سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ریاضی طلایه‌داران

سال دوم راهنمایی

فصل سوم

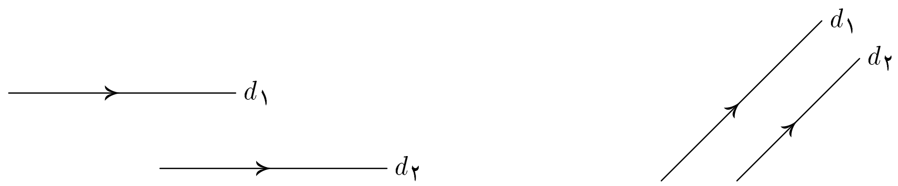
هندسه ۱

فهرست مطالب

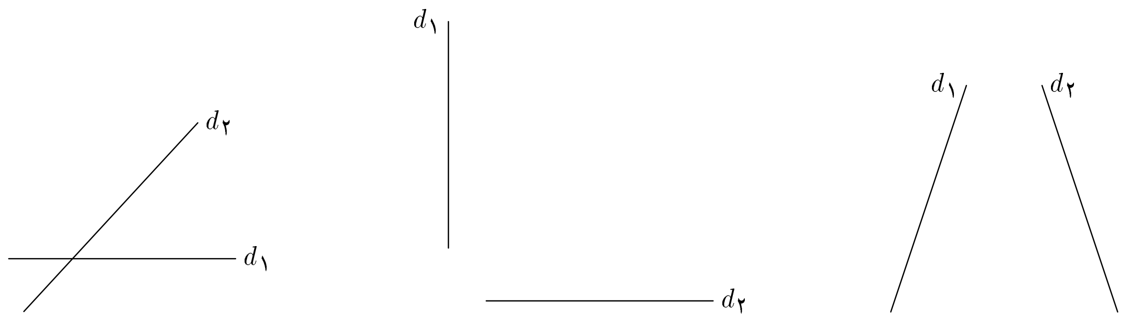
توازی

تعریف. دو خط با هم موازی هستند، در صورتی که با امتدادشان، یکدیگر را قطع نکنند. دوخطی که با هم موازی نباشند را دو خط متقاطع گویند.

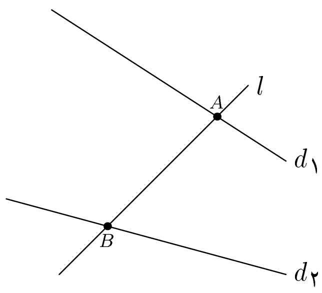
مثال ۱. در این دو شکل، خطوط d_1 و d_2 با هم موازی هستند.



مثال ۲. در این سه شکل، خطوط d_1 و d_2 با هم موازی نیستند.

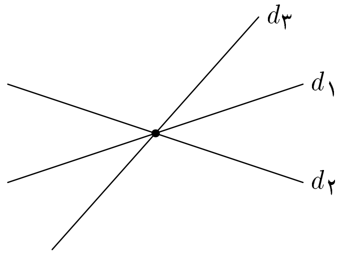


تعریف. اگر دو خط داشته باشیم، به خطی که آنها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند، خط مورّب آن دو خط گویند.

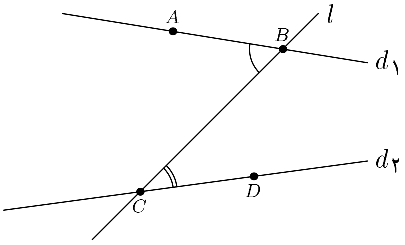


مثال ۱. در این شکل، خط l یک خط مورّب برای دو خط d_1 و d_2 است. زیرا خط l، دو خط d_1 و d_2 را در نقاط A و B قطع کرده است.

مثال ۲. در این شکل هیچ خط موربی وجود ندارد. زیرا با آنکه مثلاً خط d_3 دو خط دیگر را قطع کرده است، اما این دو خط را در یک نقطه قطع کرده است.



تعریف. مورّب l دو خط d_1 و d_2 را به ترتیب در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. A را روی d_1 و D را روی d_2 انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که A و D در دو طرف l قرار گیرند. در این صورت دو زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BCD}$ را «*زاویه‌های متبادل درونی*» می‌نامیم.

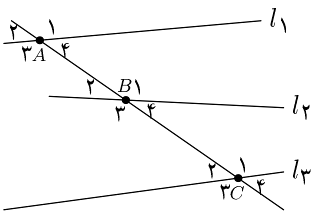


۱. دو زاویه‌ی متبادل درونی برای خطوط زیر بیان کنید:

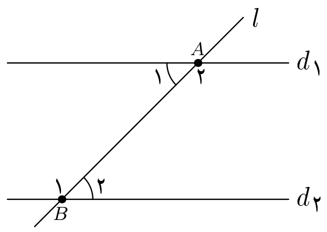
الف) برای دو خط l_1 و l_2:

ب) برای دو خط l_1 و l_3:

ج) برای دو خط l_2 و l_3:

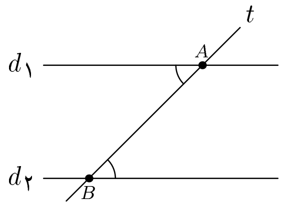


۲. در شکل زیر، مورّب l دو خط d_1 و d_2 را قطع کرده است. اگر $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$، نشان دهید که $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$.



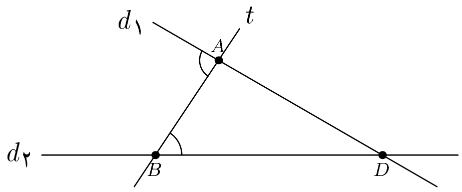
قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی:

مورّب t دو خط متمایز d_1 و d_2 را قطع کرده است. اگر یک جفت زاویه‌ی متبادل درونی مساوی به وجود آید، d_1 و d_2 موازی خواهند بود.

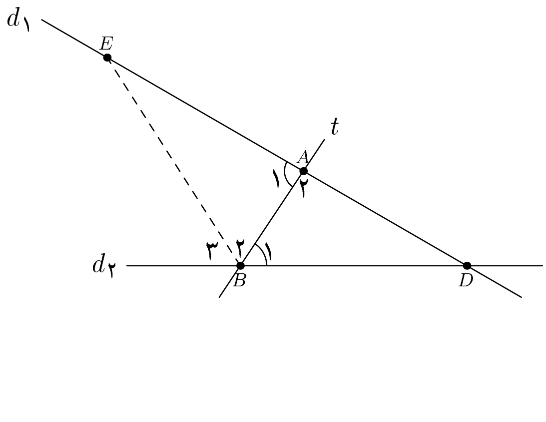


برهان:

می‌خواهیم ثابت کنیم که d_1 و d_2 موازی هستند $(d_1 \parallel d_2)$. فرض کنید که d_1 و d_2 موازی نباشند؛ یعنی $d_1 \nparallel d_2$. در نتیجه d_1 و d_2 در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع خواهند کرد.



