فصل اول

اعداد و نمادها

[تدریس صفحه‌های ۱ و ۲ تا سر پاراگراف آخر]

عددنویسی

۱ــ الف) وقتی می‌نویسیم ۱۲۳ یعنی ۱ در مرتبه‌ی صدگان قرار دارد، ۲ در مرتبه‌ی دهگان و ۳ در مرتبه‌ی یکان. به چنین روش عددنویسی که مقدار یک عدد از موضع و محل قرار گرفتن نمادها به‌دست می‌آید، عددنویسی موضعی می‌گوییم.

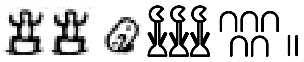
تفاوت دیگر عددنویسی موضعی و غیرموضعی، در امکان محدود بودن نمادهاست. می‌توان در یک عددنویسی موضعی از تعداد محدودی نماد به‌جای ارقام استفاده کرد، اما در یک عددنویسی غیرموضعی نمی‌توان تعداد محدودی نماد به کار برد.

ب)
به روش هندی ــ پارسی : ۱۳۸۸

به هیروگلیف مصری : 

پ) نکته در این است در عددنویسی موضعی می‌توان هر عددی را نوشت اما در عددنویسی غیرموضعی تا بعضی از نمادها را ندانیم نمی‌توانیم اعداد بزرگ و بزرگ‌تر را بنویسیم.

به روش هندی ــ پارسی : ۲۱۰۳۰۵۲

به هیروگلیف مصری : 

۲ــ الف) ابتدا پاسخ‌های دانش‌آموزان را درباره «الف» بشنوید. سپس بگویید.

دو نماد معروف خط میخی کهن، «𒁹» و «𒌋» بود.

«𒁹» به معنی ۱ بود و «𒌋» به معنی ۱۰. برای مثال:

𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹 = ۳۲

ارزش مکانی آنها شصتگانی بود. بنابراین 𒌋𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 یعنی:

(𒌋𒁹)(𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹) = ۱۱ × ۶۰^{۱} + ۲۳ × ۶۰^{۰} = ۲۸۳

؟ 𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹 𒌋𒁹𒁹𒁹 بیانگر چه عددی است؟

□ 𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹 𒌋𒁹𒁹𒁹 = (𒁹)(𒌋𒌋𒁹𒁹)(𒌋𒁹𒁹𒁹) = (۱ × ۶۰^{۲}) + (۲۲ × ۶۰^{۱}) + (۱۳ × ۶۰^{۰}) = ۴۹۳۳

ب) ۱۳۸۸ = ۲۳ × ۶۰ + ۸ = (𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹) + (𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹) = 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

؟ ۶۰ را به خط میخی بنویسید.

□ «𒁹» در خط میخی هم به معنی ۱ است هم به معنی ۶۰ و هم ۳۶۰۰. به‌طور کلی «𒁹» می‌تواند بیانگر ۶۰^{n} باشد. این وضع ناگوار به خاطر این پیش آمده بود که در خط میخی نمادی برای هیچ وجود نداشت.

۳— این نماد به معنی اعداد متفاوتی ممکن است باشد. برای مثال:

𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹 = (𒁹)(𒌋𒌋 𒁹𒁹) = { (۱ × ۶۰) + (۲۲ × ۱) = ۸۲ ؛ (۱ × ۳۶۰۰) + (۲۲ × ۱) = ۳۶۲۲ ؛ (۱ × ۳۶۰۰) + (۲۲ × ۶۰) = ۴۹۲۰ }

وقتی یک نماد بیانگر چندین عدد متفاوت باشد، شاید این‌طور به‌نظر برسد که استفاده از آن نماد بسیار باعث اشتباه می‌شود ولی بابلی‌ها احتمالاً با توجه به قراین و شواهد از روی نماد به مقدار عدد پی می‌بردند. چنین وضعی حتی امروزه نیز رایج است؛ وقتی می‌گوییم «این خانه هشتاد و پنج تومان می‌ارزد» یعنی ۸۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان. وقتی می‌گوییم «درمهمانی آن شب هشتاد و پنج تومان خرج شد» یعنی ۸۵,۰۰۰ تومان و وقتی می‌گوییم «قیمت این نان تافتون هشتاد و پنج تومان است» یعنی ۸۵ تا یک تومانی.

وقتی هخامنشیان بابل را تصرف کردند، از آنها خط میخی را یاد گرفتند. آنها در آمارهایشان نیاز به اعداد بزرگ و کوچک داشتند و بیم اشتباه عددنویسی به روش قدیم خط میخی بیشتر می‌شد بنابراین پارس‌ها نماد «𒑱» را برای جدا کردن و بیان نبود یک ارزش مکانی اختراع کردند. به مثال زیر توجه کنید.

𒁹 𒑱 𒁹 = (𒁹)𒑱(𒁹) ≠ (۱ × ۶۰^۱) + ۱ = ۶۱

𒁹 𒑱 𒁹 = (𒁹)𒑱(𒁹) = (۱ × ۶۰^۲) + (۰ × ۶۰^۱) + ۱ = ۳۶۰۱

۴— 𒁹 𒌋𒌋 𒁹 𒑱 𒁹 = (𒁹)(𒌋𒌋 𒁹)𒑱(𒁹) = (۱ × ۶۰^۳) + (۲۱ × ۶۰^۲) + (۰ × ۶۰^۱) + ۱ = ۲۹۱۶۰۱

با این همه هخامنشیان «𒑱» را در سمت راست عدد نمی‌نوشتند.

؟ آیا «𒑱» همان نقش صفر را دارد؟

□ چون در سمت راست عدد نوشته نمی‌شد، خیر! ولی نقش نماد «𒑱» بسیار شبیه نقش نماد «۰» است.

۵— موضعی است. آن‌ها هر نماد را برای عددی خاص به‌کار می‌بردند برای مثال به جای ۵۰۰ می‌نوشتند D و به‌جای ۱۰۰۰ می‌نوشتند M.

امروزه در نوشتن علم به‌دست غربی‌ها، از نمادهای رومی استفاده می‌شود.

I II III IV V VI VII ...

حتی در بعضی ساعت‌ها، از این اعداد استفاده می‌کنند.

؟ پس چرا با اینکه امروزه نمادهای رومی بسیار شایع‌تر از نمادهای خط هیروگلیف است، در تمرین ۱ از آن‌ها نام نبردیم؟

□ پس از اینکه پاسخ دانش‌آموزان را شنیدید بگویید زمانی که مصریان و ایرانیان به نوشتن کتیبه‌های علمی مشغول بودند، رومی‌ها اقوامی بدوی و نیمه وحشی بودند؛ نه خطی داشتند و نه علمی.

