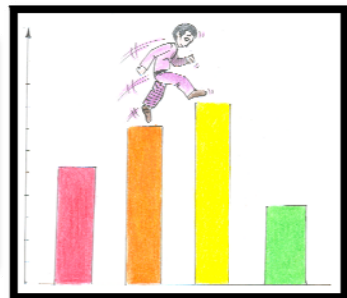
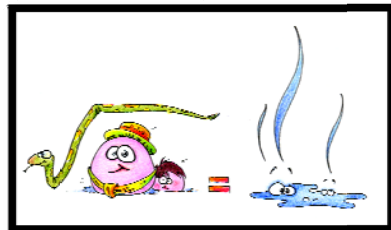


## فصل چهارم

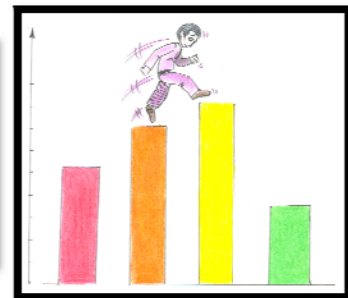
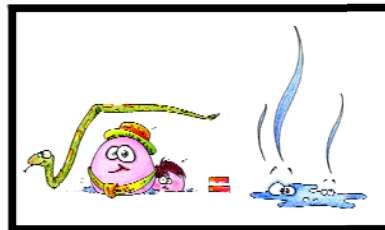
مجموعه‌ی عددهای حقیقی

آمار



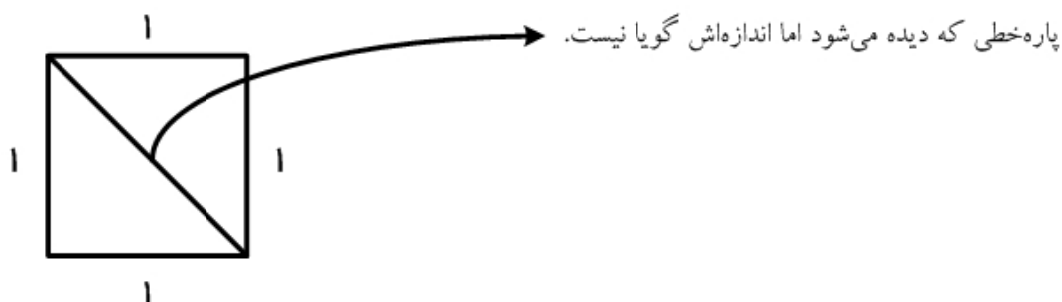
## فهرست مطالب

۳	اعداد گنگ و گویا
۹	آمار
۹	تحلیل اطلاعات
۱۸	میانگین



## اعداد گنگ و گویا

فیثاغورس بسیار به قضیه‌ی خود می‌بالید، زیرا توانسته بود بین هندسه و حساب یک رابطه‌ی اتصال پدید آورد. اما این پیروزی عمر کوتاهی داشت زیرا مثلاً قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی‌توانست به صورت عددی گویا بیان کند.



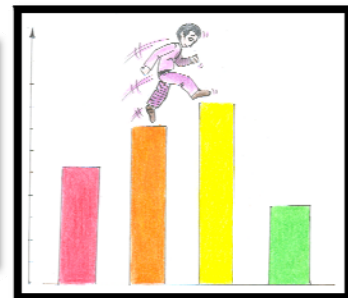
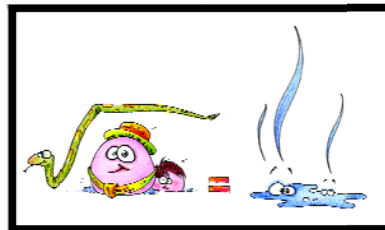
در میان فیثاغورسیان<sup>۱</sup> حیرت زیادی ایجاد شد که پایه‌های فلسفی آن‌ها را به لرزه درآورده بود. آن‌ها به اعدادی به این صورت «آلوگون»<sup>۲</sup> یعنی گنگ یا نگفتنی گفتند و اعضای انجمن فیثاغورسیان، سوگند یاد کردند که تا وجود چنین اعدادی را هرگز فاش نکنند.

پروکلوس<sup>۳</sup> نوشته است: «کسانی که مقادیر اصم یا گنگ را نخستین بار از نهان‌گاه بیرون آوردند و افشا کردند تا آخرین نفر در طوفانی که کشتی آن‌ها را شکست، هلاک شدند. زیرا نگفتنی‌ها باید نگفتنی باقی بماند.»

<sup>۱</sup> افرادی که به اصول باستان اعتقاد نداشتند و به همه چیز به دید «چرا؟» نگاه می‌کردند و بعدها در مدرسه‌ای که فیثاغورس تأسیس کرده بود انجمنی به نام فیثاغورسیان تشکیل دادند.

<sup>۲</sup> Alogon

<sup>۳</sup> Perocelos



تا مدت‌ها  $\sqrt{2}$  تنها عدد گنگ شناخته شده بود. بعدها به گفته‌ی افلاطون، تئودوروس کورنه‌یی<sup>۴</sup> نشان داد که  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$  و  $\sqrt{17}$  نیز گنگ هستند.

