



# فصل ۱

## حساب و مجموعه های اعداد





## فهرست

۳.....	مجموعه ی عددهای طبیعی
۶.....	کاربرد تجزیه
۷.....	الک اراتستن
۱۱.....	کاربرد اعداد اول
۱۴.....	فرمول هایی برای اعداد اول
۱۸.....	اعداد اول خاص
۲۰.....	تناسب
۲۳.....	توان
۳۱.....	جذر
۳۴.....	اعداد صحیح
۳۶.....	دنباله های عددی
۴۱.....	اعداد گویا





## حساب و مجموعه های اعداد

### مجموعه ی عددهای طبیعی

۱- کدامیک از مجموعه های زیر متناهی هستند؟

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 15149\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right\}$$

$$D = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

$$E = \text{مجموعه ی همه ی اتم های کره ی زمین}$$

$$F = \text{مجموعه ی اعداد بین } 9 \text{ و } 9/1$$

$$G = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$$

۲- پنج مجموعه ی نامتناهی معرفی کنید؟

۳- بسته بودن یک مجموعه نسبت به ضرب را تعریف کنید.





## حساب و مجموعه های اعداد

۴- بسته بودن مجموعه های زیر را نسبت به جمع و ضرب بررسی کنید؟

مجموعه	بسته بودن نسبت به جمع	بسته بودن نسبت به ضرب
مجموعه ی اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ )	✓	✓
مجموعه ی اعداد زوج ( $\mathbb{E}$ )		
مجموعه ی اعداد فرد ( $\mathbb{O}$ )		
$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$		
$\{-1, 0, 1\}$		
$\{0, -1\}$		
$\{1, 2, 4, 8, \dots\}$		
مجموعه ی اعداد صحیح ( $\mathbb{Z}$ )		





## حساب و مجموعه های اعداد

۵- عددهای اول شبیه « اتم » های یک مولکول می باشند؛ زیرا می توان همه ی عددهای طبیعی بزرگتر

از یک را با استفاده از آن ها ساخت.

عدد ۱۸۰ را در نظر بگیرید. شکی نیست که این عدد مرکب است زیرا مثلاً می توان آن را به شکل

$۱۸ \times ۱۰$  نوشت. اما هر یک از اعداد ۱۸ و ۱۰ هم خودشان مرکب اند؛  $۱۸ = ۶ \times ۳$  و  $۱۰ = ۲ \times ۵$  و در

ضمن  $۶ = ۲ \times ۳$ ، پس

$$۱۸۰ = ۱۸ \times ۱۰ = ۶ \times ۳ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵$$

این تجزیه ی کامل عدد ۱۸۰ به اتم های سازنده اش ( اعداد اول ) می باشد.



حالا شما عدد طبیعی ۴۲۰ را به اتم های سازنده اش یا همان اعداد اول تجزیه کنید.

چرا عدد ۱ عدد اول نیست؟





## حساب و مجموعه های اعداد

### کاربرد تجزیه

۱- آیا  $5 \times 2^9$  بر ۸ بخش پذیر است؟

۲- آیا  $3 \times 2^9$  بر ۹ بخش پذیر است؟

۳- آیا  $3 \times 2^9$  بر ۶ بخش پذیر است؟

۴- اگر یک عدد طبیعی به ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۱۲ نیز بخش پذیر می باشد؟

۵- اگر یک عدد طبیعی به ۶ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۲۴ نیز بخش پذیر است؟

۶- عدد A بر ۳ بخش پذیر نیست، آیا ممکن است پنج برابر آن عدد (۵A) بر ۳ بخش پذیر باشد؟

۷- عدد A زوج است، آیا  $3A$  بر ۶ بخش پذیر است؟





## حساب و مجموعه های اعداد

### الک اراتستن

۱- وقتی بخواهند دانه های گندم را از اضافه های آن جدا کنند از الک خاصی استفاده می کنند که سوراخ های آن با اندازه های دانه های گندم متناسب باشد. اراتستن، ۲۰۰۰ سال پیش، روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود را ارائه کرد. او روی مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را خط نمی کشید، بلکه آن ها را با یک چوب کوچک، سوراخ می کرد مثل اینکه عددهای غیر اول را، از سوراخ های الک بیرون می کرد و تنها عددهای اول را نگاه می داشت.

اژدر که خود را یکی از نوادگان اراتستن معرفی کرده است، معتقد است در روش جدش، رازهایی موجود می باشد. او می گوید یکی از این رازها مربوط به آخرین عدد اولی است که مضاربش در الک حذف می شود. مثلاً در الک اعداد ۱ تا ۸ آخرین عدد اولی که مضاربش خط می خورند عدد ۲ می باشد. او برای کشف این راز دو جدول زیر را تهیه کرد. جداول اژدر را کامل کنید.

