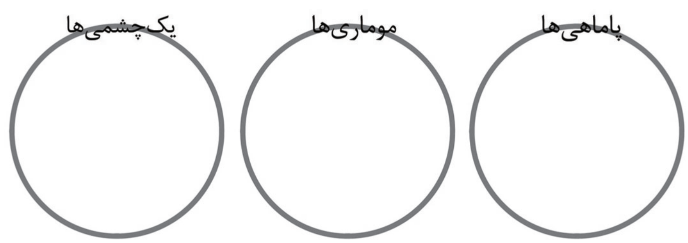
فصل دوم

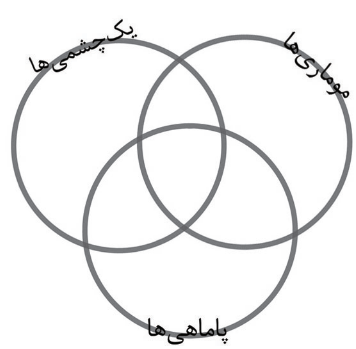
مجموعه‌ها

مسأله‌ی گروه‌ها

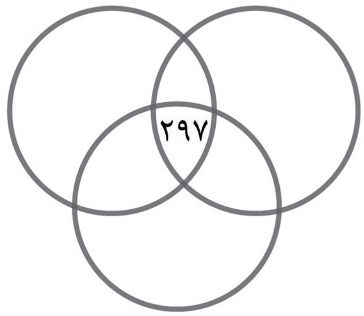
۱) برای حل این مسأله (که تعمیمی بر «مسأله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی» است) ابتدا باید به دنبال شکلی برای بیان این مسأله باشیم. چون با سه دسته موجود سروکار داریم پس می‌توانیم باکمک سه دایره این موجودات را نشان دهیم:



اما سه دایره‌ی جدا از هم بالا برای بیان مسأله درست نیستند. زیرا موجوداتی هستند که مثلاً یک چشم و موماری هستند. با در نظرگرفتن وجود موجودات مشترک (و با سعی و خطا) اجازه بدهید که دانش‌آموزان به مدل زیر برای توصیف مسأله برسند. اگر گروهی از دانش‌آموزان از ابتدا با شکل اخیر آشنایی دارند، از آن‌ها بخواهید که توضیح دهند که چرا این شکل را کشیده‌اند.



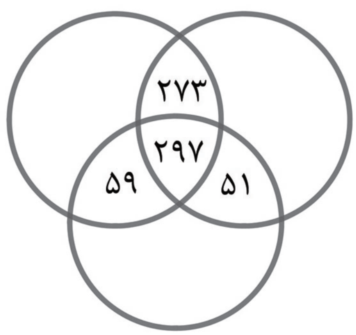
اکنون از ناحیه‌ی مشترک سه دایره شروع می‌کنیم. در این ناحیه ۲۹۷ موجود هستند که هم یک چشمی هستند و هم موماری و هم پاماهی.



سپس به سراغ موجوداتی می‌رویم که فقط دو ویژگی دارند. برای مثال ۵۷۰ موجود یک چشم و موماری داریم؛ که از آن بین، ۲۹۷ نفر آن‌ها یک چشم و موماری و پاماهی هستند. پس:

$$۲۷۳ = ۲۹۷ - ۵۷۰ = \text{تعداد موجوداتی که یک چشم و موماری هستند ولی پا ماهی نیستند.}$$

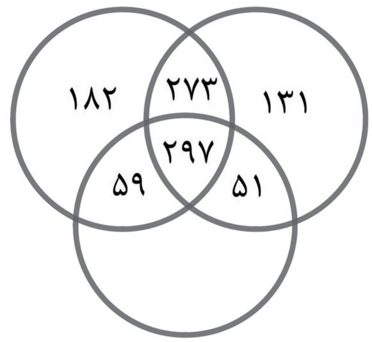
با کمک همین روش می‌توان به اعداد زیر رسید:



اکنون می‌توانیم به سراغ موجوداتی برویم که فقط یک ویژگی دارند. برای مثال ۸۱۱ موجود یک چشم داریم؛ که از آن بین ۲۹۷ نفرشان یک چشم و موماری و پا ماهی هستند، ۲۷۳ نفرشان یک چشم و موماری هستند ولی پاماهی نیستند و سرانجام ۵۹ نفرشان یک چشم و پا ماهی هستند ولی موماری نیستند. پس:

$$۱۸۲ = ۵۹ - ۲۷۳ - ۲۹۷ - ۸۱۱ = \text{تعداد موجوداتی که یک چشم هستند ولی موماری یا پا ماهی نیستند.}$$

با کمک همین روش می‌توان به اعداد زیر رسید:



؟ دست‌کم چند نفر به پیشواز آمده بودند؟

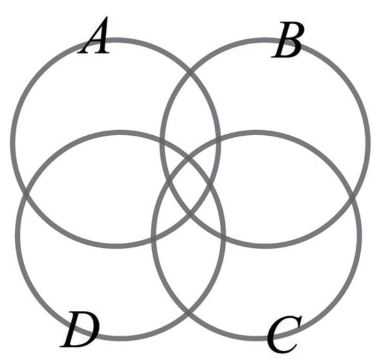
☐ با جمع اعداد به دست آمده به عدد ۱۰۰۴ می‌رسیم. بنابراین دست‌کم ۱۰۰۴ نفر به پیشواز آمده بودند. «ایون تیخی» شخصیت داستانی «ستانیسلاو لم» نویسنده‌ی لهستانی است. او کتابی درباره آموزش مفاهیم مجموعه‌ها به نام «یادداشت‌های روزانه‌ی ایون تیخی» نوشته است. بعدها در بخش مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، می‌توانید به دانش‌آموزان بخش‌هایی از آن کتاب را که به روی وب‌گاه وجود دارد، معرفی کنید.

به عنوان یک سؤال چالش برانگیز می‌توانید از دانش‌آموزان بپرسید:

؟ اگر به جای سه ویژگی، چهار ویژگی داشتیم باید از چه شکلی استفاده می‌کردیم؟

☐ پاسخ سؤال را به دانش‌آموزان ندهید و فقط پاسخ‌های آن‌ها را بررسی کنید.

پاسخ این سؤال به صورت چهار دایره‌ی کنار هم زیر نیست!



زیرا در این شکل قسمت مشترک A و C در B یا D افتاده است. اما در شکل درست ممکن است اشیا (موجوداتی)باشند که ویژگی مجموعه‌های A و C را داشته باشند ولی ویژگی مجموعه‌ی B و ویژگی مجموعه‌ی D را نداشته باشند.

در واقع اگر فقط از دایره کمک بگیریم، کشیدن شکل مورد نظر امکان پذیر نمی‌باشد!

[تدریس صفحه‌ی ۳۲ و صفحه‌ی ۳۳ تا سر تمرین درکلاس]

تذکر: در صفحه‌ی ۳۲ به دانش‌آموزان بگویید که برای نشان دادن اعضای یک مجموعه از نمادهای زیر استفاده می‌کنند:

$$\{ \quad , \quad \}$$

سپس بعد از اندک زمانی از آن‌ها بپرسید:

؟ مجموعه‌ی زیر چند عضوی است؟ (به این مجموعه در صفحه‌ی ۳۲ کتاب درسی اشاره شده است!)

{علی، رضا، احمد، جواد، کریم، اصغر} = تیم فوتبال مدرسه

□ پاسخ ۶ نیست! اگر مجموعه به صورت زیر بود، پاسخ ۶ معتبر بود:

{علی , رضا , احمد , جواد , کریم , اصغر} = تیم فوتبال مدرسه

«،» با «,» متفاوت است! مجموعه‌ی داده شده می‌تواند یک مجموعه‌ی یک عضوی باشد! هیچ نکته‌ی خاصی در این بین نیست. مؤلفان کتاب به این اشتباه ویرایشی پی نبرده‌اند.

تذکر: در صفحه‌ی ۳۷ این جمله آمده است: «لازم نیست که اعضای مجموعه ارتباط خاصی با هم داشته باشند.» به دانش‌آموزان بگویید برای نقد این جمله می‌توانید به «از نگاه فلسفه» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید.

مجموعه‌ها

۱) توجه کنید که نمادهای «$\in$» و «$\notin$» هم می‌توانند عضو یک مجموعه باشند.
برای یک مجموعه رابطه‌های «الف» و «ج» با هم نمی‌توانند درست باشند. همچنین برای یک مجموعه رابطه‌های «ب» و «د» با هم نمی‌توانند درست باشند. مجموعه‌ی زیر نشان می‌دهد که دو رابطه‌ی درست می‌توانیم داشته باشیم:
برای مثال درستی «ج» و «د»: $\{\in, \notin\}$
[تدریس تمرین در کلاس صفحه‌ی ۳۱]

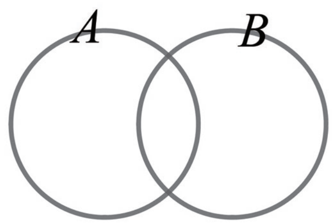
۲) کشیدن شکلی که رفتار مجموعه‌ها را توصیف کند، مهارت بسیار مهمی است. در سؤال ۲ و سؤال ۳ هدف بیان نکاتی در این رابطه است. دقت کنید که در هنگام معرفی شکل یک مجموعه، می توانیم از درون یک خط (خم) بسته کمک بگیریم.

