فصل چهارم

چندجمله‌ای‌ها و اتحادها

[[تدریس صفحه‌ی ۷۳ تا سر تمرین در کلاس صفحه‌ی ۷۶]]

❓ چرا صفر معکوس ندارد؟

□نشان می‌دهیم که صفر نمی‌تواند معکوس داشته باشد. فرض می‌کنیم صفر معکوس داشته باشد. نام آن را «م» می گذاریم. اکنون به دو معادله زیر توجه کنید:

$$\left.\begin{array}{r} \text{۰} \times \text{م} = \text{۰} \\ \text{۰} \times \text{م}x = \text{۱} \end{array}\right\} \rightarrow \text{۰} = \text{۱}$$

بنابراین اگر صفر معکوس داشته باشد، آنگاه «$\text{۱} = \text{۰}$» خواهد شد! $\perp$

به عبارتی اگر صفر معکوس داشته باشد، «سنگ روی سنگ بند نخواهد شد»!

[[تدریس از بقیه‌ی صفحه‌ی ۷۶ تا سر «یک جمله‌ای‌ها» در صفحه‌ی ۷۹]]

عبارت‌های جبری

۱.

۲.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۷۹ و صفحه‌ی ۸۰ تا سر «جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها»]]

❓ ضریب $\text{۲}x\sqrt{y}$ چیست؟

□، ضریب تنها برای یک‌جمله‌ای‌ها تعریف می‌شود.

اگر برای این عبارت جبری ضریب را «۲» بگیریم، درباره‌ی ضریب عبارت جبری $\text{۲}x\sqrt{\text{۵}y + x}$ چه می‌توان گفت؟!

❓ درست یا غلط؟

«درجه‌ی یک‌جمله‌ای صفر برابر ۰ است.»

☐ برای یک‌جمله‌ای «۰» نمی‌توان درجه تعریف کرد. پس ادعای بالا، نادرست است.

؟ با دقت در تساوی‌های پایین بگویید که چرا برای «۰» نمی‌توان درجه تعریف کرد؟

$$0 = 0x = 0x^2 = 0x^3 = \cdots$$

۳. در این عبارت جبری، نمی‌توان x را برابر صفر قرار داد، پس این عبارت چندجمله‌ای نیست.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۸۰، صفحه‌های ۸۱ و ۸۲ تا سر «ضرب یک جمله‌ای‌ها»]]

؟ درست یا غلط؟

«۰ و $2x^2$ متشابه هستند.»

☐درست! زیرا

$$0 = 0x^2$$

؟ آیا مجموعه‌ی جملات متشابه نسبت به عمل جمع بسته است؟

☐ بله.

[[تدریس از بقیه‌ی صفحه‌ی ۸۲ تا سر «جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها» از صفحه‌ی ۸۴]]

؟ به نظر شما چطور می‌توان چندجمله‌ای زیر را استاندارد کرد؟

$$x^4 + x^3 + z + x^2y + xy^2$$

☐ برای یافتن پاسخ به «شیوه‌های استانداردسازی» در وب‌گاه ریاضی سمپاد مراجعه کنید.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۸۴ و صفحه‌های ۸۵ و ۸۶]]

۴.

۵. پس از حل تمرین «الف»، پاسخ دانش‌آموزان را با هم مقایسه کنید تا زمینه‌ی پاسخ‌گویی به «ب» فراهم شود.

ب) خانه‌ها را از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. ابتدا می‌توان ثابت کرد که دو خانه‌ی کنار خانه‌ی *، با $x+۱$ و $x-۱$ پر می‌شوند.

