فصل ششم

نسبت‌های مثلثاتی

در تدوین این برنامه‌ی درسی از کتاب گرانقدر «مثلثات» سال دوم نظام‌قدیم آموزشی تألیف علی حسن‌زاده‌ماکوئی، هوشنگ طاهری و احمد فیروزنیا استفاده شده است. پیشگفتار این کتاب با عنوان «درباره‌ی مثلثات» در وب‌گاه ریاضی سمپاد موجود است. دانش‌آموزان را به خواندن آن برای پاسخ به سؤال کلی «مثلثات چیست؟» دعوت کنید.

[[تدریس از صفحه‌ی ۱۳۹ تا صفحه‌ی ۱۴۴]]

بسیار باعث تأسف خواهد شد که اولین‌بار هنگام تدریس مفهوم تانژانت نامی از مبدع آن، نابغه‌ی ایرانی «ابوالوفای بوزجانی» نشود.[۱] پس از خواندن بخشی از «زندگی ابوالوفا» از وب‌گاه ریاضی سمپاد در کلاس درس، همه‌ی آنها را به خواندن «زندگی ابوالوفا» در وب‌گاه دعوت کنید. فراموش نشود که اگر ما (ایرانی‌ها) به خود احترام نگذاریم، دیگران به ما احترام نخواهند گذاشت!

[[تدریس از صفحه‌ی ۱۴۵ تا صفحه‌ی ۱۵۶]]

توجه کنید که در بخشی از تدریس به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 0° و 90° اشاره کنید.

۱. برای مثال صفحه‌ی ۲۲۹ جلد اول (ویرایش دوم) از کتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات» نوشته‌ی «هاوارد ایوز» ترجمه‌ی وحیدی‌اصل را ببینید.

نسبت‌های مثلثاتی

.۱

.۲

.۳ الف) چون $\cot x = \frac{۱}{۳}$ بنابراین $\sin x \neq ۰$، زیرا $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. می‌توانیم صورت و مخرج کسر را بر $\sin x$ تقسیم کنیم.

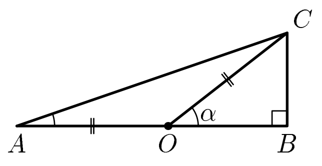
$$\frac{\frac{۲}{۳}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x}{۳\sin x - ۳\cos x} = \frac{\frac{۲}{۳}\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{۱}{۲}\frac{\sin x}{\sin x}}{۳\frac{\sin x}{\sin x} - ۳\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{۲}{۳}\cot x - \frac{۱}{۲}}{۳ - ۳\cot x}$$

اکنون با جایگذاری $\cot x = \frac{۱}{۳}$ خواهیم داشت:

$$= \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}}{۳ - ۳ \times \frac{۱}{۳}} = -\frac{۵}{۳۶}$$

ب) با محاسبه‌ی $\sin x$ و $\cos x$ حاصل به‌دست می‌آید.

.۴ الف) ابتدا نقاط (مورد نیاز) شکل را نام‌گذاری می‌کنیم.



با کمک $\overset{\triangle}{COB}$، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin\alpha = \frac{CB}{CO} \quad \text{و} \quad \cos\alpha = \frac{OB}{CO}$$

با توجه به اینکه $OA = OC$، خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{\frac{CB}{CO}}{۱+\frac{OB}{CO}} = \frac{CB}{CO+OB} = \frac{CB}{AO+OB} = \frac{CB}{AB}$$

اما عبارت به‌دست آمده‌ی اخیر با دقت در $\overset{\triangle}{CAB}$، برابر $\tan(\widehat{CAB})$ خواهد شد. اما با توجه به متساوی‌الساقین بودن $\overset{\triangle}{CAB}$ خواهیم داشت:

$$\widehat{CAB} = \frac{۱}{۲}\widehat{COB} = \frac{\alpha}{۲}$$

پس

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{۲}$$

ب)

$$\tan ۱۵^\circ = \frac{\sin ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

با دانستن مقدار $\tan ۱۵^\circ$ می‌توانیم دیگر نسبت‌های مثلثاتی ۱۵° را بیابیم.

۵. چون $\sin\widehat{B} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، پس واضح است که $\widehat{B} = ۴۵^\circ$.

اکنون سعی می‌کنیم که مقدار $\widehat{C}$ را بیابیم.

$$\cos\widehat{C} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \simeq \frac{۲/۴۵+۱/۴۱}{۴} = \frac{۳/۸۶}{۴} = ۰/۹۶۵$$

با کمک گرفتن از ماشین‌حساب و روش سعی و خطا می‌توان فهمید: $\cos ۱۶^\circ \simeq ۰/۹۶۱$ و $\cos ۱۵^\circ \simeq ۰/۹۶۵$ و $\cos ۱۴^\circ = ۰/۹۷۰$ و $\cos ۱۳^\circ = ۰/۹۷۴$ و $\cos ۱۲^\circ \simeq ۰/۹۷۸$

و $\cos ۱۱^\circ \simeq ۰/۹۸۱$ و $\cos ۱۰^\circ \simeq ۰/۹۸۴$، می‌توان حدس زد که $\widehat{C} \simeq ۱۵^\circ$. بنابراین $\widehat{A} = ۱۸۰ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = ۱۲۰^\circ$.