«الف» نادرست است. زیرا «الف» بیان می‌کند که هر عضو B عضوی از A است. در حالی که در صورت مسأله چنین چیزی گفته نشده است! به دانش‌آموزان بگویید که وقتی برای مثال می‌نویسیم «$۱ \in A$»، این به معنی این نیست که «$A = \{۱\}$»، بلکه A ممکن است اعضای دیگری هم داشته باشد.
«ب» درست است. «ج» هم درست است. در هنگام کشیدن شکل مجموعه‌ها می‌توانیم از خط (خم) های بسته‌ی عجیب و غریب هم استفاده کنیم. در سؤال بعدی، به این توانایی اشاره شده است.

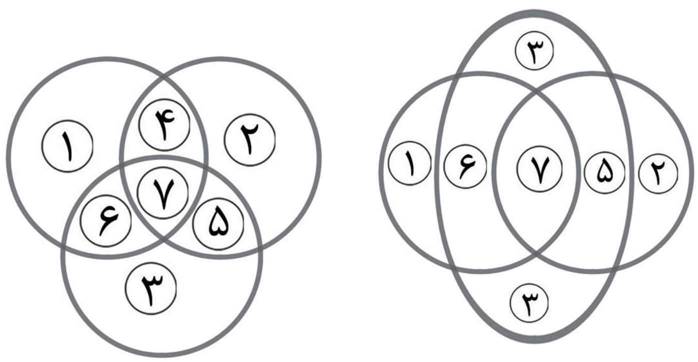
۳) شکل سمت راست، اشاره به دو مجموعه‌ی A و B می کند. این دو مجموعه می‌توانند هم اعضای مشترک داشته باشند و هم اعضای غیر مشترک.

شکل سمت چپ، اشاره به دو مجموعه‌ی A و B می‌کند. این دو مجموعه می‌توانند هم اعضای مشترک داشته باشند و هم اعضای غیر مشترک.

بنابراین هر دو شکل یک واقعیت را نشان می‌دهند. در واقع هر دو به شکل زیر اشاره می‌کنند.



۴) خیر! ناحیه‌های مشابه را در شکل سمت راست و شکل سمت چپ شماره گذاری می‌کنیم.



به موقعیت ناحیه‌ی ۳ دقت کنید. ناحیه‌ی ۳ در دو شکل یعنی مکان اشیایی که فقط در مجموعه‌ی C هستند. می‌بینیم که شکل سمت راستی فاقد ناحیه‌ی ۴ است. ناحیه‌ی ۴ (در شکل سمت چپی) یعنی مکان اشیایی که در A و B هستند ولی در C نیستند. شبیه چنین ناحیه‌ای در شکل سمت راست وجود ندارد.

[تدریس صفحه‌ی ۳۳، قسمت معرفی مجموعه‌ی تهی]

۵) ممکن است دانش‌آموزان چنین مجموعه‌هایی را مثال بزنند:

مجموعه‌ی شهرهای ایران که نام آن‌ها ۲۰ نقطه دارد.

مجموعه‌ی فیل‌هایی که ده پا دارند.

و ...

با آن‌ها درباره‌ی اینکه آیا واقعاً این مجموعه‌ها تهی است، بحث کنید؛ و تا جایی که ممکن است حالت‌های خاص را بررسی کنید. برای مثال:

ممکن است در سفر به یک منطقه‌ی کویری به شهری دور افتاده به نام «پیپاپیپوتایی» برسیم!

ممکن است یک فیل ناقص‌الخلقه‌ی ده پایی به دنیا بیاید.

و . . . .

از دانش‌آموزان بخواهید که مجموعه‌هایی را معرفی کنند که امکان نداشته باشد تهی نباشند. چنین مجموعه‌هایی در ریاضیات یافت می‌شوند. برای مثال:

مجموعه‌ی اعداد اول زوج بزرگ‌تر از ۲.

مجموعه‌ی اعداد فردی که زوج هستند.

و . . . .

هر جا که ریاضیات پاسخ «نه» می‌دهد، آنجا می‌توان یک مجموعه‌ی تهی ساخت. برای مثال:

مجموعه‌ی اعداد گویایی که برابر $\sqrt{۲}$ باشند.

و . . . .

برای دیدن مقاله‌ای درباره‌ی آنجاهایی که ریاضیات «نه» می‌گوید، به «وقتی ریاضیات نه می‌گوید» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید.

۶) دو نماد $\varnothing$ و { } را برای نشان دادن مجموعه‌ی تهی به کار می‌برند.

نماد ϕ با $\varnothing$ فرق دارد! ϕ را بخوانید «فی» و حرف بزرگ آن Φ و شکل دیگر آن φ است. ϕ یک حرف از الفبای زبان یونانی است، اما $\varnothing$ حرفی از هیچ زبان طبیعی بشری نیست! دقت کنید که $\varnothing$ و ۰ در زبان دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند. برای مثال می‌گوییم:

چند دانش‌آموز در امتحان ریاضی مردود شده‌اند؟ صفر تا.

دانش‌آموزانی که در امتحان ریاضی مردود شده‌اند چه کسانی هستند؟ هیچی (تهی).

«صفر» جواب سؤال «چند تا . . . » می‌تواند باشد و «تهی» جواب سؤال «چه اشیا، افرادی . . . ».

با این همه ریاضی دانی به نام پئانو[1] کار جالب توجهی انجام داده است. پئانو سعی می‌کرد که رفتار اعداد را با مجموعه‌ها توصیف کند و به همه نشان دهد که اعداد را می‌توان با کمک مجموعه‌ها تعریف کرد. او به چند قانون و اصل دست یافت. برای دیدن اصول پئانو «پنج اصل پئانو» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید.

[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۳۳ وصفحه‌های ۳۴ تا پایان تمرین در کلاس صفحه‌ی ۳۶]

زیرمجموعه

۱) اثبات «ب» بسیار ساده‌تر از اثبات «الف» است.

۱ـ جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود؛ پس $B \subset A$.

۲ـ در ۱۷۴۲ گلدباخ [2] حدس زد که $A \subset B$. از کنار هم قرار دادن $A \subset B$ و $B \subset A$ نتیجه می شود که

۱) Peano

۲) Golabach

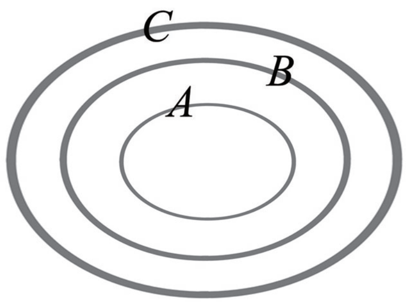
$A = B$.

هنوز هیچ کسی حدس گُلدباخ را اثبات نکرده است! گاهی تشخیص تساوی و یا زیر مجموعه بودن دو مجموعه اصلاً ساده نیست!

۲) اگر در کشیدن شکل مجموعه‌ها نام مجموعه‌ها را بنویسیم، این مشکل به وجود می‌آید که نام مجموعه‌ها عضو مجموعه‌ی بزرگ‌تر باشد. برای مثال در شکل داده شده «$C \in B$» نشان داده شده است!
برای حل این مشکل نام مجموعه‌عا را روی خطی که آن مجموعه‌ها را نشان می‌دهد، می‌نویسند. برای مثال:
برای دیدن یک نقص دیگر کشیدن شکل مجموعه‌ها «نقصی دیگر» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید.

۳)

۴) الف) چون $A \subset B$، پس هر عضو A، عضوی از B است.
چون $B \subset C$، پس هر عضو B، عضوی از C است.
بنابراین هر عضو A، عضوی از C است. پس $A \subset C$.
این ادعا را می‌توان با کمک گرفتن از شکل زیر هم ثابت کرد.



ب) اگر $A \subset B$ ، پس یا $A = B$ یا عضوی در B وجود دارد که آن عضو در A موجود نیست. ثابت می‌کنیم که چنین عضوی نمی‌تواند وجود داشته باشد.
فرض کنید که $a \notin A$ ولی $a \in B$. اما بنابه فرض مسأله، $B \subset A$ ؛ یعنی هر عضو B، عضوی از A خواهد بود. $\perp$
چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. مگر می‌شود که عضوی مثل a وجود داشته باشد به طوری که

$$B \subset A, a \notin B \ , a \in A$$

۵) بنابه فرض مسأله، $A \subset \varnothing$. از طرفی چون A یک مجموعه است، پس $\varnothing \subset A$. اکنون با کمک گرفتن از آنچه در قسمت «ب» سؤال ۴ اثبات کرده‌ایم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{matrix} A \subset \varnothing \\ \varnothing \subset A \end{matrix}\right\} \rightarrow A = \varnothing$$

۶) برای پاسخ می‌توان همه‌ی زیر مجموعه‌های سه عضوی A را نوشت:

$$\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۲,۵\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۳,۵\}$$
$$\{۲,۴,۵\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳,۵\},\{۱,۴,۵\},\{۳,۴,۵\}$$

؟ چرا همه‌ی زیر مجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه‌ی پنج عضوی، یک خانواده‌ی اسپرنر می‌سازند؟

□ زیرا اگر X و Y دو زیر مجموعه‌ی متفاوت سه عضوی از یک مجموعه‌ی پنج عضوی باشند، امکان ندارد داشته باشیم:

«$Y \subset X$ و یا $X \subset Y$»

؟ اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، کدام‌یک از موارد زیر یک خانواده‌ی اسپرنر می‌سازند؟

۱ـ همه‌ی زیر مجموعه‌های سه عضوی A

۲ـ همه‌ی زیر مجموعه‌های چهار عضوی A

۳ـ همه‌ی زیر مجموعه‌های پنج عضوی A

□ هر سه! اگر همه‌ی زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی را در نظر بگیریم، یک خانواده‌ی اسپرنر ساخته‌ایم؛ زیرا هیچ دو زیر مجموعه‌ی k عضوی، نمی‌توانند زیر مجموعه‌ی دیگری شوند.

