فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

عبارت‌های جبری

۱. حاصل عبارت $x^۲ + y^۳$ را برای $x = ۲y$ بیابید.

۲. حاصل عبارت $(x + ۲)(x^۲ + ۲)(x^۳ + ۲) \cdots (x^{۱۰۰} + ۲)$ را به ازای $x = -۱$ بیابید.

۳. آیا عبارت جبری زیر، یک‌جمله‌ای است؟

$$\frac{x^۲}{x}$$

۴. یک چندجمله‌ای را با چندجمله‌ای $x^۵ + ۱$ جمع کرده‌ایم و حاصل چندجمله‌ای $x^۷ + ۲x^۴ - \sqrt{۲}$ شد. آن چندجمله‌ای چه بوده است؟

۵. الف) در هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک چندجمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل‌جمع هر سه خانه‌ی پشت سرهم برابر x شود. آن چندجمله‌ای که در خانه‌ی مشخص شده با نماد $*$ قرار می‌گیرد، چیست؟

$x + ۱$				$*$				$x - ۱$	

ب) ثابت کنید که همیشه در «$*$» چندجمله‌ای خاصی قرار می‌گیرد.

۶. چندجمله‌ای $(x + ۳)^۳$ را به صورت استاندارد بنویسید.

۷. اگر چندجمله‌ای $(x + \sqrt{۲}y - ۳z)^۷$ را به صورت استاندارد بنویسیم، چه تعدادی از جمله‌های آن فقط متغیر x دارند؟

۸. اگر چندجمله‌ای $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots + ۱۳۸۲x^{۱۳۸۱})(۱ + x^۴ + x^۸)^۲$ را به صورت استاندارد بنویسیم، ضریب $x^۵$ چه عددی خواهد شد؟

۹. چندجمله‌ی متفاوت در صورت استاندارد شده‌ی چندجمله‌ای زیر، ضریب گویا خواهند داشت؟

$$(\sqrt{۱}x^{۰} + \sqrt{۲}x^{۱} + \sqrt{۳}x^{۲} + \sqrt{۴}x^{۳})^{۲}$$

۱۰. در صورت استاندارد شده‌ی چندجمله‌ای $x(x+۱)(x+۲)(x+۳)$، ضریب جمله‌های x و $x^{۳}$ را بیابید.

۱۱. $(۱ + x - ۲y)^{۱۰۰}$ را به صورت یک چندجمله‌ای استاندارد شده می‌نویسیم.

الف) مجموع ضرایب این چندجمله‌ای چقدر می‌شود؟

ب) مجموع ضرایب جمله‌هایی که متغیر x ندارند، چقدر می‌شود؟

ج) مجموع ضرایب جمله‌هایی که متغیر x دارند، چقدر می‌شود؟

د) مجموع ضرایب جمله‌هایی که نه متغیر x دارند و نه متغیر y، چقدر می‌شود؟

ه) درست یا غلط؟

مجموع ضرایب جمله‌هایی که هم‌متغیر x دارند و هم متغیر y = پاسخ «د» − پاسخ «الف»

۱۲. $(x+۳)^{۱۰۰}$ را به صورت یک چندجمله‌ای استاندارد شده می‌نویسیم. اگر در این چندجمله‌ای مجموع ضرایب جمله‌هایی که درجه‌ی x در هر یک از آنها زوج باشد را با E و مجموع ضرایب جمله‌هایی که درجه‌ی x در هر یک از آنها فرد باشد را با O نشان دهیم، در این صورت:

الف) E بزرگ‌تر است یا O؟

ب) E و O چقدر هستند؟

۱۳. یکی از مسأله‌های جالب ضرب دو چندجمله‌ای، به‌دست آوردن تعداد جملات حاصل‌ضرب آن دو است. حاصل‌ضرب یک «سه‌جمله‌ای» در یک «دوجمله‌ای» حداکثر چند جمله خواهد داشت؟

حداقل چند تا ؟ (شمارش تعداد جمله‌ها از روی صورت استاندارد چندجمله‌ای‌ها ، انجام می‌شود.)

۱۴. می‌دانیم که:

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ a^۴ + a^۲ + ۱ \in \mathbb{Q} \\ a^۶ + a^۴ + a^۲ + a^۴b^۲ + a^۲b^۲ + b^۲ \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ثابت کنید که $a^۲ + b^۲ \in \mathbb{Q}$.

۱۵. اگر جای دو متغیر را در یک عبارت جبری عوض کنیم و در شکل عبارت جبری هیچ تغییری ایجاد نشود، می‌گوییم که آن عبارت جبری نسبت به آن دو متغیر «متقارن» است. برای مثال عبارت جبری زیر نسبت به x و y متقارن است ولی نسبت به x و z متقارن نیست.

$$\frac{x}{y} + xyz + \frac{y}{x} + \sqrt{xy}$$

به عبارتی جبری که نسبت به همه‌ی متغیرهایش (که توان آنها صفر نیست،) متقارن باشد، عبارت جبری «متقارن» می‌گوییم. برای مثال:

$$xyz + x + y + z$$

کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر متقارن است؟

الف) $x^۲y + y^۲z + z^۲x$ ب) $x^۳yz + xy^۳z + xyz^۳ + ۵$

ج) $(x-y)^۹$ د) $(x-y)^{۱۰}$

ه) $x^۲$ و) ۷

۱۶. با اضافه کردن یک چندجمله‌ای (با کمترین تعداد جمله‌ها)، چندجمله‌ای‌هایی متقارن بسازید.

