فصل ۱

حساب و مجموعه‌های اعداد

فهرست

مجموعه‌ی عددهای طبیعی

[[تدریس صفحه‌ی ۱ تا انتهای کار در کلاس]]

۱- کدامیک از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, \dots, ۱۵۱۴۹\}$$
$$B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$
$$C = \left\{۱, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \frac{۱}{۸۱}, \dots\right\}$$
$$D = \{۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, \dots\}$$

E = مجموعه‌ی همه‌ی اتم‌های کره‌ی زمین

F = مجموعه‌ی اعداد بین ۹ و ۹/۱

$$G = \left\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, -\frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۶}, \dots\right\}$$

قبل از شروع این تمرین با دانش‌آموزان درباره‌ی سؤال کاردرکلاس صفحه‌ی ۱ (کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد طبیعی را بنویسید.) بحث کنید. اینکه چرا بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی مشخص نیست. ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید تا مجموعه‌هایی مثال بزنند که هم کوچک‌ترین و هم بزرگ‌ترین عضو آن‌ها مشخص نباشد و سپس از آن‌ها بخواهید مجموعه‌هایی مثال بزنند که فقط کوچک‌ترین عضو آن‌ها مشخص نباشد و به این ترتیب بحث را به سمت تعریفی برای مجموعه‌های بی‌پایان ببرید. توجه کنید که لازم نیست دانش‌آموزان، تعریف کاملاً ریاضی مجموعه‌های نامتناهی (بی‌پایان) را فرا بگیرند. رسیدن به تعریف زیر برای مجموعه‌های نامتناهی کافیست.

مجموعه‌ی نامتناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضایش محدود باشد.

تعریف فوق اساساً یک تعریف مناسب نمی‌باشد زیرا در آن کلمه‌ی «محدود» دقیق، تعریف نشده است. تعریف دقیق‌تری برای این مجموعه‌ها موجود می‌باشد که دانش‌آموزان در اول دبیرستان با آن آشنا می‌شوند.

A و B مجموعه‌هایی متناهی هستند اما C یک مجموعه‌ی نامتناهی است. در مورد مجموعه‌ی D نکته‌ی مهمی وجود دارد: این مجموعه تنها ۲ عضو دارد ! پس متناهی است. مجموعه‌ی E نیز یک مجموعه‌ی متناهی است زیرا تعداد اعضایش محدود است و نمی‌توان گفت که تعداد اتم‌های کره زمین نامحدود است! مجموعه‌ی F یک مجموعه‌ی نامتناهی است زیرا در این مجموعه تمام اعداد اعشاری و کسری و ... قرار می‌گیرند، مثل ۹/۰۱ و ۹/۰۲ و... . مجموعه‌ی G نیز یک مجموعه‌ی نامتناهی است،گرچه این مجموعه به تدریج به یک نزدیک می شود ولی تعداد عضوهای آن نامحدود است.

۲- پنج مجموعه‌ی نامتناهی معرفی کنید؟

پس از حل این مسأله، از دانش‌آموزان بخواهید هر کدام مجموعه‌های خود را بخوانند. سپس از هر یک از آن‌ها بخواهید مجموعه‌ای نامتناهی بنویسد که ساختار آن با ساختار مجموعه‌های معرفی شده‌ی قبلی متفاوت باشد.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۱]]

۳- بسته بودن یک مجموعه نسبت به ضرب را تعریف کنید.

از آنچه در کتاب در انتهای صفحه آمده است، استفاده کنید و تعریف بسته بودن یک مجموعه نسبت به جمع را برای دانش‌آموزان بیان کنید.

مجموعه‌ی A را نسبت به جمع « بسته » می‌گوییم، هرگاه مجموع هر دو عضو این مجموعه در خود آن مجموعه باشد.

مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به جمع بسته است زیرا مجموع هر دو عضو دلخواه در مجموعه هست. مثلاً :

$$۴,۷ \in \mathbb{N} \rightarrow (۴+۷) \in \mathbb{N}$$

۴- بسته بودن مجموعه‌های زیر را نسبت به جمع و ضرب بررسی کنید؟

مجموعه	بسته بودن نسبت به جمع	بسته بودن نسبت به ضرب
مجموعه‌ی اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$	✔	✔
مجموعه‌ی اعداد زوج $(\mathbb{E})$		
مجموعه‌ی اعداد فرد $(\mathbb{O})$		
$\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\dots\right\}$		
$\{-۱,۰,۱\}$		
$\{۰,-۱\}$		
$\{۱,۲,۴,۸,\dots\}$		
مجموعه‌ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$		

[تدریس صفحه‌های ۲ و۳]

۵- عددهای اول شبیه « اتم » های یک مولکول می باشند؛ زیرا می‌توان همه‌ی عددهای طبیعی بزرگتر از یک را با استفاده از آن‌ها ساخت.

عدد ۱۸۰ را در نظر بگیرید. شکی نیست که این عدد مرکب است زیرا مثلاً می‌توان آن را به شکل ۱۰×۱۸ نوشت. اما هر یک از اعداد ۱۸ و ۱۰ هم خودشان مرکب‌اند: ۳×۶ = ۱۸و ۵×۲ = ۱۰ و در ضمن ۳×۲ = ۶، پس

۱۸۰ = ۱۸×۱۰ = ۶×۳×۲×۵ = ۲×۳×۳×۲×۵ = ۲×۲×۳×۳×۵

این تجزیه‌ی کامل عدد ۱۸۰ به اتم‌های سازنده‌اش (اعداد اول) می‌باشد.

۱۸۰

۲ ۲ ۳ ۳ ۵

حالا شما عدد طبیعی ۴۲۰ را به اتم‌های سازنده‌اش یا همان اعداد اول تجزیه کنید.

۴۲۰ = ۴۲×۱۰ = ۶×۷×۲×۵ = ۲×۳×۷×۲×۵ = ۲×۲×۳×۵×۷

factor(420)→ $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

پس از حل مثال از دانش‌آموزان سؤال کنید:« اگر سعی می‌کردیم عدد ۱۸۰ را به طریق دیگری تجزیه کنیم چه پیش می‌آمد؟ مثلاً اگر تجزیه را با ۱۵×۱۲=۱۸۰ شروع می‌کردیم چه می‌شد؟ آیا به اعداد اول دیگری می‌رسیدیم؟» از دانش‌آموزان بخواهید این موضوع را بررسی کنند و به یکتا بودن «تجزیه‌ی اعداد طبیعی به اعداد اول» پی ببرند.

ممکن است برای دانش‌آموزان، یکسان بودن تجزیه‌ها واضح باشد اما اثباتش آسان نیست، این حکم را «قضیه‌ی بنیادی حساب» می‌نامند. این قضیه روی وب گاه اثبات شده است.

بر روی وب گاه، نرم‌افزاری کاربردی برای محاسبات ریاضی به نام « **MicroSoft Math** » موجود می باشد. از دانش‌آموزان بخواهید آن را باربرداری[۱] کنند. در این نرم افزار با استفاده از دستور **factor** یک عدد به اعداد اول تجزیه می گردد.

مثلاً با وارد کردن از دستور **factor (180)** ، نرم‌افزار جواب $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ را خواهد داد که یعنی :

$۱۸۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵$

چرا عدد ۱ عدد اول نیست؟

مدتی به دانش‌آموزان وقت بدهید تا درباره‌ی‌این موضوع فکر کنند و سپس نظرات خود را در کلاس مطرح کنند.

اگر ۱ را عددی اول فرض کنیم، در این صورت تجزیه‌ی‌عددی مثل ۱۸۰ به اعداد اول به تمام صورت‌های متمایز زیر ممکن می‌شود. در واقع دیگر نمی‌توانیم بگوییم ۱۸۰ تجزیه‌ای‌یکتا دارد و ریاضی‌دانان اصلاً به چنین موضوعی علاقه ندارند. ریاضی‌دانان دوست دارند تجزیه‌ی‌اعداد طبیعی به اعداد اول یکتا باشد.

[۱] download

$$
\begin{aligned}
۱۸۰ &= ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \\
&= ۱ \times ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \\
&= ۱^۲ \times ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \\
&= ۱^۳ \times ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

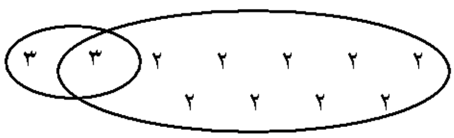
کاربرد تجزیه

۱- آیا ۵×۲^۹ بر ۸ بخش‌پذیر است؟

بله؛ چون $۲^۳ = ۸$ و پنج تا ۲ در تجزیه‌ی عدد ۵×۲^۹ وجود دارد.

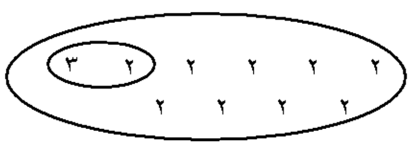
۲- آیا ۳×۲^۹ بر ۹ بخش‌پذیر است؟

خیر؛ چون $۳ \times ۳ = ۹$ و فقط یک ۳ در تجزیه‌ی ۳×۲^۹ وجود دارد.



۳- آیا ۳×۲^۹ بر ۶ بخش‌پذیر است؟

بله؛ چون $۳ \times ۲ = ۶$ و در تجزیه‌ی ۳×۲^۹ هر دو عدد اول ۳ و ۲ وجود دارند.



٤- اگر یک عدد طبیعی به ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد، آیا بر ۱۲ نیز بخش‌پذیر می‌باشد؟

بله؛ زیرا عدد مورد نظر بر ۴ یعنی ۲×۲ بخش‌پذیر است. پس در تجزیه‌ی‌آن حداقل دو تا ۲ وجود دارد و بر ۳ نیز بخش‌پذیر است پس در تجزیه‌ی‌آن حداقل یک ۳ نیز وجود دارد؛ بنابراین عدد موردنظر بر $۳ \times ۲ \times ۲$ بخش‌پذیر است.

٥- اگر یک عدد طبیعی به ۶ و ۴ بخش‌پذیر باشد، آیا بر ۲۴ نیز بخش‌پذیر است؟

خیر؛ مثلاً اعداد ۱۲ و ۳۶ و ۶۰ به ۴ و ۶ بخش‌پذیرند اما به ۲۴ بخش پذیر نیستند. علت این اتفاق را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

عدد طبیعی مورد نظر بر ۴ بخش‌پذیر است پس دو تا ۲ در تجزیه‌ی عدد وجود دارد.

عدد طبیعی مورد نظر بر ۶ نیز بخش‌پذیر است پس ۳ و ۲ در تجزیه‌ی عدد وجود دارند.

پس می‌توان مطمئن بود که تجزیه‌ی عدد شامل دو تا (و نه الزاماً سه تا) عدد ۲ و یک عدد ۳ می‌باشد. پس تنها می‌توان گفت قطعاً عدد بر $۱۲ = ۳ \times ۲ \times ۲$ بخش‌پذیر است ولی الزاماً بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست.

٦- عدد A بر ۳ بخش‌پذیر نیست، آیا ممکن است پنج برابر آن عدد ($۵A$) بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

خیر.زیرا در تجزیه‌ی $۵A$ عدد اول ۳ موجود نمی‌باشد.

٧- عدد A زوج است، آیا $۳A$ بر ۶ بخش‌پذیر است؟

بله.چون A زوج است پس در تجزیه‌ی $۳A$، عدد ۲ موجود می باشد. بنابراین در تجزیه‌ی $۳A$ اعداد اول ۲ و ۳ موجودند ، که یعنی عدد $۳A$ بر $۶ = ۳ \times ۲$ بخش‌پذیر است.

برای یافتن سؤالاتی به سبک سؤالات ۸ تا ۱۴، می‌توانید از فصل ۳ کتاب محافل ریاضی انتشارات فاطمی استفاده کنید.

[[تدریس صفحه‌های ۴ و ۵ تا ابتدای کار در کلاس]]

الک اراتستن

۱- وقتی بخواهند دانه‌های گندم را از اضافه‌های آن جدا کنند از الک خاصی استفاده می‌کنند که سوراخ‌های آن با اندازه‌های دانه‌های گندم متناسب باشد. اراتستن، ۲۰۰۰ سال پیش، روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود را ارائه کرد. او روی مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را خط نمی‌کشید، بلکه آن‌ها را با یک چوب کوچک، سوراخ می‌کرد مثل اینکه عددهای غیر اول را، از سوراخ‌های الک بیرون می‌کرد و تنها عددهای اول را نگاه می‌داشت.

اژدر که خود را یکی از نوادگان اراتستن معرفی کرده است، معتقد است در روش جدّش، رازهایی موجود می‌باشد. او می‌گوید یکی از این رازها مربوط به آخرین عدد اولی است که مضاربش در الک حذف می‌شود. مثلاً در الک اعداد ۱ تا ۸ آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورند عدد ۲ می‌باشد. او برای کشف این راز دو جدول زیر را تهیه کرد. جداول اژدر را کامل کنید.

