# فصل هفتم

# عبارت‌های گویا

**[ تدریس از صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۷۱ ]**

در متن کتاب درسی اشتباه فاحشی رخ داده است که متأسفانه در چاپ دوم هم تغییر نکرده است. ذکر این اشتباه برای تفهیم مطلب تقسیم، ضروری به نظر می‌رسد. این تذکر تنها برای معلم مناسب می‌باشد؛ و یا برای آن دانش‌آموزان خاصی که سؤالی در این‌باره بپرسند.

در بخش «ساده کردن عبارت‌های گویا» در قسمت چهارم اولین فعالیت، نتیجه‌ی اشتباه زیر ذکر شده است.

$$«\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}»$$

این تساوی عبارت‌های جبری، اساساً نادرست است. زیرا در عبارت جبری سمت راست می‌توانیم مقدار $c = ۰$ را جایگذاری کنیم ولی با چنین جایگذاری در عبارت سمت چپ به عبارت مبهم «$\frac{۰}{۰}$» می‌رسیم.

مثال ساده‌تر آنچه گفته شد را می‌توانیم با بررسی تساوی زیر نشان دهیم.

$$\frac{x^{۲}}{x} = x$$

این تساوی نادرست است! زیرا دامنه‌ی تعریف عبارت سمت راست برابر مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ است اما دامنه‌ی تعریف عبارت سمت چپ $\mathbb{R} - \{۰\}$. فراموش نکنید که هنگامی دو عبارت جبری با هم مساوی هستند که با هر مقداردهی متغیرهای آنها به نتایج مشابهی از آن دو عبارت جبری برسیم.

درواقع آنچه که در کتاب درسی از آن به عنوان ساده شدن عبارت جبری یاد شده است بدون در نظر گرفتن دامنه‌ی تعریف، اشتباه است!

نکته‌ی دیگری که ذکر آن ضروری به نظر می‌رسد، شکل اصلی تقسیم دو چندجمله‌ای است.

شکل اصلی و درست تقسیم چندجمله‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

| |
|---|
| * چندجمله‌ای باقیمانده+(چندجمله‌ای خارج قسمت)×(چندجمله‌ای مقسوم‌علیه)= چندجمله‌ای مقسوم |

نه به صورت زیر:

$$** \quad \frac{\text{چندجمله‌ای باقی‌مانده}}{\text{چندجمله‌ای مقسوم‌علیه}} + \text{چندجمله‌ای خارج‌قسمت} = \frac{\text{چندجمله‌ای مقسوم}}{\text{چندجمله‌ای مقسوم‌علیه}}$$

علت نادرستی نمایش اخیر، در زمانی آشکار می‌شود که چندجمله‌ای باقی‌مانده برابر صفر شود. برای مثال تقسیم چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{r|l} x^{2} & x \\ \cline{2-2} -\ x^{2} & x \\ \cline{1-1} \circ & \end{array}$$

اگر این تقسیم را به صورت «**» نمایش دهیم، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^{2}}{x} = x + \frac{\circ}{x}$$

(فراموش نکنید که بنابه آنچه گفته شده از این تساوی به $\frac{x^{2}}{x} = x$ نمی‌رسیم.)

ظاهراً این تساوی فقط در دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{\circ\}$ درست است، در حالی که اگر این تقسیم به صورت «*» نمایش دهیم، به تساوی زیر (که در دامنه‌ی $\mathbb{R}$ درست است،) می‌رسیم.

$$x^{2} = x \times x + \circ$$

قوت و قدرت نمایش «*» در اثبات قضیه‌ی زیر ظاهر می‌شود. اثبات این قضیه در وب‌گاه ریاضی سمپاد در اختیار دانش‌آموزان قرار دارد.

| |
|---|
| اگر عدد $a$ ریشه‌ی چندجمله‌ای یک متغیری $P$ باشد، آنگاه با جایگذاری $a$ به جای متغیر چندجمله‌ای به مقدار عددی صفر می‌رسیم. |

و برعکس

| |
|---|
| هرگاه با جایگذاری عدد $a$ به جای تنها متغیر چندجمله‌ای $P$، به مقدار صفر برسیم، در این صورت چندجمله‌ای $P$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است. |

## تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱. الف)

ب)

ج) در این تقسیم، ابتدا باید مقسوم را به صورت استاندارد نوشت اگر مقسوم را به صورت استاندارد ننویسم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده با گام‌های طولانی‌تری به‌دست می‌آیند. صحت این مطلب را می‌توانید با کمک دانش‌آموزان بررسی کنید.