E را نقطه‌ای روی d_1 در نظر بگیرید به‌طوری که $EA = BD$.



با توجه به فرض قضیه، $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

در نتیجه دو مثلث $E\overset{\triangle}{A}B$ و $A\overset{\triangle}{B}D$ با هم مساوی خواهند شد. (چرا؟)

از تساوی دو مثلث $E\overset{\triangle}{A}B$ و $A\overset{\triangle}{B}D$ نتیجه می‌شود که $\widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۲$. (چرا؟)

تا به اینجا دریافتیم که

$$\begin{cases} \widehat{A}_۱ = \widehat{B}_۱ \\ \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۲ \end{cases}$$

بنابراین

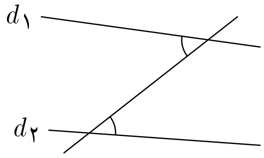
$$\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲$$

می‌دانیم که $\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ$. در نتیجه خواهیم داشت: $\widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$.

اما از طرف دیگر واضح است که $\widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲$ از ۱۸۰° کمتر است. بنابراین «$\widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$» نمی‌تواند درست باشد.

پس «$d_۱ \nparallel d_۲$» امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $d_۱$ و $d_۲$ موازی خواهند بود.

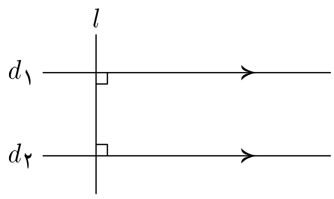
آنچه گذشت ...



$\longrightarrow \quad d_۱ \parallel d_۲$

قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط:

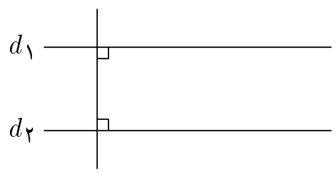
دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.



۳. قضیه‌ی قبل را ثابت کنید.

باید ثابت کنید که اگر دو زاویه‌ی قائمه مطابق شکل داشته باشیم، d_1 و d_2 با هم موازی خواهند شد.

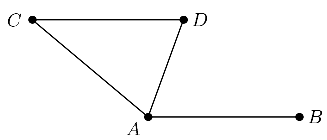
آنچه گذشت ...



$\longrightarrow \quad d_1 \parallel d_2$

۴. روش رسم خطی گذرنده از نقطه‌ی P که با خط d موازی باشد را شرح دهید.

۵. فرض کنید AD نیمساز $\widehat{CAB}$ است و $CA = CD$. ثابت کنید AB و CD با هم موازی‌اند.



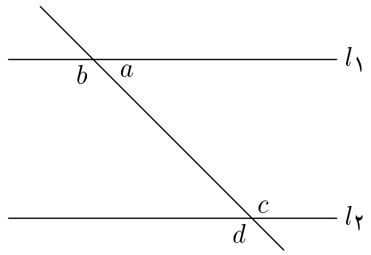
۶. درکدامیک از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $l_1 \parallel l_2$.

الف) $\widehat{a} = 80^\circ$ و $\widehat{c} = 100^\circ$

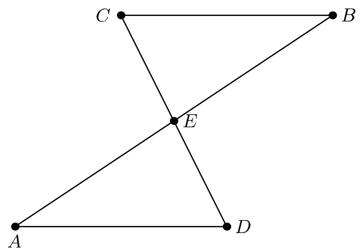
ب) $\widehat{b} = 120^\circ$ و $\widehat{d} = 100^\circ$

ج) $\widehat{a} = 70^\circ$ و $\widehat{d} = 100^\circ$

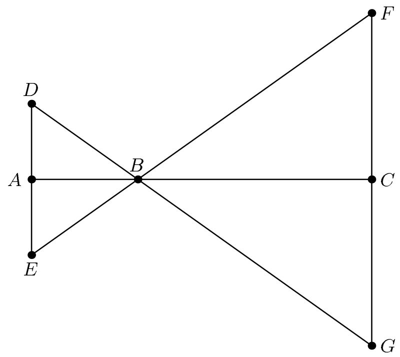
د) $\widehat{a} = 90^\circ$ و $\widehat{c} = 90^\circ$



۷. AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند؛ ثابت کنید $AD \parallel CB$.

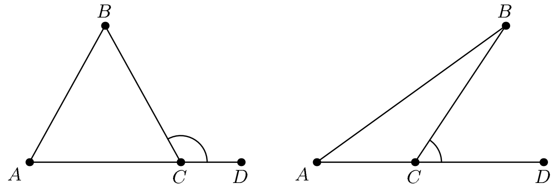


۸. در شکل زیر نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند. همچنین داریم: $AD = AE$، $BD = BE$ و $BF = BG$. ثابت کنید $DE \parallel FG$.



زاویه‌ی خارجی:

تعریف. زاویه‌ای را که مکمل یکی از زاویه‌های مثلث باشد، «*زاویه‌ی خارجی*» مثلث می‌نامند. به عبارت دیگر در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، اگر نقطه‌ی C بین دو نقطه‌ی A و D باشد، $\widehat{BCD}$ زاویه‌ی خارجی $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

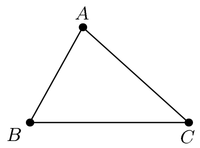


در شکل بالا، $\widehat{BCD}$ مکمل زاویه‌ی $\widehat{BCA}$ است.

دو زاویه‌ی داخلی مثلث را که با زاویه‌ی خارجی مجاور نباشند، «*زاویه‌های داخلی غیرمجاور*» گویند.

در شکل بالا زاویه‌های $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاویه‌های داخلی غیرمجاور برای زاویه‌ی خارجی $\widehat{BCD}$ هستند.

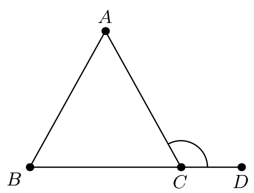
سؤال: تمام زوایای خارجی مثلث زیر را رسم کنید. تعداد آنها چندتاست؟



قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی:

زاویه‌ی خارجی در یک مثلث، از هر یک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگتر است.

برهان: مطابق شکل، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و یک زاویه‌ی خارجی آن مثل $\widehat{ACD}$ را در نظر می‌گیریم.

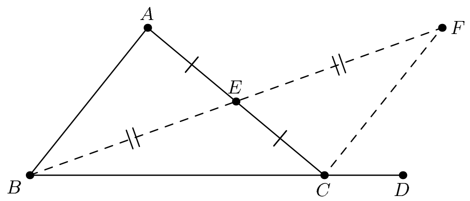


باید ثابت کنیم

$$\widehat{ACD} > \widehat{A} \quad \text{و} \quad \widehat{ACD} > \widehat{B}$$

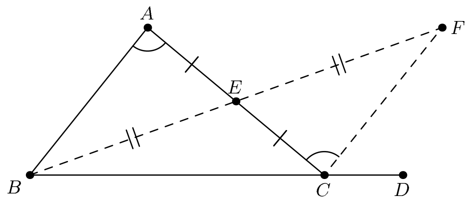
ابتدا می‌خواهیم ثابت کنیم که $\widehat{ACD} > \widehat{A}$.

