اصل نخست ثابت کنند. آنها اعتقاد داشتند که اصل پنجم در واقع اصل نیست و ثابت شدنی است. ولی هیچ‌کدام موفق به چنین کاری نشدند.
بسیاری از قضایا و گزاره‌هایی که امروزه برای ما ثابت شده است و یا ما آنها را بدیهی می‌گیریم، نتیجه‌ی مستقیم اصل پنجم اقلیدس است؛ که اگر اصل پنجم را قبول نکنیم، آن قضایا و گزاره‌ها را هم نمی‌توانیم ثابت کنیم.

اصل پنجم اقلیدس: اگر دو خط به‌وسیله‌ی موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازه‌ی درجه‌های دو زاویه‌ی درونی واقع در یک طرف مورّب کمتر از ۱۸۰° باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورّب قطع می‌کنند.

اصل پنجم اقلیدس، صورت‌های ساده‌تری دارد که به آنها معادل اصل پنجم گویند. به عنوان نمونه، اصل توازی یکی از معادل‌هایی است که برای اصل پنجم اقلیدس بیان کرده‌اند.

اصل توازی: از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

به عنوان مثال این گزاره‌ها، نتیجه‌ی مستقیم اصل پنجم اقلیدس هستند.

۱. اگر $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ سه خط متمایز باشند و داشته باشیم $d_۱ \parallel d_۲$ و همچنین $d_۲ \parallel d_۳$، آنگاه $d_۱ \parallel d_۳$.

۲. اگر مورّبی دو خط موازی را قطع کند، زوایای متبادل درونی باهم مساوی‌اند.

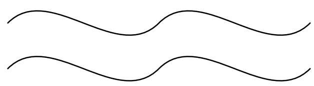
۳. مجموع زوایای داخلی مثلث، °۱۸۰ است.

در این بخش (توازی) تا قبل از معرفی اصل توازی (معادل اصل پنجم اقلیدس)، تمام قضایا و گزاره‌ها و تمرین‌هایی که ثابت می‌شوند، برپایه‌ی چهار اصل اول اقلیدس است.

[[تدریس قسمت توازی از کتاب تکمیلی - صفحه‌ی ۱]]

ابتدای این بخش را از روی کتاب تکمیلی تدریس کنید و جلو بروید. کتاب آموزش و پرورش در این بخش پراکنده بحث کرده است. هنگام تعریف دو خط موازی، به دانش‌آموزان بگویید منظور از خط، یعنی خط راست.

بنابراین با توجه به تعریف توازی در کتاب تکمیلی، دو خط زیر علی‌رغم اینکه همدیگر را قطع نمی‌کنند، با هم موازی نیستند. زیرا این دو خط، خط راست نیستند. بلکه خط خمیده یا خم هستند.



دو خط خمیده بالا، در واقع دو خم موازی هستند؛ نه دو خط موازی.

تمام هندسه‌ای که در این فصل مطالعه خواهیم کرد، در صفحه است. یعنی دو خط، یا باهم موازی هستند، یا متقاطع؛ و حالت متنافر (نه موازی و نه متقاطع) اتفاق نخواهد افتاد. این یعنی تمام خطوط و نقاط مورد مطالعه هم صفحه هستند.

هنگام تعریف مورب و همچنین زوایای متبادل درونی، به دانش‌آموزان تأکید کنید که لزومی ندارد d_1 و d_2 موازی باشند. در صفحه‌ی ۸۵ کتاب آموزش و پرورش، خط مورّب برای دو خط موازی معرفی شده است.

بعد از تعریف زاویه‌های متبادل درونی، دو تمرین مربوط به آن را انجام دهید.

۱. الف) $\widehat{A}_3$ با $\widehat{B}_1$ و همچنین $\widehat{A}_4$ با $\widehat{B}_2$، متبادل درونی‌اند.

ب) $\widehat{A}_3$ با $\widehat{C}_1$ و همچنین $\widehat{A}_4$ با $\widehat{C}_2$، متبادل درونی‌اند.

ج) $\widehat{B}_3$ با $\widehat{C}_1$ و همچنین $\widehat{B}_4$ با $\widehat{C}_2$، متبادل درونی‌اند.

۲.

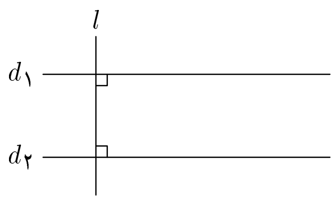
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \xrightarrow{\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2} \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$$

؟ در این تمرین، آیا d_1 و d_2 با یکدیگر موازی‌اند؟

☐ پاسخ دانش‌آموزان را بشنوید و سپس قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی را در کلاس تدریس کنید.

تمرین ۳ و ۴، ترجیحاً در کلاس و بعد از تدریس «قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی» و بیان صورت «قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط»، توسط دانش‌آموزان حل شود.

۳. مورّب l، دو خط d_1 و d_2 را قطع کرده است.

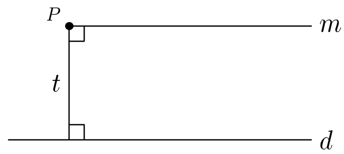


چون d_1 و d_2 بر l عمود هستند، پس زوایای متبادل درونی قائمه دارند. بنابراین طبق قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، d_1 و d_2 موازی خواهند بود.

جلوتر ملاحظه خواهید کرد که اثبات دیگری برای این تمرین وجود خواهد داشت.

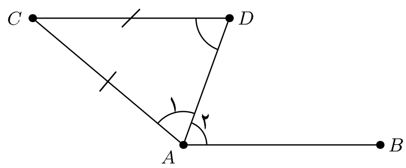
۴. خط t را از نقطه‌ی P، برخط d عمود می‌کنیم. (با استفاده از روش صفحه ۱۸۷، کتاب آموزش و پرورش، سال اول راهنمایی)

سپس یک عمود، در نقطه‌ی P برخط t، رسم می‌کنیم و آن را m می‌نامیم.



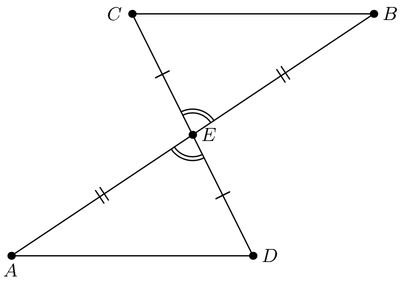
چون m و d هر دو بر t عمودند، طبق تمرین قبل، m و d با هم موازی‌اند. دقت داشته باشید که در این تمرین، دانش‌آموز می‌فهمد که از یک نقطه خارج یک خط، می‌توان یک خط موازی با خط مورد نظر کشید. ولی آیا این خط منحصربه‌فرد است یا نه، فعلاً مشخص نمی‌شود. در واقع منحصربه‌فرد بودن این خط، مطلبی است که در اصل توازی به آن اشاره خواهد شد.