د) در این تقسیم، ابتدا باید مقسوم‌علیه را به صورت استاندارد نوشت. استاندارد ننوشتن مقسوم‌علیه موجب طولانی شدن گام‌های تقسیم می‌شود. صحت این مطلب را می‌توانید با کمک دانش‌آموزان بررسی کنید. در واقع پس از پاسخ‌گویی به «ج» و «د» دانش‌آموزان باید به این نتیجه برسند که: «استاندارد نوشتن مقسوم و مقسوم‌علیه در یک تقسیم برای دوری از طولانی‌تر شدن تقسیم است.»

هـ) پس از محاسبه‌ی تقسیم، باقی‌مانده‌ی این تقسیم صفر می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$x^۵ + x + ۱ = (x^۲ + x + ۱)(\text{چندجمله‌ای خارج‌قسمت})$$

به این ترتیب به تجزیه‌ی $x^۵ + x + ۱$ خواهیم رسید.

به دانش‌آموزان بگویید که این یک روش برای تجزیه می‌تواند باشد:

اگر بخواهیم چندجمله‌ای $P$ را تجزیه کنیم و (به‌طور اتفاقی و یا روش‌مند) به وجود یک چندجمله‌ای مثل $Q$ پی ببریم به‌طوری که باقی‌مانده‌ی تقسیم $P$ بر $Q$ برابر صفر شود آنگاه به تجزیه‌ی چندجمله‌ای $P$ دست یافته‌ایم:

$$P = Q \times (\text{خارج‌قسمت تقسیم } P \text{ بر } Q)$$

؟ با تقسیم $x^{۱۰} + x + ۱$ بر چندجمله‌ای‌های زیر، این چندجمله‌ای را تجزیه کنید.

الف) $x^۲ - x - ۱$

ب) $x^۲ - x + ۱$

ج) $x^۲ + x - ۱$

د) $x^۲ + x + ۱$

□ $x^{۱۰} + x + ۱$ بر $x^۲ + x + ۱$ بخش‌پذیر است.

و) در تقسیم چندجمله‌ای‌ها هیچ ترسی از ظاهر شدن ضرایب عددی گنگ نیست!

**۲.** الف)

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۲ + \;\; ۴ & x^۲ + ۴ \\ \hline -\; ۳x^۲ + ۱۲ & \quad ۳ \\ \hline -۸ & \end{array}$$

ظاهر شدن باقی‌مانده‌ی منفی در تقسیم چندجمله‌ای مجاز است. در واقع یا درجه‌ی باقی‌مانده باید نامنفی شود و یا باقی‌مانده عدد صفر شود.

ب)

$$
\begin{array}{r|l}
x^{۲} + ۴ & ۳x^{۲} + ۴ \\ \cline{2-2}
- \; x^{۲} + \frac{۴}{۳} & \quad \frac{۱}{۳} \\ \cline{1-1}
\frac{۸}{۳} &
\end{array}
$$

ج)

$$
\begin{array}{r|l}
۲۵ & x + ۵ \\ \cline{2-2}
- \; ۰ & \; ۰ \\ \cline{1-1}
۲۵ &
\end{array}
$$

د)

$$
\begin{array}{r|l}
x + ۵ & \quad ۲۵ \\ \cline{2-2}
- \; x & \frac{x}{۲۵} + \frac{۱}{۵} \\ \cline{1-1}
۵ & \\
- \; ۵ & \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}
$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر چندجمله‌ای بر یک عدد (ناصفر) برابر صفر می‌شود.

**۳.** این یک تمرین چالش برانگیز است.

الف) چون برای چندجمله‌ای صفر نمی‌توان درجه تعریف کرد، پس نمی‌توان با انجام تقسیم یک چندجمله‌ای بر صفر درجه‌ی باقی‌مانده را از درجه‌ی مقسوم‌علیه کمتر کرد.

ب)

$$
\begin{array}{r|l}
۰ & x \\ \cline{2-2}
- \; ۰ & x \\ \cline{1-1}
۰ &
\end{array}
$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که چندجمله‌ای صفر بر هر چندجمله‌ای (به‌جز صفر) بخش‌پذیر است.