$x+۱$			$x+۱$	$*$	$x-۱$			$x-۱$	

جمع چندجمله‌ای‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم = جمع چندجمله‌ای‌های خانه‌های اول و دوم و سوم

بنابراین:

چندجمله‌ای خانه‌ی چهارم = چندجمله‌ای خانه‌ی اول

بنابراین:

$$(x+۱)+(*)+(x-۱)=x$$

پس:

$$*=-x$$

۶. پیش از پرداختن به این سؤال، معنی «توان» یک چندجمله‌ای را شرح دهید.

$$(x+۳)^{۰}=۱$$

$$(x+۳)^{۱}=x+۳$$

$$(x+۳)^{۲}=(x+۳)(x+۳)$$

$$(x+۳)^{۳}=(x+۳)(x+۳)(x+۳)$$

$$\vdots$$

برای پاسخ به سؤال ۶ باید ضرب سه پرانتز را انجام دهید و حل این سؤال (در اینجای درس) با کمک اتحاد بی‌معنی است!

۷. پس از ضرب و ساده کردن تنها یک‌بار جمله‌ای که فقط متغیر x دارد به‌دست می‌آید؛ زیرا تنها جمله‌ای که فقط متغیر x دارد از راه ضرب هفت متغیر x از هفت چندجمله‌ای $(x + \sqrt{۲}y - ۳z)$ حاصل می‌شود.

۸. ۱۰.

۹.

۱۰.

۱۱. در هنگام حل این سؤال و سؤال بعدی بگذارید دانش‌آموزان به این ادراک برسند که با جایگذاری ۱ به جای یک متغیر چه اتفاقی می‌افتد؛ با جایگذاری صفر چه اتفاقی می‌افتد و با جایگذاری ۱− چه اتفاقی می‌افتد.

الف) $x = ۱, y = ۱ \to (۱ + ۱ - ۲ \times ۱)^{۱۰۰} = ۰$

ب) $x = ۰, y = ۱ \to (۱ + ۰ - ۲ \times ۱)^{۱۰۰} = ۱$

ج) پاسخ «الف» − پاسخ «ب» = $۰ - ۱ = -۱$

د) $x = ۰, y = ۰ \to (۱ + ۰ - ۲ \times ۰)^{۱۰۰} = ۱$

ه) غلط. برای مثال $۱۰۰x^{۹۹}$ هم‌زمان متغیر x و y را ندارد ولی در چندجمله‌ای استاندارد شده‌ی موردنظر ظاهر می‌شود؛ و ضریب این یک‌جمله‌ای در سمت چپ ادعای داده شده تأثیر دارد ولی در سمت راست ادعای داده شده بی‌تأثیر است.

تنها سه‌جمله هستند که هم‌زمان متغیرهای x و y را ندارند. این جمله‌ها را درکنار ضرایبشان می‌نویسیم:

$$۱$$

$$x^{۱۰۰}$$

$$(-۲)^{۱۰۰}y^{۱۰۰}$$

پس $۲ + {}^{۱۰۰}۲ = {}^{۱۰۰}۲ + ۱ + ۱ =$ مجموع ضرایب جمله‌هایی که هم‌زمان متغیرهای x و y را ندارند. بنابراین

$(۲ + {}^{۱۰۰}۲) -$ (مجموع همه‌ی ضرایب) = مجموع ضرایب جمله‌هایی که هم متغیر x دارند و هم متغیر y

$$= ۰ - ({}^{۱۰۰}۲ + ۲) = -{}^{۱۰۰}۲ - ۲$$

در واقع با جایگذاری ۱ به جای یک متغیر، آن متغیر بی‌اثر می‌شود و با جایگذاری ۰ به جای یک متغیر، آن متغیر حذف می‌شود.

۱۲. توجه شود که پاسخ «الف» را می‌توان بدون پاسخ «ب» یافت.

