



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

ریاضی طلایه داران

سال دوم راهنمایی

فصل چهارم

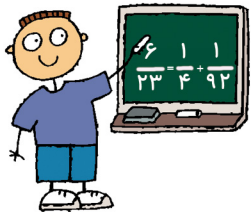
عدد گویا

نسخه ی مخصوص معلم

<http://www.amoozeshshad.com>

فهرست مطالب

تمرین	۱
دور در دور و نزدیک در نزدیک	۲
کسره‌های مصری	۱۰
کسر مسلسل	۱۰



عدد گویا

[[تدریس صفحات ۱۱۳ تا ۱۳۳ کتاب آموزش و پرورش]]

این فصل از روی کتاب آموزش و پرورش و به طور کامل تدریس شود و تمام تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها توسط دانش‌آموزان حل شود. همانند فصل‌های عدد صحیح و توان، در این فصل نیز دانش‌آموزان باید مهارت محاسبات خود را برای اعداد گویا افزایش دهند.

بعد از اینکه فصل ۴ را به طور کامل از روی کتاب آموزش و پرورش تدریس کردید، به دانش‌آموزان بگویید تمرین‌های صفحه‌ی ۱ کتاب تکمیلی را انجام دهند.

[[حل تمرین‌های صفحه‌ی ۱ کتاب تکمیلی]]

تمرین

۱. الف) بین $^{\circ}$ و ۱

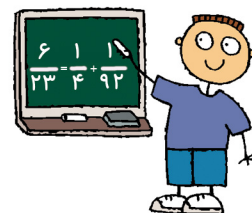
ب) بین ۴ و ۵

ج) بین ۲- و ۳-

د) بین $^{\circ}$ و ۱

ه) بین $^{\circ}$ و ۱

۲. هدف از بیان این تمرین، تدریس روش «دور در دور و نزدیک در نزدیک» در تقسیم اعداد گویا می‌باشد. دسته‌ی اول را دانش‌آموزان می‌توانند از روش صفحه‌ی ۱۳۱ کتاب آموزش و پرورش حل کنند. هنگام حل دسته‌ی دوم، روش «دور در دور و نزدیک در نزدیک» را به دانش‌آموزان آموزش دهید. کتاب آموزش و پرورش تقسیم اعداد گویا را از روش بهتری آموزش داده است که دانش‌آموزان اثبات آن روش را در صفحه‌ی ۵۲ کتاب ریاضی سال اول راهنمایی، در سال گذشته آموخته‌اند. تقسیم اعداد گویا به



روش «دور در دور و نزدیک در نزدیک» به شکل زیر است.

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{4 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$$

دلیل این روش بسیار ساده است و اکثر دانش‌آموزان خودشان می‌توانند آن را تحلیل کنند. منتها تعداد اندکی از دانش‌آموزان ممکن است، مقدار «دور در دور» را به جای اینکه در صورت کسر قرار دهند، در مخرج کسر قرار بدهند و مقدار «نزدیک در نزدیک» را به جای اینکه در مخرج کسر قرار دهند، در صورت کسر قرار بدهند. برای اینکه مشکل این دسته از دانش‌آموزان را بتوانید حل کنید، می‌توانید از داستان کوتاه زیر استفاده کنید. این داستان خطاب به دانش‌آموزان است.

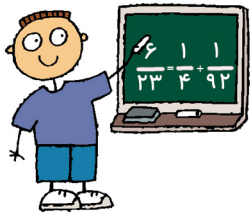
مهمون که عزیز شد، صاحب‌خونه براش گاو می‌کشه!

«فرض کنید شما دو عمو دارید؛ به‌طوری که یکی از آنها با شما همسایه است ولی دیگری در یک شهر بسیار دور از شما زندگی می‌کند. قطعاً اگر قرار باشد شما از این دو عمو در منزل‌تان پذیرایی کنید، به یک شکل این کار را انجام خواهید داد. مثلاً اگر عمویی که به شما نزدیک است و با شما همسایه است، به صورت سرزده برای نهار منزل شما بیاید، شما برای او تخم‌مرغ درست می‌کنید. اما اگر عمویی که از شما دور است، به صورت سرزده به منزل شما بیاید، شما برای او از رستوران نزدیک منزل‌تان کباب می‌خرید. این یعنی عمویی که از شما دور است، در جایگاه بالاتری در نزد شما قرار دارد. و عمویی که به شما نزدیک است، در جایگاه پایین‌تری قرار دارد.»