[[تدریس صفحات ۹۵، ۹۶ و ۹۷ تا ابتدای محور اعداد حقیقی]]

۱- می‌دانیم که  $\sqrt{2}$  عدد گنگ است. کدام دسته از اعداد زیر گنگ هستند؟ چرا؟

(الف)  $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

(ب)  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots$

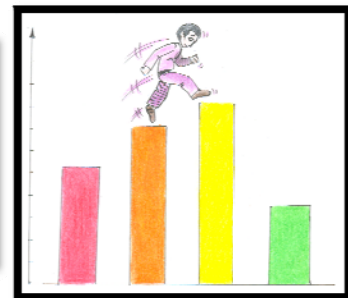
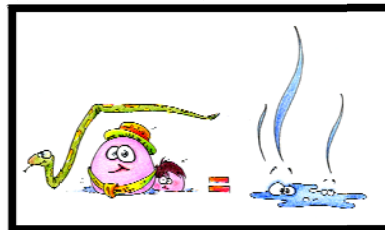
(پ)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{4}, \dots$

□ (الف) این اعداد همگی گنگ هستند. زیرا اگر فرض کنیم مثلاً  $2\sqrt{2}$  گنگ نباشد، دچار مشکل می‌شویم. اگر  $2\sqrt{2}$  گنگ نباشد یعنی گویاست و به صورت کسری قابل نمایش است و حالا اگر این کسر را بر ۲ تقسیم کنیم، باید به کسری دیگر که برابر  $\sqrt{2}$  است برسیم و این یعنی  $\sqrt{2}$  را می‌توان به صورت کسری نوشت و این یک تناقض است زیرا می‌دانستیم که  $\sqrt{2}$  گنگ است. این اثبات را می‌توانیم برای دیگر اعداد این سؤال نیز به کار ببریم.

(ب) این اعداد نیز همگی گنگ هستند و این موضوع با اثباتی مشابه آنچه در قبل آمد، قابل اثبات است.

(پ) این اعداد هم همگی گنگ هستند و اثبات مانند قبل است.

<sup>۴</sup>Theodorus Cyrene



نکته‌ای دانش‌آموزان از این سؤال باید بیاموزند این است که ضرب و تقسیم یک عدد صحیح غیر صفر در یک عدد گنگ، یک عدد گنگ می‌سازد.

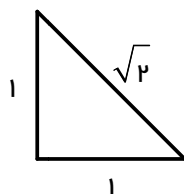
۲- کدام یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{0}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1+0/44}$$

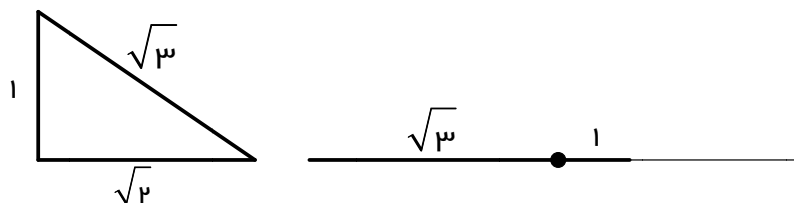
□ اعداد  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \frac{0}{\sqrt{2}} = 0, \sqrt{1+0/44} = 1/2$  گویا هستند و بقیه‌ی اعداد گنگ هستند.

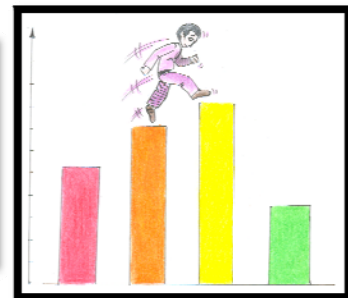
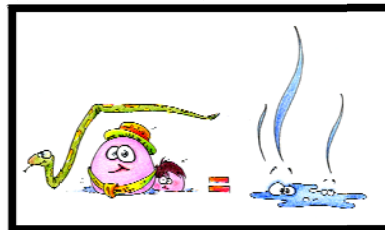
۳- مثلی به اضلاع  $\sqrt{2}, \sqrt{3}+1, 2\sqrt{2}$  رسم کنید.

□ می‌بایست طول‌های  $\sqrt{2}, \sqrt{3}+1, 2\sqrt{2}$  را بسازیم. برای ساخت  $\sqrt{2}$  مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۱ رسم می‌کنیم.

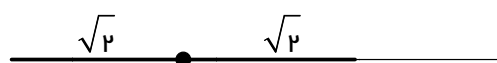


برای ساخت  $\sqrt{3}$  نیز مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع  $\sqrt{2}$  و ۱ می‌سازیم و سپس طول  $\sqrt{3}$  را روی نیم‌خطی جدا کرده و یک واحد به آن اضافه می‌کنیم.





برای  $۲\sqrt{۲}$  هم کافی است که روی نیم خطی دو بار طول  $\sqrt{۲}$  را جدا کنیم.



۴- سه مثلث به مساحت  $\sqrt{۶}$  رسم کنید.

✎ برای این کار روش‌های مختلفی وجود دارد و در این جا ما یک راه حل را آورده ایم. شما به دانش آموزان اجازه دهید راه‌های مختلف و متنوع خود را در کلاس بیان کنند.

□ می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع ۱ و  $\sqrt{۶}$  یا  $\sqrt{۲}$  و  $\sqrt{۳}$  یا  $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$  و ۲ رسم کرد.

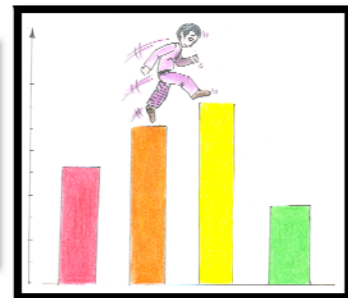
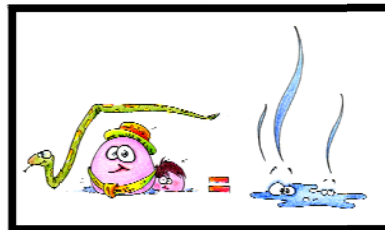
۵- الف) بین  $\sqrt{۲}$  و  $\sqrt{۷}$  هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

✎ در مسائل ۵ تا ۱۰ تنها به حل قسمت ب اکتفا می‌کنیم و روش را به صورت مثال ارائه می‌کنیم. در تمامی این سؤالات به دانش آموزان خود اجازه یافتن راه‌های مختلف و بیان آن در کلاس را بدهید. ممکن است راه‌های شاگردان شما بهتر از جواب‌های آمده در این جا باشد.

