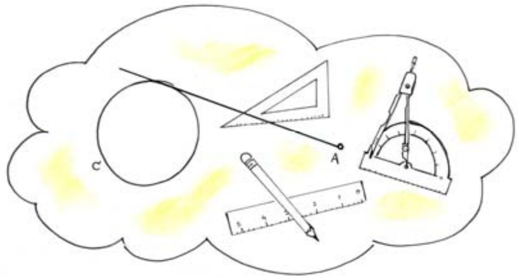
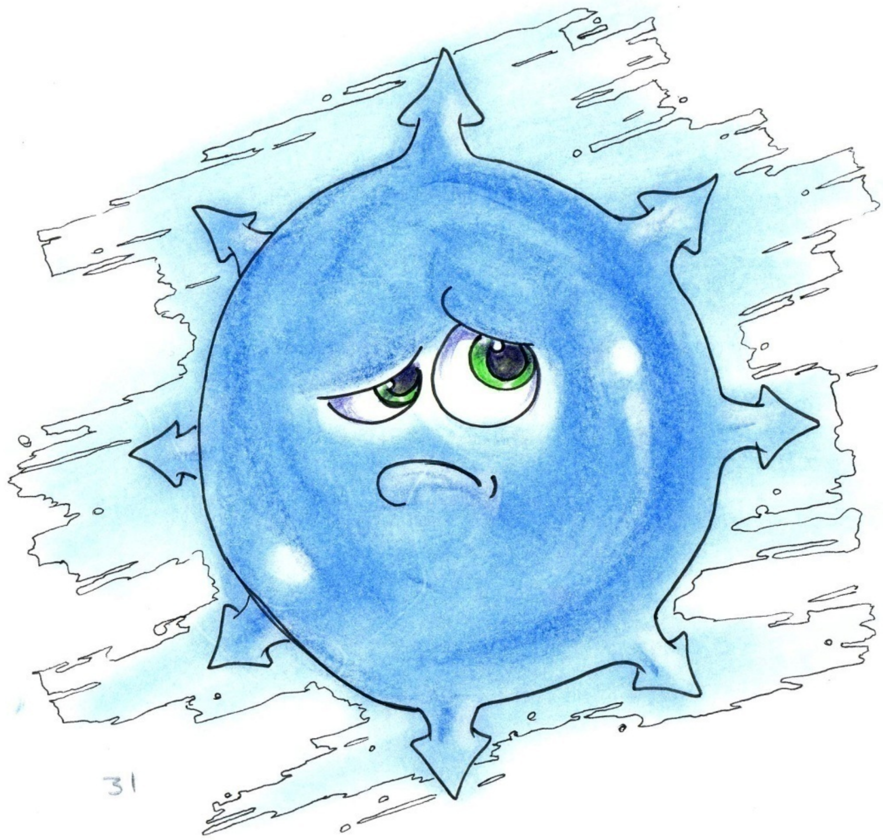


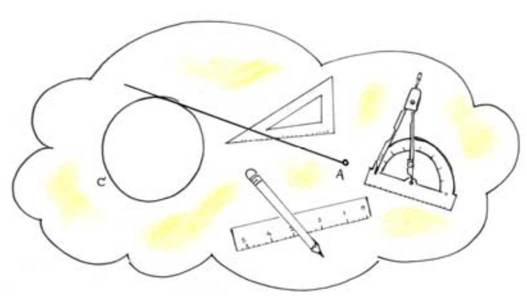


فصل سوم

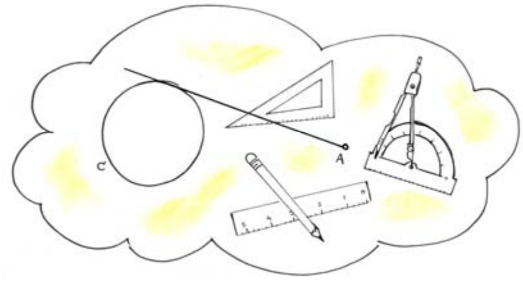
زاویه و دایره

رابطه‌ی فیثاغورس

دوران



فهرست



فصل حاضر از شش بخش تشکیل شده است:

- مکان‌هندسی

در بخش اول، دانش‌آموزان با مفهوم تعاریف هندسی آشنا می‌شوند، به‌گونه‌ای که بتوانند مفاهیم هندسی مانند دایره، عمودمنصف، خطوط موازی و ... را به صورت یک مکان هندسی تعریف کنند.

هر مکان هندسی دارای فضایی مشخص و دو خاصیت زیر است:

۱- همه‌ی نقاط مکان هندسی دارای ویژگی مشترک هستند.

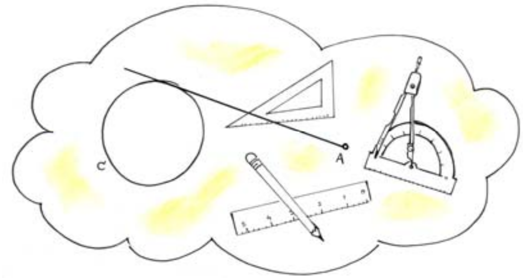
۲- هرنقطه دارای آن ویژگی مشترک حتماً عضو مکان هندسی قرار دارد.

- ترسیم‌های دقیق هندسی

در بخش دوم، هدف ترسیم دقیق و هندسی (فقط با پرگار و خط کش غیرمدرج) است. دانش‌آموز در پایان این بخش باید شرایط یک رسم دقیق هندسی و نه حدسی را بداند و بتواند روش ترسیم برای مسئله‌های مختلف به کار ببندد.

- کار با زوایا در دایره و اثبات قضایای مربوط به آن

در بخش آخر، مهارت یافتن دانش‌آموزان در حل مسائل مربوط به زاویه و دایره موردنظر است که معلمان می‌توانند به صلاح‌دید خود سئوالات بیشتری در این بخش در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.



- **اثبات‌های قضیه‌ی فیثاغورس**

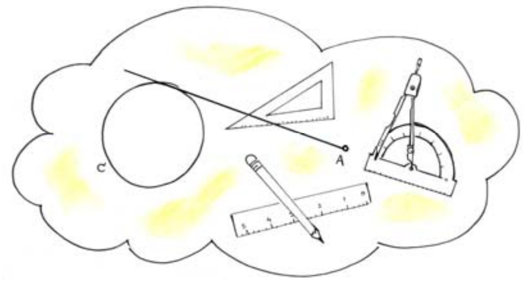
در این بخش، همان‌طور که از نامش پیداست روش‌های مختلفی از اثبات قضیه‌ی فیثاغورث آمده است. هدف اصلی این بخش دیدن چند اثبات این قضیه و همچنین یادآوری و استفاده از قضایای گذشته برای اثبات این قضیه است.

- **مسائل مربوط به قضیه‌ی فیثاغورس**

مسائلی که در این بخش آمده است همگی به نوعی با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس حل می‌شوند. شما می‌توانید در این بخش به صلاح‌دید خود مسائل بیشتری در اختیار دانش-آموزان قرار دهید.

- **ترکیب دوران‌ها**

در این بخش، مهارت دانش‌آموزان را در کار با دوران‌ها بیشتر کرده و به طرح سؤالاتی مفهومی می‌پردازیم.



مکان‌های هندسی

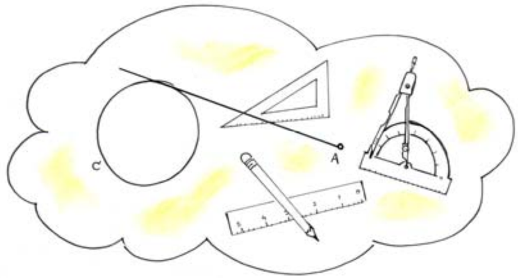
[[تدریس صفحات ۶۷ و ۶۸ تا ابتدای وضع یک خط و دایره ...]]

بعد از تدریس، در صورت امکان دانش‌آموزان را به حیاط ببرید و از آن‌ها بخواهید با کمک متر در کوتاه‌ترین زمان، در فاصله‌ی ۳ متری شما بایستند و به آن‌ها فرصت دهید تا روی یک دایره به شعاع ۳ متر قرار گیرند و آن را ببینند. سپس از آن‌ها بخواهید این کار را برای فواصل ۲ متری و ۴ متری شما نیز انجام دهند و روی دایره‌هایی با شعاع‌های ۲ و ۴ متری نیز بایستند. در مرحله‌ی دوم، در حالی که دانش‌آموزان دورتادور شما ایستاده‌اند، شما جایتان را اندکی تغییر دهید تا دانش‌آموزان مجبور شوند جای خود را تغییر دهند. در این‌جا از آن‌ها بخواهید تعریفی ریاضی برای دایره ارائه کنند.

دانش‌آموزان باید به این تعریف برسند:

دایره مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی است که در فاصله‌ی مساوی از یک نقطه‌ی به نام مرکز قرار دارند.

دقت کنید که این نقاط می‌بایست در صفحه باشند. همین تعریف در انتهای کتاب برای کره بیان می‌شود که آن‌جا نقاط در فضای سه بعدی هستند.



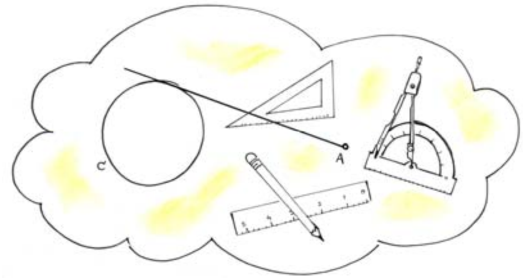
۱- دو شرکت مخابراتی درکاری مشترک می‌خواهند شهری را تحت پوشش خطوط تلفن همراه قرار دهند.

شعاع پوشش تلفنی هر آنتن شرکت ایرانسل ۵۰ متر و شعاع پوشش تلفنی هر آنتن شرکت همراه اول ۶۰ متر می‌باشد. نقشه‌ی شهر که مشاهده می‌کنید با مقیاس $\frac{1}{1000}$ می‌باشد.

الف) آیا این دو شرکت با این چیدمان آنتن‌ها موفق به پوشش کل شهر شده‌اند یا اینکه هنوز نقاط کوری وجود دارد؟

ب) آیا راه بهتری برای پوشش این شهر وجود دارد تا آنتن‌های کمتری مصرف شود؟ تعداد آنتن‌های دو شرکت باید مساوی باشد.

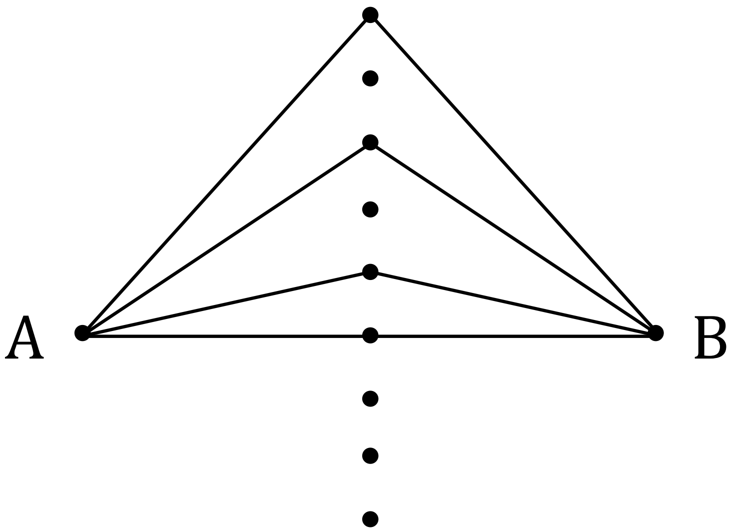
☐ **کافی است که دایره‌هایی به مرکز آنتن‌ها و به شعاع پوشش آن‌ها رسم کنیم و نقاط کور را به‌دست آوریم.**

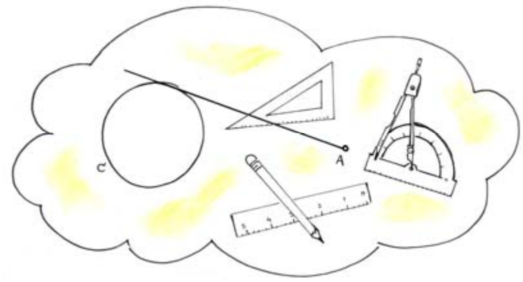


۲- می‌دانیم که از یک نقطه می‌توان بی‌شمار دایره گذراند. حال اگر دو نقطه داشته باشیم، چند دایره می‌توان رسم کرد که از این دو نقطه بگذرند؟ چگونه و چرا؟

☐ به دنبال مرکز دایره‌ای هستیم که می‌خواهیم از دو نقطه‌ی A و B بگذرانیم. می‌دانیم که دو نقطه‌ی A و B باید روی دایره باشند و به عبارت دیگر باید از مرکز به یک فاصله باشند. پس از خود می‌پرسیم چه نقطه‌ای وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال، نقاط مختلفی مانند آنچه در شکل آمده است را مطرح می‌کنند.



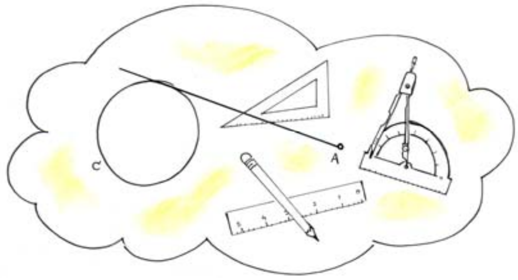


هر کدام از این نقاط می‌توانند مرکز دایره‌ای باشند که از A و B می‌گذرد که اگر همه این نقاط (مراکز) را رسم کنیم خطی به‌دست می‌آوریم که دانش‌آموزان آن را می‌شناسند.

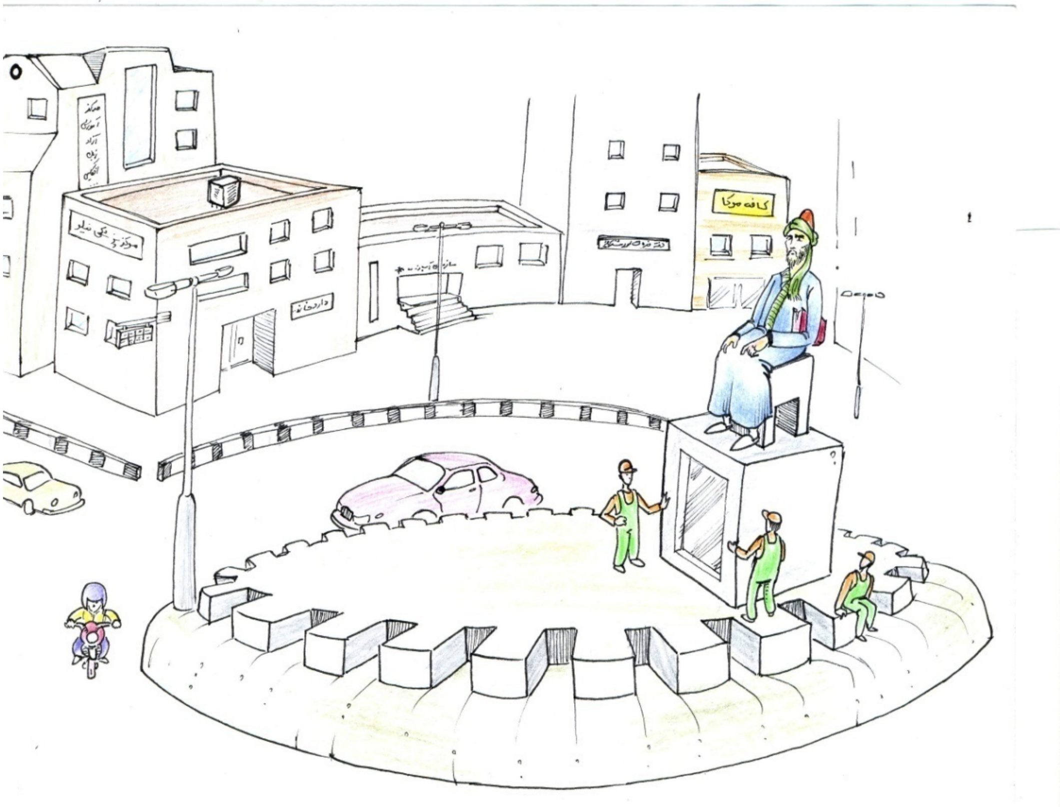
در واقع دانش‌آموزان در اینجا حدس می‌زنند که این خط همان عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد و این‌که همه‌ی مراکز، روی عمودمنصف AB قرار دارند. حال از آن‌ها بخواهید ادعای خود را اثبات کنند. دانش‌آموزان باید ثابت کنند که هر نقطه که در فاصله‌ی مساوی از دو سر پاره‌خط قرار دارد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط است. دانش‌آموزان می‌بایست دو نقطه (E)یکی وسط A و B و دیگری نقطه‌ای(F) در فاصله‌ی مساوی از A و B را در نظر بگیرند و ثابت کنند که دو مثلث EFA و EFB برابرند و در نتیجه E قائمه است.

حال از دانش‌آموزان بخواهید تعریفی برای عمودمنصف ارائه کنند:

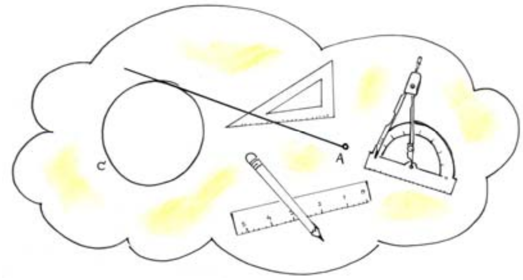
عمودمنصف یک پاره‌خط، مجموعه نقاطی است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.



۳- شهرداری شهر «عرفا» می‌خواهد مجسمه‌ی حافظ را دقیقاً در مرکز میدان «شعرا» بسازد. مشکل اصلی در این پروژه‌ی عمرانی این است که میدان ساخته شده است، اما اکنون مرکز آن مشخص نیست. حالا به شهردار کمک کنید تا مرکز میدان را بیابد.

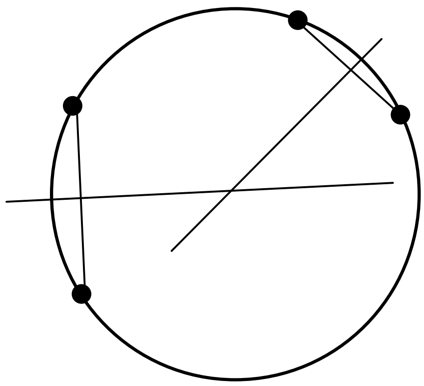


☐ **برای یافتن مرکز از نتیجه‌ی مسئله‌ی قبل استفاده می‌کنیم. دو نقطه، روی دایره (محیط دایره) انتخاب می‌کنیم و چون می‌دانیم که مرکز دایره از این دو نقطه به یک فاصله است، پس حتماً روی عمودمنصف AB قرار دارد.**



طریقه‌ی رسم عمودمنصف را از سال‌های گذشته یادآوری کنید.

عمود منصف دو نقطه‌ی دلخواه دیگر را نیز به همین ترتیب و به همین دلیل رسم می‌کنیم. مرکز دایره حتماً روی عمودمنصف دو نقطه‌ی جدید هم هست و چون مرکز می‌بایست روی هر دو عمودمنصف باشد، بنابراین باید روی محل تقاطع آن‌ها باشد.

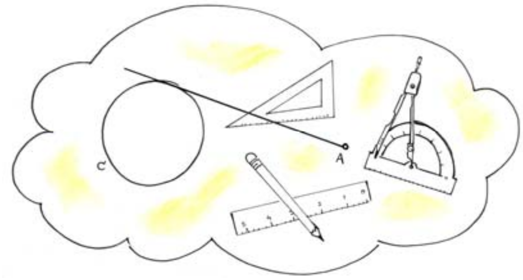


علت درستی این روش (اثبات هندسی) را از دانش‌آموزان بخواهید.

۴- از سه نقطه‌ی دلخواه، چند دایره می‌توان گذراند.

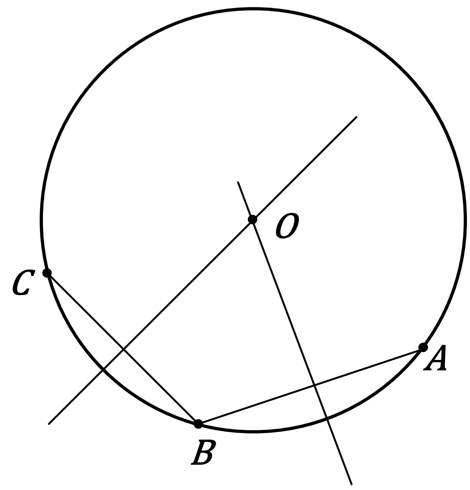
این مسئله در دو حالت قابل بررسی است.

الف) اگر این سه نقطه هم‌خط نباشند، فقط و فقط یک دایره وجود دارد که از سه نقطه بگذرد.



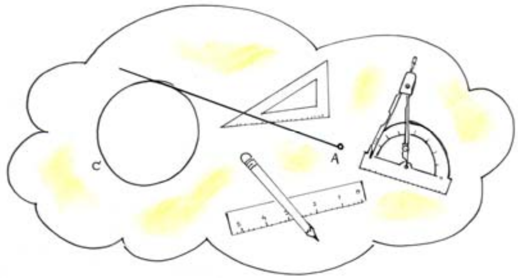
روش رسم:

اگر سه نقطه‌ی A و B و C را داشته باشیم، عمود منصف AB و BC را رسم کرده و محل تقاطع آن‌ها را که همان مرکز دایره‌ی گذرنده از این سه نقطه است می‌یابیم و دایره‌ای به این مرکز و به شعاع OA رسم می‌کنیم.



دانش‌آموزان باید بتوانند مسئله را برای حالت ۴ نقطه نیز بررسی کنند.

