فصل هفتم

عبارت‌های گویا

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱. تقسیم کنید.

الف) $۴x^۳ + ۲x$ بر $x + ۲$

ب) $۵x^۵ + ۱$ بر $x^۲ + ۳x + ۱$

ج) $x - x^۲ + ۲x^۴ + \frac{۱}{۸}$ بر $۲x - ۱$

د) $۵x^۴ - ۳x^۵ - ۳x - ۵$ بر $x + ۱ - x^۲$

ه) $x^۵ + x + ۱$ بر $x^۲ + x + ۱$

و) $x^۴$ بر $x + \sqrt{۲}$

۲. تقسیم‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $۳x^۲ + ۴$ بر $x^۲ + ۴$

ب) $x^۲ + ۴$ بر $۳x^۲ + ۴$

ج) ۲۵ بر $x + ۵$

د) $x + ۵$ بر ۲۵

۳. در تقسیم روبه‌رو، مقسوم‌علیه را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{r|l} ۶x^۴ - ۷x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۳ & \\ \cline{2-2} & ۲x^۲ - ۳x + ۱ \\ \hline -۲x + ۵ & \end{array}$$

۴. متن زیر را بخوانید.

می‌خواهیم بدون انجام محاسبات تقسیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۵ + ۲۰$ را بر $x - ۲$ بیابیم. چون مقسوم‌علیه از درجه‌ی یک است پس یا درجه‌ی باقی‌مانده صفر است یا خود باقی‌مانده صفر است. در هر صورت می‌توان باقی‌مانده را به صورت یک عدد (حقیقی) مثل a نشان داد. اکنون فرض می‌کنیم که خارج‌قسمت پس از تقسیم، برابر Q باشد. (Q یک چندجمله‌ای با متغیر x است.)

بنا به رابطه‌ی تقسیم می‌توانیم بنویسیم:

$$x^۵ + ۲۰ = (x - ۲)Q + a$$

اگر به جای x هر عددی بگذاریم به یک تساوی عددی درست می‌رسیم؛ بنابراین به جای x، ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲^۵ + ۲۰ = (۲ - ۲) \times (\text{حاصل جایگذاری عدد ۲ به جای تمام } x\text{های چندجمله‌ای } Q) + a$$

$$\rightarrow ۵۲ = ۰ \times (\text{حاصل جایگذاری عدد ۲ به جای تمام } x\text{های چندجمله‌ای } Q) + a$$

$$\rightarrow ۵۲ = a$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی این تقسیم برابر ۵۲ است.

به روش مشابه، بدون انجام محاسبات تقسیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^۵ + ۲۰$ بر $x - ۳$

ب) $x^۵ + x^۴ - ۱۰$ بر $(x - ۱)(x - ۳)$

در وب‌گاه ریاضی سمپاد در «رابطه‌ی ریشه و تقسیم» می‌توانید دنباله‌ی ماجرا را بخوانید.

۵. یک چندجمله‌ای بیابید که بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و هم‌چنین باقی‌مانده‌ی تقسیمش بر $x + ۲$، ۳۳ شود.

۶. در هر مورد، m و n دو عدد هستند. آنها را بیابید.

الف) می‌خواهیم $nx^3 - 4x^2 - mx + 6$ بر $x^2 - x - 2$ بخش‌پذیر شود.

ب) می‌خواهیم $x^5 + nx^4 + (3m+n)x^3 - 7x^2 + 2(2m-n)x - 8$ بر $x^3 - 3x + 2$ بخش‌پذیر شود.

ج) می‌خواهیم $n(x+2)^{20} + m(x-1)^{10} - 1$ بر $x^2 - 3x + 2$ بخش‌پذیر شود.

۷. اگر F و G دو چندجمله‌ای با متغیر x باشند و باقی‌مانده‌ی تقسیم آنها بر $x^2 - x + 1$ به ترتیب $x - 1$ و $x + 2$ شود، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $F \times G$ را بر $x^2 - x + 1$ بیابید.

۸. اگر P یک چندجمله‌ای با متغیر x باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم P بر $x + 1$، $x - 2$ و $x + 2$ به ترتیب ۱، ۳ و ۲- شود، باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای P را بر $(x + 1)(x^2 - 4)$ به‌دست آورید.

ریشه‌ی یک چندجمله‌ای

۱. به مثال‌های زیر دقت کنید.