□ ب) اعداد  $\sqrt{۲}$  و  $\sqrt{۷}$  را به صورت  $\frac{\sqrt{۲۰۰}}{۱۰}$  و  $\frac{\sqrt{۷۰۰}}{۱۰}$  می‌نویسیم. حالا می‌توان اعداد گنگ بسیاری بین این دو عدد یافت مثل  $\frac{\sqrt{۲۰۱}}{۱۰}, \frac{\sqrt{۲۰۲}}{۱۰}, \frac{\sqrt{۲۰۳}}{۱۰}, \dots$ . البته باید مراقب کسرهایی مثل  $\frac{\sqrt{۲۲۵}}{۱۰}$  بود که گویا هستند زیرا ۲۲۵ مربع کامل است.

۶- الف) بین  $\sqrt{۲}$  و  $\sqrt{۷}$  هشت عدد گویا بنویسید.



ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

□ ب) اعداد  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{7}$  را به صورت  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{2}{6}$  می‌نویسیم و حالا می‌توانیم اعداد

گویای بسیاری بین این دو عدد بیابیم. مثلاً  $\frac{1}{53}$ ،  $\frac{1}{52}$ ،  $\frac{1}{51}$ ،  $\frac{1}{5}$ ، ...

۷- الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

□ ب) این اعداد را به صورت  $\sqrt{4} = \frac{\sqrt{400}}{10}$  و  $\sqrt{49} = \frac{\sqrt{4900}}{10}$  و حالا به راحتی می‌توان

اعداد گنگ بیان این دو عدد مثال زد مثل  $\frac{\sqrt{401}}{10}$ ،  $\frac{\sqrt{402}}{10}$ ،  $\frac{\sqrt{403}}{10}$ ،  $\frac{\sqrt{404}}{10}$ ، ... فقط باید مراقب

مربع کامل‌ها بود.

۸- الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

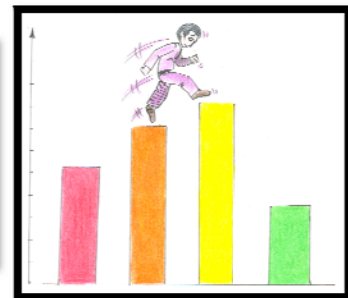
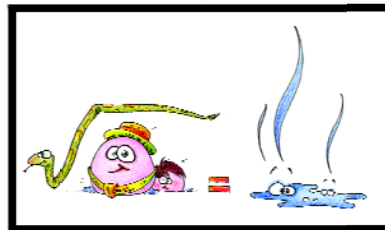
ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

□ ب) بدون تغییر شکل این دو عدد می‌توان اعداد گویای بسیاری بین ۲ و ۷ نوشت مثل

$\frac{2}{1}$  و  $\frac{2}{11}$  و  $\frac{2}{12}$  و  $\frac{2}{13}$  و ...

۹- الف) بین  $\sqrt{2}$  و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.



□ (ب)  $\sqrt{2}$  را به صورت  $1/4$  می نویسم تا بتوانیم اعداد گویای بسیاری بین این دو بنویسیم.  
مثل  $2/41$  و  $2/42$  و  $2/43$  و ...

۱۰-الف) بین  $\sqrt{2}$  و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

(ب) راه حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

□ (ب) اعداد را به صورت  $\frac{\sqrt{200}}{10}$  و  $\frac{\sqrt{4900}}{10} = \sqrt{49}$  می نویسیم و حالا نوشتن اعداد گنگ بین آنها کاری ساده است.

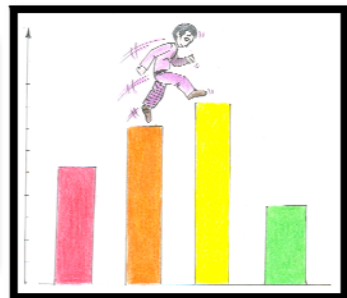
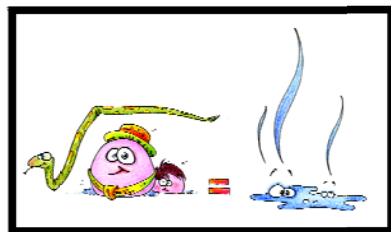
۱۱-زینت می گوید بین هر دو عدد، بی شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد. آیا حرف زینت درست است؟ توضیح دهید.

□ بله. زیرا می توان با استفاده از روش های بالا و تعمیم آنها می توان هر تعداد عدد گنگ و

گویا بین هر دو عدد یافت. مثلاً در سؤال ۱۰ می توان اعداد  $\sqrt{2}$  و ۷ را به صورت  $\frac{\sqrt{200000}}{100}$  و

$\frac{\sqrt{4900000}}{100} = \sqrt{49}$  نوشت و اعداد گنگ بیشتری بین این دو عدد یافت.





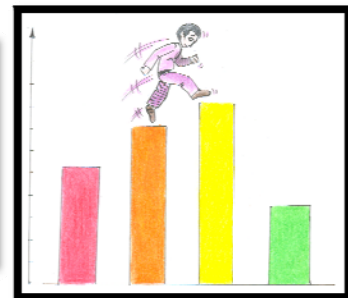
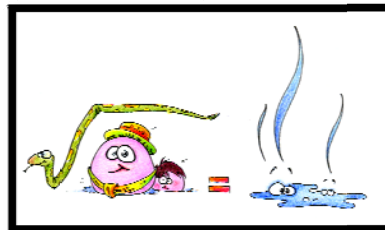
آمار

تحلیل اطلاعات

[[تدریس صفحات ۹۷ تا پایان صفحه ی ۱۰۱]]

۱۲- یک دانش آموز دانشمند، برای آزمایش زیست خود طول کرم های باغچه ی خانه شان را اندازه گرفت.





او اطلاعات به دست آمده درباره‌ی این صد و یک کرم را به این ترتیب دسته‌بندی کرد:

۳۱ کرم به طول  $\frac{3}{1}$ ، ۱۹ کرم به طول  $\frac{3}{2}$ ، ۱ کرم به طول  $\frac{3}{3}$ ، ۱۰ کرم به طول  $\frac{3}{4}$ ، ۲۰ کرم به طول  $\frac{3}{5}$ ، ۱۵ کرم به طول  $\frac{3}{7}$  و ۵ کرم به طول ۴ سانتی متر.