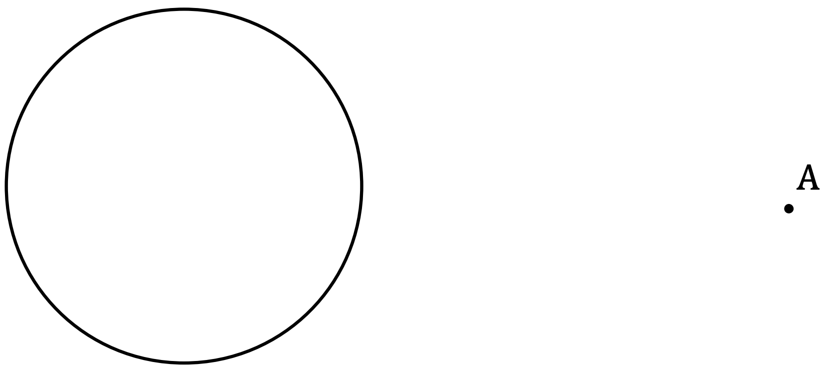
ب) اگر این سه نقطه هم‌خط باشند، هیچ دایره‌ای نمی‌توان رسم کرد که از این سه نقطه بگذرد، زیرا دو عمودمنصف موازی یکدیگر می‌شوند و طبق روش توضیح داده شده در قسمت «الف» دو خط عمودمنصف یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



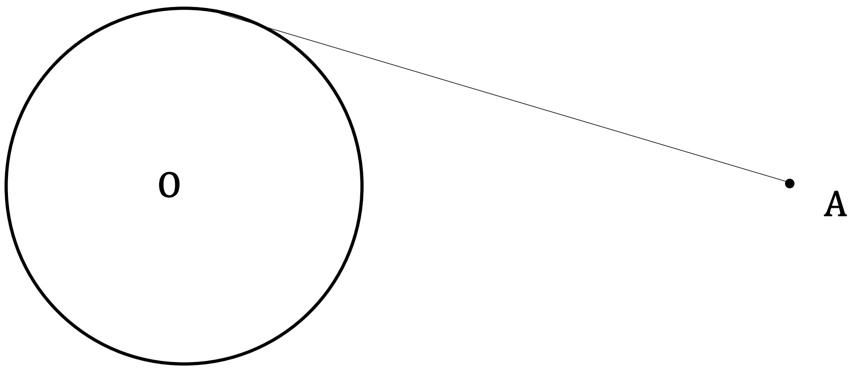
ترسیم‌های هندسی

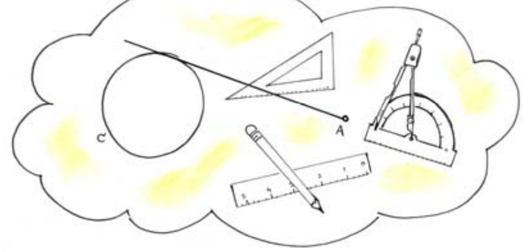
[[تدریس صفحات ۶۸ و ۶۹ تا ابتدای زاویه‌ی مرکزی]]

۵- ساره می‌خواهد از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C مماسی رسم کند. او ابتدا خط‌کش خود را در کنار نقطه‌ی A قرار داد و آن را آنقدر جابجا کرد تا خط مماس را بیابد!



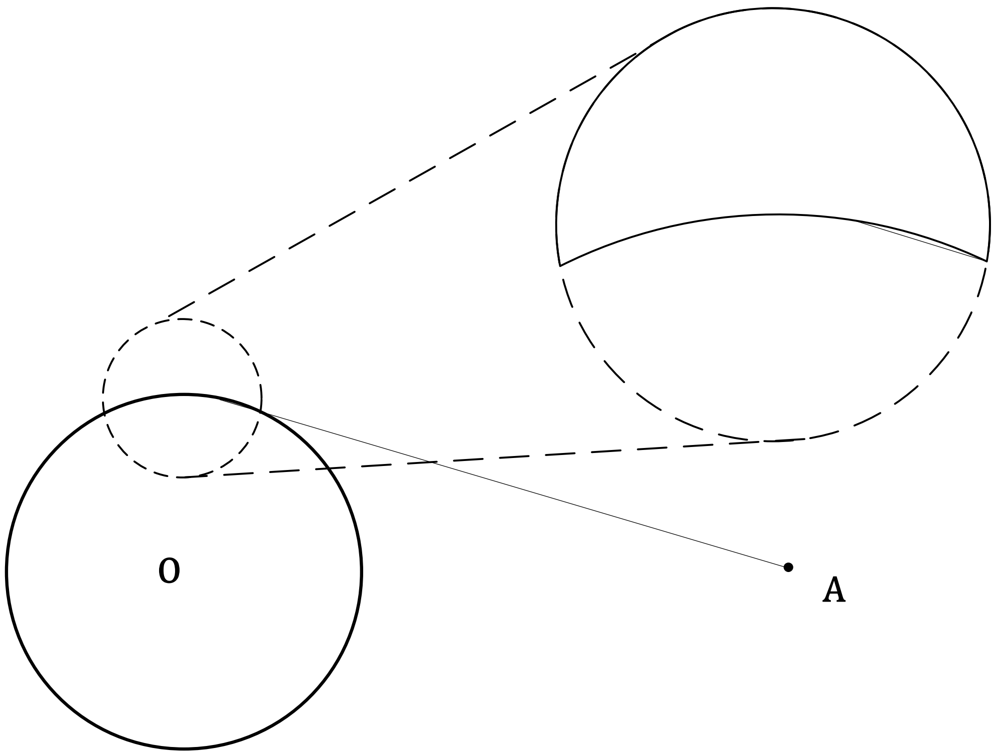
به نظر شما روش او دقیق است؟

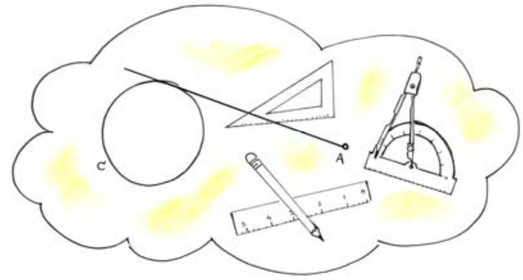




☐ روش ساره روش دقیقی نیست، زیرا به دقت چشم و دست او وابسته است و در ضمن ساره هیچ‌گاه نمی‌تواند ثابت کند که خطی که رسم کرده مماس است فقط با بزرگ‌نمایی شکل بخواهد می‌تواند دقت کارش را نشان دهد، قطعاً این دقت سلیقه‌ای است و از نظر هندسی قابل قبول نیست.

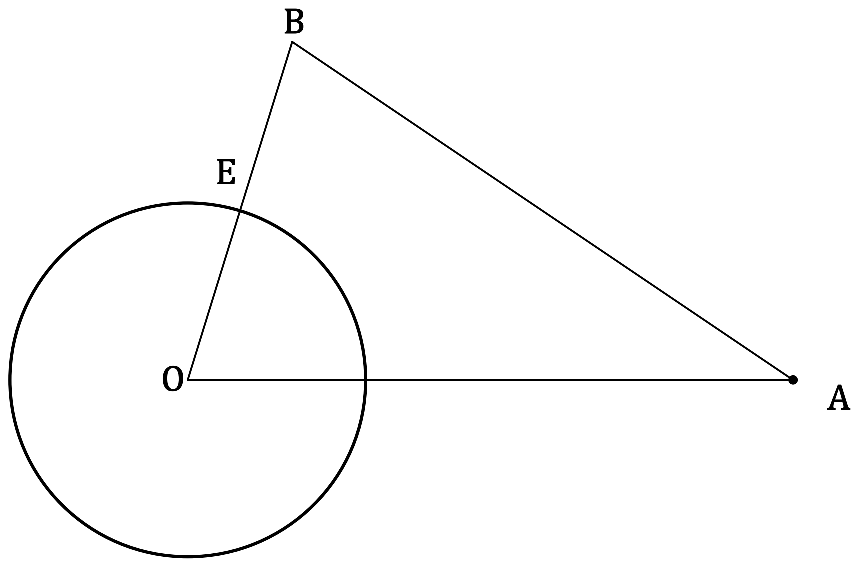
شکل زیر در وب‌گاه سمپاد موجود می‌باشد. به دانش‌آموزان بگویید می‌توانند با مراجعه به وب‌گاه سمپاد این عکس را ببینند و بزرگ‌نمایی کنند و به مشکل کار ساره پی ببرند.





۶- الف) سامان برادر ساره، روش دیگری برای رسم مماس ارائه می‌کند:

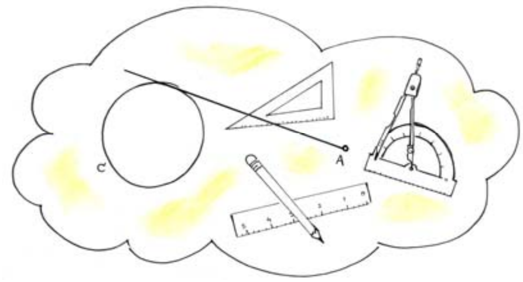
او ابتدا مثلث متساوی‌الساقینی به ساق OA و قاعده‌ی دو برابر شعاع دایره رسم می‌کند.



سپس محل برخورد OB با دایره را E نامیده و ادعا می‌کند AE مماس بر دایره است. آیا روش رسم مماس که سامان ارائه کرده، درست است؟ چرا؟

ب)دقت کدام روش بیشتر است: روش ساره یا روش سامان؟

از دانش‌آموزان بخواهید روش رسم سامان را بررسی کنند و چگونگی رسم مثلث AOB را توضیح دهند.



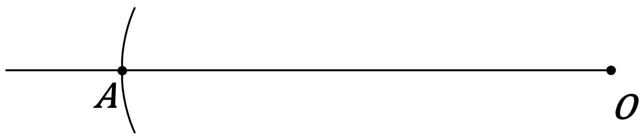
الف)روش سامان درست است. زیرا در مثلث متساوی‌الساقین OAB، AE پاره‌خط OB را نصف می‌کند و در نتیجه دو مثلث EAB و EAO برابرند. پس زوایای AEB و AEO مساوی و قائمه‌اند. چون OE بر AE عمود است، همان مماس وارد بر دایره از نقطه‌ی A می‌باشد.

ب) روش سامان، روش دقیقی برای رسم است زیرا در این روش، خطای چشم و دست وجود ندارد، و در ضمن اثبات آن بسیار ساده است (همان اثبات آمده در پاراگراف قبل).

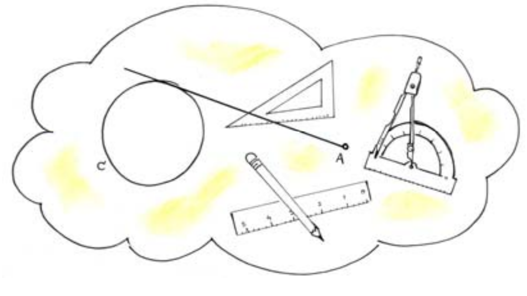
در ترسیم‌های هندسی، تنها استفاده از پرگار و خط‌کش غیر مدرج مجاز می‌باشد. این نکته را به دانش‌آموزان یادآور شوید.

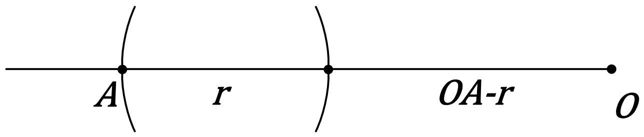
۷- از نقطه‌ی A دایره‌ای مماس بر دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r، رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید. یادتان باشد که در ترسیم‌های هندسی، تنها استفاده از پرگار و خط‌کش غیرمدرج (خط‌کشی که فقط خط می‌کشد) مجاز است.

☐ **از A به O (مرکز دایره‌ی C) وصل می‌کنیم و به مرکز A و به شعاع $OA-r$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. برای اینکه دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $(OA-r)$ باز کنیم، ابتدا نیم‌خطی با خط‌کش رسم کنید و روی آن به اندازه‌ی OA جدا کنید.**

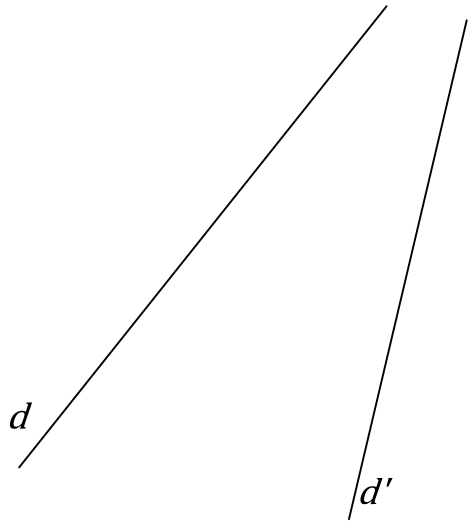


سپس از A به اندازه‌ی r جدا کرده و به پاره‌خطی به طول $(OA-r)$ دست می‌یابیم.



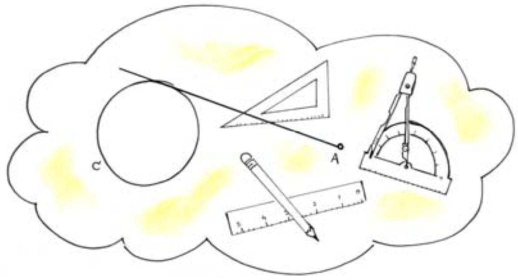


۸- دایره‌ای به شعاع دو سانتی‌متر چنان رسم کنید که بر هر دو خط زیر مماس باشد. روش کار خود را توضیح دهید.

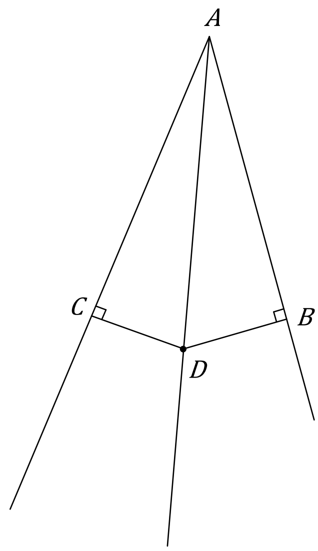


☐ به دنبال مرکز دایره‌هایی هستیم که مرکز آن‌ها به فاصله‌ی مساوی از دو خط هستند.

با اندکی امتحان کردن و سعی و خطا برای یافتن بعضی از این نقاط که به فاصله‌ی مساوی از دو خط هستند، دانش‌آموزان حدس می‌زنند که این نقاط روی نیمساز زاویه‌ای که دو خط با یکدیگر می‌سازند هستند.



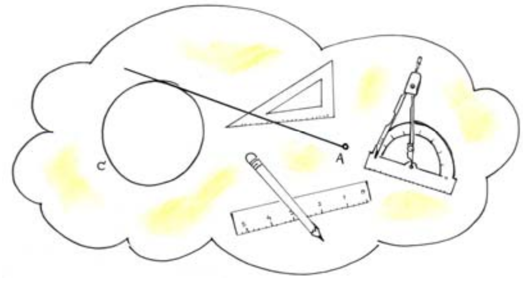
از آن‌ها بخواهید حدس خود را ثابت کنند یعنی ثابت کنند که هر نقطه که به فاصله‌ی مساوی از دو ضلع یک زاویه است روی نیمساز آن قرار دارد و این بدان معناست که در شکل زیر ثابت کنند که اگر DB و DC برابر باشند، زوایای CAD و BAD نیز برابرند.

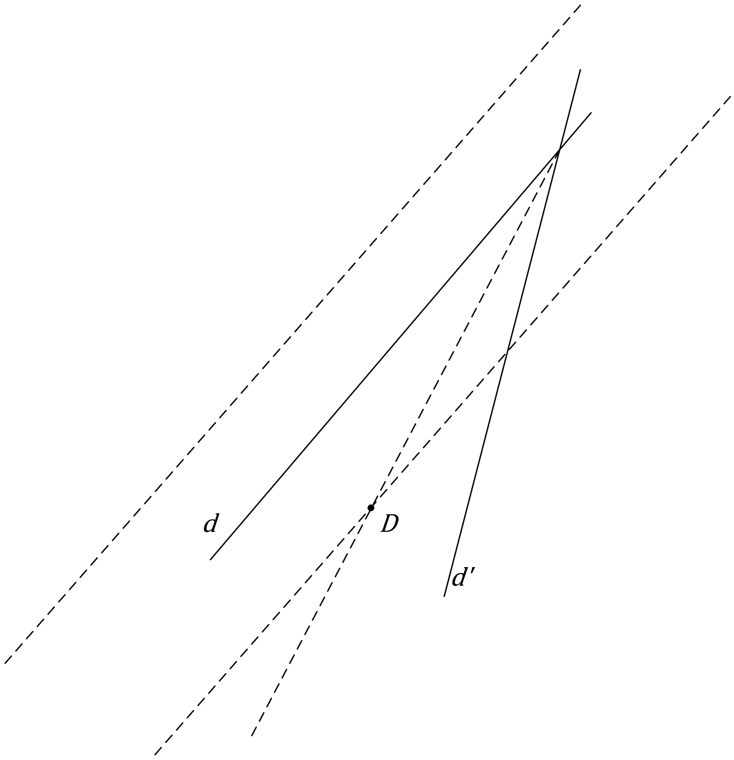


سپس از دانش‌آموزان بخواهید تعریفی برای نیمساز زاویه ارائه دهند.

نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقاطی است که به فاصله‌ی مساوی از دو ضلع آن زاویه قرار دارند.

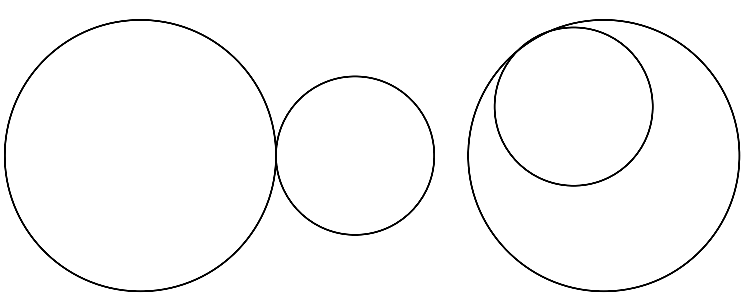
حالا باید نقطه‌ای روی این نیمساز بیابیم که در فاصله‌ی دو سانتی‌متری دو خط باشد. برای این منظور هم به دنبال تمام نقاطی می‌گردیم که به فاصله‌ی مساوی از یکی از این خطوط مثلاً d باشد. که این نقاط روی دو خط موازی با خط d می‌باشند. نقطه‌ی D جواب مسئله است زیرا هم به فاصله‌ی مساوی از دو خط و هم به در دو سانتی‌متری d می‌باشد.

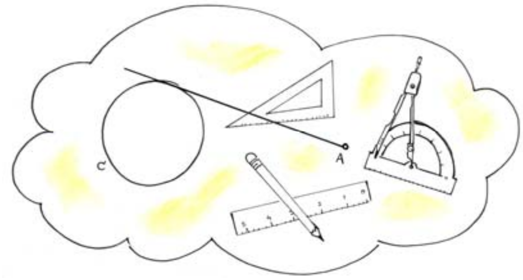




البته راه حل سریعتری هم برای این مسئله وجود دارد، به این صورت که دو خط به فاصله‌ی دو سانتی‌متر از هر دو خط رسم کنیم. نقطه‌ی برخورد آن‌ها را جواب سؤال است.

۹- الف) دو دایره‌ی با را (صرف نظر از اندازه‌ی آن‌ها) تنها به دو روش می‌توان بر هم مماس کرد، به‌گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند.

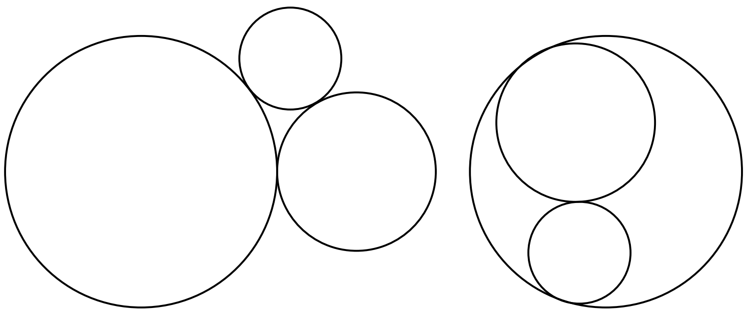




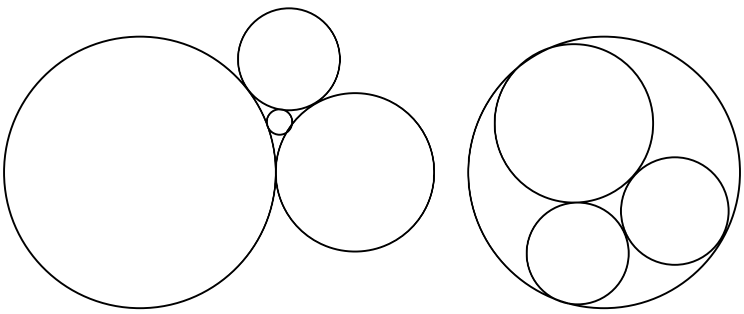
سه دایره‌ی متمایز را به چند طریق می‌توان بر هم مماس کرد، به‌گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند و نقاط تماس آن‌ها نیز متمایز باشد.

ب) چهار دایره‌ی متمایز چطور؟

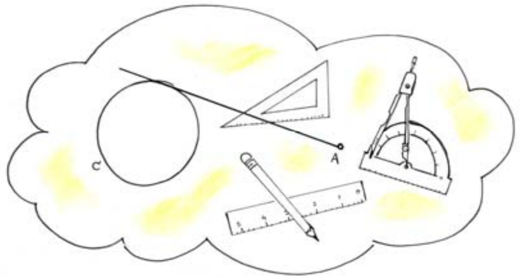
☐ الف) به دو طریق



ب) به دو طریق



در این سؤال هدف رسم دقیق می‌باشد.



دوایر اشمیت‌هابر[۱]

۱۰-آنچه می‌بینید، مجموعه‌ای فوق‌العاده از دوایر اشمیت‌هابر می‌باشد. این شکل را رسم کنید.

برای خلق این الگو، ابتدا یک دایره به شعاع دلخواه رسم کنید. سپس دایره‌ی دیگری به مرکز نقطه‌ای روی محیط دایره‌ی اولیه به شعاع دایره‌ی اول رسم کنید. به این دو دایره « دوایر قانونی[۲] » می‌گوییم. برای رسم ادامه‌ی دوایر از ۲ قانون زیر پیروی کنید.

قانون ۱: اگر دو دایره‌ی قانونی هم شعاع بر یکدیگر مماس شدند یا یکدیگر را قطع کردند یک دایره قانونی دیگر هم‌شعاع با دوایر قانونی به مرکز نقطه‌ی تماس یا تقاطع آن‌ها رسم کنید.