الف) $x^۲y + xy$

ب) $۳x^۲ - ۱۰xy + ۳y^۲$

ج) $x^۳y + xz^۲$

۱۷. اگر $S = x + y$ و $P = xy$، آیا عبارت جبری زیر متقارن است؟

$$\frac{(P + ۲S)\sqrt{۳S}}{P}$$

اتحاد

۱. کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد را نشان می‌دهد؟

الف) $x^۲ - ۱ = (۳x - ۴)(x - ۲) - ۲x^۲$

ب) $(x - ۱)(x^۳ + x^۲ + x + ۱) = x^۴ - ۱$

ج) $(x - y)^۳ + (y - z)^۳ + (z - x)^۳ = ۳(x - y)(y - z)(z - x)$

۲. بررسی کنید که تساوی زیر، اتحادی را نشان نمی‌دهد.

$$(a + b - c)^۳ + (ab + ۲c)^۳ = (ab - ۲c)^۳ + (a + b + c)^۳ + ۳abc$$

۳. در هر مورد با تعیین اعداد a و b اتحاد بسازید.

الف) $a(x + ۱)^۲ + b(x + ۱) - ax^۲ - bx = ۸x + ۳$

ب) $(x^۲ + ax + ۱)^۲ = x^۴ + bx^۳ + ۶x^۲ + bx + ۱$

ج) $x^۴ + ۲x^۳ - ۴x^۲ - ۵x - ۶ = (x - a)(x - b)(x^۲ + x + ۱)$

۴. a و b دو عدد هستند به‌طوری که $۱ + x + ۲x^۲ - x^۳ = ۳ + a(x - ۲) + b(x - ۲)^۲ - (x - ۲)^۳$ اتحاد شده است. دربارهٔ علامت عدد $a + b$ چه می‌توان گفت؟

۵. آیا ادعای زیر دربارهٔ اتحاد $x(\sqrt{۳} + ۱) + y(\sqrt{۳} - ۱) = ۱$ درست است؟ چرا؟

«از این اتحاد نتیجه می‌شود که $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = -\frac{۱}{۲}$»

۶. به جای نقطه‌چین چه شرطی باید بگذاریم تا نتیجه‌گیری داده شده درست شود؟

$$\left.\begin{array}{c} r = mp + nq \\ s = mq + np \\ \cdots \end{array}\right\} \rightarrow (m^۲ + amn + n^۲)(p^۲ + apq + q^۲) = r^۲ + ars + s^۲$$

۷. الف) ثابت کنید:

$$(x^۲+y^۲+z^۲)^۲ - ۲(x^۴+y^۴+z^۴) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

ب) ثابت کنید که اگر a، b و c سه عدد مثبت باشند و $۲(a^۸ + b^۸ + c^۸) = (a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲$، در این صورت a، b و c می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم الزاویه باشند.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۱. با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

ب) $(۲x + ۳xy^۲)^۲$ الف) $(x - x^۲)^۲$

د) $((x + y)^۲)^۲$ ج) $(۱ + x + x^۲)^۲$

۲. می‌خواهیم با اضافه کردن یک «یک‌جمله‌ای» به عبارت‌های زیر، آنها را به صورت مربع یک دوجمله‌ای بنویسیم. در هر مورد به چه جمله‌ای نیاز است؟

برای مثال :

$$a^۲ + ۱۴ab + \cdots$$

$$\downarrow$$

$$a^۲ + ۱۴ab + ۴۹b^۲ = (a + ۷b)^۲$$

ب) $۴a^۲ + ۷ab + \cdots$ الف) $۴a^۲ + ۱۴ab + \cdots$

د) $۵a^۲ + ۷a + \cdots$ ج) $۵a^۲ + ۲\sqrt{۵}a + \cdots$

دو مورد بعدی هر کدام سه جواب دارند.

و) $a^۶ + ۴ + \cdots$ هـ) $۴a^۲ + ۲۵ + \cdots$

در مورد بعدی تمام جواب‌های ممکن را بنویسید.

ز) $a^۵ + ۱ + \cdots$

۳. مجموع دو عدد، ۲۰ و حاصل‌ضرب آنها، ۸۴ شده است. مجموع مربع‌های آن دو چیست؟

۴. توان هشتم عدد $\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}$ را بیابید.

۵. اگر $a>b>۰$ و $a^{۲}+b^{۲}=۴ab$، در این صورت مقدار عددی عبارت $\dfrac{a+b}{a-b}$ را بیابید.

۶. الف) ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\in\mathbb{Q}'$.

ب) ثابت کنید اگر $n,m\in\mathbb{Z}$، در این صورت

$$n\sqrt{۲}+m\sqrt{۳}\in\mathbb{Q}\rightarrow n=m=۰$$

۷. می‌خواهیم روش (جالبی) برای جذر تقریبی به‌دست آوریم.

الف) ثابت کنید که اگر $h\neq ۰$ و $۰<|h|<a^{۲}$، آنگاه

$$\sqrt{a^{۲}+h}\simeq a+\frac{h}{۲a}$$

ب) سعی کنید با این روش $\sqrt{۵}$ را تقریب بزنید.

ج) در رابطه‌ی داده شده جایگذاری $a=\dfrac{۱۷}{۱۲}$ و $h=-\dfrac{۱}{۱۴۴}$ را انجام دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر از نتیجه‌ی قسمت «ج» ذوق‌زده شده‌اید، بد نیست بدانید که اجداد جمعی از ما در هزاران سال پیش (شاید با همین روش) به نتیجه‌ی جالب زیر رسیده بودند:

$$\sqrt{۲}\simeq(۱,۲۴\ \ ۵۱\ \ ۱۰)_{۶۰}$$

د) عدد بالا را در مبنای ۱۰ بنویسید و اختلاف آن را با پاسخ «ج» به‌دست آورید.