۵. با توجه به فرض، $CA = CD$. پس $\widehat{D} = \widehat{A}_۱$.
از طرفی $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$. پس $\widehat{A}_۲ = \widehat{D}$؛ و در نتیجه، با استفاده از قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، AB و CD موازی‌اند.



۶. «الف» و «د»

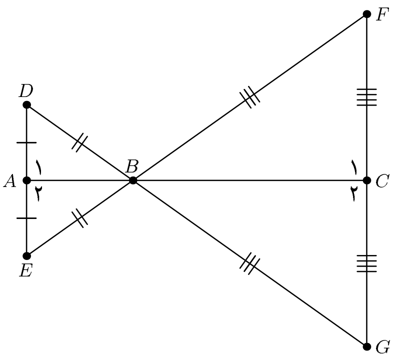
۷. دو مثلث $\overset{\triangle}{AED}$ و $\overset{\triangle}{CEB}$ با هم مساوی‌اند (ض‌زض). در نتیجه، $\widehat{A} = \widehat{B}$. پس بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، $AD \parallel BC$.



۸. با اطلاعاتی که از مسأله در اختیار داریم، به‌راحتی می‌توان تساوی‌های $\overset{\triangle}{ADB} = \overset{\triangle}{AEB}$ و همچنین $\overset{\triangle}{BFC} = \overset{\triangle}{BGC}$ را نتیجه گرفت.

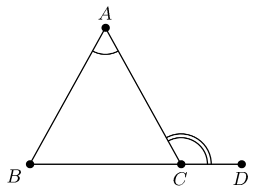
از تساوی این دو مثلث، تساوی‌های $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ و $\widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$ نتیجه می‌شود. که این تساوی‌ها نتیجه می‌دهد که $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ = ۹۰$ و همچنین $\widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲ = ۹۰$.

در نتیجه، بنابر قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط، $DE \parallel FG$.

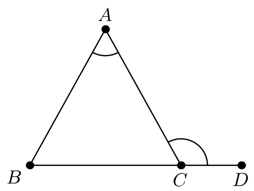


قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی:

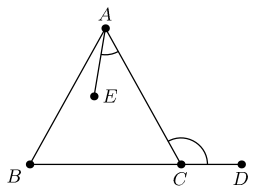
اثباتی که برای این قضیه در کتاب دانش‌آموز آمده، دقیق نیست و ایراد دارد. این ایراد به ساختار انتخاب اصول اقلیدس برمی‌گردد. ماجرای ایراد را می‌توانید در کتاب «هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی» صفحه‌ی ۹۹ بخوانید. ولی به هیچ وجه ایراد را برای دانش‌آموزان مطرح نکنید. در اینجا اثبات دیگری برای این قضیه می‌آوریم.



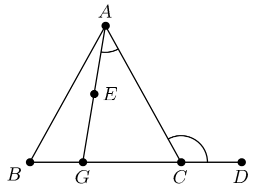
زاویه‌ی داخلی غیرمجاور $\widehat{BAC}$ را در نظر بگیرید. اگر $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$، آنگاه پاره‌خط AB و پاره‌خط CD بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، موازی خواهند بود. از طرفی خط CD، پاره‌خط AB را در B قطع می‌کند؛ و این امکان‌پذیر نیست.



اگر $\widehat{BAC} > \widehat{ACD}$، پس نیم‌خطی مانند AE میان AB و AC وجود دارد، به‌طوری که $\widehat{EAC} = \widehat{ACD}$.



نیم‌خط AE، BC را در نقطه‌ای مانند G قطع می‌کند.

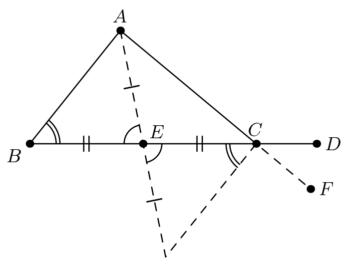


بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، AG و CD با هم موازی خواهند شد و این امکان‌پذیر نیست. زیرا خط CD، پاره‌خط AG را در نقطه‌ی G قطع می‌کند.

بنابراین $\widehat{ACD} > \widehat{BAC}$.

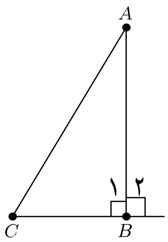
اگر فضای کلاس را برای شنیدن این اثبات مناسب دیدید، آن را به دانش‌آموزان بگویید. در غیر این صورت به دانش‌آموزان بگویید اثبات دیگری برای قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی بر روی وب‌گاه با نام «اثباتی دیگر برای قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی» قرار دارد. اگر تصمیم گرفتید که این برهان را در کلاس مطرح کنید، از این برهان به عنوان «برهانی دیگر» یاد کنید؛ نه «برهان درست‌تر!»

۹. چون $\widehat{ACD}$ و $\widehat{BCF}$ متقابل به رأس هستند، پس $\widehat{ACD} = \widehat{BCF}$. بنابراین ثابت می‌کنیم $\widehat{BCF} > \widehat{B}$. که اثبات به کمک شکل زیر واضح است.



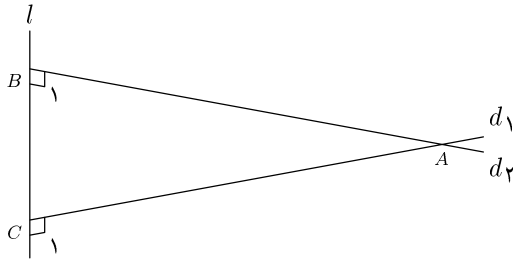
۱۰. دقت داشته باشید که هنوز اصل توازی را برای دانش‌آموزان مطرح نکرده‌ایم و فقط از چهار اصل اول اقلیدس مقیّد و مجاز هستیم که استفاده کنیم. بنابراین هنوز نمی‌دانیم که مجموع زوایای مثلث ۱۸۰° است.

برای حل این تمرین، شکل بکشید.