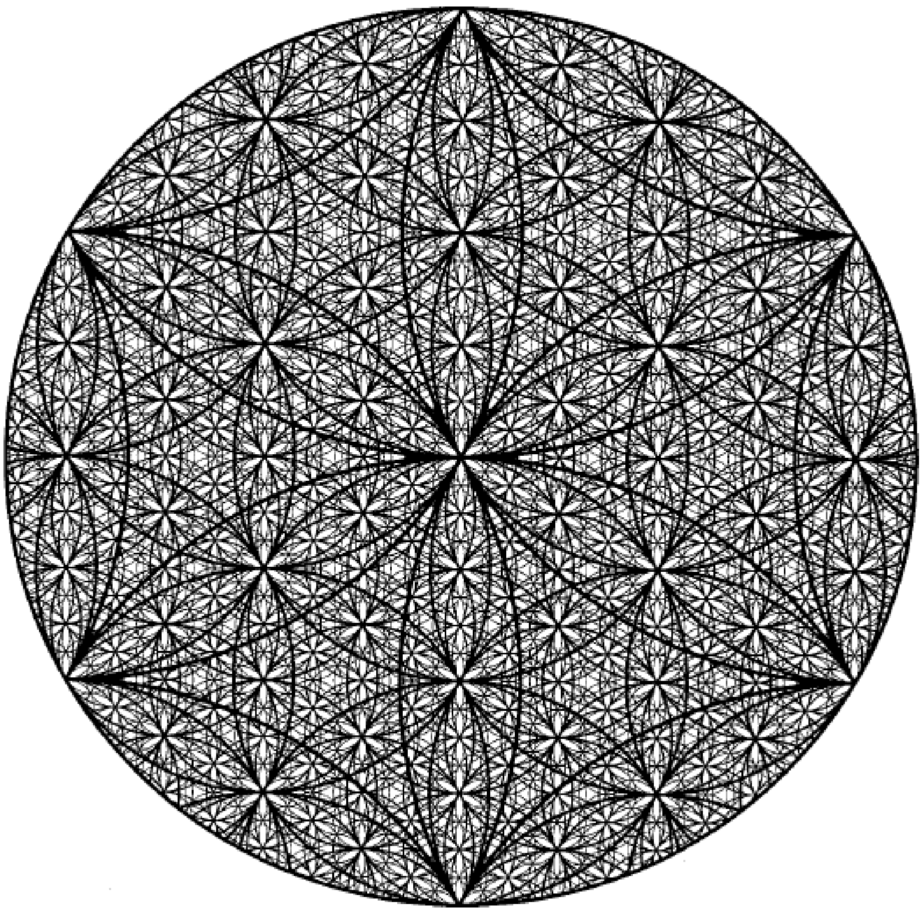
قانون ۲: درون هر دایره‌ی قانونی به مرکز P و شعاع r یک دایره‌ی قانونی دیگر به مرکز P اما به شعاع $\frac{r}{2}$ رسم کنید.

در نهایت کمان‌هایی که از دایره‌ی اولیه بیرون رفته‌اند را پاک کنید.

---

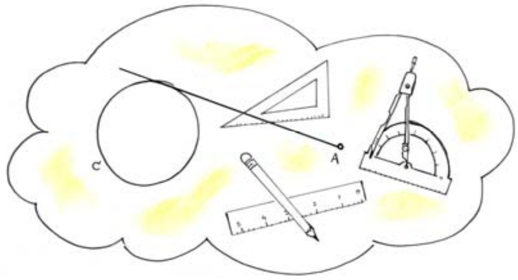
۱ *Schmidhuber circles*

۲ *legal circles*



(www.idsia.ch/~juergen/)

۱۱-مطلبی با عنوان تثلیث زاویه بر روی وب‌گاه سمپاد درباره‌ی ترسیم‌های هندسی وجود دارد که دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند به آن مراجعه کنند.



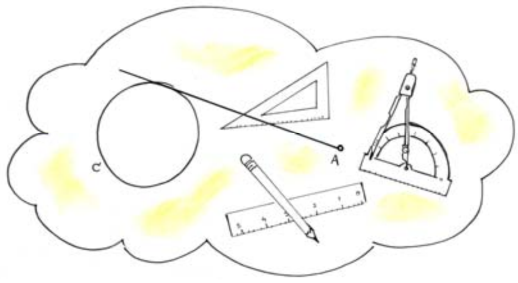
۱۲-دو سکه هر کدام به شعاع ۲سانتی‌متر داریم. یکی زرد و یک قرمز. سکه‌ی قرمز ثابت است ولی سکه‌ی زرد مماس بر سکه‌ی قرمز دور آن می‌چرخد. اگر سکه‌ی زرد یک دور کامل دور سکه‌ی قرمز بزند، چند بار دور خودش چرخیده است؟

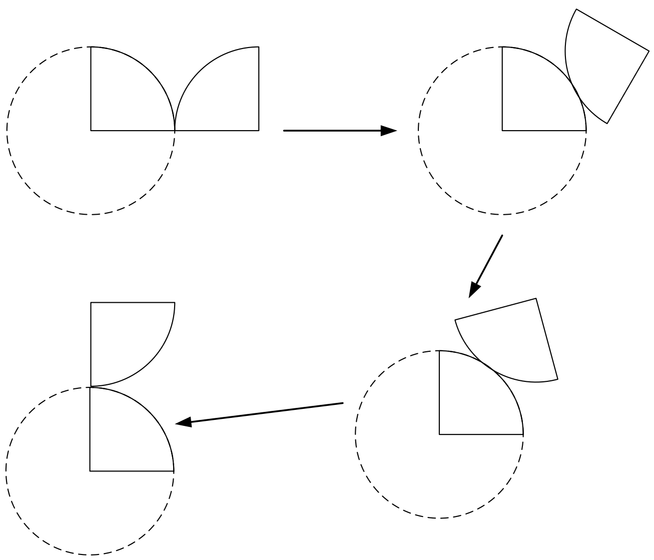
به نظر شما کدام‌یک جواب صحیح مسئله می‌باشد؟

- یک‌بار
- ۱/۵ بار
- دو بار
- ۲/۵ بار
- هیچ‌کدام

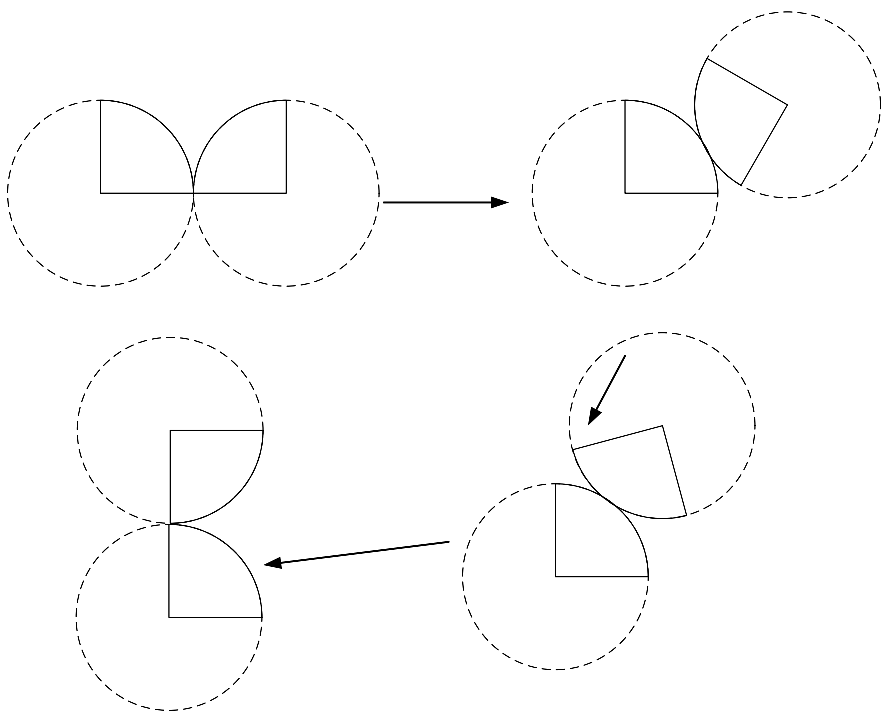
از دانش‌آموزان بخواهید این مسئله را خوشان آزمایش کنند (برای قطرهای کوچکتر و با سکه‌های مختلف). سپس در کلاس آمارگیری کنید و ببینید کدام جواب بیشترین رأی را می‌آورد. حال از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی جوابشان و علت صحت آن در کلاس بحث کنند. سپس خودتان این آزمایش را در کلاس انجام دهید.

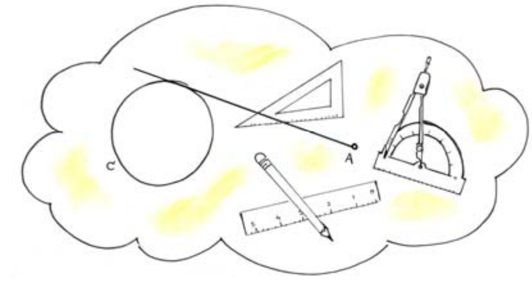
☐ **جواب صحیح دوبار می‌باشد. اکثر دانش‌آموزان در رویارویی با این مسئله جواب یک‌بار را می‌دهند. برای فهمیدن این مسئله یک ربع دایره را حول یک ربع دایره‌ی دیگر می‌چرخانیم:**





ربع دایره با یک‌چهارم چرخش روی دایره ۱۸۰ درجه می‌چرخد که یعنی بعد از یک‌بار کامل چرخش روی دایره $2\times 360^\circ = 4\times 180^\circ$ دو بار حول خودش می‌چرخد.

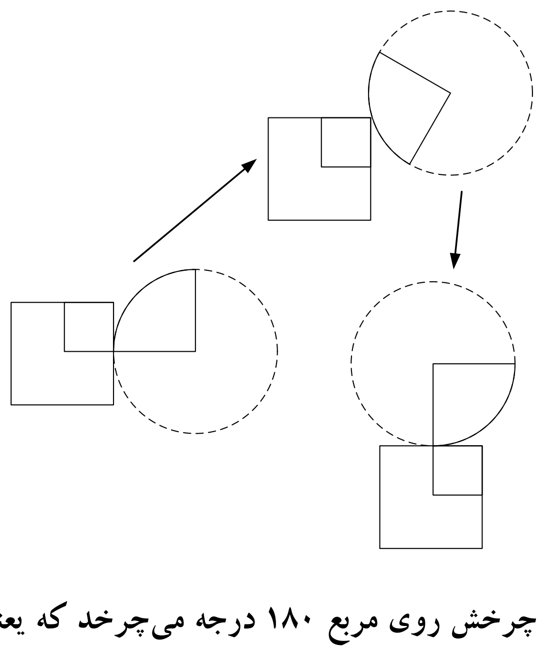




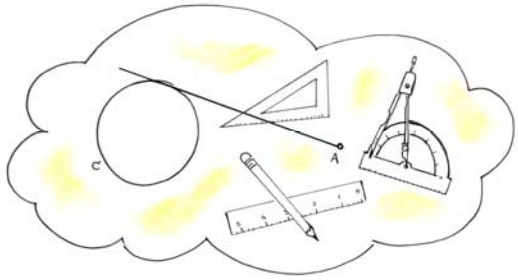
۱۳- یک دایره و یک مربع با محیط‌های برابر و مماس بر یکدیگر داریم. مربع ثابت است و دایره دور مربع و مماس بر آن می‌چرخد. اگر دایره، یک بار دور مربع بزند چند بار دور خودش چرخیده است؟

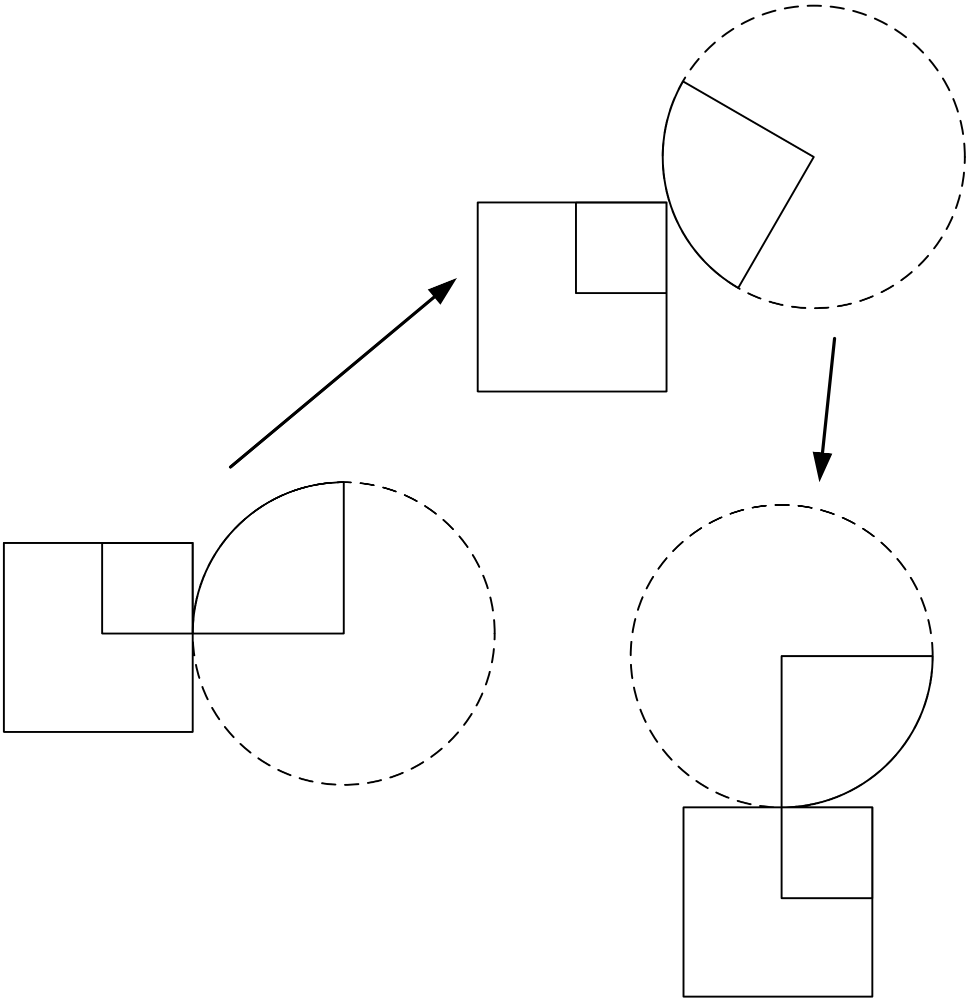
از دانش‌آموزان بخواهید این مسئله را خودشان آزمایش کنند (برای قطرهای کوچک‌تر و با سکه‌های مختلف). سپس در کلاس آمارگیری کنید و ببینید کدام جواب از بین جواب‌های دانش‌آموزان، بیشترین رأی را می‌آورد. حال از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی جوابشان و علت صحت آن در کلاس بحث کنند. سپس خودتان این آزمایش را در کلاس انجام دهید.

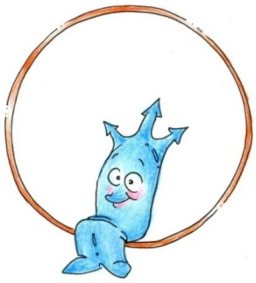
□ جواب صحیح همان دوبار است. برای فهمیدن این مسئله باز هم به شیوه‌ی قبل عمل می‌کنیم. یک ربع دایره را حول یک ربع مربع می‌چرخانیم:



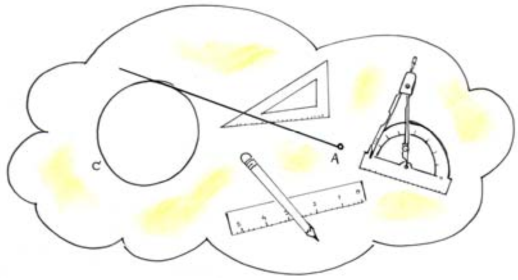
ربع دایره با یک‌چهارم چرخش روی مربع ۱۸۰ درجه می‌چرخد که یعنی بعد از یک‌بار کامل چرخش روی دایره $180^\circ \times 4 = 360^\circ \times 2$ دو بار حول خودش می‌چرخد.







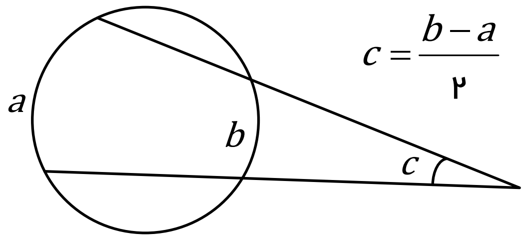
۱۴-دایره موجود بسیار عجیبی است که ویژگی‌های بسیاری دارد. یکی از این ویژگی‌ها، قضیه‌ی جانسون می‌باشد. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند مطلبی درباره‌ی قضیه‌ی جانسون، روی وب‌گاه سمپاد بخوانند.



زاویه در دایره

⟦تدریس صفحات ۶۹ تا ۷۷ تا ابتدای رابطه‌ی فیثاغورس ⟧

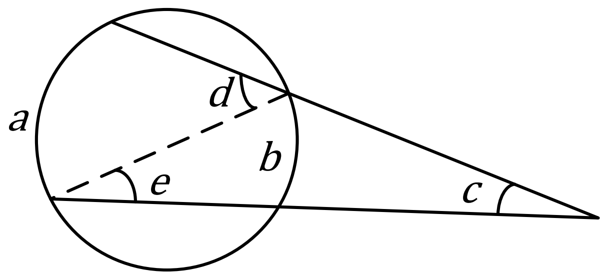
۱۵- ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بیرونی دایره برابرست با نصف اختلاف کمان‌های روبرو به آن زاویه.

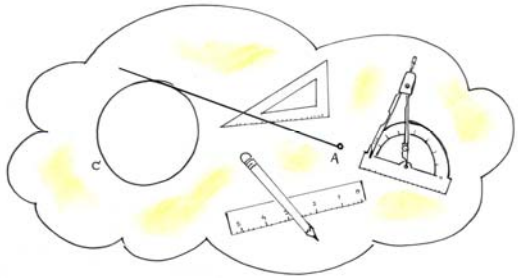


ابتدا لازم است که زاویه‌ی بیرونی را برای دانش‌آموزان تعریف کنید:

زاویه‌ی بیرونی یک دایره زاویه‌ای است که رأسش، بیرون آن دایره است و اضلاعش، دایره را قطع می‌کنند و به بیان دیگر می‌توان گفت که یک زاویه‌ی بیرونی از امتداد دو وتر غیر موازی در دایره حاصل می‌شود.

□ **برای حل سؤال خطی به شکل اضافه می‌کنیم.**

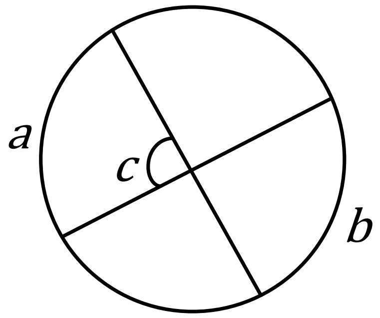




$$d=\frac{a}{2}\ ,\ e=\frac{b}{2}$$
$$d=e+c\rightarrow c=d-e\rightarrow c=\frac{a-b}{2}$$

حفظ کردن فرمول لازم است.

۱۶-ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی درونی دایره برابرست با نصف مجموع کمان‌های روبرو به آن زاویه.

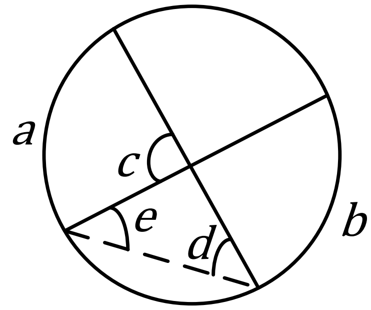


$$c=\frac{b+a}{2}$$

ابتدا لازم است که زاویه‌ی درونی را برای دانش‌آموزان تعریف کنید:

زاویه‌ی درونی یک دایره، زاویه‌ای است که رأسش درون آن دایره است و اضلاعش دایره را قطع می‌کنند و به بیان دیگر می‌توان گفت که یک زاویه‌ی درونی از برخورد دو وتر داخل دایره حاصل می‌شود.

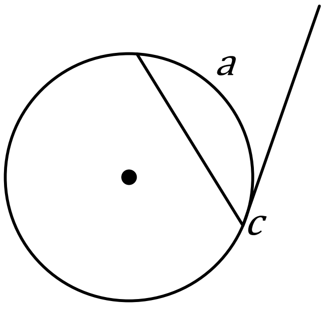
□برای حل سؤال خطی به شکل اضافه می‌کنیم.



$$d=\frac{a}{2}\,,\ e=\frac{b}{2}$$
$$c=d+e\rightarrow c=\frac{a+b}{2}$$

حفظ کردن فرمول لازم است.

۱۷-ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی[۳] دایره برابرست با نصف کمان روبرو به آن زاویه.

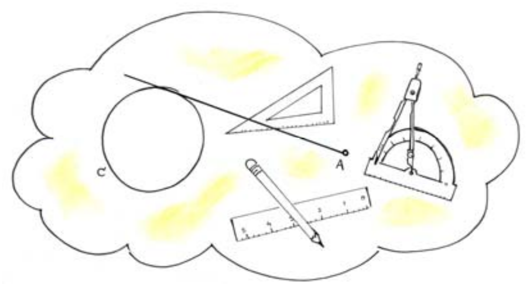


$$c=\frac{a}{2}$$

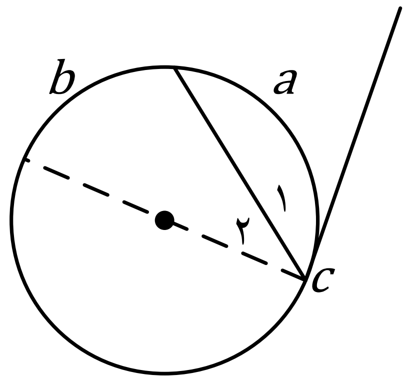
ابتدا لازم است که زاویه‌ی ظلی را برای دانش‌آموزان تعریف کنید:

زاویه‌ی ظلی یک دایره، زاویه‌ای است که رأسش روی آن دایره است و تنها یکی از اضلاعش، مماس بر آن دایره می باشد.