عدد آخر الک	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵
جذر تقریبی عدد آخر الک	۲/۸	۳	۳/۱	۳/۳	۳/۴	۳/۶	۳/۷	۳/۸	۴	۴/۱	۴/۲	۴/۳	۴/۵	۴/۶	۴/۷	۴/۸	۴/۹	۵
آخرین عدد اول استفاده‌شده	۲				۳				۳				۳					

عدد آخر الک	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	۱۲۱
جذر عدد آخر الک	۳	۴	۵						
آخرین عدد اول استفاده‌شده	۳	۳							

الف)در جدول اول، آخرین عدد اول استفاده شده در چه ستون‌هایی تغییر می‌کند؟

ب) در جدول اول، ستون بعدی که ردیف سوم روی آن تغییر می‌کند چند است؟

پ) در جدول دوم، عدد بعدی که، ستونش هاشور خواهد خورد چه عددی می‌باشد؟

ت) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان آخرین عدد اول استفاده شده در الک و عدد آخر الک بیابید؟

برای حل این سؤال دانش‌آموزان می بایست برای هر ستون یک الک بنویسند ، و در صورت کمبود وقت تنها الک اعداد ۱ تا ۱۲۱ را بنویسند.

الف) ستون‌های مربوط به عدد ۹ و ۲۵

توجه دانش‌آموزان به تغییرات ردیف آخر ، در ستون‌های مربوط به عدد ۹ و ۲۵ جلب کنید و اینکه

$۹ = ۳^۲ , ۲۵ = ۵^۲$

ب) $۴۹ = ۷^۲$

پ)مربع عدد اول بعدی یعنی $۱۶۹ = ۱۳^۲$

ت) می‌توان نتیجه‌گیری کرد که آخرین عدد اول استفاده‌شده برابر است با بزرگ‌ترین عدد اولی که مربعش در الک موجود باشد.

در حل این مسأله ، اجازه دهید دانش‌آموزان حدس‌های مختلف خود را بیان کنند و برای یافتن رابطه‌ی مورد نظر بحث کنند. شاید دانش‌آموزی بتواند بیان بهتری برای نتیجه‌گیری قسمت «ت» بیابد.

۲- قاعده‌ای برای یافتن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا n بیابید؟

آخرین عدد اول استفاده‌شده در الک ۱ تا n برابر بزرگ‌ترین عدد اول کوچکتر یا مساوی از $\sqrt{n}$ می‌باشد.

مثلاً آخرین عدد استفاده‌شده در الک اعداد یک تا ۱۹۹ برابر است با بزرگ‌ترین عدد اول کوچکتر از $\sqrt{199} \approx 14/1$ که برابر عدد ۱۳ می باشد.

در این مسأله نیز اجازه دهید دانش‌آموزان به بیان روش‌های خود و به بیان خود بپردازند. هر قاعده‌ای که بتوان به‌وسیله‌ی آن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا n را یافت مناسب می‌باشد.

۳- هژبر و هژیر یک بازی اختراع کرده‌اند. آن‌ها اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۰ را نوشته‌اند و طبق روش الک اراتستن اعداد غیر اول را به نوبت حذف می‌کنند . هر کس عدد ۴۵ را حذف کند برنده‌است.

هژبر بازی را شروع می‌کند و ۱ را حذف می‌کند.

هژیر عدد ۴ را حذف می‌کند.

هژبر ۶ را حذف می‌کند و این کار ادامه می‌یابد. به نظر شما چه کسی برنده است؟

🕴 اجازه دهید دانش‌آموزان این بازی را سر کلاس انجام دهند و سپس به حل آن بپردازند.

☐ می‌بایست تعداد اعدادی که تا ۴۵ حذف می‌شوند را به‌دست آوریم.

ابتدا مضارب ۲ حذف می‌شوند که تعداد آن‌ها ۲۹ تا می‌باشد (۲ حذف نمی‌شود) سپس مضارب عدد ۳ ، حذف می‌شوند (تا عدد ۴۵ و غیر از ۶ و ۱۲ و ۱۸ و ... که قبلاً حذف شده‌اند)که تعداد آن‌ها ۷ تا می‌باشد.

در واقع تا ۴۵ تعداد اعدادی که حذف می‌شوند به همراه عدد ۱ برابر است با ۱+۷+۲۹=۳۷ که چون ۳۷ عددی فرد است و هژبر بازی را آغاز کرده، پس خودش بازی را می برد.

🕴 برای فهم حل این سؤال ، آن را در حالت‌های دیگر مثلاً غربال ۱ تا ۳۰ و ... مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید برای فهمیدن اینکه چه کسی برنده می‌شود از جدول و یافتن الگو استفاده کنند.

۴- هژبر و هژیر بازی خود را کمی پیشرفته‌تر کرده اند! در بازی جدید باز هم الک اراتستن اعداد بین ۱ تا ۶۰ استفاده می‌شود اما کسی که آخرین عدد را حذف کند برنده است! به نظر شما کدام عدد آخرین عدد حذف شده خواهد بود؟ و اگر هژیر بازی را شروع کند چه کسی برنده خواهد شد؟

☐ **آخرین عدد اول که مضارب آن در الک بین ۱ تا ۶۰ خط می‌خورند عدد ۷ است. برخی از مضارب ۷ مثل ۲×۷و ۳×۷و۵×۷ قبلاً خط خورده‌اند اما ۷×۷همچنان باقیست پس آخرین عدد حذف شده ۴۹ خواهد بود.**

برای حل قسمت دوم کافیست تعداد اعداد غیر اول بین ۱ تا ۶۰ را به‌دست آوریم و چون اعداد اول بین ۱ تا ۶۰، ۱۷ می‌باشد پس تعداد اعداد غیر اول از یک تا ۶۰ برابرست با ۴۳=۱۷-۶۰ که چون ۴۳ عددی فرد است ، هژیرکه بازی را شروع کند حتماً بازی را می‌برد.

۵- در بازی بین هژیر و هژبر ۴۱ امین عددی که خط می‌خورد کدام عدد است؟

تعداد مضارب ۲ که خط می‌خورند= ۲۹ تا

تعداد مضارب ۳ که خط می‌خورند= ۱۰ تا

تا پایان این مرحله ۴۰=۱+۱۰+۲۹ عدد (عدد ۱ هم خط خورده است) خط خورده‌اند و عدد بعدی ۴۱ امین عدد خواهد بود.پس اولین مضرب ۵ که خط نخورده است، جواب سؤال می‌باشد و چون ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ قبلاً خط خورده‌اند ، جواب ۲۵ می باشد.

۶- الک اراتستن، روش خوب و قابل اعتمادی می‌باشد و برای نیازهای کوچک، همیشه می‌توان از همان «الک دستی اراتستن» استفاده کرد. این روش هم در گذر تاریخ به تدریج پیشرفت‌هایی کرده است و روش جستجوی عددهای اول ساده‌تر شده است. مثلاً یک دانشجو درسال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام جنگ جهانی دوم، یکی از این « الک »های جدید را درست کرده است که آن را بررسی می کنیم:

به اعداد زیر دقت کنید. آیا رابطه‌ای میان اعداد این جدول مشاهده می کنید؟

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	...

۱۹ ۳۲ ۴۵ ۵۸ ۷۱ ۸۴ ...

اگر عددی مثل n در این جدول وجود داشته باشد، عدد ۲n+۱ غیر اول است، و اگر عدد n، در جدول وجود نداشته باشد ۲n+۱ عددی است اول.

مثلاً:

۱) در جدول عدد n=۳ وجود ندارد، بنابراین ۲n+۱=۷ عدد اول است.

۲) در جدول عدد n=۵ وجود ندارد، بنابراین ۲n+۱=۱۱ عدد اول است.

۳) عدد n=۶ هم در جدول نیست، بنابراین ۲n+۱=۱۳ عدد اول است.

۴) در جدول عدد n=۷ وجود دارد، بنابراین ۲n+۱=۱۵ عددی است غیر اول و غیره.

اگر اعدادی را که در این جدول نیستند را دو برابر کرده با یک جمع کنیم، می‌توانیم تمام اعداد اول را به‌دست آوریم. با این روش ۳۰ عدد اول به‌دست آورید.

در هر سطر و ستون این «الک» اعداد با روند مشخصی رشد می‌کنند. مثلاً در سطر اول این الک اعداد ... ,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹، سه‌تا سه‌تا افزایش می‌یابند و این در حالیست که در سطر دوم افزایش اعداد ۵تا ۵تا و در سطر سوم ۷تا ۷تا می‌باشد که این روند برای سطرهای بعدی نیز وجود دارد. نکته‌ی جالب درباره‌ی این الک، اینست که ستون‌های این جدول در واقع همان سطرهای جدول هستند! به ترتیب اعدادی که در این جدول نیستند عبارتند از:

۱۸	**۱۵**	**۱۴**	**۱۱**	**۹**	**۸**	**۶**	**۵**	**۳**	**۲**	**۱**
۳۹	**۳۶**	**۳۵**	**۳۳**	**۳۲**	**۳۰**	**۲۹**	**۲۶**	**۲۳**	**۲۱**	**۲۰**

...	۴۸	۴۶	۴۴	۴۳	۴۱

اگر این اعداد را دوبرابر کرده و با یک جمع کنیم به جدول اعداد اول می‌رسیم:

۳۷	۳۱	۲۹	۲۳	۱۹	۱۷	۱۳	۱۱	۷	۵	۳
۷۹	۷۳	۷۱	۶۷	۶۵	۶۱	۵۹	۵۳	۴۷	۴۳	۴۱
					...	۹۷	۹۳	۸۹	۸۷	۸۳

علت کارایی و صحت این روش را در کلاس به بحث بگذارید تا دانش‌آموزان نظرات خود را درباره‌ی این روش بدهند. دانش‌آموز علاقه‌مند نسبت به کشف علت صحت این الک ترغیب کنید. اینکه اساساً چرا این الک صحیح کار می‌کند.

روش دیگری برای یافتن اعداد اول روی وب گاه موجود می‌باشد که دانش‌آموزان می‌توانند از آن استفاده کنند.

[[تدریس صفحه‌های ۵ و ۶]]

کاربرد اعداد اول

۱- آیا اعداد زیر اول هستند؟ چرا؟

الف) $۱ + ۲ + ۳ + ... + ۶۰۳$

ب) ۲۰۰۹

پ) $(۱\times۲\times۳\times...\times۲۰)+۱۷$

ت) $۲^{۵۰}+۱$

ث) $۳^{۱۷}+۱$

الف) خیر، زیرا مجموع اعداد ۱ تا ۶۰۳ زوج است و بزرگتر از ۲ (تنها عدد زوج اول) است. برای بررسی این موضوع کافیست به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مجموع اعداد زوج بین ۱ تا ۶۰۳ عددی زوج است زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج حتماً عددی زوج است.

تعداد اعداد فرد از ا تا ۶۰۲ نیز ۳۰۱ عدد است که با عدد ۶۰۳ می‌شود ۳۰۲ عدد فرد. و چون مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است پس مجموع ۳۰۲ عدد فرد، حتماً عددی زوج است. بنابراین مجموع اعداد زوج و فرد ۱ تا ۶۰۳ خود عددی زوج است.

۶۰۳ + ... + ۲ + ۱=«مجموع اعداد فرد ۱ تا ۶۰۳ +مجموع اعداد زوج از ۱ تا ۶۰۳»= عددی زوج+ عددی زوج= عددی زوج

ب) خیر، ۲۰۰۹ بر ۷ بخش‌پذیر است.

پ) خیر، زیرا ضرب اعداد ۱ تا ۲۰ بر ۱۷ بخش‌پذیر است و اگر به این عدد که بر ۱۷ بخش‌پذیر است ۱۷ یا مضارب آن را اضافه یا کم کنیم همچنان بر ۱۷بخش‌پذیر می‌ماند.

ت) خیر، زیرا یکان $۲^{۵۰}$ برابر ۴ می‌باشد که اگر با یک جمع شود می‌توان گفت یکان $۱ + ۲^{۵۰}$ عدد ۵ است و عدد $۱ + ۲^{۵۰}$ بر ۵ بخش‌پذیر است. درضمن این عدد بر ۱۰۲۵ نیز بخش‌پذیر می‌باشد.

ث) خیر، زیرا مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

۲- چنگیز دانش‌آموز سوم راهنمایی است. او می‌داند که اعداد اول کاربردهای بسیاری دارند. او در یک وب گاه معتبر خوانده است که ارتش‌های کشورهای مختلف از اعداد اول برای رمزنگاری استفاده می‌کنند و هر کشوری که عدد اول بزرگتری در اختیار داشته باشد که دیگر کشورها هنوز از آن مطلع نباشند دارای قدرت فوق‌العاده‌ای در رمز کردن اطلاعات خود خواهد بود. او در این وب گاه همچنین خواند که اعداد اول بزرگ قیمت زیادی دارند و می‌توان آن‌ها را فروخت.

چنگیز بعد از خواندن این مطلب شروع به یافتن بزرگ‌ترین عدد اول کرد. او می خواهد عدد اولی از کنار هم قرار دادن اعداد اول متوالی به‌دست آورد مثلاً ۲۳۵۷۱۱۱۳۱۷۱۹۲۳. اما او می‌داند برای هر کشفی باید پله‌پله و آرام‌آرام حرکت کند. چنگیز در حالی‌که زیر لب زمزمه می‌کرد: «رهرو آن نیست که گه تند و گهی خسته رود ، رهرو آنست که آهسته و پیوسته رود» کار جستجوی خود را با عدد ۲۳۵۷ شروع کرد.