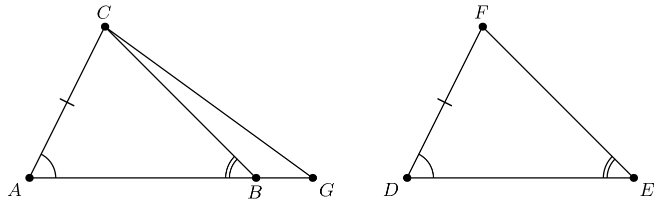


فرض کنید $\widehat{B}_۱ = ۹۰^\circ$ ؛ پس زاویه‌ی خارجی $\widehat{B}_۲ = ۹۰^\circ$ خواهد بود؛ و بنا بر قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی، زاویه‌های $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ کمتر از $\widehat{B}_۲$ خواهند بود. پس $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ حاده‌اند.

۱۱. اگر $d_۱$ و $d_۲$ موازی نباشند، پس در یک نقطه یک‌دیگر را قطع خواهند کرد. $\widehat{C}_۱ = \widehat{B}_۱ = ۹۰^\circ$. و این برخلاف قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی است.



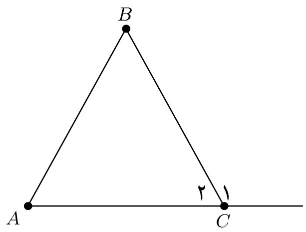
۱۲. به دانش‌آموزان بگویید بنابر تقارن، این حالت هم دقیقاً به همان علت که $AB > DE$ نمی‌تواند برقرار باشد، امکان ندارد رخ دهد. ضمن آنکه می‌توانیم اثباتی دیگر نیز به این صورت ارائه کنیم: فرض کنید داریم $AB < DE$؛ آنگاه مطابق شکل، نقطه‌ی G را روی نیم‌خط AB چنان انتخاب می‌کنیم که $AG = DE$.



ابتدا ثابت کنید که $\overset{\triangle}{AGC} = \overset{\triangle}{DEF}$ و از آن نتیجه بگیرید که $\widehat{G} = \widehat{E}$ و سپس نتیجه بگیرید که $\widehat{G} = \widehat{B}$ و با استفاده از قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی، نشان دهید که $\widehat{G} = \widehat{B}$ نمی‌تواند درست باشد.

۱۳. کافی است در قضیه‌ی «ض‌زز» قرار دهیم $\widehat{E} = \widehat{B} = ۹۰^\circ$.

۱۴.



$$\widehat{B} < \widehat{C}_۱$$

$$\rightarrow \widehat{B} + \widehat{C}_۲ < \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲$$

$$\rightarrow \widehat{B} + \widehat{C}_۲ < ۱۸۰^\circ$$

؟ ثابت کنید $\widehat{A} + \widehat{C}_۲ < ۱۸۰^\circ$.

؟ ثابت کنید $\widehat{A} + \widehat{B} < ۱۸۰^\circ$.

[[خواندن قسمت «اصل» ازکتاب تکمیلی]]

قسمت «اصل» را ازکتاب تکمیلی بخوانید. هدف از این قسمت، بیان مفهوم «اصل» به زبان ساده است.

دو نکته‌ی مهم:

۱. هدف از بیان سؤال در صفحه‌ی ۱۵ کتاب تکمیلی، این است که دانش‌آموزان متوجه شوند جمله‌ی «دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند» در صفحه‌ی ۸۲ کتاب درسی، در واقع از اصول اقلیدس نیست. زیرا دانش‌آموزان اثبات آن را در صفحه‌ی ۵ کتاب تکمیلی به عنوان یک قضیه دیده‌اند.

در نتیجه، چون این گزاره را می‌توان ثابت کرد، پس آن را نمی‌توان به عنوان اصل معرفی کرد.

۲. به دانش‌آموزان بگویید که در صفحه‌ی ۸۲ کتاب آموزش و پرورش، قبل از بیان اصل توازی نام آن را در ابتدای جمله بنویسند.

اصل توازی: از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

بعد از اینکه قسمت اصل را ازکتاب خواندید، فعالیت صفحه‌ی ۸۲ را انجام دهید.

[[تدریس فعالیت ۱ـ صفحه‌ی ۸۲]]

دانش‌آموزان، فعالیت ۱ صفحه‌ی ۸۲ را حل کنند. پس از حل این فعالیت که یک کار شهودی است، دانش‌آموزان حدس می‌زنند که اگر دو خط، با خط سومی موازی باشند، با همدیگر نیز موازی هستند. به آنها بگویید که این حدس به خودی خود فاقد ارزش منطقی است؛ مگر آنکه با آنچه که می‌دانیم و تا به حال یاد گرفته‌ایم، آن را ثابت کنیم.

در آخر این فعالیت، از آنها خواسته شده است که صورت حدس خود را به صورت نمادها و علائم ریاضی بنویسند. به این ترتیب صورت گزاره‌ای زیر، درکلاس درس به‌دست می‌آید.

$\longleftarrow$ **صورت ریاضی فعالیت ۱:** اگر $d \neq d'$ و $d \parallel e$ و $e \parallel d'$، آنگاه $d \parallel d'$.

فراموش نکنید که همیشه بعد از فعالیت‌های کتاب درسی در قسمت هندسه، نتیجه‌ی فعالیت را به صورت

نمادها و علائم ریاضی بنویسید. همه‌ی این حدس‌هایی که به صورت نمادها و علائم ریاضی بیان شده‌اند، در کتاب تکمیلی ثابت شده‌اند.

حال گزاره‌ی ۱ را از کتاب تکمیلی بخوانید و آن را در کلاس برای دانش‌آموزان ثابت کنید.

[[تدریس گزاره ۱ـ کتاب تکمیلی]]

[[تدریس فعالیت ۲ـ صفحه‌ی ۸۳]]

دانش‌آموزان فعالیت ۲ صفحه ۸۳ را حل کنند. بعد از حل فعالیت، دانش‌آموزان حدس می‌زنند که اگر مورّبی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. سپس از دانش‌آموزان بخواهید که صورت ریاضی این فعالیت را در کلاس بیان کنند.

$\longleftarrow$ **صورت ریاضی فعالیت ۲:** اگر $a \parallel a'$ و $e\perp a$، آنگاه $e\perp a'$

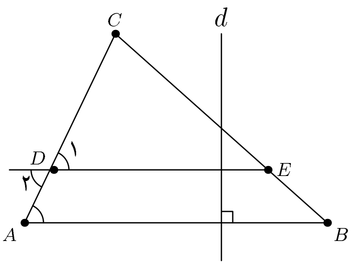
حال گزاره‌ی ۲ را از کتاب تکمیلی بخوانید و آن را در کلاس برای دانش‌آموزان ثابت کنید.