عدد آخر الک	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
جذر تقریبی عدد آخر الک	۲/۸	۳	۳/۱	۳/۳	۳/۴	۳/۶	۳/۷	۳/۸	۴	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	۴/۹	۵
آخرین عدد اول استفاده شده	۲				۳				۳				۳					

عدد آخر الک	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	۱۲۱
جذر عدد آخر الک	۳	۴	۵						
آخرین عدد اول استفاده شده	۳	۳							





## حساب و مجموعه های اعداد

- الف) در جدول اول، آخرین عدد اول استفاده شده در چه ستون‌هایی تغییر می‌کند؟
- ب) در جدول اول، ستون بعدی که ردیف سوم روی آن تغییر می‌کند چند است؟
- پ) در جدول دوم، عدد بعدی که، ستونش هاشور خواهد خورد چه عددی می‌باشد؟
- ت) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان آخرین عدد اول استفاده شده در الک و عدد آخر الک بیابید؟

۲- قاعده‌ای برای یافتن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا  $n$  بیابید؟

۳- هژیر و هژیر یک بازی اختراع کرده‌اند. آن‌ها اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۰ را نوشته‌اند و طبق روش الک

اراتستن اعداد غیر اول را به نوبت حذف می‌کنند. هر کس عدد ۴۵ را حذف کند برنده است.

هژیر بازی را شروع می‌کند و ۱ را حذف می‌کند.

هژیر عدد ۴ را حذف می‌کند.

هژیر ۶ را حذف می‌کند و این کار ادامه می‌یابد. به نظر شما چه کسی برنده است؟







## حساب و مجموعه های اعداد

۴- هژیر و هژیر بازی خود را کمی پیشرفته تر کرده اند! در بازی جدید باز هم الگ اراتستن اعداد بین ۱

تا ۶۰ استفاده می شود اما کسی که آخرین عدد را حذف کند برنده است! به نظر شما کدام عدد

آخرین عدد حذف شده خواهد بود؟ و اگر هژیر بازی را شروع کند چه کسی برنده خواهد شد؟

۵- در بازی بین هژیر و هژیر ۴۱ امین عددی که خط می خورد کدام عدد است؟

۶- الگ اراتستن، روش خوب و قابل اعتمادی می باشد و برای نیازهای کوچک، همیشه می توان از همان

«الگ دستی اراتستن» استفاده کرد. این روش هم در گذر تاریخ به تدریج پیشرفت هایی کرده است و

روش جستجوی عددهای اول ساده تر شده است. مثلاً یک دانشجو در سال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام

جنگ جهانی دوم، یکی از این «الگ» های جدید را درست کرده است که آن را بررسی می کنیم:

به اعداد زیر دقت کنید. آیا رابطه ای میان اعداد این جدول مشاهده می کنید؟

۴      ۷      ۱۰      ۱۳      ۱۶      ۱۹      ...

۷      ۱۲      ۱۷      ۲۲      ۲۷      ۳۲      ...

۱۰      ۱۷      ۲۴      ۳۱      ۳۸      ۴۵      ...

۱۳      ۲۲      ۳۱      ۴۰      ۴۹      ۵۸      ...

۱۶      ۲۷      ۳۸      ۴۹      ۶۰      ۷۱      ...

۱۹      ۳۲      ۴۵      ۵۸      ۷۱      ۸۴      ...





## حساب و مجموعه های اعداد

اگر عددی مثل  $n$  در این جدول وجود داشته باشد، عدد  $2n+1$  غیر اول است، و اگر عدد  $n$  در جدول وجود نداشته باشد  $2n+1$  عددی است اول.

مثلاً:

(۱) در جدول عدد  $n=3$  وجود ندارد، بنابراین  $2n+1=7$  عدد اول است.

(۲) در جدول عدد  $n=5$  وجود ندارد، بنابراین  $2n+1=11$  عدد اول است.

(۳) عدد  $n=6$  هم در جدول نیست، بنابراین  $2n+1=13$  عدد اول است.

(۴) در جدول عدد  $n=7$  وجود دارد، بنابراین  $2n+1=15$  عددی است غیر اول و غیره.

اگر اعدادی را که در این جدول نیستند را دو برابر کرده با یک جمع کنیم، می‌توانیم تمام اعداد اول را به دست آوریم. با این روش ۳۰ عدد اول به دست آورید.





## حساب و مجموعه های اعداد

## کاربرد اعداد اول

۱- آیا اعداد زیر اول هستند؟ چرا؟

الف)  $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۶۰۳$

ب)  $۲۰۰۹$

پ)  $(۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۲۰) + ۱۷$

ت)  $۲^{۵۰} + ۱$

ث)  $۳^{۱۷} + ۱$

۲- چنگیز دانش آموز سوم راهنمایی است. او می داند که اعداد اول کاربردهای بسیاری دارند. او در یک

وب گاه معتبر خوانده است که ارتش های کشورهای مختلف از اعداد اول برای رمزنگاری استفاده

می کنند و هر کشوری که عدد اول بزرگتری در اختیار داشته باشد که دیگر کشورها هنوز از آن

مطلع نباشند دارای قدرت فوق العاده ای در رمز کردن اطلاعات خود خواهد بود. او در این وب گاه

همچنین خواند که اعداد اول بزرگ قیمت زیادی دارند و می توان آن ها را فروخت.