نقطه‌ی E وسط AC را در نظر می‌گیریم. از B به E وصل می‌کنیم و به اندازه‌ی BE آن را ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی F برسیم.



دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}E$ و $F\overset{\triangle}{E}C$ با یکدیگر مساوی خواهند شد. (چرا؟)

بنابراین $\widehat{A} = \widehat{ACF}$.



در نتیجه $\widehat{ACD} > \widehat{A}$.

حالت $\widehat{ACD} > \widehat{B}$ نیز به همین صورت ثابت می‌شود.

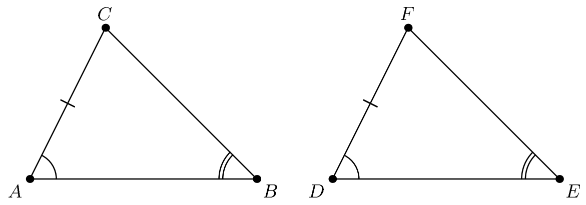
۹. در قضیه‌ی قبل ثابت کنید $\widehat{ACD} > \widehat{B}$.

۱۰. ثابت کنید اگر مثلثی یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، دو زاویه‌ی دیگر آن حاده‌اند.

۱۱. تمرین شماره‌ی ۳ را یک‌بار دیگر با استفاده از قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی ثابت کنید.

قضیه‌ی ض‌زز :

هرگاه دو زاویه و ضلع روبه‌رو به یکی از آن دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه و ضلع متناظر از مثلثی دیگر مساوی باشند، آنگاه دو مثلث با هم برابرند. به عبارت دیگر در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ هرگاه $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $\widehat{B} = \widehat{E}$ و $AC = DF$، آنگاه $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.



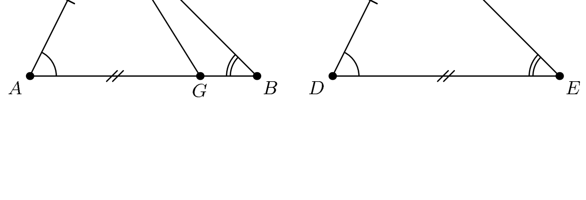
برهان: می‌خواهیم ثابت کنیم $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$. برای این کار اگر ثابت کنیم $AB = DE$، آنگاه تساوی دو مثلث نتیجه می‌شود. (چرا؟)

برای AB و DE سه امکان وجود دارد.

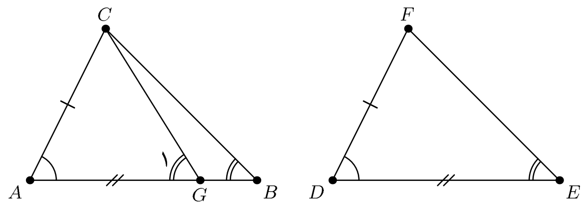
(۱) $AB = DE$ (۲) $AB > DE$ (۳) $AB < DE$

باید ثابت کنیم که فقط حالت اول یعنی $AB = DE$ می‌تواند درست باشد. بنابراین باید نشان دهیم که حالت‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند درست باشند.

فرض کنید که حالت (۲) درست باشد؛ یعنی $AB > DE$. در نتیجه می‌توانیم نقطه‌ی G را روی AB چنان انتخاب کنیم به‌طوری‌که $AG = DE$.



$AC = DF$، $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $AG = DE$. بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{AGC} = \overset{\triangle}{DEF}$. در نتیجه $\widehat{G}_1 = \widehat{E}$.



$\widehat{G}_1 = \widehat{E}$؛ از فرض قضیه هم داریم که $\widehat{E} = \widehat{B}$. در نتیجه $\widehat{G}_1 = \widehat{B}$.

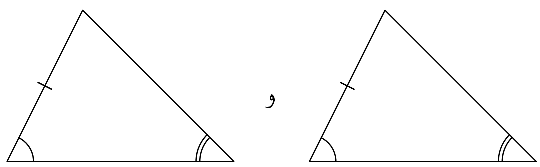
اما از طرف دیگر با توجه به قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی برای مثلث $\overset{\triangle}{GCB}$ و رأس G، واضح است که $\widehat{G}_1 > \widehat{B}$.
بنابراین $\widehat{G}_1 = \widehat{B}$ نمی‌تواند درست باشد. پس $AB > DE$ امکان‌پذیر نیست.

به روش مشابهی می‌توان ثابت کرد که $AB < DE$ نیز نمی‌تواند برقرار باشد.

چون حالت‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند درست باشند، پس تنها حالت (۱) درست خواهد بود. در نتیجه $AB = DE$ و $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.

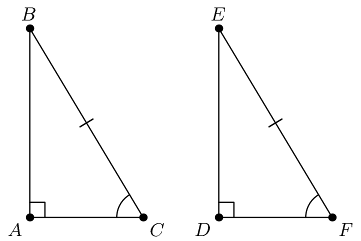
آنچه گذشت ...

دو مثلث با هم برابرند $\longrightarrow$



۱۲. چرا حالت $AB < DE$ در اثبات قضیه‌ی قبل نمی‌تواند درست باشد؟

۱۳. **قضیه‌ی وتر و یک زاویه‌ی تند:** ثابت کنید اگر وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث مساوی‌اند. یعنی باید ثابت کنید در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ قائمه در A و D، اگر $BC = EF$ و $\widehat{C} = \widehat{F}$، آنگاه $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.

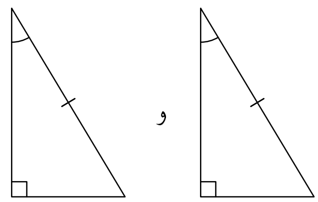


آنچه گذشت ...

دو مثلث قائم‌الزاویه

با هم برابرند

$\longrightarrow$



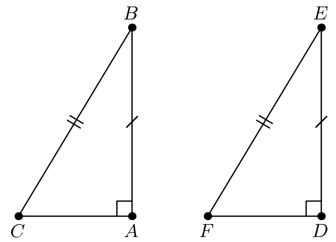
قضیه وتر و یک ضلع:

اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث مساوی‌اند. برای اثبات این قضیه، چنین عمل می‌کنیم. در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ داریم:

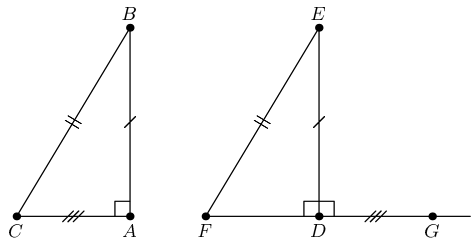
$\widehat{A} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$

$AB = DE$

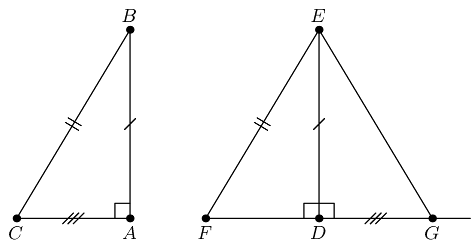
$BC = EF$



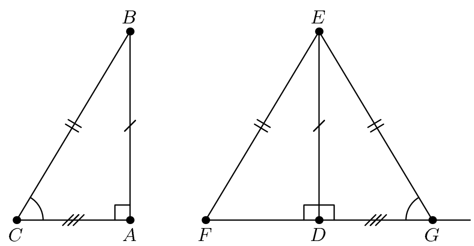
مطابق شکل، در امتداد خط FD نقطه‌ی G را چنان انتخاب می‌کنیم که $AC = DG$.