در واقع این مسأله باید چنین حل شود که صد البته نیازی به گفتن این راه‌حل در کلاس درس نیست!

$$\cos \widehat{C} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

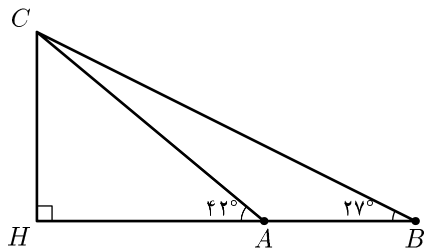
$$= \cos ۳۰^\circ \cos ۴۵^\circ + \sin ۳۰^\circ \sin ۴۵^\circ$$

$$= \cos(۳۰^\circ - ۴۵^\circ) = \cos(-۱۵^\circ) = \cos ۱۵^\circ$$

پس $\widehat{C} = ۱۵^\circ$. از طرفی واضح است که $\widehat{B} = ۴۵^\circ$؛ بنابراین $\widehat{A} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = ۱۲۰^\circ$.

مثلثات برای فاصله‌یابی

۱. نقاط (مورد نیاز) شکل را نام‌گذاری می‌کنیم.



در $C\overset{\triangle}{H}B$ داریم

$$\frac{HB}{HC} = \cot ۲۷^\circ \rightarrow HB = HC \times \cot ۲۷^\circ \qquad (*)$$

در $C\overset{\triangle}{H}A$ داریم:

$$\frac{HA}{HC} = \cot ۴۲^\circ \rightarrow HA = HC \times \cot ۴۲^\circ$$

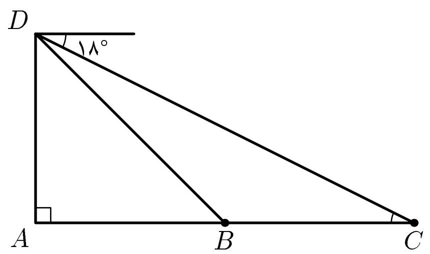
بنابراین با کم کردن طرفین تساوی اخیر از طرفین تساوی «$*$» خواهیم داشت:

$$HB - HA = HC \times \cot ۲۷^\circ - HC \times \cot ۴۲^\circ$$

$$\rightarrow ۱۹/۶۳ = HC(\cot ۲۷^\circ - \cot ۴۲^\circ)$$

$$\rightarrow HC = \frac{۱۹/۶۳}{\cot ۲۷^\circ - \cot ۴۲^\circ} \simeq ۲۳/۰۳m$$

۲. نقاط (مورد نیاز) شکل را نام‌گذاری می‌کنیم.

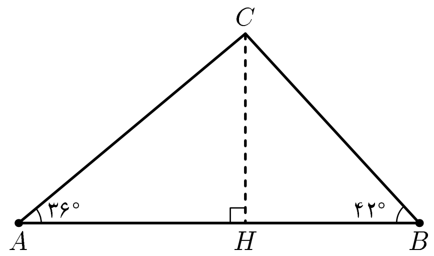


با در دست داشتن $\widehat{ADC} = ۹۰^\circ - ۱۸^\circ = ۷۲^\circ$ و اندازه‌ی AD ، می‌توان نوشت:

$$\tan \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD} \rightarrow AC = \tan ۷۲^\circ \times AD$$
$$\rightarrow AC \simeq ۵/۰۵m$$

$$BC = AC - AB = ۵/۰۵m - ۰/۸۲m = ۴/۲۵m$$

۳. نقاط (مورد نیاز) شکل را نام‌گذاری می‌کنیم. در شکل پاره‌خط CH (که بر پاره‌خط AB عمود است،) بیانگر درخت مورد نظر است.



در $\overset{\triangle}{AHC}$ داریم:

$$\frac{CH}{AH} = \tan ۳۶^\circ \rightarrow CH = \tan ۳۶^\circ \times AH$$

در $\overset{\triangle}{BHC}$ داریم:

$$\frac{CH}{BH} = \tan ۴۲^\circ \rightarrow CH = \tan ۴۲^\circ \times BH$$

پس با توجه به دو تساوی به‌دست آمده‌ی اخیر، داریم:

$$\tan ۳۶^\circ \times AH = \tan ۴۲^\circ \times BH \rightarrow ۰/۷۲۶AH \simeq ۰/۹۰۰BH$$

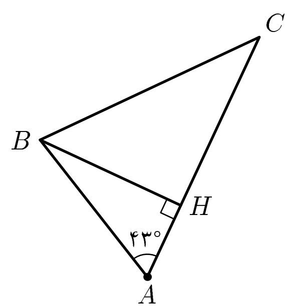
اما می‌دانیم که $AH + BH = ۱۱/۶m$. پس با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول زیر مقادیر AH و BH به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} ۰/۷۲۶AH \simeq ۰/۹۰۰BH \\ AH + BH = ۱۱/۶m \end{cases}$$

با در دست داشتن مقادیر تقریبی AH و $\tan ۳۶^\circ$ می‌توان به اندازه‌ی تقریبی CH رسید.

$$CH \simeq ۴/۶۶۱m$$

۴. مطابق شکل، ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم.