چنگیز بعد از خواندن این مطلب شروع به یافتن بزرگ ترین عدد اول کرد. او می خواهد عدد اولی از

کنار هم قرار دادن اعداد اول متوالی به دست آورد مثلاً  $۲۳ \times ۱۷ \times ۱۱ \times ۷ \times ۵ \times ۳$ . اما او می داند برای هر

کشفی باید پله پله و آرام آرام حرکت کند. چنگیز در حالی که زیر لب زمزمه می کرد: «رهرو آن





## حساب و مجموعه های اعداد

نیست که گه تند و گهی خسته رود، رهرو آنست که آهسته و پیوسته رود» کار جستجوی خود را

با عدد ۲۳۵۷ شروع کرد. آیا عدد ۲۳۵۷ اول است؟ ۲۳۵۷۱۱ چطور؟

۳- چنگیز این بار می خواهد از جمع چند عدد مربعی یک عدد اول بیابد. به همین دلیل جدولی مانند زیر

درست کرده است. جدول چنگیز را کامل کنید و درباره ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت

کلی  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  تصمیم بگیرید؟

اول است یا مرکب	حاصل	عدد
اول است.	$\frac{2 \times (2+1) \times (2 \times 2 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2$
مرکب است.	$\frac{3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2 + 3^2$
	$\frac{4 \times (4+1) \times (2 \times 4 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

آیا می توان درباره ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت کلی  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  نظری داد؟





## حساب و مجموعه های اعداد

۴- روح انگیز نیز به دنبال یک عدد اول است. او می خواهد ۵ عدد متوالی بیابد که مجموع آنها اول باشد.

او جدولی مانند جدول زیر رسم کرده است. به او در پر کردن جدول کمک کنید. آیا او موفق به

یافتن این ۵ عدد می شود؟

اعداد	حاصل	اول یا مرکب
$۱+۲+۳+۴+۵$	۱۵	مرکب
$۲+۳+۴+۵+۶$		
$۳+۴+۵+۶+۷$		
$۴+۵+۶+۷+۸$		
$۵+۶+۷+۸+۹$		
$۶+۷+۸+۹+۱۰$		
$۷+۸+۹+۱۰+۱۱$		





## حساب و مجموعه های اعداد

## فرمول‌هایی برای اعداد اول

۱- برای کشف رازهای اعداد اول در طول تاریخ سعی و تلاش‌های بسیاری شده است. بسیاری از

ریاضی‌دانان به دنبال یافتن رابطه‌ای میان اعداد اول بوده‌اند و فرمول‌های بسیاری در این زمینه تولید

شده‌اند یکی از این فرمول‌های جالب، مربوط به اویلر ریاضیدان معروف سوئسی می‌باشد.

فرمول اویلر: ای فرزندان، راز یافتن یک عدد اول اینک پیش روی توست. یک عدد طبیعی انتخاب کن. آن را با

مربعش و عدد ۴۱ جمع کن. حاصل این مجموع حتماً عددی اول است.

جدولی مانند زیر تشکیل داده و فرمول اویلر را برای اعداد ۱ تا ۲۰ بررسی کنید.

اول است ؟	حاصل	فرمول اویلر	عدد
✓	۴۳	$1 + 1^2 + 41$	۱
✓	۴۷	$2 + 2^2 + 41$	۲
✓	۵۳	$3 + 3^2 + 41$	۳
✓	۶۱	$4 + 4^2 + 41$	۴
	۴۶۱	$20 + 20^2 + 41$	۲۰





## حساب و مجموعه های اعداد

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷-۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی کار بود. این ریاضی کار فرانسوی نیز علاقه‌ی زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل  $2^p - 1$  اگر  $p$  یک عدد اول باشد» عدد اول می‌باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده است. او مجموعه‌ای از نت‌های کوتاه و کشیده را می‌نوازد که می‌توان آن‌ها را با صفر (نت‌های کشیده) و یک (نت‌های کوتاه) نشان داد:

۰۱۱۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰...

آیا مرادخان اعداد اول را فراموش کرده است؟

۴- در اینجا، در یک سطر رقم‌های ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ و در زیر آن‌ها حروف الفبای فارسی را از «الف» تا «د» نوشته شده است.

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
د	خ	ح	چ	ج	ث	ت	پ	ب	ا





## حساب و مجموعه های اعداد

می‌توانیم واژه‌ی «باد» را با عدد «۲۱۰» نشان دهیم: حرف‌های واژه‌ی باد، یعنی «ب»، «ا» و «د» با عددهای

«۲»، «۱» و «۰» مشخص می‌شوند و اگر رقم‌ها را از چپ به راست بنویسیم، به عدد ۲۱۰ می‌رسیم.

الف) اکنون شما عددهای مربوط به واژه‌های «تاب»، «تخت» و «دب» را با عدد بنویسید.

ب) عددهای مرکب ۹۰۱، ۴۸۴ و ۱۵۱۵ برای کدام واژه‌ها هستند؟ معنی این واژه‌ها را بگویید.

پ) با این ده رقم، آیا می‌توانید عدد اولی بنویسید که واژه‌ی نظیر آن، معنا داشته باشد؟ بزرگ‌ترین عدد اولی

که واژه نظیر آن با معنی باشد، در این سؤال چند است؟







## حساب و مجموعه های اعداد

۵- در ۱۱۲۱ شمسی ریاضیدانی به نام «گلدباخ» ادعا کرد می توان هر عدد طبیعی بزرگتر از ۵ را به

صورت مجموع سه عدد اول نوشت. مثلاً  $۲۱=۱۱+۷+۳$ . برای اثبات حدس گلدباخ در بین ۲۰ اسفند

۱۳۷۹ تا ۲۰ اسفند ۱۳۸۱ جایزه‌ی یک میلیارد تومانی گذاشته شد، اما کسی نتوانست آن را اثبات کند!