[[تدریس گزاره‌ی ۲ـ کتاب تکمیلی]]

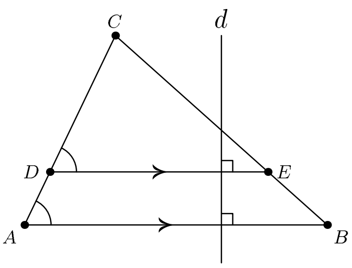
بعد از تدریس گزاره‌ی ۲ از کتاب تکمیلی، تمرین‌های صفحه‌ی ۱۹ کتاب تکمیلی را حل کنید. دقت داشته باشید که در این قسمت کار در کلاس صفحه‌ی ۸۳ و تمرین صفحه‌ی ۸۴ را **انجام ندهید**. انجام این کار در کلاس احتیاج به تعریف و ارائه‌ی قضیه‌ای در مورد «فاصله‌ی بین دو خط موازی» دارد که جلوتر، در بخش چهارضلعی‌ها به آن خواهیم پرداخت. پس به‌طور موقت از انجام این کار در کلاس و تمرین پرهیز کنید.

تمرین

.۱



چون $\widehat{A} = \widehat{D}_۲$، در نتیجه بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، AB و DE موازی هستند. و چون d برخط AB عمود است، در نتیجه بنابرگزاره‌ی ۲، d بر DE نیز عمود است.



۲. چون $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمه هستند، در نتیجه بنابر قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط، دو خط AB و CD با هم موازی می‌شوند.

حال دو خط AB و CD با هم موازی‌اند و AD بر AB عمود است. در نتیجه بنابرگزاره‌ی ۲، AD بر CD نیز عمود خواهد شد.

.۳

[[تدریس فعالیت صفحه‌ی ۸۵]]

بعد از اینکه تمرین‌های صفحه ۱۹ کتاب تکمیلی را حل کردید، فعالیت صفحه‌ی ۸۵ کتاب را در کلاس انجام دهید.

سخنی با معلم. نتیجه‌ای که از این فعالیت حاصل خواهد شد، عکس قضیه‌ی «زاویه‌های متبادل درونی» است. قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی بیان می‌کند که اگر مورّبی دو خط را طوری قطع کند که یک جفت زاویه‌ی متبادل درونی مساوی به وجود آید، آنگاه آن دو خط موازی هستند.

در حالی که نتیجه‌ی این فعالیت چنین است: اگر مورّبی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی، مساوی خواهند شد.

در این فعالیت، از توازی دو خط، تساوی دو زاویه‌ی متبادل درونی نتیجه می‌شود. امّا در قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، از تساوی دو زاویه‌ی متبادل درونی، توازی دو خط نتیجه می‌شود.

در پایان این فعالیت، تفاوت این دو حقیقت برای دانش‌آموزان باید روشن شود. که این دو، عکس یکدیگر هستند.

اگر اصل توازی را قبول نمی‌کردیم، نمی‌توانستیم از فعالیت، نتیجه‌ی مورد نظر را به‌دست آوریم.

در انتهای صفحه‌ی ۸۵ کتاب، نتیجه‌ی فعالیت بیان شده و اثبات آن در کار در کلاس صفحه‌ی ۸۶ بیان شده است. در کتاب تکمیلی نیز اثبات دیگری برای این نتیجه آورده شده است که بعد از انجام کار در کلاس صفحه‌ی ۸۶، آن اثبات را هم در کلاس تدریس کنید.

[[کار در کلاس صفحه‌ی ۸۶]]

۱. الف) با توجه به فعالیت ۲ صفحه‌ی ۸۳، MN بر d' عمود خواهد شد.

در انتهای کار در کلاس، به دانش‌آموزان بگویید که در اثبات این نتیجه، از فعالیت ۲ صفحه‌ی ۸۳ کمک گرفتیم. همچنین برای اثبات فعالیت ۲ صفحه‌ی ۸۳ که به عنوان گزاره‌ی ۲ در کتاب تکمیلی اثبات شد، از اصل توازی

کمک گرفتیم. بنابراین اگر اصل توازی را قبول نکنیم، این نتیجه را به‌دست نخواهیم آورد.

اکنون اثبات دیگری را از کتاب تکمیلی با عنوان قضیه‌ی «دو خط موازی و یک مورّب» در کلاس تدریس کنید.

بعد از تدریس قضیه‌ی «دو خط موازی و یک مورّب»، به کتاب آموزش و پرورش برگشته و فعالیت صفحه‌ی ۸۶ و ۸۷ را تدریس کنید.

[تدریس قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورب از کتاب تکمیلی]

[فعالیت صفحه‌ی ۸۶ و ۸۷]

این فعالیت، در واقع قضیه‌ی «زاویه‌های متبادل درونی» است که قبلاً آن را تدریس کرده‌اید و دانش‌آموزان آن را آموخته‌اند.

[کار در کلاس صفحه‌ی ۸۷]

در قسمت دوم کار در کلاس، اثباتی ارائه شده برای قضیه‌ی «زاویه‌های متبادل درونی» که شما قبلاً آن را از روش دیگری برای دانش‌آموزان ثابت کرده‌اید.

۲. الف) بنابر حالت «زض‌ز».

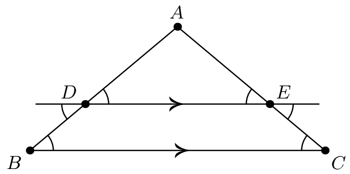
ب) چون در تساوی دو مثلث $A\overset{\triangle}{M}O$ و $B\overset{\triangle}{N}O$، زاویه‌ی $\widehat{M}$ با زاویه‌ی $\widehat{N}$ متناظر است.

پ) بنابر قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط، می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند. می‌بینید که d و d' بر MN عمود هستند. پس با هم موازی‌اند.

بعد از اینکه کار در کلاس صفحه ۸۷ را در کلاس انجام دادید، قسمت «دقت کنید» را از کتاب تکمیلی تدریس کنید و بعد از آن، به دانش‌آموزان بگویید تمرین‌های صفحه‌ی ۲۲ کتاب تکمیلی را انجام دهند.

تمرین

.۱



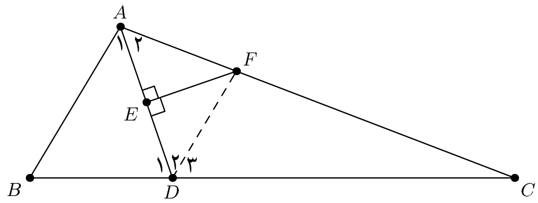
.۲

۳. نشان دهید دو مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{BCE}$، بنا بر حالت «زض‌ز» با هم مساوی‌اند.

