فصل سوم

توان‌رسانی و ریشه‌گیری

[[تدریس صفحه‌های ۵۰ تا ۵۹]]

توان‌رسانی

به‌جز این چند تمرین داده شده در این بخش، می‌توانید با تمرین‌های محاسباتی، مهارت دانش‌آموزان را افزایش دهید.

۱.

۲. با فاکتورگیری 3^{-99} از سمت چپ تساوی و ساده کردن 3^{-99} از دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$3^{-3} - 3^{-2} + 3^{-1} - 1 = x$$

$$\rightarrow x = \frac{-20}{27}$$

۳.

$$2^{31} < 2^{31} + 2^{29} \rightarrow 2 \times 2^{30} < 2^{31} + 2^{29}$$

$$\rightarrow 2^{60} + \underbrace{2 \times 2^{30}} + 1 < 2^{60} + \underbrace{2^{31} + 2^{29}} + 1$$

$$\rightarrow (2^{30} + 1)(2^{30} + 1) < (2^{31} + 1)(2^{29} + 1)$$

$$\rightarrow \frac{2^{30} + 1}{2^{31} + 1} < \frac{2^{29} + 1}{2^{30} + 1}$$

۴.

$$\begin{cases} n^n = 1 \rightarrow n = 1 \\ n^n = -1 \rightarrow n = -1 \end{cases}$$

؟ اگر $n \in \mathbb{R}$، آیا پاسخ جدیدی برای مسأله می‌توان یافت؟

□ ریاضی‌دان‌ها بسیار دوست دارند که چنین قانونی برقرار باشد:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \to ۱^x = ۱}$$

سال‌ها پیش دانش‌آموزی سمپادی مجموعه‌ای جدید از اعداد ساخت که در آن چنین قانونی درست نبود! او با اضافه کردن آن اعداد به اعداد حقیقی مجموعه‌ای بزرگ از اعداد ناشناخته را به بشر معرفی کرد.

۵. a و b معکوس همدیگرند.

۶. الف) برای مثال: $۲^{۱} + ۲^{۱} = ۲^{۱+۱}$

ب) $(\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۲})^۴$

۷. راه ابتدایی این مسأله بررسی و مقایسه‌ی بزرگی همه‌ی حالت‌های ممکن x^{y^z} است؛ اما با اندکی تأمل می‌توان فهمید نیازی نیست که از عدد ۲ استفاده کنیم. زیرا اگر ۲ در x^{y^z} ظاهر شود می‌توان با جانشینی رقم استفاده نشده‌ی دیگر به جای ۲ به عدد بزرگ‌تری دست یافت. پس برای به‌دست آوردن بزرگ‌ترین مقدار ممکن x^{y^z} باید اعداد زیر را با هم مقایسه کنیم:

$$a = ۳^{۴^{۵}}, b = ۳^{۵^{۴}}, c = ۴^{۵^{۳}}, d = ۴^{۳^{۵}}, e = ۵^{۴^{۳}}, f = ۵^{۳^{۴}}$$

با توجه به اینکه $۴^۵ > ۵^۴$ و $۳^۵ > ۵^۳$ و $۳^۴ > ۴^۳$، خواهیم داشت:

$$b < a,\ c < d,\ e < f$$

بنابراین کافی است a، d و f را با هم مقایسه کنیم.

$$a = ۳^{۴^۵} = ۳^{۱۰۲۴} \quad \text{و} \quad d = ۴^{۳^۵} = ۴^{۲۴۳} \quad \text{و} \quad f = ۵^{۳^۴} = ۵^{۸۱}$$

$$d = ۴^{۲۴۳} < ۹^{۲۴۳} = (۳^۲)^{۲۴۳} = ۳^{۴۸۶} < ۳^{۱۰۲۴} = a$$

$$f = ۵^{۸۱} < ۹^{۸۱} = (۳^۲)^{۸۱} = ۳^{۱۶۲} < ۳^{۱۰۲۴} = a$$

پس a در بین این اعداد، بزرگ‌ترین است. بنابراین پاسخ چنین خواهد شد:

$$x = ۳ \quad \text{و} \quad y = ۴ \quad \text{و} \quad z = ۵$$

؟ با دیدن رابطه‌های $۴^۵ > ۵^۴$ و $۳^۵ > ۵^۳$ و $۳^۴ > ۴^۳$ چه حدسی می‌زنید؟

□ اگر $m \in \mathbb{N}$ و n و $n < m$ آنگاه $m^n < n^m$.