با توجه به این اطلاعات به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) بیشتر کرم‌ها چه طولی داشته اند؟

ب) میانه‌ی این آزمایش چه عددی است؟

دقت کنید که میانه عددی است که نصف کرم‌ها از آن بلندتر و نصف دیگر کرم‌ها از آن کوتاه‌ترند.

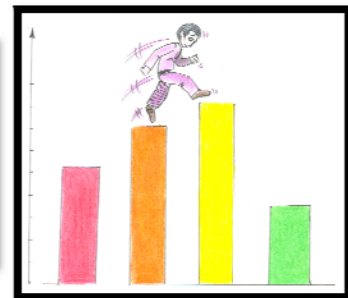
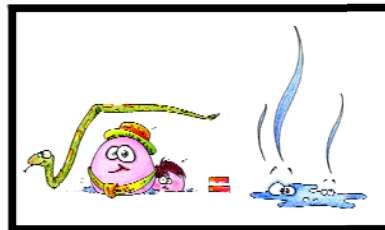
پ) میانگین طول کرم‌ها چقدر است؟

□ الف) بیشتر کرم‌ها طولشان ۳۱ بوده است.

ب) میانه عدد  $\frac{3}{3}$  سانتی متر است زیرا ۵۰ کرم طولشان از  $\frac{3}{3}$  بیشتر و طول مابقی از  $\frac{3}{3}$  کمتر است.

پ) میانگین طول کرم‌ها برابر است با  $\frac{3}{36}$  سانتی متر.

$$\frac{31 \times 3 / 1 + 19 \times 3 / 2 + 1 \times 3 / 3 + 10 \times 3 / 4 + 20 \times 3 / 5 + 15 \times 3 / 7 + 5 \times 4}{101} \approx 3 / 36$$



۱۳- امتحان ریاضی سختی در یک کلاس ۲۵ نفره برگزار شد. بعد از تصحیح اوراق توسط معلم کلاس، معلم نتایج امتحان را برای اولیای دانش‌آموزان این گونه بیان کرد که:

امتحانی که برای فرزندان شما برگزار شد، امتحان سختی بود اما خوش‌بختانه بیشتر دانش‌آموزان در این آزمون، حداکثر نمره (یعنی ۲۰) را کسب کردند که این مایه‌ی سرافرازی و سربلندی مدرسه است.

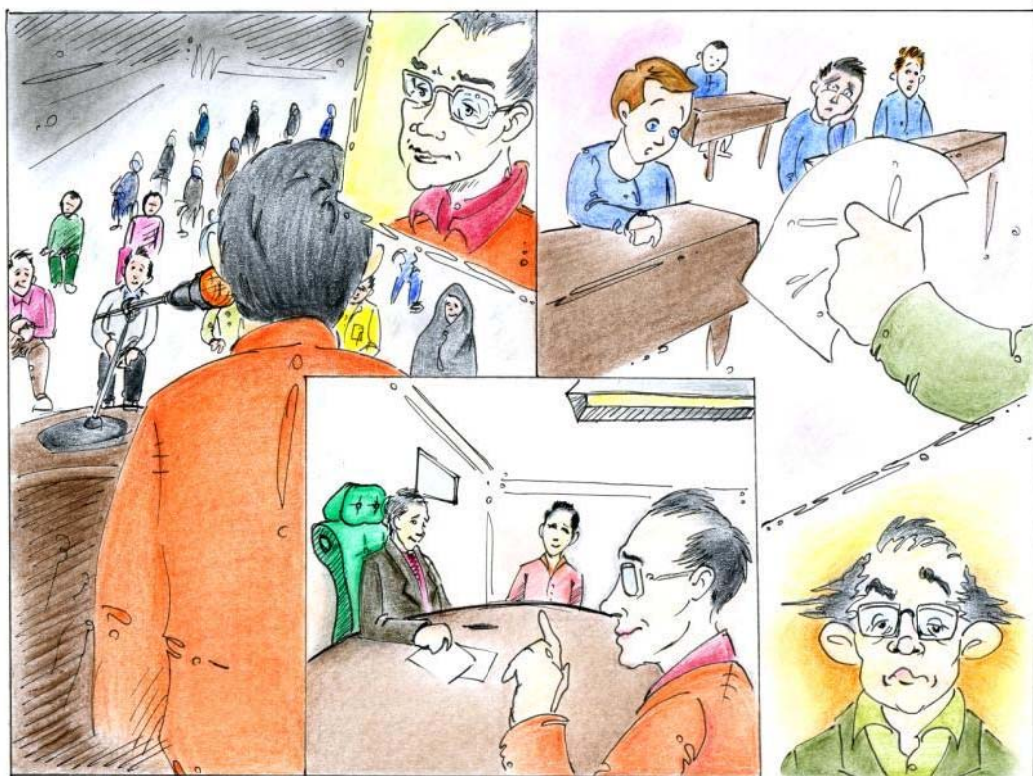
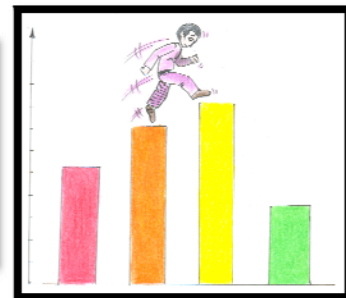
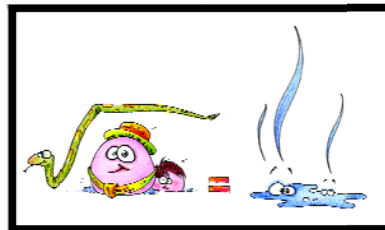
و به این ترتیب اولیا احساس بسیار خوبی نسبت به مدرسه و اوضاع ریاضی دانش‌آموزان پیدا کردند.