درستی حدس گلدباخ را در جدولی مثل جدول زیر تا عدد ۵۰ امتحان کنید!

۶	$= ۲+۲+۲$
۷	$= ۲+۲+۳$
۸	$= ۲+۳+۳$
۹	$= ۳+۳+۳$
۱۰	$= ۲+۳+۵$
۱۱	$= ۳+۳+۵$
۱۲	$= ۲+۵+۵$
۱۳	$= ۳+۵+۵$
⋮	
۵۰	$= ۲+۵+۴۳$



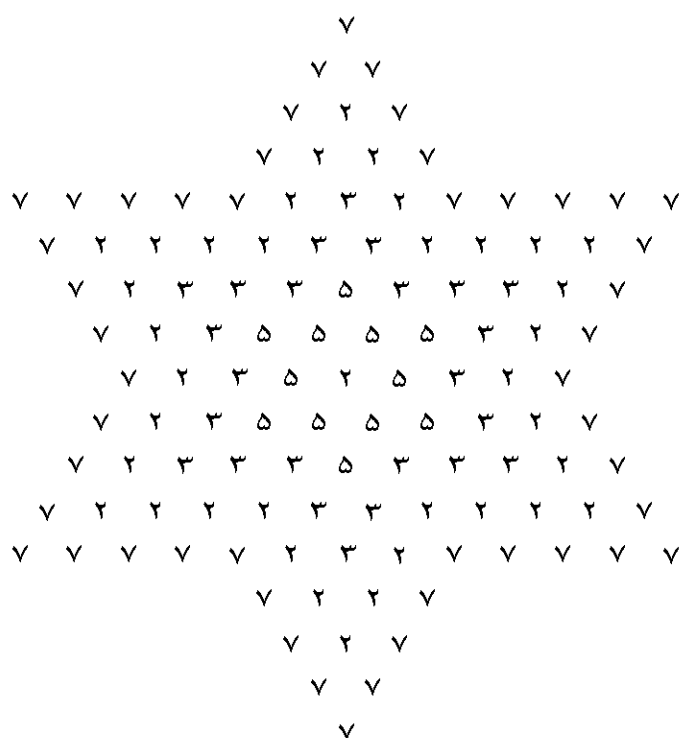


## حساب و مجموعه های اعداد

### اعداد اول خاص

۱- عدد اول کوچک ترین عدد اول ستاره ای می باشد. زیرا

۷, ۷۷۷, ۲۷۷, ۲۲۷, ۷۷۷, ۷۷۲, ۳۲۷, ۷۷۷, ۷۷۲, ۲۲۲, ۳۳۲, ۲۲۲, ۷۷۲, ۳۳۳,  
۵۳۳, ۳۲۷, ۷۲۳, ۵۵۵, ۵۳۲, ۷۷۲, ۳۵۲, ۵۳۲, ۷۷۲, ۳۵۵, ۵۵۳, ۲۷۷, ۲۳۳,  
۳۵۳, ۳۳۲, ۷۷۲, ۲۲۲, ۳۳۲, ۲۲۲, ۷۷۷, ۷۷۷, ۲۳۲, ۷۷۷, ۷۷۷, ۲۲۷, ۷۲۷, ۷۷۷



آیا می توانید اعداد اول با اشکال دیگری بیابید؟





## حساب و مجموعه های اعداد

۲- الف) ۱۱ را یک عدد اول «یکنواخت» می‌گوییم زیرا عدد اولی است که تمام ارقامش یکسان

می‌باشند. جدول زیر را پر کرده و ادامه دهید تا یک عدد اول یکنواخت بیابید.

اول است یا مرکب	عدد
	۱۱۱
	۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱۱۱

ب) به عدد ۱۰۱ یک عدد اول «رایانه‌ای» می‌گویند زیرا عدد اولی است که در آن تنها ارقام صفر و یک به

کار رفته است. به نظر شما آیا عدد اول رایانه‌ای دیگری وجود دارد؟





## حساب و مجموعه های اعداد

### تناسب

۱- یک موتور در هر ۸ ساعت کار ۳۰ لیتر بنزین مصرف می کند. این موتور برای ۲۴۰ ساعت کار

چقدر بنزین لازم دارد؟

۲- وزن محسن سه برابر وزن خواهرش می باشد. اگر وزن این خواهر و برادر روی هم ۱۳۶ کیلوگرم

باشد. وزن هر محسن چند کیلوگرم است؟

۳- بریدن یک تیر چوبی به ۴ بخش برابر، ۹ دقیقه وقت لازم دارد. برای این که همان تیر چوبی را به ۸

بخش تقسیم کنیم چقدر وقت صرف می شود؟

۴- ۸ کارگر اتاقی را در ۳ روز رنگ می زنند. اگر ۱۶ کارگر این اتاق را رنگ کنند چند روز طول

می کشد؟

۵- ۶ نفر مزرعه ای را در ۱۲ روز درو می کنند. ۸ نفر همان مزرعه را در چند روز درو می کنند؟





## حساب و مجموعه های اعداد

۶- در یک سالن کنفرانس اگر صندلی‌ها را در ۶ ردیف بچینیم، در هر ردیف ۱۵ صندلی قرار می‌گیرد.

