

هل من مزید ۸ (اتحاد اویلر)

۱. نام اتحاد زیر، اتحاد اویلر^۱ است.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

الف) اگر a, b و c سه عدد باشند، ثابت کنید:

$$a + b + c = 0 \quad \text{یا} \quad a = b = c \iff a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right) \quad \text{راهنمایی.}$$

ب) دربارهی سه عدد a, b و c می‌دانیم که $a + b + c = 0$. ثابت کنید:

$$a^3 + b^3 + 3abc = c^3$$

راهنمایی. «الف» را به کار ببرید.

ج) اگر a, b و c سه عدد نابرابر باشند، ثابت کنید که $\sqrt[3]{a - b} + \sqrt[3]{b - c} + \sqrt[3]{c - a}$ نمی‌تواند برابر صفر شود.

راهنمایی. «الف» را به کار ببرید.

د) می‌دانیم که مجموع سه عدد a, b و c صفر شده است. ثابت کنید که:

$$2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

راهنمایی. «الف» را به کار ببرید.

ه) می‌دانیم که مجموع چهار عدد a, b, c و d صفر شده است. ثابت کنید که:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + bcd + cda + dab)$$

راهنمایی. سه بار اتحاد اویلر را برای $\{a, b, c\}$ ، $\{a, b, d\}$ و $\{b, c, d\}$ بنویسید و این سه اتحاد را با هم جمع کنید.

و) با مقایسه‌ی «الف» و «ه»، حدسی منطقی بزنید.

راهنمایی. عبارت زیر را کامل کنید.

$$a + b + c + d + e = 0 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 3(\dots)$$

۲. هر یک از دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 1 + x^3 + 3xy = y^2 \\ 1 + x^5 = y^5 \end{cases}$$

راهنمایی. معادله‌ی بالایی را به صورت اتحاد اویلر بنویسید و از نتیجه‌ی «الف» تمرین پیش استفاده کنید.

$$\text{ب) } \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ x^3 + y^3 + z^3 \end{cases}$$

راهنمایی. از معادله‌ی بالایی نتیجه بگیرید که $xy + yz + zx = 0$. سپس از معادله‌ی پایینی نتیجه

بگیرید که $xyz = 0$.

۳. الف) درستی سه اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz$$

ب) با کمک کدام یک از اتحادهای «الف»، می‌توان ثابت کرد که:

$$x + y + z = 0 \rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

ج) می‌دانیم که $a + b + c = 1$ ، ثابت کنید:

$$(1 - 2a)^3 + (1 - 2b)^3 + (1 - 2c)^3 + 24abc = 1$$

راهنمایی. از اتحاد میانی قسمت «الف» استفاده کنید به شرطی که:

$$1 - 2a = x, \quad 1 - 2b = y, \quad 1 - 2c = z$$

د) می‌دانیم که $a + b + c = 2u$. ثابت کنید:

$$(u - a)^3 + (u - b)^3 + (u - c)^3 + 3abc = u^3$$

راهنمایی. اگر $u = 0$ ، از نتیجه‌ی اتحاد اوایلر کمک بگیرید و اگر $u \neq 0$ ، سعی کنید از قسمت

«ج» استفاده کنید:

$$a + b + c = 2u \rightarrow \left(\frac{a}{2u}\right) + \left(\frac{b}{2u}\right) + \left(\frac{c}{2u}\right) = 1$$

۴. الف) اتحاد اویلر، اتحادی با سه متغیر است. گاهی به این اتحاد، «اتحاد اویلر سه متغیری» نیز می‌گویند. اتحاد زیر که تعمیمی بر اتحاد اویلر است، «اتحاد اویلر چهارمتغیری» است. درستی آن را ثابت کنید.

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(abc + abd + acd + bcd) = (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - bc - bd - ad - cd)$$

ب) آیا می‌توانید صورت «اتحاد اویلر پنج متغیری» را حدس بزنید.