؟ آیا حدس بالا درست است؟

□ خیر! زیرا $۴ > ۲$ ولی $۴^۲ = ۲^۴$.

؟ آیا حدس زیر درست است؟

«به‌جز برای چند عدد خاص، اگر $n, m \in \mathbb{N}$ و $n < m$ آنگاه $m^n < n^m$».

□ برای آشنایی بیشتر با این مسأله می‌توانید به «$n^m = m^n$» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید.

؟ در تمرین ۷، کوچک‌ترین مقدار ممکن ساخته شده با اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ چه عددی خواهد شد؟

□ این یک مسأله خوب برای فکر کردن است! بهتر است با عجله جواب این مسأله را ندهید! جواب $۲^{۳^۴}$ و $۴^{۳^۲}$ نیست!

۸. الف) $(۲^۵)^۴ = (۲^۴)^۵ = (۲^{۲۰})^۱ = (۲^{۱۰})^۲ = (۲۲)^{۱۰} = ۲^{۲۰}$

ب) به پاسخ‌های بالا باید محاسبه‌های زیر را بیفزایید.

با منفی کردن پایه: $۲^{۲۰} = (-۲^{۲})^{۱۰} = (-۲^{۱۰})^{۲} = (-۲^{۵})^{۴}$

دقت کنید که همه‌ی جواب‌های زیر نامعتبر می‌باشد.

با منفی کردن توان‌ها: $(۲^{-۲})^{-۱۰} = (۲^{-۱۰})^{-۲} = (۲^{-۲۰})^{-۱} = (۲^{-۴})^{-۵} = (۲^{-۵})^{-۴}$

۹. اگر a^b را به صورت $a\hat{}b$ نشان دهیم، راحت‌تر این مسأله حل می‌شود.

$$((۲\hat{}۳)\hat{}۴)\hat{}۵ = \left((۲^{۳})^{۴}\right)^{۵} = ۲^{۳\times۴\times۵}$$

$$(۲\hat{}(۳\hat{}۴))\hat{}۵ = \left(۲^{(۳^{۴})}\right)^{۵} = ۲^{۳^{۴}\times۵}$$

$$۲\hat{}(۳\hat{}(۴\hat{}۵)) = ۲^{\left(۳^{(۴^{۵})}\right)} = ۲^{۳^{۴^{۵}}}$$

$$۲\hat{}((۳\hat{}۴)\hat{}۵) = ۲^{\left((۳^{۴})^{۵}\right)} = ۲^{۳^{۲۰}}$$

$$(۲\hat{}۳)\hat{}(۴\hat{}۵) = (۲^{۳})^{(۴^{۵})} = ۲^{۳\times۴^{۵}}$$

۱۰.

$$۲^{۲^{۲^{۲}}} = ۲^{۲^{۲}}x \rightarrow ۲^{۱۶} = ۲^{۴}x \rightarrow x = ۲^{۱۲}$$

$$۲^{۲^{۲^{۲}}} = ۴^{y^{۳}} \rightarrow ۲^{۱۶} = ۴^{y^{۳}} \rightarrow ۴^{۸} = ۴^{y^{۳}} \rightarrow ۸ = y^{۳} \rightarrow y = ۲$$

۱۱. در این تمرین دانش‌آموزان باید با اندیشه و سعی و خطا به پاسخ درست دست پیدا کنند. پاسخ‌های متنوعی می‌توان یافت. منتظر پاسخ‌های درست آنها بمانید؛ سپس آنها را به خواندن «نتیجه‌ی عجیب میلز» در وب‌گاه ریاضی سمپاد دعوت کنید.

۱۲. $۲^{۳۱} = (۲^۳)^{۱۰} \times ۲ < (۳^۲)^{۱۰} \times ۳ = ۳^{۲۱}$

۱۳.

$$n^{۲۰۰} < ۵^{۳۰۰} \to (n^۲)^{۱۰۰} < (۵^۳)^{۱۰۰}$$

در چنین حالتی امکان ندارد $n^۲ = ۵^۳$ و یا $n^۲ > ۵^۳$. بنابراین: $n^۲ < ۵^۳$؛

$$n^۲ < ۵^۳ \quad \text{و} \quad ۱۱^۲ < ۵^۳ < ۱۲^۲$$

پس n حداکثر می‌تواند ۱۱ باشد.