۸. اگر $a + \frac{۱}{a} = ۴$، در این صورت حاصل عبارت‌های جبری زیر را بیابید.

الف) $a^{۲} + \frac{۱}{a^{۲}}$ ب) $\sqrt{a} + \frac{۱}{\sqrt{a}}$

ج) $a - \frac{۱}{a}$ (به شرطی که $a > ۱$) د) $a^{۴} + \frac{۱}{a^{۴}}$

۹. اگر $\frac{x}{x^{۲} + ۱} = \frac{۱}{۵}$، حاصل عبارت $\frac{x^{۲}}{x^{۴} + ۱}$ را به‌دست آورید.

۱۰. اگر $۴۹^{x} + ۴۹^{-x} = ۷$، آنگاه مقدار عددی $۷^{x} + ۷^{-x}$ را بیابید.

۱۱. ثابت کنید:

الف) $\sqrt{۵ + ۲\sqrt{۶}} = \sqrt{۳} + \sqrt{۲}$

ب) $\sqrt{۱۳ + \sqrt{۴۸}} = ۲\sqrt{۳} + ۱$

۱۲. درستی محاسبه‌ی زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{۲۹ - ۱۲\sqrt{۵}} = \sqrt{(۳ - ۲\sqrt{۵})^{۲}} = ۳ - ۲\sqrt{۵}$$

۱۳. در هر مورد a و b ای گویا بیابید که تساوی برقرار شود.

الف) $\sqrt{۹ - \sqrt{۵۶}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ب) $\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

مجموع مربعات

۱. اگر a، b و c سه عدد باشند و بدانیم که $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۰$، مقدار عددی $a^۳ + b^۳ + c^۳$ را بیابید.

۲. الف) $x^۲ + y^۲ + ۲ - ۲x - ۲y$ را به‌صورت مجموع مربع دو دوجمله‌ای بنویسید.

ب) ثابت کنید که اگر $x^۲ + y^۲ + ۲ - ۲x - ۲y = ۰$، در این صورت $x = y = ۱$.

۳. می‌دانیم که $x^۲ + y^۲ + ۰٫۲۵z^۲ - ۲x + ۲y - z + ۳ = ۰$. مقدار عددی $x + y + z$ را بیابید.

۴. می‌دانیم که a و b دو عدد هستند. ثابت کنید $۹a^۴ + ۱۰a^۲ + b^۲ - ۴ab + ۱$ همواره مثبت است.

۵. ثابت کنید:

الف) اگر $w^۲ + x^۲ = wx$، آنگاه $w = x = ۰$.

ب) اگر $w^۲ + x^۲ + y^۲ = w(x + y)$، آنگاه $w = x = y = ۰$.

ج) اگر $w^۲ + x^۲ + y^۲ + z^۲ = w(x + y + z)$، آنگاه $w = x = y = z = ۰$.

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

۱. با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $(x+۲y+۱)^۲$ ب) $(x-۲y+۱)^۲$

ج) $\left(x^۲+\frac{x}{۲}-۱\right)^۲$ د) $\left(\frac{x^۴}{۲}-x^۲+۱\right)^۲$

ه) $(a+b-c)^۲$ و) $(a-b-c)^۲$

۲. به چند روش متفاوت می‌توان با افزودن یک دوجمله‌ای به عبارت زیر، این عبارت را به‌صورت مربع یک سه‌جمله‌ای نوشت.

$$x^۴+۴y^۲+۱-۴y$$

۳. عبارت‌های زیر را به‌صورت مربع یک سه‌جمله‌ای بنویسید.

الف) $a^۴+۲a^۳+۳a^۲+۲a+۱$ ب) $a^۴+۲\sqrt{۲}a^۳-۲\sqrt{۲}a+۱$

۴. الف) اتحاد زیر را کامل کنید.

$$(a+b+c+d)^۲=a^۲+\cdots$$

ب) پس از اینکه عبارت $(۱+۲x+۳x^۲+\cdots+۱۰x^۹)^۲$ را به‌صورت استاندارد بنویسیم، به چند ضریب فرد خواهیم رسید؟

۵. می‌دانیم که $a + b - c = ۱$. درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید.

الف) $a^۲ + b^۲ - c^۲ = ۱ - ۲ab + ۲c$

ب) $a^۲ - b^۲ + c^۲ = ۱ + ۲ac - ۲b$

ج) $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱ - ۲ab + ۲bc + ۲ca$

د) $a^۲ + b^۲ - c^۲ = -۱ - ۲ab + ۲a + ۲b$

۶. به سه عدد طبیعی x، y و z که در رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = z^۲$ صدق می‌کنند، «سه‌تا عدد فیثاغورسی» می‌گویند.

الف) ثابت کنید که اگر a، $a + ۱$ و c سه‌تا عدد فیثاغورسی باشند به‌طوری که $a + ۱ < c$، در این صورت $۳a + ۲c + ۱$، $۳a + ۲c + ۲$ و $۴a + ۳c + ۲$ هم سه‌تا عدد فیثاغورسی می‌شوند.

ب) از ۳، ۴ و ۵ و با کمک گرفتن از «الف»، سه‌تا عدد فیثاغورسی دیگر بسازید.

ج) ۳، ۴ و ۵ سه‌تا عدد فیثاغورسی هستند که ب.م.م حداقل دوتا از آنها برابر یک است. ثابت کنید که بی‌نهایت «سه‌تا عدد فیثاغورسی» وجود دارد که ب.م.م حداقل دوتا از آنها برابر یک است.