اگر صندلی‌ها را در ۳ ردیف بچینیم در هر ردیف چند صندلی قرار می‌گیرد؟

۷- اتومبیلی با سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت مسیری را در ۱۲ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت اتومبیل را

به ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت افزایش دهیم همان مسیر را در چند ساعت می‌پیماید؟

۸- اگر ۳۲ کارگر زمینی به مساحت ۱۲۸ مترمربع را تا عمق معین در مدت ۴۰ روز خاک‌برداری کنند،

۲۵ کارگر زمینی به مساحت ۷۵ مترمربع و همان عمق را در چند روز خاک‌برداری خواهند کرد؟

۹- رضا، حسین و علی به همراه هم، کاری را ۸ روزه تمام می‌کنند. پس از انجام ۲ روز کار حسین کار

را ترک کرد معلوم کنید تمام کار چند روزه به پایان می‌رسد.

۱۰- شیر A مخزنی را در مدت ۳ ساعت پر می‌کند و شیر B همان مخزن را در مدت ۹ ساعت پر می‌کند.

اگر هر دو شیر باز باشد مخزن در چند دقیقه پر می‌شود؟





## حساب و مجموعه های اعداد

۱۱- ۱۰ گاو ۱۵ روزه و با روزی ۸ ساعت کار چراگاهی را نابود می کنند. پس از ۳ روز ۵ گاو دیگر به این گروه اضافه شدند (این گاوها مانند دیگران کار می کردند) اما پس از ۷ روز چند گاو ترکیدند و بقیه توانستند با روزی ۳ ساعت کار تا زمان مقرر چراگاه را ویران کنند. چند گاو ترکیدند؟

۱۲- ۳ مرغ در ۳ روز ۳ تخم می گذارند. ۱۰۰ مرغ در چند روز ۱۰۰ تخم می گذارند؟





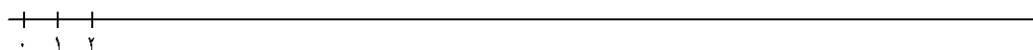
## حساب و مجموعه های اعداد

توان

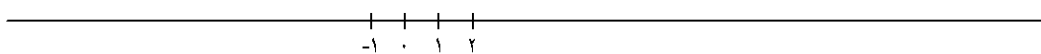
۱-  $2^4$  و  $(-2)^4$  چه تفاوتی با هم دارند؟

۲- اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$



$(-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4$



چه نتیجه ای می گیرید؟

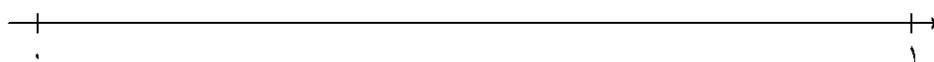




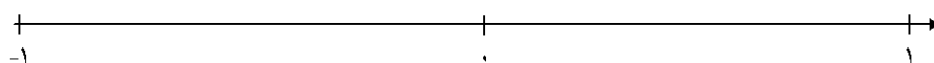
## حساب و مجموعه های اعداد

۳- اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$



چه نتیجه ای می گیرید؟

۴- بین  $2^{100}$  و  $2^{101}$  شش عدد مثال بزنید که بر ۵ بخش پذیر باشند.

۵- کوچک ترین عدد بین  $2^{100}$  و  $2^{101}$  را بیابید که بر ۵ بخش پذیر باشد.

۶- بزرگ ترین عدد بین  $2^{100}$  و  $2^{101}$  که بر ۵ بخش پذیر است را به دست آورید.







## حساب و مجموعه های اعداد

۷- مقایسه کنید.

$$2^{63} \square 3^{43}$$

$$2^{33} \square 3^{22}$$

$$9^{10} \square 4^{20}$$

۸- می خواهیم اعداد  $2^{19}$  و  $16^5$  و  $64^3$  را به ترتیب افزایشی بنویسیم.

$$\begin{array}{ccc} 2^{19} & 16^5 & 64^3 \\ 2^{19} & (2^4)^5 & (2^6)^3 \\ 2^{19} & 2^{20} & 2^{18} \\ 2^{18} & < & 2^{19} < 2^{20} \\ 64^3 & < & 2^{19} < 16^5 \end{array}$$

حال اعداد زیر را به ترتیب افزایشی بنویسید.

$$7^{11}, 8 \times 7^9, 10 \times 7^8, 3 \times 7^{10}$$





## حساب و مجموعه های اعداد

۹- اعداد زیر را به صورت کاهشی بنویسید.

$$۶^{۲۲۲۲۲}, ۳^{۳۳۳۳۳}, ۲^{۵۵۵۵۵}$$

۱۰- می خواهیم کوچک ترین عدد طبیعی  $m$  را طوری تعیین کنیم که

$$m^{۸۰} > ۸۱^{۵۰}$$

$$m^{۸۰} > ۳^{۲۰۰}$$

$$(m^۲)^{۴۰} > (۳^۵)^{۴۰}$$

$$(m^۲)^{۴۰} > (۲۴۳)^{۴۰}$$

$$\rightarrow m = ۱۶$$

حال کوچک ترین عدد طبیعی  $a$  را طوری تعیین کنید که

$$a^{۷۲} > ۱۶^{۵۴}$$

۱۱- می خواهیم بدون به کار بردن علامت های چهارگانه در حساب، با کمک ۴ عدد یک، عددی بنویسیم

که بزرگ ترین مقدار ممکن باشد.