معلم چند روز بعد در جلسه‌ای که با مدیر و گروه ریاضی مدرسه داشت، نتایج را به گونه‌ای دیگر تفسیر کرد و گفت:

خدا را شاکر هستیم که در این امتحان ریاضی سخت گروه ریاضی مدرسه نتیجه‌زحماتی را که برای دانش‌آموزان کشیده بود گرفت و بیش از نصف دانش‌آموزان کلاس ۱۸ و بالاتر از آن شدند.

اما همین معلم، در جمع دانش‌آموزان کلاس با نارضایتی اعلام کرد که:

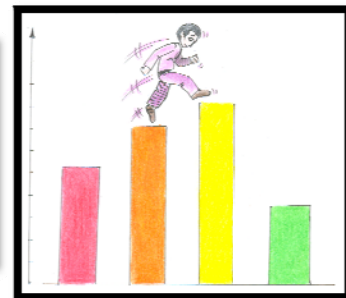
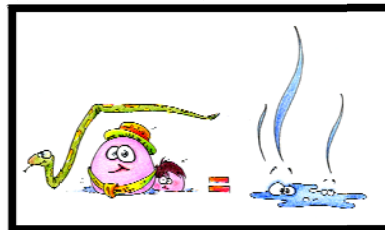
وضعیت ریاضی شما با توجه به نتیجه‌ی امتحان اصلاً راضی‌کننده نیست زیرا میانگین نمرات شما در آزمون ۹ شده و می‌بایست تلاش خود را کرده تا پایان سال نتیجه‌ی بهتری بگیرید.



با توجه به این نکته که می‌دانیم تمام معلم‌های ریاضی دنیا راست‌گو هستند به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) با استناد به سخنان این معلم، به نظر شما، نتایج دانش‌آموزان این کلاس در این آزمون بالاخره مثبت بوده یا منفی؟ توضیح دهید.

ب) جدول از نمراتی که دانش‌آموزان این کلاس در این آزمون کسب کرده‌اند تشکیل دهید به گونه‌ای صحت سخنان معلم را نشان دهند یعنی اولاً بیشتر دانش‌آموزان در این آزمون، حداکثر نمره (یعنی ۲۰) را کسب کرده، ثانیاً بیش از نصف دانش‌آموزان کلاس ۱۸ و بالاتر از آن شده باشند و ثالثاً میانگین نمرات آن‌ها در آزمون ۹ باشد.



□ الف) به دانش‌آموزان اجازه دهید درباره‌ی مثبت یا منفی بودن نتیجه‌ی امتحان با یکدیگر بحث کنند و یکدیگر را قانع کنند.

ب) یکی از جواب‌های ممکن برای این سؤال به صورت زیر است:

فراوانی	۱۲	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۴
نمره	۲۰	۱۸	۱۲	۱۰	۷	۵	۱	۰

که در آن میانگین ۹ است و بیشتر دانش‌آموزان یعنی ۱۲ نفر ۲۰ گرفته‌اند و بیش از نصف دانش‌آموزان ۱۸ و بالاتر از آن شده‌اند یعنی میانه ۱۸ است.

‡ ممکن است دانش‌آموزان جواب‌های دیگری نیز برای این سؤال بیابند.

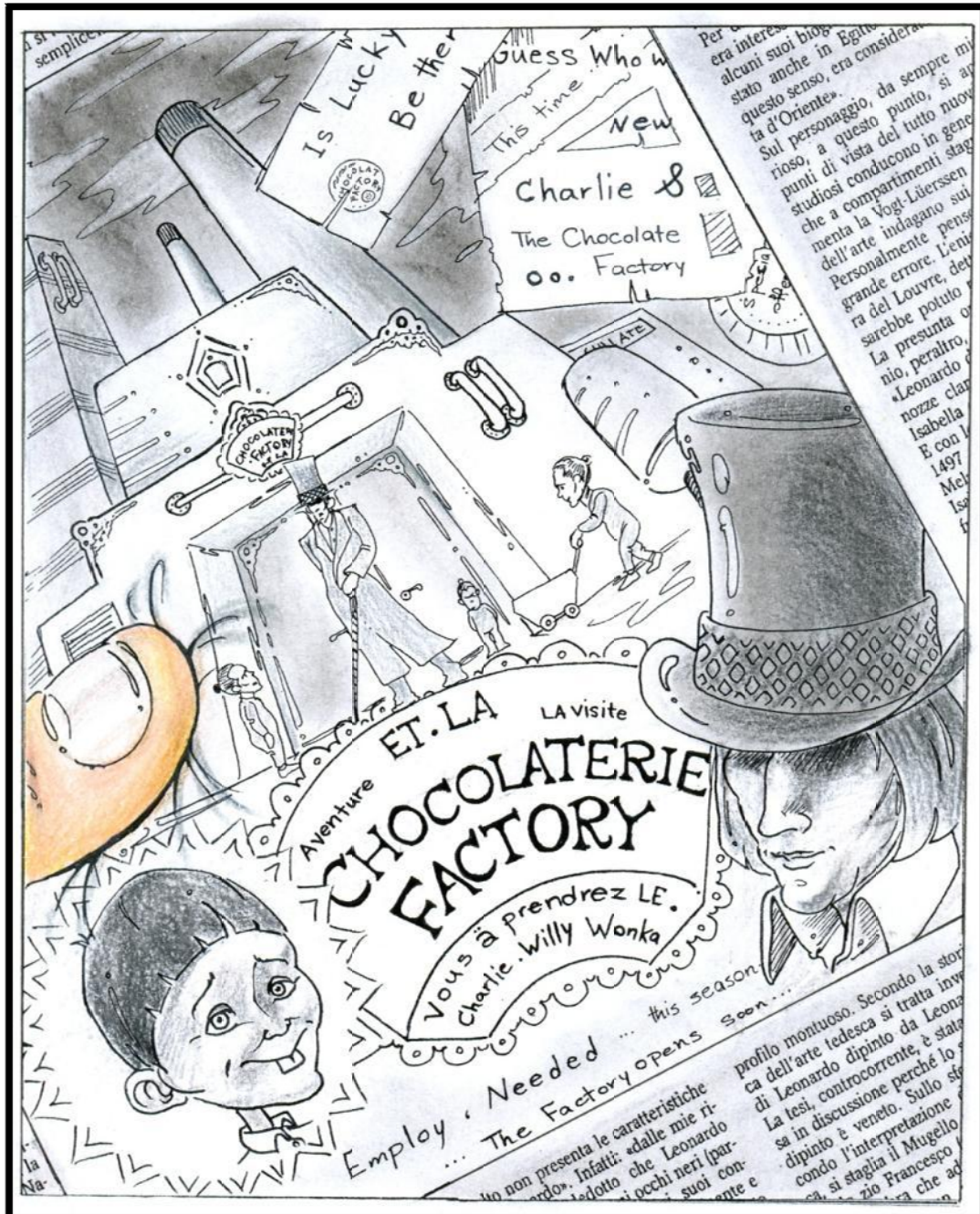
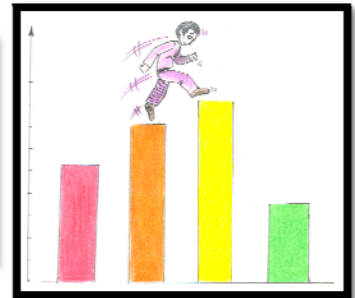
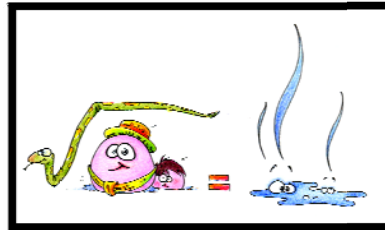
۱۴- الف) آلفردو<sup>۵</sup> در یک روزنامه به دنبال کار می‌گشت تا اینکه آگهی زیر را خواند.