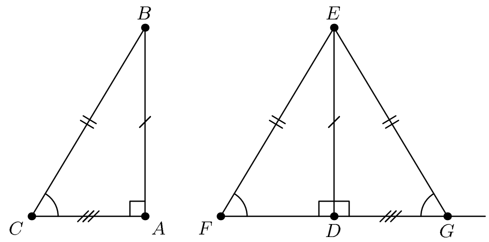
سپس E را به G وصل می‌کنیم. واضح است که $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEG}$. (چرا؟)



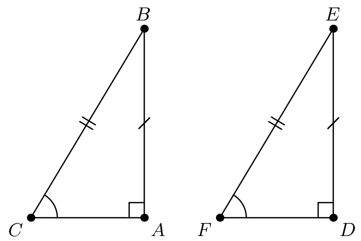
در نتیجه $BC = EG$ و همچنین $\widehat{C} = \widehat{G}$.



$BC = EG$ و همچنین $BC = EF$؛ در نتیجه $EF = EG$. پس می‌توان نتیجه گرفت $\widehat{F} = \widehat{G}$.



اکنون به دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ دقت کنید.



توانستیم ثابت کنیم که زاویه‌های C و F نیز با هم مساوی‌اند.

در نتیجه بنابر حالت «ض‌زز» می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با هم مساوی‌اند.

پس توانستیم ثابت کنیم که:

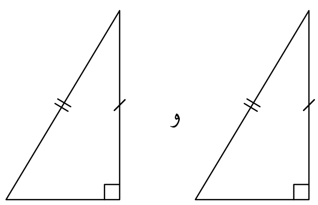
هرگاه دو مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک ضلع مساوی داشته باشند، آن دو مثلث با هم مساوی‌اند.

آنچه گذشت ...

دو مثلث قائم‌الزاویه

با هم برابرند

$\longrightarrow$



۱۴. ثابت کنید مجموع اندازه‌های هر دو زاویه از مثلثی کمتر از 180° است.

اصل

بعضی واقعیات در زندگی هستند که هیچ دلیلی برای آنها نمی‌توان آورد و اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا* . . .؟»، شما تنها کاری که می‌توانید انجام دهید این است که چشم در چشم سؤال کننده به او خیره شوید و با یک لبخند به او بگویید که «با اینکه درست است، ولی دلیلی برای این واقعیت وجود ندارد!»

به عنوان مثال اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا نور خط راست را طی می‌کند؟*»، شما هیچ دلیلی برای آن نمی‌توانید بیاورید. قانون خلقت این است که نور خط راست را طی می‌کند.

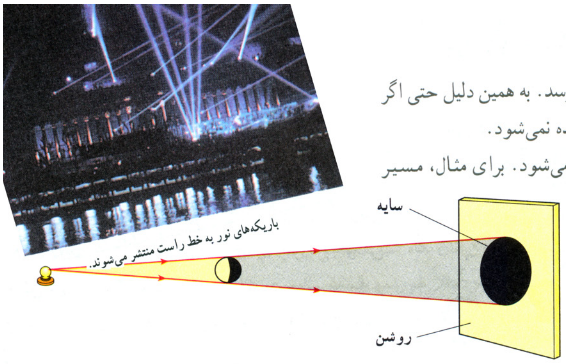
اما بعضی واقعیات در زندگی وجود دارند که برای آنها می‌توان دلیل آورد. یعنی اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا* . . .؟»، شما به‌راحتی می‌توانید جواب سؤال کننده را بدهید.

به عنوان مثال اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا وقتی در مقابل نور خورشید ایستاده‌ایم، سایه‌ی ما روی زمین می‌افتد؟*»، شما می‌توانید پاسخ دهید که «*چون نور خط راست را طی می‌کند.*»

نور به خط راست منتشر می‌شود

دانستیم که برای دیدن یک جسم باید از آن جسم نور به چشم ما برسد. به همین دلیل حتی اگر جسمی در مقابل ما باشد ولی نوری که از آن می‌تابد به چشم ما نرسد دیده نمی‌شود.

تجربه‌های روزانه‌ی ما نشان می‌دهد که نور به خط راست منتشر می‌شود. برای مثال، مسیر پرتوهای نور خورشید وقتی از پنجره به درون اتاق می‌تابد، یا از لابه‌لای بلند به زمین می‌رسد و یا از سوراخ یک سقف می‌تابد، نشانگر این است می‌شود.



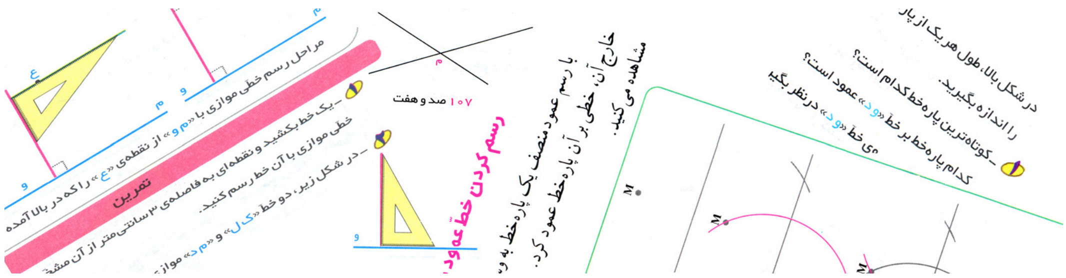
علت تشکیل سایه را با توجه به انتشار نور به خط راست، توضیح دهید.

> به واقعیات درستی که نتوان برای آنها دلیلی آورد و نتوان آنها را ثابت کرد، «**اصل**» می‌گویند.

در واقع حرکت نور در خط راست، یک اصل است.

در فصل دوم کتاب «علوم‌تجربی سال دوم راهنمایی» چه واقعیات دیگری را می‌توان به عنوان اصل بیان کرد؟

همه‌ی آنچه که تا کنون در هندسه آموخته‌اید، از چهار اصل نتیجه می‌شود.



اولین‌بار اقلیدس بوده که این چهار اصل را معرفی کرده است. اقلیدس زندگی جالبی دارد. برای آشنایی با او می‌توانید به «درباره‌ی اقلیدس» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید.