۴. چندجمله‌ای مقسوم‌علیه را با $P$ نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$۶x^۴ - ۷x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۳ = P(۲x^۲ - ۳x + ۱) + (-۲x + ۵)$$

پس مقسوم‌علیه از درجه‌ی ۲ خواهد شد. بنابراین می‌توان آن را به صورت $ax^۲ + bx + c$ نوشت، به شرط اینکه $a$، $b$ و $c$ سه عدد باشند.

$$۶x^۴ - ۷x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۳ = (ax^۲ + bx + c)(۲x^۲ - ۳x + ۱) + (-۲x + ۵)$$

با مقایسه‌ی ضرایب $x^۴$ در سمت راست و چپ تساوی به‌دست می‌آید:

$$۶ = ۲a \rightarrow a = ۳$$

با مقایسه‌ی ضریب ثابت (ضریب $x^\circ$) در سمت راست و چپ تساوی به‌دست می‌آید:

$$۳ = c + ۵ \rightarrow c = -۲$$

با مقایسه‌ی ضریب $x$ در سمت راست و چپ تساوی به‌دست می‌آید:

$$۵ = b - ۳c - ۲ \rightarrow ۵ = b + ۶ - ۲ \rightarrow b = ۱$$

اکنون یک‌بار درستی تساوی زیر را بررسی می‌کنیم تا از درستی محاسبه‌ی $a$، $b$ و $c$ اطمینان حاصل کنیم. این بررسی تساوی ضروری است، زیرا ممکن است دستگاه معادله‌ی ضرایب (که شامل پنج معادله و سه مجهول است) هیچ پاسخی نداشته باشد.

$$۶x^۴ - ۷x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۳ = (۳x^۲ + x - ۲)(۲x^۲ - ۳x + ۱) + (-۲x + ۵)$$

بنابراین $P = ۳x^۲ + ۹x - ۲$

**۵.** الف) $۳^۵ + ۲۰$

ب) چون مقسوم‌علیه از درجه‌ی است، پس باقی‌مانده حداکثر از درجه‌ی یک است و یا باقی‌مانده عدد صفر است. بنابراین می‌توان باقی‌مانده را به صورت $ax + b$ نوشت، به‌طوری که $a$ و $b$ دو عدد باشند.

بنابراین پس از نوشتن صورت تقسیم خواهیم داشت:

$$x^۵ + x^۴ - ۱۰ = \Big((x-۱)(x-۳)\Big)(\text{خارج‌قسمت تقسیم}) + (ax+b)$$

اکنون در تساوی بالا، یک‌بار $x = ۱$ و یک‌بار $x = ۳$ را جایگذاری می‌کنیم تا دو معادله‌ی زیر به‌دست آید:

$$\begin{cases} -۸ = a + b \\ ۳۱۴ = ۳a + b \end{cases}$$

بنابراین $a = ۱۶۱$ و $b = -۱۶۹$. پس باقی‌مانده برابر $۱۶۱x - ۱۶۹$ خواهد شد.

**۶.** چون آن چندجمله‌ای بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است پس برای مثال فرض می‌کنیم که آن چندجمله‌ای به صورت زیر باشد:

$$a(x-۱) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} ax - \ a & x + ۲ \\ \cline{2-2} -\ ax + ۲a & a \\ \hline -۳a & \end{array}$$

چون بنا به صورت مسأله باقی‌مانده‌ی این تقسیم باید برابر ۳۳ شود، بنابراین $-۳a = ۳۳$؛ در نتیجه $a = -۱۱$ پس چندجمله‌ای موردنظر می‌تواند $-۱۱(x-۱)$ باشد.

این مسأله بی‌نهایت جواب دارد.

؟ مسأله را با این شرط اضافه حل کنید که درجه‌ی چندجمله‌ای موردنظر برابر دو شود.

۷. الف) چون $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$، می‌توانیم چنین بنویسیم.

$$nx^3 - 4x^2 - mx + 6 = (x+1)(x-2)(\text{خارج‌قسمت تقسیم})$$

اکنون با جایگذاری $x = -1$ و $x = 2$، می‌توان مقادیر $n$ و $m$ را یافت.

ب) چون $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$، می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$x^5 + nx^4 + (3m+n)x^3 - 7x^2 + 2(2m-n)x - 8 = (x-1)^2(x+2)(\text{خارج‌قسمت تقسیم})$$

اکنون با جایگذاری $x = 1$ و $x = -2$ می‌توان مقادیر $n$ و $m$ را یافت.