[۳] ظل به معنای سایه است.



برای حل سؤال، خطی به شکل اضافه می‌کنیم.



$$c_{۲}=\frac{b}{۲}\ ,\ c_{۲}+c_{۱}=۹۰=\frac{۱۸۰}{۲}=\frac{a+b}{۲}\rightarrow c_{۱}=\frac{a+b}{۲}-\frac{b}{۲}=\frac{a}{۲}$$

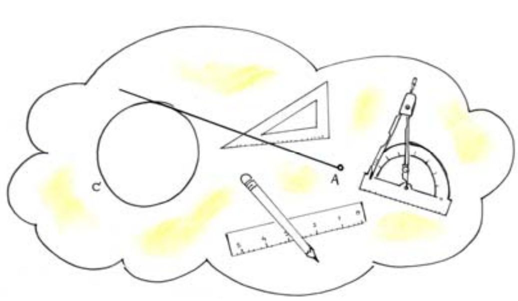
حفظ کردن فرمول لازم است.

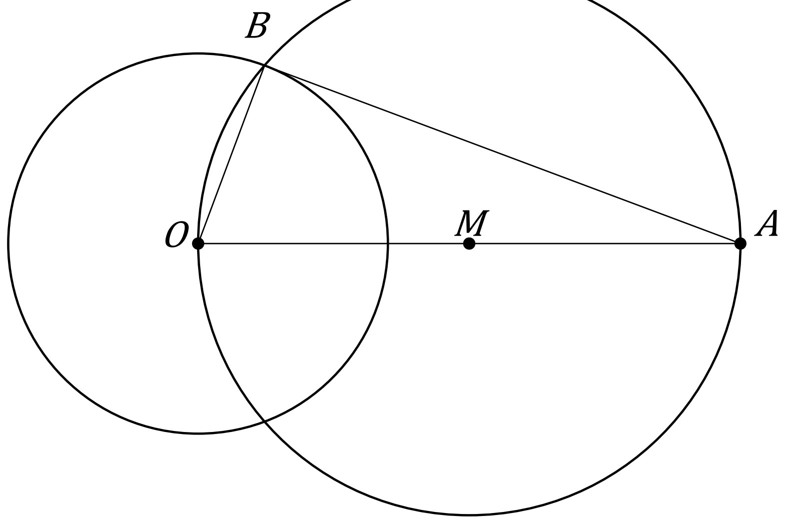
۱۸- روش سامان برای رسم مماس از نقطه‌ای بر دایره، را به‌خاطر بیاورید. پدر سامان می‌گوید در زمان تحصیلش، معلمشان روش دیگری برای رسم مماس گفته است:

فرض کن می‌خواهیم از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r مماسی رسم کنیم. ابتدا پاره‌خط OA را رسم کرده و وسط آن را می‌یابیم(نقطه‌ی M). به مرکز M و به شعاع OM دایره رسم می‌کنیم. از A به نقطه‌ی برخورد دو دایره وصل می‌کنیم. این پاره‌خط همان مماس مورد نظر است.

با استفاده از روشی که پدر سامان بیان کرده است مماسی بر دایره دلخواه رسم کنید. آیا این روش درست است؟ چرا؟

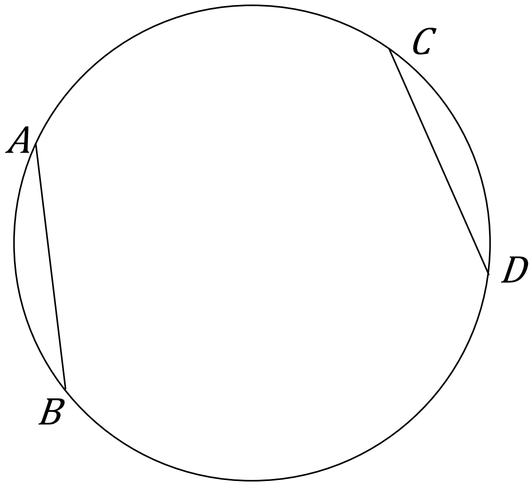
روش رسم را بررسی می‌کنیم:

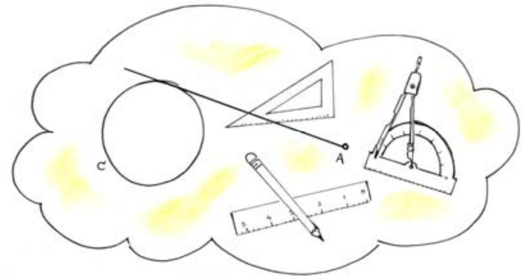




همان‌گونه که مشاهده می‌شود اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۹۰ درجه می‌باشد. زیرا روبه‌رو به قطر دایره است و می‌توان نتیجه گرفت که AB مماس بر دایره است.

۱۹- در دایره‌ی زیر $AB = CD$، ثابت کنید $\overparen{AB} = \overparen{CD}$.





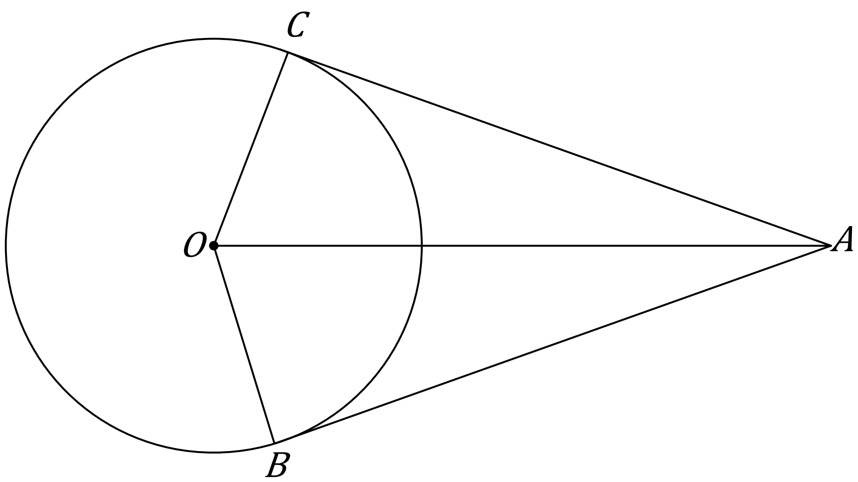
□ به عنوان راهنمایی به دانش‌آموزان بگویید که از مرکز دایره (O)خطوطی به نقاط A، B، C و D وصل کنند و ثابت کنند که مثلث‌های AOB و COD برابرند.

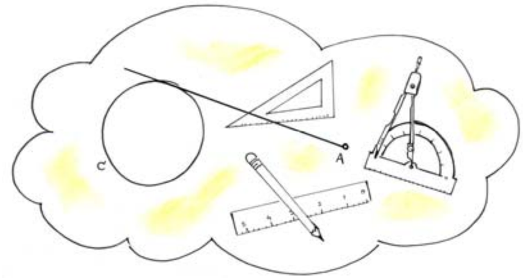
از دانش‌آموزان اثبات عکس این قضیه را نیز بخواهید:

« وترهای متناظر کمان‌های برابر، برابرند.»

دانش‌آموزان بهتر است که این قضیه و عکس آن را به علت کاربرد بسیار در حل مسائل حفظ کنند.

۲۰- ثابت کنید در دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با یکدیگر مساوی هستند.



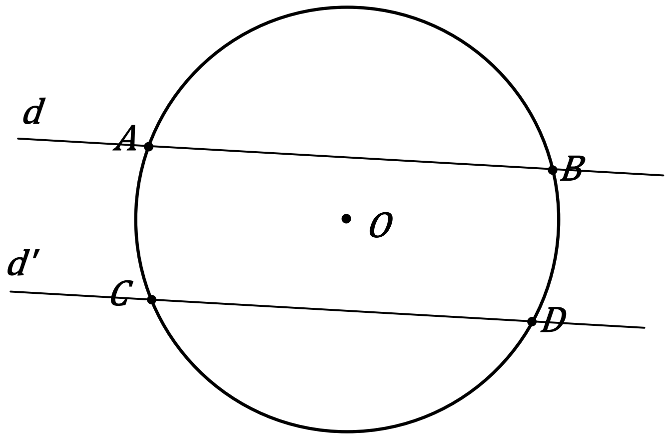


☐ **در شکل بالا باید ثابت کنیم که $AB = AC$ و با توجه به اینکه B و C قائمه‌اند ثابت می‌کنیم که $\triangle ABO = \triangle ACO$ به حالت وتر و یک ضلع که همان شعاع‌های دایره است.**

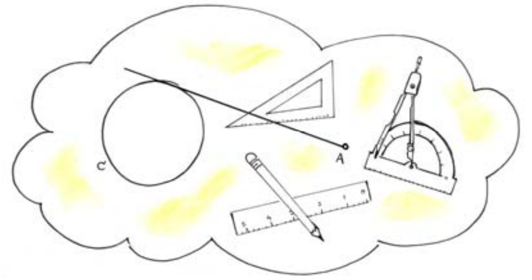
دانش‌آموزان می‌بایست این قضیه را حفظ کنند.

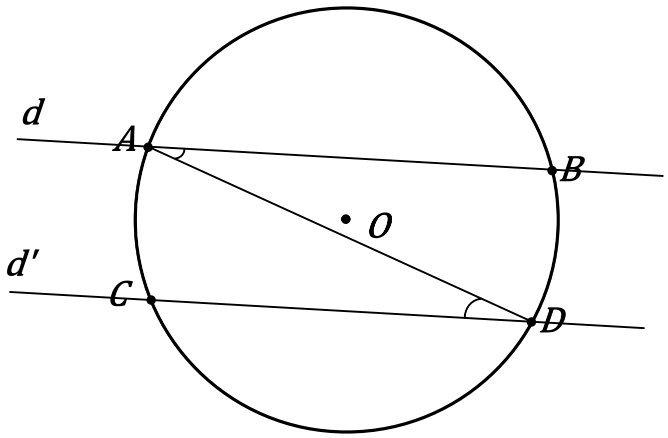
۲۱- ثابت کنید اگر دو خط موازی یک دایره را قطع کنند، کمان‌های بین این دو خط با هم برابرند.

$d \parallel d' \rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$



☐ **در شکل خط AD را رسم کرده‌ایم و چون دو خط موازی هستند، طبق قضیه‌ی موازی-مورب دو زاویه‌ی BAD و ADC مساویند و در نتیجه دو کمان BD و AC نیز برابرند.**



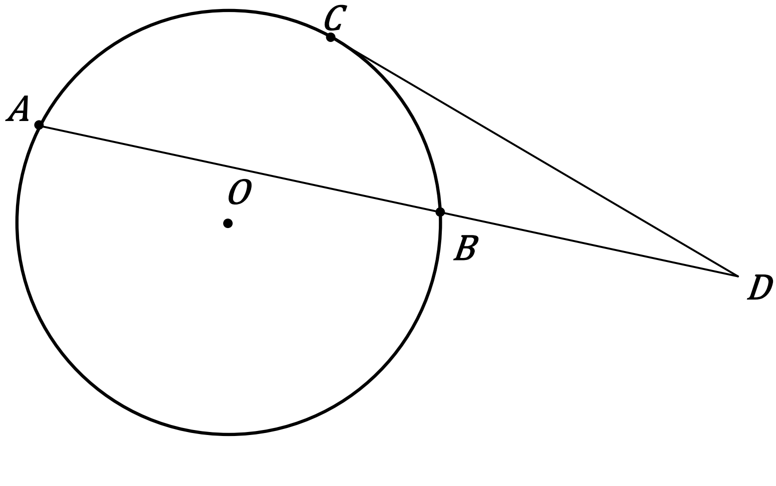


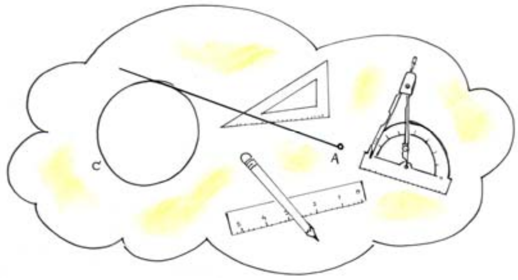
عکس این مطلب نیز درست است. یعنی اگر دو خط روی دایره‌ای دو کمان مساوی به وجود آورند، موازیند.

دانش‌آموزان می‌بایست این قضیه و عکس آن را حفظ کنند.

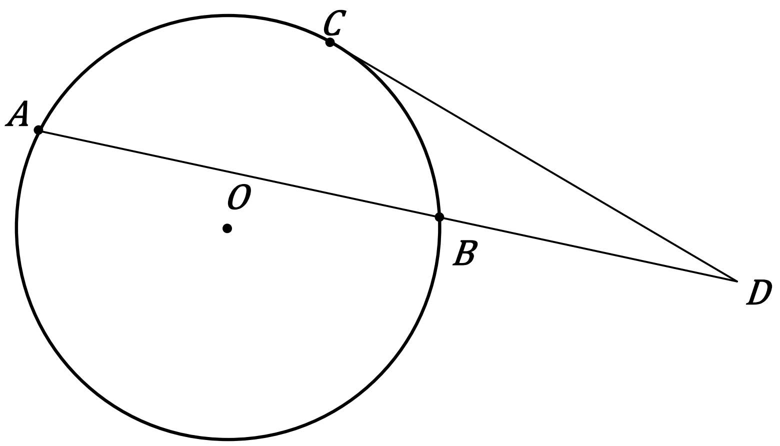
۲۲- در شکل زیر نشان دهید:

$$\angle D = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{۲}$$



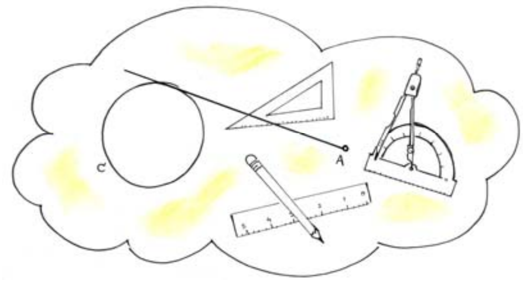


□ یکی از روش‌های حل این سؤال رسم BC است. روش دیگر رسم خطی موازی با DC از نقطه‌ی B است. در این روش داریم:



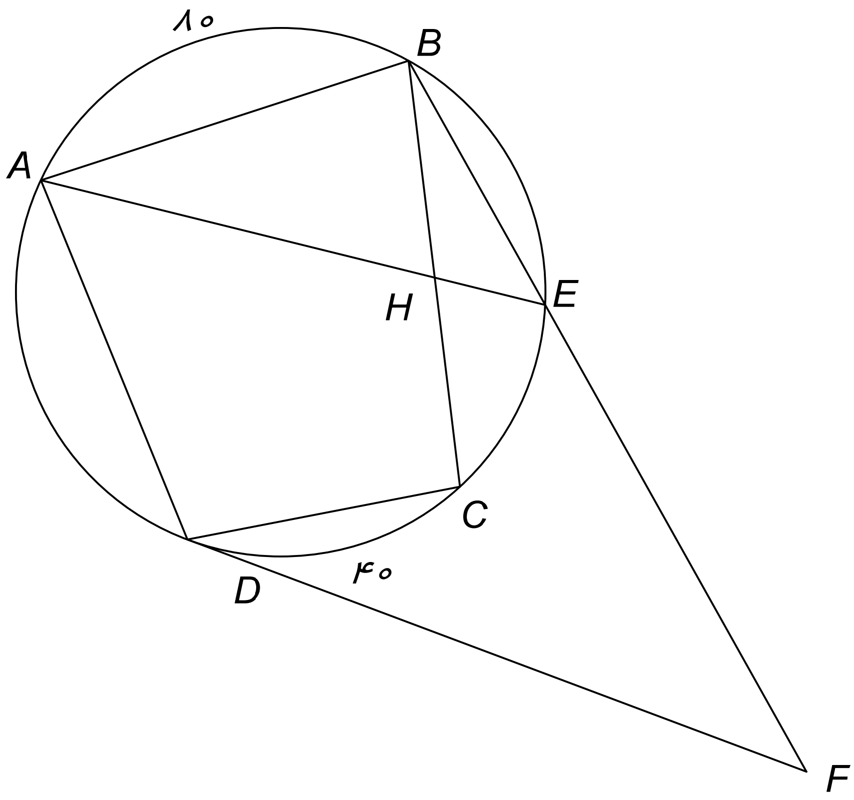
$$BE \parallel CD \rightarrow \angle ABE = \angle D, \overparen{EC} = \overparen{BC}$$

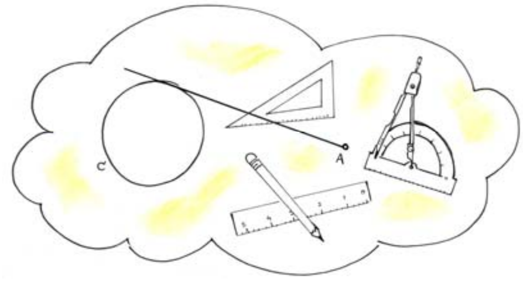
$$\angle ABE = \frac{\overparen{AE}}{۲} = \frac{\overparen{AC} - \overparen{EC}}{۲} = \frac{\overparen{AC} - \overparen{BC}}{۲}$$



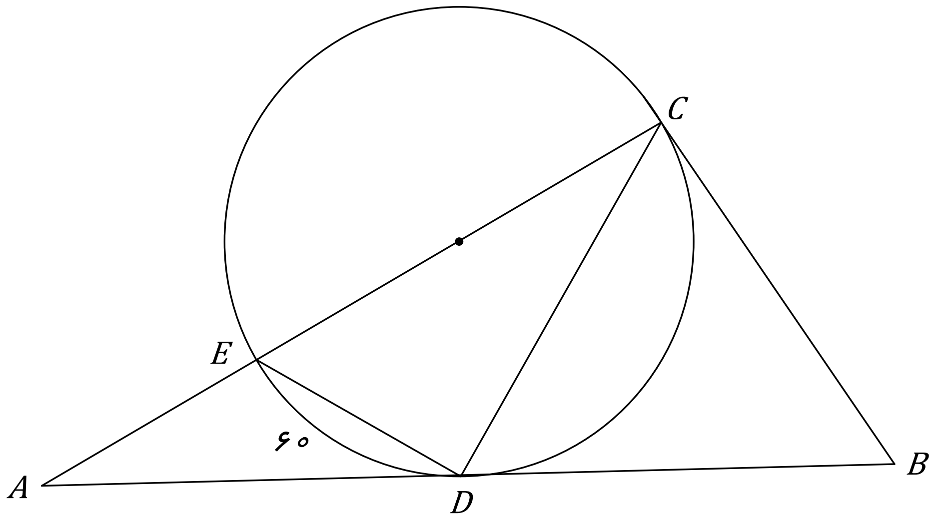
مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره

۲۳-در شکل زیر FD مماس بر دایره و AB موازی CD و AD موازی BF است. زوایای ADF ، AHB ، BFD و BAH را بیابید.

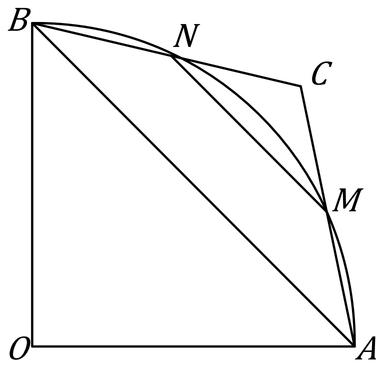


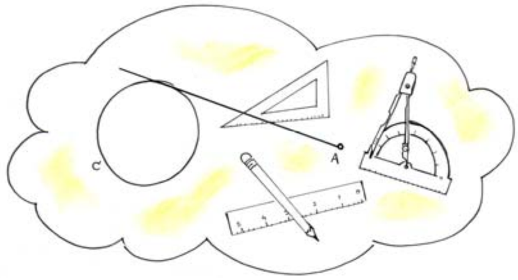


۲۴-در شکل زیر EC قطر دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. زوایای EAD، EDC، ECD و ABC را بیابید.



۲۵- ربع دایره‌ی AOB را در نظر بگیرید. دو وتر مساوی AM و BN را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.



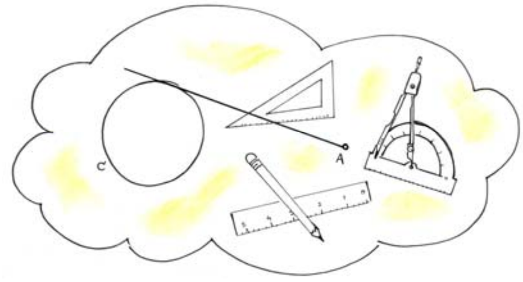


در حل مسائلی از این دست فقط به راهنمایی دانش‌آموزان بپردازید تا خودشان به لذت حل مسئله پی ببرند.

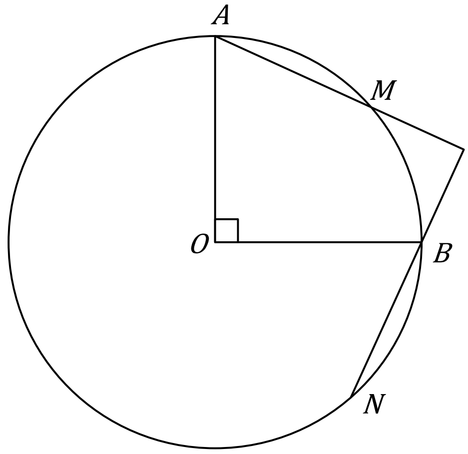
راهنمایی‌ها به صورت مرحله به مرحله آمده‌اند که می‌توانید آن‌ها را به تدریج و به صلاح‌دید خود در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید.

☐ **راهنمایی‌ها:**

- **دایره را کامل کنید.**
- **با توجه به برابری وترها ثابت کنید زوایای NMA و MNB برابرند.**
- **ثابت کنید مثلث‌های CNM و ACB متساوی‌الساقین هستند.**
- **ثابت کنید OC نیمساز زوایای N و C می‌باشد.**
- **در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس، عمود منصف قاعده است.**

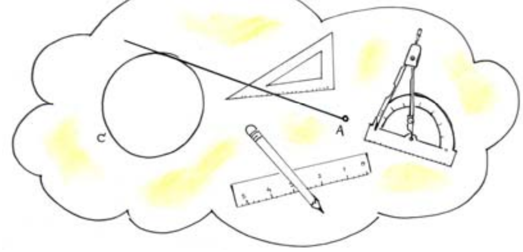


۲۶-در دایره‌ی روبه‌رو دو شعاع عمود بر هم OA و OB را رسم کرده‌ایم و از A و B دو کمان مساوی AM و BN را جدا کرده‌ایم. ثابت کنید که AM بر BN عمود است.