؟ در سؤال پیش، خانواده‌ی اسپرنر کدام مورد پرجمعیت‌تر است؟ «الف»، «ب» یا «ج».

□ هدف از این سؤال، تحریک «قدرت حل مسأله»ی دانش‌آموز است. به این سؤال پاسخ ندهید، مگر زمانی که دانش‌آموز تلاش ویژه‌ای برای دست‌یابی به جواب انجام داده باشد.

تعداد اعضای «الف»، «ب» و «ج» چنین می‌شود:

الف: $\binom{۷}{۳} = ۳۵$

ب: $\binom{۷}{۴} = ۳۵$

ج: $\binom{۷}{۵} = ۲۱$

دانش‌آموزان علاقه‌مند را به دیدن «Sperner families» در وب‌گاه ریاضی سمپاد دعوت کنید؛ به آن‌ها بگویید که سعی کنند حداقل معنی صورت گزاره را بفهمند. [تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۳۶]

۷) الف)

هر «زیرمجموعه» را متناسب با شماره‌ی اعضایش تنها با یک «شماره‌ی صفر و یکی» نشان می‌دهیم.

هر «شماره‌ی صفر و یکی» متناسب با موقعیت صفرها و یک‌هایش، تنها یک «زیرمجموعه» را نشان می‌دهد.

هر شماره‌ی صفر و یکی بدون در نظر گرفتن نمادهای اضافه‌ی «(»، «,» و «)»، یک عدد حداکثر سه‌رقمی را در مبنای ۲ نشان می‌دهد.

هر عدد حداکثر ۳ رقمی در مبنای ۲، با اضافه کردن ارقام صفر در سمت چپش به یک عدد با سه رقم در مبنای ۲ تبدیل می‌شود. با در نظرگرفتن نمادهای «(»، «,» و «)» بین این سه رقم، یک شماره‌ی صفر و یکی به دست می‌آید.

تبدیل عدد در مبنای ۲ و ۱۰ به یکدیگر

زیرمجموعه	شماره‌گذاری صفر و یکی	عدد در مبنای ۲	عدد در مبنای ۱۰
همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی سه‌عضوی	همه‌ی سه‌تایی‌های به صورت (a,b,c) که a، b و c «صفر» یا یک هستند.	همه‌ی اعداد از ۰ تا ۱۱۱	همه‌ی اعداد از ۰ تا ۷

با مقایسه‌ی دو جدول بالا می‌توانیم دریابیم که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی همان تعداد همه‌ی اعداد از $(۰)_۲$ تا $(\underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{n})_۲$ است؛ یعنی تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر تعداد همه‌ی اعداد از $(۰)_{۱۰}$ تا $(۲^n - ۱)_{۱۰}$ است. بنابراین

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی } n \text{ عضوی} = (۲^n - ۱) + ۱ = ۲^n$$

این تمرین را با صبر و حوصله برای دانش‌آموزان مطرح کنید. بگذارید آن‌ها در مراحل اثبات شریک کار شوند. نکته‌ی اساسی که یادگیری آن‌ها بسیار مهم است این واقعیت است:

«می‌توان مفاهیم را جوری برچسب گذاری کرد که کار را برای ما آسان‌تر کند.»

با اینکه فهرست کردن مجموعه‌ها طبق ستون سمت راستی شاید زیاد جالب به نظر نرسد، اما این روش با کمک گرفتن از برچسب گذاری اعضا با ۰ و ۱ و سپس استفاده از مبنای ۲، منجر به حل مسأله می‌شود.

دانش‌آموزان در «تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه» در وب‌گاه ریاضی سمپاد می‌توانند با چند روش گوناگون به دست‌کوردن تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه آشنا شوند.

؟ روشی بیابید که با کمک آن بتوانیم همه‌ی زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را به دست آوریم.

این روش به الگوریتمی و آن الگوریتم به برنامه‌ای رایانه‌ای منجر می‌شود؛ برنامه‌ای که با گرفتن مقدار n، همه‌ی ۲^n زیر مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را به‌دست آورده و چاپ کند.

□ روش‌های متعددی می‌توان ارائه کرد. یکی از این روش‌ها بر اساس شماره‌گذاری صفر و یکی است. انجام

این تمرین می‌تواند سرگرمی خوبی برای شیفتگان برنامه‌نویسی رایانه‌ای باشد. بنابراین اجباری عمومی در انجام این تمرین نیست.

برنامه‌ی رایانه‌ای دیگری هم می‌توان از دانش‌آموزان علاقه‌مند خواست.

؟ برنامه‌ای بنویسید که باگرفتن مقدارهای n و k، همه‌ی زیر مجموعه‌های k عضوی مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را به‌دست آورده و چاپ کند.

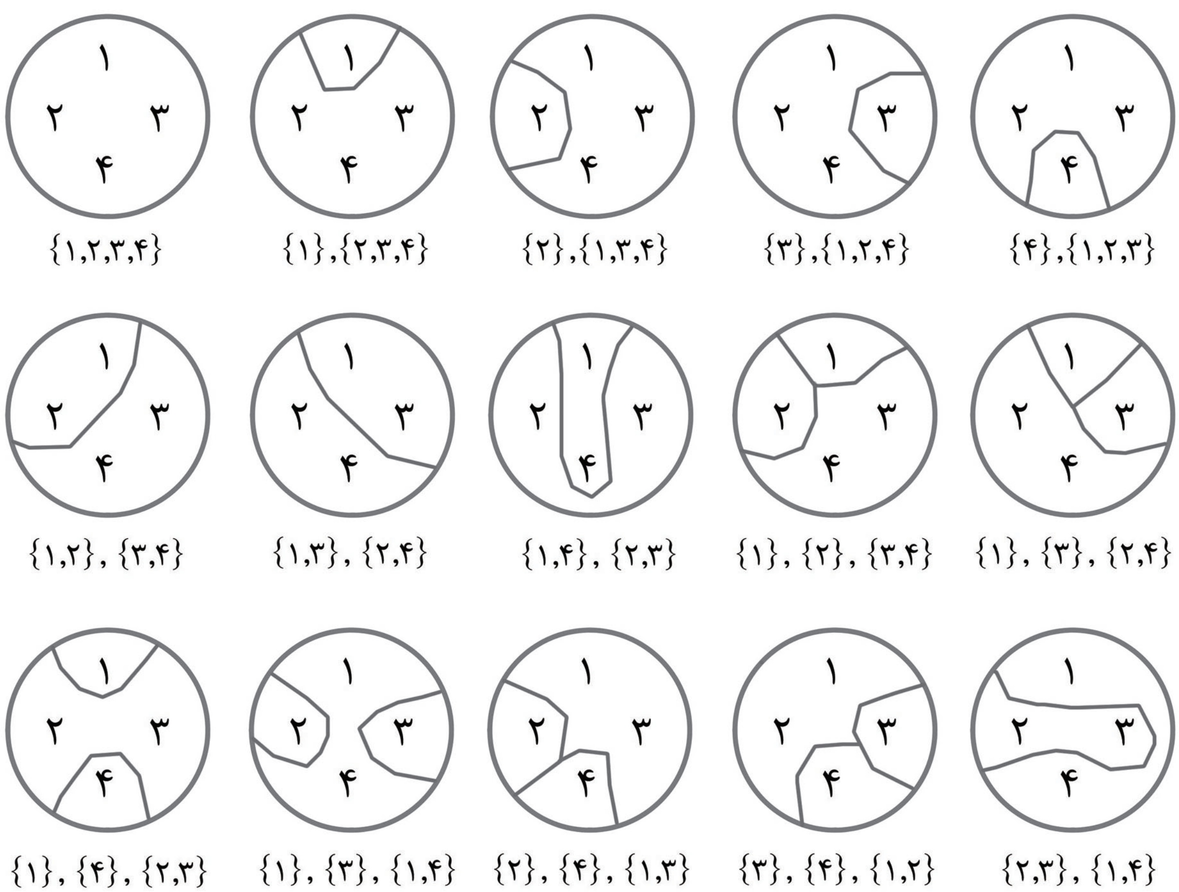
□ پس از تلاش دانش‌آموزان، می‌توانید «Three wonderful algorithms» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد به آن‌ها معرفی کنید.

[تدریس صفحه‌ی ۳۷ و ۳۸]

اجتماع و اشتراک

۱)

۲) الف) چهارمین عدد بِل ۱۵ است.