چندجمله‌ای $= ۰$	محاسبه	ریشه(ها)
$x - ۵ = ۰$	$۵ - ۵ = ۰$	۵
$x^{۲} - ۲x + ۱ = ۰$	$۱ - ۲ \times ۱ + ۱ = ۰$	۱
$x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$	$۲^{۲} - ۳ \times ۲ + ۲ = ۰$	۲
	$۱^{۲} - ۳ \times ۱ + ۲ = ۰$	۱
$x^{۲} + \left(۲ - \sqrt{۳}\right)x - ۲\sqrt{۳} = ۰$	$\left(\sqrt{۳}\right)^{۲} + \left(۲ - \sqrt{۳}\right) \times \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} = ۰$	$\sqrt{۳}$
	$(-۲)^{۲} + \left(۲ - \sqrt{۳}\right) \times (-۲) - ۲\sqrt{۳} = ۰$	-۲

اگر یک چندجمله‌ای یک متغیری داشته باشیم، به عددی که اگر به جای متغیر جایگذاری کنیم و حاصل برابر صفر شود، ریشه‌ی آن چندجمله‌ای می‌گوییم.

الف) سه ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^{۳} - ۲x^{۲} - ۵x + ۶$ را بیابید.

ب) یک چندجمله‌ای بیابید که ریشه‌هایش ۱ و -۵ باشد.

ج) یک چندجمله‌ای از درجه‌ی سه بیابید که تنها ریشه‌اش ۲ باشد.

۲. الف) یک چندجمله‌ای بیابید که $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌هایش اعداد صحیح باشند.

ب) یک چندجمله‌ای بیابید که $\sqrt[۳]{۲} + \sqrt{۲}$ ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌هایش اعداد صحیح باشند.

۳. ثابت کنید که معکوس ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۳ - x + ۱$، ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۵ + x + ۱$ خواهند شد.

۴. الف) رؤیای ریاضی‌دان‌ها دست یافتن به راهی ساده برای تولید اعداد اول است. نشان دهید که برای اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴۰ با کمک هر یک از رابطه‌های زیر می‌توان اعداد اول به‌دست آورد.

$$n^۲ - n + ۴۱ \qquad\qquad n^۲ - ۷۹n + ۱۶۰۱$$

ب) امروزه ثابت شده است که با کمک گرفتن از هیچ چندجمله‌ای تشکیل شده از یک‌جمله‌ای‌هایی با ضرایب عددی صحیح نمی‌توان همیشه عدد اول به‌دست آورد. اثبات این مطلب در «به‌دست آوردن اعداد اول» در وب‌گاه ریاضی سمپاد موجود است.

ج) نشان دهید با کمک جایگذاری اعداد طبیعی در هیچ یک از دو رابطه‌ی داده شده در قسمت «الف» نمی‌توان همیشه عدد اول ساخت.

۵. به عددی حقیقی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای باشد که همه‌ی ضرایب یک‌جمله‌ای‌هایش عددی صحیح باشند، عدد جبری[۱] می‌گویند. مجموعه‌ی همه‌ی اعداد جبری را با $\mathbb{A}$ نشان می‌دهند.

برای مثال ۳ عددی جبری است زیرا ۳ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x - ۳$ است.

الف) ثابت کنید $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$

ب) ثابت کنید $\mathbb{Q} \neq \mathbb{A}$

سؤال بسیار مهمی برای ریاضی‌دان‌ها مطرح شده بود این بود که «آیا $\mathbb{A} = \mathbb{R}$؟». به عبارتی دیگر آیا عددی حقیقی یافت می‌شود که جبری نباشد.

در سال ۱۲۶۱ هجری‌شمسی، لیندِمان[۲] ثابت کرد که π عددی غیرجبری[۳] است. او در واقع به

۱. algebraic number

۲. Lindemann

۳. non-algebraic number

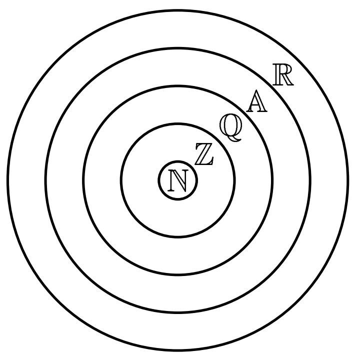
دنبال این بود که به مسأله‌ی «تربیع[۱] دایره» پاسخ منفی دهد.[۲] مسأله‌ی تربیع‌دایره که نزدیک به ۲۰۰۰ سال ذهن ریاضی‌دان‌ها را مشغول کرده بود چنین است:

چطور با کمک خط‌کش[۳] و پرگار می‌توان مربعی هم‌مساحت با دایره‌ای به شعاع واحد (یک) رسم کرد؟

ج) ثابت کنید که مسأله‌ی تربیع‌دایره معادل مسأله‌ی زیر است:

«شیوه‌ی رسم پاره‌خطی به طول π با کمک خط‌کش (غیرمدرج) و پرگار»

د) به پاس تلاش‌های لیندمان، امروزه می‌دانیم ساختمان اعداد حقیقی به صورت زیر است.