دقت کنید که در این تمرین دانش‌آموزان باید به این واقعیت برسند که:

$$\boxed{\left[n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \ \text{و}\ a^n < b^n\right] \to a < b}$$

〚 تدریس صفحه‌ی ۶۰ تا ۶۲ 〛

؟ در نماد علمی عدد $۹^{۹^۹}$ توانِ ۱۰ حداقل چند رقمی است؟

□ این سؤال در واقع می‌تواند درکلاس درس به یک مسابقه تبدیل شود. هدف این است که دانش‌آموزان از راهی منطقی، بزرگی این عدد را حدس بزنند. صرفاً برای دانستن، اشاره به مقدار تقریبی این عدد بد نیست.

$$۹^{۹^۹} \simeq ۴٫۲۸ \times ۱۰^{۳۶۹۶۹۳۰۹۹}$$

از جمله راه‌هایی که یک دانش‌آموز می‌تواند بپماید، چنین است:

$$3^7 = 2187 \simeq 2000$$

$$9^9 = (3^7)^2(3^2)^2 \simeq (2000)^2 \times 3^4 = 324 \times 10^6$$

$$\begin{aligned} 9^{9^9} &\simeq 9^{324\times 10^6} = 3^{648\times 10^6} \simeq 3^{630\times 10^6} = (3^7)^{9\times 10^7} \simeq (2000)^{9\times 10^7} \\ &= (2^{9\times 10^7}) \times 10^{3\times 9\times 10^7} = (2^{10})^{9\times 10^6} \times 10^{27\times 10^7} \\ &= (1024)^{9\times 10^6} \times 10^{27\times 10^7} \simeq (1000)^{9\times 10^6} \times 10^{27\times 10^7} \\ &= (10^3)^{9\times 10^6} \times 10^{27\times 10^7} = 10^{27\times 10^6 + 27\times 10^7} \\ &= 10^{297000000} \end{aligned}$$

به این ترتیب عدد 9^{9^9} حداقل دویست و نود و هفت میلیون رقمی است!

؟ کدام‌یک بزرگ‌تر است؟

$$4^{4^{4^4}} \qquad\qquad 10^{\overbrace{1000\ldots0}^{\text{صد تا صفر}}}$$

□

$$\begin{aligned} 4^{4^4} &= 4^{256} = 2^{512} = (2^{10})^{51} \times 2^2 = (1024)^{51} \times 2^2 > (1000)^{51} \times 2^2 \\ &= 4 \times 10^{153} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^{4^{4^4}} &> 4^{4\times 10^{153}} = 2^{8\times 10^{153}} \\ &= (2^{10})^{8\times 10^{152}} = (1024)^{8\times 10^{152}} > (1000)^{8\times 10^{152}} = 10^{24\times 10^{152}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$4^{4^{4^4}} > 10^{\overbrace{1000\ldots0}^{\text{صد تا صفر}}}$$

؟ از محاسبات بالاکمک بگیرید و بگویید عدد سمت چپی حداقل چند برابر عدد سمت راستی است؟

□

$$\frac{4^{4^{4}}}{10^{100}} > \frac{10^{24\times 10^{152}}}{10^{100}} > 10^{23\times 10^{152}} > 10^{18\times 10^{152}}$$

عدد سمت چپی حداقل یک میلیارد ... میلیارد برابر عدد سمت راستی است. راستی چطور می‌شود که ذهن آدمی‌زاد این همه تفاوت را نمی‌تواند تشخیص دهد.

؟ در عبارت بالا چند بار واژه‌ی «میلیارد» باید تکرار شود؟

□ 2×10^{152} مرتبه؛ یعنی دویست میلیون میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد میلیارد مرتبه!!!

درباره‌ی بزرگی عدد $4^{4^{4}}$ درکتاب «قلمرو ریاضیات» نوشته‌ی « دوموریاد[1] » ترجمه‌ی «پرویز شهریاری» مطلب جالبی وجود دارد:

۱. А. П. Доморяд [A. P. Domoryad]

مطلب زیر را از کتابی که در قرن گذشته درباره‌ی این عدد نوشته شده است، نقل می‌کنیم:

«پاره‌خطی را در نظر بگیرید که برای پیمودن طول آن به وسیله‌ی نور 10^{30} سال زمان لازم است؛ سپس کره‌ای به قطر این پاره‌خط در نظر بگیرید که پر از مرکب چاپ باشد. تمام این مرکب‌ها برای چاپ این عدد با کوچک‌ترین حروفی که در چاپخانه وجود دارد، کافی نیست!»