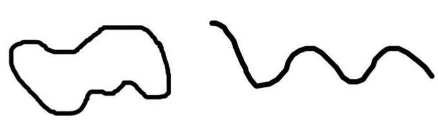
ب)

n	n اُمین عدد بل
۱	۱
۲	۲
۳	۵
۴	۱۵

اجازه بدهید که دانش‌آموزان حدس خود را بگویند. نیازی به پاسخ گویی دقیق نیست. پاسخ دقیق پنجمین عدد بِل برابر ۵۲ است. با حدس زیر می‌توان به این عدد نزدیک شد:

۱
۲
۵
۱۵
؟ **حدس می‌زنیم که باید در ۳٫۵ ضرب شود.**

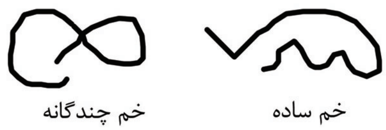
در حدس بالا به عدد $۵۲/۵ = ۳/۵ \times ۱۵$ می‌رسیم که بسیار نزدیک به عدد ۵۲ است!
یادتان نرود که کسی که جرأت حدس زدن پیدا می‌کند می‌تواند گامی رو به جلو بردارد؛ حدسی منطقی و نه حدسی دیمی!
در «Bell numbers» در وب‌گاه ریاضی رابطه‌ی اعداد بل آمده است. در اینجا دوباره می‌توان به یک برنامه‌ی جالب دیگر اشاره کرد.
؟ برنامه‌ای بنویسید که با گرفتن مقدار n، همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را به‌دست آورد و چاپ کند.
□ پس از تلاش دانش‌آموزان، می‌توانید « Partitions of X» را در وب‌گاه‌سمپاد به آن‌ها معرفی کنید.
یکی از مصادیق بسیار جالب افراز را می‌توان در «قضیه‌ی خم بسته‌ی جردن [۱] » یافت. برای آشنایی با این قضیه باید با خط (خم) بسته‌ی ساده آشنا شوید:
خم باز و بسته:



خم باز   خم بسته

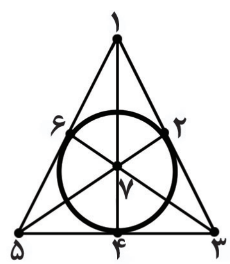
۱) Jordan

خم ساده و چندگانه:



قضیه‌ی خم بسته‌ی جُردن: هر خم بسته‌ی ساده‌ی مسطح، نقطه‌های روی صفحه را به سه دسته‌ی متفاوت افراز می‌کند: ۱) نقطه‌های درون خم ۲) نقطه‌های روی خم ۳) نقطه‌های بیرون خم

۳) با کمک گرفتن از شکل زیر می‌توان به پاسخ دست یافت؛ در این شکل نقطه‌ها را بیانگر عضوها و خطوط را بیانگر زیرمجموعه‌ها می‌دانیم. (دقت کنید که یکی از خطوط، دایره‌ای شکل است.)



$$\{۱,۲,۳\},\ \{۱,۷,۴\},\ \{۱,۶,۵\}$$
$$\{۲,۴,۶\},\ \{۲,۷,۵\}$$
$$\{۳,۷,۶\},\ \{۳,۴,۵\}$$

شکل داده شده (و یا زیرمجموعه‌های نوشته‌شده) اشاره به یکی از مشهورترین و پرکاربردترین ساختمان‌های هندسه‌ی متناهی دارد. نام این شکل (و یا زیرمجموعه‌ها) مثلث فانو[1] است. برای دیدن یکی از خواص جالب مثلث فانو به «مثلث فانو» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید. در این زمینه کتابی به نام «دیدار با خدامراد» نوشته شده است. در «دیدار با خدامراد» بخشی از این کتاب به نام «خدامراد» در وب‌گاه ریاضی سمپاد قابل دسترس می‌باشد.

[تدریس صفحه‌ی ۳۷]

۴)

۱) Fano

(۵

۶) پیش از حل این مسأله درباره‌ی معنی نماد «$\leftrightarrow$» توضیح دهید. برای مثال، «الف» یعنی:

«$A \cap B = A \longleftarrow A \subset B$» و همچنین «$A \cap B = A \longrightarrow A \subset B$»

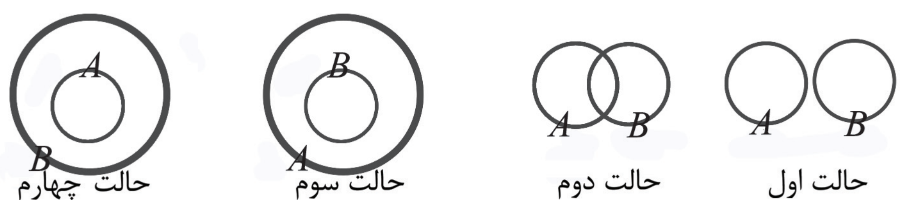
به عبارتی دیگر «الف» یعنی:

«اگر $A \subset B$، در این صورت $A \cap B = A$.» و همچنین «اگر $A \cap B = A$، در این صورت $A \subset B$.»

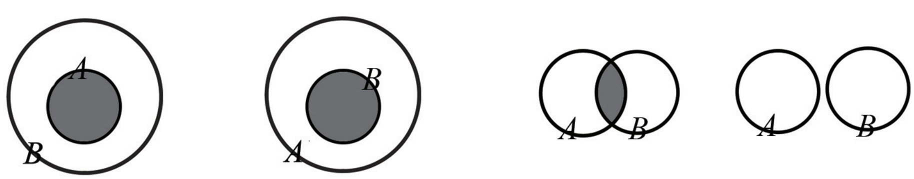
اکنون اثبات‌های «الف» را می‌آوریم. اگر $A = B$، در این‌صورت درستی هر دو ادعا بدیهی است. اگر A و B دو مجموعه‌ی متفاوتی باشند، چنین می‌نویسیم.

اگر $A \cap B = A$، در این صورت $A \subset B$.

اثبات: A و B نسبت به هم می‌توانند تنها یکی از چهار حالت زیر را داشته باشند.



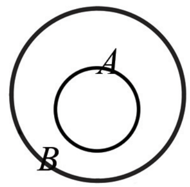
اکنون $A \cap B$ را در این چهار شکل مشخص می‌کنیم.



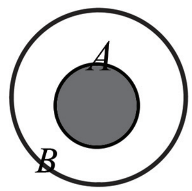
تنها در حالت چهارم رابطه‌ی $A \cap B = A$ درست خواهد بود و می‌بینیم که در این حالت $A \subset B$.

اگر $A \subset B$ در این صورت $A \cap B = A$.

اثبات: چون $A \subset B$، پس شکل دو مجموعه به صورت زیر خواهد بود.



با مشخص کردن $A \cap B$ در این شکل، می‌بینیم که $A \cap B = A$.



با روش مشابهی می‌توان «ب» را برای دانش‌آموزان ثابت کرد.

ج) چون $\varnothing \subset A$، پس با کمک گرفتن از «الف» می‌توان نوشت:

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

د) چون $\varnothing \subset A$، پس با کمک گرفتن از «ب» می‌توان نوشت:

$$A \cup \varnothing = A$$

۷) ب) در هنگام حل این تمرین دانش‌آموز باید بتواند بگوید در هر مرحله‌ی استدلال، از کدام ویژگی مجموعه‌ها استفاده شده است. بسیاری از ویژگی‌های اشاره شده دارای اسم و رسم هستند. نیازی به گفتن این اسم‌ها نیست!

۸) در مثال اول با اینکه در هنگام رسم اشکال از اجتماع نقطه‌ها استفاده می‌کنیم ولی با این حال این مسأله نمونه‌ای از کاربرد اشتراک است؛ زیرا مکان دو رأس مثلث دو سر پاره‌خط می‌شود و مکان رأس سوم از اشتراک بین نقاط دو دایره‌ای که رسم کردیم به‌دست می‌آید.

در مثال دوم با تبدیل معادله‌ی $x^۲ + ۲x = ۰$ به معادله‌ی $x(x + ۲) = ۰$، به حاصل‌ضرب دو عبارتی برخورد کردیم که برابر صفر شده‌اند. از آنجا نتیجه گرفتیم که حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. به این ترتیب جواب مجموعه‌ی معادله‌ی $x^۲ + ۲x = ۰$ را از راه اجتماع مجموعه‌ی جواب‌های دو معادله‌ی $x = ۰$ و $x + ۲ = ۰$ به‌دست آوردیم.

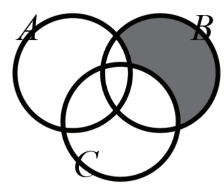
$\{0, -2\}$	$=$	$\{-2\}$	$\cup$	$\{0\}$
مجموعه‌ی جواب معادله‌ی		مجموعه‌ی جواب معادله‌ی		مجموعه‌ی جواب معادله‌ی
$x(x+2)=0$		$x+2=0$		$x=0$

[تدریس صفحه‌ی ۴۱ تا ۴۴]

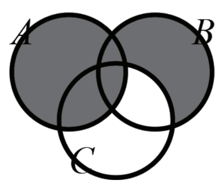
۱)

۲)

۳) الف) نادرست



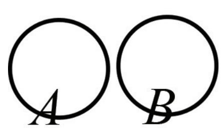
$(A\cup B)-(A\cup C)$



$A\cup(B-C)$

ب) درست

۴) اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، شکل آنها به صورت زیر می‌باشد. با توجه به شکل واضح است که $A-B=A$ و $B-A=B$.