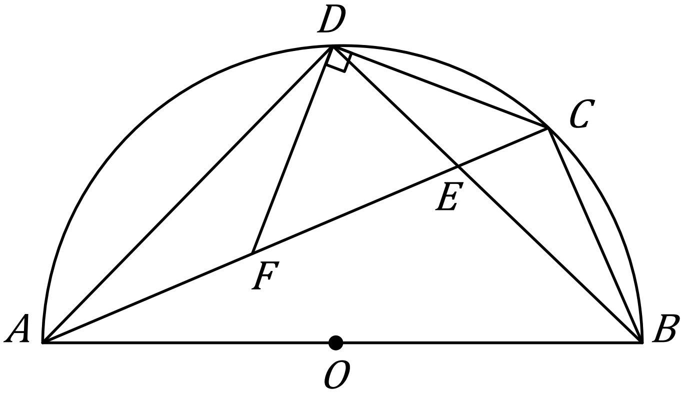


☐ راهنمایی:

- **نقطه‌ی برخورد AM و BN را F می‌نامیم و اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی F را برحسب AM و MB می‌نویسیم.**

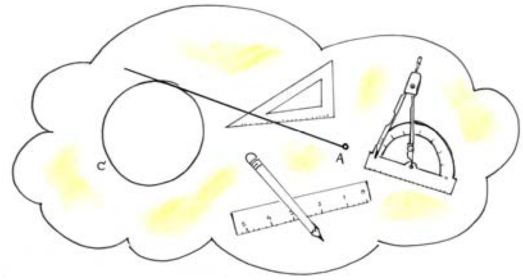


۲۷-روی نیم‌دایره‌ی به قطر AB دو کمان مساوی BC و CD را جدا کرده‌ایم و از D عمودی از CD خارج کرده ایم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید نقطه‌ی F وسط AE است.

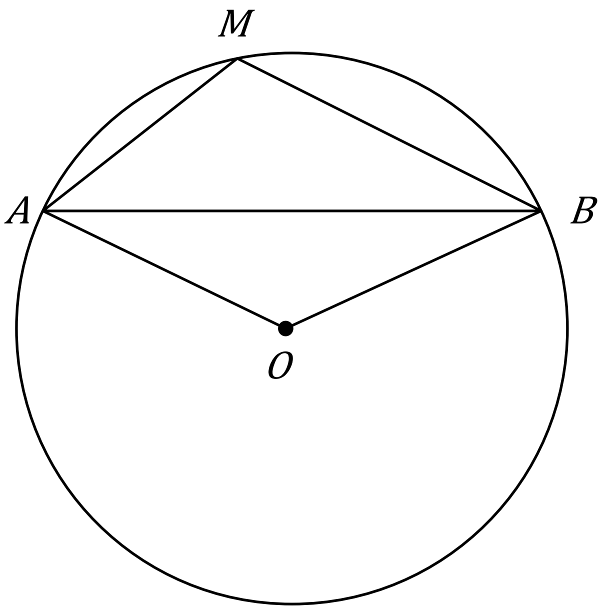


☐ راهنمایی‌ها:

- **ثابت کنید زوایای CDE و CBE و DAC و CAB برابرند.**
- **ثابت کنید زاویه‌ی FDA نیز با زوایای CDE و CBE و DAC و CAB برابرست و بنابراین FA با DF برابرند.**
- **ثابت کنید که زاویه‌ی DEF با زاویه‌ی EDF برابر است.**

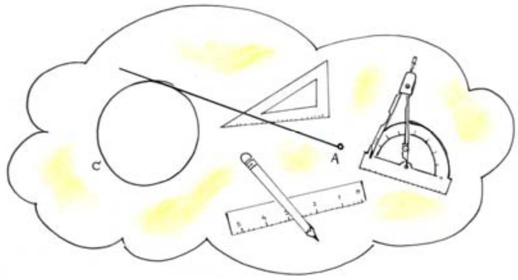


۲۸- در دایره‌ی زیر، O مرکز و نقطه‌ی M بر محیط آن واقع است. اگر دو زاویه‌ی AMB و AOB مساوی باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی OBA را به‌دست آورید.

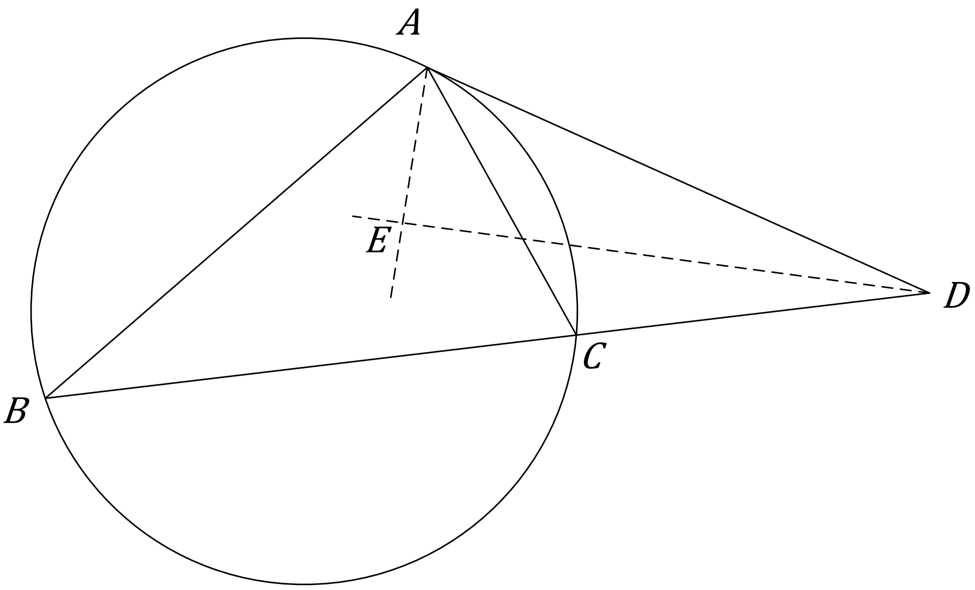


☐ **راهنمایی‌ها:**

- **جمع دو زاویه‌ی مساوی AMB و AOB را بدست آورید.**
- **می‌دانیم که $\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ$.**

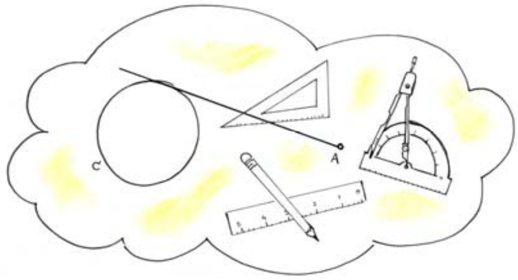


۲۹-در شکل زیر، AD مماس بر دایره است و AE و DE به ترتیب نیمساز زوایای BAC و ADC می‌باشند. ثابت کنید AE بر DE عمود است.

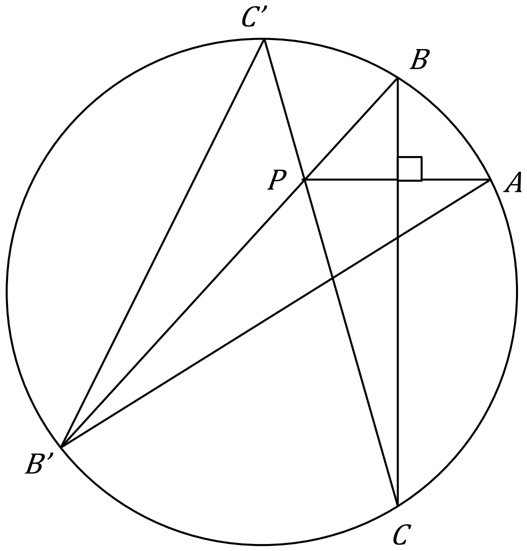


☐ راهنمایی‌ها:

- **در مثلث AED اندازه‌ی زاویه‌های ADE ، EAC و CAD را بر حسب کمان‌های دایره‌ی مرسوم به‌دست آورید.**
- **ثابت کنید مجموع زوایای به‌دست آمده ۹۰ درجه می‌باشد.**
- **می‌دانیم که $\widehat{ABC}+\widehat{ABC}+\widehat{ABC}=$ ۳۶۰ .**

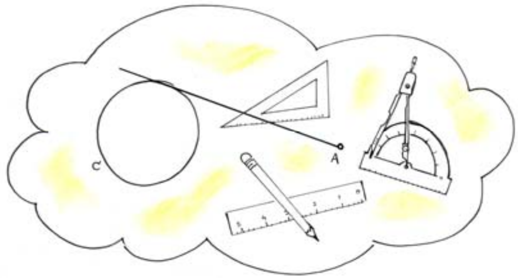


۳۰- در شکل زیر BC عمودمنصف PA می‌باشد. ثابت کنید زوایای $BB'C'$ و $BB'A$ برابرند.



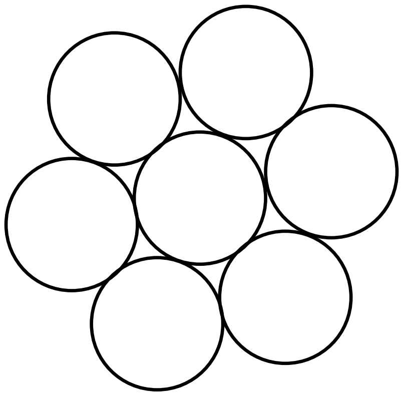
☐ **راهنمایی‌ها:**

- **از C به A وصل کنید.**
- **ثابت کنید مثلث APC متساوی‌الساقین است.**
- **می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین عمودمنصف قاعده، نیمساز زاویه‌ی رأس است.**

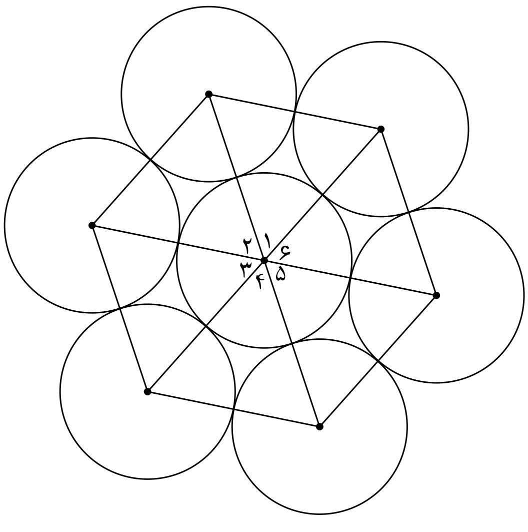


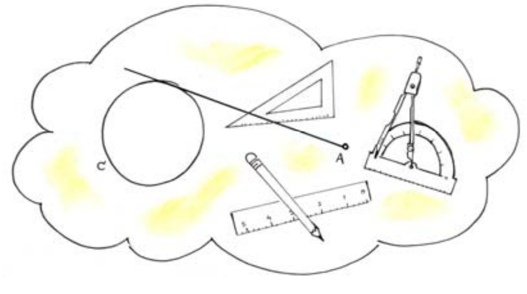
۳۱-حداکثر چند دایره به شعاع یک‌سانتی‌متر را می‌توان بر دایره‌ای به شعاع یک‌سانتی‌متر مماس کرد؟ چرا؟ این کار را انجام دهید.

□ **شش عدد**



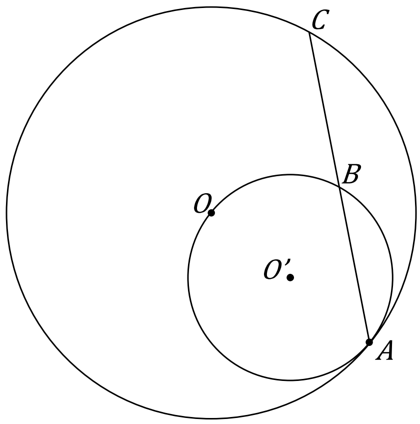
مراکز دوایر مماس بر دایره‌ی میانی را به یکدیگر و به مرکز دایره‌ی میانی وصل کنید. چند مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی به‌دست می‌آید.





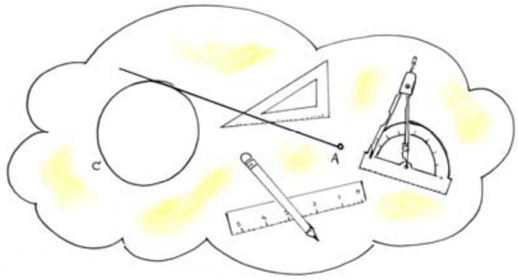
و زوایای مرکزی که در شکل مشخص شده‌اند همگی ۶۰ درجه می‌باشند و مجموعشان ۳۶۰ درجه است که می‌توان نتیجه گرفت که تنها ۶ مثلث در می‌توان ایجاد کرد که این هم بدان معنی است که تنها ۶ دایره می‌توان بر دایره‌ی مرکزی مماس کرد.**

۳۲- دو دایره‌ی زیر در A مماسند و دایره‌ی کوچک‌تر از مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر می‌گذرد. ثابت کنید B وسط AC است.



☐ راهنمایی‌ها:

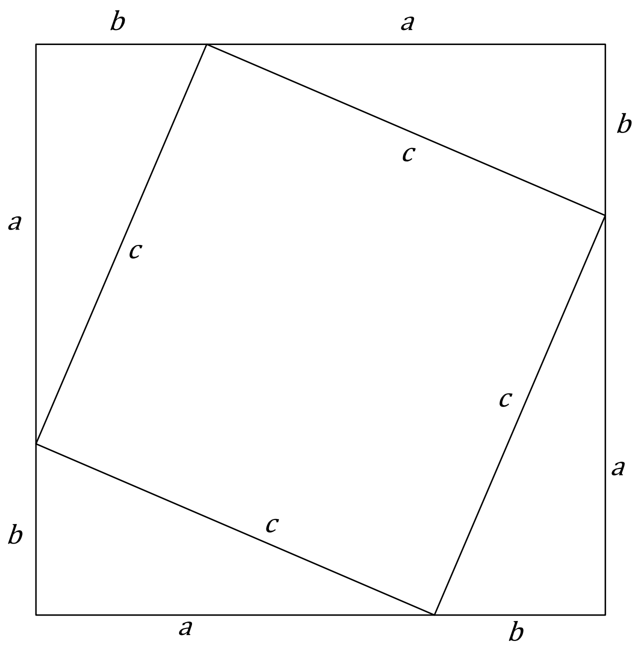
- **از A به O وصل کنید و ثابت کنید که این خط از O' نیز می‌گذرد.**
- **دقت کنید که A بر هر دو دایره واقع است و مماس وارد بر یک دایره در A ، بر دایره‌ی دیگر نیز مماس است.**
- **ثابت کنید که OB بر AC عمود است.**
- **دقت کنید که AO قطر دایره است.**
- **می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می‌کند.**



قضیه‌ی فیثاغورس

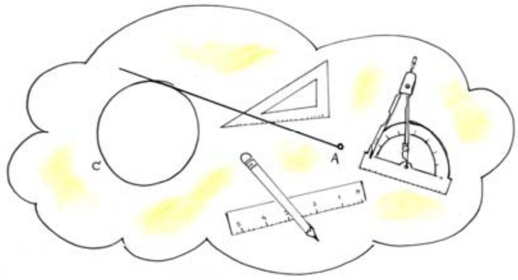
[[تدریس صفحات ۷۸ و ۷۹ و ۸۰ تا ابتدای استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس]]

۱- «فردوس» قضیه‌ی فیثاغورس را خوانده است (در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.) و می‌خواهد آن را اثبات کند. او مربعی به ضلع $a+b$ رسم کرده و چهار مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌های a و b درون مربع رسم کرده است. روش اثبات او را با جواب دادن به سؤالات زیر بررسی کنید.



الف) چرا چهار مثلث برابرند؟

ب) چرا چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است؟



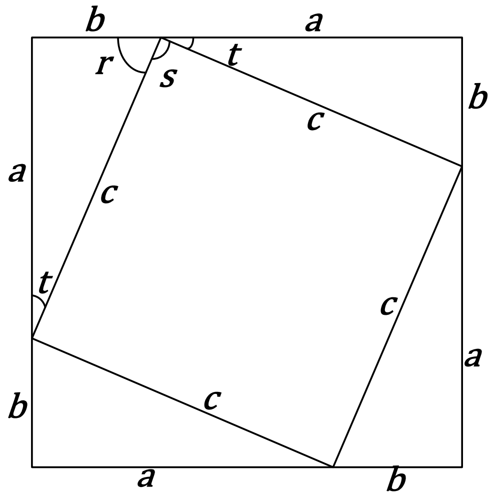
پ) با توجه به اینکه مساحت مربع بزرگ برابر مجموع مساحت‌های چهار مثلث و مربع کوچک‌تر است مقدار $(a+b)^2$ برابر چه عبارتی است؟

ت) از فصل قبل به خاطر دارید که $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. از این رابطه استفاده کنید و ثابت کنید $c^2=a^2+b^2$.

□

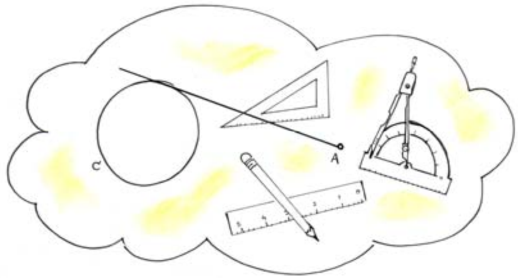
الف) چهار مثلث به حالت ض‌زض برابرند.

ب) دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث‌ها متمم‌اند و با توجه به شکل زیر $r+t=90^\circ$ و چون $r+t+s=180^\circ$ می‌توان نتیجه گرفت که $s=90^\circ$ است.



پ) $(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$

ت) $a^2+\cancel{2ab}+b^2=c^2+\cancel{4\times\frac{1}{2}ab}\rightarrow a^2+b^2=c^2$



۲- «فرشاد» دوست فردوس، برای آن‌که در رقابت با دوست خود کم نیاورد، می‌خواهد برعکس قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کند.

اگر مجذور یک ضلع از مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است و زاویه‌ی قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

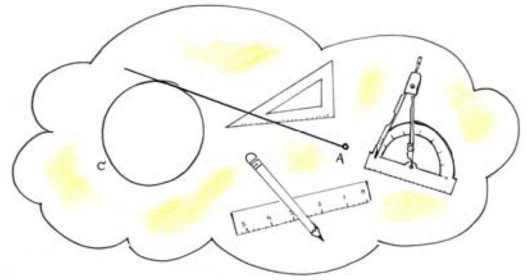
آیا قضیه‌ی جدید هم درست است؟ چرا؟

☐ **این قضیه هم درست است. از دانش‌آموزان بخواهید که با سعی و خطا صحت این قضیه را بررسی کنند. سپس به آن‌ها کمک کنید که این قضیه را هم ثابت کنند.**

می‌توانید مراحل اثبات را به صورت راهنمایی برای دانش‌آموزان بیان کنید.

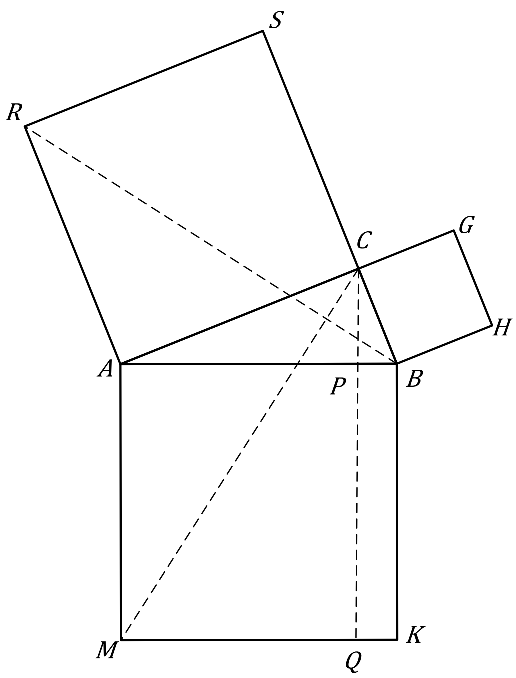
راهنمایی‌ها:

- **دو مثلث بکشید به گونه‌ای که در مثلث ABC ، $a^۲+b^۲=c^۲$ و مثلث $A'B'C'$ ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع a و b و وتر d باشد.**
- **ثابت کنید که d و c برابرند.**
- **ثابت کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابرند.**
- **ثابت کنید** $\angle c=\angle c'=۹۰^\circ$.

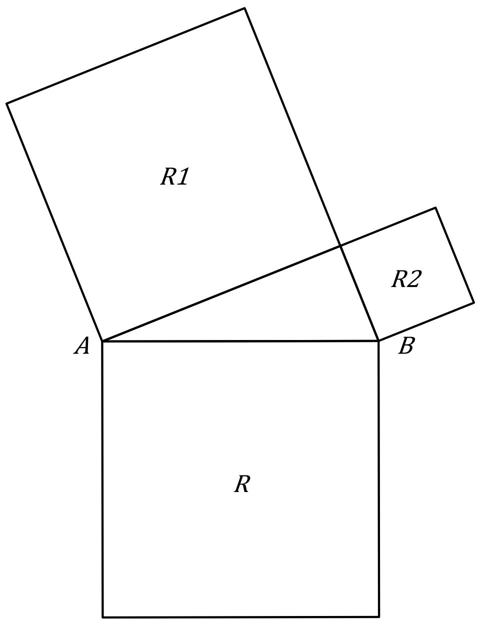


۳- یونانیان قدیم قضیه‌ی فیثاغورس را به صورت زیر می‌شناختند.

مساحت مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ساق‌های آن مثلث رسم می شوند.