آیا عدد ۲۳۵۷ اول است؟ ۲۳۵۷۱۱ چطور؟

 کافی است الک اراتستن را به صورت فرضی برای این عدد بنویسیم! به صورت ذهنی ابتدا مضارب ۲ را خط می‌زنیم مسلماً ۲۳۵۷ خط نمی‌خورد. سپس مضارب ۳ را خط می زنیم. ۲۳۵۷ خط نخواهد خورد زیرا به ۳ بخش‌پذیر نیست. حال مضارب ۵ را خط می‌زنیم. ۲۳۵۷ بر ۵ بخش‌پذیر نیست پس خط نمی‌خورد. در مرحله‌ی بعد مضارب ۷ خط می‌خورند کافیست ۲۳۵۷ را بر ۷ بخش کنیم تا متوجه شویم که بر ۷ بخش‌پذیر نیست. حال این را کافیست تا بزرگ‌ترین عدد اول کوچکتر از $\sqrt{۲۳۵۷}$ ۴۸ که ۴۷ است ادامه دهیم تا مطمئن شویم عدد ۲۳۵۷ قطعاً عددی اول است.

قسمت دوم سؤال تمرینی برای دانش‌آموزان می‌باشد که در آن سختی به‌دست آوردن یک عدد اول را خواهند چشید! البته ۲۳۵۷۱۱ یک عدد اول نیست و بر ۷ و ۱۵۱ و ۲۲۳ بخش‌پذیر است. برای تمرین بیشتر از دانش‌آموزان بخواهید بزرگ‌ترین عدد اولی که می توانند با کنار هم قرار دادن اعداد متوالی فرد به‌دست آورند را برای جلسه‌ی بعد بیاورند!

در بر روی وب گاه، نرم‌افزاری کاربردی برای محاسبات ریاضی به نام« **MicroSoft Math**» موجود می باشد. از دانش‌آموزان بخواهید آن را باربرداری کنند. در این نرم افزار با استفاده از دستور« **isPrime** » اول بودن یک عدد بررسی می گردد.

مثلاً با وارد کردن از دستور **isPrime (23)** ، نرم‌افزار پیغام **True** خواهد داد که یعنی ۲۳ اول است و مثلاً با وارد کردن از دستور **isPrime (9)**، نرم‌افزار پیغام **False** خواهد داد که یعنی ۹ اول نیست.

در ضمن می‌توانید از اینترنت و وب‌گاه هایی که مربوط به تست اول بودن یک عدد هستند استفاده کنید مثلاً

http://www.usi.edu/science/math/prime.html

http://www.math.com/students/calculators/source/prime-number.htm

http://www.amblesideprimary.com/ambleweb/primenumber/primecheck.htm

۳- چنگیز این بار می‌خواهد از جمع چند عدد مربعی یک عدد اول بیابد. به همین دلیل جدولی مانند زیر درست کرده است. جدول چنگیز را کامل کنید و درباره‌ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت کلی $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ تصمیم بگیرید؟

اول است یا مرکب	حاصل		عدد
اول است.	$\frac{2\times(2+1)\times(2\times2+1)}{6}$	۵	1^2+2^2
مرکب است.	$\frac{3\times(3+1)\times(2\times3+1)}{6}$	۱۴	$1^2+2^2+3^2$
	$\frac{4\times(4+1)\times(2\times4+1)}{6}$		$1^2+2^2+3^2+4^2$
			$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$
			$1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2$
			$1^2+2^2+3^2+\ldots+7^2$
			$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

آیا می توان درباره‌ی‌اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت کلی $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ نظری داد؟

در این سؤال هدف آشنایی دانش‌آموز با روند بررسی یک مسأله در حالت کلی است. بدین ترتیب که ابتدا مسأله را برای مثال‌های عددی مختلف حل کرده و سپس درباره‌ی حالت کلی نظر بدهد.

دانش‌آموز در حل این سؤال به فرمولی برای جمع اعداد مربعی خواهد رسید.

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲=\frac{n\times(n+۱)\times(۲\times n+۱)}{۶}$$

با نگاه کردن به جدول ، دانش‌آموزان می توانند حدس صحیحی نسبت به اول یا مرکب بودن مجموع اعداد مربعی بدهند. مجموع اعداد مربعی بزرگتر از ۲ همواره مرکب است.

در این سؤال هدف تنها فراگیری روش حدس زدن با استفاده از جدول می باشد. اثبات علت این‌که مجموع اعداد مربعی بزرگتر از ۲ همواره مرکب است در این سؤال خواسته نشده است.

۴- روح‌انگیز نیز به دنبال یک عدد اول است. او می‌خواهد ۵ عدد متوالی بیابد که مجموع آن‌ها اول باشد. او جدولی مانند جدول زیر رسم کرده است. به او در پر کردن جدول کمک کنید. آیا او موفق به یافتن این ۵ عدد می‌شود؟

اول یا مرکب	حاصل	اعداد
مرکب	۱۵	۱+۲+۳+۴+۵
		۲+۳+۴+۵+۶
		۳+۴+۵+۶+۷
		۴+۵+۶+۷+۸
		۵+۶+۷+۸+۹
		۶+۷+۸+۹+۱۰
		۷+۸+۹+۱۰+۱۱

 اولین عدد را a فرض می کنیم. بدین ترتیب اعداد بعدی عبارتند از $a+1, a+2, a+3, a+4$ و مجموع این ۵ عدد برابرست با: $a+a+1+a+2+a+3+a+4=5a+10$ که حتماً بر ۵ بخش‌پذیر است و اول نمی‌تواند باشد.

فرمول‌هایی برای اعداد اول

۱- برای کشف رازهای اعداد اول در طول تاریخ سعی و تلاش‌های بسیاری شده است. بسیاری از ریاضی‌دانان به دنبال یافتن رابطه‌ای میان اعداد اول بوده‌اند و فرمول‌های بسیاری در این زمینه تولید شده‌اند یکی از این فرمول‌های جالب، مربوط به اویلر ریاضیدان معروف سوئیسی می‌باشد.

فرمول اویلر: ای فرزند، راز یافتن یک عدد اول اینک پیش روی توست. یک عدد طبیعی انتخاب کن. آن را با مربعش و عدد ۴۱ جمع کن. حاصل این مجموع حتماً عددی اول است.

جدولی مانند زیر تشکیل داده و فرمول اویلر را برای اعداد ۱ تا ۲۰ بررسی کنید.

عدد	فرمول اویلر	حاصل	اول است ؟
۱	$۱+۱^{۲}+۴۱$	۴۳	✔
۲	$۲+۲^{۲}+۴۱$	۴۷	✔
۳	$۳+۳^{۲}+۴۱$	۵۳	✔
۴	$۴+۴^{۲}+۴۱$	۶۱	✔
۲۰	$۲۰+۲۰^{۲}+۴۱$	۴۶۱	

 بعد از آنکه دانش‌آموزان فرمول اویلر را برای اعداد مختلف بررسی کردند از آن‌ها بخواهید عدد۴۰ و ۴۱ را در فرمول اویلر قرار دهند: $۴۱+۴۰^{۲}+۴۰ , ۴۱+۴۱^{۲}+۴۱$ که به وضوح این دو مجموع بر ۴۱ بخش‌پذیر هستند و

بنابراین مرکب هستند. این بدین معناست که فرمول اویلر یک فرمول کامل نمی‌باشد. از دانش‌آموزان بخواهید اعداد دیگری مثال بزنند که فرمول اویلر نسبت به آن‌ها ناتوان باشد.

بعد از حل این سؤال، از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی اهمیت کشف یک فرمول برای اعداد اول صحبت کنند و در کتاب‌ها و یا وب گاه‌های اینترنتی درباره‌ی‌فرمول‌های مختلف اعداد اول جستجو کنند.

فرمولی برای یافتن اعداد اول روی وب گاه موجود می‌باشد. از دانش‌آموزان بخواهید برای هفته‌ی آینده به کمک آن یک عدد اول بیابند. برای حل این سؤال دانش‌آموزان مسلط به برنامه‌نویسی می‌توانند از رایانه استفاده کرده و برنامه‌ی آن را بنویسند. پس از حل سؤال، با دانش‌آموزان درباره‌ی این که این فرمول چه مشکل یا مشکلاتی دارد که باعث شده خیلی هم فرمول خوب و معروفی نباشد بحث کنید. یکی از مهم‌ترین مشکلات این فرمول تعداد زیاد متغییرهای آن می باشد و مشکل دیگر آن اینست که در بسیاری از موارد جواب منفی می‌دهد.

[[تدریس صفحه‌ی ۷ تا سر حل مسأله]]

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷- ۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی‌کار بود. این ریاضی‌کار فرانسوی نیز علاقه‌ی‌زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل $2^p - 1$ اگر p یک عدد اول باشد» عدد اول می‌باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

$$p = 2 \rightarrow M_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$p = 3 \rightarrow M_3 = 2^3 - 1 = 7$$

اما حدس مرسن درست نبود! عدد مرسن به ازای همه‌ی اعداد اول، اعداد اول نمی‌دهد. از دانش‌آموزان سؤال کنید اولین **p** که به ازای آن عدد مرسن اول نیست کدام است؟

از دانش‌آموزان بخواهید که جدولی برای یافتن p مورد نظر تشکیل دهند.

جواب: $p = ۱۱$ $\qquad M_{۱۱} = ۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$

یادداشت زیر را برای دانش‌آموزان بخوانید.

یادداشت. چهلمین عدد مرسن اول در سال ۱۳۸۲ شمسی کشف شده که یک عدد ۶,۳۲۰,۴۳۰ رقمی می‌باشد. در واقع یک دانشجو در یک طرح اینترنتی از تعداد زیادی داوطلب خواست تا رایانه‌هایشان را به اشتراک بگذارند تا این عدد مرسن اول را بیابند. در این طرح داوطلبان زیادی شرکت کردند و محاسبات تریلیونی انجام شد و عدد $۲^{۲۰۹۹۶۰۱۱} - ۱$ یافته شد. در سال ۱۳۸۴ شمسی نیز چهل ویکمین عدد مرسن اول $۲^{۲۵,۹۶۴,۹۵۱} - ۱$ که دارای ۷ میلیون رقم می‌باشد یافته شد. گروه رقابت‌های اینترنتی به اولین کسی که یک عدد ۱۰ میلیون رقمی اول بیابد صد میلیون تومان جایزه خواهد داد.

سپس از دانش‌آموزان بپرسید «تریلیون یعنی چند؟ و برای اینکه پی به بزرگی عدد یک تریلیون(۱۰۰۰ میلیارد) ببرند از آن‌ها سؤال کنید که اگر بخواهند از ا تا یک تریلیون بشمارند چه مدت به طول می انجامد؟» (فرض می کنیم نیاز به خواب و ... نداریم و تمام طول روز را صرف شمردن می کنیم) سپس به خواندن سؤال بپردازید.

جواب: اگر در هر ثانیه ۱ عدد بشماریم در آن صورت در یک سال می‌توانیم تا عدد $۳۶۰۰ \times ۲۴ \times ۳۶۵ = ۳۱۵۳۶۰۰۰ \approx ۳۲,۰۰۰,۰۰۰$ بشماریم. پس برای شمردن از یک تا یک تریلیون به $۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \div ۳۲,۰۰۰,۰۰۰ = ۳۱۲۵۰$ سال زمان نیاز خواهیم داشت.

اجازه دهید دانش‌آموزان درباره‌ی این یادداشت بحث کرده و در اینترنت به دنبال اعداد اول دیگر بگردند و به دنبال راه‌حلی برای یافتن اعداد اول بزرگتر باشند (می‌توانید یک جلسه را به این موضوع اختصاص دهید.) از آن‌ها

بخواهید به دنبال وب گاه‌هایی بگردند که اول یا مرکب بودن یک عدد را بررسی می‌کنند. می‌توانید نرم‌افزار « MicroSoft Math » را در اختیار آن‌ها بگذارید تا درباره‌ی‌اول بودن اعداد مختلف از آن استفاده کنند.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده است. او مجموعه‌ای از نت‌های کوتاه و کشیده را می‌نوازد که می‌توان آن‌ها را با صفر (نت‌های کشیده) و یک (نت‌های کوتاه) نشان داد:

۰۱۱۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۱۰۱۰...

آیا مرادخان اعداد اول را فراموش کرده است؟

در این مجموعه از اعداد، صفر و یک همان مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند که به جای اعداد اول ۱ و به جای اعداد غیر اول صفر قرار گرفته است.

۰۱ ۱۰ ۱۰ ۱۰۰۰۱۰ ۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰...

↓↓ ↓ ↓ ↓ ↓

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ۱۳

۴- در اینجا، در یک سطر رقم‌های **۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۰** و در زیر آن‌ها حروف الفبای فارسی را از «الف» تا «د» نوشته شده است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
ا	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ	د

می‌توانیم واژه‌ی «باد» را با عدد «۲۱۰» نشان دهیم: حرف‌های واژه‌ی باد، یعنی «ب»، «ا» و «د» با عددهای «۲»، «۱» و «۰» مشخص می‌شوند و اگر رقم‌ها را از چپ به راست بنویسیم، به عدد ۲۱۰ می رسیم.

الف) اکنون شما عددهای مربوط به واژه‌های «تاب»، «تخت» و «ادب» را با عدد بنویسید.

ب) عددهای مرکب ۹۰۱، ۴۸۴ و ۱۵۱۵ برای کدام واژه‌ها هستند؟ معنی این واژه‌ها را بگویید.

پ) با این ده رقم، آیا می‌توانید عدد اولی بنویسید که واژه‌ی نظیر آن، معنا داشته باشد؟ بزرگ‌ترین عدد اولی که واژه نظیر آن با معنی باشد،در این سؤال چند است؟

الف) «تاب» = ۴۱۲؛ «تخت» = ۴۹۴؛ «ادب» = ۱۰

ب) ۹۰۱ = «خدا»؛ ۴۸۴ = «تحت»؛ ۱۵۱۵ = «اثاث»

پ) به دانش‌آموزان وقت دهید تا این سؤال را در خانه حل کنند و به کسی که بزرگ‌ترین عدد اول با معنی را یافته بود امتیاز اختصاص دهید.