۷. می‌دانیم که مجموع سه عدد a، b و c صفر است،

الف) اگر $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$، در این صورت مقدار عددی $a^۴ + b^۴ + c^۴$ را بیابید.

ب) ثابت کنید که $(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ = ۲(a^۴ + b^۴ + c^۴)$

۸. می‌دانیم که مجموع سه عدد a، b و c یک است ولی مجموع معکوس‌های این سه عدد برابر صفر است. ثابت کنید مجموع مربع‌های این سه عدد، یک خواهد شد.

اتحاد مکعب دوجمله‌ای و بیشتر

۱. ثابت کنید:

اتحاد مکعب دوجمله‌ای:
$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

۲. ثابت کنید:

اتحاد «...» دو جمله‌ای:
$$(a+b)^۴ = a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$$

اینکه این اتحاد نام قدیمی ندارد (مثل مکعب، مربع و یا حتی مُخَمَّس و یا مُسَدَّس)، به شکل و شهود آن باز می‌گردد. برای تعبیر هندسی این اتحاد، از مکعبی چهار بعدی کمک گرفته می‌شود و بد نیست بدانید جسارت کشیدن اشکال چهار بعدی تنها چند سالی است که به آدمی داده شده است!

۳. سال‌ها پیش «خیام» و یا حتی پیش از او «کرجی» دو ریاضی‌دان بنام ایرانی به مطالعه‌ی ضرایب اتحادهای دوجمله‌ای علاقه‌مند شدند. آنها روابط جالبی درباره‌ی این ضرایب کشف کردند. به یمن اکتشافات آنها و به خاطر تنگ‌نظری اروپاییان، امروزه این اکتشافات را به ریاضی‌دان فرانسوی «پاسکال» نسبت می‌دهند!

این ضرایب چنین به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{۰} &= ۱ \\
(a+b)^{۱} &= ۱a + ۱b \\
(a+b)^{۲} &= ۱a^{۲} + ۲ab + ۱b^{۲} \\
(a+b)^{۳} &= ۱a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + ۱b^{۳} \\
(a+b)^{۴} &= ۱a^{۴} + ۴a^{۳}b + ۶a^{۲}b^{۲} + ۴ab^{۳} + ۱b^{۴} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

اگر تنها این ضرایب را بنویسیم، چنین مثلثی تشکیل می‌شود:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & ۱ & & & & \\
 & & & ۱ & & ۱ & & & \\
 & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & \\
 & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & \\
۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱ \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

چه روابطی در بین این اعداد می‌بینید؟ در سطر بعدی چه اعدادی قرار خواهند گرفت؟

برای دیدن دنیایی از این رابطه‌ها به کتاب‌های زیر مراجعه کنید.

- مثلث خیام: هندسه اکتال، نوشته‌ی سیامک جعفری
- شگفتی‌های مثلث خیام: گذری بر آنالیز ترکیبی، نوشته‌ی حسن محمودیان
- مثلث عددی خیام ـ پاسکال و مثلثهای شبیه آن، نوشته‌ی جواد بهبودیان و دیگران.

۴. به کمک تمرین ۱ و ۲ اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $(a-b)^{۳} = a^{۳} - ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} - b^{۳}$

ب) $(a-b)^{۴} = a^{۴} - ۴a^{۳}b + ۶a^{۲}b^{۲} - ۴ab^{۳} + b^{۴}$

۵. تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt[۳]{۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}}(۲ - \sqrt{۳}) = ۱$$

اتحاد مزدوج

۱. با کمک اتحاد مزدوج، حاصل‌ضرب عبارت‌های داده شده را حساب کنید.

الف) $(x^{۳}+۲x^{۲}-x+۴)(x^{۳}-۲x^{۲}-x-۴)$

ب) $(x^{۲}-xy+y^{۲})(x^{۲}+xy+y^{۲})(x^{۴}-x^{۲}y^{۲}+y^{۴})(x^{۸}-x^{۴}y^{۴}+y^{۸})$

۲. به کمک اتحاد مزدوج، درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}=۴ab$$

۳. اگر $x-\frac{۱}{x}=۵$، در این صورت مقدار عددی هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ ب) $x+\frac{۱}{x}$

۴. اگر $a-b=۱$، در این صورت درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(a+b)(a^{۲}+b^{۲})(a^{۴}+b^{۴})(a^{۸}+b^{۸})=a^{۱۶}-b^{۱۶}$$

۵. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۱۶}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲۵۶}\right)$$

۶. ثابت کنید:

الف) $(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{۱۰۰۰}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})^{۹۹۸}=۱۱-۲\sqrt{۳۰}$

ب) $\sqrt[۳]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۷+۴\sqrt{۳}}=۱$

۷. چهار عدد a، b، c و d دو رابطه‌ی زیر را با هم دارند. ثابت کنید $\{a,b\}=\{c,d\}$.

$$a+b=c+d \quad , \quad a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}+d^{۲}$$

اتحاد چاق و لاغر

۱. به اتحادهای زیر اتحاد «چاق و لاغر» (و یا «فیل و فنجان») می‌گویند.

$$a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$$

$$a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$$

شخصیت‌های مجموعه‌ی تلویزیونی کودکانه‌ی «چاق و لاغر»؛ نوشته‌ی بیژن بیرنگ و به کارگردانی مرحوم مسعود رسام.

الف) با نگاهی به محاسبات زیر، علت این دو اتحاد را توضیح دهید.

$$\begin{array}{rclcr} (a+b)(a^2-ab+b^2) & = & a(a^2-ab+b^2) & = & a^3-a^2b+ab^2 \\ & + & b(a^2-ab+b^2) & & +a^2b-ab^2+b^3 \\ \hline & & & & a^3+b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcr} (a-b)(a^2+ab+b^2) & = & a(a^2+ab+b^2) & = & a^3+a^2b+ab^2 \\ & + & -b(a^2+ab+b^2) & & -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline & & & & a^3-b^3 \end{array}$$

ب) سعی کنید که برای این دو اتحاد اثباتی هندسی بیابید.