؟ الف) حجم چنین کره‌ای را به‌دست آورید.

ب) اگر هر سانتی‌متر مکعب مرکب، برای چاپ $1,000,000,000$ رقم کافی باشد، ثابت کنید که می‌توانیم عددی که کوچک‌تر از $\frac{1}{2} \times 10^{153}$ است را با مرکب‌های درون آن کره چاپ کنیم.

ج) نشان بدهید که $4^{4^{4^4}}$ را نمی‌توان با مرکب‌های درون آن کره چاپ کرد.

□ الف) کمتر از $\frac{1}{2} \times 10^{144}$ سانتی‌متر مکعب

ج) $4^{4^{4^4}} > 10^{24 \times 10^{152}} > \frac{1}{2} \times 10^{153}$

پس از بحث درباره‌ی دو عدد 9^{9^9} و $4^{4^{4^4}}$ دانش‌آموز باید به این نتیجه رسیده باشند که با توان به راحتی می‌توان عددهای سرسام‌آور بزرگ را ساخت.

[[تدریس از صفحه‌ی ۶۳ تا بعد از فعالیت صفحه‌ی ۶۵]]

ثابت کنید اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، آنگاه $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

□ فرض کنید که: $x = \sqrt{a}$، $y = \sqrt{b}$، $z = \sqrt{ab}$.

در این صورت خواهیم داشت:

$$x^2 = a \quad \text{و} \quad y^2 = b \quad \text{و} \quad z^2 = ab$$

بنابراین:

$$z^{۲} = x^{۲}y^{۲}$$

$$\to \sqrt{z^{۲}} = \sqrt{x^{۲}y^{۲}} \to |z| = |xy|$$

چون x و y و z هر سه نامنفی هستند، پس

$$z = xy$$

بنابراین

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

؟ ثابت کنید اگر a و b دو عدد باشند، آنگاه $\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}$.

□ شبیه اثبات بالا.

[[تدریس از بقیه‌ی صفحه‌ی ۶۵ تا صفحه‌ی ۷۱]]

ریشه‌گیری

۱. در مورد «هـ» اسمی از اتحاد چاق و لاغر $\left(a^۳ + b^۳ = (a-b)(a^۲+ab+b^۲)\right)$ نبرید.

۲.

الف) $$\frac{۱}{\sqrt{۸}+\sqrt{۱۸}+\sqrt{۵۰}+\sqrt{۷۲}} = \frac{۱}{۱۶\sqrt{۲}} = \frac{۱\times\sqrt{۲}}{۱۶\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳۲}$$

ب) $$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۱۲۸}} = \frac{۱}{-۵\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۱\times\sqrt[۳]{۴}}{-۵\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}} = \frac{\sqrt[۳]{۴}}{-۱۰}$$

ج) $$\frac{۱}{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}} = \frac{۱\times\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}\times\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}\times\left(\sqrt[۳]{۴}\right)^۲}{\sqrt[۳]{۴}\times\left(\sqrt[۳]{۴}\right)^۲} = \frac{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}}\times ۲\sqrt[۳]{۲}}{۴}$$

د) $$\frac{۱}{\sqrt{\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۳]{۲۵۰}}} = \frac{۱}{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}} = \frac{۱\times\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}}{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}\times\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}} = \frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}}{۸\sqrt[۳]{۲}} = \frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}\times\sqrt[۳]{۴}}{۸\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}}$$

$$= \frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{۲}}\times\sqrt[۳]{۴}}{۱۶}$$

۳. چون $x \in \mathbb{Z}$ و $x^۲ < ۳۶$، پس $x \in \{-۵,-۴,-۳,\dots,۵\}$. بنابراین ممکن است x برابر ۵ باشد. در این صورت چون $\sqrt{۵} < ۵$ پس «$-\sqrt{۵} < x < \sqrt{۵}$» درست نخواهد بود. بنابراین نتیجه‌گیری «الف» (همیشه) درست نیست.

«ب» درست است؛ زیرا:

$$x \in \{-۷,-۶,-۵,\dots,۷\} \leftarrow -\sqrt{۵۰} < x < \sqrt{۵۰}, x \in \mathbb{Z}$$

و نتیجه‌گیری زیر درست است:

$$x \in \{-۵,-۴,-۳,\dots,۵\} \rightarrow x \in \{-۷,-۶,-۵,\dots,۷\}$$

۴. الف) دومین شکل از سمت چپ

ب)

$$\sqrt{۲۰x} = x \to ۲۰x = x^۲ \to x^۲ - ۲۰x = ۰$$
$$\to x(x-۲۰) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲۰ \end{cases}$$

ج) با بررسی همه‌ی نمرات در می‌یابیم که نمره‌ی ۵ به نمره‌ی ۱۰ تبدیل خواهد شد. این تغییر پنج نمره‌ای بیشترین مقدار تغییرات خواهد بود.