استفاده از نرم‌افزار« **MicroSoft Math** » را برای حل قسمت « پ » به دانش‌آموزان پیشنهاد کنید.

از دانش‌آموزان بخواهید به دنبال روشی باشند که بتوانند هر مطلبی را به یاری عددها بنویسند. در این رابطه مطلبی روی وب گاه موجود می‌باشد.

۵- در ۱۱۲۱ شمسی ریاضیدانی به نام «گلدباخ» ادعا کرد می‌توان هر عدد طبیعی بزرگتر از ۵ را به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. مثلاً ۳+۷+۱۱=۲۱. برای اثبات حدس گلدباخ در بین ۲۰ اسفند ۱۳۷۹ تا ۲۰ اسفند ۱۳۸۱ جایزه‌ی یک میلیارد تومانی گذاشته شد، اما کسی نتوانست آن را اثبات کند! درستی حدس گلدباخ را در جدولی مثل جدول زیر تا عدد ۵۰ امتحان کنید!

۶	= ۲+۲+۲
۷	= ۲+۲+۳
۸	= ۲+۳+۳
۹	= ۳+۳+۳
۱۰	= ۲+۳+۵
۱۱	= ۳+۳+۵
۱۲	= ۲+۵+۵
۱۳	= ۳+۵+۵
⋮	
۵۰	= ۲+۵+۴۳

بعد از حل سؤال به دانش‌آموزان توضیح دهید که در سال ۱۳۸۲ درستی حدس گلدباخ تا 6×10^{15} بررسی شد ولی تا به امروز اثبات نشده است.

اعداد اول خاص

۱- عدد اول کوچک‌ترین عدد اول ستاره‌ای می‌باشد. زیرا

۷,۷۷۷,۲۷۷,۲۲۷,۷۷۷,۷۷۲,۳۲۷,۷۷۷,۷۷۲,۲۲۲,۳۳۲,۲۲۲,۷۷۲,۳۳۳,
۵۳۳,۳۲۷,۷۲۳,۵۵۵,۵۳۲,۷۷۲,۳۵۲,۵۳۲,۷۷۲,۳۵۵,۵۵۳,۲۷۷,۲۳۳,
۳۵۳,۳۳۲,۷۷۲,۲۲۲,۳۳۲,۲۲۲,۷۷۷,۷۷۷,۲۳۲,۷۷۷,۷۷۷,۲۲۷,۷۲۷,۷۷۷

```
                        ۷
                      ۷   ۷
                    ۷   ۲   ۷
                  ۷   ۲   ۲   ۷
۷   ۷   ۷   ۷   ۷   ۲   ۳   ۲   ۷   ۷   ۷   ۷   ۷
  ۷   ۲   ۲   ۲   ۲   ۳   ۳   ۲   ۲   ۲   ۲   ۷
    ۷   ۲   ۳   ۳   ۳   ۵   ۳   ۳   ۳   ۲   ۷
      ۷   ۲   ۳   ۵   ۵   ۵   ۵   ۳   ۲   ۷
        ۷   ۲   ۳   ۵   ۲   ۵   ۳   ۲   ۷
      ۷   ۲   ۳   ۵   ۵   ۵   ۵   ۳   ۲   ۷
    ۷   ۲   ۳   ۳   ۳   ۵   ۳   ۳   ۳   ۲   ۷
  ۷   ۲   ۲   ۲   ۲   ۳   ۳   ۲   ۲   ۲   ۲   ۷
۷   ۷   ۷   ۷   ۷   ۲   ۳   ۲   ۷   ۷   ۷   ۷   ۷
                  ۷   ۲   ۲   ۷
                    ۷   ۲   ۷
                      ۷   ۷
                        ۷
```

آیا می‌توانید اعداد اول با اشکال دیگری بیابید؟

از دانش‌آموزان بخواهید از اینترنت استفاده کنند و اعداد اول با اشکال مختلف را بیابند. آدرس زیر مربوط به وب گاهی درباره‌ی اعداد اول ستاره‌ای و دارای اشکال دیگر می‌باشد.

Primes.utm.edu/curios/page.php?curio_id=5284

۲- الف) ۱۱ را یک عدد اول «یکنواخت» می‌گوییم زیرا عدد اولی است که تمام ارقامش یکسان می‌باشند. جدول زیر را پر کرده و ادامه دهید تا یک عدد اول یکنواخت بیابید.

اول است یا مرکب	عدد
	۱۱۱
	۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱۱
	۱۱۱۱۱۱۱۱

ب) به عدد ۱۰۱ یک عدد اول «رایانه‌ای» می‌گویند زیرا عدد اولی است که در آن تنها ارقام صفر و یک به کار رفته است. به نظر شما آیا عدد اول رایانه‌ای دیگری وجود دارد؟

برای حل این سؤال دانش‌آموزان می‌توانند از نرم‌افزار **MicroSoft Math** و وب گاه‌هایی که در تشخیص اعداد اول کمک می‌کنند استفاده کنند.

http://www.usi.edu/science/math/prime.html

http://www.math.com/students/calculators/source/prime-number.htm

http://www.amblesideprimary.com/ambleweb/primenumber/primecheck.htm

الف) در اینجا دو عدد اول یکنواخت آورده‌ایم:

$$\overbrace{1111...1111}^{\text{۱۹ تا}} \quad \text{و} \quad \overbrace{1111...1111}^{\text{۲۳ تا}}$$

عدد اول یکنواخت بعدی ۳۱۷ رقم و عدد بعدی ۱۰۳۱ رقم دارند. ریاضی‌دانان براین باورند که اعدادی با ۴۹۰۸۱ و ۸۶۴۵۳ رقم یک اولند اما هنوز اثبات نشده‌اند.

ب) ۱۰۱۰۱ یا ۱۰۱۰۱۰۱ اول نیستند!

هاروی دابنر یک عدد اول رایانه‌ای با ۵۱۱۴ رقم صفر و یک، درسال ۱۳۷۰ شمسی یافته که این عدد برابر است با

$$\frac{(10^{5114} - 10^{2613} + 9)}{9}$$

بعد از معرفی این عدد به دانش‌آموزان از آن‌ها بخواهید این عدد را به صورت بسط اعشاری با استفاده از رایانه و یا ماشین‌حساب‌های اینترنتی به‌دست آورند و الگویی بین صفر و یک‌های این عدد بیابند؟

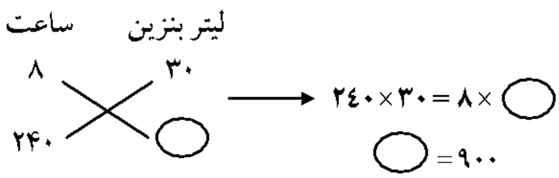
تناسب

🕴 تعریف تناسب مستقیم را بیان کنید.

تناسب مستقیم: هرگاه دو کمیت چنان به هم مربوط باشند که اگر یکی را **n** برابر کنیم دیگری نیز **n** برابر شود بین دو کمیت «تناسب مستقیم» برقرار است.

۱- یک موتور در هر ۸ ساعت کار ۳۰ لیتر بنزین مصرف می‌کند. این موتور برای ۲۴۰ ساعت کار چقدر بنزین لازم دارد؟

از دانش‌آموز بخواهید که بین کمیت‌هایی که تناسب مستقیم دارند از خط کج استفاده کنند و به این صورت مسأله را حل کنند.



۲- وزن محسن سه برابر وزن خواهرش می‌باشد. اگر وزن این خواهر و برادر روی هم ۱۳۶ کیلوگرم باشد. وزن هر محسن چند کیلوگرم است؟

نسبت وزن محسن به مجموع وزن‌ها سه به چهار می‌باشد.

$$۱+۳=٤$$

نسبت	وزن
۳	○
۴	۱۳۶

$$\longrightarrow ۳\times۱۳٦=٤\times\bigcirc$$

$$\bigcirc=۱۰۲$$

۳-بریدن یک تیر چوبی به ۴ بخش برابر، ۹ دقیقه وقت لازم دارد. برای این که همان تیر چوبی را به ۸ بخش تقسیم کنیم چقدر وقت صرف می‌شود؟

بعضی از دانش‌آموزان مسأله را این طور حل می‌کنند:

چون برای ۴ قسمت کردن تیر چوبی ۹ دقیقه وقت لازم است و چون ۸، دو برابر ۴ است، پس برای بخش کردن تیر چوبی به ۸ تکه، به دو برابر ۹ دقیقه یعنی ۱۸ دقیقه وقت نیاز داریم.

ولی اندکی دقت، نادرستی این راه‌حل را روشن می‌کند.

برای این که تیر چوبی به ۴ بخش تقسیم شود، باید آن را در ۳ جا ببریم، بنابراین این برای هر برش ۳ دقیقه وقت لازم است:

$$۹\div۳=۳$$

وقتی بخواهیم تیر چوبی را به ۸ بخش تقسیم کنیم، باید آن را ۷ بار برش دهیم و برای هر بار ۳ دقیقه وقت لازم است؛ یعنی برای بریدن تیر چوبی و تبدیل آن به ۸ بخش، به اندازه‌ی $۷\times۳=۲۱$ دقیقه وقت نیاز داریم.

تعریف تناسب وارون را بیان کنید.

تناسب وارون: هرگاه دو کمیت چنان به هم مربوط باشند که اگر یکی را در **n** ضرب کنیم دیگری بر **n** تقسیم شود بین دو کمیت «تناسب وارون» برقرار است.

۴- ۸ کارگر اتاقی را در ۳ روز رنگ می‌زنند. اگر ۱۶ کارگر این اتاق را رنگ کنند چند روز طول می‌کشد؟

⍰ از دانش‌آموز بخواهید بین کمیت‌هایی که تناسب وارون دارند از خط مستقیم استفاده کنند و به این صورت مسأله را حل کنند.

کارگر		روز
۸	—	۳
۱۶	—	○

$\longrightarrow$ ۸×۳ = ۱۶× ○

○ = ۱/۵ روز

۵- ۶ نفر مزرعه‌ای را در ۱۲ روز درو می‌کنند. ۸ نفر همان مزرعه را در چند روز درو می‌کنند؟

⍰

نفر		روز
۶	—	۱۲
۸	—	○

$\longrightarrow$ ۶×۱۲ = ۸× ○

○ = ۹ روز

۶- در یک سالن کنفرانس اگر صندلی‌ها را در ۶ ردیف بچینیم ، در هر ردیف ۱۵ صندلی قرار می‌گیرد. اگر صندلی‌ها را در ۳ ردیف بچینیم در هر ردیف چند صندلی قرار می‌گیرد؟

⍰

ردیف		صندلی
۶	—	۱۵
۳	—	○

$$\longrightarrow ۶\times۱۵=۳\times\bigcirc$$

$$\bigcirc=۳۰$$

۷- اتومبیلی با سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت مسیری را در ۱۲ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت اتومبیل را به ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت افزایش دهیم همان مسیر را در چند ساعت می‌پیماید؟

سرعت		ساعت
۹۰	—	۱۲
۱۲۰	—	○

$$\longrightarrow ۹۰\times۱۲=۱۲۰\times\bigcirc$$

$\bigcirc=۹$ ساعت

دانش‌آموزان را با تناسب آمیخته آشنا کنید و برای این تناسب مثال‌های عددی بزنید!

تناسب آمیخته: تناسبی را که بیش از دو کمیت داشته باشد «تناسب آمیخته» می‌نامند.

۸- اگر ۳۲ کارگر زمینی به مساحت ۱۲۸ مترمربع را تا عمق معین در مدت ۴۰ روز خاک‌برداری کنند، ۲۵ کارگر زمینی به مساحت ۷۵ مترمربع و همان عمق را در چند روز خاک‌برداری خواهند کرد؟

از دانش‌آموزان بخواهید هر دو کمیت را جدا از دیگر کمیت‌ها و فقط نسبت به هم در نظر بگیرند و مستقیم و یا وارون بودن آن را با خط کج و یا مستقیم نشان دهند.

مساحت	کارگر		روز
۱۲۸	۳۲	—	۴۰
۷۵	۳۰	—	○

$$\longrightarrow ۱۲۸\times۳۰\times\bigcirc=۷۵\times۳۲\times۴۰$$

$\bigcirc=۲۵$ روز

۹- رضا، حسین و علی به همراه هم، کاری را ۸ روزه تمام می‌کنند. پس از انجام ۲ روز کار حسین کار را ترک کرد معلوم کنید تمام کار چند روزه به پایان می‌رسد.

روز	کار	نفر
۲۰	۱	۳
۲	○	۳

$\longrightarrow$ ○ $= \frac{۱}{٤}$. $\frac{۱}{٤}$کار در ۲ روز انجام شده.

بعد از ۲ روز

۸	۱	۳
○	$\frac{۳}{٤}$	۲

$\longrightarrow$ ○ $=$ ۹ . بقیه‌ی کار ۹روزه تمام می‌شود.

۱۰- شیر A مخزنی را در مدت ۳ ساعت پر می‌کند و شیر B همان مخزن را در مدت ۹ ساعت پر می‌کند.

اگر هر دو شیر باز باشد مخزن در چند دقیقه پر می‌شود؟

شیر A در یک ساعت، $\frac{۱}{۳}$مخزن را پر می‌کند.