۲. هر یک از چندجمله‌ای‌های داده شده را (در صورت امکان) با کمک اتحادهای چاق و لاغر تمرین ۱ تجزیه کنید.

الف) x^3-y^3

ب) x^3+y^3

ج) x^4-y^4

د) x^4+y^4

ه) x^5-y^5

و) x^5+y^5

ز) x^6-y^6

ح) x^6+y^6

ط) $x^{7} - y^{7}$

ی) $x^{7} + y^{7}$

ک) $x^{8} - y^{9}$

ل) $x^{8} + y^{8}$

م) $x^{9} - y^{9}$

ن) $x^{9} + y^{9}$

۳. با کمک ضرب لاغر در هر یک از عبارت‌های زیر، اتحادی چاق و لاغر بسازید.

الف) $x^{2} + 2x + 4$

ب) $9x^{2} - 12xy + 16y^{2}$

ج) $x^{4} + x^{2} + 1$

د) $4x^{4} - 2x^{2}y + y^{2}$

ه) $x^{6} - x^{3} + 1$

و) $16x^{4}y^{4} + 25y^{4} + 20x^{2}y^{4}$

۴. با کمک ضرب لاغر در هر یک از اعداد زیر، اتحادی چاق و لاغر بسازید. (یکی از این مورد، دو جواب متفاوت دارد!)

الف) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}$

ب) $\sqrt[3]{256} + 25 + 2\sqrt[3]{250}$

۵. می‌دانیم که $a + \frac{1}{a} = 5$. مقدار عددی هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $a^{3} + \frac{1}{a^{3}}$

ب) $a^{6} + \frac{1}{a^{6}}$

۶. در تمرین پیش با این فرض که $a > 1$، مقدار عددی $a^{3} - \frac{1}{a^{3}}$ را بیابید.

۷. الف) اگر a، b و c سه عدد باشند، ثابت کنید

$$a + b + c = 0 \rightarrow a^{3} + b^{3} + c^{3} = 3abc$$

ب) حاصل $(2 + \sqrt{3})^{3} + (-2\sqrt{3})^{3} + (-2 + \sqrt{3})^{3}$ را حساب کنید.

۸. اگر a، b و c سه عدد باشند، ثابت کنید

$$a + b + c = 0 \rightarrow (2a - b)^{3} + (2b - c)^{3} + (2c - a)^{3} = 3(2a - b)(2b - c)(2c - a)$$

۹. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(۳x - ۲)^۳ + (۷ - ۴x)^۳ + (x - ۵)^۳ = ۰$

ب) $(۳x - ۲)^۳ + (۲x - ۳)^۳ = ۱۲۵(x - ۱)^۳$

۱۰. یکی از کاربردهای جبر و اتحادها، در مطالعه‌ی اعداد است. برای مثال با کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نشان داد که ۱۰۰۱ عددی اول نیست. چگونه؟

۱۱. حاصل‌ضرب‌های زیر را به کمک اتحاد چاق و لاغر حساب کنید.

الف) $(x^۲ + ۲y + ۱)(x^۴ + ۴y^۲ + ۴x^۲y - x^۲ - ۲y + ۱)$

ب) $(x^۲ - ۲y + ۱)(x^۴ + ۴y^۲ + ۲x^۲y - x^۲ - ۴y + ۱)$

ج) $(x^۲ - ۲y - ۱)(x^۴ + ۴y^۲ + ۲x^۲y - ۲x^۲ - ۲y + ۱)$

۱۲. با روشی شبیه قسمت «الف» تمرین ۱، اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$a^۵ + b^۵ = (a + b)(a^۴ - a^۳b + a^۲b^۲ - ab^۳ + b^۴)$$

$$a^۵ - b^۵ = (a - b)(a^۴ + a^۳b + a^۲b^۲ + ab^۳ + b^۴)$$

بیشتر درباره‌ی اتحادها

۱. به هر تساوی بین چندجمله‌ای‌ها، اتحاد می‌گوییم. پس تعداد اتحادها بینهایت تاست!
اکنون این سؤال پیش می‌آید که «چطور یک اتحاد شأن و منزلت ویژه‌ای پیدا می‌کند؟»
پاسخ چنین پرسشی فقط یک کلمه است: «کاربرد!». هر اتحادی کاربرد بیشتری داشته باشد، معروف‌تر و بنام‌تر خواهد شد. گاهی حتی نام کاشف اتحادی پرکاربرد روی آن اتحاد می‌ماند. برای مثال اتحاد «اویلر[۱]» یا «دیوفانت[۲]».

اتحاد دیوفانت[۳]: $$(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)=(ax-by)^۲+(bx+ay)^۲$$

۲. درستی این اتحاد را اثبات کنید.

۳. ۴۸۱ را به دو شیوه‌ی متفاوت به صورت مجموع دو عدد مربع کامل بنویسید.

۴. ۱۱۰۵ را به چهار شیوه‌ی متفاوت به صورت مجموع دو عدد مربع کامل بنویسید.

۵. کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو تا دوجمله‌ای نوشت؟

$$(۴a^۲+۹b^۲)(a^۲+۴b^۲)$$

$$(۳a^۲+۹b^۲)(a^۴+a^۲)$$

$$(۳a^۲+۴b^۲)(x^۲+۷)$$

---

۱. Euler

۲. Diophantus

۳. برخی نویسندگان به اشتباه به این اتحاد، «لاگرانژ» می‌گویند؛ حال آنکه «دیوفانت» بیش از ۱۵ قرن پیش از «لاگرانژ» به این اتحاد اشاره کرده بود!