د)

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{۲۰x} \in \mathbb{Z} \to ۲\sqrt{۵x} \in \mathbb{Z} \quad * \\ x \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۲۰\} \end{array}\right\} x \in \{۰, ۵, ۲۰\}$$

در واقع می‌توان از روش دیگری هم به جواب رسید. l را می‌توان از «*» نتیجه گرفت که:

$$۵x = k^۲ \text{ و } k \in \mathbb{Z} \to x = ۵l^۲ \text{ و } l \in \mathbb{Z} \to x \in \{۵ \times ۰^۲, ۵ \times ۱^۲, ۵ \times ۲^۲\}$$

ه) درباره‌ی این قسمت پاسخ دانش‌آموزان را بشنوید و سپس از آنها بخواهید که درباره‌ی نرمال‌سازی (بهنجارسازی)[1] کردن یک نمودار، جستجوی اینترنتی کنند.

به آنها بگویید که یک امتحان خوب امتحانی است که نمودار نمره‌هایش شکل خاصی باشد. هر امتحانی خوب نیست. پس شاید بتوان با بعضی روش‌ها نمره‌های یک امتحان ناخوب را «متعادل» کرد.

؟ اگر به جای ریشه‌ی دوم‌گیری بخواهیم از ریشه‌ی سوم‌گیری استفاده کنیم، روش کار به چه صورتی در می‌آمد؟

۱. normalize

□ به جای $\sqrt{۲۰x}$ باید از $\sqrt[۳]{۲۰x^۲}$ استفاده می‌کردیم و یا از $\sqrt[۳]{۴۰۰x}$ و ....

؟ میانگین نمرات پس از کدام تغییر بیشتر بالا می‌رود؟ $\sqrt{۲۰x}$ یا $\sqrt[۳]{۲۰x^۲}$ یا $\sqrt[۳]{۴۰۰x}$.

□ $\sqrt[۳]{۴۰۰x}$؛ زیرا $x \leq ۲۰$ و در نتیجه

$$(۲۰x^۲)^۲ < (۲۰x)^۳ < (۴۰۰x)^۲$$

پس

$$\sqrt[۳]{۲۰x^۲} < \sqrt{۲۰x} < \sqrt[۳]{۴۰۰x}$$

درستی رابطه‌ی اخیر به کمک ریشه‌ی دوم و ریشه‌ی سوم‌گیری به دست آمده است. توصیه می‌شود حل این پرسش را تا پاسخ‌گویی به تمرین‌های ۹ و ۱۰ به تأخیر بیاندازید.

.۵

$$\left.\begin{array}{l} ۳ < a < ۵ \rightarrow a - ۳ > ۰ \\ ۳ < a < ۵ \rightarrow a - ۶ < ۰ \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{(a-۶)^۶(a-۳)^۳} = \sqrt{(a-۶)^۶}\sqrt{(a-۳)^۳}$$

$$= |(a-۶)^۳| \times |a-۳| \times \sqrt{a-۳} = -(a-۶)^۳(a-۳)\sqrt{a-۳}$$

پس تساوی داده شده درست است.

.۶ الف) $\sqrt{a^۲b^۵c^۴} = \sqrt{a^۲b^۴bc^۴} = -ab^۲c^۲\sqrt{b}$

ب) $\sqrt[۳]{a^۲b^۵c^۴} = \sqrt[۳]{a^۲b^۳b^۲c^۳c} = \sqrt[۳]{a^۲b^۲c}\,bc$

.۷

$$۸۰۰۰ < ۹۰۰۰ < ۹۲۶۱$$

$$۲۰ = \sqrt[۳]{۸۰۰۰} < \sqrt[۳]{۹۰۰۰} < \sqrt[۳]{۹۲۶۱} = ۲۱$$

$$۲۰ < \sqrt[۳]{۹۰۰۰} < ۲۱$$

$$۲۰ < ۱۰\sqrt[۳]{۹} < ۲۱$$

$$۲٫۰ < \sqrt[۳]{۹} < ۲٫۱$$

پس اولین رقم اعشار $\sqrt[۳]{۹}$، صفر است.