ج) شبیه «ب»

۸. جواب ساده‌لوحانه و اشتباه به این مسأله از ضرب باقی‌مانده‌ها به‌دست می‌آید: $(x+2)(x-1)$.

چنین روشی حتی در تقسیم اعداد گاهی درست است:

$$\left(\begin{array}{c|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{c|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \end{array}\right) \to \begin{array}{c|l} 5\times 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \end{array}$$

و گاهی نادرست:

$$\left(\begin{array}{c|l} 2 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{c|l} 2 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & \end{array}\right) \not\to \begin{array}{c|l} 2\times 2 & 4 \\ \cline{2-2} 2\times 2 & \end{array}$$

راه درست با نوشتن صورت تقسیم‌ها به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} F = (x^۲ - x + ۱)P + (x - ۱) \\ G = (x^۲ - x + ۱)Q + (x + ۲) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow FG &= \Big((x^۲ - x + ۱)P + (x - ۱)\Big)\Big((x^۲ - x + ۱)Q + (x + ۲)\Big) \\ &= (x^۲ - x + ۱)R + (x - ۱)(x + ۲) \end{aligned}$$

اما $(x - ۱)(x + ۲)$ یک باقی‌مانده نیست، زیرا هم‌درجه با مقسوم‌علیه (یعنی $x^۲ - x + ۱$) است. کار را چنین ادامه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} &FG = (x^۲ - x + ۱)R + (x^۲ + x - ۲) \\ \rightarrow\ &FG = (x^۲ - x + ۱)R + (x^۲ - x + ۱) + (۲x - ۳) \\ \rightarrow\ &FG = (x^۲ - x + ۱)R' + (۲x - ۳) \end{aligned}$$

بنابراین باقی‌مانده $۲x - ۳$ خواهد شد.

در واقع در این راه‌حل از یکتایی باقی‌مانده در تقسیم استفاده کرده‌ایم. بنا به قضیه‌ی تقسیم چندجمله‌ای‌ها داریم:

> قضیه‌ی تقسیم چندجمله‌ای‌ها: اگر $A$ و $B$ دو چندجمله‌ای با متغیر $x$ باشد، در این صورت چندجمله‌ای‌های یکتایی مثل $Q$ و $R$ وجود دارند، به‌طوری که
>
> اولاً) $$A = BQ + R$$
>
> ثانیاً) یا درجه‌ی $R$ از درجه‌ی $B$ کمتر است و یا $R = ۰$.

برای دیدن برهان نه چندان سخت این قضیه می‌توانید به هر کتاب جبر بنام (دانشگاهی) مراجعه کنید.

**۹.** $(x^2-4)(x+1)=(x+2)(x-2)(x+1)$.

$$\begin{cases} P=(x+1)Q_1-1 \rightarrow (\text{حاصل جایگذاری «}x=-1\text{» در چندجمله‌ای }P)=1 \\ P=(x-2)Q_2-3 \rightarrow (\text{حاصل جایگذاری «}x=2\text{» در چندجمله‌ای }P)=3 \qquad * \\ P=(x+2)Q_3+2 \rightarrow (\text{حاصل جایگذاری «}x=-2\text{» در چندجمله‌ای }P)=-2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P$ بر $(x^2-4)(x+1)$ یا حداکثر از درجه‌ی دو است و یا باقی‌مانده صفر است، پس می‌توان باقی‌مانده‌ی این تقسیم را به صورت $ax^2+bx+c$ نوشت، به‌طوری که $a$، $b$ و $c$ سه عدد باشند.

اکنون می‌توانیم تقسیم چندجمله‌ای را به صورت زیر بنویسیم:

$$P=(x+2)(x-2)(x+1)Q_4+(ax^2+bx+c)$$

اکنون با توجه به تساوی‌های * و رابطه‌ی اخیر می‌توانیم به نتایج زیر برسیم:

$$\begin{cases} 1=(\text{حاصل جایگذاری «}x=-1\text{» در چندجمله‌ای }P)=a+b-c \\ 3=(\text{حاصل جایگذاری «}x=2\text{» در چندجمله‌ای }P)=4a+2b+c \\ -2=(\text{حاصل جایگذاری «}x=-2\text{» در چندجمله‌ای }P)=4a-2b+c \end{cases}$$

به سه‌معادله ـ سه‌مجهول زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a-b+c=1 & \text{معادله‌ی اول:} \\ 4a+2b+c=3 & \text{معادله‌ی دوم:} \\ 4a-2b+c=-2 & \text{معادله‌ی سوم:} \end{cases}$$

باکم کردن طرفین تساوی معادله‌ی اول از طرفین تساوی دو معادله‌ی دوم و سوم به دستگاه دومعادله ـ دومجهول زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۳a + ۳b = ۲ \\ ۳a - b = -۳ \end{cases}$$

بنابراین $a = -\frac{۱}{۶}$، $b = \frac{۵}{۲}$ و در نتیجه $c = -\frac{۴}{۳}$.