۴. با توجه به تمرین قبل، $\widehat{A} = \widehat{B}$؛ پس $A\overset{\triangle}{C}B = B\overset{\triangle}{D}A$. در نتیجه $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$؛ درنتیجه بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، $AC \parallel DB$.

۵. برای حل این تمرین، باید ثابت شود که دو مثلث $B\overset{\triangle}{D}E$ و $C\overset{\triangle}{F}E$ متساوی‌الساقین هستند.

۶. ابتدا تساوی دو مثلث $A\overset{\triangle}{E}F$ و $D\overset{\triangle}{E}F$ را نتیجه بگیرید. سپس تساوی $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_2$ را نتیجه بگیرید و بعد از آن تساوی $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_2$ را نتیجه بگیرید و بعد از آن $AB \parallel DF$ را به‌دست آورید.



بعد از حل این تمرین‌ها درکلاس، بخش زاویه و مثلث را به‌طورکامل ازکتاب درسی آموزش و پرورش جلو بروید.

[[تدریس صفحه‌های ۹۳، ۹۴ و ۹۵]]

اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، در تمرین ۱ صفحه‌ی ۹۸ آمده است. دانش‌آموزان در این تمرین باید روند اثبات را متوجه شوند و آن را کامل کنند. به آنها بگویید که این اثبات نیز مبتنی بر پذیرفتن اصل توازی است.

اثبات «*زاویه‌ی خارجی، با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن مساوی است*» که در صفحه‌ی ۹۵ به آن اشاره شده است نیز مبتنی بر این است که مجموع زوایای مثلث 180° است. پس پذیرفتن این حقیقت نیز وابسته به پذیرفتن اصل توازی است.

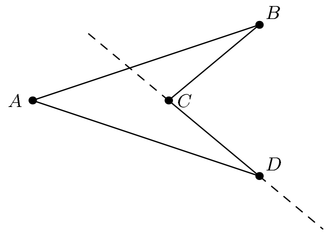
چهارضلعی‌ها

قسمت چهارضلعی‌ها را از کتاب تکمیلی تدریس کنید. در کتاب آموزش و پرورش، تعریفی برای چهارضلعی ارائه نشده است. همچنین خواص آنها را بدون اثبات بیان کرده است.

در کتاب تکمیلی تمام آن خواص ثابت می‌شود. دقت داشته باشید که در تعریف چهارضلعی، به‌طور مختصر به چهارضلعی کاو اشاره شده است. در واقع تعریف دقیق‌تر برای چهارضلعی کاو چنین است:

یک چهارضلعی کاو (مقعر) است، اگر دو رأس آن، در دو طرف خط شامل یک ضلعش باشد.

به عنوان مثال این چهارضلعی کاو است. زیرا دو نقطه‌ی A و B در دو طرف خط شامل ضلع CD است.



می‌توان ثابت کرد که در چهارضلعی کاو، هیچ دو ضلعی نمی‌توانند با هم موازی باشند.

در انتهای صفحه‌ی ۹۷ کتاب آموزش و پرورش، در مورد n ضلعی سؤالی مطرح شده است. به همین دلیل در کتاب تکمیلی نیز دو سؤال مطرح شده است.

برای پاسخ به سؤال اول، از یک رأس n ضلعی باید تمام قطرها را رسم کرد؛ در نتیجه خواهید دید که $n-۲$ مثلث درون n ضلعی ساخته می‌شود؛ سپس نتیجه بگیرید که مجموع زوایای n ضلعی برابر خواهد بود با $(۱۸۰ \times (n-۲))^\circ$.

برای پاسخ به سؤال دوم باید مجموع تمام زوایای داخلی و خارجی را از مجموع تمام زوایای داخلی کم کرد و سپس نتیجه گرفت که مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰° است.

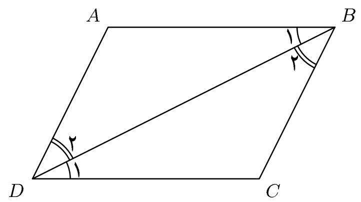
$$(۱۸۰ \times n)^\circ - (۱۸۰ \times (n-۲))^\circ = ۳۶۰^\circ$$

متوازی‌الاضلاع

بعد از تعریف چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع تعریف شده است. بعد از ارائه‌ی تعریف متوازی‌الاضلاع، گزاره‌های خواسته شده در کتاب تکمیلی را ثابت کنید. دقت کنید که این گزاره‌ها، در کلاس باید ثابت شوند و جزئی از درس هستند. برای هر گزاره می‌توانید چند دقیقه به دانش‌آموزان فرصت دهید تا خودشان آن گزاره را ثابت کنند. سپس شما اثبات آن را بیان کنید.

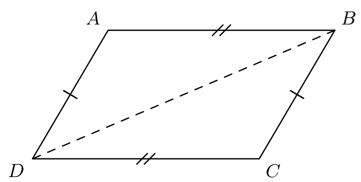
گزاره‌های دسته‌ی اول، گزاره‌هایی هستند که در واقع خواص متوازی‌الاضلاع را بیان و اثبات می‌کنند.

۱. هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند.



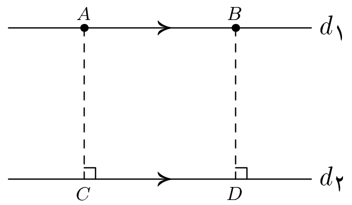
با توجه به قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب، تساوی‌های $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ و $\widehat{D}_2 = \widehat{B}_2$ برقرار هستند. پس دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}D$ و $C\overset{\triangle}{B}D$ باهم مساوی هستند.

۲. با استفاده از گزاره‌ی ۱، دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}D$ و $C\overset{\triangle}{B}D$ باهم مساوی‌اند. پس $AB = CD$ و همچنین $AD = BC$.



۳. قبل از بیان گزاره‌ی ۳، فاصله‌ی یک نقطه خارج یک خط، از آن خط را تعریف کرده‌ایم. می‌دانیم عمودی که از نقطه‌ی P برخط d رسم می‌شود، در واقع کوتاه‌ترین مسیر از نقطه‌ی P به سمت خط d است و به همین دلیل است که اندازه‌ی آن را فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d تعریف می‌کنند.

گزاره‌ی ۳ را با توجه به گزاره‌ی ۲ ثابت کنید.