بعد از اینکه اقلیدس گزاره‌ها و قضیه‌ها و واقعیات فراوانی را با این چهار اصل ثابت کرد، متوجه شد که یک واقعیت دیگری هم وجود دارد که نمی‌توان آن را ثابت کرد و آن را به عنوان پنجمین اصل در هندسه معرفی کرد. سالیان سال ریاضیدانان و دانشمندان فراوانی تلاش کردند تا بتوانند اصل پنجم را ثابت کنند. یعنی معتقد بودند که اصل پنجم در واقع اصل نیست و می‌توان برای آن دلیل آورد. ولی تا به امروز کسی موفق به چنین کاری نشده است.

امروزه به این پنج اصل «*اصول اقلیدس*» می‌گویند. برای آشنایی با این اصول می‌توانید «اصول پنجگانه‌ی اقلیدس» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید.

سؤال: آیا جمله‌ی زیر را می‌توان به عنوان اصل پذیرفت؟

«دو *خط* عمود بر یک *خط*، *با هم موازی‌اند*.»

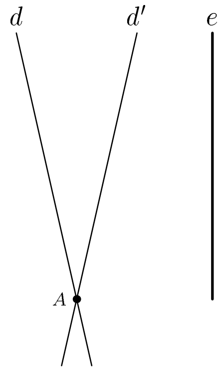
پنجمین اصل اقلیدس را می‌توان به گونه‌ای دیگر بیان کرد که به آن «اصل توازی» می‌گویند. در واقع اصل توازی همان اصل پنجم اقلیدس است.

اصل توازی: از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

در تمام قضایا و گزاره‌هایی که از این به بعد خواهید دید، می‌توانیم از «اصل توازی» استفاده کنیم.

گزاره‌ی ۱. اگر دو خط با یک خط موازی باشند، با یکدیگر موازی هستند. به عبارتی دیگر اگر $d \parallel e$ و $d' \parallel e$، آنگاه $d \parallel d'$.

اثبات: می‌دانیم $d \parallel e$ و $d' \parallel e$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $d \parallel d'$. یعنی باید ثابت کنیم $d \nparallel d'$ درست نیست. اگر $d \nparallel d'$ درست باشد، یعنی d و d' با هم موازی نیستند و این یعنی همدیگر را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کنند.



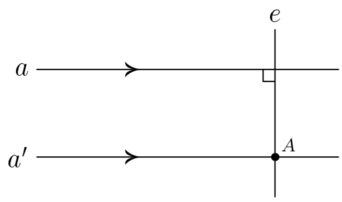
طبق فرض $d \parallel e$ و همچنین $d' \parallel e$. یعنی از نقطه‌ی A دو خط موازی با خط e رسم کرده‌ایم. از طرفی اصل توازی می‌گوید که از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. بنابراین d و d' نمی‌توانند با هم متقاطع باشند. پس d و d' با هم موازی هستند.

آنچه گذشت ...

$$d \parallel e \quad \text{و} \quad d' \parallel e \quad \longrightarrow \quad d \parallel d'$$

گزاره‌ی ۲. اگر مورّبی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. به عبارتی دیگر اگر $a \parallel a'$ و $e \perp a$، آنگاه $e \perp a'$.

اثبات: می‌دانیم $a \parallel a'$ و $e \perp a$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $e \perp a'$. یعنی باید ثابت کنیم e بر a' نیز عمود است.



ابتدا باید توجه کرد که e نمی‌تواند با a' موازی باشد؛ زیرا اگر داشته باشیم $a' \parallel e$، با توجه به این فرض که $a \parallel a'$، بنابر گزاره‌ی ۱، نتیجه می‌گیریم $a \parallel e$ که با فرض دیگرمان یعنی $e \perp a$ جور در نمی‌آید. بنابراین e و a' موازی نبوده و در نقطه‌ای مانند A متقاطع‌اند.

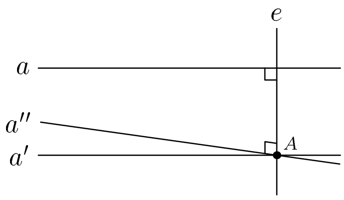
از نقطه‌ی A خط a'' عمود بر e را رسم می‌کنیم. در این‌صورت دو حالت ممکن است اتفاق افتد.

حالت اول: a' و a'' روی هم بیفتند.

حالت دوم: a' و a'' روی هم نیفتند.

نشان می‌دهیم که حالت دوم اتفاق نخواهد افتاد.

فرض کنید حالت دوم اتفاق بیفتد. یعنی a' و a'' روی هم نیفتند.



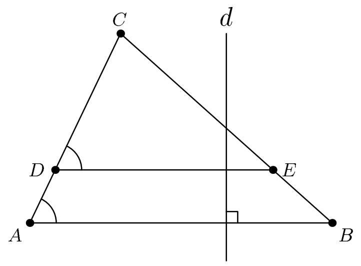
می‌دانیم خط a بر e عمود است $(a\perp e)$. همچنین خط a'' نیز بر e عمود است $(a''\perp e)$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی «دو خط عمود بر یک خط»، دو خط a و a'' با هم موازی خواهند شد؛ یعنی $a \parallel a''$. از طرفی با توجه به فرض می‌دانیم که $a \parallel a'$. پس از نقطه‌ی A دو خط موازی با خط a داریم و این اشتباه است. زیرا اصل توازی می‌گوید که از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. بنابراین حالت دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد. در نتیجه a' و a'' روی هم می‌افتند. بنابراین خط a' در نقطه‌ی A برخط e عمود خواهد بود؛ یعنی $e\perp a'$.

آنچه گذشت ...

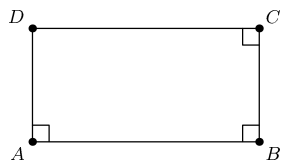
$$a \parallel a' \quad \text{و} \quad e\perp a \quad \longrightarrow \quad e\perp a'$$

تمرین

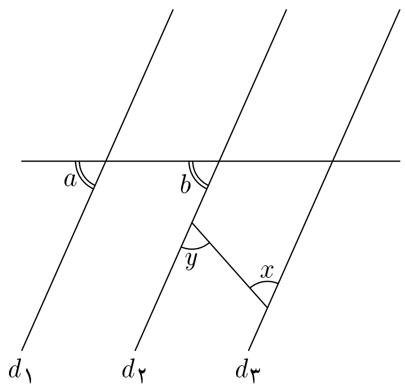
۱. در شکل زیر $\widehat{CDE} = \widehat{A}$ و $d \perp AB$؛ ثابت کنید $d \perp DE$.



۲. در چهار ضلعی $ABCD$ زاویه‌های $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمه هستند؛ ثابت کنید AD بر CD عمود است.