۵) دست‌یابی به اثبات این تمرین کار آسانی نیست؛ زیرا به برهان خلف نیاز دارد.

ثابت می‌کنیم که B نمی‌تواند تهی نباشد. اگر B تهی نباشد، عضوی مانند b دارد ($b\in B$).

$$\left.\begin{array}{r} b\in B\longrightarrow b\in A\cup B \\ A\cup B=A-B \end{array}\right\} \longrightarrow a\in B-A\longrightarrow a\notin B \perp$$

مگر می‌شود هم $b\in A$ و هم $b\notin A$! بنابراین «$a\notin B$» اصلاً نمی‌تواند عضوی داشته باشد. پس B مجموعه‌ی تهی است.

۶) A دو حالت دارد یا «$A=\varnothing$» و یا «$A\neq\varnothing$».

حالت اول) اگر $A=\varnothing$ در این صورت بنا به صورت تمرین خواهیم داشت:

$$\varnothing-B=B-\varnothing$$

اما می‌دانیم که:

$$\varnothing = \varnothing - B = B - \varnothing = B$$

پس $B = \varnothing$. بنابراین $A = B = \varnothing$.

حالت دوم) اگر $A \neq \varnothing$، فرض می‌کنیم که a عضوی از اعضای مجموعه‌ی A باشد($a \in A$).

اکنون ثابت می‌کنیم که حتماً $a \in B$؛ زیرا اگر $a \notin B$ ، در این صورت خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{r} a \in A, a \notin B \rightarrow a \in A - B \\ A - B = B - A \end{array}\right\} \rightarrow a \in B - A \rightarrow a \notin A \ \perp$$

مگر می‌شود هم $a \in A$ و هم $a \notin A$!بنابراین a نمی‌تواند عضو B نباشد. پس هر عضو A ، عضوی از B خواهد شد. بنابراین $A \subset B$.

به روش مشابه می‌توان ثابت کرد که $B \subset A$. اکنون با در نظرگرفتن $A \subset B$ و $B \subset A$ خواهیم داشت: $A = B$.

۷) «الف» و «ب» هر دو درست هستند.

پس از شنیدن نظر و پاسخ دانش‌آموزان درباره‌ی این سؤال، به دانش‌آموزان بگویید که «ج» به نظر درست می‌آید اما با این طور نیست! داستان کشف این واقعیت جالب است:

در اوایل قرن بیستم، فرگه[1] کتابی در زمینه‌ی منطق و مجموعه‌ها نوشت. او در این کتاب به بعضی از اشتباهات ریاضیدانان بزرگ گذشته اشاره کرده بود و به نوعی آنها را مسخره کرده بود. نسخه‌ای از این کتاب، پیش از چاپ به دست راسل[2] می‌رسد. راسل به اشتباهی در آن کتاب پی می‌برد و آن را به فرگه گوشزد می‌کند. راسل کشف کرد که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد! فرگه ناامیدانه سعی می‌کند که جلوی پخش آن کتاب را بگیرد، اما ناشر کتاب موافقت نمی‌کند. فرگه در کتابی که اشتباهات دیگران را مسخره کرده بود، خود اشتباه مسخره‌ای مرتکب شده بود.

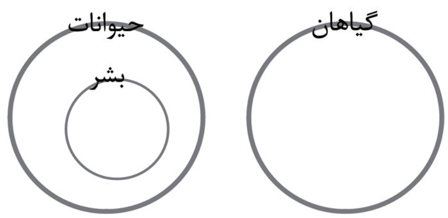
«هیچ‌گاه خود را برتر از دیگران نبینید.»

امروزه آن اشتباهی را که راسل به آن پی برده بود، «باطل‌نمای (پارادُکس) راسل» می‌گویند.

1. Frege 2. Russel

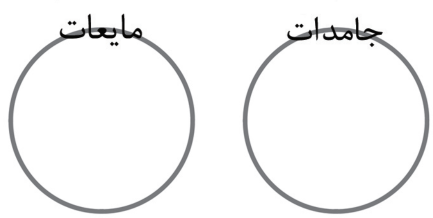
برای دیدن دلیل ریاضی نادرستی «ج» به «باطل‌نمای راسل» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنند. در «ناهیدنامه» در وب‌گاه ریاضی سمپاد هم صورت ساده‌تر و قابل فهم‌تری از باطل‌نمای راسل وجود دارد.

۸) الف) با توجه به صورت «الف» داریم:

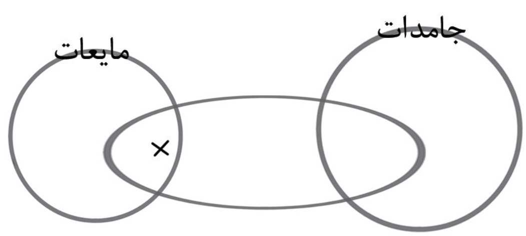


با توجه به شکل می‌بینیم که «هیچ بشری، گیاه نیست».

ب) با توجه به صورت «ب» داریم:



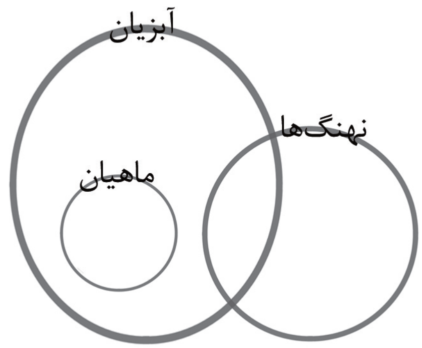
در صورت «ب» گفته شده است که «بعضی اجسام مایع هستند». از این جمله تنها به وجود اجسام مایع پی می‌بریم. اما ممکن است جسم جامدی وجود داشته باشد؛ و ممکن است جسمی که نه مایع باشد و نه جامد وجود داشته باشد. چنین وضعی را به صورت زیر نشان می‌دهیم.



از روی همین جسم مایع که به وجودش پی برده‌ایم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که «بعضی از اجسام، جامد نیستند».

ج) با توجه به شکلی که در قسمت «ب» کشیده‌ایم، نمی‌توان به وجود اجسام جامدی که جسم نباشند، پی‌برد. پس این استدلال نادرست است!

د) با توجه به صورت «د» داریم:



با توجه به شکل می‌بینیم که «ممکن است نهنگی یافت شود که در آب زندگی کند». پس استدلال «د» درست نیست.

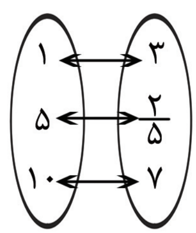
برای دیدن رابطه‌ی مجموعه‌ها و منطق می توانید به کتاب «مبانی منطق» نوشته‌ی محمدعلی اژه‌ای مراجعه کنید. خواندن این کتاب شدیداً به دانش‌آموزان علاقه‌مند به منطق توصیه می‌شود.

[تدریس صفحه‌ی ۴۵]

پیش از شروع داستان «مهمانخانه‌ی عجیب» درباره‌ی هم‌ارزی دو مجموعه توضیح دهید.

فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. اگر اعضای A و B را در کنار هم بچینیم به‌طوری‌که نه عضوی زیاد بیاید و نه عضوی کم بیاید، می‌گوییم A و B «هم‌ارز» هستند. «A و B هم‌ارز هستند» را این‌طور می‌نویسیم: $A \sim B$.

برای مثال دو مجموعه‌ی $A = \left\{۱, ۵, ۱۰\right\}$ و $B = \left\{۳, \frac{۲}{۵}, ۷\right\}$ هم‌ارز هستند؛ زیرا



؟ آیا دو مجموعه‌ی زیر هم‌ارز است؟

$$A = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$$
$$B = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$$

☐ خیر. زیرا تعداد اعضای مجموعه‌ی اول یکی بیشتر از تعداد اعضای مجموعه‌ی دوم است.

داستان «مهمانخانه‌ی عجیب» داستانی جذاب است که رفتار مجموعه‌های نامتناهی را شرح می‌دهد. پس از خواندن داستان و پاسخ‌گویی به سؤالات، به دانش‌آموزان آدرس داستان را در «مهمانخانه‌ی عجیب» در وب‌گاه ریاضی سمپاد

بدهید و به آنها بگویید کلمه‌ی عبور [1] «infinite» است.

انتظار می‌رود پس از خواندن داستان و بحث‌های کلاس، دانش‌آموز درک کند که «یک مجموعه بی‌نهایت عضوی است، اگر که با یک زیرمجموعه‌ای از خود (به جز خودش) هم‌ارز باشد.»

مهمانخانه‌ی عجیب یا هزار و یکمین مسافرت ایون تیخی

خیلی دیر به خانه برگشتم، شب یادبود، در باشگاه «کهکشان آندرومِدا»، تا خیلی بعد از نیمه شب طول کشید. کابوس تمام شب دست از من برنمی‌داشت. خواب‌های آشفته می‌دیدم. مثل این بود که دیو هیولایی می‌خواست مرا ببلعد. به نظرم آمد که دوباره روی سیاره‌ی «دودنوت‌ها» پرواز می‌کنم ... . زنگ تلفن، مرا به دنیای واقعی برگرداند. پروفسور «تارانتوف» دوست قدیمی و همکار من در مسافرت‌های فضایی بین ستارگان، پای تلفن بود، که می‌گفت:

«ایون عزیز، یک دستور فوری! منجمین، چیز عجیبی در کیهان کشف کرده‌اند. از یک کهکشان به کهکشان دیگر، خط سیاه اسرارآمیزی کشیده شده است. هیچکس نمی‌داند موضوع از چه قرار است. بهترین رادیو تلسکوپ‌ها، تلسکوپ‌های نوترونی و جاذبه‌ای، نتوانسته‌اند پرده از این راز بردارند. فوراً به طرف ستارگان آ ت د - ۱۵۸۷، پرواز کن».