۶. در این تمرین کاربردی از اتحاد دیوفانت را می‌بینید. ثابت کنید که مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته هستند.

الف) $\{a^۲ + b^۲ | a, b \in \mathbb{Z}\}$ ب) $\{۳a^۲ + b^۲ | a, b \in \mathbb{Z}\}$

۷. اتحاد دیوفانت در «نظریه‌ی اعداد» کاربرد دارد. یک اتحاد بسازید، به امید اینکه کاربرد داشته باشد.

روش‌های تجزیه

امروزه در شاخه‌ای زنده از ریاضیات به نام «جبر جابجایی محاسباتی[1]» درباره‌ی روش‌های تجزیه کردن تحقیق می‌کنند و به دنبال روش‌های بهینه برای تجزیه کردن چندجمله‌ای‌ها می‌گردند. چنین روش‌هایی را «روش‌های فراگیر» می‌نامیم.

با اینکه الگوریتم‌های تجزیه بحثی به‌روز و زنده است اما روش‌هایی «ساخت‌یافته[2]» و قدیمی برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها وجود دارد. به نمونه‌ای از آنها اشاره می‌کنیم.

روش اول) فاکتورگیری

فاکتور[3] به معنی عامل است. در روش فاکتورگیری با شناسایی متغیرها و عامل‌های مشترک یک چندجمله‌ای، با فاکتورگیری به تجزیه‌ی آن چندجمله‌ای دست می‌یابند.

تمرین. تجزیه کنید.

الف) $5x^{10}y - x^5y^2z$

ب) $xy(a+b) + xy(a-b)^2$

ج) $2a(x-2y)^2 - 4ay(x-2y) - 3(a+1)x(x-2y)^3$

روش دوم) استفاده از اتحادها

اتحادهایی که آموخته‌ایم، ابزار خوبی برای تجزیه‌ی بعضی از چندجمله‌ای‌ها هستند.

تمرین. تجزیه کنید.

---

۱. computational commutative algebra

۲. کلاسیک (classic)

۳. factor

الف) $4x^2 - 4x + 1$ — ب) $\frac{a^2}{4} - 3a + 9$

ج) $(a-1)^3 + 8$ — د) $(a-1)^3 + 7$

ه) $x^3 + 3\sqrt[3]{4}x + 3\sqrt[3]{2}x^2 + 2$ — و) $(x+y)^2 - (2x + 2y - 1)$

روش سوم) دسته‌بندی

در روش «دسته‌بندی» با جدا کردن و دسته‌بندی کردن جمع‌وندهای یک چندجمله‌ای، هر یک از دسته‌ها را جداگانه تجزیه می‌کنند؛ سپس با کنار هم قرار دادن و مقایسه‌ی هر یک از عبارت‌های تجزیه شده‌ی به‌دست آمده از دسته‌ها، تلاش می‌کنند کار تجزیه را به پیش ببرند.

برای مثال، به تجزیه‌ی چندجمله‌ای زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 4x + 1 &= (x^3 + 1) + (4x^2 + 4x) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) + 4x(x+1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1 + 4x) \\ &= (x+1)(x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

تمرین. تجزیه کنید.

الف) $a^2 + b^2 - 1 + 2ab$ — ب) $(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

ج) $x^7 + x^6 + \cdots + 1$ — د) $x^8 + x^7 + \cdots + 1$

تمرین. در تجزیه‌ی هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر چند عامل وجود دارد؟

الف) $x^۲ - y^۲ + ۲yz - z^۲$ ب) $(x^۳ + ۱) + ۶(x + ۱)^۲ + ۱$

ج) $(x + a)(x + b) - (y + a)(y + b)$ د) $(x^۲ - ۵x)^۲ - ۳۶$

ه) $x^۶y^۲ - ۷۲۹y^{۱۴}$

روش چهارم) خرد کردن

بعضی از چندجمله‌ای‌ها را می‌توان با خردکردن یکی (و یا چندتا) از جمع‌وندهای آن و سپس با کمک روش‌های دیگر تجزیه کرد.

برای مثال، به تجزیه‌ی چندجمله‌ای زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} ۳x^۳ - ۵x + ۲ &= ۳x^۳ - ۳x - ۲x + ۲ = ۳x(x^۲ - ۱) - ۲(x - ۱) \\ &= ۳x(x - ۱)(x + ۱) - ۲(x - ۱) = (x - ۱)(۳x(x + ۱) - ۲) \\ &= (x - ۱)(۳x^۲ + ۳x - ۲) \end{aligned}$$

تمرین. تجزیه کنید.

الف) $-۶x^۲ + ۵x + ۱$ ب) $(x^۳ + x^۲ + x + ۱) - ۴$

روش پنجم) مربع‌سازی

در روش مربع‌سازی یک چندجمله‌ای را به صورت تفاضل دو چندجمله‌ای مربع کامل می‌نویسند و سپس از اتحاد مزدوج کمک می‌گیرند.

برای مثال، به تجزیه‌ی چندجمله‌ای زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ &= x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ + x^۲y^۲ - x^۲y^۲ = (x^۴ + ۲x^۲y^۲ + y^۴) - x^۲y^۲ \\ &= (x^۲ + y^۲)^۲ - (xy)^۲ = (x^۲ + y^۲ - xy)(x^۲ + y^۲ + xy) \end{aligned}$$

تمرین.   تجزیه کنید.