پس باقی‌مانده برابر $-\frac{۱}{۶}x^۲ + \frac{۵}{۲}x - \frac{۴}{۳}$ خواهد شد.

# ریشه‌ی یک چندجمله‌ای

۱. الف) ۱، ۲− و ۳

ب) برای مثال $(۵ + x)(x - ۱)$. در واقع هر چندجمله‌ای به صورت زیر پاسخ این مسأله خواهد بود.

$$(\text{یک چندجمله‌ای دلخواه})(۵ + x)(x - ۱)$$

؟ آیا به جای چندجمله‌ای دلخواه، صفر می‌توانیم بگذاریم؟

□ بله! تمام اعداد ریشه‌ی چندجمله‌ای صفر هستند.

ج) برای مثال $(x^۲ + ۱)(x - ۲)$ و یا $(x - ۲)^۳$.

۲. الف) چنین چندجمله‌ای را می‌توان از روش زیر به‌دست آورد. درباره‌ی درستی روش به دانش‌آموزان توضیح دهید.

$$\alpha = \sqrt{۲} + \sqrt{۳} \rightarrow \alpha^۲ = ۵ + ۲\sqrt{۶} \rightarrow \alpha^۲ - ۵ = ۲\sqrt{۶}$$

$$\rightarrow (\alpha^۲ - ۵)^۲ = ۲۴ \rightarrow \alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۲۵ = ۲۴ \rightarrow \alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۱ = ۰$$

پس $\alpha$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۴ - ۱۰x + ۱$ است.

ب) شبیه روش ارائه شده در قسمت «الف» عمل می‌کنیم.

$$\alpha = \sqrt{۲} + \sqrt[۳]{۲} \rightarrow \alpha - \sqrt{۲} = \sqrt[۳]{۲} \rightarrow (\alpha - \sqrt{۲})^۳ = ۲ \rightarrow \alpha^۳ - ۳\alpha^۲\sqrt{۲} + ۶\alpha - ۲\sqrt{۲} = ۲$$

$$\rightarrow \alpha^۳ + ۶\alpha - ۲ = \sqrt{۲}(۳\alpha^۲ + ۲) \rightarrow (\alpha^۳ + ۶\alpha - ۲)^۲ = ۲(۳\alpha^۲ + ۲)^۲$$

$$\rightarrow \alpha^۶ - ۶\alpha^۴ - ۴\alpha^۳ + ۱۲\alpha^۲ - ۲۴\alpha - ۴ = ۰$$

پس $\alpha$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۶ - ۶x^۴ - ۴x^۳ + ۱۲x^۲ - ۲۴x - ۴$ است.

**۳.** اگر $\alpha$ ریشه‌ی چندجمله‌ی $x^۳ - x + ۱$ باشد، در این صورت $\alpha^۳ - \alpha + ۱ = ۰$. پس

$$\left(\frac{۱}{\alpha}\right)^۵ + \left(\frac{۱}{\alpha}\right) + ۱ = \frac{۱ + \alpha^۴ + \alpha^۵}{\alpha^۵} = \frac{۱ + \alpha^۳\alpha + \alpha^۳\alpha^۲}{\alpha^۵}$$
$$= \frac{۱ + (\alpha - ۱)\alpha + (\alpha - ۱)\alpha^۲}{\alpha^۵} = \frac{\alpha^۳ - \alpha + ۱}{\alpha} = ۰$$

پس $\frac{۱}{\alpha}$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۳ - x + ۱$ است.