به طور ذهنی و به سادگی می توان فهمید که عدد ۱۱۱۱ جواب مورد نظر مسأله نیست. زیرا عدد:

$$۱۱^{۱۱}$$





## حساب و مجموعه های اعداد

خیلی از آن بزرگتر است. برای محاسبه ی این عدد باید ۱۱ را ۱۱ بار در خودش ضرب کرد. این عدد از ۲۸۵ میلیارد تجاوز می کند و بنابراین نسبت به عدد ۱۱۱۱ قریب ۲۵۰ میلیون مرتبه بزرگتر است.

حال بدون به کار بردن علامت های چهارگانه با کمک ۴ تا عدد ۲ بزرگ ترین عدد ممکن را بنویسید.

$$۲۲^{۲} = ۲۲^۴ \text{ یادداشت.}$$

۱۲- کدام یک از اعداد زیر از بقیه بزرگتر است؟

$$۳۱^{۴۲}, ۲۱^{۴۳}, ۴^{۳۱۵}, ۳^{۴۲۱}, ۲^{۴۲۱}$$

۱۳- در یک محور عددی فاصله هر دو عدد صحیح متوالی ۱ متر می باشد. در این محور فاصله  $۲^{۲۱}$  از

قرینه اش تقریباً چند کیلومتر است؟





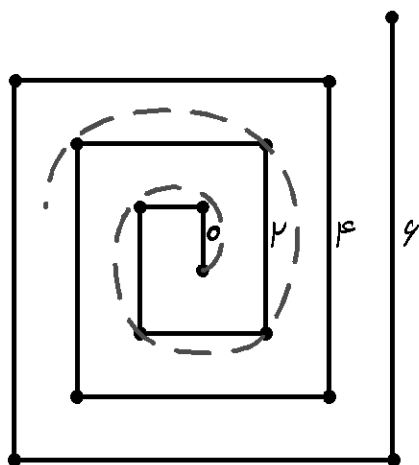
## حساب و مجموعه های اعداد

۱۴- شکل زیر یک «مارپیچ شکسته ی ارشمیدسی» می باشد.

الف) طول این مارپیچ شکسته را حساب کنید.

ب) ادامه مارپیچ شکسته را از هر دو طرف بکشید.

ج) مطابق شکل (خط چین ها) از به هم وصل کردن نقاط شکستگی، یک «مارپیچ ارشمیدسی» بسازید.





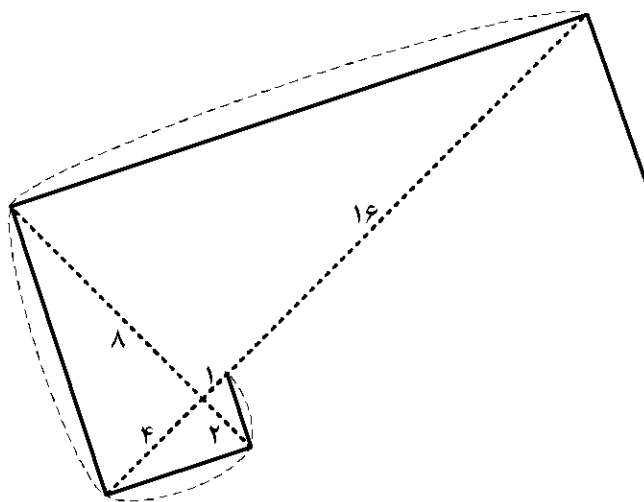
## حساب و مجموعه های اعداد

۱۵- شکل زیر یک «مارپیچ شکسته ی لگاریتمی» است.

الف) طول این مارپیچ شکسته را حساب کنید.

ب) ادامه مارپیچ شکسته را از هر دو طرف بکشید.

ج) مطابق شکل (خط چین ها) از به هم پیوستن نقاط شکستگی یک «مارپیچ لگاریتمی» به دست آورید.





## حساب و مجموعه های اعداد

۱۶- چه تفاوت‌هایی بین ماریچ لگاریتمی و ارشمیدسی می‌بینید.

۱۷- «هوژان» الاغش را به یک درخت بسته است و الاغ او به دور درخت می‌دود. سیر حرکت الاغ

هوژان یک ماریچ ارشمیدسی است یا یک ماریچ لگاریتمی؟

۱۸- الف) آیا امکان دارد که «ماریچ ارشمیدسی» یک منحنی بسته شود؟

ب) آیا امکان دارد که «ماریچ لگاریتمی» یک منحنی بسته شود؟





## حساب و مجموعه های اعداد

## جذر

۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = ?$$

۲- کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که اگر در  $A = 2^4 \times 3^3 \times 5$  ضرب شود تا A مربع کامل شود.

۳- مکعب کامل را تعریف کنید و بگویید چند عدد دورقمی وجود دارد که مکعب کامل باشند؟

۴- جدول مقابل را پر کنید. بعضی از خانه های این جدول هاشورخورده هستند. درباره ی این خانه ها چه

حدسی می زنید؟

تعداد مقسوم علیه ها	مجموعه ی مقسوم علیه ها	عدد
۱	{}	۱
۲	{۱, ۲}	۲
۲	{۱, ۳}	۳
۳	{۱, ۲, ۴}	۴
۲	{۱, ۵}	۵
۴	{۱, ۲, ۳, ۶}	۶
۲	{۱, ۷}	۷
		۸





## حساب و مجموعه های اعداد

۹		
۱۰		
۱۱		
۱۲		
۱۳		
۱۴		
۱۵		
۱۶		
۱۷		
۱۸		
۱۹		
۲۰		

۵- در اتاقی ۱۰۰۰ کمد با شماره‌های به ترتیب از ۱ تا ۱۰۰۰ موجود می باشد.