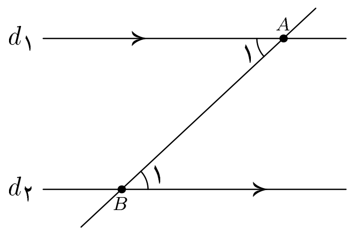


۳. در شکل زیر $\widehat{x} = \widehat{y}$ و همچنین $\widehat{a} = \widehat{b}$؛ ثابت کنید $d_۱ \parallel d_۳$.



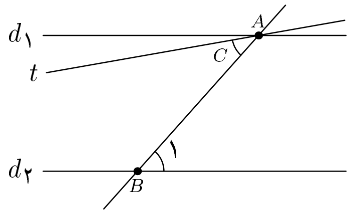
قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب:

اگر مورّبی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی مساوی خواهند شد. به عبارتی دیگر اگر $d_2 \parallel d_1$، آنگاه $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.



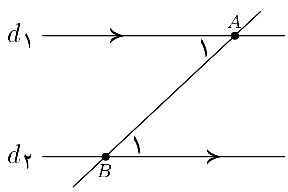
اثبات: می‌دانیم $d_2 \parallel d_1$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

اگر زاویه‌های $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ مساوی نباشند، پس یکی از آنها از دیگری بزرگ‌تر است. فرض کنید $\widehat{A}_1$ از $\widehat{B}_1$ بزرگ‌تر باشد. پس خط t را چنان می‌توان از نقطه‌ی A رسم کرد به‌طوری که یک زاویه‌ی مساوی با $\widehat{B}_1$ به‌وجود آید. آن زاویه را C می‌نامیم.



چون $\widehat{C} = \widehat{B}_1$، در نتیجه با توجه به قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی $t \parallel d_2$ خواهد شد. از طرفی می‌دانیم که $d_2 \parallel d_1$. پس، از نقطه‌ی A دو خط موازی با d_2 رسم کرده‌ایم و این با اصل توازی جور در نمی‌آید. زیرا اصل توازی می‌گوید «از یک نقطه (مانند A) در خارج یک خط (مانند d_2)، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد». پس $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ نمی‌توانند با هم مساوی نباشند؛ در نتیجه $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

آنچه گذشت ...

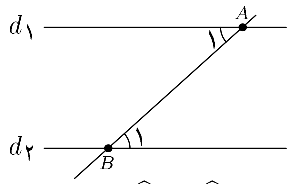


$d_1 \parallel d_2$

$\longrightarrow \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

دقت کنید

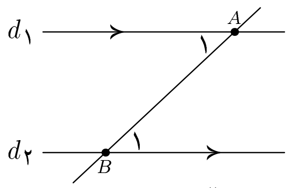
نتیجه‌ی یک ...



$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\longrightarrow \quad d_1 \parallel d_2$

نتیجه‌ی دو ...



$d_1 \parallel d_2$

$\longrightarrow \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

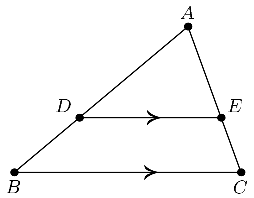
نتیجه‌ی یک از قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی به‌دست آمده است. اگر به خاطر داشته باشید، این قضیه را قبل از بیان اصل توازی ثابت کردیم. یعنی برای اثبات آن، احتیاجی به قبول کردن اصل توازی نیست.

نتیجه‌ی دو که در واقع برعکس نتیجه‌ی یک است، از قضیه‌ی قبل به‌دست آمده است. این قضیه را با استفاده از اصل توازی توانستیم ثابت کنیم. اگر اصل توازی را قبول نکنیم، نمی‌توان این قضیه را ثابت کرد.

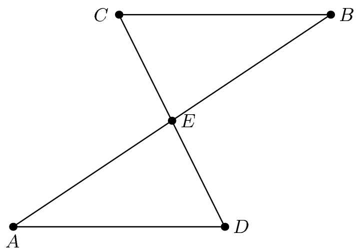
تمرین

۱. ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی رسم شود و دوساق آن را در دو نقطه‌ی دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی‌الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

۲. در شکل زیر $AB = BC$ و $DE \parallel BC$؛ ثابت کنید $AD = DE$.

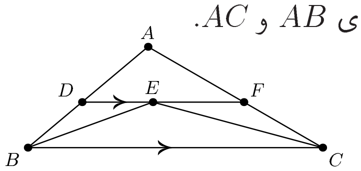


۳. در شکل زیر اگر $AD = CB$ و همچنین $AD \parallel CB$، ثابت کنید AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند.

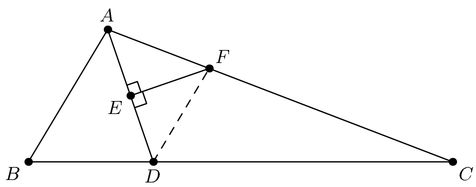


۴. باهمان شرایط سؤال قبل، ثابت کنید $AC \parallel DB$.

۵. مطابق شکل، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، BE نیمساز $\widehat{B}$، CE نیمساز $\widehat{C}$ و DF با BC موازی است. ثابت کنید محیط مثلث $\overset{\triangle}{ADF}$ برابر است با مجموع اندازه‌ی طول ضلع‌های AB و AC.



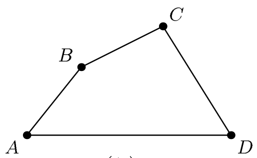
۶. مطابق شکل، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، AD نیمساز $\widehat{A}$ و همچنین EF عمودمنصف AD است؛ ثابت کنید $DF \parallel AB$.



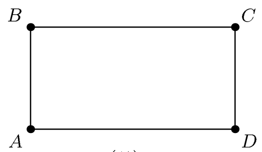
چهارضلعی‌ها

تعریف. A، B، C و D را چهار نقطه در صفحه فرض کنید به‌طوری که هیچ سه نقطه‌ی آن هم‌خط نباشند و پاره‌خط‌های AB، BC، CD و DA فقط در نقاط A، B، C و D یکدیگر را قطع کنند. اجتماع این چهار پاره‌خط «*چهارضلعی*» نام دارد.

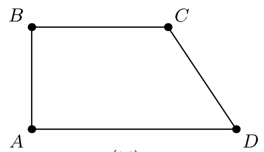
شکل‌های زیر هر کدام نوعی چهارضلعی هستند.



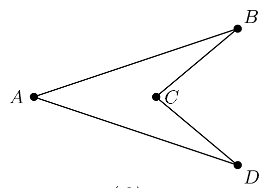
(۱)



(۲)

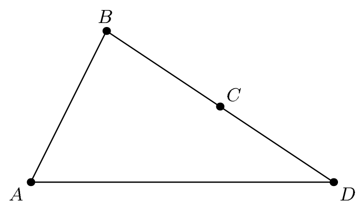


(۳)

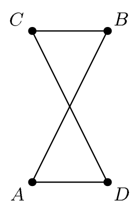


(۴)

اما دو شکل زیر تشکیل چهارضلعی نمی‌دهند. (چرا؟)

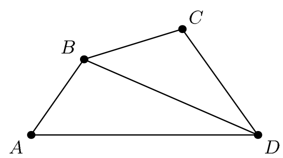


(۵)



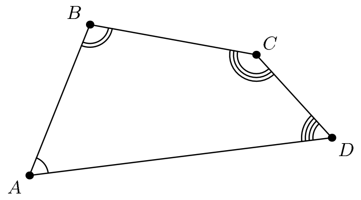
(۶)

خطی که دو رأس روبه‌رو را به هم وصل می‌کند، «قطر چهارضلعی» نام دارد.