**۴.** ج)

$$۴۱^۲ - ۴۱ + ۴۱ = ۴۱ \times ۴۱$$

$$۸۱^۲ - ۷۹ \times ۸۱ + ۱۶۰۱ = ۴۱ \times ۴۳$$

**۵.** الف)

$$\alpha \in \mathbb{Q} \to \alpha = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}$$
$$\alpha = \frac{p}{q} \to q\alpha - p = ۰$$

پس هر عدد گویای $\frac{p}{q}$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $qx - p$ است؛ پس $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$

ب) $\sqrt{۲}$ ریشه‌ی $x^۲ - ۲$ است؛ پس $\sqrt{۲} \in \mathbb{A}$ و $\sqrt{۲} \notin \mathbb{Q}$

؟ ثابت کنید که هر یک از اعداد $\sqrt[۳]{۲} + \sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{۱ + \sqrt{۲}}$ جبری هستند.

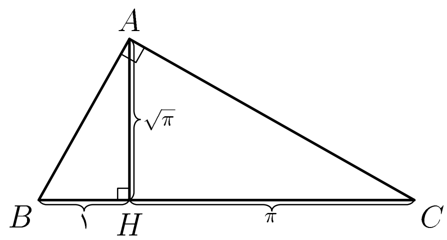
□ برای دیدن جبری بودن $\sqrt[۳]{۲} + \sqrt{۲}$ پاسخ مسأله‌ی ۲، قسمت «ب» را ببینید.

$$\frac{۱}{۱ + \sqrt{۲}} = \frac{۱}{۱ + \sqrt{۲}} \times \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۱ - \sqrt{۲}} = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۱ - ۲} = \sqrt{۲} - ۱$$

$$\alpha = \sqrt{۲} - ۱ \to \alpha + ۱ = \sqrt{۲} \to (\alpha + ۱)^۲ = \sqrt{۲} \to \alpha^۲ + ۲\alpha - ۱ = ۰$$

پس $\sqrt{۲} - ۱$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^۲ + ۲x - ۱$ است. بنابراین $\sqrt{۲} - ۱ \in \mathbb{A}$.

ج) برای رسم مربعی هم مساحت با دایره‌ای به شعاع واحد (یک)، باید مربعی به مساحت $\pi$ رسم کنیم. برای این کار کافی است پاره‌خطی به طول $\sqrt{\pi}$ را بتوانیم رسم کنیم؛ و برای این کار کافی است پاره‌خطی به طول $\pi$ را بتوانیم رسم کنیم.




$$(\text{طول}\, AH)^۲ = (\text{طول}\, BH) \times (\text{طول}\, CH)$$

$$(\text{طول}\, AH)^۲ = ۱ \times \pi$$

$$\text{طول}\, AH = \sqrt{\pi}$$

د)

ه)

و) در واقع هر سه درست است. چون $A = B$. زیرا

اولاً) واضح است که $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

ثانیاً) اگر $\alpha \in \mathbb{B}$ در این صورت $\alpha$ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تشکیل شده از یک جمله‌ای‌های با ضرایب عددی گویاست. (این ضرایب را به صورت تقسیم دو عدد صحیح برهم می‌نویسیم.) با مخرج مشترک گرفتن از همه‌ی این ضرایب عددی خواهیم دید که $\alpha$ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تشکیل شده از یک جمله‌ای‌های با ضرایب صحیح می‌شود. بنابراین $\alpha \in \mathbb{A}$. پس $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$.

برای مثال: $\frac{۱}{۳}\alpha^۳ + \frac{۷}{۴}\alpha^۲ - \frac{۲}{۵} = ۰ \to \frac{۲۰\alpha^۳ + ۱۰۵\alpha^۲ - ۲۴}{۶۰} = ۰$

$$\to ۲۰\alpha^۳ + ۱۰۵\alpha^۲ - ۲۴ = ۰$$

ز) این سؤال‌راحتی است، به‌عنوان سؤال‌سخت می‌توانید مسأله‌ی زیر را مطرح کنید.

؟ نشان دهید اعداد جبری نسبت به جمع و ضرب بسته هستند.

□ پاسخ این سؤال‌برای دانش آموزان بسیار سخت است. فقط به بیان این سؤال‌اکتفا کنید.

# ریشه‌ی گویایابی یک چندجمله‌ای

۱. الف) ۱ و ۳−

ب) ۱

ج) ۱، ۳− و ۷−

۲. الف) ۱ و ۳−

ب) ۱، $\frac{۴}{۹}$ و $\frac{۲}{۳}$

ج) این چندجمله‌ای هیچ ریشه‌ی گویایی ندارد.