ه) امروزه به اعداد غیر جبری، اعداد متعالی[۴] نیز می‌گویند. با کمک جستجوی اینترنتی تعیین کنید که غیرمتعالی بودن هر یک از اعداد زیر در چه سالی کشف شده است؟

عدد نپر[۵] : e

عدد چمپرنون : C

۱. مربع‌سازی

۲. لیندمان ثابت کرد که به هیچ طریقی نمی‌توان با کمک خط‌کش (غیرمدرج) و پرگار پاره‌خطی به طول π رسم کرد.

۴. transendental

۵. (Napier) این عدد یکی از عددهای معروف دنیای ریاضیات است؛ که به افتخار ریاضی‌دان بزرگ «اویلر (Euler)» با e نشان داده می‌شود!

عدد لیوویل : α

برای دیدن یکی از آخرین تحقیقات روز دنیا، «جبری یا متعالی؛ مسأله این است.» را در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید.[۶]

و) اگر همه‌ی اعداد حقیقی که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای تشکیل شده از یک‌جمله‌های با ضرایب عددی گویا باشند را با مجموعه‌ی $\mathbb{B}$ نشان دهیم، کدام یک از ادعاهای زیر درست است؟

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \qquad \mathbb{A} = \mathbb{B} \qquad \mathbb{B} \subset \mathbb{A}$$

ز) نشان دهید که معکوس هر عدد جبری، به‌جز صفر جبری است.

۶. به علاقه‌مندان توصیه می‌شود که کتاب «تثلیث زاویه، تربیع‌دایره» ناشر انتشارات مدرسه را ببینند.

ریشه گویایابی یک چندجمله‌ای

۱. متن زیر را بخوانید.

به ریشه‌های یک چندجمله‌ای که عدد صحیح باشند، «ریشه‌های صحیح» آن چندجمله‌ای می‌گویند.
می‌خواهیم همه‌ی ریشه‌های صحیح چندجمله‌ای $5x^3 - 18x^2 - 41x + 30 = 0$ را بیابیم.
فرض می‌کنیم a یک ریشه‌ی صحیح این چندجمله‌ای باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$5a^3 - 18a^2 - 41a + 30 = 0$$

از همه‌ی اعداد a فاکتورگیری می‌کنیم.

$$a(5a^2 - 18a - 41) + 30 = 0$$
$$a(5a^2 - 18a - 41) = -30$$

بنابراین a یک مقسوم‌علیه صحیح -30 است. بنابراین a تنها ممکن است یکی از اعضای مجموعه‌ی زیر باشد.

$$\{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +5, -5, +6, -6, +10, -10, +15, -15, +30, -30\}$$

با بررسی این دوازده عدد می‌توان فهمید که a یا برابر -2 است و یا برابر 5.

$$5 \times (-2)^3 - 18(-2)^2 - 41(-2) + 30 = 0$$
$$5 \times (5)^3 - 18(5)^2 - 41(5) + 30 = 0$$

همه‌ی ریشه‌های صحیح چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید.

الف) $x^{۳} + ۵x^{۲} + ۳x - ۹$

ب) $۲۷x^{۳} - ۵۷x^{۲} + ۳۸x - ۸$

ج) $x^{۳} + ۹x^{۲} + ۱۱x - ۲۱$

۲. متن زیر را بخوانید.

به ریشه‌های یک چندجمله‌ای که عددی گویا باشند، «ریشه‌های گویا»ی آن چندجمله‌ای می‌گویند. می‌خواهیم همه‌ی ریشه‌های گویای چندجمله‌ای $۵x^{۳} - ۱۸x^{۲} - ۴۱x + ۳۰$ را بیابیم. فرض می‌کنیم که $\frac{a}{b}$ (به‌طوری که ب.م.م a و b برابر یک باشد و $b \in \mathbb{N}$)، یک ریشه‌ی گویای این چندجمله‌ای باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&۵\left(\frac{a}{b}\right)^{۳} - ۱۸\left(\frac{a}{b}\right)^{۲} - ۴۱\left(\frac{a}{b}\right) + ۳۰ = ۰\\
&\rightarrow ۵\frac{a^{۳}}{b^{۳}} - ۱۸\frac{a^{۲}}{b^{۲}} - ۴۱\frac{a}{b} + ۳۰ = ۰\\
&\rightarrow \frac{۵a^{۳} - ۱۸a^{۲}b - ۴۱ab^{۲} + ۳۰b^{۳}}{b^{۳}} = ۰\\
&\rightarrow ۵a^{۳} - ۱۸a^{۲}b - ۴۱ab^{۲} + ۳۰b^{۳} = ۰ \qquad *
\end{aligned}$$