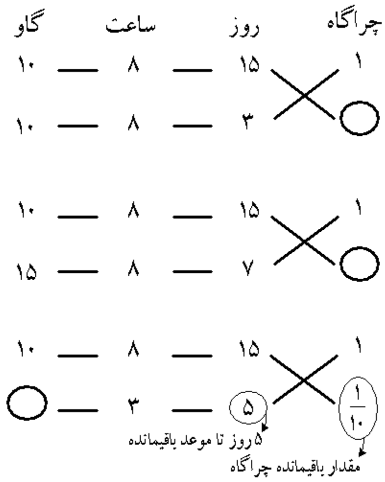
شیر B در یک ساعت، $\frac{۱}{۹}$ مخزن را پر می‌کند.

در نتیجه A و B در یک ساعت با هم $(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۳})$مخزن را پر می‌کنند.

ساعت	مقدار آب مخزن
۱	$\frac{٤}{۹}$
○	$\frac{۹}{۹}$

$\longrightarrow$ ○ $= \frac{۹}{٤} =$ دو ساعت و ربع

۱۱- ۱۰ گاو ۱۵ روزه و با روزی ۸ ساعت کار چراگاهی را نابود می‌کنند. پس از ۳ روز ۵ گاو دیگر به این گروه اضافه شدند (این گاوها مانند دیگران کار می‌کردند) اما پس از ۷ روز چند گاو ترکیدند و بقیه توانستند با روزی ۳ ساعت کار تا زمان مقرر چراگاه را ویران کنند. چند گاو ترکیدند؟



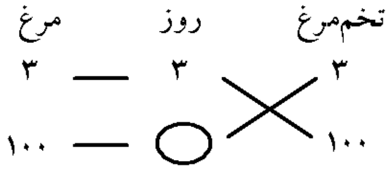
$\bigcirc = \frac{1}{5}$ در سه روز $\frac{1}{5}$ چراگاه نابود می‌شود.

$\bigcirc = \frac{7}{10}$ در ۷ روز $\frac{7}{10}$ دیگر چراگاه نابود شد.

$\bigcirc = 8$

پس ۷ گاو ترکیده بودند. $15 - 8 = 7$

۱۲- ۳ مرغ در ۳ روز ۳ تخم می‌گذارند. ۱۰۰ مرغ در چند روز ۱۰۰ تخم می‌گذارند؟



$3 \times 3 \times 100 = 3 \times \bigcirc \times 100$

$\bigcirc = 3$ روز

در مورد مبحث تناسب، حل تمرین‌های گوناگون و مهارتی دیگر بسیار توصیه می‌شود.

توان

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی۷ و صفحات ۸ تا ۱۲]]

۱- $-۲^۴$ و $(-۲)^۴$ چه تفاوتی با هم دارند؟

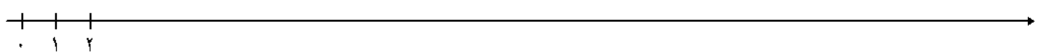
$$(-۲)^۴ = (-۲)(-۲)(-۲)(-۲) = +۲^۴ = ۱۶$$

اما در عبارت $-۲^۴$ چون علامت - داخل پرانتز نیست پس به توان نمی‌رسد و در نتیجه داریم:

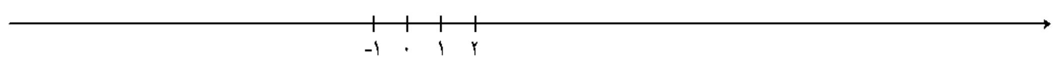
$$-۲^۴ = -۱۶$$

۲- اعدد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$۲^۰ \,,\, ۲^۱ \,,\, ۲^۲ \,,\, ۲^۳ \,,\, ۲^۴$$



$$(-۲)^۰ \,,\, (-۲)^۱ \,,\, (-۲)^۲ \,,\, (-۲)^۳ \,,\, (-۲)^۴$$



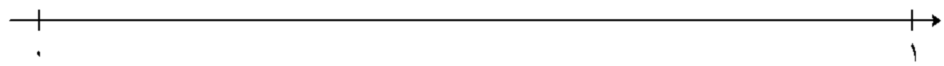
چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

آنچه در این سؤال مدنظر است، این است که دانش آموزان ، متوجه روند افزایش سریع توان‌های اعداد بزرگتر از ۱ گردند. و اینکه فاصله مثلاً $۲^۴$ و $۲^۵$ خیلی بیشتر از فاصله‌ی $۲^۱$ و $۲^۲$ است.

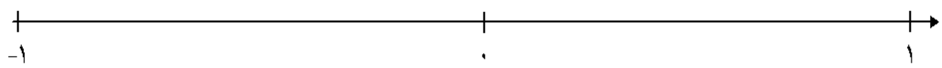
برای نزدیک‌تر شدن ذهن دانش‌آموز به مفهوم مورد نظر، محور طویلی را روی تخته کشیده و نمودار توان‌های ۳ (3^4 , 3^3 , 3^2 , 3^1 , 3^0) و ۴ (4^4 , 4^3 , 4^2 , 4^1 , 4^0) را روی آن، در کنار نمودار توان‌های عدد ۲ رسم کنید، تا دانش‌آموزان روند رشد توان را ببینند. این کار را برای اعداد منفی نیز تکرار کنید تا نحوه‌ی دور شدن اعداد توان‌دار از صفر را مشاهده کنند.

۳- اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 , \left(\frac{1}{2}\right)^1 , \left(\frac{1}{2}\right)^2 , \left(\frac{1}{2}\right)^3 , \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 , \left(-\frac{1}{2}\right)^1 , \left(-\frac{1}{2}\right)^2 , \left(-\frac{1}{2}\right)^3 , \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$



چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

آنچه در این سؤال مدنظر است، این است که دانش آموزان ، متوجه روندکاهش سریع توان‌های اعداد کوچکتر از ۱ گردند. و اینکه فاصله‌ی‌مثلاً $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ خیلی کمتر از فاصله $\left(\frac{1}{2}\right)^1$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ است.

برای نزدیک‌تر شدن ذهن دانش‌آموز به مفهوم مورد نظر، محور طویلی را روی تخته رسم کنید و نمودار توان‌های $\left(\frac{1}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{3}\right)$ را روی آن در کنار نمودار توان‌های عدد $\left(\frac{1}{2}\right)$ رسم کنید، تا دانش‌آموزان روند کاهش توان را ببینند.

این کار را برای اعداد منفی نیز تکرار کنید تا نحوه‌ی‌نزدیک شدن اعداد به صفر را مشاهده کنند.

۴- بین 6^{100} و 6^{101} شش عدد مثال بزنید که بر ۵ بخش‌پذیر باشند.

?

$$6^{100}=6\times 6^{99}<10\times 6^{99}<15\times 6^{99}<20\times 6^{99}<25\times 6^{99}<30\times 6^{99}<35\times 6^{99}<36\times 6^{99}=6^{101}$$

- بعد از حل این سؤال از دانش‌آموزان بپرسید که چند عدد طبیعی بین 6^{100} و 6^{101} وجود دارد؟

تعداد این اعداد برابر است با تفاضل 6^{100} و 6^{101} ($6^{101}-6^{100}=6\times 6^{100}-6^{100}=5\times 6^{100}$) یعنی $5\times 6^{100}-1$ تا عدد طبیعی بین این دو عدد (غیر از خود 6^{101}) وجود دارد.

- در این سؤال هدف، فهم فاصله‌ی بین اعداد تواندار است.

۵- کوچک‌ترین عدد بین 6^{100} و 6^{101} را بیابید که بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

- قبل خواندن سؤال از دانش‌آموزان بخواهید کوچک‌ترین ($6^{100}+1$) و بزرگ‌ترین ($6^{101}-1$) عدد طبیعی بین این دو عدد را بیابند.

?

$6^{100}+4$، زیرا 6^{100} که یکانش ۶ می‌باشد ، وقتی با ۴ جمع می‌شود یکان حاصل صفر شده، پس می‌توان نتیجه گرفت عدد بر ۵ بخش‌پذیر می‌باشد و واضح است که این عدد کوچک‌ترین عدد بین این 60^{100} و 60^{101} است که بر ۵ بخش‌پذیر است.

۶- بزرگ‌ترین عدد بین 6^{100} و 6^{101} که بر ۵ بخش‌پذیر است را به‌دست آورید.

۱ – 6^{101}، زیرا 6^{100} که یکانش ۶ می‌باشد ، وقتی یکی از آن کم شود، یکان حاصل صفر شده، پس می‌توان نتیجه گرفت عدد بر ۵ بخش‌پذیر می‌باشد و واضح است که این عدد بزرگ‌ترین عدد بین این 60^{100} و 60^{101} است که بر ۵ بخش‌پذیر است.

۷- مقایسه کنید.

$$2^{63} \ \square \ 3^{43}$$

$$2^{33} \ \square \ 3^{22}$$

$$9^{15} \ \square \ 4^{25}$$

$$2^{63} \quad \square \quad 3^{43}$$

$$(2^{3})^{21} < (3^{2})^{21}$$

$$2^{63} < 3^{42} < 3^{43}$$

$$2^{63} < 3^{43}$$

۸- می‌خواهیم اعداد 2^{19} و 16^{5} و 64^{3} را به ترتیب افزایشی بنویسیم.

$$2^{19} \qquad 16^{5} \qquad 64^{3}$$

$$2^{19} \qquad (2^{4})^{5} \qquad (2^{6})^{3}$$

$$2^{19} \qquad 2^{20} \qquad 2^{18}$$

$$2^{18} < 2^{19} < 2^{20}$$

$$64^{3} < 2^{19} < 16^{5}$$

حال اعداد زیر را به ترتیب افزایشی بنویسید.

$$۷^{۱۱}\ ,\ ۸\times۷^{۹}\ ,\ ۱۵\times۷^{۸}\ ,\ ۳\times۷^{۱۰}$$

?

$$۷^{۱۱}\ ,\ ۸\times۷^{۹}\ ,\ ۱۵\times۷^{۸}\ ,\ ۳\times۷^{۱۰}$$

$$۷^{۱۱}\ ,\ (۷+۱)\times۷^{۹}\ ,\ (۷+۷+۱)\times۷^{۸}\ ,\ ۳\times۷^{۱۰}$$

$$۷^{۱۱}\ ,\ ۷^{۱۰}+۷^{۹}\ ,\ ۷^{۹}+۷^{۹}+۷^{۸}\ ,\ ۳\times۷^{۱۰}$$

$$۷^{۹}+۷^{۹}+۷^{۸} < ۷^{۱۰}+۷^{۹} < ۳\times۷^{۱۰} < ۷^{۱۱}$$

$$۱۵\times۷^{۸} < ۸\times۷^{۹} < ۳\times۷^{۱۰} < ۷^{۱۱}$$

۹- اعداد زیر را به صورت کاهشی بنویسید.

$$۶^{۲۲۲۲۲}, ۳^{۳۳۳۳۳}, ۲^{۵۵۵۵۵}$$

?

$$۶^{۲۲۲۲۲}, ۳^{۳۳۳۳۳}, ۲^{۵۵۵۵۵}$$

$$(۶^{۲})^{۱۱۱۱۱}, (۳^{۳})^{۱۱۱۱۱}, (۲^{۵})^{۱۱۱۱۱}$$

$$۳۶^{۱۱۱۱۱}, ۲۷^{۱۱۱۱۱}, ۳۲^{۱۱۱۱۱}$$

$$۳۶^{۱۱۱۱۱} \prec ۳۲^{۱۱۱۱۱} \prec ۲۷^{۱۱۱۱۱}$$

$$۶^{۲۲۲۲۲} \prec ۲^{۵۵۵۵۵} \prec ۳^{۳۳۳۳۳}$$

۱۰- می‌خواهیم کوچک‌ترین عدد طبیعی m را طوری تعیین کنیم که $m^{۸۰} > ۸۱^{۵۰}$

$$m^{۸۰} > ۳^{۲۰۰}$$
$$(m^{۲})^{٤۰} > (۳^{٥})^{٤۰}$$
$$(m^{۲})^{٤۰} > (۲٤۳)^{٤۰}$$
$$\rightarrow m = ۱٦$$

حال کوچک‌ترین عدد طبیعی a را طوری تعیین کنید که $a^{۷۲} > ۱٦^{٥٤}$

$$a^{۷۲} > ۱٦^{٥٤}$$
$$a^{۷۲} > ۲^{۲۱٦}$$
$$a^{۷۲} > (۲^{۳})^{۷۲}$$
$$a^{۷۲} > (۸)^{۷۲}$$
$$\rightarrow a = ۹$$

۱۱- می‌خواهیم بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه در حساب، با کمک ۴ عدد یک، عددی بنویسیم که بزرگ‌ترین مقدار ممکن باشد.

به‌طور ذهنی و به‌سادگی می‌توان فهمید که عدد ۱۱۱۱ جواب مورد نظر مسأله نیست. زیرا عدد:

$$۱۱^{۱۱}$$

خیلی از آن بزرگ‌تر است. برای محاسبه‌ی این عدد باید ۱۱ را ۱۱ بار در خودش ضرب کرد. این عدد از ۲۸۵ میلیارد تجاوز می‌کند و بنابراین نسبت به عدد ۱۱۱۱ قریب ۲۵۰ میلیون مرتبه بزرگ‌تر است.

حال بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه با کمک ۴ تا عدد ۲ بزرگ‌ترین عدد ممکن را بنویسید.