[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۲، صفحه‌های ۳ و ۴]

۶—

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

دقت کنید که صفر ایرانی توخالی است و صفر عربی توپر.

در خط تحریری ایرانی گاهی اوقات از ارقام شبیه عربی استفاده می‌شود.

؟ کدام‌یک قدیمی‌تر است؟ ارقام ایرانی یا عربی.

□ این یک مسأله‌ی خوب «تارخ ریاضیات» برای تحقیق است. فراموش نکنید که تاریخ ریاضیات یک علم است. علمی بین تاریخ و ریاضیات.

⟦ تدریس صفحه‌ی ۵ ⟧

اعداد طبیعی و صحیح

۱ —

⟦ تدریس صفحه‌های ۶ و ۷ ⟧

۲ — نظریه‌ی اعداد.

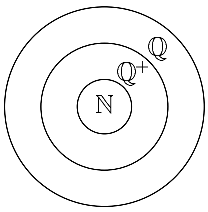
۳ —

⟦ تدریس صفحه‌ی ۸ تا «··· بر یک عدد طبیعی نمایش داد.» ⟧

اعداد گویا

۱ — برای نشان دادن نقش اعداد گویا روزنامه‌ی به روزی را در کلاس ورق بزنید و اعداد و ارقام آن را در روی ناحیه‌های شکل همین تمرین یادداشت کنید. به دانش‌آموزان نشان دهید که (تقریباً) همه‌ی اعداد در روزنامه، گویا هستند.

نکته‌ی جالب توجه این است که از نظر تاریخی اعداد گویای مثبت ($\mathbb{Q}^+$) قبل از اعداد منفی کشف شدند. در واقع به لحاظ تاریخی (و نه ساختمان جبری) چنین نموداری را داریم:



این نکته حتی در کاربردهای عدد در همان روزنامه هم قابل اشاره است. در آن روزنامه (تقریباً) همه‌ی اعداد مثبت هستند.

از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی این جمله نظر دهند: منظور از «دانشمندان» در تمرین ۱، دانشمندانِ چه علم و دانشی است؟

دانش‌آموزان می‌توانند به فیزیک، شیمی، زیست شناسی، جامعه شناسی و ... اشاره کنند.

⟦ دوباره به کادر صورتی صفحه‌ی ۸ دقت شود. ⟧

۲ — کافی است چنین بنویسیم: همه‌ی $\dfrac{m}{n}$ هایی که $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$.

نیازی به اشاره به $\left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ نیست.

از دانش‌آموزان این سؤال را بپرسید و به آن‌ها فرصت دهید حتی تا در خانه درباره‌اش فکر کنند.

؟ ایراد این جمله در چیست؟

«اعداد گویا همه‌ی اعدادی هستند که صورت و مخرج آن‌ها عددی صحیح است ولی مخرج آن‌ها صفر نیست.»

☐ ایراد کار در زیادی بودن شرایط است. فقط کافی است «صورت» یا «مخرج» عددی طبیعی باشد.

۳− پس از حل سؤال ۳، این سؤال پرسیده شود:

؟ «ساده نشدن» را چطور تعریف کنیم؟ «کسر ساده نشدنی» را چطور تعریف کنیم؟

☐ اجازه دهید که دانش‌آموزان به تعریف اشتباه زیر برسند:

به کسری که به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نوشته می‌شود، به‌طوری‌که این دو عدد بر هیچ عدد مشترکی بخش‌پذیر نباشند، کسر «ساده نشدنی» می‌گوییم.

از دانش‌آموزان بخواهید کسر زیر را تا جایی که امکان دارد ساده کنند.

$$\frac{۱۴}{۲۱}$$

با توجه به تعریف، پاسخ به صورت زیر نیست!

$$\frac{۱۴}{۲۱} = \frac{۲ \times ۷}{۳ \times ۷} = \frac{۲}{۳}$$

زیرا ۲ و ۳ هر دو بر ۱ بخش‌پذیرند!

تعریف درست را به آن‌ها بگویید:

به کسری که به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی نوشته می‌شود، به‌طوری‌که این دو عدد بر هیچ عدد اول مشترکی بخش‌پذیر نباشند، کسر «ساده نشدنی» می‌گوییم.

علت این‌که عدد ۱ را عدد اول نمی‌گیرند، همین ماجرای ساده شدن است!

۴−

۵−

۶−

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۸ و همچنین صفحه‌های ۹ و ۱۰]]

۷− یک پاسخ آسان $B = \mathbb{Q}$ است. از دانش‌آموزان بخواهید که درباره‌ی پاسخی دیگر هم فکر کنند. برای مثال مجموعه‌ی همه‌ی عددهای گویایی که طبیعی نیستند!

۸− خیر. برای مثال A را اعداد زوج و B را اعداد فرد قرار بدهید.

[[تدریس صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴]]

اعداد اعشاری

۱ − یک عدد اعشاری همیشه به ارقام صفر ختم نمی‌شود. برای مثال هر دو عدد زیر اعشاری هستند.

۲۵۷/۰۱۰۲۲۲۲۲۰۰۰   ۱/۰۱۰۱۰۱۰۱۰۰۰

نماد «...» زمانی استفاده می‌شود که روند کار را بدانیم. با این همه ریاضی‌دان‌ها سعی می‌کنند روند و شیوه‌ی گسترش ارقام را توضیح دهند.

؟ شیوه‌ای برای نوشتن ارقام عدد ۱/۰۱۰۱۰۱۰۱۰۰۰ را بیابید که رقم بعدی آن (که نوشته نشده است) ۵ باشد.

□ برای مثال این عدد به صورت زیر باشد:

۱/۰۱۰۱۰۱۰۱۵۰۱۰۱۰۱۰۱۵۰۱۰۱۰۱۰۱۵...

؟ اگر بدانیم در عدد ۱/۰۱۰۱۰۱۰۱۰۰۰ صفر و یک پشت سر هم تکرار می‌شوند چه پیشنهادی برای نوشتن این عدد می‌کنید تا باعث سرگردانی و اشتباه نشود؟

□ اجازه بدهید که دانش‌آموزان نظرشان را بگویند. در ریاضی این عدد را به دو شیوه‌ی زیر نشان می‌دهند:

$$1/\overline{01}$$

$$1/(01)$$

۲–

۳– الف) بله

ب) بله

اگر بخواهیم عدد ۸/۷۷۷... را توصیف کنیم می‌توانیم این کار را به شیوه‌های گوناگونی انجام دهیم.