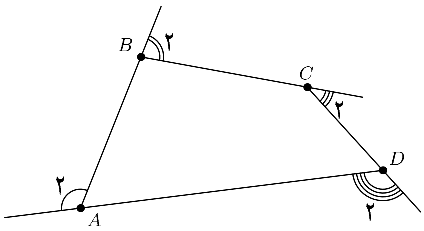
در چهارضلعی بالا BD یکی از دو قطر چهارضلعی $ABCD$ است.

در هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی آن برابر با 360° است. (چرا؟)



$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360$$

همچنین در هر چهارضلعی مجموع زوایای خارجی آن نیز برابر 360° است. (چرا؟)



$$\widehat{A}_2+\widehat{B}_2+\widehat{C}_2+\widehat{D}_2=360$$

به چهارضلعی که یک زاویه‌ی بزرگتر از 180° داشته باشد «کاو» یا «مُقَعَّر» و به چهارضلعی که همه‌ی زاویه‌هایش کمتر از 180° باشد، «گوژ» یا «مُحَدَّب» می‌گویند.

در صفحه‌ی قبل چند چهارضلعی گوژ داریم؟

دو سؤال درباره‌ی n ضلعی‌ها

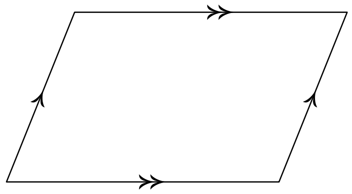
۱. در هر n ضلعی مجموع زوایای داخلی چند درجه است؟

۲. در هر n ضلعی مجموع زوایای خارجی چند درجه است؟

n ضلعی را می‌توان همانند چهارضلعی تعریف کرد؛ با این تفاوت که به جای اینکه چهار نقطه داشته باشیم، n نقطه داریم.

متوازی‌الاضلاع

تعریف. اگر اضلاع یک چهارضلعی دوبه‌دو موازی باشند، به آن چهارضلعی «*متوازی‌الاضلاع*» گویند.

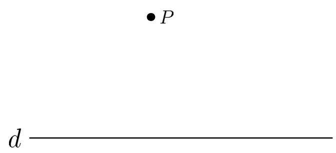


گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها (به غیر از گزاره‌ی ۳)، خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع هستند.

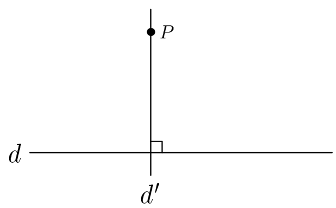
۱. هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند.

۲. در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل باهم مساوی‌اند.

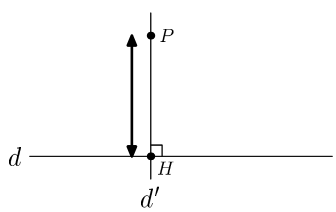
تعریف. نقطه‌ی P و خط d را داریم.



همچنین می‌دانیم که خط d' از نقطه‌ی P می‌گذرد و بر خط d عمود است.

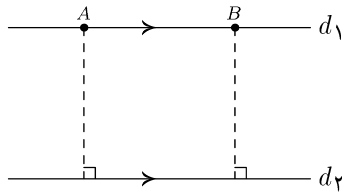


اگر محل تقاطع خط d و d' را H بنامیم، به اندازه‌ی پاره‌خط PH فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d می‌گوییم.

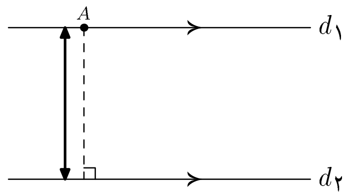


به عبارتی دیگر فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d، اندازه‌ی پاره‌خط عمودی است که از نقطه‌ی P برخط d رسم می‌شود.

۳. در هر دو خط موازی مانند $d_۱ \parallel d_۲$، تمام نقاط یک خط از خط دیگر به یک فاصله‌اند.



تعریفی با استفاده ازگزاره‌ی ۳: فاصله‌ی بین دو خط موازی، فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواهِ یک خط، از خط دیگر است.



۴. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مقابل مساوی‌اند.

۵. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

۶. قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها کمک می‌کنند که تشخیص دهیم یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است یا خیر.

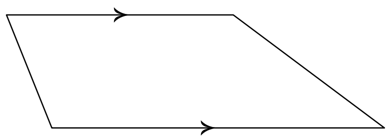
۱. اگر در یک چهارضلعی هر دو ضلع مقابل مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲. اگر دو ضلع یک چهارضلعی موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

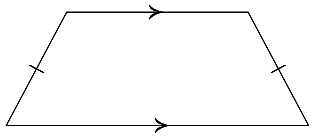
۳. اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

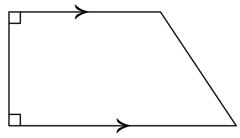
ذوزنقه

تعریف. اگر فقط دو ضلع یک چهارضلعی باهم موازی باشند، به آن چهارضلعی «ذوزنقه» گویند. دو ضلع موازی ذوزنقه را قاعده‌های ذوزنقه، و دو ضلع دیگر را ساق‌های ذوزنقه گویند.



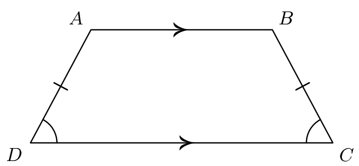
ذوزنقه‌ای که دارای زاویه‌ی قائمه باشد، ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه و ذوزنقه‌ای که ساق‌های مساوی داشته باشد، ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین گویند.





گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. زاویه‌های یک قاعده‌ی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، باهم برابرند؛ یعنی $\widehat{C} = \widehat{D}$.



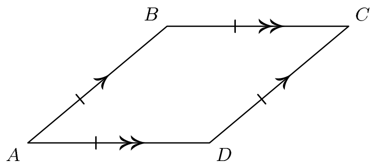
۲. قطرهای ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

۳. در هر ذوزنقه، زوایای مجاور بر یک ساق مکمل هستند.

ذوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «ذوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این ذوزنقه در کاشی کاری استفاده کرده‌اند.

لوزی

تعریف. لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که اضلاعش مساوی‌اند.



گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

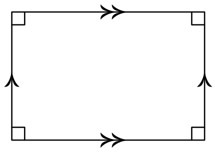
۱. قطرهای لوزی برهم عمودند.

۲. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند و برهم عمود باشند، آن چهارضلعی لوزی است.