$AC \parallel BD$؛ زیرا AC و BD هر دو برخط d_2 عمود هستند. همچنین با توجه به فرض $AB \parallel CD$. در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع خواهد شد و با توجه به گزاره‌ی ۲، $AC = BD$ خواهد شد.

تعریفی که با استفاده ازگزاره‌ی ۳ درکتاب تکمیلی آمده است، در واقع کلید فهم و حل کار درکلاس صفحه‌ی ۸۳ است که در قبل، از آن عبور کرده بودیم و حل آن را به آینده موکول نموده بودیم. حال می‌توان با استفاده از گزاره‌ی ۳، آن کار درکلاس را حل کرد.

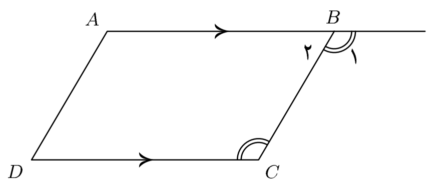
⟦ کار درکلاس صفحه‌ی ۸۳ ⟧

⟦ تمرین صفحه‌ی ۸۴ ⟧

بعد از حل کار درکلاس صفحه‌ی ۸۳ و تمرین صفحه‌ی ۸۴، ادامه‌ی گزاره‌ها را ثابت کنید.

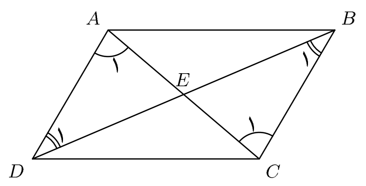
۴. با استفاده ازگزاره‌ی ۱، ثابت می‌شود.

۵. با استفاده از شکل زیر، ثابت می‌شود.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}_1 = \widehat{C} \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ\end{array}\right. \longrightarrow \widehat{C} + \widehat{B}_2 = 180^\circ$$

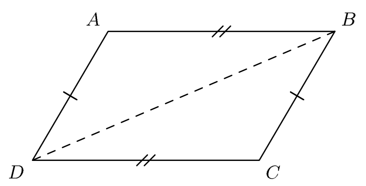
۶. در دو مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{BCE}$، چون AD و BC باهم موازی هستند، در نتیجه $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ و همچنین $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$؛ و چون AD و BC باهم مساوی هستند، پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{BCE}$ باهم مساوی می‌شوند. در نتیجه $BE = DE$ و همچنین $AE = CE$.



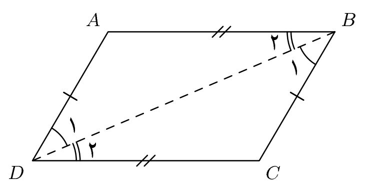
بعد از اثبات دسته‌ی اول گزاره‌ها، دسته‌ی دوم را ثابت کنید.

دسته‌ی دوم، گزاره‌هایی هستند برای تشخیص اینکه یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است یا خیر.

۱. باید ثابت کنیم $AD \parallel BC$ و همچنین $AB \parallel CD$.

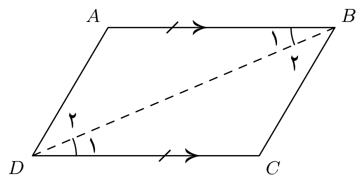


دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{CBD}$ بنابر حالت «ض‌ض‌ض» باهم مساوی می‌شوند. در نتیجه زوایای متناظر مساوی می‌شوند.



حال چون $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$، در نتیجه بنابر قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی، $AD \parallel BC$؛ و چون $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$، در نتیجه $AB \parallel CD$.

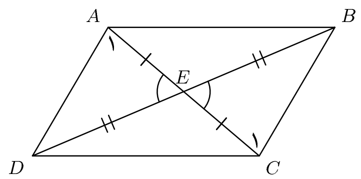
۲. باید ثابت کنیم $AD \parallel BC$.



چون $AB \parallel CD$، پس بنابر قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب، $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$. پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ بنابر حالت «ض‌زض» مساوی می‌شوند. در نتیجه خواهیم داشت $\widehat{D}_2 = \widehat{B}_2$.

حال با استفاده از قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی نتیجه می‌شود که $AD \parallel BC$.

۳. باید ثابت کنیم $AD \parallel BC$ و همچنین $AB \parallel CD$.

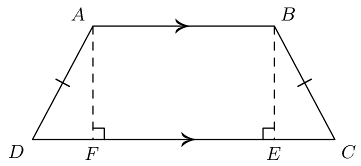


دو مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{BCE}$ بنابر حالت «ض‌زض»، باهم مساوی‌اند. در نتیجه خواهیم داشت $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$؛ که از این تساوی با توجه به قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی نتیجه می‌شود که $AD \parallel BC$. به همین صورت با اثبات تساوی $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{CDE}$ نتیجه می‌شود که $AB \parallel CD$.

ذوزنقه

بعد از ارائه‌ی تعریف ذوزنقه، ۳ گزاره‌ی مربوط به آن را ثابت کنید.

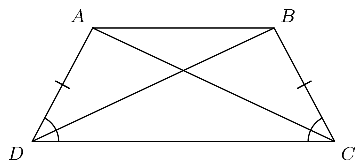
۱.



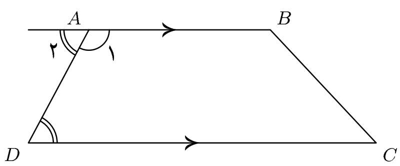
از دو نقطه‌ی A و B، برخط CD عمود رسم می‌کنیم.

با توجه به گزاره‌ی ۳ از دسته‌ی اول گزاره‌های متوازی‌الاضلاع، $AF = BE$. به این ترتیب دو مثلث $\overset{\triangle}{AFD}$ و $\overset{\triangle}{BEC}$ بنابر حالت وتر و یک ضلع باهم برابر خواهند بود. در نتیجه $\widehat{C} = \widehat{D}$.

۲. با استفاده از گزاره‌ی ۱، می‌دانیم که $\widehat{C} = \widehat{D}$. در نتیجه بنابر حالت «ض‌زض»، دو مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ باهم مساوی‌اند. در نتیجه $AC = BD$.



۳. می‌خواهیم نشان دهیم که $\widehat{A}_1 + \widehat{D} = 180^\circ$.