؟ کدام یک از روش‌های زیر درست است؟

۸/(۷)   ۸/(۷۷)   ۸/۷(۷)

□ هر سه درست هستند. دانش‌آموز باهوشی ممکن است بگوید:

۸/(۷۷) ≠ ۸/(۷) زیرا تعداد ارقام اعشاری عدد سمت راست دو برابر تعداد ارقام اعشاری عدد سمت چپ است و یا

۸/۷(۷) ≠ ۸/(۷) زیرا تعداد ارقام اعشاری عدد سمت راست یکی بیشتر از تعداد ارقام اعشاری عدد سمت چپ است.

به آن دانش‌آموز بگویید در وب‌گاه «پاسخ یک ایراد» را ببین.

۴– برای پاسخ به این سؤال بگذارید دانش‌آموزان این اعداد را به صورت گسترده بنویسند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند. برای مثال:

۱/(۰۱۰) = ۱/۰۱۰۰۱۰۰۱۰...

توجه کنید که (۱/۰۱) بی‌معنی است! استفاده از «( )» فقط بعد از ممیز معنی دارد.

۵– ۴۱/۴(۰)

۶–

۷ــ

۸ــ به دانش‌آموزان فرصت دهید که این سؤال را خودشان حل کنند. سپس یک نفر روش کار را توضیح دهد.

۹ــ به دانش‌آموزان فرصت دهید که این سؤال را خودشان حل کنند. سپس یک نفر روش کار را توضیح دهد.

۱۰ــ به دانش‌آموزان فرصت دهید که این سؤال را خودشان حل کنند. سپس یک نفر روش کار را توضیح دهد.

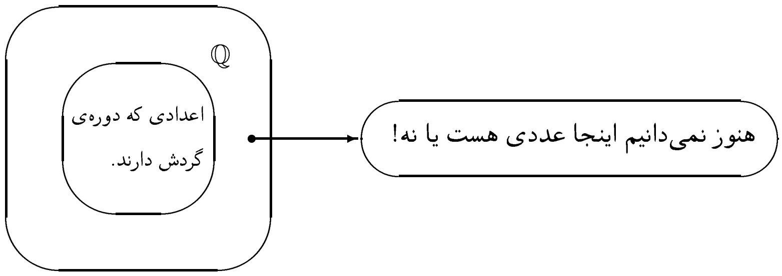
۱۱ــ

۱۲ــ

۱۳ــ اجازه بدهید دانش‌آموزان درباره‌ی این مسأله خوب فکر کنند.

این طور توضیح دهید.

در ۱۲ این مطلب آمده است:



دو حالت داریم ۱) اگر اینجا عددی باشد، پس عددی وجود خواهد داشت که دوره‌ی گردش ندارد ولی گویاست. در این حالت «الف» و «ب» هر دو نادرست خواهند شد.

۲) اگر اینجا عددی نباشد، پس هر عددی که دوره‌ی گردش نداشته باشد، گویا نیست. در این حالت «الف» و «ب» هر دو درست خواهند شد.

بنابراین از آنچه که تا کنون می‌دانیم، نمی‌توانیم درستی یا نادرستی «الف» و «ب» را تشخیص دهیم.

به دانش‌آموزان درباره‌ی اهمیت نوع نوشتن بگویید. به آن‌ها بگویید برای مثال

جمله‌ی ۲ $\longrightarrow$ جمله‌ی ۱

با

جمله‌ی ۱ $\longrightarrow$ جمله‌ی ۲

به یک معنی نیست!

؟ آیا عددی اعشاری هست که دوره‌ی گردش نداشته باشد؟

□ جواب دادن به این سؤال را تا تدریس بخش نمایش اعشاری اعداد گنگ به عقب بیندازید.

۱۴ــ حل قسمت «پ» بسیار زمان بر است. از همه‌ی دانش‌آموزان بخواهید این محاسبه را انجام دهند. پس از حل این سؤال از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی درستی جمله‌ی «اعداد اعشاری بخشی مهم از اعداد گویا هستند» در صفحه‌ی ۱۰ کتاب نظر بدهند.

۱۵ـ پس از حل «الف» اجازه بدهید که درباره‌ی درستی نتیجه بحث شود. عده‌ای می‌پرسند که $\circ/(۹)$ از ۱ کوچک‌تر است. به آن‌ها بگویید. اگر $\circ/(۹)$ از ۱ کوچک‌تر است، بین $\circ/(۹)$ و ۱ عددی باید وجود داشته باشد. زیرا میانگین هر دو عدد، بین آن دو عدد است.

ممکن است عده‌ای از دانش‌آموزان به محاسبه‌ی نادرست زیر برسند:

$$۱ - \circ/(۹) = \circ/(\circ)۱$$

به آن‌ها یادآور شوید که دوره‌ی گردش یک عدد ، در انتهای ارقام اعشاری ظاهر می‌شود، نه در وسط آن. به آن‌ها بگویید در یک عدد مرتبه‌ی یک رقم اعشار باید دقیقاً مشخص شود؛ اما در عدد $\circ/(\circ)۱$ نمی‌دانیم که رقم ۱، در چه مرتبه و جایگاهی است.

سال‌ها پیش دانش‌آموزی سمپادی دربارهی $\circ/(\circ)۱$ مطالعه کرد و به نتایج و حدس‌های گران‌بهایی رسید. حاصل تفکرات آن دانش‌آموز در سمیناری دانشگاهی ارائه شد. جلوی تفکرات آن‌ها را نگیرید و بحث را می‌توانید با جمله‌ی «هر کس دوست دارد برود درباره‌ی کوچک‌ترین عدد مثبت فکر کند» تمام کنید. فراموش نکنید که ایده‌های شکل‌گیری گرایشی در ریاضیات به‌نام «آنالیز نااستاندارد» از بطن ماجرای کوچک‌ترین عدد مثبت بلند می‌شود!

ت) $-۷/۴۱(۹) = -۷/۴۲$

ث) خیر. «صفر» را نمی‌توان. جالب است بدانید که وقتی به جای $\circ/(۹)$، ۱ را قرار می‌دهیم، انگار اعداد را شانه می‌کنیم. اعداد مثبت را به طرف راست و اعداد منفی را به طرف چپ؛ و سر صفر بی‌کلاه می‌ماند!