$S(R)=S(R1)+S(R2)$

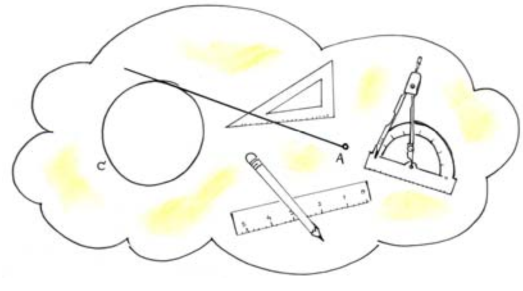


$S(R)=S(R1)+S(R2)$

شکل سمت چپ قضیه را نشان می‌دهد و شکل سمت راست برای اثبات آن به‌کار می‌رود.

سوال‌های زیر به همراه پاسخشان، روش اثبات را به شما نشان می‌دهند. دقت کنید که منظور از $S(\triangle ABC)$ مساحت مثلث ABC است.

الف) چرا $\angle RAB=\angle CAM$ ؟



ب) چرا $\triangle RAB = \triangle CAM$؟

پ) چرا $S(\triangle RAB) = S(\triangle CAM)$؟

ت) آیا یکی از ارتفاع‌های مثلث RAB با AC برابر است؟

ث) چرا $S(ACSR) = ۲S(\triangle RAB)$؟

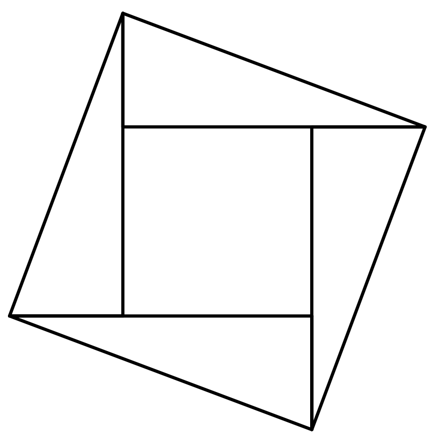
ج) چرا $S(AMQP) = ۲S(\triangle CAM)$؟

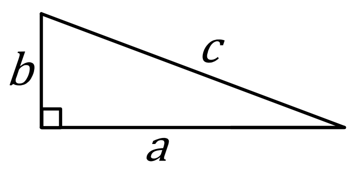
چ) چرا $S(AMQP) = S(ACSR)$؟

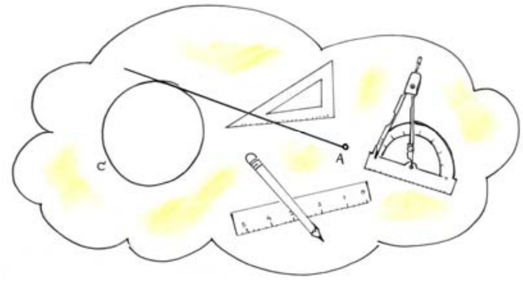
ح) آیا $S(BHGC) = S(PQKB)$؟

خ) آیا $S(AMKB) = S(AMQP) + S(PQKB)$؟ چرا؟

۴- در شکل زیر چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی در کنار یکدیگر شکل زیر را تشکیل داده‌اند. آیا می‌توانید از روی شکل اثباتی برای قضیه‌ی فیثاغورس بیابید.







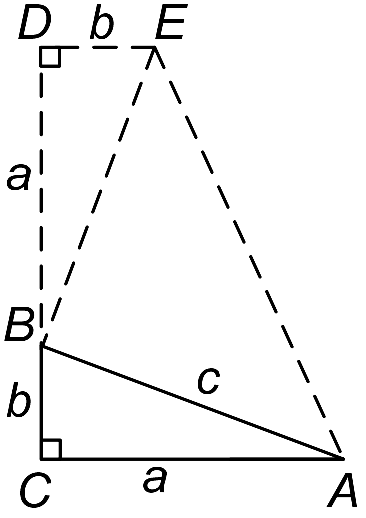
راهنمایی‌ها:

- **ثابت کنید که چهارضلعی حاصل، مربع است.**
- **مساحت کل شکل برابر با مجموع مساحت‌های ۴ مثلث و مربع کوچک‌تر است.**

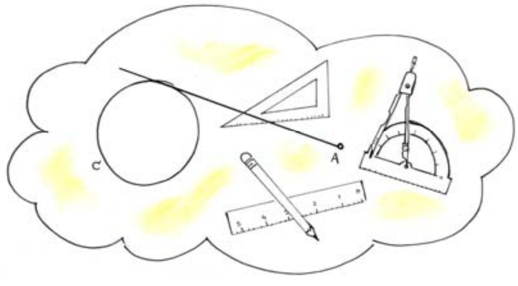
$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2$$

- **می‌دانیم که** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**.**

۵- آقای گارفیلد[۴] ، با استفاده از شکل زیر روشی برای اثبات قضیه‌ی فیثاغورس یافت. شما هم با قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحت‌های سه مثلث، ثابت کنید که $c^2 = a^2 + b^2$. یادتان باشد که ابتدا قائمه بودن $\angle EAB$ را ثابت کنید.



[۴] *General James A.Garfield* رئیس جمهور پیشین آمریکا

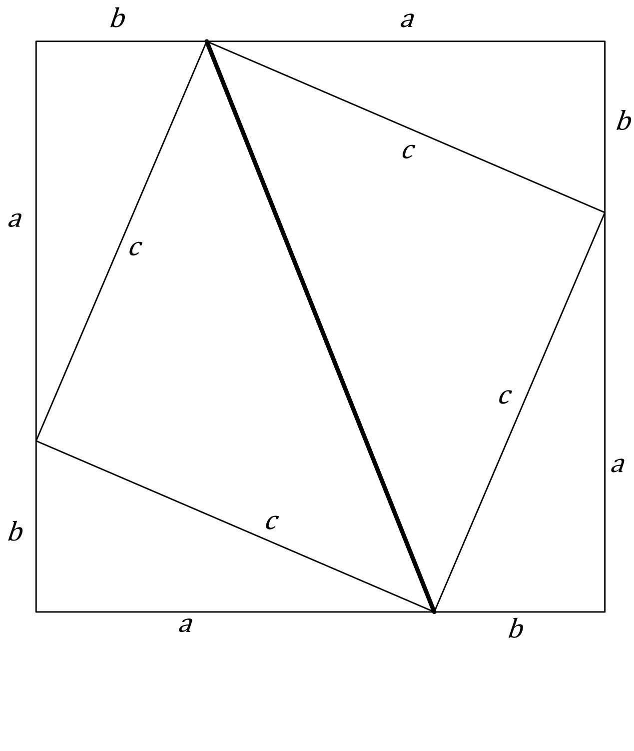


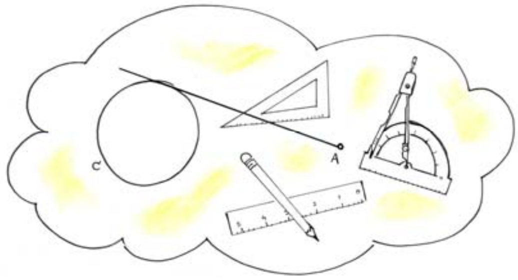
□ **قائمه بودن زاویه‌ی EBA واضح است و در سؤالات قبل هم دیده شده است.**

مساحت ذوزنقه‌ی $ACDE$ برابر مساحت دو مثلث ابتدایی و مثلث ABE است.

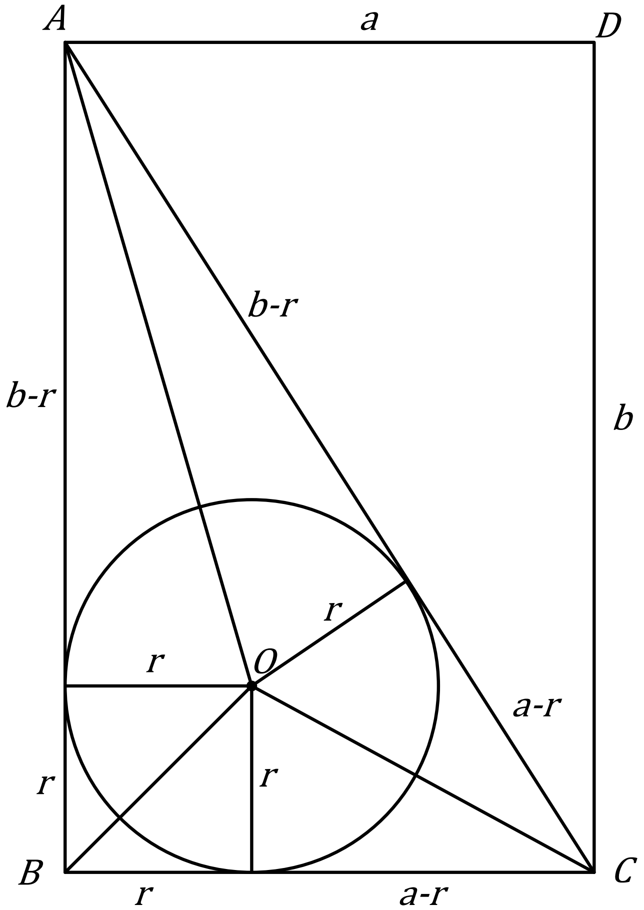
$$S(ACDE)=\frac{1}{2}(a+b)\times(a+b)$$
$$S(ACDE)=2\times\frac{1}{2}\times ab+\frac{1}{2}\times c^2$$

از دانش‌آموزان سؤال کنید که آیا اثبات آمده در این سؤال همان اثبات آمده در سؤال شماره‌ی یک نیست؟! برای نشان دادن یکی بودن اثبات گارفیلد از دانش‌آموزان بخواهید در شکل سؤال یک، خطی مانند زیر رسم کنند:

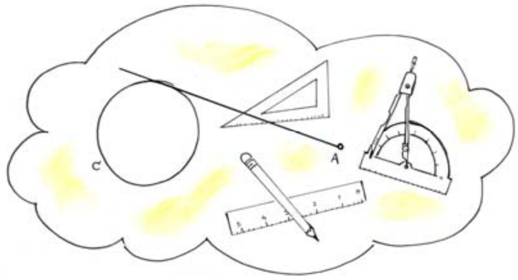




۶- شکل زیر نیز مربوط به یک اثبات هندسی[۵] برای قضیه‌ی فیثاغورس می‌باشد. اثبات را با توجه به شکل کامل کنید.



[۵]منسوب به آقای ***Jack Oliver***



☐ مساحت مثلث‌های ABC و ACD است. مساحت مثلث ACD برابر $\frac{۱}{۲}ab$ می‌باشد. اما مساحت مثلث ABC برابر مجموع مساحت‌های سه مثلث AOC، BOC و AOB می‌باشد که چون در هر سه مثلث ارتفاع وارد بر قاعده برابر r یا همان شعاع دایره می‌باشد، داریم:

$$S(\triangle ABC)=\frac{۱}{۲}ra+\frac{۱}{۲}rb+\frac{۱}{۲}rc=\frac{۱}{۲}r(a+b+c)$$

و با توجه به اینکه $c=(a-r)+(b-r)$ می‌توان گفت که $r=\frac{۱}{۲}(a+b-c)$، که با جایگذاری در رابطه‌ی مساحت مثلث ABC داریم:

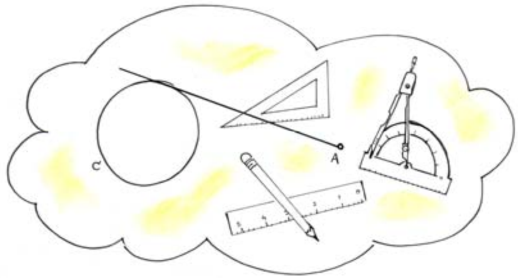
$$S(\triangle ABC)=\frac{۱}{۲}r(a+b+c)=\frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}(a+b-c)(a+b+c)=\frac{۱}{۴}\left((a+b)^{۲}-c^{۲}\right)$$

که با مساوی قرار دادن مساحت مثلث ABC با مثلث ADC قضیه‌ی فیثاغورس ثابت خواهد شد:

$$S(\triangle ABC)=\frac{۱}{۴}\left((a+b)^{۲}-c^{۲}\right)=\frac{۱}{۲}ab$$

$$\rightarrow (a+b)^{۲}-c^{۲}=۲ab$$

$$\rightarrow a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}=۰ \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

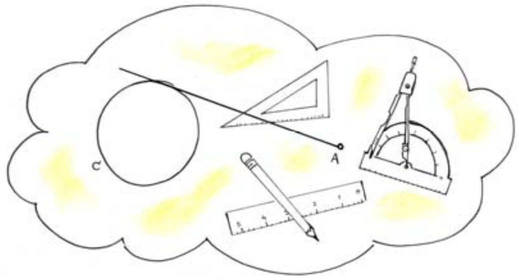


۷- سعی کنید با ایده‌هایی که برای اثبات قضیه‌ی فیثاغورس دیدید، خودتان اثباتی برای قضیه‌ی فیثاغورس بیابید.

☐ برای یافتن یک اثبات، به دانش‌آموزان فرصت دهید و اثبات‌های دانش‌آموزان را در کلاس بررسی کنید. شاید یکی از دانش‌آموزان شما، اثباتی جدید برای قضیه‌ی فیثاغورس بیابد. برای بررسی جدید بودن اثبات دانش‌آموزان آن‌ها را به وب‌گاه زیر ارجاع دهید.

www.cut-the-knot.com

۸- مطلبی درباره‌ی اعداد فیثاغورثی در وب‌گاه سمپاد موجود می‌باشد که برای دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌باشد.



کاربردهای قضیه‌ی فیثاغورس

[[تدریس از صفحه‌ی ۸۰ تا پایان صفحه‌ی ۸۴]]

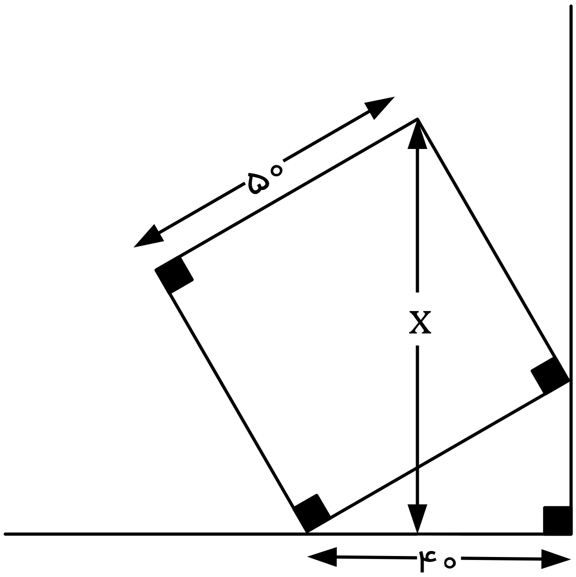
دانش‌آموزان برای حل این بخش می‌بایست قضایای زیر را از سال گذشته بدانند یا اینکه امسال خودشان آن‌ها اثبات کنند.

قضیه‌ی ۱ : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

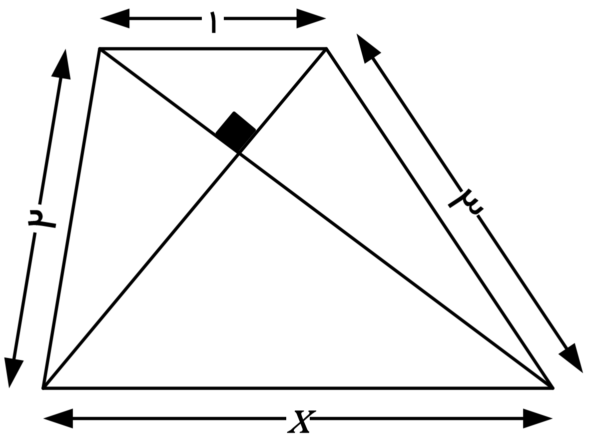
قضیه‌ی ۲ : در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

۹- در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

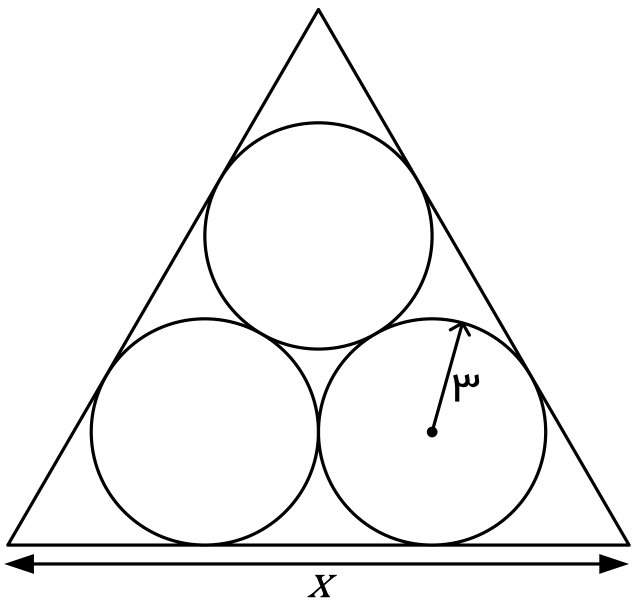
الف)



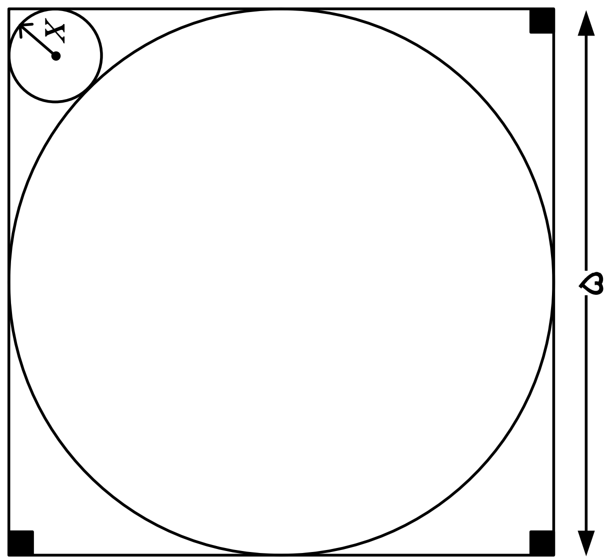
ب)



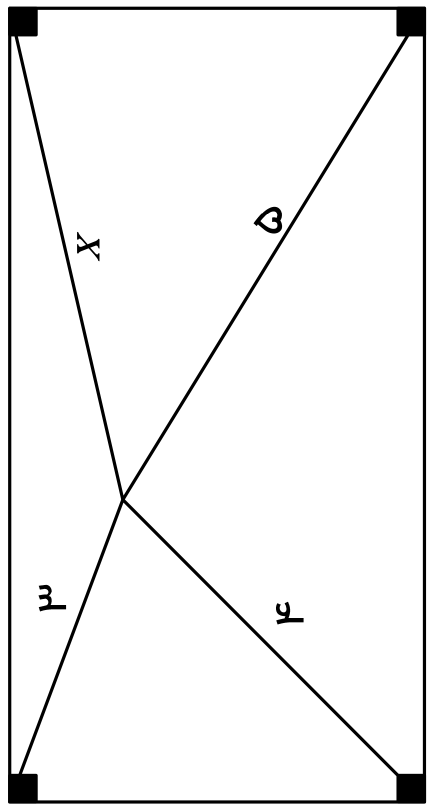
پ)

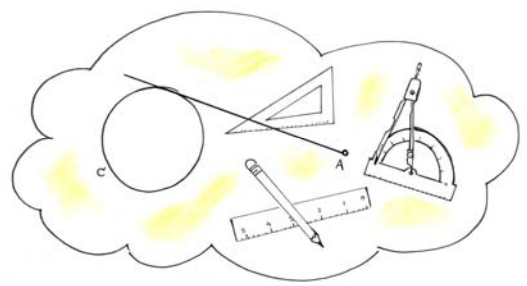


ت)



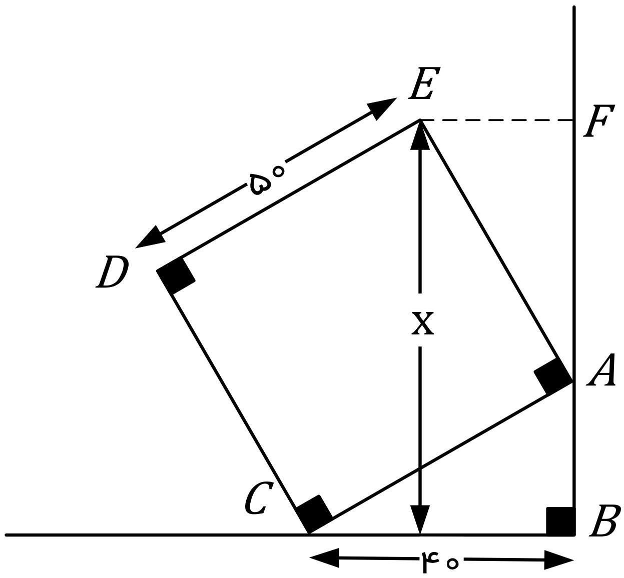
ث)

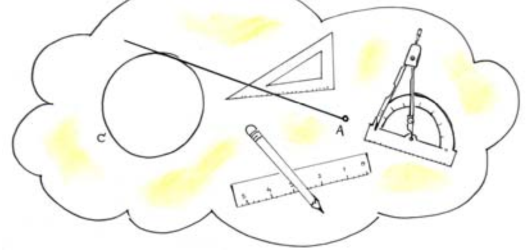




☐ الف)راهنمایی‌ها:

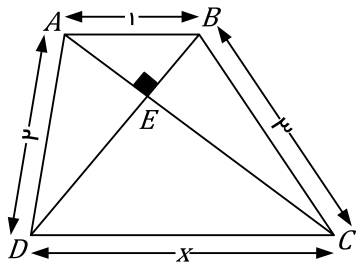
- **از E عمودی بر امتداد AB وارد کنید.**
- **ثابت کنید مثلث‌های AEF و ABC مساویند.**
- **مقدار AB طبق فیثاغورس و مقدار FA با تساوی مثلث‌ها به‌دست می‌آید.**





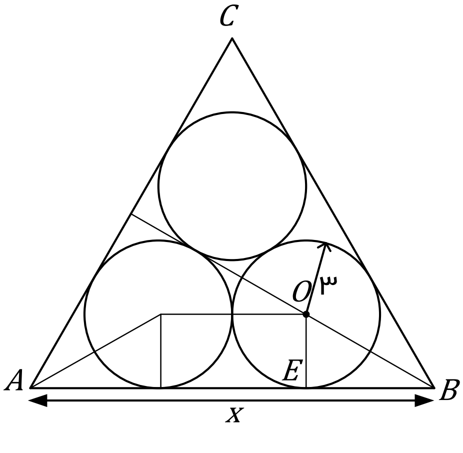
ب) راهنمایی‌ها:

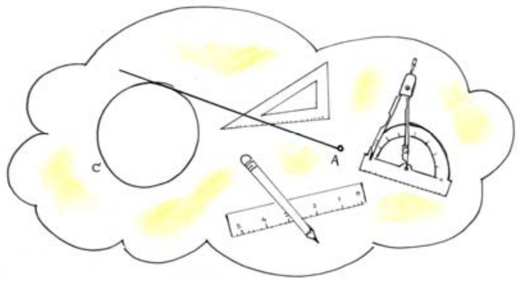
- با استفاده از سه بار استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در سه مثلث AEB، AED و BEC مقدار $DE^2 + CE^2$ به‌دست می‌آید.