فردای آن روز موشک فوتونی خودم را از تعمیرگاه گرفتم، شتاب‌سنج زمانی و آدمک الکترونی را در آن نصب کردم. آدمک زبان‌های فضایی و داستان‌های مربوط به ستارگان را می‌دانست (و می‌توانست مرا از تنهایی و دلتنگی نجات دهد). من به طرف مأموریت خود پرواز کردم.

وقتی که آدمک تمام داستان‌های خود را تمام کرد و می‌خواست که آنها را از نو شروع کند، هدف مسافرت از دور نمایان شد. مِه تیره‌رنگی که خط اسرارآمیز را گسترده بود، در عقب بود و جلوی آن تابلویی به چشم می‌خورد: «مهمانخانه‌ی فضا».

معلوم شد آوارگان بین ستاره‌ها، که من زمانی برای آنها سیاره‌ی کوچکی ساخته بودم، سیاره‌ی خود را از دست داده و دوباره بدون پناهگاه باقی مانده‌اند. آن‌ها برای اینکه بیش از این در کهکشان‌های بیگانه سرگردان نمانند، تصمیم گرفتند ساختمان عظیمی برای همه‌ی مسافران فضایی بسازند. این مهمانخانه تقریباً از همه‌ی کهکشان‌ها می‌گذشت. می‌گویم «تقریباً همه» زیرا آوارگان، بعضی از کهکشان‌های غیرمسکونی را خراب کرده بودند و از باقیمانده‌ی آنها برج‌های مهمانخانه را ساخته بودند.

مهمانخانه، کاملاً مجهز بود. در هر اتاقِ آن شیرهایی بود که پلاسمای سرد و گرم در آنها جریان داشت. در صورت تمایل می‌شد شب به صورت گَرده‌های اتمی درآمد و صبح دوباره به حالت اول برگشت.

مهم‌تر از همه اینکه مهمانخانه «بی‌نهایت» اتاق داشت! آوارگان امیدوار بودند که به این ترتیب، هیچ مسافری در فضا سرگردان نماند و به جمله‌ی ناراحت‌کننده‌ی «اتاق خالی نداریم» برنخورد.

با همه‌ی اینها، من شانس نیاوردم! وقتی که به اتاق انتظار مهمانخانه رفتم، نخستین چیزی که به چشم خورد، این تابلو بود: «اعضای کنگره‌ی جانورشناسان فضایی، برای ثبت‌نام خود به طبقه‌ی ۱۲۷ مراجعه کنند».

چون جانورشناسان فضایی از همه‌ی کهکشان‌ها آمده بودند، یک مجموعه‌ی نامتناهی را تشکیل می‌دادند، به همین مناسبت همه‌ی اتاق‌ها به وسیله‌ی نمایندگان کنگره اشغال شده بود. برای من جایی پیدا نمی‌شد. مسئول ذخیره‌ی جا

1) password

در مهمانخانه واقعاً تلاش کرد که مرا در کنار یکی از جانورشناسان جا بدهد. ولی وقتی برای من روشن شد که یکی از همسایه‌هایی که برای من منظور شده بود با گاز مسموم‌کننده و بدبوی فلوئور نفس می‌کشد و دیگری در درجه‌ی حرارت ۸۶۰ درجه زندگی می‌کند، با کمال ادب از همجواری این همسایه‌های «مطبوع» عذر خواستم.

ساختمان مهمانخانهٔ فضا

خوشبختانه، مدیر مهمانخانه از آوارگان بود و خدمت‌هایی که من زمانی به گروه او انجام داده بودم را به خاطر داشت. او سعی داشت به هر ترتیبی که شده مرا در مهمانخانه جا بدهد، زیرا هنگام شب در مسافرت‌های فضایی احتمال وَرَم ریه‌ها زیاد است. او بعد ازکمی فکر، راهی جالب به نظرش رسید.

؟ چه راهی برای جا دادن ایون به نظرتان می‌رسد؟

مدیر مهمانخانه بعد ازکمی فکر، به مسئول ذخیره‌ی جا رو کرد و گفت:

ـ او را به اتاق شماره‌ی ۱ بفرست.

مسئول ذخیره‌ی جا با تعجب پرسید:

ـ پس کسی را که در این اتاق ساکن است کجا بفرستم؟

ـ او را به اتاق شماره‌ی ۲ بفرست، ساکن شماره‌ی ۲ را به شماره‌ی ۳ و ساکن شماره‌ی ۳ را به شماره‌ی ۴؛ و به همین ترتیب عمل کن.

اینجا بود که من به خاصیت غیرعادی مهمانخانه پی بردم. اگر تعداد اتاق‌های مهمانخانه محدود بود، این راه‌حل باعث می‌شد که مسافر آخرین اتاق در فضای بین ستاره‌ها سرگردان بماند. ولی چون تعداد اتاق‌های مهمانخانه، بی‌نهایت بود، هیچکس بدون‌جا باقی نماند و من جای هیچ مسافر دیگری را نگرفتم.

؟ توضیح دهید که چرا «$\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} - \{۱\}$».

و من هیچ تعجب نکردم، وقتی که صبح فردای آن روز به من پیشنهاد شد که به اتاق شماره‌ی ۱۰۰۰۰۰۰ منتقل شوم. مطلب این بود که نماینده‌های کهکشان و.س.ک ۳۴۷۲ در کنگره‌ی جانورشناسان فضایی دیر رسیده بودند و می‌بایستی به تعداد آنها که ۹۹۹۹۹۹ نفر بودند، اتاق خالی تهیه کرد.

؟ توضیح دهید که چرا «$\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} - \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$».

ولی وقتی که روز سوم اقامت خودم در مهمانخانه به مسئول ذخیره‌ی جا مراجعه کردم، چشم‌هایم سیاهی رفت. در مقابل پنجره صفی به نوبت ایستاده بود که انتهای آن جای دوری نزدیکی‌های ابرهای «ماءلان» گم می‌شد. این صداها پیاپی به گوش می‌رسید:

«دو تمبر کهکشان آندرومدا را با تمبر سیروس عوض می‌کنم!»

«چه کسی تمبر سال ۵۷ سده‌ی فضایی را دارد؟»

با حیرت به طرف مسئول رفتم و پرسیدم:

ـ اینها کیستند؟

ـ کنگره‌ی تمبرشناسان بین کهکشان‌ها.

ـ و عده‌ی آنها زیاد است؟

ـ عده‌ی آنها بی‌نهایت است: از هر کهکشان یک نماینده آمده است.

ـ ولی آنها را چطور جا می‌دهید؟ جانورشناسان فضایی فردا خارج خواهند شد.

ـ نمی‌دانم. پنج دقیقه‌ای است که درباره‌ی همین مطلب با مدیر صحبت می‌کنم.

ولی مسأله کاملاً پیچیده بود و این پنج دقیقه (همان‌طورکه در زمین هم اغلب پیش می‌آید) درست یک ساعت طول کشید. بالاخره مسئول ذخیره‌ی جا از مدیر مهمانخانه جدا شد و شروع به جا دادن مسافران کرد.

؟ مسئول ذخیره‌ی جا چه راهی پیشنهاد کرده بود؟

او ابتدا دستور داد مسافر اتاق شماره‌ی ۱ به شماره‌ی ۲ برود. این دستور برای من عجیب بود، زیرا با تجربه‌ای که داشتم می‌دانستم که به این ترتیب تنها یک اتاق خالی می‌شود، در حالی که تعداد تمبرشناسان بی‌نهایت بود. ولی مسئول به دستورات خود ادامه داد:

ـ مسافر اتاق شماره‌ی ۲ به شماره‌ی ۴، مسافر شماره‌ی ۳ به شماره‌ی ۶ و به طور کلی مسافر اتاق شماره‌ی n به اتاق شماره‌ی $2n$ منتقل شود.

حالا دیگر نقشه‌ی او معلوم بود: به این ترتیب، او بی‌نهایت اتاق با شماره‌های فرد را خالی کرده بود و می‌توانست تمبرشناسان را در آنها جا دهد. در نتیجه اتاق‌های با شماره‌ی زوج در اختیار جانورشناسان و اتاق‌های با شماره‌ی فرد در اختیار تمبرشناسان قرار گرفت! و اما من در سه روزی که در آنجا بودم چنان آشنایی و دوستی با جانورشناسان پیدا کرده بودم، که آنها مرا به عنوان رئیس افتخاری کنگره‌ی خود انتخاب کرده بودند؛ من هم همراه جانورشناسان اتاق خود را ترک کردم و از اتاق شماره‌ی ۱۰۰۰۰۰۰ به اتاق شماره‌ی ۲۰۰۰۰۰۰ رفتم. تمبرشناس آشنای من که در نوبت ۵۷۴ بود، اتاق شماره‌ی ۱۱۴۷ را اشغال کرد. به‌طورکلی تمبرشناسی که در ردیف nاُم بود، در اتاق شماره‌ی $2n-1$اُم ساکن شد.

؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

□ اگر A زیرمجموعه‌ای از اعداد (حقیقی) باشد، A^+ اعضای مثبت A را نشان می‌دهد.
اگر اعداد فرد را با $\mathbb{O}$ و اعداد زوج را با $\mathbb{E}$ نشان دهیم، از آنچه که گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{O}^+$$
$$\mathbb{N} \sim \mathbb{E}^+$$

؟ آیا درست است که «$\mathbb{O}^+ \sim \mathbb{E}^+$»؟

□ بله.

؟ آیا درست است که «$\mathbb{O} \sim \mathbb{E}$»؟

□ بله.

روز بعد وضع اتاق‌ها بهتر شد، کنگره‌ی جانورشناسان تمام شده بود و آنها به خانه‌های خود بازگشتند. من هم به محل اقامت مدیر مهمانخانه انتقال پیدا کردم زیرا آنجا یک اتاق خالی شده بود. با این همه میزبان مهمان‌نواز من دلتنگ بود. از او پرسیدم:

ـ چه پیش آمده است؟

ـ نیمی از شماره‌ها خالی است، نقشه‌ی مالی اجرا نمی‌شود!

درواقع من اصلاً نمی‌فهمیدم که صحبت بر سر کدام نقشه‌ی مالی بود، زیرا پول از یک مجموعه‌ی نامحدود وصول می‌شد؛ ولی با وجود این توصیه کردم: مسافران را فشرده‌تر کنید، آنها را طوری جابه‌جا کنید که همه‌ی اتاق‌ها اشغال شود.

انجام این کار خیلی ساده بود. تمبرشناسان در اتاق‌های با شماره‌ی فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و غیره بودند. ساکن اتاق شماره‌ی ۱ به جای خود باقی می‌ماند، ساکن اتاق شماره‌ی ۳ به شماره‌ی ۲، ساکن اتاق شماره‌ی ۵ به شماره‌ی ۳، ساکن اتاق شماره‌ی ۷ به شماره‌ی ۴ و غیره منتقل می‌شد. در نتیجه، بدون اینکه مسافر جدیدی وارد شود، تمام اتاق‌ها پر می‌شد.

ولی نگرانی‌های مدیر در اینجا تمام نمی‌شد. معلوم شد که آوارگان به ساختن همین مهمانخانه‌ی فضا، اکتفا نکرده‌اند. معمارهای ناآرام و خستگی‌ناپذیر، مجموعه‌ی نامحدودی مهمانخانه ساخته بودند که در هر کدام از آنها هم بی‌نهایت اتاق وجود داشت. برای این منظور، آنها بسیاری از کهکشان‌ها را خراب کرده بودند، این عمل تعادل بین کهکشان‌ها را به هم زده بود که می‌توانست موجب عواقب غم‌انگیزی شود؛ به همین مناسبت به آنها پیشنهاد شده بود که همه‌ی مهمانخانه‌ها، به جز مهمانخانه‌ی فضا را ببندند و مصالح آنها را به جای اصلی برگردانند. ولی اجرای این دستور مشکل بود، زیرا همه‌ی مهمانخانه‌ها (و از آن جمله مهمانخانه‌ی ما)، پر از مسافر بودند. می‌بایستی ساکنین بی‌نهایت مهمانخانه را، که هر کدام از آنها بی‌نهایت مستأجر داشت، به یک مهمانخانه منتقل کرد، که تازه خود این مهمانخانه هم پر بود. مدیر با صدای بلند گفت:

ـ برای من کافی است! من ابتدا در یک مهمانخانه‌ی پر یک نفر جا دادم، سپس ۹۹۹۹۹۹ مسافر جدید را، سپس بی‌نهایت مراجعه‌کننده‌ی تازه را پذیرفتم، حالا از من می‌خواهند که بی‌نهایت مجموعه‌ی بی‌نهایت مستأجری را در این مهمانخانه جا بدهم. نه! مهمانخانه که کِش نمی‌آید، من چطور جا تهیه کنم؟

ولی دستور باید اجرا می‌شد و بعد از پنج روز باید همه‌چیز آماده‌ی پذیرفتن مهمان‌های جدید می‌گشت. هیچ‌کس در این روزها در مهمانخانه کار نمی‌کرد، همه فکر می‌کردند که چگونه مسأله را حل کنند. حل مسأله به مسابقه گذاشته شد و اعلام شد که برنده‌ی آن به جای دریافت جایزه، به یکی از کهکشان‌ها مسافرت مجانی خواهد کرد. ولی همه‌ی راه‌حل‌های پیشنهادی نامناسب بود. مثلاً آشپز جوانی پیشنهاد کرده بود که ساکنین موجود مهمانخانه‌ی ما به اتاق‌های شماره‌ی ۱، ۱۰۰۱، ۲۰۰۱ و غیره منتقل شوند. سپس ساکنین مهمانخانه‌ی دوم را در اتاق‌های شماره‌ی ۲، ۱۰۰۲، ۲۰۰۲ و غیره و ساکنین مهمانخانه‌ی سوم را در اتاق‌های شماره‌ی ۳، ۱۰۰۳، ۲۰۰۳ و غیره جا دهند و همین طور برای مهمانخانه‌های بعدی. این طرح به این مناسبت برگردانده شد که تنها برای مسافران ۱۰۰۰ مهمانخانه جا تهیه می‌کرد و ساکنین مهمانخانه‌ی ۱۰۰۱ بدون جا می‌ماندند.

؟ چه راهی پیشنهاد می‌کنید تا بی‌نهایت مسافر بی‌نهایت کهکشان را در مهمانخانه جا بدهید؟

حسابدار مهمانخانه راه‌حلی پیشنهاد کرد که خیلی بد نبود. او توصیه کرد که از این دنباله‌ی عددی استفاده کنند:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, ...

راه‌حل او چنین بود: ساکنین مهمانخانه‌ی اول را در اتاق‌های شماره‌ی ۲، ۴، ۸، ۱۶، و ... جا بدهند. ساکنین مهمانخانه‌ی دوم را در اتاق‌های شماره‌ی ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و ... جا بدهند؛ و به همین ترتیب برای ساکنین سایر مهمانخانه‌ها عمل می‌کنیم.

مدیر از او پرسید:

ـ پس برای ساکنین مهمانخانه‌ی سوم باید از دنباله‌ی زیر استفاده کنیم؟

$$۴,\ ۱۶,\ ۶۴,\ \ldots$$

حسابدار جواب داد:

ـ البته!

ـ در این صورت به اشکال برمی‌خوریم، در اتاق شماره‌ی ۴، مسافری از مهمانخانه‌ی اول را جا داده‌ایم و حالا باید در همانجا، مسافری از مهمانخانه‌ی سوم را جا بدهیم.

؟ چطور این مشکل را حل می‌کنید؟

حالا دیگر نوبت من بود که ثابت کنم بی‌جهت پنج سال وقت خود را در دانشگاه «ستاره» به خاطر تحصیل ریاضیات، تلف نکرده‌ام.

؟ چطور این مشکل را می‌توان حل کرد؟

ـ از عددهای اول استفاده کنید! ساکنین مهمانخانه‌ی اول را در شماره‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ...، ساکنین مهمانخانه‌ی دوم را در شماره‌های ۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ...، ساکنین مهمانخانه‌ی سوم را در شماره‌های ۵، ۲۵، ۱۲۵، ۶۲۵، ...، ساکنین مهمانخانه‌ی چهارم را در شماره‌های ۷، ۴۹، ۳۴۳، ... جا بدهید.

مدیر پرسید:

ـ آیا در این صورت دیگر در هیچ اطاقی دو مسافر نخواهد بود؟

ـ نه!

؟ چرا؟

زیرا اگر دو عدد اول را در نظر بگیریم، هیچ توانی از آنها (به شرطی که توان عددی طبیعی باشد) با هم مساوی نخواهد بود. اگر p و q دو عدد اول متفاوت باشند و m و n دو عدد طبیعی باشد، خواهیم داشت. $p^m \neq q^n$.

مدیر استدلال مرا تأیید کرد و همان وقت روش کامل‌تری هم ارائه داد، که در آن فقط از دو عدد اول ۲ و ۳ استفاده می‌شد.

؟ چطور می‌توان فقط از دو عدد اول ۲ و ۳ استفاده کرد؟

مدیر پیشنهاد کرد که ساکن اتاق شماره‌ی mام از مهمانخانه‌ی nام را به اتاق شماره‌ی $۲^m \times ۳^n$ از مهمانخانه‌ی خودمان بفرستیم، زیرا اگر $m \neq p$ و $n \neq q$ باشد، داریم: $۲^m \times ۳^n \neq ۲^p \times ۳^q$. به این ترتیب در هیچ اتاقی دو نفر نخواهد بود.

این پیشنهاد همه را به وجد آورد. مسأله‌ای که به نظر حل نشدنی می‌رسید، حل شده بود. ولی جایزه را نه من بردم و نه مدیر، زیرا در راه‌حل‌های ما تعداد زیادی از اتاق‌ها خالی می‌ماند.