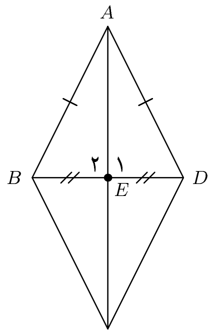


$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_2 = \widehat{D}\\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ\end{array}\right. \longrightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D} = 180^\circ$$

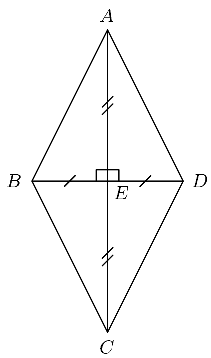
همانند قبل، گزاره‌های بعد از تعریف لوزی و مستطیل و مربع را در کلاس ثابت کنید و قبل از اثبات، چند دقیقه به دانش‌آموزان فرصت دهید تا آنها خودشان گزاره‌ها را ثابت کنند.

لوزی

۱. چون لوزی یک متوازی‌الاضلاع است، پس بنابر گزاره‌ی ۶ از دسته‌ی اول گزاره‌های متوازی‌الاضلاع، قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند. در نتیجه دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ بنابر حالت «ض‌ض‌ض»، باهم مساوی هستند. پس $\widehat{E}_۱ = \widehat{E}_۲ = ۹۰$.



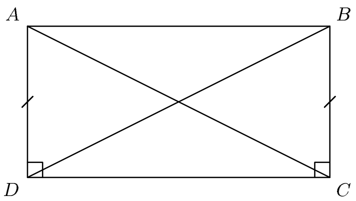
۲. چون قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است. کافی است ثابت کنیم که اضلاع آن با هم برابرند. دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ بنابر حالت «ض‌زض»، باهم برابرند؛ در نتیجه $AB = AD$. به همین صورت نتیجه می‌شود که $AB = BC = CD = DA$.



۳.

مستطیل.

۱. چون مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است، پس اضلاع روبه‌رو باهم مساوی خواهند بود. در نتیجه دو مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ بنابر حالت «ض‌زض»، باهم مساوی‌اند. بنابراین $AC = BD$.



۲. با توجه به گزاره‌ی ۵ از دسته‌ی اول گزاره‌های متوازی‌الاضلاع، به راحتی ثابت می‌شود.

در ادامه «رسم چهارضلعی‌ها» را از روی صفحه‌ی ۱۰۳ کتاب تدریس کنید.

[[تدریس صفحه‌ی ۱۰۳]]

[[تمرین صفحه‌ی ۱۰۶]]

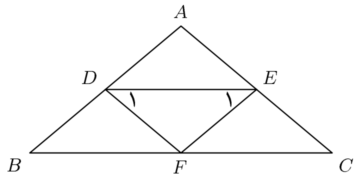
[[حل مسأله صفحه‌ی ۱۰۶ و ۱۰۷]]

[[تمرین صفحه‌ی ۳۰ - کتاب تکمیلی]]

تمرین

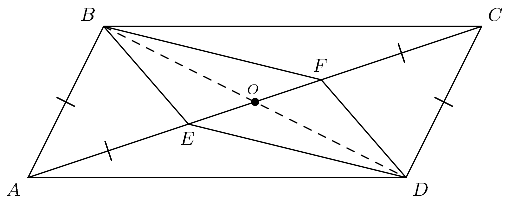
۱. مکمل هستند.

۲. می‌دانیم $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$. از طرفی چون چهارضلعی $DECF$ متوازی‌الاضلاع است، با توجه به گزاره‌ی ۴ دسته‌ی اول گزاره‌های متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌روی آن مساوی‌اند. پس $\widehat{D}_1 = \widehat{C}$. به همین صورت نتیجه می‌شود که $\widehat{E}_1 = \widehat{B}$؛ در نتیجه $\widehat{B} = \widehat{C}$.

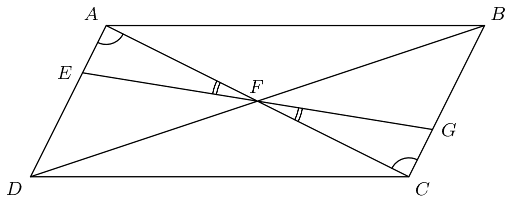


۳. چون AE و CF هر دو بر BD عمود هستند، پس باهم موازی‌اند. برای اثبات تساوی‌شان، ثابت کنید مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و مثلث $\overset{\triangle}{BCF}$ بنابر حالت وتر و یک زاویه باهم برابرند.

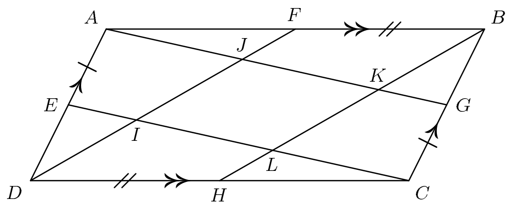
۴. می‌دانیم $AE = AB = CD = CF$. چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس AC و BD یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی $BO = OD$ و $AO = OC$. چون $AE = CF$، در نتیجه $EO = OF$. پس در چهارضلعی $BEDF$ قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند. در نتیجه با توجه به گزاره‌ی ۳ دسته‌ی دوم گزاره‌های متوازی‌الاضلاع، $BEDF$ متوازی‌الاضلاع است.



۵. در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. در نتیجه $AF = FC$. بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$ و $\overset{\triangle}{FCG}$ بنابر حالت «زض‌ز» باهم برابرند. در نتیجه $EF = FG$.



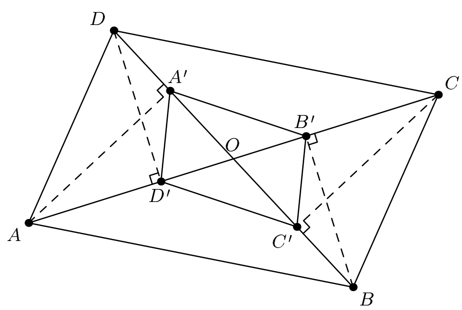
۶. AE و GC باهم موازی و مساوی هستند. پس چهارضلعی $AECG$ متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه JK موازی IL خواهد بود. به همین صورت چون FB و DH باهم موازی و مساوی هستند، چهارضلعی $FBHD$ نیز متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه IJ موازی KL خواهد بود.



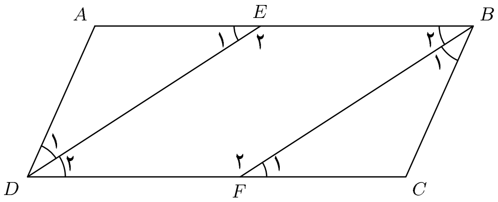
$JK \parallel IL$؛ همچنین $IJ \parallel KL$. در نتیجه $IJKL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

۷. دو مثلث $\overset{\triangle}{BB'C}$ و $\overset{\triangle}{DD'A}$ بنابر حالت وتر و یک زاویه‌ی تند باهم برابرند؛ در نتیجه $AD' = CB'$. از طرفی می‌دانیم که $AO = CO$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $OB' = OD'$.