یادداشت. $22^{2^2} = 22^4$

□

۸ نوع ترکیب خواهیم داشت:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222}$$
$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}$$

ابتدا به سراغ ردیف اول می‌رویم. واضح است که ۲۲۲۲ از سه عدد دیگر کوچکتر است.حال دو عدد $222^2, 22^{22}$ را مقایسه می‌کنیم و واضح است که $484^{11} = \left(22^2\right)^{11} = 22^{22}$ از 22^{22} بزرگتر است زیرا هم پایه و هم توان آن بزرگتر است. اکنون $22^{22}, 2^{222}$ را مقایسه می‌کنیم. می‌دانیم که 22^{22} از 32^{22} کوچکتر است و $2^{110} = \left(2^5\right)^{22} = 32^{22}$ نیز از 2^{222} کوچکتر است. پس در ردیف اول بزرگ‌ترین عدد 2^{222} می‌باشد.

اما در ردیف دوم، عدد چهارم یعنی $16 = 2^{2^{2^2}}$ که بسیار کوچکتر از بقیه‌ی اعداد می‌باشد و عدد اول ردیف نیز $22^{2^2} = 22^4$ از $32^4 = 2^{20}$ کوچکتر می‌باشد و واضح است که از دو عدد دیگر کوچکتر می‌باشد.

حال به مقایسه‌ی ۳ عدد باقیمانده می‌پردازیم که چون پایه‌ی همه‌ی آن‌ها ۲ می‌باشد، عددی بزرگتر است که توانش بزرگتر باشد.

$$222,484,\ 2^{22} = \left(2^{10}\right)^2 \times 2^2 \square 1000^2 \times 4$$

بنابراین $2^{2^{22}}$ بزرگ‌ترین عددی است که می‌توان با چهار رقم ۲ نوشت. از دانش‌آموزان بخواهید تعداد رقم‌های عدد $2^{2^{22}}$ را به صورت تقریبی به‌دست آورند.

جواب: عددی است که بیش از یک میلیون رقم دارد.

$$2^{22} = \left(2^{10}\right)^2 \times 2^2 \approx 1000^2 \times 4 = 4000000$$
$$2^{2^{22}} \approx 2^{4000000} \succ 10^{1200000}$$

می توانید این مسأله را برای ۴ عدد ۳ و ... تعمیم دهید.

۱۲- کدام‌یک از اعداد زیر از بقیه بزرگتر است؟

$$31^{42},\ 21^{43},\ 4^{315},\ 3^{421},\ 2^{431}$$

3^{421} زیرا :

$$31^{42},\ 21^{43},\ 4^{315},\ 3^{421},\ 2^{431}$$
$$3^{421} \succ 3^{420} = 81^{105} \succ 64^{105} = 2^{630} \succ 2^{431}$$
$$3^{421} \succ 3^{420} = 81^{105} \succ 64^{105} = 4^{315}$$
$$3^{421} \succ 3^{420} = 81^{105} \succ 32^{105} \succ 31^{42}$$
$$3^{421} \succ 3^{420} = 81^{105} \succ 32^{105} \succ 21^{43}$$

۱۳- در یک محور عددی فاصله هر دو عدد صحیح متوالی ۱ متر می‌باشد. در این محور فاصله 2^{21} از قرینه‌اش تقریباً چند کیلومتر است؟

□

فاصله‌ی 2^{21} از قرینه‌اش دو برابر 2^{21} می‌باشد که یعنی $2^{22} = 2^{21} \times 2$ متر و چون $2^{10} = 1024 \square 1000$ پس داریم:

$$2^{22} = 2^{2} \times 2^{10} \times 2^{10} \square 4 \times 1000 \times 1000$$

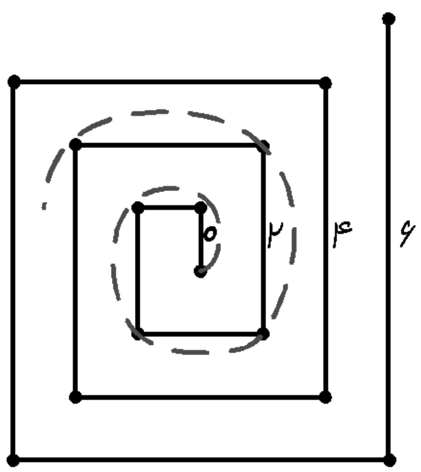
یعنی ۴۰۰۰ کیلومتر.

۱۴- شکل زیر یک «مارپیچ شکسته‌ی‌ارشمیدسی» می‌باشد.

الف) طول این مارپیچ شکسته را حساب کنید.

ب) ادامه مارپیچ شکسته را از هر دو طرف بکشید.

ج) مطابق شکل(خط‌چین‌ها) از به هم وصل کردن نقاط شکستگی، یک «مارپیچ ارشمیدسی» بسازید.

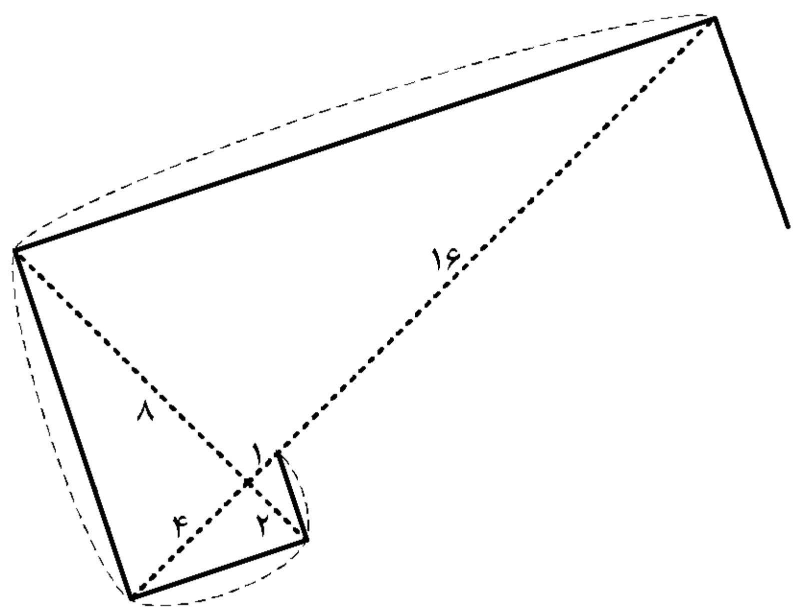

۰
۲
۴
۶

۱۵- شکل زیر یک «مارپیچ شکسته‌ی‌لگاریتمی» است.

الف) طول این مارپیچ شکسته را حساب کنید.

ب) ادامه مارپیچ شکسته را از هر دو طرف بکشید.

ج) مطابق شکل(خط‌چین‌ها) از به هم پیوستن نقاط شکستگی یک «مارپیچ لگاریتمی» به‌دست آورید.



۱۶- چه تفاوت‌هایی بین مارپیچ لگاریتمی و ارشمیدسی می‌بینید.

به دانش‌آموزان فرصت دهید درباره تفاوت‌های این دو نوع مارپیچ صحبت و تبادل نظر کنند.

مهم‌ترین تفاوتی که در اینجا مدنظر است واگرایی و دورشدن خم مارپیچ لگاریتمی است و این در حالی است که در مارپیچ ارشمیدسی این واگرایی مشاهده نمی شود.

۱۷- «هوژان» الاغش را به یک درخت بسته است و الاغ او به دور درخت می‌دود. سیر حرکت الاغ هوژان یک مارپیچ ارشمیدسی است یا یک مارپیچ لگاریتمی؟

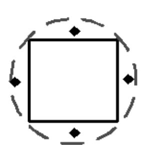
قبل از حل سؤال از دانش‌آموزان بخواهید شکل حرکت الاغ را ترسیم کنند و حتی می‌توانید این کار را روی به صورت آزمایشی به دور یک ستون انجام دهید.

یک مارپیچ ارشمیدسی ، زیرا الاغ پس از هر دور به میزان معینی (محیط ساقه‌ی درخت) به درخت نزدیک می‌شود.

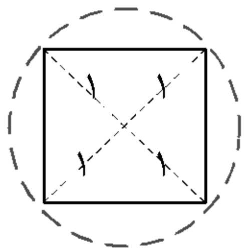
۱۸- الف) آیا امکان دارد که «مارپیچ ارشمیدسی» یک منحنی بسته شود؟

ب) آیا امکان دارد که «مارپیچ لگاریتمی» یک منحنی بسته شود؟

الف) با توجه به اینکه در مارپیچ ارشمیدسی ، نقاط در هر دور به میزان معینی از هم فاصله می گیرند ، این امکان وجود ندارد که از ابتدا و انتهای این خم به هم برسند مگر آنکه این مارپیچ روی مارپیچ شکسته‌ای سوار شود که مقدار افزایش بازوهای آن صفر باشد؛ یا در واقع افزایشی نداشته باشد.



ب) در مارپیچ لگاریتمی در واقع فواصل نقاط از مرکز به صورت توان‌هایی از ۲ و ۳ و ... می‌باشد بنابراین مارپیچ لگاریتمی نیز تنها در صورتی یک منحنی بسته تشکیل می‌دهد که به جای توان‌هایی از ۲ و ... از توان‌های عدد ۱ (که همگی ۱ هستند) استفاده کنیم.



در مورد این مبحث به حل مسائل مهارتی و محاسباتی گوناگون بپردازید تا دانش‌آموز نسبت به حل انواع مسأله توانمند گردد و به مفهوم و کاربرد توان مسلط گردد.

جذر

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۱۸]]

۱- حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = ?$$

دانش‌آموز در مورد جذر می‌بایست بداند که جذر هر عدد نامنفی، همواره عددی مثبت می‌باشد.

جواب عبارت بالا برابرست با $\sqrt{2}-1$ (و جواب $(1-\sqrt{2}) < 0$ نادرست می‌باشد.)

۲- کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که اگر در $A = 2^4 \times 3^3 \times 5$ ضرب شود تا A مربع کامل شود.

یک عدد مربع کامل پس از تجزیه به اعداد اول ، می‌بایست از هر عدد اول، زوج تا داشته باشد. بنابراین برای آنکه A مربع کامل شود، می‌بایست توان ۳ و ۵ نیز مانند توان عدد ۲ زوج شوند. پس کافیست در A یک عدد ۳ و یک عدد ۵ ضرب کنیم یا به بیان دیگر، A را در ۱۵ ضرب کنیم.

پس از حل سؤال، لفظ طبیعی را از صورت سؤال حذف کنید و از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی کوچکترین عددی که اگر در $A = ۲^{٤} \times ۳^{۳} \times ۵$ ضرب شود A مربع کامل می‌شود بحث کنند.

جواب: می‌توان A را صفر ضرب کرد! و اگر به دنبال کوچکترین عدد غیر صفر باشیم که اگر در $A = ۲^{٤} \times ۳^{۳} \times ۵$ ضرب شود A مربع کامل می‌شود، آن عدد $\frac{۱}{۲^{٤} \times ۳^{۳} \times ۵} = \frac{۱}{A}$ نمی باشد چون اعداد دیگری مثل $\frac{۱}{۱۰۰۰۰ \times A}, \frac{۱}{۱۰۰ \times A}, ...$ وجود دارند که اگردر A ضرب شوند، حاصل‌ضرب مربع کامل می‌شود و نمی‌توان کوچکترین آن‌ها را یافت.

۳- مکعب کامل را تعریف کنید و بگویید چند عدد دورقمی وجود دارد که مکعب کامل باشند؟

اعداد مکعب کامل اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را به شکل (یک عدد طبیعی به توان ۳) نوشت.

مثلاً اعداد $۱۰^{۳} = ۱۰۰۰, ۵^{۳} = ۱۲۵, ۳^{۳} = ۲۷$ همگی اعداد مکعب کامل می‌باشند.

اولین عدد مکعب کامل دو رقمی $۳^{۳} = ۲۷$ می‌باشد و آخرین عدد مکعب کامل دو رقمی $۹^{۳} = ۷۲۹$ می‌باشد. پس می‌توان گفت تمامی اعداد مکعب کامل دو رقمی عبارتند از: $۹^{۳}, ۸^{۳}, ۷^{۳}, ٦^{۳}, ۵^{۳}, ٤^{۳}, ۳^{۳}$ که تعداد آن‌ها ۷ تا می‌باشد.

۴- جدول مقابل را پر کنید. بعضی از خانه‌های این جدول هاشورخورده هستند. درباره‌ی این خانه‌ها چه حدسی می‌زنید؟

تعداد مقسوم‌علیه‌ها	مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌ها	عدد
۱	{۱}	۱
۲	{۱, ۲}	۲
۲	{۱, ۳}	۳
۳	{۱, ۲, ٤}	۴
۲	{۱, ۵}	۵
۴	{۱, ۲, ۳, ٦}	۶
۲	{۱, ۷}	۷
		۸
		۹
		۱۰
		۱۱
		۱۲
		۱۳
		۱۴
		۱۵
		۱۶
		۱۷
		۱۸
		۱۹
		۲۰

اعدادی که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌ها فرد است مربع کاملند و یا اینکه تعداد مقسوم‌علیه‌های اعداد مربع کامل، فرد است.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی علت این موضوع بحث کنند اینکه «چرا تعداد مقسوم‌علیه‌های اعداد مربع کامل، فرد است».

جواب: در نوشتن مقسوم‌علیه‌های یک عدد مثلاً ۶ به این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا ۱ را نوشته و چون $۱\times۶=۶$ پس ۶ را نیز در مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌ها می‌نویسیم: $\{۱, ۶\}$. سپس به سراغ عدد بعدی یعنی ۲ رفته و چون $۲\times۳=۶$ پس $\{۱,۲,۳,۶\}$ و چون دیگر عددی بین ۲ و ۳ نیست کار به پایان می‌رسد. اما برای اعداد مربع کامل مثل $۲\times۲=۴$ یک عدد مثل ۲ در خودش ضرب می‌شود و بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های این اعداد فرد است.