برای به‌دست آوردن اطلاعات و ادراک بیشتر درباره‌ی $\circ/(۹) = ۱$ می‌توانید به آنالیز ریاضی، نوشته‌ی آپوستل، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، صفحه‌ی ۲۵ مراجعه کنید.

۱۶ـ الف) این راه نادرست است.

اگر به جای $\circ/(۹)$ از ۱ استفاده کنیم، نادرستی محاسبه به آسانی به‌دست می‌آید.

ب) مطمئن‌ترین راه این است که ابتدا صورت کسری هر دو عدد رابنویسیم و سپس دو کسر را از هم کم کنیم!

[تدریس صفحه‌ی ۱۵ تا سر تمرین در کلاس]

اعداد حقیقی

۱ـ اجازه بدهید که دانش‌آموزان اثبات را بخوانند. سپس خودتان اثبات را توضیح دهید.

[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۱۵ و صفحه‌ی ۱۶ تا سر تمرین در کلاس]

۲ـ به هر حال در دنیا $\sqrt{۲}$ وجود دارد، هر چند تصور مبهمی نسبتاً به آن داریم؛ زیرا نمی‌توانیم با نسبت دو عدد صحیح آن را بیان کنیم. به هر حال در دنیا $\sqrt{۲}$ وجود دارد و برای کسی که می‌خواهد از ماهیت طبیعت سر در آورد شناخت وجود $\sqrt{۲}$ الزامی است!

۳– ؟ «دست‌آورد» مهم‌تر است یا «اندیشه آورد»؟

□ هدف از این سؤال آشنایی دانش‌آموزان با خود این سؤال است، نه به دنبال پاسخ گشتن. مسلماً هم «دست‌آورد» نقش مهمی در برداشتن گام‌های آگاهی و رفاه بشر داشته است و هم «اندیشه آورد». بگذارید خود دانش‌آموزان متن درون مستطیل را بخوانند. سپس از آن‌ها بپرسید:

؟ به نظرتان کدام «ناپرهیزگارتر» است: کسی که می‌گوید راز گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را فاش نکن یا کسی که زیر قولش می‌زند و راز گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را فاش می‌کند؟

□ این سؤال یعنی فلسفه‌ی اخلاق!

اثبات دیگری که برای گنگ بودن $\sqrt{۲}$ آورده شده است، به زبان انگلیسی است. دانش‌آموزی را که ادعا می‌کند آن را فهمیده، مجبور به ترجمه‌ی دقیق آن متن به فارسی نکنید!

۴–

۵–

۶– الف) بله. باید جوابی برای این معادله بیابیم به شرطی که n و m دو عدد صحیح باشند: $n \times ۲ + m \times (۲ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$

این جواب $n = ۱$ و $m = -۱$ است. به این معنی که یک پیمانه‌ی ۲ لیتری از آب دریای خزر را به خلیج همیشه فارس می‌ریزیم. سپس یک پیمانه $۲ - \sqrt{۲}$ لیتری از آب خلیج همیشه فارس را به دریای خزر می‌ریزیم.

البته جواب ساده‌تر این است که از یک پیمانه‌ی ۲ لیتری که از آب دریای خزر برداشته‌ایم یک پیمانه $۲ - \sqrt{۲}$ لیتری برداشته و به دریای خزر برمی‌گردانیم، بنابراین در پیمانه‌ی ۲ لیتری $\sqrt{۲}$ لیتر آب باقی مانده که آن را به خلیج همیشه فارس می‌ریزیم.

ب) خیر. زیرا باید به جوابی برای این معادله برسیم به شرط اینکه n و m دو عدد صحیح باشند: $n \times ۲ + m \times (۲ - \sqrt{۲}) = ۱$

اما می بینیم که:

$$۲n + ۲m - m\sqrt{۲} = ۱$$
$$\Longrightarrow \quad \sqrt{۲} = \frac{۲n + ۲m - ۱}{m}$$

اگر $m \neq ۰$، این معادله جواب ندارد؛ زیرا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است ولی سمت راست تساوی عددی گویا!

اگر $m = ۰$، هم معادله جواب ندارد؛ زیرا دراین صورت باید عدد صحیح n برابر $\frac{۱}{۲}$ شود!

وقتی شیخ‌نشین‌های جنوب خلیج فارس به نام «خلیج فارس» حسادت می‌کنند، از جمهوری‌های شمال ایران انتظار نداریم که نسبت به نام «دریای خزر» مهربان باشند. می‌گویند در یک نشست سیاسی یکی از رؤسای جمهوری‌های شمال ایران گفت که ما نام دریای خزر را به رسمیت نمی‌شناسیم. باید از این به بعد بگویید «دریای کاسپین». مقام ایرانی گفت «بنده‌ی خدا، کاسپین هم نام ایرانی است. کاسپین هم ریشه‌ی قزوین یکی از شهرهای ایران است. این اسم از زمان سکونت «کاس»ها که قبل از «آریا»یی‌ها در ایران ساکن بودند به جا مانده است!».

۷– خیر! اگر طول ضلع مربع را a بگیریم، زمانی گرگ به خرگوش می‌رسد که دو عدد طبیعی n و m پیدا شوند، به‌طوری‌که:

$$n \times (\text{نصف محیط مربع}) = m \times (\text{طول قطر مربع})$$

پس باید به دنبال دو عدد طبیعی n و m بگردیم، به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$n \times (۲a) = m \times (\sqrt{۲}a)$$

بنابراین $\frac{۲n}{m} = \sqrt{۲}$. اما چنین چیزی امکان پذیر نیست! زیرا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ و $\frac{۲n}{m}$ عددی گویا است.

۸– توجه کنید که طول ضلع مربع ممکن است عددی گنگ باشد!

طول ضلع مربع را برابر ℓ می‌گیریم. بنا به صورت مسأله داریم:

$b = m\ell$ و $a = n\ell$ که n و m دو عد طبیعی هستند. بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{n\ell}{m\ell} = \frac{n}{m}.$$

۹– ب) بله! برای مثال $y = \sqrt{۲}x$.

حساب حقیقی

۱– اجازه بدهید دانش‌آموزان ابتدا متن درون مستطیل را خودشان بخوانند. سپس از دانش‌آموزی بخواهید روش اثبات را توضیح دهد.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید «الف» و «ب» را حل کنند.

الف) خیر. معکوس هر عدد گویای ناصفر، عددی گویا نیست!

؟ ثابت کنید معکوس هر عدد گویای ناصفر، عددی گویاست.

□ تأکید کنید که صورت مسأله را در مستطیل سؤال «الف» یادداشت کنند.

