

فصل سوم

توان رسانی و ریشه‌گیری

## فهرست مطالب

۳	..... توان رسانی
۵	..... ریشه گیری

## توان رسانی

۱. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

۲. به جای  $x$  چه عددی باید قرار گیرد؟

$$3^{-102} - 3^{-101} + 3^{-100} - 3^{-99} = 3^{-99}x$$

۳. کدام یک از دو عدد زیر بزرگتر است؟

$$\frac{2^{30} + 1}{2^{31} + 1} \quad \frac{2^{29} + 1}{2^{30} + 1}$$

۴. اگر  $n \in \mathbb{Z}$  و  $(n^n)^{1388} = 1$ ، آنگاه مقدار  $n$  را بیابید.

۵. اگر  $a = 4^{-x}$  و  $b = 2^{2x}$ ،  $a$  و  $b$  چه رابطه‌ای با هم خواهند داشت؟

۶. اگر  $m, n \in \mathbb{N}$  و  $a \in \mathbb{R}$

الف) مثالی بیابید که  $a^m + a^n = a^{m+n}$ .

ب) مثالی بیابید که  $a^m + a^n = a^{mn}$ .

۷. می‌دانیم که سه عدد متفاوت  $x, y$  و  $z$  عضو مجموعه‌ی  $\{2, 3, 4, 5\}$  هستند، به طوری که  $x^y = z$  بیشترین

مقدار ممکن شده است. مقدار عددی هر یک از  $x, y$  و  $z$  را بیابید.

۸. در هر مورد همه‌ی  $m$  ها و  $n$  هایی را بیابید که رابطه‌ی  $m^n = 2^{20}$  درست باشد.

الف)  $m, n \in \mathbb{N}$

ب)  $m, n \in \mathbb{Z}$

۹. با کمک (یک یا چند) پرانتزگذاری، از عدد داده شده به چند عدد متفاوت می‌توان دست یافت؟

$$2^{3^4^5}$$

۱۰.  $x$  و  $y$  چه اعدادی هستند؟

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^2} x = 4^y$$

۱۱. فرض کنید  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $A \in \mathbb{R}$ .

به جای  $A$ ، مثالی بزنید که:

«قسمت غیراعشاری  $A^{2^n}$ ، عددی اول شود.»

بد نیست از یک ماشین حساب مهندسی کمک بگیرید.

۱۲. کدام یک بزرگ‌تر است؟

$$2^{3^1} \quad 3^{2^1}$$

۱۳. بزرگ‌ترین عدد طبیعی  $n$  را بیابید به طوری که  $5^{2^{\circ}} < n^{2^{\circ}}$ .

## ریشه‌گیری

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $\sqrt[3]{-(-7)^{-6}}$

(ب)  $\sqrt{(\pi^2 - 10)^2}$

(ج)  $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 8^{11}}}$

(د)  $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$

(ه)  $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2)$

(و)  $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{18} + \sqrt{162}}{\sqrt{200}}$

۲. مخارج کسرهای زیر را گویا کنید.

(الف)  $\frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} + \sqrt{72}}$

(ب)  $\frac{1}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}}$

(ج)  $\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

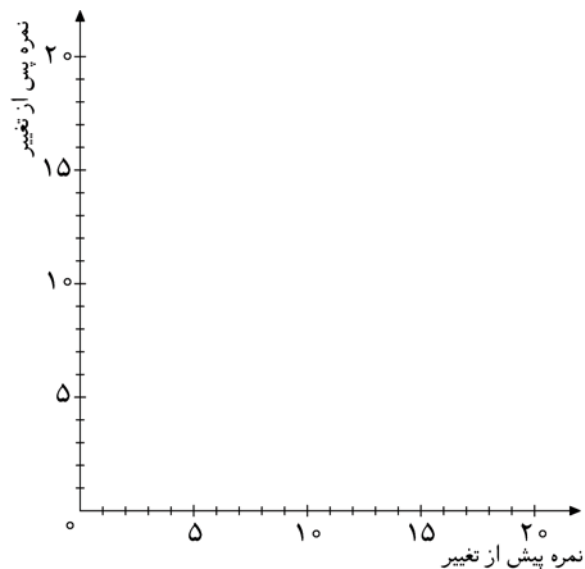
(د)  $\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}}}$