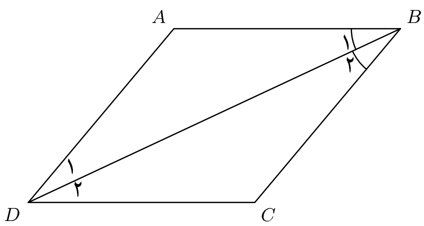
به طریق مشابه نتیجه می‌شود که $OA' = OC'$. بنابراین در چهارضلعی $A'B'C'D'$ قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند. پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ یک متوازی‌الاضلاع است.



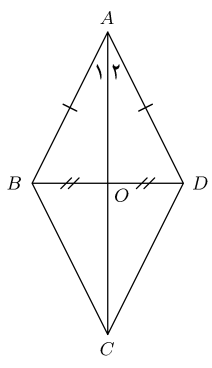
۸. دو مثلث $A'\overset{\triangle}{A}B'$ و $D'\overset{\triangle}{C}C'$ بنابر حالت «ض‌زض» باهم مساوی‌اند؛ در نتیجه $A'B' = C'D'$. به طریق مشابه نتیجه می‌شود که $A'D' = B'C'$. پس $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود.



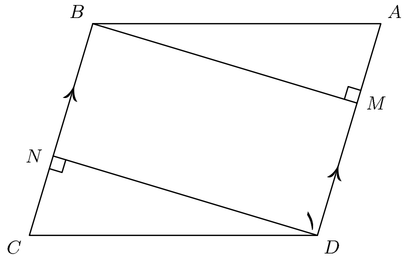
۹. چون $AB \parallel CD$، پس $\widehat{E}_۱ = \widehat{D}_۲$. از طرفی می‌دانیم $\widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲$؛ پس $\widehat{E}_۱ = \widehat{D}_۱$؛ در نتیجه $AD = AE$. به طریق مشابه‌خواهیم داشت $BC = FC$؛ پس $AE = FC$ و از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که $EB = DF$. از طرفی چون $EB \parallel DF$، با توجه به گزاره‌ی ۲ از دسته‌ی دوم گزاره‌های متوازی‌اللاضلاع، نتیجه می‌شود که چهارضلعی $DEBF$ متوازی‌الاضلاع است.



۱۰. می‌دانیم $\widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲$. از طرفی چون $AB \parallel CD$، پس $\widehat{B}_۱ = \widehat{D}_۲$؛ در نتیجه $\widehat{B}_۲ = \widehat{D}_۲$. بنابراین $BC = DC$. چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB = DC$ و همچنین $AD = BC$. پس چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.



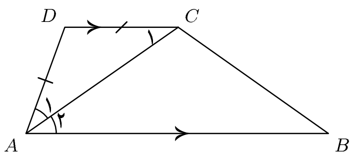
۱۱. لوزی چون نوعی متوازی‌الاضلاع است، پس قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند. در نتیجه بنابر حالت «ض‌ض‌ض»، دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}O$ و $A\overset{\triangle}{D}O$ باهم مساوی‌اند. پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$. به طریق مشابه برای تمام زاویه‌ها می‌توان همین اثبات را ارائه داد.



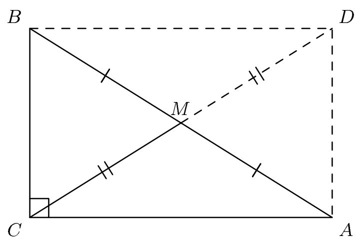
۱۲. چون چهارضلعی BMDN یک زاویه‌ی قائمه دارد، اگر ثابت کنیم که این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، با توجه به گزاره‌ی ۲ قسمت مستطیل، نتیجه می‌شود که در واقع یک مستطیل است. واضح است که $NB \parallel MD$؛ کافی است نشان دهیم $BM \parallel DN$.

چون $BC \parallel AD$، پس بنابر قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب، $\widehat{D}_1 = 90^\circ$. از طرفی می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط باهم موازی‌اند. پس $BM \parallel DN$.

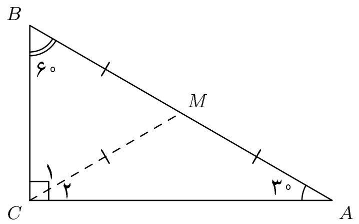
۱۳. واضح است که $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$؛ از طرفی بنابر قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب، $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_2$. پس $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.



۱۴. در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $\widehat{C} = 90^\circ$ و M وسط AB است. CM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم. واضح است که چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند. چون $\widehat{C} = 90^\circ$ ، پس $ACBD$ مستطیل است؛ بنابراین با توجه به گزاره‌ی ۱ قسمت مستطیل $AB = CD$. در نتیجه مجموع طول‌های پاره‌خط CM و MD برابر طول AB می‌شود؛ و چون $CM = MD$، بنابراین $\frac{1}{2}$ (طول AB) = طول CM.

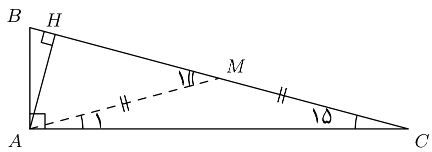


۱۵. M را وسط AB در نظر می‌گیریم. بنابر تمرین ۱۴، $AM = MB = MC$. چون $\overset{\triangle}{BMC}$ متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{C}_1 = 60^\circ$. بنابراین $\overset{\triangle}{BMC}$ متساوی‌الاضلاع است. پس (طول AB) $\frac{1}{2}$ = طول BM = طول BC.



۱۶. M را وسط BC در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس
طول MC = (طول BC) $\frac{1}{2}$ = طول AM.

در نتیجه $\widehat{A}_1 = 15^\circ$ و $\widehat{M}_1 = 30^\circ$. از طرفی می‌دانیم که ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است. بنابراین (طول AM) $\frac{1}{2}$ = طول AH. پس (طول BC) $\frac{1}{4}$ = طول AH



به دانش‌آموزان بگویید که از روی وب‌گاه ریاضی سمپاد، می‌توانند «قضیه‌ی میان‌خط» را بخوانند. سپس هل من مزید مربوط به این قضیه را به دانش‌آموزانی که این قضیه را مطالعه کرده‌اند تحویل دهید. همچنین به تشخیص خود می‌توانید از آزمونک و هل من مزید۱ و هل من مزید۲ استفاده کنید.