۲–

۳– اجازه بدهید دانش‌آموزان ابتدا متن درون مستطیل را خودشان بخوانند. سپس از دانش‌آموزان بخواهید روش اثبات را توضیح دهد.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید «الف» و «ب» را حل کنند. از آن‌ها بخواهید سعی کنند اثبات‌ها را بنویسند.

۴– از دانش‌آموزان بخواهید سعی کنند اثبات‌ها را بنویسند.

۵– اگر $r = ۰$ حق نداریم که $rs = t$ را به صورت $s = \frac{t}{r}$ بنویسیم.

؟ چه چیزی در این راه حل اثبات شده است؟

□ «ضرب عدد گویای ناصفر در عددی گنگ، عددی گنگ می‌شود.»

۶–

۷- کافی است که با آوردن شش مثال، دانش‌آموز به نتیجه زیر برسد:

«جمع، ضرب و تقسیم دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا یا گنگ شود.»

$\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰$

$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲$

$\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱$

۸- برای حل این سؤال دانش‌آموز باید a را در خودش یک بار یا دو بار ضرب کند. سراغ اتحادها نروید!

۹- جواب دادن این سؤال برای دانش‌آموز باید تا بخش رادیکال‌های کتاب درسی و آشنا شدن با $\sqrt[n]{\quad}$ به تعویق بیفتد. از دانش‌آموزان باهوش بخواهید درباره‌ی به‌دست آوردن پاسخ فکر کنند.

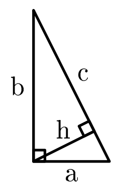
۱۰-

۱۱-

۱۲- ب) یکی از حدس‌ها می‌تواند این باشد:

«اگر x^n (که $n\in\mathbb{N}$) عددی گنگ باشد، x گنگ بوده است.»

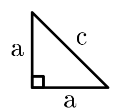
۱۳- الف) بنابه صورت مسأله، $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{Q}\\ h\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ پس



$$\begin{cases}S=\dfrac{ab}{۲}\implies S\in\mathbb{Q}\\[2mm] S=\dfrac{hc}{۲}\implies S\in\mathbb{Q}'\end{cases}\quad\perp$$

بنابراین «الف» درست نیست.

ب) در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین داده شده داریم:



$$a^۲+a^۲=c^۲\implies ۲a^۲=c^۲\implies ۲=\frac{a^۲}{c^۲}\implies \sqrt{۲}=\frac{a}{c}$$

بنابراین a و c نمی‌توانند هم‌زمان گویا باشند. پس

«در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین، طول هر سه ضلع نمی‌تواند گویا باشد.»

بنابراین «ب» درست است.

۱۴- الف) ممکن است. به طول اضلاع $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۶}$.

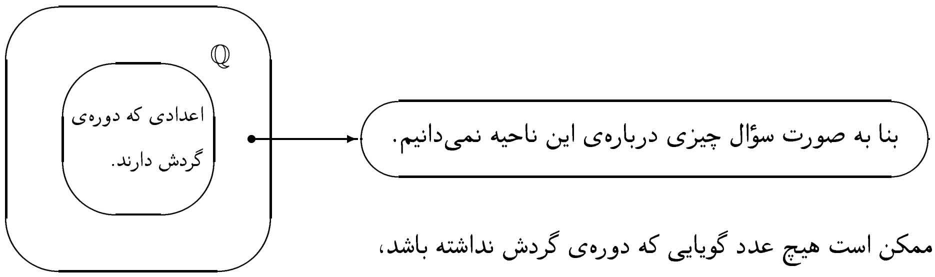
ب) ممکن است. به طول اضلاع $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۸}$ (این سه عدد در واقع $\sqrt{۲}$، $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ هستند.)

نمایش اعشاری اعداد گنگ

۱- اجازه بدهید دانش‌آموزان درباره‌ی این مسأله خوب فکر کنند.

این طور توضیح دهید.

آنچه در صورت سؤال است به این معنی است:



بنا به صورت سؤال ممکن است هیچ عدد گویایی که دوره‌ی گردش نداشته باشد، موجود نباشد و یا ممکن است وجود داشته باشد. بنابراین نمی‌توانیم درستی «ب» را تأیید کنیم.

دقت کنید که «الف» و «ب» هر دو درست هستند، اما تنها «الف» از صورت سؤال نتیجه می‌شود.

۲— اجازه بدهید دانش‌آموزان درباره‌ی هر قسمت خوب فکر کنند. هر قسمت را جدا حل کنید و سپس به قسمت بعدی بپردازید.

الف) آنقدر ارقام اعشار را ادامه دهید که به ده رقم صفر پشت سر هم برسیم. از آنجا به بعد، به تعداد دسته ارقام صفر پشت سر هم افزوده می‌شود. داشتن دوره‌ی گردش پنج رقمی یعنی اینکه همه‌ی پنج رقم دوره‌ی گردش یک‌بار کاملاً در این ده تا (و یا بیشتر) صفر پشت سر هم می‌افتند. برای مثال:

$$\cdots\boxed{00100}\,\boxed{00000}\,\boxed{00010}\cdots$$

این اتفاق به معنی این است که همه‌ی ارقام دوره‌ی گردش باید صفر باشند. بنابراین از جایی که دوره‌ی گردش شروع می‌شود، به بعد، هیچ رقم غیر صفری وجود نخواهد داشت. $\perp$

چنین چیزی غیر ممکن است! زیرا ساختار این عدد طوری است که همیشه بعد از دسته‌ای از ارقام صفر، یک رقم «یک» ظاهر می‌شود.

«ب» و «ج» هم با روش مشابه «الف» حل می‌شوند. با تکرار روش «الف» سعی کنید درستی برهان را به دانش‌آموزان نشان دهید.

۳—

۴— متن این قسمت را با صبر و اشتیاق درس دهید. در این قسمت نکته‌ی ریاضی عمیقی نهفته است. نکته‌ی مهم برانگیختن شوق «کشف» در بین دانش‌آموزان است.

هیچ‌گاه تصور نکنید که انبوه معلومات ریاضی‌دان می‌سازد! و اگر می‌خواهید دید دانش‌آموزانتان اصلاح شود، پیش از آن باید دید خودتان را اصلاح کنید.