بعد از تعریف این داستان، می‌توانید ارتباط آن را به روش «دور در دور و نزدیک در نزدیک» بگویید. در هنگام تقسیم دو عدد گویا، اعدادی که از هم دور هستند را با هم ضرب می‌کنیم و در جایگاه بالا یعنی صورت کسر قرار می‌دهیم. و اعدادی که به هم نزدیک هستند را با هم ضرب می‌کنیم و در جایگاه پایین یعنی مخرج کسر قرار می‌دهیم.

۱. برگرفته از یکی از ضرب‌المثل‌های زبان فارسی





عدد گویا

دسته‌ی سوم:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{2}{\frac{3}{4}} &= \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times 4}{1 \times 3} \\ \text{ب)} \quad \frac{\frac{1}{5}}{-3} &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-3}{1}} = \frac{1 \times 1}{5 \times (-3)} \end{aligned}$$

دسته‌ی چهارم:

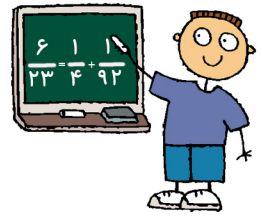
هنگام محاسبه‌ی کسرها، باید به طول خط کسری توجه شود. کسری که طول خط کسری آن کوچک‌تر باشد، در محاسبات اولویت بالاتری دارد.

$$\text{الف)} \quad \frac{\frac{8}{2}}{5} = \frac{\frac{4}{5}}{6} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{1}} = \frac{4 \times 1}{5 \times 6}$$

در واقع در تمرین بالا، صورت کسر اصلی $\frac{8}{2}$ و مخرج آن ۶ است. همچنین در کسر $\frac{8}{5}$ صورت کسر $\frac{8}{3}$ و مخرج آن ۵ است.

در تمرین صفحه‌ی بعد، صورت کسر ۲ و مخرج آن، کسر $\frac{3}{4}$ است که خود این کسر، دارای صورت ۳ و مخرج $\frac{4}{5}$ است. بنابراین طول خط کسرها نشان می‌دهند که کدام کسر در اولویت محاسباتی قرار دارد.





$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{\frac{4}{5}}} = \frac{\frac{2}{3 \times 5}}{\frac{1}{1 \times 4}} = \frac{\frac{2}{3 \times 5}}{\frac{1}{1 \times 4}} = \frac{2 \times 1 \times 4}{1 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \\ \text{ج)} \quad \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{18}} &= \frac{9 \times 2}{4 \times 18} \\ \text{د)} \quad \frac{\frac{18}{2}}{\frac{8}{6}} &= \frac{18 \times 8 \times 6}{2} \end{aligned}$$

۳. برای مثال:

$$9\frac{1}{31}, 9\frac{2}{31}, 9\frac{3}{31}, \dots, 9\frac{30}{31}$$

۴. در حل این تمرین اسمی از معادله نیاورید.

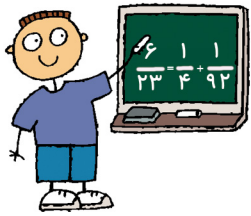
$$\frac{1}{x} + \frac{5}{x} + \frac{8}{x} + \frac{13}{x} = \frac{1+5+8+13}{x} = \frac{27}{x}$$

$$\frac{27}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{x = 18}$$

۵. در حل این تمرین اسمی از معادله نیاورید.

$$\left. \begin{aligned} \frac{10}{15} &= \frac{10+x}{15+6} = \frac{10+x}{21} \\ \frac{10}{15} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10+x}{21} \rightarrow \boxed{x = 4}$$





عدد گویا

۶. تقریب زدن یکی از مهم‌ترین مهارت‌ها در محاسبات ریاضی است.

$$\frac{1023}{2048} \approx \frac{1}{2} \quad \frac{513}{511} \approx 1 \quad \frac{301}{900} \approx \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = 2$$

۷.