الف) $x^{4} + y^{4}$ ‏ ‏ ‏ ب) $x^{4} + x^{2} + 1$

ج) $x^{4} - 3x^{2} - 4$ ‏ ‏ ‏ د) $(x^{2} + y^{2})^{2} + x^{4} + y^{4}$

تمرین.   با تبدیل چندجمله‌ای $81x^{4} + 108x^{3} + 50x^{2} - 8x - 24$ به صورت زیر، آن را تجزیه کنید.

$$(ax+b)^{4} - (cx+d)^{2}$$

روش ششم) اتحاد یک‌جمله‌ی مشترک

اتحاد «یک‌جمله‌ی مشترک» حالت کلی‌تر اتحاد مربع دوجمله‌ای است.

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^{2} + (a+b)x + ab}$$

$$\Big\downarrow \text{اگر } a = b$$

$$\boxed{(x+a)^{2} = x^{2} + 2ax + a^{2}}$$

اتحاد یک‌جمله‌ی (دوبار) مشترک بالا حالت کلی‌تری هم دارد:

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) = x^{3} + (a+b+c)x^{2} + (ab+bc+ca)x + abc}$$

به این اتحاد، اتحاد یک‌جمله‌ی (سه‌بار) مشترک می‌گویند.

تمرین.   چه شباهتی بین اتحاد یک‌جمله‌ی (سه‌بار) مشترک و اتحاد یک‌جمله‌ی (چهاربار) مشترک می‌بینید؟

تمرین. صورت اتحادهای یک‌جمله‌ی (پنج‌بار) مشترک را بنویسید.

تمرین. با کمک اتحاد یک‌جمله‌ی مشترک چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ ب) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

ج) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ د) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

روش هفتم) ضرایب نامعین (ِ صحیح)

در تجزیه به روش ضرایب نامعین ابتدا ساختار جواب را حدس می‌زنیم؛ و سپس سعی می‌کنیم تا جواب را به‌دست آوریم.

مثال حل شده را با دقت دنبال کنید.

می‌خواهیم $6x^2 - 5x - 6$ را تجزیه کنیم. اگر این چند جمله‌ای درجه‌ی دو تجزیه شود، ساختار جواب به این صورت خواهد بود:

$$(ax+b)(cx+d) \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$6x^2 - 5x - 6 = (ax+b)(cx+d)$$

$$\rightarrow 6x^2 - 5x - 6 = (ac)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$\rightarrow \begin{cases} ac = 6 \\ ad + bc = -5 \\ bd = -6 \end{cases}$$

حل این دستگاه معادله آسان نیست؛ اما با فرض اینکه $d \in \mathbb{Z}$ و c و b و a، می‌توان آسان‌تر درباره‌ی امکان جواب داشتن این معادله تصمیم گرفت. بدون از دست دادن کلیت کار می‌توانیم فرض کنیم که $c > ۰$ و a و همچنین $c \geq a$؛ (چرا؟).

$$ac = ۶ \to \begin{cases} a = ۶ \\ c = ۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a = ۳ \\ c = ۲ \end{cases}$$

$$bd = -۶ \to \begin{cases} b = ۶ \\ d = -۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b = ۳ \\ d = -۲ \end{cases} \quad \begin{cases} b = ۲ \\ d = -۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -۱ \\ d = ۶ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b = -۲ \\ d = ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} b = -۳ \\ d = ۲ \end{cases}$$

a و c دو حالت متفاوت و همچنین b و d شش حالت متفاوت داشتند. از بین این دوازده حالت متفاوت برای a، b، c و d، با توجه به اینکه $ad + bc = -۵$ تنها یک حالت زیر می‌تواند درست باشد.

$$\begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \\ c = ۲ \\ d = -۳ \end{cases}$$

خوشبختانه(!) به تجزیه‌ی چندجمله‌ای موردنظر دست یافتیم.

$$۶x^۲ - ۵x - ۶ = (۳x + ۲)(۲x - ۳)$$

تمرین. در صورت امکان تجزیه کنید.

الف) $۶x^۲ + ۱۳x + ۶$

ب) $۲۴x^۲ + ۴۳x + ۵$

ج) $۱۲x^۲ + ۲۵x + ۱۲$

د) $۱۴x^۲ + ۱۳x - ۱۲$

ه) $(۲x + ۳)^۲ + (۲x + ۵)(x + ۱) - ۲۱$

در دو مورد زیر ساختار جواب شاید به‌صورت $(ax + by + c)(dx + ey + f)$ باشد.

و) $۲x^۲ + ۲y^۲ + ۵xy - ۵x - ۷y + ۳$

ز) $۲x^۲ + ۶y^۲ - ۷xy + ۵x - ۷y - ۳$

در سه مورد زیر ساختار جواب شاید به‌صورت $(ax^۲ + bx + c)(dx^۲ + ex + f)$ و یا $(ax + b)(cx^۳ + dx^۲ + ex + f)$ باشد.

ح) $x^۴ + x^۳ + x^۲ + ۲x + ۱$

ط) $x^۴ + ۲x^۳ + x^۲ + x + ۱$

ی) $x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۲x + ۱$

در مورد زیر، ساختار جواب به صورت‌های متفاوتی ممکن است باشد.