۵— الف) ۰/۱۱۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱

ب) توجه کنید که در این عدد به موقعیت زیر می‌رسیم:

$$\alpha = \frac{1}{10^{1}} + \frac{1}{10^{1\times 2}} + \frac{1}{10^{1\times 2\times 3}} + \cdots + \frac{1}{10^{1\times 2\times 3\times \cdots\times 1000}} + \frac{1}{10^{1\times 2\times 3\times \cdots\times 1001}} + \cdots$$

فاصله‌ی بین دو رقم «یک» به‌دست آمده از دو کسر آخر تقریباً برابر است با:

$$(۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times ۱۰۰۱) - (۱ \times ۲ \times ۳ \cdots \times ۱۰۰۰)$$

$$= ۱ \times ۲ \times ۳ \times \times \cdots \times ۱۰۰۰ \times (۱۰۰۱ - ۱) = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \times \cdots \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰$$

بنابراین زمانی می‌رسد که فاصله‌ی بین دو رقم «یک» بیش از ۱۰۰۰ رقم می‌شود. اکنون می‌توانید از همان ساختارِ در قسمت «الف» برای اثبات کمک بگیرید.

اگر خوب با آن روش ارتباط برقرار نکرده‌اید، شدیداً توصیه می‌شود در وب‌گاه، «بی دوره‌ی گردش» را بخوانید.

۶ــ با کمک همان ساختار ۲، قسمت «الف» می‌توان نشان داد که این عدد گنگ است. اجازه بدهید قبل از اینکه دانش‌آموزان باهوش جواب را بگویند، دانش‌آموزان ضعیف‌تر با نوشتن چند ده رقم اول با مسأله کشتی بگیرند.

۷ــ این مهمترین تمرین این مبحث است.

ابتدا با صبر و اشتیاق اعداد دانش‌آموزان و نام اعداد را روی تابلو بنویسید.

سپس بگویید:

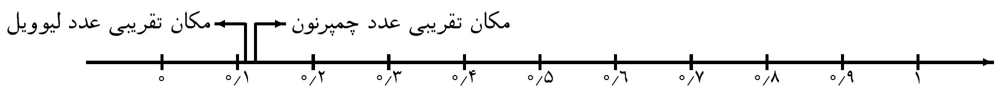
«فکر نکنید که نوشتن عددی زیبا باعث شهرت لیوویل یا چمپرنون شده است. این عدد (عدد زیر) هم زیباست ولی باعث شهرت نویسنده و کاشفش نشده است؟

۰٫۱۰۲۰۳۰۴۰۵۰۶۰۷۰...

عدد لیوویل به یک سؤال بسیار مهم در ریاضیات پاسخ داد. عدد چمپرنون هم همین‌طور. اما سؤالی که عدد چمپرنون به آن پاسخ داده بود، کم اهمیت‌تر از سؤال عدد لیوویل بود. به همین دلیل امروزه در بین ریاضی‌دان‌ها نام «لیوویل» پرآوازه‌تر از نام «چمپرنون» است. شهرت ریاضی با عجز و لابه به‌دست نمی‌آید. ریاضیات بی‌رحم است و ریاضی‌دانان شهیر کم.»

تابلو را کاملاً پاک کنید. سپس یک محور اعداد بکشید.

؟ مکان تقریبی عدد لیوویل و چمپرنون را روی این محور اعداد مشخص کنید.



اجازه بدهید یک دانش‌آموز پاسخ را روی محور مشخص کند. سپس بگویید:

«هزاران سال همه‌ی انسان‌ها مکان عدد لیوویل را می‌دیدند ولی او آن را از محور اعداد بیرون کشید؛ و هزاران عدد نامکشوف در این خط هست که هنوز بیرون کشیده نشده‌اند. برای یک کشف ریاضی نیازی به رفتن به مریخ یا کاوییدن اعماق هفت دریا نیست! ریاضی در همین نزدیکی‌هاست!»

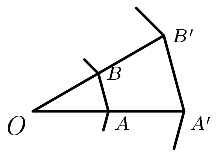
اگر پس از تدریس این مبحث دانش‌آموزانی پیدا شدند که با برق چشمانشان به محور اعداد نگریستند و به عظمتی در این پدیده (محور اعداد) اعتقاد پیدا کردند، یک تدریس عالی داشته‌اید!

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۱۶ و صفحه‌ی ۱۷]]

درباره‌ی پی

۱ــ الف) چون شکل متقارن است، با n تا زاویه‌ی $\widehat{AOB}$ می‌شود زاویه‌ی ۳۶۰° ساخت. پس اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{AOB}$، $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.

ب) مطابق شکل، مرکزها و یک محور تقارن از دو n ضلعی منتظم را روی هم قرار می‌دهیم.



$$\left.\begin{array}{l} \text{متساوی الساقین:}\quad \overset{\triangle}{AOB} \quad \text{و} \quad \overset{\triangle}{A'OB'} \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'} \end{array}\right\} \implies \overset{\triangle}{AOB}\sim\overset{\triangle}{A'OB'}$$

$$\implies \frac{AB}{OA}=\frac{A'B'}{OA'} \implies \frac{n}{۲}\times\frac{AB}{OA}=\frac{n}{۲}\times\frac{A'B'}{OA'} \implies \frac{nAB}{۲OA}=\frac{nA'B'}{۲OA'}$$

بنابراین

$$\frac{\text{محیط } n \text{ ضلعی منتظم بزرگ}}{\text{قطر } n \text{ ضلعی منتظم بزرگ}}=\frac{\text{محیط } n \text{ ضلعی منتظم کوچک}}{\text{قطر } n \text{ ضلعی منتظم کوچک}}$$

۲ــ به این نتیجه برسید که

$$\frac{\text{محیط دایره ۳}}{\text{قطر دایره ۳}}=\frac{\text{محیط دایره ۲}}{\text{قطر دایره ۲}}=\frac{\text{محیط دایره ۱}}{\text{قطر دایره ۱}}$$

بنابراین به این نتیجه برسید که

$$\text{عددی ثابت}=\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

ریاضی‌دان‌ها این عدد ثابت را با π نشان می‌دهند. از دانش‌آموزان بخواهید در کادر مستطیل شکل سؤال، عبارت زیر را بنویسید.

$$\pi=\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

۳ــ این تمرین دوره‌ی بسیار سریعی بر نگرش بشری π است. آن را با سهل‌انگاری حل نکنید.

دوره‌ی اول) الف) بین $\frac{۳۱۳}{۱۰۱}$ و $\frac{۳۱۵}{۹۹}$. یعنی تقریباً بین دو عدد ۳٫۰۹ و ۳٫۱۸!