پ) راهنمایی‌ها:

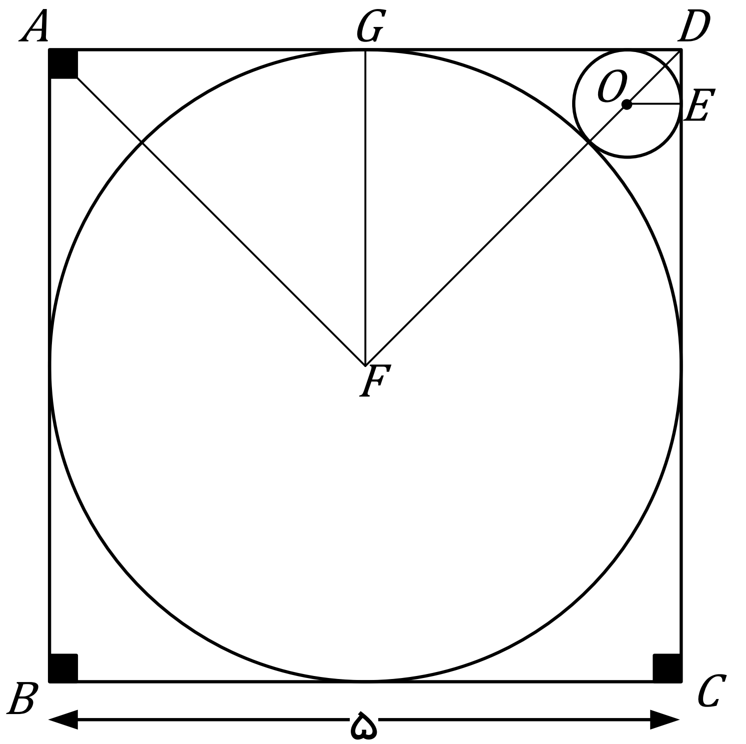
- ابتدا ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
- ثابت کنید زاویه‌ی OBE برابر ۳۰ درجه است.
- مقدار EB را با قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست آورید.
- مقدار X دو برابر مقدار EB به اضافه‌ی ۶ می‌باشد.

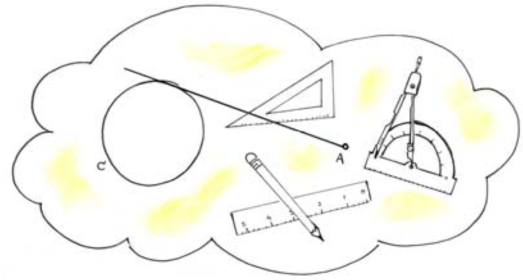




ت) راهنمایی‌ها:

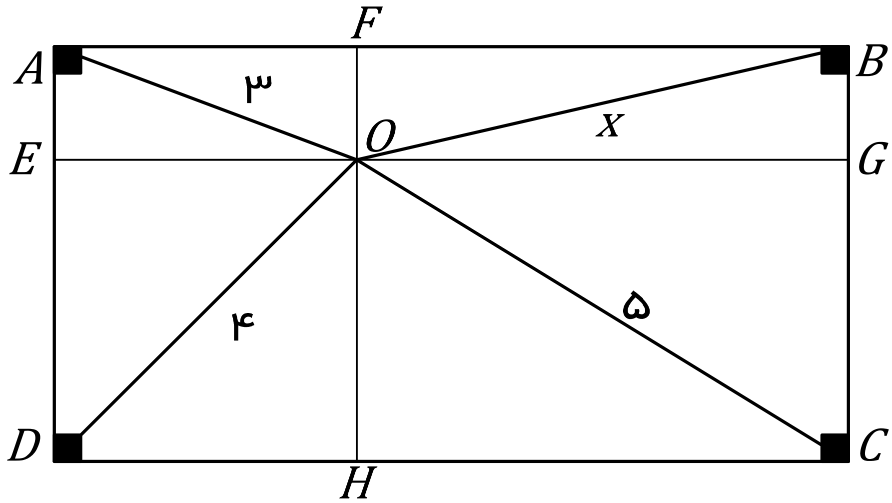
- **مقادیر ED و EO برابر شعاع دایره‌اند و بدین ترتیب مقدار OD بر حسب x به‌دست می‌آید.**
- **مقدار FD هم یک نصف قطر است با یک‌بار استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس به‌دست می‌آید.**
- **می‌دانیم که** $FD = OF + OD$ **و** $OF = ۲/۵ + x$.

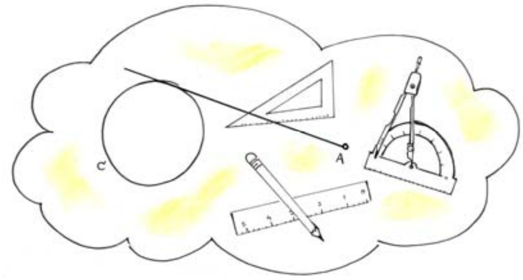




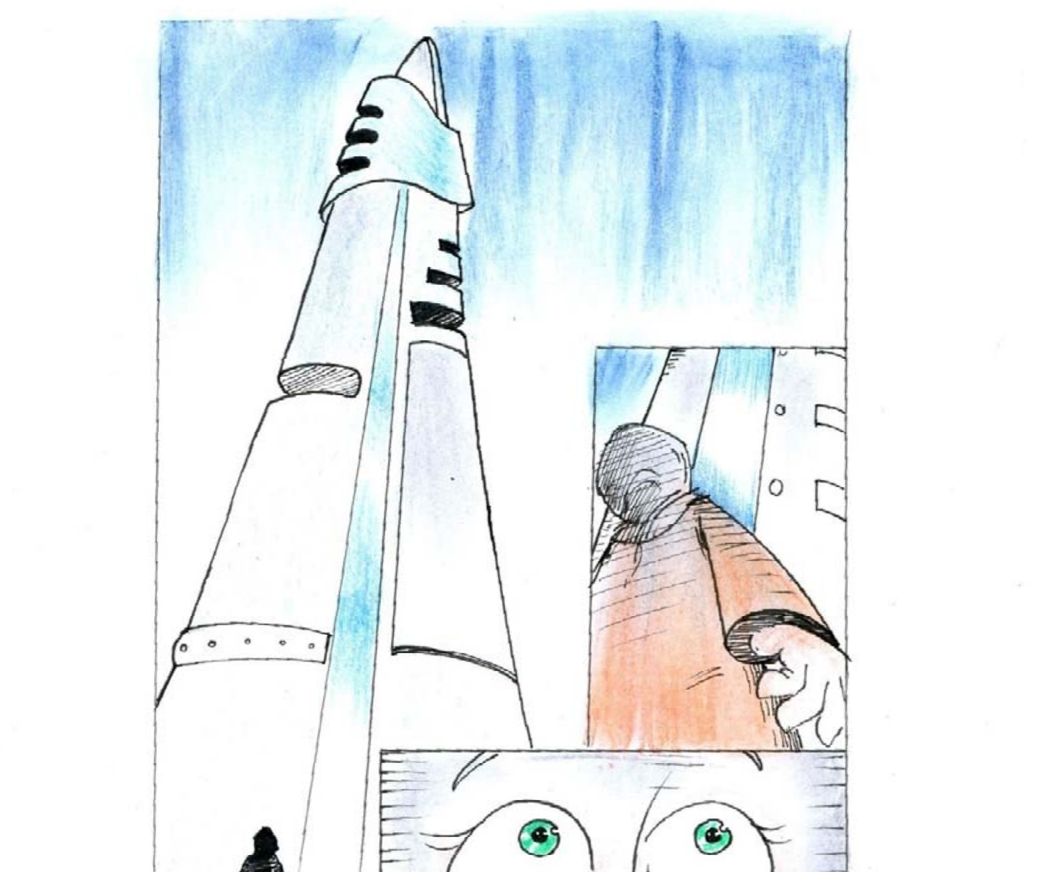
ث) راهنمایی‌ها:

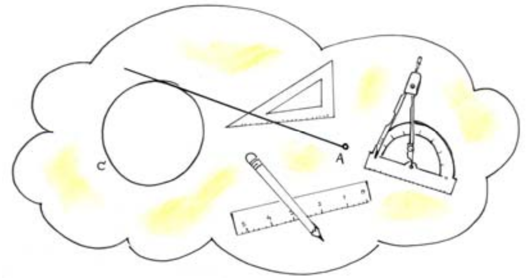
- $x^2 = OG^2 + OF^2$ **. چرا؟**
- **با سه بار استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، برای سه مقدار معلوم دیگر مقدار** $x^2 = OG^2 + OF^2$ **به راحتی به‌دست می‌آید.**





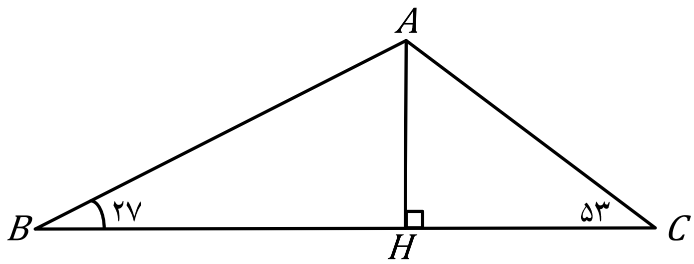
۱۰-سحر می‌خواهد ارتفاع برجی را که در آن زندگی می‌کند را اندازه بگیرد. او ابتدا در فاصله‌ی ۵۰ متری برج به آن نگاه کرد و آن را با زاویه‌ی ۵۳ درجه دید. سپس از فاصله‌ی ۱۲۰ متری به آن نگاه کرد و آن را با زاویه‌ی ۲۷ درجه دید.می‌دانیم قد سحر، یک و نیم متر است. به سحر کمک کنید تا ارتفاع برج را به‌دست آورد؟ روش کار خود را توضیح دهید.





□ **راهنمایی‌ها:**

- **شکل را به گونه‌ای رسم کنید که دو زاویه در دو طرف ساختمان باشند.**



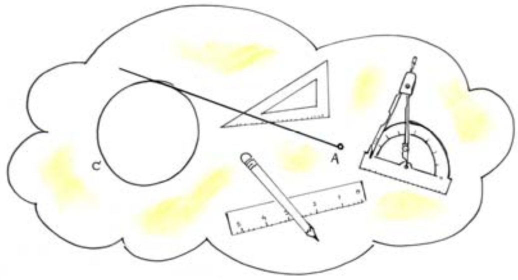
- **ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی BAC نود درجه می‌باشد.**
- **سه بار رابطه‌ی فیثاغورس را در سه مثلث ABC، ABH، ACH بنویسید.**

۱۱-در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\angle A = ۹۰^\circ)$، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، ثابت کنید $AH^۲ = BH.CH$.

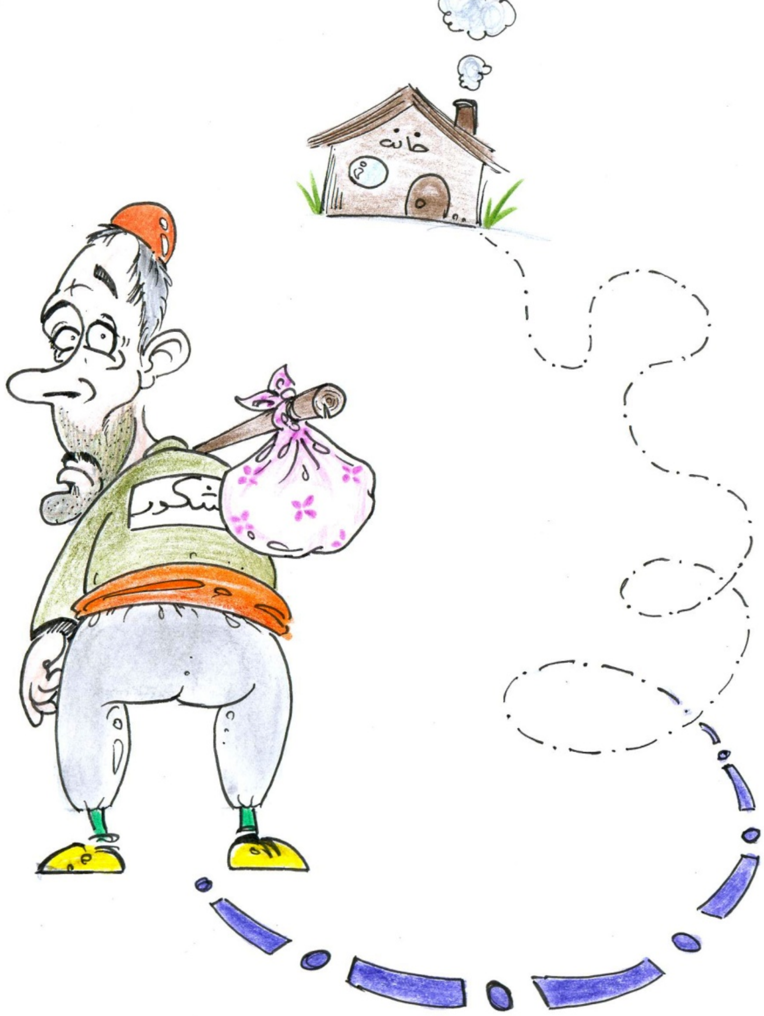
□ **راهنمایی‌ها:**

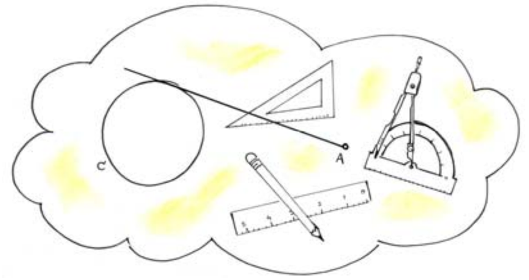
- **این سؤال، حالت کلی سؤال بالا است و با سه بار رابطه‌ی فیثاغورس در سه مثلث قائم‌الزاویه اثبات می‌شود.**

البته این رابطه را دوباره و به روشی ساده‌تر در فصل تشابه مثلث‌ها ثابت خواهیم کرد.



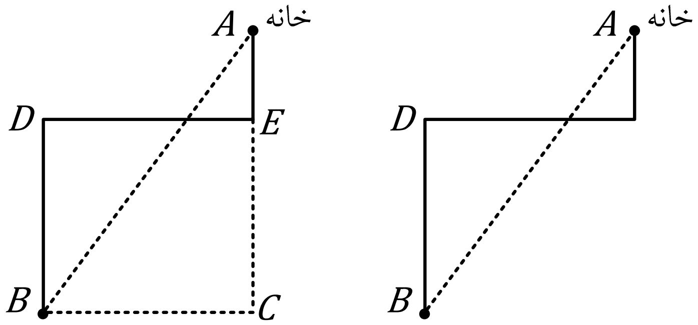
۱۲- شکور، از خانه‌شان ۲۵ کیلومتر به سمت جنوب، ۶۰ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت جنوب دور شده است. او اکنون در چه فاصله‌ای از خانه‌شان قرار دارد؟





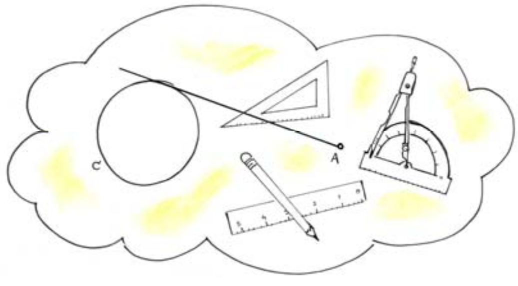
☐ راهنمایی‌ها:

- **شکل را به صورت زیر رسم می‌کنیم.(شکل سمت راست)**

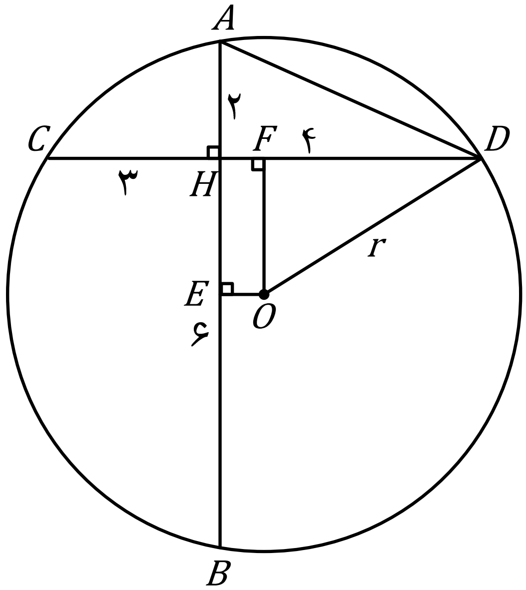


- **در شکل سمت راست به دنبال یافتن اندازه‌ی AB هستیم. شکل سمت چپ را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که $BD=EC$ و $DE=BC$.**
- **در مثلث ABC فیثاغورس می‌نویسیم.**

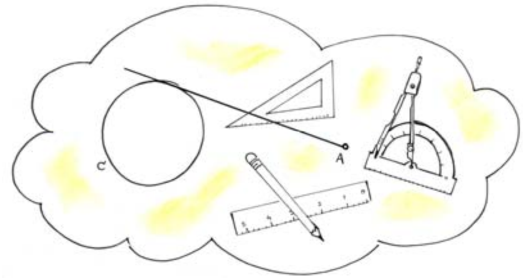
۱۳- دو وتر عمود بر هم در یک دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند. اگر طول دو قسمت جدا شده روی یکی از وترها ۳ و ۴ باشد و دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ باشد، طول قطر دایره را بدست آورید.



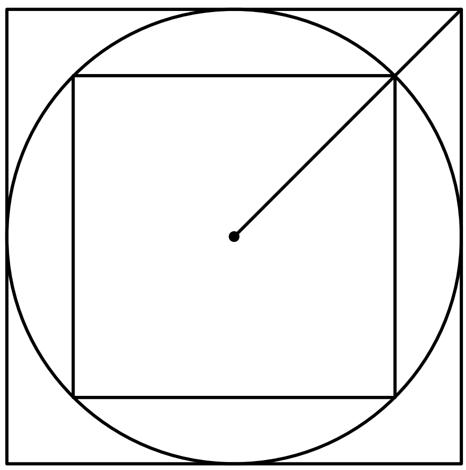
☐ راهنمایی‌ها:



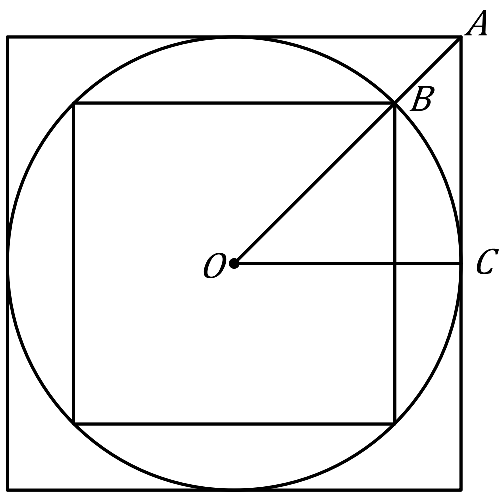
- **پاره‌خط‌های OE و OF را به ترتیب بر وترهای AB و CD عمود کنید.**
- **حالا با توجه به اینکه می‌دانیم که مثلث‌های OCD و AOB متساوی‌الساقین هستند و ارتفاع وارد بر قاعده هر مثلث متساوی‌الساقین، قاعده را نصف می‌کند، اندازه‌ی HF و EH را به دست آورید.**
- **ثابت کنید که $OF=EH$.**
- **در مثلث OFD فیثاغورس بنویسید.**



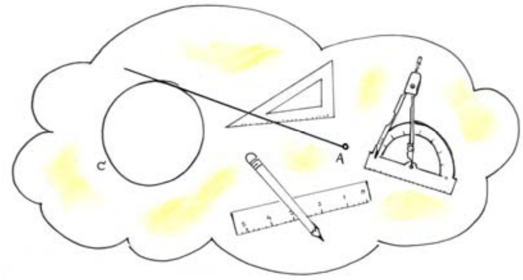
۱۴- در شکل زیر نسبت مساحت مربع کوچک‌تر به مساحت مربع بزرگ‌تر چقدر است؟



☐ **راهنمایی‌ها:**

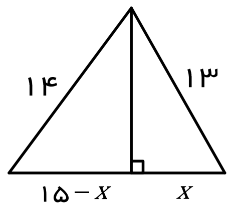


- **در شکل بالا، ثابت کنید اندازه‌ی طول‌های OC و OB و AC برابرند.**
- **طول OA را برحسب OB یا همان شعاع دایره‌ی کوچکتر بیابید.**



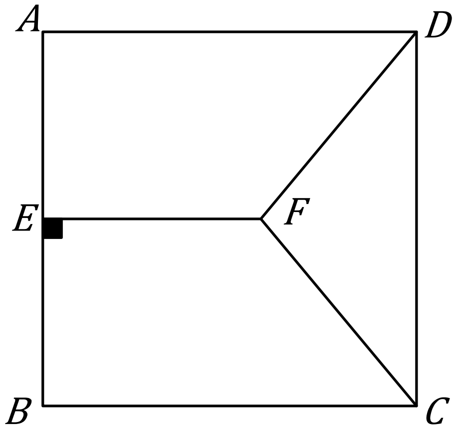
۱۵- «مشهدی حسن» می‌خواهد باغی را که در روستا دارد بفروشد و برای پسرش در شهر یک اتوموبیل بخرد. باغ مشهدی حسن، به شکل مثلث و به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ متر می‌باشد. اگر در روستا هر مترمربع زمین، یک‌میلیون تومان ارزش داشته باشد، مشهدی حسن چقدر بابت خرید ماشین می‌تواند هزینه کند؟

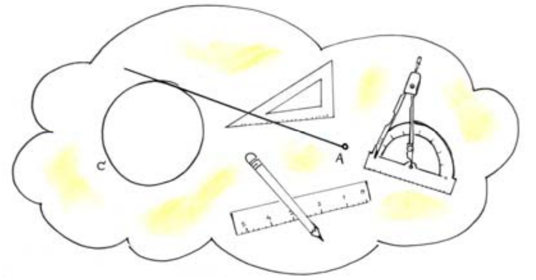
☐ **راهنمایی‌ها:**



- **دو بار فیثاغورس در دو مثلث چپ و راست بنویسید تا مقدار x را بیابید.**
- **ارتفاع را یافته و مساحت مثلث را حساب کنید.**

۱۶- در شکل زیر، طول ضلع مربع $ABCD$ یک واحد است و اضلاع FC، FB و EF مساویند. مساحت مثلث FBC را بیابید.