الف) $x = -۱ \to (-۱ + ۳)^{۱۰۰} = ۲^{۱۰۰} \to E - O = ۲^{۱۰۰} \to E - O > ۰ \to E > O$

ب) $$\left.\begin{array}{l} x = -۱ \to (-۱ + ۳)^{۱۰۰} \\ x = ۱ \to (۱ + ۳)^{۱۰۰} = ۴^{۱۰۰} \end{array}\right\} \to ۲E = ۴^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰} \to E = \frac{۴^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰}}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -۱ \to (-۱ + ۳)^{۱۰۰} \\ x = ۱ \to (۱ + ۳)^{۱۰۰} = ۴^{۱۰۰} \end{array}\right\} \to ۲O = ۴^{۱۰۰} - ۲^{۱۰۰} \to O = \frac{۴^{۱۰۰} - ۲^{۱۰۰}}{۲}$$

در واقع با جایگذاری ۱− به جای یک متغیر، ضریب توان‌های فرد آن متغیر قرینه می‌شود اما ضریب توان‌های زوج آن متغیر تغییر نمی‌کند.

۱۳. مقدار حداکثر: ۶

$$\underbrace{(a+b+c)}_{\text{سه‌جمله}}\underbrace{(d+e)}_{\text{دوجمله}} = \underbrace{ad+ae+bd+be+cd+ce}_{\text{شش‌جمله}}$$

مقدار حداقل: ۲

$$\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{سه‌جمله}}\underbrace{(x-1)}_{\text{دوجمله}} = \underbrace{x^3-1}_{\text{دوجمله}}$$

؟ چرا بیش از شش جمله به‌دست نمی‌آید؟

؟ چرا کمتر از دو جمله به‌دست نمی‌آید؟

با این مسأله و مسأله‌های مشابه می‌توانید حتی دانش‌آموزان نسبتاً بی‌تفاوت کلاس درس را به جنب و جوش درآورید!

۱۴.

$$a^6+a^4+a^2+a^4b^2+a^2b^2+b^2=(a^4+a^2+1)(a^2+b^2)$$

چون سمت چپ عددی گویاست، پس $(a^4+a^2+1)(a^2+b^2)$ هم گویاست؛ و چون $a^4+a^2+1\in\mathbb{Q}$ و a^4+a^2+1 برابر صفر نیست، پس $a^2+b^2\in\mathbb{Q}$.

۱۵. الف) خیر ب) بله ج) خیر د) بله ه) بله و) بله

۱۶.

الف) $(x^2y+xy)+(-x^2y)=xy$ برای مثال:

ب) $(3x^2-10xy+3y^2)+(0)=3x^2-10xy+3y^2$ برای مثال:

ج) $(x^3y+xz^2)+(-x^3y-xz^2)=0$

۱۷. چون S و P هر دو متقارن هستند، پس هر ترکیب جبری آنها متقارن می‌شود. درواقع عبارت داده شده به‌صورت زیر است:

$$\frac{\Big((xy)+۲(x+y)\Big)\sqrt{۳(x+y)}}{(xy)}$$

[[تدریس صفحه‌ی ۸۷ تا سر «تمرین درکلاس»]]

توجه کنید که از مسائل صفحه‌ی ۹۴ و ۹۵ آخر بخش «اتحادها و تجزیه» می‌توانید متناسب با درس به صورت پراکنده استفاده کنید.

اتحاد

۱.

۲. اگر جایگذاری $a=b=c=۱$ را انجام دهیم به تساوی نادرست زیر می‌رسیم.

$$۱+۲۷=-۱+۲۷+۳$$

بنابراین «ب» اتحاد نیست.

۳.

۴. می‌توان این مسأله را مثل مسأله‌ی ۳ حل کرد، اما راه حل هوشمندانه‌ای هم وجود دارد. اگر x را برابر ۳ بگیریم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$۱+۳+۱۸-۲۷=۳+a+b-۱$$

$$\to a+b=-۷$$

بنابراین $a+b$ منفی است.