ب) هیچ‌کدام بر دیگری از نظر دقت مزیت نداشت! شاید انسان روزگار باستان ۳٫۱۰ را برمی‌گزید.

دوره‌ی دوم) ب) شوشی‌ها شصتگانی می‌شمردند و می‌نوشتند.

$$۳ \quad ۷' \quad ۳۰'' = ۳ \quad ۷٫۵' = ۳٫۱۲۵$$

دوره‌ی سوم)الف) پاسخ سطحی این است که ۱۵۰ سال قبل از ویت، کاشانی خیلی بهتر از او ارقام اعشاری π را حساب کرده بود.

پاسخ عمیق‌تری به این پرسش این است که «ویت» غربی است و غربی‌ها تاریخ گذشته‌ی خود را با احترام یاد می‌کنند. آن‌ها برای اثبات ریشه و قدمت خود از هر مدرکی استفاده می‌کنند؛ چنین نگاهی برای ما ایرانی‌ها که ریشه و قدمتی هزاران ساله داریم بی‌معنی است. بیایید به گذشته‌ی خود احترام بگذاریم. بیایید درک کنیم که در تاریخ هفت هزار ساله‌ی‌مان تنها سیصد سال است که از گردونه‌ی فن‌آوری دور ماندیم.

ب) رابطه‌ی گرگوری بسیار کند ارقام اعشار $\frac{\pi}{۴}$ را به‌دست می‌دهد.

اجازه بدهید دانش‌آموزان دلایل خود را درباره‌ی مزیت رابطه‌ی گرگوری و والیس توضیح دهند.

پ) وقتی بین این دو کشف ۲۷ سال تفاوت است، حتماً گنگ بودن $\pi^۲$، گنگ بودن π اثبات می‌شود.

۴ــ این مقدار π را غیاث‌الدین جمشید کاشانی نابغه‌ی ایرانی، با کمک ۸۰۵,۳۰۶,۳۶۸ ضلعی منتظم حساب کرده است.

الف)

$\frac{۲۲}{۷} = ۳/۱۴۲$ تا سه رقم اعشار

$\pi = ۳/۱۴۱$ تا سه رقم اعشار

بنابراین $\frac{۲۲}{۷} - \pi$ تقریباً برابر ۰/۰۰۱ است.

$$\begin{array}{r|l} \pi & ۱۰۰ \\ \hline \frac{۲۲}{۷} & x = \frac{۲۲۰۰}{۷\pi} \simeq ۱۰۰/۰۴ \end{array}$$

بنابراین اگر در محاسبه به جای π از $\frac{۲۲}{۷}$ استفاده کنیم، مقدار محیط را ٪۰/۰۴ بیشتر حساب کرده‌ایم. توصیه می‌کنیم از این جایگذاری در بعضی محاسبات استفاده کنید!

ب) چون $\frac{۲۲۰}{۷۰} = \frac{۲۲}{۷}$ دانش‌آموزان می‌توانند اعدادی همچون اعداد زیر را آزمایش کنند.

$$\ldots, \frac{۲۱۹}{۶۹}, \frac{۲۲۰}{۶۹}, \frac{۲۲۱}{۷۰}, \frac{۲۲۱}{۶۹}, \ldots$$

۵ــ الف)

خرد	و	بینش	و	آگاهی	دانشمندان	ره	سرمنزل	توفیق	بما	آموزد
۳	۱	۴	۱	۵	۹	۲	۶	۵	۳	۵

این بیت π را تا ده رقم اعشار معرفی می‌کند.

ب) امروزه «بما» باید به صورت «به‌ما» نوشته شود! بنابراین با نگارش امروزین، این شعر کارایی خود را از دست می‌دهد.

> تنها زمانی «ب» را می‌توان به عنوان پیش‌وند نوشت که «ب» به معنای «دارای» باشد. برای مثال : «بنام» یعنی مشهور، دارای نام. بنابراین «بنام خدا» به معنی «به نام خدا» نیست!

پ) رقم ۳۲ ام اعشار عدد π برابر ۰ است!

از دانش‌آموزان خوش ذوق خود می‌توانید بخواهید شعری فارسی بسرایند تا بیانگر چند رقم اعشاری π باشد. می‌توانید این شعر را برای گروه ریاضی سمپاد ارسال کنید.

۶ــ الف) تعداد ارقام اعشاری π هدیه شده، یک میلیون رقم است!

ب) این پرسش بسیار مهم است. پاسخ‌های ارزشمند دانش‌آموزان را روی تابلو بنویسید. سپس چهار فرضیه‌ی زیر را مطرح کنید. از دانش‌آموزان بخواهید نام چهار فرضیه را در مستطیل‌های قسمت «ب» بنویسند.

فرضیه‌ای مضحک: بیشتر دانستن ارقام اعشاری π، در فن‌آوری باعث دقت بیشتر می‌شود. اگر قطر زمین را با دقت داشته باشیم و بخواهیم طول خط استوای زمین را با خطای یک سانتی‌متر محاسبه کنیم، تنها به نه رقم اعشار π نیاز داریم.

سپس یک موی انسان را نشان دانش‌آموزان بدهید و بگویید:

با کمک ۱۸ رقم اعشار π می‌توانیم محیط دایره‌ای به شعاع زمین تا خورشید را با خطای کمتر از ۰/۰۰۰۱ میلی‌متر حساب کنیم؛ یعنی با خطای کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ قطر موی انسان!

به دانش‌آموزان بگویید در وب‌گاه در «پی بی هیچ فایده»، مطلب شگفت‌آور جالبی وجود دارد.

فرضیه‌ای باطل: با حساب کردن ارقام اعشاری π ممکن است به دوره‌ی گردش برخورد کنیم و نشان دهیم که π گویا است. اگر حدود ۲۵۰ سال پیش بود شاید این فرضیه طرفدارانی داشت ولی اکنون سال‌هاست می دانیم که π گنگ است.

فرضیه‌ای دنیایی: شرکت‌های سازنده رایانه‌های با پردازشگرهای پر سرعت با به چنگ آوردن ارقام اعشار π در زمان کوتاه، ساخته‌های خود را به رخ یکدیگر می‌کشند.

فرضیه‌ای ریاضی: ریاضی‌دان‌ها مسأله‌ای ساخته‌اند به صورت زیر:

به عددی که در نمایش اعشاری‌اش همه‌ی ارقام به نسبت‌های یکسان ظاهر می‌شود، عددی «بِهَنجار» می‌گویند.