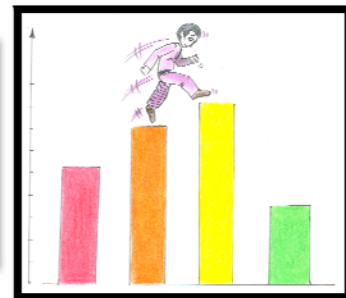
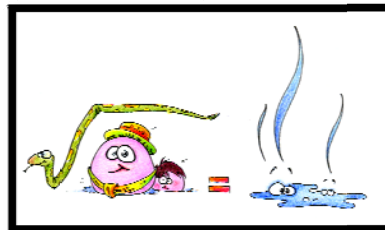
مژده به متقاضیان کار

شرکت شکلات‌سازی چارلی و شرکا به منظور تست مزه‌ی شکلات‌های خود به چند متخصص شکلات‌خوری شکمو نیازمند است.

<sup>۵</sup> Alfredo







آلفردو با توجه به این که چنین ویژگی را در خود می‌دید که بتواند در این شرکت استخدام شود و در ضمن از مزایای دیگر این شغل که همان خوردن شکلات است بهره‌برد تصمیم گرفت که حتماً در آزمون استخدام، شرکت کند. اما او نگران حقوق خود در شرکت بود که ناگهان در همان روزنامه مصاحبه‌ی مدیر این شرکت را خواند که در آن رئیس شرکت گفته بود:

در شرکت کوچک ما، ۲۵ کارمند وجود دارند و بقیه‌ی کارها ماشینی انجام می‌گیرد ولی برای ما کارمندان مهمترین جزء شرکت هستند و حقوق بالایی هم دریافت می‌کنند و گواه آن این- که میانگین حقوق کارمندان شرکت ما امسال، یک میلیون و ۱۴۰ هزار تومان در ماه می‌باشد.

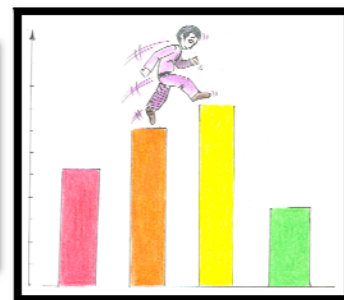
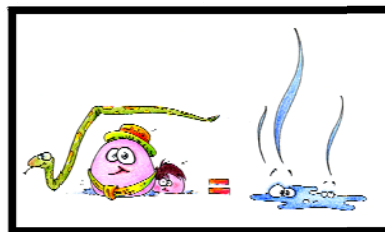
به نظر شما اگر آلفردو در این شرکت استخدام شود حقوقش تقریباً چقدر خواهد بود؟ (دقت کنید که آمار شرکت توسط یک شرکت آماری به‌دست آمده و درست می‌باشد)

ب) آلفردو برای بررسی بیشتر شرایط این شرکت، سراغ اینترنت رفت و در یک وب‌گاه صحبت‌های معاون مالی شرکت را خواند که گفته بود:

وضعیت مالی شرکت بسیار عادلانه است و طبق آمار نیمی از کارمندان شرکت، حقوقشان بیشتر از ۶۰۰ هزار تومان در ماه است و مابقی کمتر یا مساوی این مقدار است. همان‌طور که مشخص است ما در شرکت سعی می‌کنیم سلسله‌مراتب سازمانی را رعایت کنیم.

به نظر شما اگر آلفردو در این شرکت استخدام شود حقوقش تقریباً چقدر خواهد بود؟ (دقت کنید که آمارها دقیق هستند.)