در مثلث $\overset{\triangle}{BHA}$ داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \sin ۴۳^\circ \rightarrow BH \simeq ۰/۶۸ \times ۳۵m = ۲۳/۸m$$

اکنون در مثلث $\overset{\triangle}{BHA}$ از رابطه‌ی فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \rightarrow AH \simeq ۲۵/۶m$$

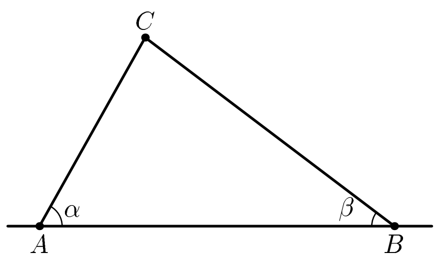
با در دست داشتن $AC = ۶۸m$ و $AH \simeq ۲۵/۵m$، خواهیم داشت:

$$HC \simeq ۴۲/۴m$$

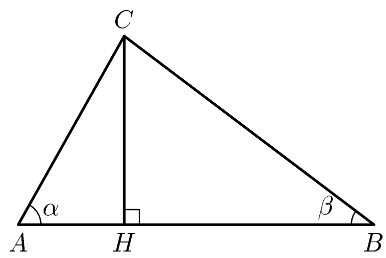
اکنون در مثلث $\overset{\triangle}{BCH}$ از رابطه‌ی فیثاغورس کمک می‌گیریم.

$$HC^{۲} + BH^{۲} = BC^{۲} \to BC \simeq ۴۹/۵m$$

۵. مطابق شکل و نقاط نام‌گذاری شده در دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی معلوم (مثلاً ۱۰۰۰ متر) دو زاویه‌ی خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.



مطابق شکل، در $\overset{\triangle}{ABC}$، ارتفاع وارد بر ضلع AB را با CH نشان می‌دهیم.



با کمک روش ارائه شده در پاسخ سؤال ۴، می‌توانیم به مقدارهای AH و CH دست یابیم؛ و از آنجا با کمک گرفتن از رابطه‌ی فیثاغورس در $\overset{\triangle}{AHC}$ به مقدار AC برسیم.

اتحادهای مثلثاتی

۱. این یک تمرین ساده است. توصیه می‌شود همه‌ی بخش‌های این تمرین در کلاس درس حل شود. توجه دانش‌آموزان را به استثناهای ذکر شده در سمت راست تساوی‌ها جلب کنید و علت ذکر این استثناها را توضیح دهید.

۲.

۳.

$$
\begin{aligned}
& ۲(\sin^۶ x + \cos^۶ x) - ۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) \\
=& ۲(\sin^۲ x + \cos^۲ x)(\sin^۴ x - \sin^۲ x \cos^۲ x + \cos^۴ x) - ۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) \\
=& ۲(\sin^۴ x - \sin^۲ x \cos^۲ x + \cos^۴ x) - ۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) \\
=& -\sin^۴ x - ۲\sin^۲ x \cos^۲ x - \cos^۴ x \\
=& -(\sin^۴ x + ۲\sin^۲ x \cos^۲ x + \cos^۴ x)
\end{aligned}
$$

واضح است که این عبارت همواره نامثبت است: اما چرا این عبارت نمی‌تواند برابر صفر شود. زیرا:

$$= -(\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۲ = -۱$$

۴.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1} &= \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}\times\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x+\cos x+1}\\
&=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{1+2\sin x\cos x-1}\\
&=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x-\cos x}=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x+1)\\
&=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

پس $a=b=c=\frac{1}{2}$.

به دانش‌آموزان این نکته را بفهمانید که برای اثبات یک تساوی به صورت زیر، دو روش وجود دارد:

$$A=B$$

روش اول) با کارکردن و ساده کردن عبارت A، بالاخره به عبارت B برسیم.

$$A=A'=A''=\cdots=B$$

روش دوم) با کارکردن و ساده کردن عبارت A به عبارت x برسیم. سپس با کارکردن و ساده کردن عبارت B به عبارت x برسیم.

$$\left.\begin{aligned}A=A'=A''=\cdots=x\\ B=B'=B''=\cdots=x\end{aligned}\right\}\to A=B$$

اگر تساوی $A=B$ به صورت کسری باشد مثلاً به صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، می‌توان ابتدا درستی تساوی $ad=bc$ را نشان داد. سپس با در نظر گرفتن اینکه b و d نمی‌تواند صفر باشد، نتیجه‌گیری زیر را انجام دهیم.

$$ad=bc\xrightarrow{bd\neq 0}\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}\to\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$