برای مثال (۱۲)/۰ عددی بهنجار نیست زیرا نسبت ارقام ۱ و ۲ در این عدد ٪۵۰ است اما نسبت تعداد ارقام دیگر، ٪۰ است.

ریاضی‌دان‌ها با محاسبه‌ی میلیاردی ارقام π می‌خواهند درستی این حدس را آزمایش کنند: π عددی بهنجار است.

آن‌چه تا کنون به‌دست آمده است، نشان می‌دهد که تا ده میلیون رقم اعشار π، هر رقم تقریباً به نسبت ٪۱۰ ظاهر می‌شود.

۷–

؟ کدام یک از اعداد زیر بهنجار است؟

۱) عدد چمپرنون ۲) عدد لیوویل ۳) π ۴) $\sqrt{۲}$

☐ عدد لیوویل بهنجار نیست. هنوز نمی‌دانیم که $\sqrt{۲}$ و π بهنجار هستند. امروزه از عددهای بهنجار معدودی خبر داریم. یکی از آن‌ها عدد چمپرنون است.

هر شهرتی بی‌دلیل نیست: حتی عدد چمپرنون.

اگر کسی را دیدید که شعبده‌بازی می‌کند، تعجب می‌کنید. اما از این باید به شگفت آیید که خداوند چه قدرتی به عقل بشر داده است و در عین حال عقل بشر چقدر ضعیف است! امروزه ثابت شده است که:

«امروزه آدمی می‌داند که تقریباً همه‌ی اعداد بهنجار هستند. با این‌همه از بهنجار بودن تعداد بسیار کمی از اعداد خبر دارد».

انگار در برابر اقیانوسی ایستاده‌ایم اما به سختی می‌توانیم چند قاشق آب برداریم!

برای مطالعه‌ای گران‌بها «(Patterns in pi (part one/two» را بخوانید.

۸— پاسخ این تمرین را به دانش‌آموزان بدهید! تنها پاسخ فرد درست را (آن هم به صورت انفرادی) تأیید کنید.

در زبان انگلیسی به اعداد گویا، «rational numbers»، یعنی «اعداد نسبتی» می‌گویند. همچنین به اعداد گنگ، «irrational numbers»، یعنی «اعداد غیر نسبتی» می‌گویند.

نقاشی داده شده متضمن معنای واژه‌ی گویا و گنگ است. ارقام، انگلیسی است در حالی که برای یک انگلیسی زبان این نقاشی بی‌معنی است! نقاشی زمانی درست می‌شود که ارقام به صورت فارسی در آیند.

〚 تدریس صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰ 〛

〚 تدریس صفحه‌ی ۲۱ 〛

نمادها و زبان ریاضی

۱ — الف) اجازه بدهید که دانش‌آموزان با خواندن این متن تلاش کنند که متن را بفهمند. هر چند که ممکن است فهم حاصل نشود ولی دانش‌آموزان اولاً با قدرت ذهنی ریاضی‌دانان زمان خوارزمی آشنا می‌شوند و ثانیاً به اهمیت ریاضی‌نویسی نمادین پی می‌برند.

ب) منتظر باشید که دانش‌آموزان از متغیر استفاده کنند. البته ممکن است دانش‌آموزی تیزهوش روش جدیدی ارائه دهد؛ روشی که در ریاضی‌نویسی امروزین بدیع و تازه باشد.

پ) «مقدار یک مربع چیست که وقتی پنج برابر شود، چهل برابر جذرِ آن مربع به‌دست آید؟»

به دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانید کتاب «جبر و مقابله»ی خوارزمی را معرفی کنید و یکی از دانش‌آموزان می‌تواند بخشی‌هایی از کتاب را انتخاب کرده و در کلاس بخواند. تأثیر این کتاب در دانش ریاضیات بسیار ژرف و عمیق بود. آنچنان که شاخه‌ی مهمی در ریاضیات امروز، جبر[1] نامیده می‌شود.

۲— الف) پاسخ «۱ یا ۸» است.

ب) پاسخ «۲/۵ یا ۷/۵» است.

فهمیدن این مسأله بسیار سخت‌تر از حل این مسأله‌ها بدون استفاده از نماد متغیری است.

به زبان ریاضی امروزی این دو مسأله چنین حل می‌شوند:

---

[1] algebra

الف) عدد موردنظر را n می‌گیریم. باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم n بر ۹ را به ترتیب با a و b نشان می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$n = 9b + a \quad \Longrightarrow \quad n^2 = (9b+a)(9b+a) = 81b^2 + 9ab + 9ab + a^2 = 9(9b^2 + 2ab) + a^2$$

اما باقی‌مانده‌ی تقسیم n^2 بر ۹ برابر۱ باید باشد. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم a^2 بر ۹ برابر ۱ باید باشد. اما a تنها می‌تواند یکی از اعداد ۰، ۱، ... ، ۸ شود. هریک از این اعداد را جداگانه بررسی می‌کنیم.

a	باقی‌مانده‌ی تقسیم a^2 بر ۹
۰	۰
۱	۱
۲	۴
۳	۰
۴	۷
۵	۷
۶	۰
۷	۴
۸	۱

بنابراین a تنها می‌تواند ۱ یا ۸ باشد.

ب) فرض می‌کنید آن دو قسمت x و y باشند. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 7/5 \ \text{و} \ y = 2/5$$

۳– هدف از این سؤال برجسته کردن و نشان دادن ارزش نمادگذاری‌های ریاضی است. دانش‌آموز در تمرین‌های ۱ و ۲ به اهمیت نمادگذاری پی برده است و اکنون می‌خواهیم به او نشان دهیم که نمادگذاری ریاضی امروز، میراثی چند صد ساله است.

الف)

ب – ۷   ز – ۶   ح – ۵   خ – ۴   پ – ۳   ذ – ۲   ج – ۱

د – ۱۴   چ – ۱۳   ت – ۱۲   الف – ۱۱   ر – ۱۰   ث – ۹   ژ – ۸

سعی کنید که در هر سال تشخیص دهید که از چه چیزی به جای چه نمادی استفاده شده است.

ب) با بررسی سال‌های داده شده و نگاه به سیر تاریخی نگارش ریاضی، نتیجه بگیرید که ادعا درست است.

سؤال جالبی که اکنون می‌توان مطرح کرد این است که «این بین‌المللی شدن زبان نگارش ریاضی یک امر سلیقه‌ای است یا یک سنت ریاضی؟» به این سؤال یک بشر محصور در زمان نمی‌تواند پاسخ دهد!

⟦ تدریس صفحه‌های ۲۲ تا ۲۷ ⟧