نفر اول وارد اتاق شد و در همه‌ی کمدها را باز کرد.

نفر دوم وارد اتاق شد و در کمدها را یک در میان بست. در کمدهای ۲ و ۴ و ۶ و ... را بست.

نفر سوم کمدها را ۲ تا در میان (۳ و ۶ و ۹ و ...) تغییر وضعیت داد. (کمدهای باز را بست و کمدهای

بسته را باز کرد.)

نفر چهارم کمدها را ۳ تا در میان (۴ و ۸ و ۱۲ و ...) تغییر وضعیت داد.

در کدام کمدها بعد از ورود نفر ۱۰۰۰ ام باز است.







## حساب و مجموعه های اعداد

۶- درباره حاصل سه جذر داده شده در سؤال چه حدسی می زنید؟

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{121} = 11$$

$$\sqrt{12321} =$$

$$\sqrt{1234321} =$$

$$\sqrt{123454321} =$$

$$\sqrt{2^x \times 3^{y+1}} = 72 \rightarrow x, y = ? \quad -7$$

۸- آیا حاصل  $\sqrt{102021}$  یک عدد طبیعی است؟

۹- آیا ممکن است عددی با ده تا صفر، ده تا یک و ده تا دو نوشته شود و مربع کامل باشد؟

۱۰- بین  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{6}$  سه عدد غیر رادیکالی بنویسید.





## حساب و مجموعه های اعداد

## اعداد صحیح

۱- مجموعه های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x \in N, 1 < x^2 < 100\} \\ B &= \{x \mid x \in N, 2x^2 - 3 = 47\} \\ C &= \{x \mid x \in N, \sqrt{69 - 3x} \in Z\} \\ D &= \{x \mid x \in Z, 3 < \sqrt{x} < 7\} \\ E &= \left\{x \mid x \in Z, \frac{1}{x} \in Z\right\} \\ F &= \left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in Z, x + y = 0\right\} \\ G &= \{2^{x-y} \mid x, y \in N, x - 2 = y\} \\ H &= \{y^x \mid x, y \in N, 3x = y, x < 4\} \\ I &= \left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in N, y = x + 3, y < 4\right\} \\ J &= \left\{\frac{3x + y}{3x - y} \mid x, y \in N, xy = 6\right\} \\ K &= \{x \mid x \in Z, x = 6t, -3 \leq t < 1\} \end{aligned}$$





## حساب و مجموعه های اعداد

۲- مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$$A = \{-20, -19, -18, \dots, -9\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$C = \{8, 27, 64, \dots, 1000\}$$

$$D = \{2, 5, 10, 17, 26, \dots, 122\}$$

$$E = \{15, 25, 35, 45, \dots\}$$

$$F = \{-2, -4, -6, \dots, -20\}$$

$$G = \{3, 8, 13, 18, \dots, 38\}$$

$$H = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$$

$$I = \{2, 4, 16, 256, \dots\}$$

$$J = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$





## حساب و مجموعه های اعداد

## دنباله های عددی

۱- فریبز روی تخته ی سیاه نوشت:

۱, ۲

و از برادرش فرامرز خواست که پنج عدد دیگر به دنبال این دو عدد (و در سمت راست آنها) بنویسند، به طوری که هفت عدد طبق قانون خاصی به دنبال هم آمده باشند. فرامرز به دنبال دو عدد، عددهای ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را نوشت:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷

و گفت: این ها عددهای طبیعی پشت سرهم هستند. پنج عدد دیگر را به دنبال ۱ و ۲ بنویسید که با عددهای فرامرز فرق داشته باشد، ولی هر کس بخواهد، بتواند ردیف عددها را ادامه دهد. گمان می کنید مسأله چند جواب متفاوت دارد؟

۲- این بار فریبز، این پنج عدد را نوشت:

۱, ۲, ۷, ۱۹, ۱۳۸

آیا می توانید کشف کنید که فریبز بنابر چه قانونی این عددها را نوشته است؟ اگر این قانون را کشف کردید، دو عدد بعدی را بنویسید.





## حساب و مجموعه های اعداد

۳- این باز فرامرز این پنج عدد را نوشت:

$$۱, ۲, \frac{۵}{۲}, \frac{۱۱}{۴}, \frac{۲۳}{۸}$$

و از فریریز خواست قانونی را کشف کند که طبق آن بتوان عددهای بعدی را نوشت. آیا شما می توانید این قانون را کشف کنید؟

۴- این شش عدد، بنابر چه قانونی به دنبال هم آمده اند؟

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳$$

قانون را کشف کنید و پنج عدد بعد را بنویسید.

یادداشت. این عددها را که طبق قانونی به دنبال هم آمده اند، دنباله ی عددی می نامیم. این نام گذاری را یاد بگیرید: هر وقت عددی (چه عددهای درست (صحیح) و چه عددهای کسری) بنابر قانونی، پشت سرهم آمده باشند، می گویند با یک دنباله ی عددی سروکار داریم. در ۴ مسأله قبل، همه جا با دنباله های عددی روبه رو بودیم. چند نمونه ی دیگر از دنباله های عددی را می آوریم:





## حساب و مجموعه های اعداد

(۱) دنباله‌ی عددهای طبیعی بخش پذیر بر ۵:

۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ...