چرا؟

در پیشنهاد من اتاق‌های شماره‌هایی از نوع ۶، ۱۰، ۱۲ و به طور کلی هر شماره‌ای که توانی از یک عدد اول نبود؛ و در پیشنهاد مدیر، اتاق‌های شماره‌هایی که به صورت $۲^m \times ۳^n$ نبودند، خالی می‌ماندند. بهترین پیشنهاد را یکی از تمبرشناسان داد که رئیس دانشکده‌ی ریاضی کهکشان «قو» بود.

او توصیه کرد که ابتدا جدولی ترتیب دهیم به نحوی که در سطرهای این جدول، شماره‌ی مهمانخانه‌ها و در ستون‌های آن، شماره‌ی اتاق‌ها قرار داشته باشد. مثلاً در محل برخورد سطر چهارم و ستون سوم نوشته شود: اتاق سوم از مهمانخانه‌ی چهارم. بنابراین $(۴,۳)$ یعنی اتاق سوم از مهمانخانه‌ی چهارم. این جدول چنین است (البته این، گوشه‌ی چپ و بالای جدول است، زیرا برای نوشتن تمام جدول به بی‌نهایت سطر و ستون نیاز داریم):

$$\begin{array}{cccccccc}
(۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & (۱,۵) & \ldots & (۱,n) & \ldots \\
(۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & (۲,۵) & \ldots & (۲,n) & \ldots \\
(۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & (۳,۵) & \ldots & (۳,n) & \ldots \\
(۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & (۴,۵) & \ldots & (۴,n) & \ldots \\
(۵,۱) & (۵,۲) & (۵,۳) & (۵,۴) & (۵,۵) & \ldots & (۵,n) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
(m,۱) & (m,۲) & (m,۳) & (m,۴) & (m,۵) & \ldots & (m,n) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

تمبرشناس ریاضی‌دان گفت:

ـ و حالا آنها را به ترتیب مربعی در مهمانخانه‌ی خودتان جا دهید.

ـ چطور؟

مدیر روش کار را نفهمیده بود.

شما چطور؟! روش کار را فهمیده‌اید؟

ـ در مرحله‌ی اول ساکن $(۱,۱)$ را در اتاق ۱ جا دهید. در مرحلهٔ دوم ساکن $(۱,۲)$ را در اتاق ۲، ساکن $(۲,۲)$ را در اتاق ۳ و ساکن $(۲,۱)$ را در اتاق ۴ جا دهید. در مرحله‌ی سوم ساکن $(۱,۳)$ را در اتاق ۵، ساکن $(۲,۳)$

را در اتاق ۶، ساکن $(۳,۳)$ را در اتاق ۷، ساکن $(۳,۲)$ را در اتاق ۸ و ساکن $(۳,۱)$ را در اتاق ۹ جا دهید. به همین ترتیب رفته‌رفته همه‌ی شماره‌ی اتاق‌ها را مربع، مربع می‌پیماییم.

ریاضیدان تمبرشناس کاغذی برداشت و روی آن طرح زیر را رسم کرد:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\text{مرحله‌ی اول} & & \text{مرحله‌ی دوم} & & \text{مرحله‌ی سوم} & & \text{مرحله‌ی چهارم} & & \text{مرحله‌ی پنجم} & & & & \text{مرحله‌ی } n\text{اُم} & \\
(۱,۱) & & (۱,۲) & & (۱,۳) & & (۱,۴) & & (۱,۵) & & \cdots & & (۱,n) & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(۲,۱) & \leftarrow & (۲,۲) & & (۲,۳) & & (۲,۴) & & (۲,۵) & & \cdots & & (۲,n) & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(۳,۱) & \leftarrow & (۳,۲) & \leftarrow & (۳,۳) & & (۳,۴) & & (۳,۵) & & \cdots & & (۳,n) & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(۴,۱) & \leftarrow & (۴,۲) & \leftarrow & (۴,۳) & \leftarrow & (۴,۴) & & (۴,۵) & & \cdots & & (۴,n) & \cdots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(۵,۱) & \leftarrow & (۵,۲) & \leftarrow & (۵,۳) & \leftarrow & (۵,۴) & \leftarrow & (۵,۵) & & \cdots & & (۵,n) & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
(n,۱) & \leftarrow & (n,۲) & \leftarrow & (n,۳) & \leftarrow & (n,۴) & \leftarrow & (n,۵) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & (n,n) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

مدیر که هنوز تردید داشت، پرسید:

- آیا به این ترتیب برای همه جا خواهد بود؟
- البته! در این طرح، ما در $n^۲$ شماره‌ی مهمانخانه‌ی خودمان، ساکنین n اتاق اولِ n مهمانخانه‌ی اول را جا داده‌ایم، به همین ترتیب دیر یا زود نوبت دیگران هم فرا می‌رسد. مثلاً اگر کسی در اتاق شماره‌ی ۱۳۶ از مهمانخانه‌ی شماره‌ی ۲۱۷ باشد، اتاق خودش را در قدم ۲۱۷اُم به دست می‌آورد. شماره‌ی اتاق او را به سادگی می‌توان حساب کرد.

؟ این شماره را حساب کنید.

این شماره برابر است با $۲۱۷^۲ - ۱۳۶ + ۱$. به طورکلی، اگر کسی در اتاق شماره‌ی n از مهمانخانه‌ی m باشد، در حالت $n \geq m$ به اتاق شماره‌ی $(n-۱)^۲ + m$، و در حالت $n < m$ به اتاق شماره‌ی $m^۲ - n + ۱$ منتقل می‌شود.

این طرح پیشنهادی بسیار جالب بود، همه‌ی ساکنین همه‌ی مهمانخانه‌ها، در مهمانخانه‌ی ما جا می‌گرفتند و ضمناً هیچ‌کدام از اتاق‌های «مهمانخانه‌ی فضا» هم خالی نمی‌ماند. ریاضی‌دان تمبرشناس جایزه‌ی مسافرت به کهکشان ل.ت.ر_۲۸۷ را برده بود.

مدیر به افتخار حل این مشکل، جایزه‌ای ترتیب داد که همه‌ی ساکنین مهمانخانه از آن برخوردار شدند. ترتیب این جایزه هم خالی از اشکال نبود! ساکنین اتاق‌های شماره‌های زوج نیم ساعت تأخیر کردند و وقتی که به سالن آمدند، همه‌ی صندلی‌ها اشغال بود؛ میزبان مهمان‌نواز برای همه‌ی آنها جا تهیه کرد، اما کمی طول کشید تا هر کسی به صندلی جدیدش منتقل شود (البته بدون اینکه حتی یک صندلی جدید به سالن آورده شود)! سپس به هر یک از مهمان‌ها دو تا بستنی داده شد، در حالی که برای هر مهمان تنها یکی درست شده بود! امیدوارم خواننده بفهمد که این وضع چگونه پیش آمده است!

؟ چگونه؟

□ به دانش‌آموزان بگویید که شاید اکنون این قضیه‌ی زیبا و بدیع ریاضی را بهتر درک کنید:

> «قضیه‌ی باناخ_تارسکی: می‌توان با تعداد محدودی برش یک کره را جوری برید که پس از چیدن قطعه‌های برش به دست آمده، بتوان دو کره‌ی هم اندازه با کره‌ی اول ساخت!»

تعجب نکنید! دو کره دقیقاً مثل کره‌ی اول! دانش بشر پیشرفت‌های بسیار زیادی کرده است و همه‌ی ریاضیات این چند خطی که شما خوانده‌اید، نیست!

برای آشنایی بیشتر با قضیه‌ی باناخ_تارسکی «قضیه‌ی باناخ تارسکی» در وب‌گاه ریاضی سمپاد را ببینید.

من بعد از آنکه بستنی‌ها را خوردم، در موشک فوتونی خود نشستم و به زمین بازگشتم تا همه‌ی آنچه را که در فضا دیده بودم، برای ساکنین زمین بازگو کنم. علاوه بر آن می‌خواستم با ریاضیدان‌های نامی زمین و دوست خودم پروفسور تارانتوف درباره‌ی خاصیت‌های یک مجموعه‌ی نامتناهی بحث کنم.[1]

؟ توضیح دهید که چرا $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^+$؟

یادتان نرود که نقاط گویای روی محور اعداد آن‌قدر زیاد است که تقریباً محور اعداد را سیاه می‌کند.

□ می‌توانید تصویر «درخت عجایب» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید.

؟ چرا؟

□ زیرا بین هر دو عدد گویای متفاوت، عددی گویا وجود دارد. در فصل آخر (فصل نامعادلات) خواهید دید که بین هر دو عدد حقیقی متفاوت، عددی گویا وجود دارد.

$\mathbb{Q} \odot \mathbb{R}$

۱) متن داستان اثر «لم» است؛ این متن در کتاب «داستان مجموعه‌ها» نوشته‌ی «ویلنکین» ترجمه‌ی پرویز شهریاری قابل دسترسی است.

؟ آیا به نظرتان «$\mathbb{N} \sim \mathbb{R}^+$»؟

□ پس از شنیدن نظر و پاسخ دانش‌آموزان به آنها بگویید می توانند به بخش چهارم از فصل دوم کتاب «ریاضیات چیست؟» نوشته‌ی کورانت و رابینز ترجمه‌ی سیامک کاظمی مراجعه کنند. خواندن این کتاب به همه‌ی آنهایی که ریاضی‌دان شدن را دوست دارند، بسیار توصیه می‌شود.