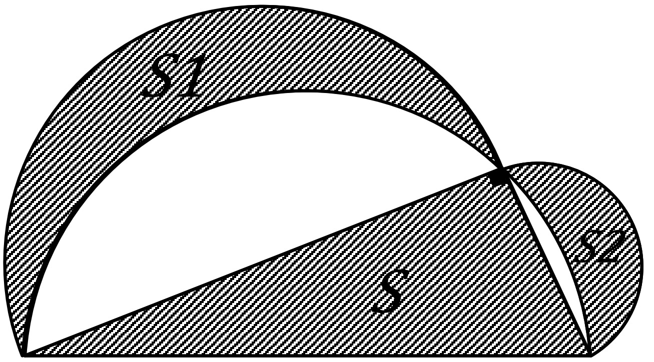




☐ راهنمایی‌ها:

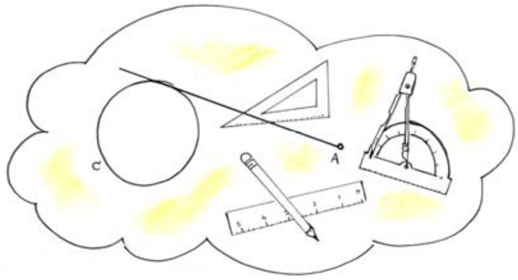
- **EF را امتداد داده و نقطه‌ی تقاطع آن را با CD، G می‌نامیم. طول FD را x فرض می‌کنیم و در نتیجه طول FG برابر $1-x$ و طول GD برابر $\frac{1}{2}$ است.**
- **در مثلث GDF فیثاغورس بنویسید و x را بیابید.**
- **ارتفاع مثلث را یافته و مساحت مثلث را بیابید.**

۱۷- در شکل روبه‌رو، دایره‌هایی به قطر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC رسم شده است. ثابت کنید $S=S_1+S_2$.



☐ راهنمایی‌ها:

- **در شکل اندازه‌ی اضلاع مثلث را به ترتیب اندازه و از کوچک به بزرگ a و b و c فرض کنید. مساحت نیم‌دایره‌های روی a و b و c را به‌دست آورید.**



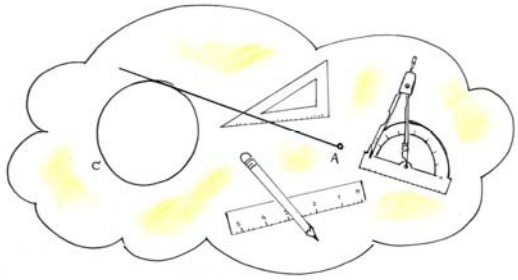
- **مساحت قسمت سفید را با کم کردن مساحت مثلث از نیم دایره‌ی روی c به دست آورید.**
- **می‌دانیم که $S_۱+S_۲$ برابر مجموع مساحت دو نیم‌دایره روی a و b است البته منهای مساحت قسمت‌های سفید.**

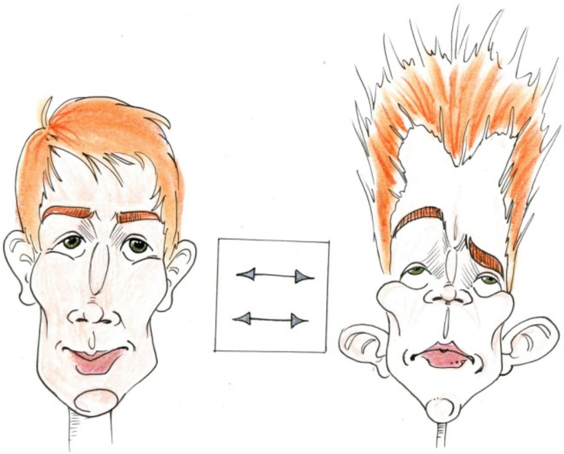
۱۸-در مربع $ABCD$ به ضلع چهار سانتی‌متر، دایره‌ای از A و D بگذرانید به گونه‌ای که بر BC مماس شود. شعاع این دایره چقدر است؟ روش کار خود را به طور کامل توضیح دهید.

☐ **راهنمایی‌ها:**

- **به دنبال مرکز و شعاع دایره هستیم.**
- **مرکز این دایره در نقطه‌ای است ک از رئوس A و D و نقطه‌ی وسط BC به یک فاصله است. پس مرکز به راحتی و با استفاده از پرگار و خط‌کش غیر مدرج یافته می‌شود.**
- **برای یافت اندازه شعاع هم به سؤال ۱۵ بخش فیثاغورس دقت کنید.**
- **البته چون در حال رسم دایره هستیم به‌دست آوردن اندازه‌ی دقیق شعاع احتیاج نیست، فقط کافی‌است سوزن پرگار خود را در مرکز(O) قرار داده و دهانه‌ی پرگار خود را به اندازه‌ی OA باز کنیم.**

۱۹- مطلبی درباره‌ی عدد پی و روش به‌دست آوردن آن روی وب‌گاه سمپاد موجود می‌باشد که برای دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌باشد.





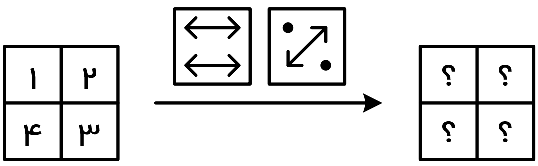
ترکیب دوران‌ها

[تدریس صفحات ۸۵ و ۸۶]

۱- شکل زیر را در نظر بگیرید.

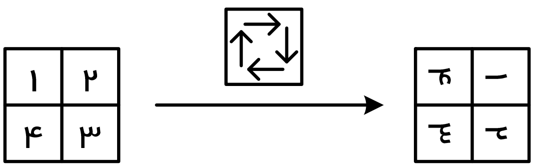
۲	۱
۳	۴

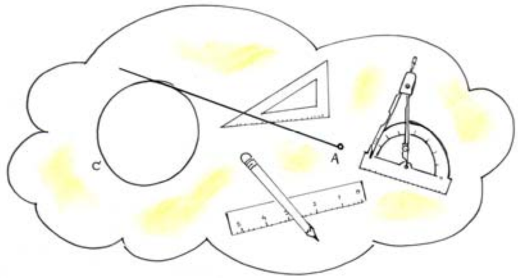
الف) این شکل، تحت دو دوران زیر، به چه صورتی در می‌آید؟



ب) اگر بخواهیم به جای این دو دوران، یک دوران قرار دهیم و نتیجه ثابت بماند. چه دورانی را انتخاب می‌کنید.

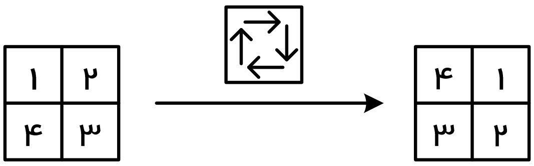
دقت شود که در مورد دوران‌ها منظور ما از قرار دادن اعداد ۱ تا ۴ درون مربع شماره‌گذاری نواحی است و شکل اعداد نیست. زیرا در آن‌صورت بعد از دوران ۹۰ درجه به شکلی مانند این برمی‌خوردیم:





و این نکته‌ای است که در کتاب درسی نیز به آن اشاره نشده است.

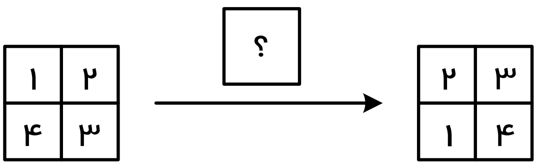
پس به دانش‌آموزان یادآور شوید که منظور از قرار دادن اعداد داخل مربع، فقط شماره‌گذاری نواحی آن می‌باشد و بعد از یک دوران ۹۰ درجه، نواحی آن ۹۰ درجه می‌چرخند:

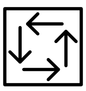


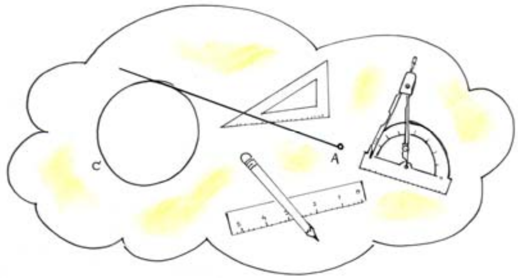
□ الف)

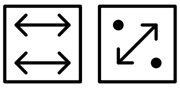
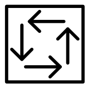
۲	۳
۱	۴

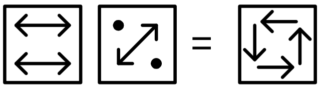
ب) در واقع این سؤال را می‌توان بدین‌گونه پرسید:



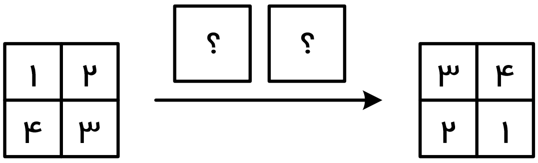
و حالا به راحتی می‌توان به جای دوران مجهول، دوران  را قرار داد.



به دانش‌آموزان گوش‌زد کنید که حاصل ترکیب دو دوران  **دوران**  **می‌باشد:**

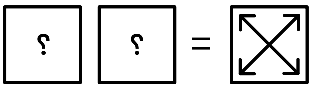


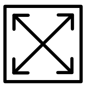
۲- الف) به جای مربع‌های مجهول، چه دوران‌هایی قرار دهیم تا عبارت زیر کامل گردد؟

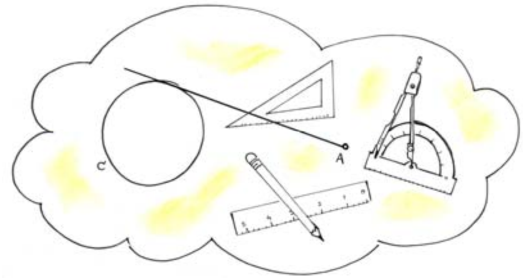


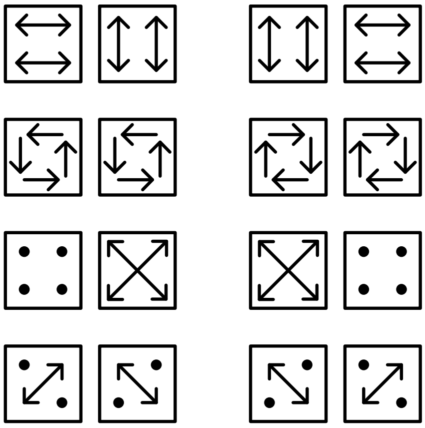
ب) چند جواب ممکن برای این سؤال وجود دارد؟

پ) چند جفت جواب برای عبارت مقابل وجود دارد؟



الف و ب و پ) همه‌ی جفت‌جواب‌های زیر ممکن هستند که عبارتند از ۸ جفت‌جواب که حاصل ترکیب همه‌شان برابر  **می‌باشد.**





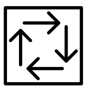
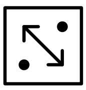
۳- جدول زیر را یک جدول دوران می‌نامند. در هر خانه‌ی این جدول می‌بایست دوران یافته‌ی شکل زیر را (ابتدا نسبت به ردیف مربوطه و سپس نسبت به ستون) قرار داد.

۱	۲
۴	۳

مثلاً، خانه‌ای که در ردیف ۴ و ستون ۶ می‌باشد را این‌گونه پر می‌کنیم(به جدول صفحه‌ی بعد نگاه کنید):

ابتدا شکل

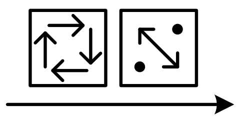
۱	۲
۴	۳

را توسط  و سپس توسط  دوران می‌دهیم و سپس در خانه‌ی مربوط شکل

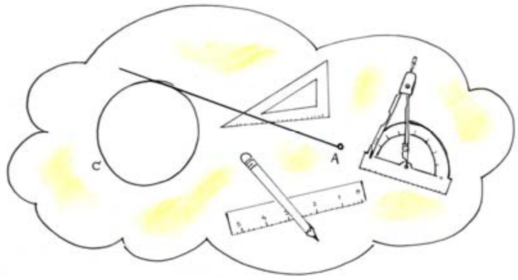
۲	۱
۳	۴

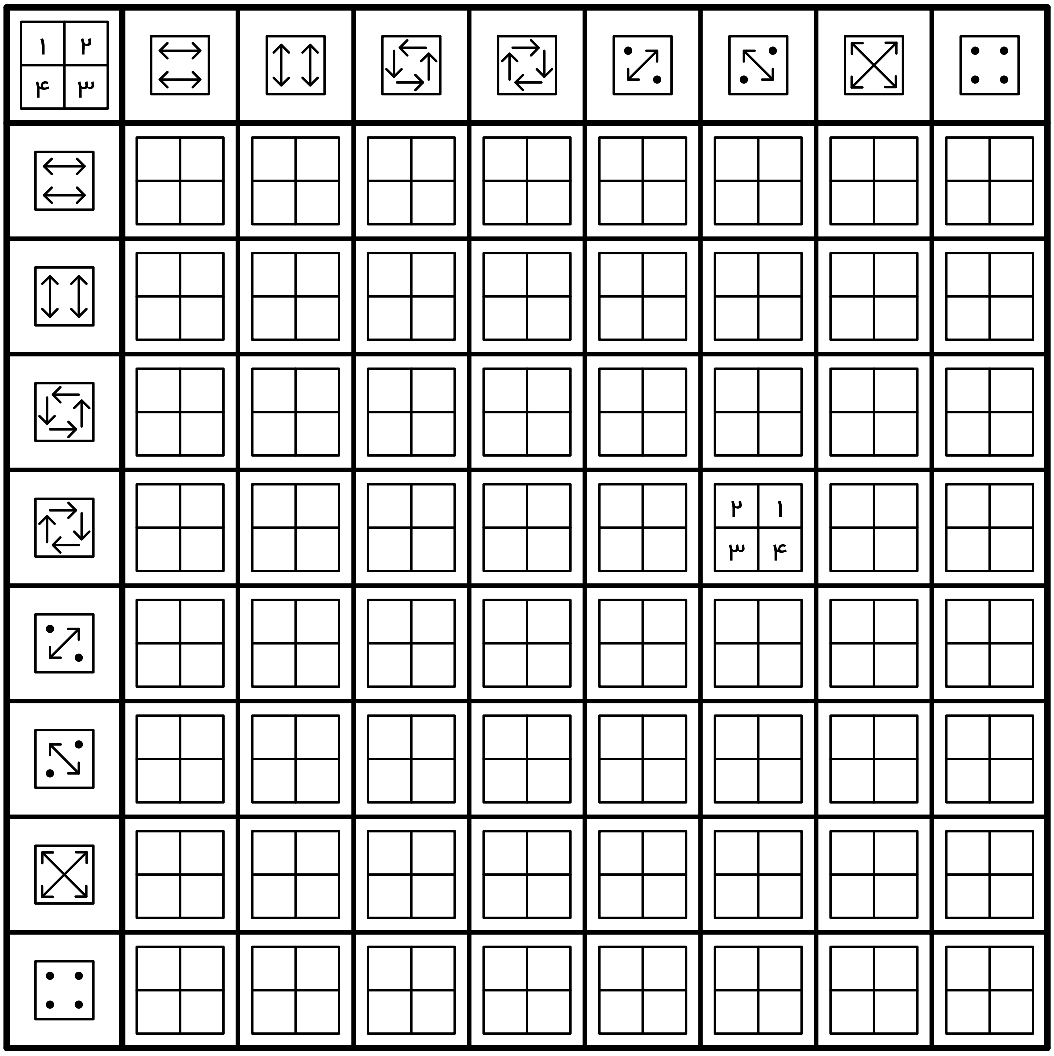
قرار می‌دهیم.

۱	۲
۴	۳



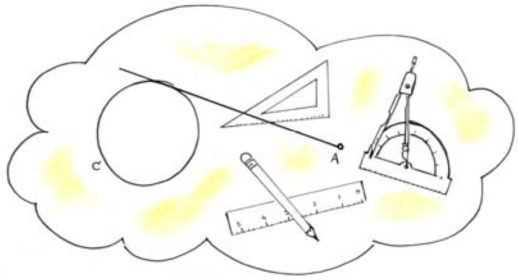
۲	۱
۳	۴





با توجه به جدول، به سؤالات ۴ تا ۶ پاسخ دهید.

۴- آیا دوران‌ها خاصیت جابجایی دارند؟ یعنی آیا فرقی نمی‌کند که بین دو دوران، کدام‌یک را زودتر تاثیر بدهیم؟



□ دوران‌ها خاصیت جابجایی ندارند. برای دیدن این موضوع کافی‌است به خانه‌ی ۶ و ۴ و همین‌طور خانه‌ی ۶ و ۵ نگاه کنیم.

البته مثال‌های دیگر را خود دانش‌آموزان باید در جدول بیابند.

۵- به جای $\boxed{\begin{matrix}\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\end{matrix}}$ چند ترکیب دوتایی می‌توان قرار داد؟

□ می‌دانیم که:

۱	۲
۴	۳

$\xrightarrow{\boxed{\begin{matrix}\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\end{matrix}}}$

۲	۱
۳	۴

پس در جدول به دنبال خانه‌هایی می‌گردیم که در آن‌ها، شکل

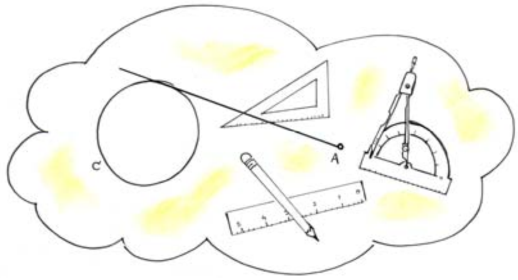
۲	۱
۳	۴

وجود دارد و ترکیب دورانی‌آن‌ها را می‌نویسیم.

⟦تدریس صفحات ۸۷ و ۸۸⟧

۶- مجموعه‌ی دوران‌های شکل زیر چند عضو دارد؟

۱	۲
۳	۴

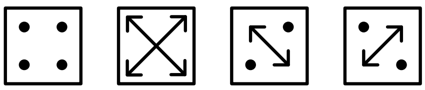


□ می‌دانیم که مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل، دوران‌هایی هستند که شکل را تغییر ندهند.

۱	۲
۳	۴

پس در جدول به دنبال خانه‌هایی می‌گردیم که در آن‌ها، شکل (بالا) وجود دارد و ترکیب دورانی‌آن‌ها را می‌نویسیم.

۷- شکلی رسم کنید که مجموعه‌ی دوران‌هایش به صورت زیر باشد.



□

۱	۳
۳	۱

۸- شکلی رسم کنید که مجموعه‌ی دوران‌هایش

الف)۸ عضوی باشد.

ب) ۷ عضوی باشد.

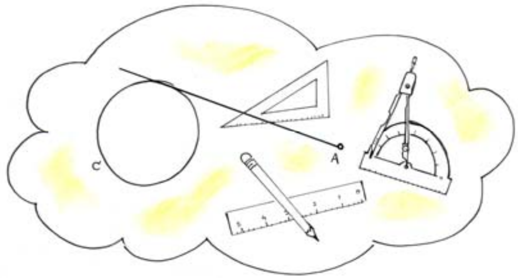
پ)۶ عضوی باشد.

ت)۵ عضوی باشد.

ث)۴ عضوی باشد.

ج)۳ عضوی باشد.

چ)۲ عضوی باشد.



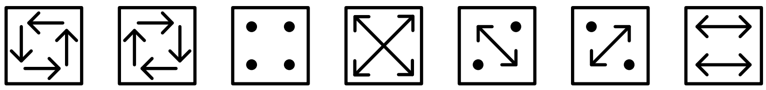
ح)۱ عضوی باشد.

خ)صفر عضوی باشد.

□ الف)

۱	۱
۱	۱

ب) در واقع ممکن نیست، مجموعه‌ی دوران‌های شکلی ۷ عضوی شود. مثلاً اگر مجموعه‌ی دوران‌های شکلی به صورت ۷ عضوی زیر باشد:



با نگاه کردن به دوران اول از سمت راست، متوجه می‌شویم که شکل می‌بایست به صورت زیر باشد:

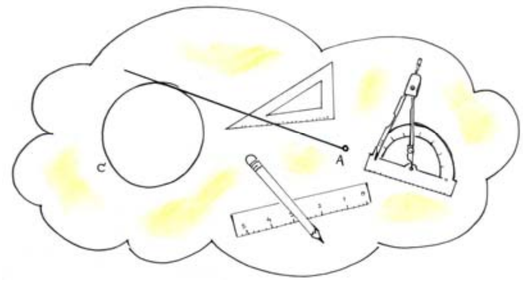
۱	۱
۲	۲

و با نگاه کردن به دوران دوم از سمت راست، شکل را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

۱	۱
۱	۲

و با رسیدن به دوران سوم از سمت راست متوجه می‌شویم که شکل ما به صورت زیر است که همان شکل با مجموعه‌ی دوران ۸ تایی است.

۱	۱
۱	۱



برای حالت‌های دیگر نیز به همین مشکل بر می‌خوریم.

- در حالت کلی می‌توان گفت که مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل مربعی می‌تواند ۱ و ۲ و ۴ و ۸ عضوی باشد.
- اثبات این مسئله در حالت کلی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌باشد و در اینجا به آن نمی‌پردازیم.