سه نقطه‌ای که در سمت راست عددها گذاشته‌ایم، به معنای این است که این دنباله‌ی عددی را تا هر جا بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم.

(۲) دنباله‌ی عددهای طبیعی مجذور کامل:

۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ...





(۳) دنباله‌ی عددهای اول :

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ...

۵- عدد بعدی در دنباله‌ی اعداد زیر چیست؟

۱۳, ۲۴, ۳۳, ۴۰, ۴۵, ۴۸, ...

۶- جاهای خالی را به گونه‌ای پر کنید که رابطه‌ای بین اعداد وجود داشته باشد؟

۱, ۸, ۱۵, ۳, , ۱۹, ۹, ۱۸, ۱۰,   
 , ۱۴, ۷, ۵, ۴, , ۱۳, ۰, ۱۲, ۱۶, 

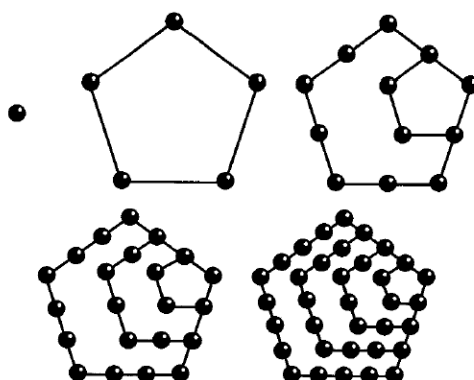




## حساب و مجموعه های اعداد

۷- عدد بعدی چیست؟

۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ۷۰, ?



۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

۸- دنباله فیبوناچی را به خاطر می آورید؟

$$\frac{10}{89} = 0.1123...$$

عدد  $\frac{10}{89}$  به دنباله فیبوناچی ربط زیادی دارد.

اگر عدد  $n$  دنباله فیبوناچی را به صورت زیر در مرتبه  $n$ م اعشار قرار دهیم و با هم جمع بزنیم، این رابطه را کشف خواهیم کرد.

n	
۱	۰/۱
۲	۰/۰۱
۳	۰/۰۰۲
۴	۰/۰۰۰۳
۵	۰/۰۰۰۰۵
۶	۰/۰۰۰۰۰۸
۷	۰/۰۰۰۰۰۱۳
	-----
	۰/۰۱۱۲۳۵۹...





## حساب و مجموعه های اعداد

و این باورنکردنی است که:

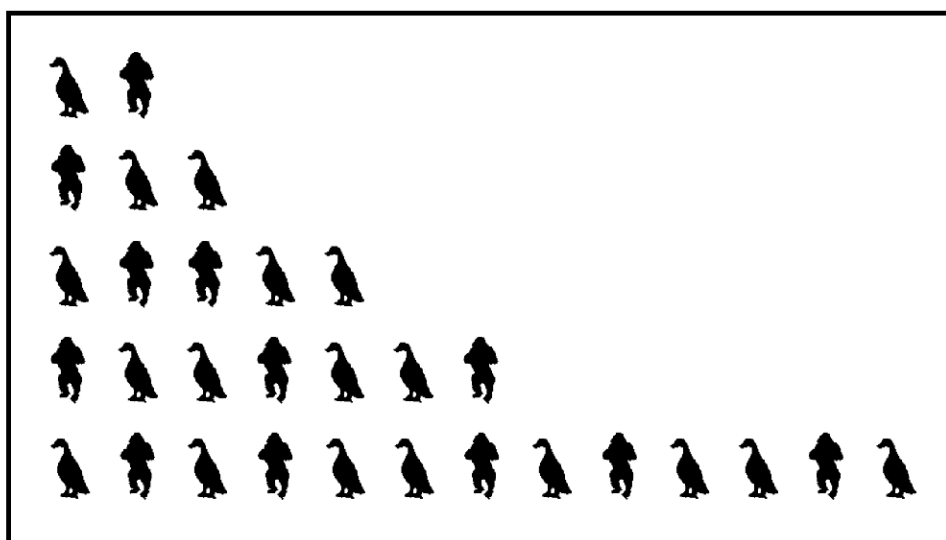
$$\frac{10}{89} = 0.112359550561797752808988764 \dots$$

به نظر شما آیا چنین رابطه‌ای می‌تواند وجود داشته باشد. عدد ۸۹ چه ویژگی دارد؟ این رابطه را تا ۱۰ جمله امتحان کنید.

۹- رئیس باغ‌وحش شهر ژنو هر روز تعداد حیوانات خود را یکی افزایش می‌دهد. او در ابتدای سال یک

اردک و یک میمون داشت و در روز دوم یک میمون و دو اردک! با توجه به شکل زیر او چه

قاعده‌ای برای افزایش حیوانات باغ‌وحش به کار می‌برد.







## حساب و مجموعه های اعداد

### اعداد گویا

۱- اگر بخواهیم ۱۰۰ عدد بنویسیم که هر یک از آنها از  $\frac{41}{43}$  بزرگتر، ولی از  $\frac{42}{43}$  کوچکتر باشد، چگونه

عمل کنیم؟