۵- در اتاقی ۱۰۰۰ کمد با شماره‌های به ترتیب از ۱ تا ۱۰۰۰ موجود می باشد.

نفر اول وارد اتاق شد و در همه‌ی کمدها را باز کرد.

نفر دوم وارد اتاق شد و در کمدها را یک در میان بست. در کمدهای ۲ و ۴ و ۶ و ... را بست.

نفر سوم کمدها را ۲تا در میان(۳ و ۶ و ۹ و ...) تغییر وضعیت داد.(کمدهای باز را بست و کمدهای بسته را باز کرد.)

نفر چهارم کمدها را ۳تا در میان(۴ و ۸ و ۱۲ و ...) تغییر وضعیت داد.

در کدام کمدها بعد از ورود نفر ۱۰۰۰ ام باز است.

هر کمد با توجه به شماره‌اش و مقسوم‌علیه‌های آن باز و بسته می‌شود. مثلاً کمد ۶ در ورود نفرات ۲ و۳ و۶ باز و بسته می‌شود. پس می‌توان گفت کمد ۶ ابتدا بسته، سپس باز و در آخر دوباره بسته می‌شود. پس کمدهایی که تعداد مقسوم‌علیه‌های شماره‌ی آن‌ها زوج است در آخر بسته‌اند و کمدهایی که تعداد

مقسوم‌علیه‌های شماره‌ی آن‌ها فرد است در آخر باز هستند. و چون عددهایی که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌ها فرد است، مربع کاملند، بنابراین کمدها با شماره‌های ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ... و ۹۶۱ باز هستند.

۶- درباره حاصل سه جذر داده شده در سؤال چه حدسی می‌زنید؟

$$\sqrt{۱} = ۱$$
$$\sqrt{۱۲۱} = ۱۱$$
$$\sqrt{۱۲۳۲۱} =$$
$$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} =$$
$$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} =$$

?

$$\sqrt{۱۲۳۲۱} = ۱۱۱$$
$$\sqrt{۱۲۳۴۳۲۱} = ۱۱۱۱$$
$$\sqrt{۱۲۳۴۵۴۳۲۱} = ۱۱۱۱۱$$

۷- $\sqrt{۲^{x} \times ۳^{y+1}} = ۷۲ \quad \rightarrow \quad x, y = ?$

?

$$۷۲ = ۳^{۲} \times ۲^{۳} \rightarrow \begin{cases} y+1 = ۲ \rightarrow y = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$

۸- آیا حاصل $\sqrt{۱۰۲۰۲۱}$ یک عدد طبیعی است؟

بعضی از دانش‌آموزان حاصل عبارت فوق را به‌دست آورده و به این نتیجه می‌رسند که حاصل ، یک عدد طبیعی نیست. اما عده‌ای مسئله را به این ترتیب حل می‌کنند که چون مجموع ارقام ۱۰۲۰۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر

۹ بخش‌پذیر نیست بنابراین عدد ۱۰۲۰۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست و ای یعنی عدد ۱۰۲۰۲۱ نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۹- آیا ممکن است عددی با ده تا صفر، ده تا یک و ده تا دو نوشته شود و مربع کامل باشد؟

مجموع ارقام این عدد برابر $۳۰ = (۲+۱+۰)\times۱۰$ می‌باشد و در نتیجه چنین عددی بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست بنابراین نمی‌تواند مربع کامل باشد. این مسأله را برای صد تا صفر و دویست تا یک و دویست تا دو و حالت دویست‌تایی و سیصدتایی تعمیم دهید.

۱۰-بین $\sqrt{۶},\sqrt{۵}$ سه عدد غیر رادیکالی بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۵}\approx ۲/۲۳۶... < ۲/۲۳۷\\ \sqrt{۶}\approx ۲/۲۴۴... > ۲/۲۴۳\end{array}\right\}\rightarrow \sqrt{۵} < ۲/۲۳۷ < \boxed{۲/۲۳۸} < \boxed{۲/۲۳۹} < \boxed{۲/۲۴۰} < ۲/۲۴۳ < \sqrt{۶}$$

در باره‌ی جذر، تمرین‌های مهارتی حل شود تا دانش‌آموز توانایی حل و ساده‌سازی عبارت‌های جذری و مسائل مربوط به آن را کسب کند.

اعداد صحیح

[[تدریس تا صفحه‌ی ۲۴ تا سر جمع عددهای صحیح]]

۱- مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

$$A=\left\{x \,\middle|\, x\in N ,۱<x^{۲}<۱۰۰\right\}$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, x\in N ,۲x^{۲}-۳=۴۷\right\}$$

$$C=\left\{x \,\middle|\, x\in N ,\sqrt{۶۹-۳x}\in Z\right\}$$

$$D=\left\{x \,\middle|\, x\in Z ,۳<\sqrt{x}<۷\right\}$$

$$E=\left\{x \,\middle|\, x\in Z ,\frac{۱}{x}\in Z\right\}$$

$$F=\left\{\frac{x}{y} \,\middle|\, x,y\in Z ,x+y=۰\right\}$$

$$G=\left\{۲^{x-y} \,\middle|\, x,y\in N ,x-۲=y\right\}$$

$$H=\left\{y^{x} \,\middle|\, x,y\in N ,۳x=y ,x<۴\right\}$$

$$I=\left\{\frac{x}{y} \,\middle|\, x,y\in N ,y=x+۳,y<۴\right\}$$

$$J=\left\{\frac{۳x+y}{۳x-y} \,\middle|\, x,y\in N ,xy=۶\right\}$$

$$K=\left\{x \,\middle|\, x\in Z ,x=۶t ,-۳\le t<۱\right\}$$

$A=\{۲,۳,۴,...,۹\}$

$B=\{۵\}$

$C=\{۱۱,۱۵,۲۰\}$

$D=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۴۸\}$

$E=\{۱,-۱\}$

$F=\{-۱\}$

$x+y=۰ \leftarrow$ x و y قرینه‌ی یکدیگرند.

$G=\{۴\}$

$x-۲=y \leftarrow x-y=۲ \leftarrow ۲^{x-y}=۲^۲$

$H=\{۳,۳۶,۷۲۹\}$

x	y	y^x
۱	۳	۳
۲	۶	۳۶
۳	۹	۷۲۹

$I=\{۴,۲/۵,۲\}$

y	x	
۱	۴	۴
۲	۵	۲/۵
۳	۶	۲

	x	y
-۳	۶	۱
$\frac{۱۹}{۱۷}$	۱	۶

$J=\left\{-۳,\frac{۱۹}{۱۷}\right\}$

چون $t \in \square \leftarrow 6t = x \in \square$

x	t
-۱۸	-۳
-۱۲	-۲
-۶	-۱
۰	۰

$K=\{-۱۸,-۱۲,-۶,۰\}$

۲- مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$A=\{-۲۰,-۱۹,-۱۸,...,-۹\}$

$B=\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,...\}$

$C=\{۸,۲۷,۶۴,...,۱۰۰۰\}$

$D=\{۲,۵,۱۰,۱۷,۲۶,...,۱۲۲\}$

$E=\{۱۵,۲۵,۳۵,۴۵,...\}$

$F=\{-۲,-۴,-۶,...,-۲۰\}$

$G=\{۳,۸,۱۳,۱۸,...,۳۸\}$

$H=\{۱,۴,۷,۱۰,۱۳,...\}$

$I=\{۲,۴,۱۶,۲۵۶,...\}$

$J=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

$$A=\{x \mid x\in\square\ ,\ -21< x <-10\}$$

$$B=\{x^2 \mid x\in\square\}$$

$$C=\{x^3 \mid x\in\square\ ,\ 1< x <11\}$$

$$D=\{x^2+1 \mid x\in\square\ , x<12\}$$

$$E=\{5x \mid x\in\square\ , 2< x\}$$

$$F=\{-2x \mid x\in\square\ ,\ x <11\}$$

$$G=\{5x+3 \mid x\in\square\ , -1< x\}$$

$$H=\{3x+1 \mid x\in\square\ , -1< x\}$$

$$I=\{2^{2(x-1)} \mid x\in\square\}$$

$J=\left\{x \mid \frac{12}{x}\in\square\right\}$ = مجموعه‌مقسوم‌علیه‌های عدد۱۲

دقت کنید که در این سؤال برخلاف سؤال قبل ، جواب‌ها یکتا نیستند. و این به این معناست که دانش‌آموزان ممکن است به گونه این دیگر این مجموعه را توصیف کنند که با جواب داده شده در نسخه‌ی معلم متفاوت باشند، اما صحیح باشند. بنابراین جواب‌های دانش‌آموزان را به دقت بررسی کنید.

دنباله‌های عددی

[[تدریس تا انتهای صفحه‌ی ۲۷]]

۱- فریبرز روی تخته‌ی سیاه نوشت:

۱, ۲

و از برادرش فرامرز خواست که پنج عدد دیگر به دنبال این دو عدد (و در سمت راست آن‌ها) بنویسند، به طوری که هفت عدد طبق قانون خاصی به دنبال هم آمده باشند. فرامرز به دنبال دو عدد، عددهای ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را نوشت:

۱, ۲, ۳, ٤, ٥, ٦, ۷

و گفت: این‌ها عددهای طبیعی پشت سرهم هستند. پنج عدد دیگر را به دنبال ۱ و ۲ بنویسید که با عددهای فرامرز فرق داشته باشد، ولی هر کس بخواهد، بتواند ردیف عددها را ادامه دهد. گمان می‌کنید مسأله چند جواب متفاوت دارد؟

قبل از حل این سؤال، دانش‌آموزان زمان کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید تا جواب های متفاوتی برای این سؤال بیابند و آن‌ها را در کلاس بیان کنند.

تعداد پاسخ‌های مسأله، بی‌شمار است. در اینجا چند نمونه را می‌آوریم، آن‌ها را برای دانش‌آموزان بخوانید. از آن‌ها بخواهید بکوشند تا نمونه‌های دیگری پیدا کنند:

۱) هر عدد را دو برابر عدد پیش از خود می‌نویسیم:

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$

۲) به هر عدد ۳ واحد اضافه و حاصل‌جمع را نصف می‌کنیم تا عدد بعدی به دست آید:

$$\text{(عدد چهارم)}\ 2/75 = \frac{5/5}{2} = \frac{2/5+3}{2}\ ;\text{(عدد سوم)}\ 2/5 = \frac{2+3}{2}\ ;\text{(عدد دوم)}\ 2 = \frac{1+3}{2}$$

و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، به این ۷ عدد می‌رسیم:

$1, 2, 2/5, 2/75, 2/875, 2/9375, 2/96875$

۳) به هر عدد قبلی، یک واحد اضافه و حاصل‌جمع را در همان عدد قبلی ضرب می‌کنیم تا عدد بعدی به دست آید:

$$\text{(عدد پنجم)}\ 1806 = 42\times(1+42)\ ;\text{(عدد چهارم)}\ 42 = 6\times(1+6)\ ;\text{(عدد سوم)}\ 6 = 2\times(1+2)\ ;\text{(عدد دوم)}\ 2 = 1\times(1+1)$$

و ۷ عدد ما چنین می‌شوند:

$1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, \ldots$

به‌دست آوردن عدد هفتم را به عهده‌ی دانش‌آموزان بگذارید.

۴) ۱ و ۲ را به ما داده‌اند. به آن‌ها کاری نداریم. برای عددهای بعدی، مجموع دو عدد آخر را دو برابر می‌کنیم، یعنی از عدد سوم به بعد، هر عدد برابر است با دو برابر مجموع دو عدد پیش از آن. به این عددها می‌رسیم:

$1, 2, 6, 16, 44, 120, 328$

۲-این بار فریبرز، این پنج عدد را نوشت:

$$۱ , ۲ , ۷ , ۱۹ , ۱۳۸$$

آیا می‌توانید کشف کنید که فریبرز بنابر چه قانونی این عددها ار نوشته است؟ اگر این قانون را کشف کردید، دو عدد بعدی را بنویسید.

فریبرز برای پیدا کردن هر عدد، دو عدد قبلی را در هم ضرب و حاصل‌ضرب را با ۵ جمع کرده است:

عدد پنجم $= (۷ \times ۱۹) + ۵ = ۱۳۳ + ۵ = ۱۳۸$، عدد چهارم $= (۲ \times ۷) + ۵ = ۱۹$، عدد سوم $= (۱ \times ۲) + ۵ = ۷$،

عدد ششم $= (۱۹ \times ۱۳۸) + ۵ = ۲۶۲۲ + ۵ = ۲۶۲۷$

یافتن عدد هفتم را بر عهده‌ی دانش‌آموزان بگذارید.