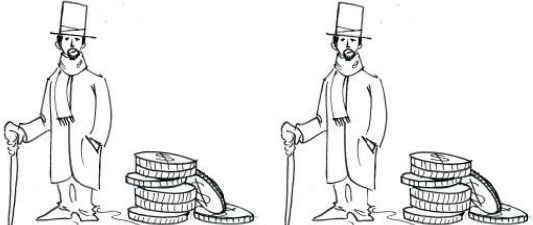
پ) آلفردو به جست‌وجوی خود در اینترنت ادامه داد و در وب‌گاهی دیگر مطلبی را از زبان نماینده‌ی کارکنان شرکت خواند:



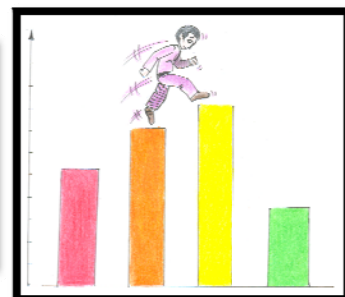
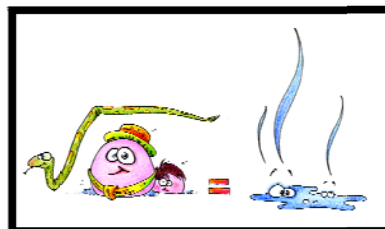
متأسفانه اوضاع مالی کارمندان شرکت اصلاً رضایت‌بخش نیست زیرا اکثر کارمندان شرکت، حقوقشان تنها ۴۰۰ هزار تومان در ماه می‌باشد و این در حالی است که کارمندان به صورت شبانه‌روزی در شرکت کار می‌کنند و جالب‌تر آن که رؤسای شرکت حقوق‌های چند میلیونی دریافت می‌کنند.

با فرض اینکه همه‌ی اطلاعات آماری شرکت درست باشد جدولی از حقوق ۲۵ نفر کارمند شرکت ترتیب دهید که با اطلاعات فوق سازگار باشد.

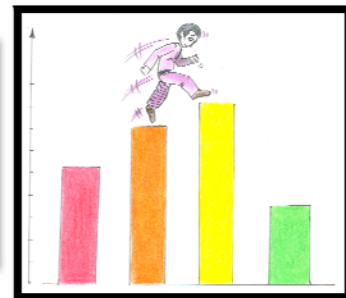
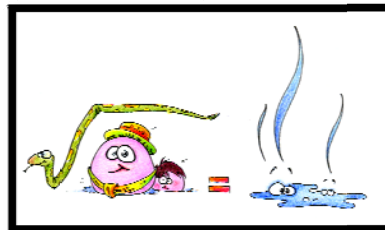
راهنمایی: در این شرکت ۶ رده‌ی سازمانی وجود دارد که جدول فراوانی آن‌ها در دسترس است و شما کافی است که حقوق مربوط به هر رده را بنویسید.

فرآوانی	رده‌ی سازمانی
	رئیس شرکت
	مدیرعامل
	مدیران مالی





	مدیر بازاریابی
	معاونین مدیر
	روؤسای شعبه
	منشی رئیس
	کارگران تست شکلات



ت) کدام یک از سه اطلاع داده شده در سؤال به تنهایی برای تصمیم‌گیری کافی است و آیا مدیران شرکت دروغ گو هستند؟ توضیح دهید.

□ الف و ب) به دانش‌آموزان اجازه دهید درباره‌ی این دو قسمت با یکدیگر بحث و تبادل نظر کرده و به طور تقریبی اعدادی به دست آورند.

پ) یکی از جواب‌های ممکن به صورت زیر می باشد:

فراوانی	۱۲	۱	۴	۳	۱	۲	۱	۱
حقوق (هزار تومان)	۴۰۰	۶۰۰	۷۴۰	۱۰۰۰	۱۱۴۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰	۹۰۰۰

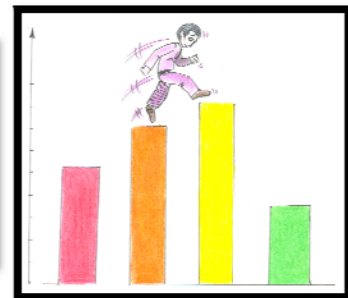
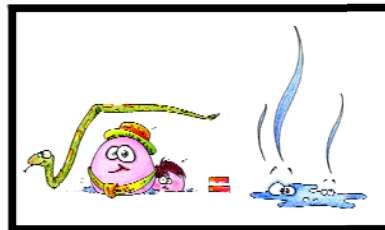
❗ ممکن است دانش‌آموزان جواب‌های دیگری نیز برای این سؤال بیابند.

ت) واضح است که هیچ کدام از این سه اطلاع به تنهایی برای حل سؤالاتی از این دست کافی نیستند اما در این سؤال اطلاع آخر دید بهتری برای استخدام به آلفردو می‌دهد.

## میانگین

[[تدریس صفحات ۱۰۲، ۱۰۳ و ۱۰۴]]

۱۵- آقای تفنن، یک گله با ۲۰ رأس گاو دارد که میانگین وزن این گاوها ۱۵۰ کیلوگرم می‌باشد. آقای تفنن برای کمک به ساخت یک مدرسه در روستای خود، ۶ رأس از گاوهای خود را



فروخت. اگر میانگین وزن این ۶ گاو ۲۰۰ کیلو بوده باشد، میانگین وزن ۱۴ گاو باقی مانده چقدر است؟

□ گاوها را به ترتیب ۱ تا ۲۰ می‌نامیم و وزن آن‌ها را با  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$  نشان می‌دهیم و بنابراین داریم:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{20}}{20} = 150 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{20} = 15 \times 20 = 3000 \quad (1)$$

شش گاو فروخته شده‌اند که آن‌ها را ۱۵ تا ۲۰ می‌نامیم:

$$\frac{x_{15} + x_{16} + \dots + x_{20}}{6} = 200 \rightarrow x_{15} + x_{16} + \dots + x_{20} = 6 \times 200 = 1200 \quad (2)$$