ک) $x^۵ + x^۴ - ۲x + ۱$

تمرین. اگر a، b، c و d چهار عدد صحیح باشند، ثابت کنید که تجزیه‌ی زیر امکان‌پذیر نیست.

$$x^۴ + ۲x^۲ + ۲x + ۲ = (x^۲ + ax + b)(x^۲ + cx + d)$$

روش هشتم) تغییر متغیر

گاهی اگر به‌جای عبارتی در یک چندجمله‌ای از متغیر دیگری استفاده کنیم، کار تجزیه ساده‌تر می‌شود. چنین روشی گاهی تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌های پیچیده را هم آسان‌تر می‌کند. برای مثال، به تجزیه‌ی چندجمله‌ای زیر دقت کنید.

$$x(x+۱)(x+۲)(x+۳)+۱ = x(x+۳)(x+۱)(x+۲)+۱$$
$$= (x^۲+۳x)(x^۲+۳x+۲)+۱ = (x^۲+۳x)\Big((x^۲+۳x)+۲\Big)+۱$$

اکنون می‌توانیم به‌جای $x^۲+۳x$، y را قرار دهیم.

$$= y(y+۲)+۱ = y^۲+۲y+۱ = (y+۱)^۲$$

اکنون باید به‌جای y، $x^۲+۳x$ را بگذاریم.

$$= ((x^۲+۳x)+۱)^۲ = (x^۲+۳x+۱)^۲$$

تمرین. تجزیه کنید.

الف) $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)-۲۴$

ب) $(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۵$

تمرین. اگر $x \in \mathbb{Z}$، معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

ب) $(4x+1)^2(2x-1)(x+1) = 245$

ج) $x^2(x+1)^2 + x^2 = 8(x+1)^2$

روش نهم)

روش‌های ساخت‌یافته‌ی تجزیه محدود به این هشت روش نیست! در ادامه‌ی کار در فصل‌های دیگر با بعضی از روش‌های دیگر تجزیه آشنا می‌شوید. حتی پس از آن هم می‌توان دوباره

جمله‌ی «روش‌های ساخت‌یافته‌ی تجزیه محدود به این چند روش نیست»! را بیان کرد.

تجزیه کردن میدانی است برای پرورش استعدادهای ریاضی. برای تجزیه کردن یک چندجمله‌ای، اگر فقط از روش‌های گفته شده کمک بگیرید، در این صورت تجزیه یک «مهارت» خواهد بود؛ اما اگر در تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای روشی تازه را به کار ببرید، در این صورت تجزیه یک «خلاقیت» خواهد شد. تلاش کنید تا روش تازه‌ای کشف کنید و نام روش نهم را تعیین کنید. تنها ماده‌ای که لازم دارید یک چندجمله‌ای عجیب است که قرار است تجزیه شود! و فراموش نکنید که ساختن یک چندجمله‌ای که تجزیه می‌شود کار بسیار راحتی است؛ کافی است چند تا چندجمله‌ای را درهم ضرب کنید!

روش‌های فراگیر

به متن درون مستطیل زیر با دقت نگاه کنید.[1] این متن بخش بسیار کوچکی از کار ریاضی‌دان‌ها را به تصویر می‌کشد. ریاضی‌دان‌ها سعی می‌کنند که هر چه بیشتر و بهتر دنیای چندجمله‌ای‌ها را بشناسند؛ زیرا برای شناسایی دنیای چندجمله‌ای‌ها دلایل بسیاری موجود است.

...the following questions arise naturally:

(Primality) Is there an algorithm for deciding if a given ideal is prime?

(Irreducibility) Is there an algorithm for deciding if a given affine variety is irreducible?

(Decomposition) Is there an algorithm for finding the minimal decomposition of a given variety or radical ideal?

The answer to all three questions is *yes*, and descriptions of the algorithms can be found in the works of Hermann (1926), Mines, Richman, and Ruitenberg (1988), and Seidenberg (1974, 1984). The algorithms in these articles are not very practical. However, the work of Gianni, Trager, and Zacharias (1988) has recently led to algorithms implemented in AXIOM and REDUCE that answer the above questions. See also Chapter 8 of Becker and Weispfenning (1993) and, for the primality algorithm, § 4.4 of Adams and Loustaunau (1994).

A different algorithm for studying these questions, based on ideas of Eisenbud, Huneke and Vasconcelos (1992), has been partially implemented in Macaulay.

۱. برگرفته از صفحات ۲۰۵ و ۲۰۶ از چاپ دوم کتاب «Ideals, Varieties, and Algorithms» نوشته‌ی «Cox»، «Little» و «O'Shea».

ترجمه‌ی بخشی از این متن چنین است:

• (تجزیه) آیا الگوریتمی برای یافتن تجزیه‌ی کمینه‌ی یک «چندگونا» یا «ایده‌آل رادیکال» وجود دارد؟
پاسخ هر سه پرسش «بله» است، ...

در این متن «چندگونا» و «ایده‌آل رادیکال» دو مفهوم بسیار مهم جبری هستند. این متن به روش‌های فراگیری برای تجزیه‌ی دسته‌ای وسیع از ساختارهای جبری اشاره می‌کند. گوناگونی نام ریاضی‌دان‌ها، اهمیت و تاریخ‌ها، پویایی این موضوع را نشان می‌دهد. در این متن واژه‌ی «AXIOM» نام نرم‌افزاری است که ریاضی‌دان‌ها از آن برای مطالعه‌ی چندجمله‌ای‌ها کمک می‌گیرند. در وب‌گاه ریاضی سمپاد در «نرم‌افزارهای جبری» فهرستی از نام این نوع نرم‌افزارها را می‌توان یافت.

تمرین. در این متن به نام دو نرم‌افزار دیگر اشاره شده است. آنها را بیابید.

با جستجوی اینترنتی کلید واژه‌های «decomposition [1]» و «method [2]» و «polynomial [3]» می‌توانید درباره‌ی روش‌های تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای کنجکاوی بیشتری کنید.

---

۱. تجزیه
۲. روش
۳. چندجمله‌ای