الف) $= \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$

ب) $= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

ج) $= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{97}{99} \times \frac{98}{100}$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{97}{99} \right) \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{98}{100} \right) = \frac{1}{99} \times \frac{2}{100}$$

د) $= \frac{4}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{5} \times \frac{10}{6} \times \dots \times \frac{194}{98} \times \frac{196}{99} \times \frac{198}{100}$

$$= 2^{98} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

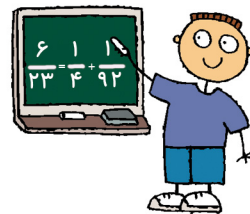
$$= 2^{98} \times \frac{2}{100} = \frac{2^{99}}{25}$$

۸. در حل این تمرین اسمی از معادله نیاورید. چون $n = m - 1$ ، کافی است مقدار m را به دست آوریم.

تا n به دست آید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3 \rightarrow \frac{m}{4} = 3 \rightarrow m = 12 \rightarrow n = 11$$





۹. تمامی تمرین‌های این قسمت از روش تلسکوپی حل می‌شوند. علت نام‌گذاری این روش به تلسکوپی این است که در محاسبات، کسر آخری به کسر اول نزدیک می‌شود و تمام کسرهای وسط از بین می‌روند. کار تلسکوپ نیز همین است. تلسکوپ اشیا دور را برای ما نزدیک می‌کند.

$$\begin{aligned}
 \text{الف)} \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} \\
 &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

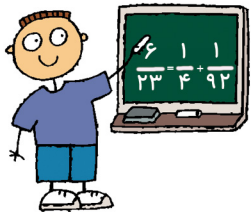
$$\begin{aligned}
 \text{ب)} \quad & \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51} \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{51} = \frac{51 - 3}{3 \times 51} = \frac{16}{51}
 \end{aligned}$$

ج)

راه اول:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35} \\
 &= \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{11} \right) + \left(\frac{4}{11} - \frac{5}{14} \right) + \dots + \left(\frac{11}{32} - \frac{12}{35} \right) \\
 &= \frac{2}{5} - \frac{12}{35} = \frac{2}{35}
 \end{aligned}$$





عدد گویا

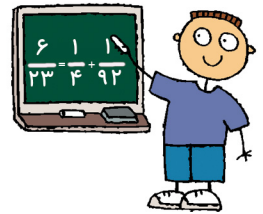
راه دوم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35} \\
 &= \left(\frac{\frac{1}{8-5}}{5} - \frac{\frac{1}{8-5}}{8} \right) + \left(\frac{\frac{1}{11-8}}{8} - \frac{\frac{1}{11-8}}{11} \right) + \left(\frac{\frac{1}{14-11}}{11} - \frac{\frac{1}{14-11}}{14} \right) \\
 &+ \dots + \left(\frac{\frac{1}{35-32}}{32} - \frac{\frac{1}{35-32}}{35} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{1}{3}}{5} - \frac{\frac{1}{3}}{8} \right) + \left(\frac{\frac{1}{3}}{8} - \frac{\frac{1}{3}}{11} \right) + \left(\frac{\frac{1}{3}}{11} - \frac{\frac{1}{3}}{14} \right) \\
 &+ \dots + \left(\frac{\frac{1}{3}}{32} - \frac{\frac{1}{3}}{35} \right) = \frac{\frac{1}{3}}{5} - \frac{\frac{1}{3}}{35} = \frac{2}{35}
 \end{aligned}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6 \times 13} &= \frac{\frac{1}{13-6}}{6} - \frac{\frac{1}{13-6}}{13} \\
 \frac{1}{2 \times 9} &= \frac{\frac{1}{9-2}}{2} - \frac{\frac{1}{9-2}}{9} \\
 \frac{4}{3 \times 7} &= \frac{\frac{4}{7-3}}{3} - \frac{\frac{4}{7-3}}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \\
 \frac{543}{976 \times 452} &= \frac{\frac{543}{452-976}}{452} - \frac{\frac{543}{452-976}}{976} \\
 \frac{a}{b \times c} &= \frac{\frac{a}{b-c}}{c} - \frac{\frac{a}{b-c}}{b}
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 \text{د) } & \frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20} \\
 &= \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \dots + \frac{18}{18 \times 19 \times 20} + \frac{20}{18 \times 19 \times 20} \\
 &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{18 \times 19} + \frac{1}{19 \times 20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}
 \end{aligned}$$

راه اول:

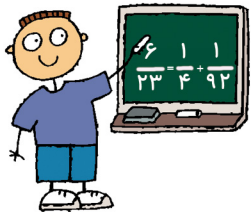
$$\begin{aligned}
 \text{ه) } & \frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51} = \\
 &= \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{2}{11} \right) + \left(\frac{4}{21} - \frac{3}{16} \right) + \dots + \\
 & \left(\frac{10}{51} - \frac{9}{46} \right) = \frac{10}{51}
 \end{aligned}$$

راه دوم:

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\frac{1}{5}}{1} - \frac{\frac{1}{5}}{6} \right) + \left(\frac{\frac{1}{5}}{6} - \frac{\frac{1}{5}}{11} \right) + \dots + \left(\frac{\frac{1}{5}}{46} - \frac{\frac{1}{5}}{51} \right) \\
 &= \frac{\frac{1}{5}}{1} - \frac{\frac{1}{5}}{51} = \frac{10}{51}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{و) } & \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24} \\
 &= \left(\frac{\frac{1}{3}}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{6} \right) + \left(\frac{\frac{1}{3}}{6} - \frac{\frac{1}{3}}{9} \right) + \dots + \left(\frac{\frac{1}{3}}{21} - \frac{\frac{1}{3}}{24} \right) \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{24} = \frac{7}{3 \times 24}
 \end{aligned}$$





عدد گویا

$$\begin{aligned} \text{ز) } &= \left(\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{97 \times 99} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{99} \right) \end{aligned}$$

۱۰. این تمرین را به دقت برای دانش‌آموزان تحلیل کنید و خودتان حالت‌هایی به تمرین اضافه و آنها را نیز در کلاس حل کنید.

$$\frac{x}{+6} = \frac{+1}{+9} \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{+1}{+6} = \frac{x}{+9} \Rightarrow x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$-5 \times \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$-4 \times \frac{3}{2} = -6$$

$$4 \times \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

$$(-4 - 2) \times \frac{3}{2} = -9$$

$$\left(2 - \frac{5}{3} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\left(-\frac{7}{4} \right) \times \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = -\frac{23}{24}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{الف - ۱:}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{الف - ۲:}$$

$$\frac{4}{3} \quad \text{الف - ۳:}$$

$$-\frac{10}{3} \quad \text{الف - ۴:}$$

$$-6 \quad \text{الف - ۵:}$$

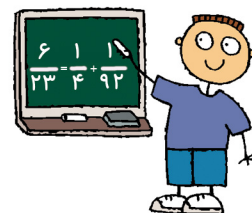
$$\frac{14}{3} \quad \text{ب - ۱:}$$

$$-9 \quad \text{ب - ۲:}$$

$$\frac{2}{9} \quad \text{ج - ۱:}$$

$$-\frac{23}{24} \quad \text{ج - ۲:}$$





[[تدریس کسره‌های مصری - صفحه‌ی ۵ کتاب تکمیلی]]

کسره‌های مصری

مبحث کسره‌های مصری در کتاب تکمیلی به صورت مختصر توضیح داده شده است و در انتهای آن یک تمرین قرار داده شده است.

دانش‌آموزان ممکن است در حل این تمرین دچار مشکل بشوند و نتوانند اعداد گویای تمرین مورد نظر را به صورت کسره‌های مصری بنویسند. به دانش‌آموزان بگویید تبدیل اعداد گویا به کسره‌های مصری کار ساده‌ای نیست. اینکه آنها نتوانسته‌اند تمرین صفحه‌ی ۶ را حل کنند، نشان دهنده‌ی ضعف آنها نیست.

پاسخ تمرین‌ها به شرح زیر است:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{20} + \frac{1}{140}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$$

$$\frac{43}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{6}{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{92}$$

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$$

$$\frac{5}{29} = \frac{1}{6} + \frac{1}{174}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

به دانش‌آموزان بگویید اگر علاقه‌مند به یادگیری تبدیل اعداد گویا به کسره‌های مصری هستند، می‌توانند مقاله‌ی «کسره‌های مصری» را از روی وب‌گاه ریاضی سمپاد مطالعه کنند.

کسر مسلسل

همچنین مقاله‌ی دیگری به نام «کسر مسلسل» بر روی وب‌گاه قرار دارد. دانش‌آموزان را تشویق کنید تا این مقاله را هم مطالعه کنند.