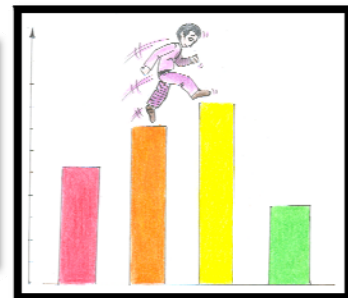
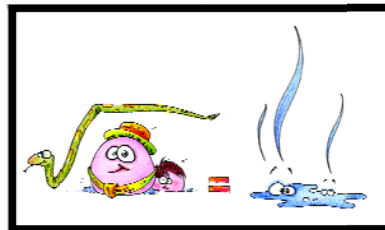
$$(1), (2) \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{14} = 3000 - 1200 = 1800$$

$$\rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{14}}{14} = \frac{1800}{14} \approx 128.57$$

۱۶- آقای تفکر، پس از محاسبه‌ی نمرات ریاضی یک کلاس ۲۱ نفری متوجه شد که یک نمره‌ی ۱۸ را فراموش کرده است وارد لیست نمرات کند. اگر او میانگین را ۱۷ به‌دست آورده باشد، میانگین درست نمره‌های کلاس چند است؟

□ دانش‌آموزان را به ترتیب ۱ تا ۲۱ می‌نامیم و نمره‌ی آن‌ها را با  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{21}$  نشان می‌دهیم. اگر نمره‌ی نفر ۲۱ ام ۱۸ باشد یعنی  $x_{21} = 18$  و بنابراین داریم:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{21}}{21} = 17 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{21} = 17 \times 21 = 357$$



دقت کنید که در مخرج عدد ۲۱ قرار داده‌ایم زیرا معلم به اشتباه یک نمره را یادش رفته ولی تعداد دانش‌آموزان کلاسش را که فراموش نکرده است.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{p_0} + x_{p_1} = 357 + 18 = 375$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{p_0} + x_{p_1}}{21} = \frac{375}{21} \approx 17 \text{ / } 86$$

۱۷- میانگین سن ۱۵ نفر، ۲۵ می‌باشد. اگر از این گروه مسن‌ترین و جوان‌ترین نفرات را حذف کنیم، میانگین ۱۳ نفر باقی‌مانده چه تغییری خواهد کرد؟

❗ به دانش‌آموزان فرصت دهید تا درباره‌ی این سؤال با یکدیگر بحث کنند و حالات مختلف سؤال را بررسی کنند.

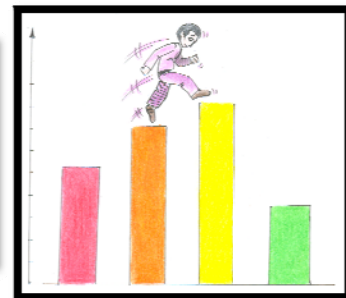
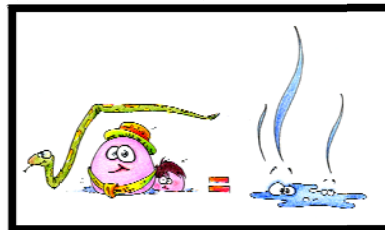
□ میانگین ممکن است ثابت بماند، کم و یا زیاد شود. مثلاً اگر یک ده‌ساله، ۲۳ نفر دوازده‌ساله و ۱ نفر چهارده‌ساله داشته باشیم، با حذف مسن‌ترین و جوان‌ترین میانگین ثابت می‌ماند و یا اگر یک ۸ ساله و یک ۱۰ ساله و ۲۲ نفر دوازده‌ساله و ۱ نفر ۱۸ ساله داشته باشیم، با حذف مسن‌ترین و جوان‌ترین میانگین تغییر می‌کند.

❗ از دانش‌آموزان بخواهید درباره‌ی حالتی که میانگین کم و حالتی که میانگین زیاد می‌شود مثال بزنند.

۱۸- میانگین نمرات ۲۰ نفر ۱۷ می‌باشد.

الف) حداکثر، نمره‌ی چند نفر از دانش‌آموزان می‌تواند ۱۶ باشد؟

ب) اگر بدانیم که تعداد دانش‌آموزانی که ۱۶ شده‌اند با تعداد دانش‌آموزانی که ۱۵ شده‌اند برابر است، حداکثر، نمره‌ی چند نفر ۱۶ شده است؟



□ الف) مجموع نمرات این ۲۰ نفر ۳۴۰ می‌باشد که زیرا اگر فرض کنیم که ۱۶ نفر ۱۶ شده باشند دیگر اگر بقیه هم ۲۰ شوند هرگز میانگین ۱۷ نشده و کمتر از آن می‌شود.

ب) در این شرایط حداکثر ۶ نفر ممکن است که ۱۶ شده باشند. زیرا اگر فرض کنیم تعداد نفراتی که ۱۶ شده‌اند ۷ نفرند این یعنی تعداد نفراتی که ۱۵ شده‌اند نیز ۷ نفرند و با فرض اینکه بقیه‌ی ۶ نفر هم همگی ۲۰ شده باشند باز هم مجموع نمرات کلاس ۳۳۷ می‌شود که کمتر از ۳۴۰ است.

۱۹- نمرات ریاضی چهار کلاس سوم ۱، سوم ۲، سوم ۳ و سوم ۴ را داریم. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۲ برابر ۱۸/۱۲، میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۲ و سوم ۳ برابر ۱۷/۲۴ و میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۳ و سوم ۴ برابر ۱۹/۱۱ است. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۴ چند است؟

□ میانگین کلاس‌های سوم ۱، سوم ۲، سوم ۳ و سوم ۴ را با  $a, b, c, d$  نمایش می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &= 18/12 \rightarrow a+b = 36/24 \\ \frac{b+c}{2} &= 17/24 \rightarrow b+c = 34/48 \\ \frac{c+d}{2} &= 19/11 \rightarrow c+d = 38/22 \\ \rightarrow (a+b) + (b+c) + (c+d) &= 36/24 + 34/48 + 38/22 = 108/96 \\ \rightarrow a + 2b + 2c + d &= a + 2(b+c) + d = a + 2(34/48) + d = 108/96 \\ \rightarrow a + d &= 108/96 - 2(34/48) = 39/96\end{aligned}$$