۳. از  $x \in \mathbb{Z}$  و  $x^2 < 36$ ، کدام یک از ادعاهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت؟

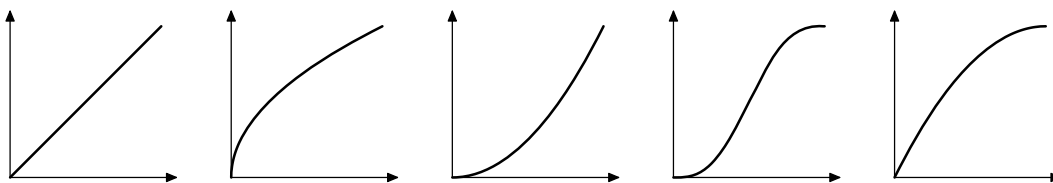
(الف)  $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

(ب)  $-\sqrt{50} < x < \sqrt{50}$

۴. پس از امتحان ریاضی پایان ترم اول، نمره‌ی  $n$  نفر از دانش‌آموزان ۰، ۱، ۲، ...، ۲۰ شده بود! معلم ریاضی تصمیم گرفت برای کمک به نمره‌ی دانش‌آموزان، نمره‌ی هرکسی را در ۲۰ ضرب کند و سپس جذر آن را حساب کند و نمره‌ی جدید به‌دست آمده را در کارنامه وارد کند.



الف) اگر نمودار داده شده را کامل کنید، نمودار شبیه کدام یک از شکل‌های زیر خواهد شد؟



ب) چه نمره‌ای/نمره‌هایی تغییر نمی‌کنند؟

ج) چه نمره‌ای/نمره‌هایی بیشترین تغییر را می‌کند؟

د) چه نمره‌ای/نمره‌هایی پس از تغییر اعشار نخواهد داشت؟ (یعنی عددی صحیح خواهد شد.)

ه) به نظر شما آیا این روش تغییر نمره عادلانه است؟

۵. اگر  $۵ < a < ۳$ ، آنگاه درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{(a-۶)^۶(a-۳)^۳} = -(a-۶)^۳(a-۳)\sqrt{a-۳}$$

۶. اگر  $a < ۰$ ،  $b > ۰$  و  $c < ۰$ ، در این صورت عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف)  $\sqrt{a^۲b^۵c^۴}$

ب)  $\sqrt[۳]{a^۲b^۵c^۴}$

۷. به کمک محاسبه‌ی زیر می‌توان  $\sqrt[۳]{۹}$  را تقریب زد. (یعنی ارقام اعشار  $\sqrt[۳]{۹}$  را یکی یکی حساب کرد.)

ابتدا می‌نویسیم:

$$۸ < ۹ < ۲۷$$

$$۲ = \sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۹} < \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

پس

$$۲ < \sqrt[۳]{۹} < ۳$$

الف) با به کارگیری  $\sqrt[۳]{۹۰۰۰}$ ، اولین رقم اعشار  $\sqrt[۳]{۹}$  را به دست آورید.

ب) اولین رقم اعشار  $\sqrt[۳]{۱۰}$  را به دست آورید.

۸. اگر  $\sqrt{x} = ۹۲۶۱$  و  $\sqrt[۳]{y} = ۶$ ، آنگاه  $\sqrt[۳]{xy}$  چه عددی خواهد شد؟

۹. اگر  $\sqrt{x\sqrt{x}} = 4$ ، آنگاه  $x$  چه عددی است؟

۱۰. الف) ثابت کنید  $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ .

ب) ثابت کنید  $\sqrt{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3}$ .

ج) درست یا غلط؟

$$\text{«}\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a}\text{»}$$

۱۱. الف) ثابت کنید  $\sqrt[3]{2}$  عددی گنگ است.

ب) چه اعداد گنگی مکعب صحیح دارند؟

(یعنی  $x$  چه عددی است به طوری که  $x \in \mathbb{Q}$  و  $x^3 \in \mathbb{Z}$ )