۳- این باز فرامرز این پنج عدد را نوشت:

$$۱ , ۲ , \frac{۵}{۲} , \frac{۱۱}{٤} , \frac{۲۳}{۸}$$

و از فریبرز خواست قانونی را کشف کند که طبق آن بتوان عددهای بعدی را نوشت. آیا شما می‌توانید این قانون را کشف کنید؟

این همان نمونه‌ی دومی است که در دو مسأله قبل آوردیم. در اینجا عددها به صورت کسری نوشته شده‌اند: به هر عدد ۳ واحد اضافه و حاصل‌جمع را نصف می‌کنیم تا عدد بعدی به دست آید:

$$۱ ,\ \frac{۱+۳}{۲}=۲ ,\ \frac{۲+۳}{۲}=\frac{۵}{۲}=\frac{\frac{۵}{۲}+۳}{۲}=\frac{۱۱}{٤} ,\ \frac{\frac{۱۱}{٤}+۳}{۲}=\frac{۲۳}{۸}$$

و دو عدد بعدی عبارتند از:

$$\frac{\frac{٤۷}{۱٦}+۳}{۲}=\frac{۲۳}{۸}$$

و

$$\frac{\frac{۲۳}{۸}+۳}{۲}=\frac{۲۳}{۸}$$

۴- این شش عدد، بنابر چه قانونی به دنبال هم آمده‌اند؟

$$۱,۱ ,\ ۲ ,\ ۳ ,\ ۵ ,\ ۸ ,\ ۱۳$$

قانون را کشف کنید و پنج عدد بعد را بنویسید.

این دنباله از اعداد همان اعداد فیبوناچی هستند. در این ردیف عددها، از عدد سوم به بعد، از عدد سوم به بعد، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد پیش از خود:

$$۳=۱+۲ ,\quad ۵=۲+۳ ,\quad ۸=۵+۳ ,\quad ۱۳=۵+۸$$

بنابراین، این دنباله‌ی عددی را می‌توانیم تا هر جا که بخواهیم، ادامه دهیم. سه عدد بعد عبارتند از ۲۱، ۳۴ و ۵۵.

یادداشت. این عددها را که طبق قانونی به دنبال هم آمده‌اند، **دنباله‌ی عددی** می‌نامیم. این نام‌گذاری را یاد بگیرید: هر وقت عددهایی (چه عددهای درست (صحیح) و چه عددهای کسری) بنابر قانونی، پشت سرهم آمده باشند، می‌گویند با یک دنباله‌ی عددی سروکار داریم. در ۴ مسأله قبل، همه‌جا با دنباله‌های عددی روبه‌رو بودیم. چند نمونه‌ی دیگر از دنباله‌های عددی را می‌آوریم:

۱) دنباله‌ی عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر ۵:

۵ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰ , ۲۵ , ۳۰ , ۳۵ , ...

سه نقطه‌ای که در سمت راست عددها گذاشته‌ایم، به معنای این است که این دنباله‌ی عددی را تا هر جا بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم.

۲) دنباله‌ی عددهای طبیعی مجذور کامل:

۵ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰ , ۲۵ , ۳۰ , ۳۵ , ...

۳) دنباله‌ی عددهای اول :

۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ , ۲۳ , ۲۹ , ۳۱ , ...

۵-عدد بعدی در دنباله‌ی اعداد زیر چیست؟

۱۳, ۲٤, ۳۳, ٤۰, ٤٥, ٤۸, ...

□

کافیست اعداد ۱ تا ۱۳ را به صورت افزایشی و کاهشی زیر یکدیگر بنویسیم و در یکدیگر ضرب کنیم.

	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
×	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
	١٣	٢٤	٣٣	٤٠	٤٥	٤٨	٤٩	...					

پس عدد بعدی ۴۹ می‌باشد.

البته دانش‌آموزان می‌توانند از فاصله‌ی بین اعداد نیز به رابطه‌ی مورد نظر دست یابند.

$$\underline{\underline{١}} \,,\, ٣ \,,\, ٥ \,,\, ٧ \,,\, ٩ \,,\, ١١$$

$$٤٨ + ١ = ٤٩$$

۶-جاهای خالی را به گونه‌ای پر کنید که رابطه‌ای بین اعداد وجود داشته باشد؟

۱, ۸, ۱۵, ۳, ◯, ۱۹, ۹, ۱۸, ۱۰, ◯

,۱٤, ۷, ٥, ٤, ◯, ۱۳, ۰, ۱۲, ۱٦, ◯

□ اعداد ۰ تا ۱۹ را بنویسید و از یک شروع کرده، ۷ تا ۷ تا روی اعداد بعدی ببرید. هرگاه به ۱۹ رسیدید دوباره از ابتدا آغاز کنید. دقت کنید هر بار که روی عددی می‌پرید آن عدد حذف می‌گردد و لذا دنباله به صورت زیر خواهد بود.

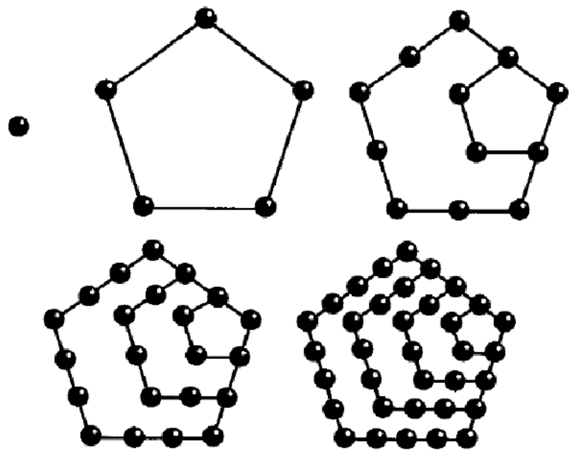
۱, ۸, ۱٥, ۳, ۱۱, ۱۹, ۹, ۱۸, ۱۰, ۲

,۱٤, ۷, ٥, ٤, ٦, ۱۳, ۰, ۱۲, ۱٦, ۱۷

۷-عدد بعدی چیست؟

۱ , ۵ , ۱۲ , ۲۲ , ۳۵ , ۵۱ , ۷۰ , ?

این اعداد به اعداد مخمسی یا ۵ضلعی معروفند.



دانش‌آموزان می‌توانند از راه محاسبه اختلاف بین جملات دنباله نیز به عدد بعدی دست یابند:

٤ , ۷ , ۱۰ , ۱۳ , ١٦ , ۱۹ , ۲۲ $\rightarrow$ ۲۲+۷۰=۹۲

جواب: ۹۲

از دانش‌آموزان بخواهید رابطه‌ای برای یافتن nاُمین عضو این دنباله بیابند. البته در این سؤال صرفاً سعی و تلاش دانش‌آموز و حدس او مورد سؤال قرار گیرد و احتیاج نیست که همه‌ی دانش‌آموزان به جواب : $\frac{n(3n-1)}{2}$ دست یابند.

از دانش‌آموزان بخواهید خود دنباله‌های عددی بسازند و به عنوان سؤال در کلاس مطرح کنند. خود نیز مثال‌های متفاوتی در این مورد در کلاس مطرح کنید.

در واقع یک جلسه از کلاس را می‌توانید به یک مسابقه بین گروه‌های چند نفری بچه‌ها اختصاص دهید. به این ترتیب که در مرحله‌ی اول شما دنباله‌ای را روی تخته بنویسید و هر گروه که زودتر موفق به کشف رابطه آن شد امتیاز به‌دست آورد و در مرحله بعد هر گروه برای گروه‌های دیگر دنباله‌ای طراحی کند و گروه‌های دیگر اگر موفق به کشف رابطه‌ی آن شدند امتیاز دریافت کنند.

۸-دنباله‌ی فیبوناچی را به خاطر می‌آورید!؟ ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

عدد $\frac{۱۰}{۸۹}$ به دنباله فیبوناچی ربط زیادی دارد. $\frac{۱۰}{۸۹} = ۰/۱۱۲۳...$

اگر عدد nام دنباله‌ی فیبوناچی را به صورت زیر در مرتبه‌ی nام اعشار قرار دهیم و با هم جمع بزنیم، این رابطه را کشف خواهیم کرد.

n	
۱	۰/۱
۲	۰/۰۱
۳	۰/۰۰۲
٤	۰/۰۰۰۳
٥	۰/۰۰۰۰٥
٦	۰/۰۰۰۰۰۸
۷	۰/۰۰۰۰۰۱۳
	۰/۰۱۱۲۳٥۹ ...

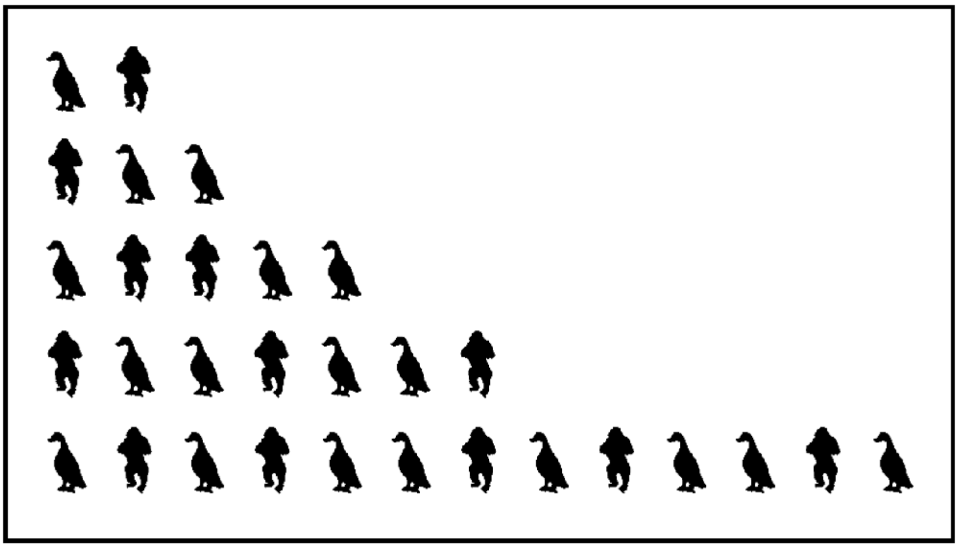
و این باورنکردنی است که:

$$\frac{۱۰}{۸۹} = ۰/۱۱۲۳۵۹۵۵۰۵۶۱۷۹۷۷۵۲۸۰۸۹۸۸۷۶۴ \ldots$$

به نظر شما آیا چنین رابطه‌ای می‌تواند وجود داشته باشد. عدد ۸۹ چه ویژگی دارد؟ این رابطه را تا ۱۰ جمله امتحان کنید.

قبل از شروع این سؤال، درباره‌ی دنباله‌ی فیبوناچی و ویژگی‌هایش صحبت شود و از دانش‌آموزان خواسته شود تا درباره آن تحقیق کنند و درباره‌ی رابطه‌ی این دنباله با طبیعت اطلاعاتی داشته باشند.

۹- رئیس باغ‌وحش شهر ژنو هر روز تعداد حیوانات خود را یکی افزایش می‌دهد. او در ابتدای سال یک اردک و یک میمون داشت و در روز دوم یک میمون و دو اردک! با توجه به شکل زیر او چه قاعده‌ای برای افزایش حیوانات باغ‌وحش به کار می‌برد.



این باغ‌وحش هر روز به جای یک اردک، یک اردک ویک میمون جایگزین می‌کند و به جای یک میمون یک اردک.

در این جا می‌توان به عنوان یک سؤال از دانش‌آموزان علاقه‌مند خواست که تعداد و نوع حیوانات را در روزهای دهم و بیستم و سی‌ام به‌دست آورده و رابطه‌ای برای انواع حیوانات روز nاُم به‌دست آورد. البته این قسمت از تمرین ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌باشد.

در این بخش، حل مسائل مهارتی را به شما وا می‌گذاریم.

اعداد گویا

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۳۶]]

۱-اگر بخواهیم ۱۰۰ عدد بنویسیم که هر یک از آن‌ها از $\frac{41}{43}$ بزرگتر، ولی از $\frac{42}{43}$ کوچکتر باشد، چگونه عمل کنیم؟

صورت و مخرج هر دو کسر را ۱۰۱ برابر می‌کنیم:

$$\frac{41}{43}=\frac{4141}{4343} \quad و \quad \frac{42}{43}=\frac{4242}{4343}$$

بین دو عدد ۴۱۴۱ و ۴۲۴۲، صد عدد درست وجود دارد.

$$4142, 4143, 4144, \ldots, 4240, 4241$$

بنابراین صد عددی که از بزرگتر و از کوچکتر باشند، چنین‌اند:

$$\frac{۴۱۴۲}{۴۳۴۳}, \frac{۴۱۴۳}{۴۳۴۳}, \frac{۴۱۴۴}{۴۳۴۳}, \dots, \frac{۴۲۴۰}{۴۳۴۳}, \frac{۴۲۴۱}{۴۳۴۳}$$

یادداشت. این تنها راه پیدا کردن جواب نیست، ولی ساده‌ترین و زیباترین راه‌هاست. می‌توانیم برای پیدا کردن صد عددی که لازم داریم، بنویسیم:

$$\frac{۴۱/۰۱}{۴۳} = \frac{۴۱۰۱}{۴۳۰۰}, \frac{۴۱/۰۲}{۴۳} = \frac{۴۱۰۲}{۴۳۰۰}, \frac{۴۱/۰۳}{۴۳} = \frac{۴۱۰۳}{۴۳۰۰}$$

و به همین ترتیب ادامه دهیم تا به عدد زیر برسیم:

$$\frac{۴۱/۹۹}{۴۳} = \frac{۴۱۹۹}{۴۳۰۰}$$

تا اینجا ۹۹ عدد به دست می‌آید. برای صدمین عدد مثلاً می‌توان نوشت:

$$\frac{۴۱/۰۱۵}{۴۳} = \frac{۴۱۰۱۵}{۴۳۰۰۰} \quad \text{یا} \quad \frac{۴۱/۹۹۵}{۴۳} = \frac{۴۱۹۹۵}{۴۳۰۰۰}$$

- از دانش‌آموزان بخواهید راه‌حل‌های خود را در کلاس برای بقیه‌ی دوستانشان بیان کنند

- در این بخش، حل مسائل مهارتی بیشتر را به شما توصیه می‌کنیم.