اولاً) از همه‌ی اعداد a (در سمت چپ تساوی «$*$») فاکتورگیری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&a(۵a^{۲} - ۱۸ab - ۴۱b^{۲}) + ۳۰b^{۳} = ۰\\
&\rightarrow a(۵a^{۲} - ۱۸ab - ۴۱b^{۲}) = -۳۰b^{۳}
\end{aligned}$$

بنابراین a مقسوم‌علیه $-۳۰b^{۳}$ می‌شود؛ اما چون ب.م.م a و b برابر یک است، پس a مقسوم‌علیه -۳۰ می‌شود. بنابراین a تنها ممکن است یکی از اعداد زیر باشد:

$$\{+۱, -۱, +۲, -۲, +۳, -۳, +۵, -۵, +۶, -۶, +۱۰, -۱۰, +۱۵, -۱۵, +۳۰, -۳۰\}$$

ثانیاً) از همه‌ی اعداد b (در سمت چپ تساوی «*») فاکتورگیری می‌کنیم.

$$۵a^{۳} + b(-۱۸a^{۲} - ۱۹ab + ۳۰b^{۲}) = ۰$$

$$\rightarrow ۵a^{۳} = -b(-۱۸a^{۲} - ۴۱ab + ۳۰b^{۲})$$

بنابراین b مقسوم‌علیه $۵a^{۳}$ می‌شود؛ اما چون ب.م.م a و b برابر یک است، پس b مقسوم‌علیه طبیعی ۵ می‌شود. بنابراین b تنها ممکن است یکی از اعداد زیر باشد:

$$\{۱, ۵\}$$

با کنار هم قرار دادن نتایج حاصل از «اولاً» و «ثانیاً»، به این نتیجه می‌رسیم که $\frac{a}{b}$ تنها ممکن است یکی از ۳۲ عدد زیر شود.

$$\frac{+۱}{۱}, \frac{-۱}{۱}, \frac{+۲}{۱}, \frac{-۲}{۱}, \frac{+۳}{۱}, \frac{-۳}{۱}, \frac{+۵}{۱}, \frac{-۵}{۱}, \frac{+۶}{۱}, \frac{-۶}{۱}, \frac{+۱۰}{۱}, \frac{-۱۰}{۱}, \frac{+۱۵}{۱}, \frac{-۱۵}{۱}, \frac{+۳۰}{۱}, \frac{-۳۰}{۱}$$

$$\frac{+۱}{۵}, \frac{-۱}{۵}, \frac{+۲}{۵}, \frac{-۲}{۵}, \frac{+۳}{۵}, \frac{-۳}{۵}, \frac{+۵}{۵}, \frac{-۵}{۵}, \frac{+۶}{۵}, \frac{-۶}{۵}, \frac{+۱۰}{۵}, \frac{-۱۰}{۵}, \frac{+۱۵}{۵}, \frac{-۱۵}{۵}, \frac{+۳۰}{۵}, \frac{-۳۰}{۵}$$

(توجه کنید که بسیاری از این اعداد تکراری است؛ و اگر شرط «ب.م.م a و b برابر یک است» را هم در نظر بگیریم تعداد اعداد بسیاربسیار کمتر از این ۳۲ تا عدد ظاهری خواهد شد.)
با بررسی این اعداد می‌توان فهمید که a تنها برابر $\frac{۳}{۵}$ می‌شود.

$$۵ \times \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۳} - ۱۸\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} - ۴۱\left(\frac{۳}{۵}\right) + ۳۰ = ۰$$

همه‌ی ریشه‌های گویای چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید.

الف) $x^{۳} + ۵x^{۲} + ۳x - ۹$

ب) $۲۷x^{۳} - ۵۷x^{۲} + ۳۸x - ۸$

ج) $۲x^{۶} + ۹x^{۴} + ۱۰x^{۲} + ۳$

د) $x^{۳} + ۲x^{۲} + x - \frac{۱}{۲}$

۳. با کمک روش ارائه شده در سؤال پیش، ثابت کنید $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

۴. اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $|a| \neq ۲$، در این صورت ثابت کنید $x^{۴} + ax + ۱$ فاقد ریشه‌ی گویاست.

گویا کردن مخرج کسر

۱. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$

ب) $\dfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$

ج) $\dfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}$

د) $\dfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۴}+\sqrt{۵}}$

۲. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}}$

ب) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۵}}$

ج) $\dfrac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}$

د) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}}$

۳. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}$

ب) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}$

۴. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}$$