د) کافی است ریشه‌های چندجمله‌ای $۲x^۳ + ۴x^۲ + ۲x - ۱$ را بیابیم. این چندجمله‌ای هیچ ریشه‌ی گویایی ندارد.

ذکر نکته‌ای خالی از لطف نیست که شاید دانش‌آموزان از این کار ریشه‌یابی گویا و صحیح خسته شوند. به آنها بگویید که ریشه‌یابی بسیار مهم است چه در مطالعه‌ی ریاضی و چه در مطالعات پژوهشی و صنعتی. برای ریشه‌یابی گویا و صحیح تعداد محدودی حالت باید بررسی شود. کدام بهتر است؟

«بررسی تعداد محدودی حالت» یا «بررسی همه‌ی اعداد حقیقی»

دانش‌آموزان علاقه‌مند را به خواندن «روش ریشه‌ی گویایابی» روی وب‌گاه ریاضی سمپاد دعوت کنید؛ و به دانش‌آموزانی که دوست دارند نتیجه را در یک کلام ببینند، بگویید:

| |
|---|
| اگر $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ و ب.م.م. $a$ و $b$ برابر یک باشد)، ریشه‌ی چندجمله‌ای استاندارد نوشته شده‌ی $P$ باشد، در این صورت $a$ مقسوم‌علیه ضریب یک‌جمله‌ای آخر و $b$ مقسوم‌علیه ضریب یک‌جمله‌ای اول چندجمله‌ای $P$ است. |

**۳.** در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر $p$ عددی اول باشد، $\sqrt{p}$ گنگ است.

$\sqrt{p}$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^{۲} - p$ است. اما یک ریشه‌ی گویای این چندجمله‌ای تنها می‌تواند یکی از اعداد زیر باشد:

$$\{۱, -۱, p, -p\}$$

هیچ کدام از این اعداد ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^{۲} - p$ نیستند. پس $x^{۲} - p$ ریشه‌ی گویایی ندارد. پس $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}'$.

**؟** ثابت کنید اگر $p$ عددی اول باشد، $\sqrt[۳]{p} \in \mathbb{Q}'$.

**۴.** ریشه‌های گویای چندجمله‌ای $x^{۴} + ax + ۱$ تنها امکان دارد یکی از اعداد زیر باشند:

$$\{۱, -۱\}$$

$$۱^{۴} + a \times ۱ + ۱ = ۲ + a \neq ۰ \rightarrow a \neq -۲$$

$$(-۱)^{۴} + a \times (-۱) + ۱ = ۲ - a \neq ۰ \rightarrow a \neq ۲$$

اما هیچ کدام از این دو عدد نمی‌تواند ریشه شود؛ زیرا $|a| \neq ۲$ پس $a \neq \pm ۲$.

# گویا کردن مخرج کسر

۱.

۲.

الف) $$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵}}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵}}{۲+۵}$$

ب) $$\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۵}}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۵}}{۲-\sqrt[۳]{۲۵}}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۵}}{۲-\sqrt[۳]{۲۵}}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۶۲۵}}{۴+۲\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۶۲۵}}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۵})(۴+۲\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۶۲۵})}{۸-۲۵}$$

ج) $$\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}=\frac{(\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}})(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{۲-۵}$$

د) $$\frac{۱}{\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}\times\frac{\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵})^{۲}}}{\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵})^{۲}}}=\frac{\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵})^{۲}}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵})^{۲}}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}=\frac{\left(\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+\sqrt{۵})^{۲}}\right)(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{۲-۵}$$

**۳.** الف) از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم.

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}{۲-۳}$$

ب)

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\sqrt{(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}})(۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}})}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}\sqrt{(۲+\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲})}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{\sqrt{۲}\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{۲}$$

**۴.** مخرجِ کسرِ هر یک جمع‌وندها را جداگانه گویا می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}$$

$$=\left(\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۱}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۱}-\sqrt{۲}}\right)+\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}\times\frac{\sqrt{۹۹}-\sqrt{۱۰۰}}{\sqrt{۹۹}-\sqrt{۱۰۰}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{۱}-\sqrt{۲}}{۱-۲}\right)+\left(\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲-۳}\right)+\cdots+\left(\frac{\sqrt{۹۹}-\sqrt{۱۰۰}}{۹۹-۱۰۰}\right)$$

$$=(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+\cdots+(\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹})=\sqrt{۱۰۰}-۱=۹$$