۳. اگر در متوازی‌الاضلاعی دو ضلع مجاور برابر باشند، آن چهارضلعی لوزی خواهد بود.

مستطیل

تعریف. مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه باشند.



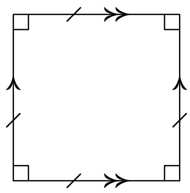
گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. در هر مستطیل، دوقطر باهم مساوی‌اند.

۲. اگر متوازی‌الاضلاعی یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، آن‌گاه چهار زاویه‌ی قائمه دارد و آن متوازی‌الاضلاع، مستطیل خواهد بود.

مربع

مربع را به دو صورت می‌توان تعریف کرد.

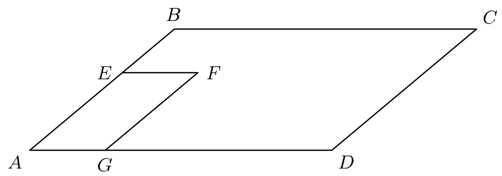


تعریف ۱. مربع، لوزی‌ای است که همه‌ی زاویه‌هایش باهم مساوی باشند.

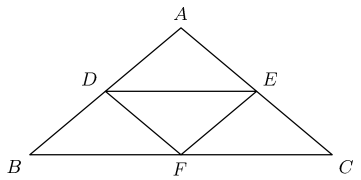
تعریف ۲. مربع، مستطیلی است که همه‌ی اضلاعش باهم مساوی باشند.

تمرین

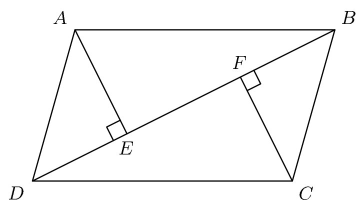
۱. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ و همچنین چهارضلعی $AEFG$ متوازی‌الاضلاع هستند. زاویه‌های B و F چه رابطه‌ای باهم دارند؟



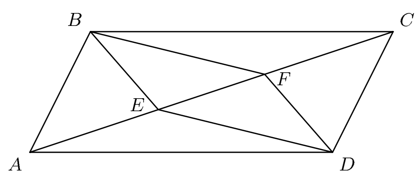
۲. در شکل زیر چهارضلعی $BDEF$ و همچنین چهارضلعی $DECF$ متوازی‌الاضلاع هستند. اگر $FD = FE$، ثابت کنید $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



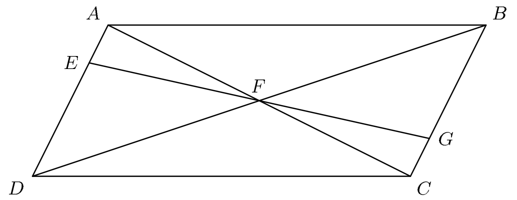
۳. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، AE و CF را بر BD عمود می‌کنیم. ثابت کنید AE و CF باهم مساوی و موازی هستند.



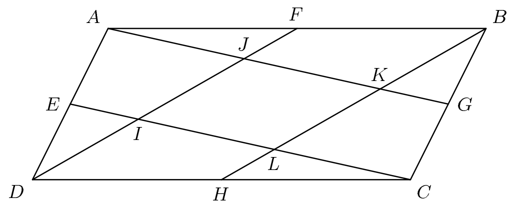
۴. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌دانیم که $AB = AE$ و همچنین $CD = CF$؛ ثابت کنید $BEDF$ یک متوازی‌الاضلاع است.



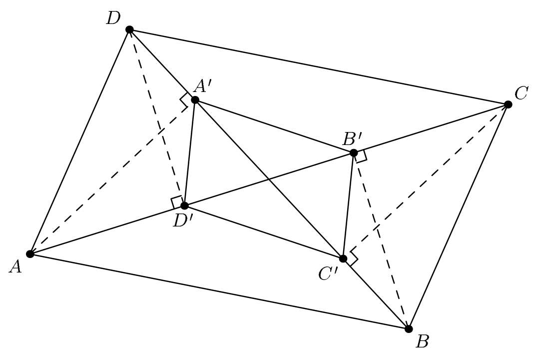
۵. در شکل زیر $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است؛ ثابت کنید $EF = FG$.



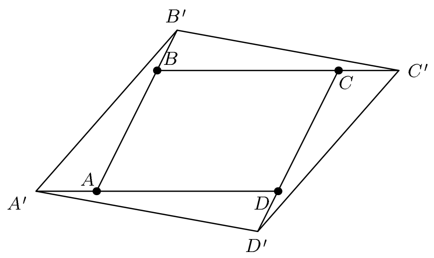
۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقاط E، F، G و H وسط اضلاع هستند؛ ثابت کنید $IJKL$ متوازی‌الاضلاع است.



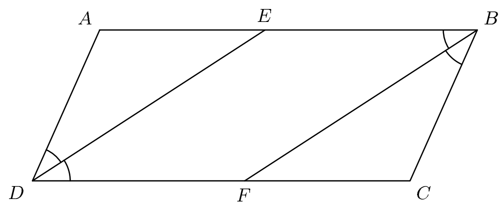
۷. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و $AA'\perp BD$، $BB'\perp AC$، $CC'\perp BD$ و $DD'\perp AC$؛ ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.



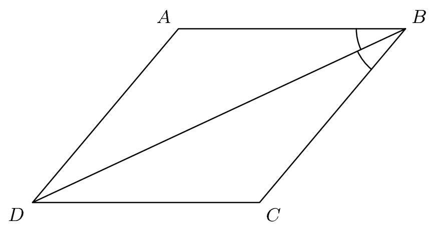
۸. اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در یک جهت امتداد داده و روی آنها پاره‌خط‌های $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می‌کنیم؛ ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.



۹. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، DE نیمساز زاویه‌ی D و BF نیمساز زاویه B هستند؛ ثابت کنید چهارضلعی $DEBF$ متوازی‌الاضلاع است.

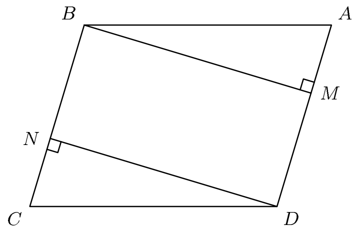


۱۰. متوازی‌الاضلاعی که یک قطرش نیمساز یکی از زاویه‌هایش باشد، لوزی است.

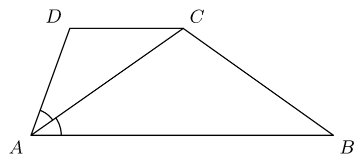


۱۱. ثابت کنید که قطرهای لوزی، نیمساز نیز هستند.

۱۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید شکل $BMDN$ مستطیل است.



۱۳. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ساق AD با قاعده‌ی CD مساوی است؛ ثابت کنید قطر AC زاویه‌ی A را نصف می‌کند.



۱۴. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر نصف طول وتر است.

۱۵. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۰° باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه، نصف طول وتر است.

۱۶. در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌ها ۱۵° درجه باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است.