

هل من مزید ۳

۱. الف) گزاره و برهان زیر را بخوانید و بفهمید.

گزاره. اگر $abc = ۱$ و $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = a + b + c$ ، در این صورت دست کم یکی از اعداد a ، b و c برابر یک خواهد شد
برهان (اول).

$$(a - ۱)(b - ۱)(c - ۱) = abc \left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \right) - (a + b + c) = ۰$$

برهان (دوم). $P(x)$ را چندجمله‌ای $(x - a)(x - b)(x - c)$ می‌گیریم.

$$\left. \begin{array}{l} abc = ۱ \\ a + b + c = ab + bc + ca = d \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} P(x) = x^3 - dx^2 + dx - ۱ \\ = (x - ۱)(x^2 + (۱ - d)x + ۱) \end{array}$$

بنابراین $P(۱) = ۰$.

ب) برهان سومی برای این گزاره بیابید.

۲. فرض کنید که α ، β ، a ، b و c پنج عدد (حقیقی) هستند؛ و همچنین داریم:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{و} \quad P(\alpha) = \beta, \quad P(\beta) = \alpha, \quad \alpha \neq \beta$$

ثابت کنید که چندجمله‌ای $Q(x) = a^2x^2 + a(b + ۱)x + ac + b + ۱$ بر $(x - \alpha)(x - \beta)$

بخش پذیر است.