$$۹۲۶۱ < ۱۰۰۰۰ < ۱۰۶۴۸$$

$$۲۱ = \sqrt[۳]{۹۲۶۱} < \sqrt[۳]{۱۰۰۰۰} < \sqrt[۳]{۱۰۶۴۸} = ۲۲$$

$$۲۱ < \sqrt[۳]{۱۰۰۰۰} < ۲۲$$

$$۲۱ < ۱۰\sqrt[۳]{۱۰} < ۲۲$$

$$۲٫۱ < \sqrt[۳]{۱۰} < ۲٫۲$$

پس اولین رقم اعشار $\sqrt[۳]{۱۰}$، یک است.

.۸

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{x} = ۹۲۶۱ = (۲۱)^{۳} \rightarrow x = (۲۱)^{۶} \rightarrow \sqrt[۳]{x} = (۲۱)^{۲} \\ \sqrt[۳]{y} = ۶ \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt[۳]{xy} = (۲۱)^{۲} \times ۶$$

$$= ۲۶۴۶$$

.۹

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = ۴ \to (x\sqrt{x}) = ۴^۳ \to (x\sqrt{x})(x\sqrt{x}) = ۴^۶ \to x^۳ = ۴^۶$$
$$\to x = \sqrt[3]{۴^۶} \to x = ۱۶$$

در فصل بعد نشان می‌دهیم که اگر « $a^۳ = b^۳ \to a = b$ ».

۱۰. الف)

$$x = \sqrt{\sqrt[3]{۲}} \to x^۲ = \sqrt[3]{۲} \to (x^۲)^۳ = ۲ \to (x^۳)^۲ = ۲$$

چون x مثبت است پس $x^۳$ نیز مثبت است؛ بنابراین

$$x^۳ = \sqrt{۲} \to x = \sqrt[3]{\sqrt{۲}}$$

ب) با توجه به «ج»، اثبات می‌شود،

ج) رابطه درست نیست. رابطه‌ی درست به صورت زیر است:

$$x = \sqrt{\sqrt[3]{a^۲}} \to x^۲ = \sqrt[3]{a^۲} \to (x^۲)^۳ = a^۲ \to x^۶ = a^۲$$
$$\to \sqrt{x^۶} = \sqrt{a^۲} \to |x^۳| = |a| \xrightarrow{x>۰} x^۳ = |a| \to x = \sqrt[3]{|a|}$$

بنابراین

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^۲}} = \sqrt[3]{|a|}$$

۱۱. الف) فرض می‌کنیم که $\sqrt[3]{۲} \notin \mathbb{Q}'$. بنابراین $\sqrt[3]{۲} \in \mathbb{Q}$ پس $\sqrt[3]{۲}$ را می‌توان به صورت کسر ساده‌نشدنی $\frac{m}{n}$ نوشت.

$$\sqrt[3]{۲} = \frac{m}{n} \to \sqrt[3]{۲}n = m \to ۲n^۳ = m^۳ \to \text{زوج است.}\ m^۳ \to \text{زوج است.}\ m$$

فرض می‌کنیم $k \in \mathbb{Z}$ و $m = ۲k$.

n زوج است. $\rightarrow$ $n^۳$ زوج است. $\rightarrow$ $۲n^۳ = m^۳ \rightarrow ۲n^۳ = (۲k)^۳ \rightarrow ۲n^۳ = ۸k^۳ \rightarrow n^۳ = ۴k^۳ \rightarrow$

بنابراین $\frac{m}{n}$ ساده‌شدنی، m زوج و n زوج است. $\perp$

چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. بنابراین $\sqrt[۳]{۲} \notin \mathbb{Q}'$ درست نیست. پس $\sqrt[۳]{۲} \in \mathbb{Q}'$. $\square$

در «یک اثبات جدید» می‌توانید یکی از جدیدترین اثبات‌های گنگ بودن $\sqrt[۳]{۲}$ را ببینید.

ب) «اگر n مکعب کامل نباشد و $n \in \mathbb{Z}$، آنگاه $\sqrt[۳]{n} \in \mathbb{Q}'$»

اثبات شبیه قسمت «الف»

با توجه به مطلب اخیر می‌توان فهمید که x باید به صورت $\sqrt[۳]{n}$ باشد به‌طوری $n \in \mathbb{Z}$ ولی n مکعب کامل نباشد.