۵. خیر! راه حل غلط متداول چنین است:

$$x(\sqrt{۳}+۱)+y(\sqrt{۳}-۱)=۱$$
$$\rightarrow (x+y)\sqrt{۳}+(x-y)=۱ \qquad *$$

اما از اینجا نتیجه‌گیری می‌شود که:

$$\begin{cases} x+y=۰ \\ x-y=۱ \end{cases} \rightarrow x=\frac{۱}{۲}, \quad y=-\frac{۱}{۲}$$

نتیجه‌گیری موفق از عبارت جبری «$*$» زمانی معتبر است که بدانیم $x+y\in\mathbb{Q}$ و $x-y\in\mathbb{Q}$. در حالت کلی از «$*$» لزوماً دستگاه دو معادله‌ـدومجهول بالا نتیجه گرفته نمی‌شود.

اکنون نتیجه‌ی دیگری از $*$ می‌گیریم:

$$(x+y)\sqrt{۳}+(x-y)=۱$$
$$\rightarrow (x+y)\sqrt{۳}+(x-y)=\sqrt{۳}+(۱-\sqrt{۳})$$
$$\rightarrow \begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۱-\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow x=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین ادعای داده شده نادرست است.

۶. اگر عبارت‌های r و s داده‌شده را در $(m^۲+amn+n^۲)(p^۲+apq+q^۲)=r^۲+ars+s^۲$

جایگذاری کنیم و یک‌جمله‌ای‌های دو طرف تساوی را مقایسه کنیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$a^۲mnpq = ۴mnpq$$

و بنابراین

$$a^۲mnpq - ۴mnpq = ۰ \rightarrow (a^۲ - ۴)mnpq = ۰$$

این تساوی زمانی درست است که «$a = \pm ۲$ و یا $mnpq = ۰$».

اکنون می‌توان بررسی کرد که در هر یک از حالت‌های «$a = ۲$، $a = -۲$ و یا $mnpq = ۰$» نتیجه‌گیری داده‌شده صحت پیدا خواهد کرد.

۷. ب) اگر در «الف» جایگذاری $x = a^۲$، $y = b^۲$ و $z = c^۲$ را انجام دهیم، بنابه «الف» خواهیم داشت:

$$(a^۴+b^۴+c^۴)^۲-۲(a^۸+b^۸+c^۸) = (a^۲+b^۲+c^۲)(a^۲+b^۲-c^۲)(a^۲-b^۲+c^۲)(-a^۲+b^۲+c^۲)$$

اما بنابه فرض داده‌شده در «ب»، سمت چپ تساوی بالا صفر است؛ پس حاصل‌ضرب چهار پرانتز سمت راست، صفر است.

$$۰ = (a^۲ + b^۲ + c^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)(a^۲ - b^۲ + c^۲)(-a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

بنابراین دست‌کم یکی از چهار تساوی زیر درست است:

حالت‌اول: $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۰$

حالت‌دوم: $a^۲ + b^۲ - c^۲ = ۰ \rightarrow a^۲ + b^۲ = c^۲$

حالت‌سوم: $a^۲ - b^۲ + c^۲ = ۰ \rightarrow a^۲ + c^۲ = b^۲$

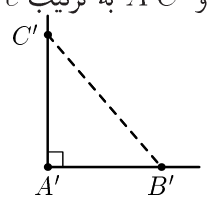
حالت‌چهارم: $-a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۰ \rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲$

چون a، b و c مثبت هستند، حالت اول امکان‌پذیر نیست! اما بنابه عکس قضیه‌ی فیثاغورس در هر یک از سه‌حالت «دوم»، «سوم» و «چهارم» مثلث موردنظر قائم‌الزاویه خواهد شد.

عکس قضیه‌ی فیثاغورس:

اگر در $\triangle ABC$، طول اضلاع مقابل به زاویه‌های $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ به ترتیب برابر با a، b و c باشد، در این صورت $\widehat{A}$ قائمه خواهد بود.

اثبات. مطابق شکل زاویه‌ی قائمه‌ای به رأس A' رسم می‌کنیم و روی اضلاع آن دو نقطه‌ی B' و C' را طوری انتخاب می‌کنیم که طول پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ به ترتیب c و b شوند.



اکنون با دقت در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\triangle A'B'C'$ و با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان نوشت که

$$(\text{طول } B'C')^2 = b^2 + c^2$$

بنابراین

$$\text{طول } B'C' = a$$

پس $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ بنا به (ض ض ض) مساوی خواهند شد؛ و در نتیجه $\widehat{CAB}$ قائمه خواهد شد.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۸۷، صفحه‌های ۸۸ و ۸۹ تا سر «تمرین در کلاس»]]

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۱. در حل «ج» و «د» هم فقط از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک بگیرید.

؟ شبیه راه‌حل «ج» و «د» می‌توان اتحادهایی برای چندجمله‌ای‌های زیر به‌دست آورد. آنها را به‌دست آورید.

$(a+b)^۴$ $\qquad$ $(a+b+c)^۲$

۲. الف) $\frac{۴۹}{۴}b^۲$ $\qquad$ ب) $\frac{۴۹}{۱۶}b^۲$

ج) ۱ $\qquad$ د) $۲\frac{۴۹}{۲۰}$

ه) $\frac{۴}{۲۵}a^۴$ یا $۲۰a$ یا $-۲۰a$ $\qquad$ و) $\frac{۱}{۱۶}a^{۱۲}$ یا $۴a^۳$ یا $-۴a^۳$

ز) $\frac{۱}{۴}a^{۱۰}$

۳. ۲۳۲

۴.

۵. درباره‌ی اهمیت شرط $a > b > ۰$ با دانش‌آموزان صحبت کنید. پس از حل مسأله بپرسید:

؟ درکجای راه حل از شرط $a > b > ۰$ استفاده شد؟

□ وقتی به رابطه‌ی $(a-b)^۲ = ۲ab$ می‌رسیم، برای به‌دست آوردن $a-b$ باید بدانیم که $a-b$ مثبت است یا منفی. یعنی باید بدانیم که $a < b$ یا $b < a$.

۶. الف) فرض می‌کنیم که $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} \in \mathbb{Q}$. در این صورت می‌توان حاصل $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ را به‌صورت کسر ساده‌نشدنی $\frac{m}{n}$ نوشت:

$$\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = \frac{m}{n} \to (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^۲ = \left(\frac{m}{n}\right)^۲ \to ۵ + ۲\sqrt{۶} = \frac{m^۲}{n^۲}$$

اما در این صورت سمت راست تساوی بالا عددی گویا و سمت چپ، عددی گنگ خواهد شد. چنین چیزی غیرممکن است!

ب) فرض می‌کنیم که $n\sqrt{۲} + m\sqrt{۳} = q \in \mathbb{Q}$.

$$n\sqrt{۲} + m\sqrt{۳} = q \rightarrow (n\sqrt{۲} + m\sqrt{۳})^{۲} = q^{۲} \rightarrow ۲n^{۲} + ۳m^{۲} + ۲nm\sqrt{۶} = q^{۲}$$
$$\rightarrow ۲nm\sqrt{۶} = (q^{۲} - ۲n^{۲} - ۳m^{۲})$$

چون $\sqrt{۶} \in \mathbb{Q}'$ و $q^{۲} - ۲n^{۲} - ۳m^{۲} \in \mathbb{Q}$، پس $۲nm$ باید صفر شود. بنابراین $n = ۰$ یا $m = ۰$.

اگر $n = ۰$، در این صورت خواهیم داشت $q = ۰ \times \sqrt{۲} + m\sqrt{۳}$؛ پس $m\sqrt{۳} = q$. اما چون $m \in \mathbb{Z}$، بنابراین $m = ۰$.

اگر $m = ۰$ ، به روش مشابهِ توضیح اخیر نتیجه می‌شود که $n = ۰$.

بنابراین در هر صورت $n = m = ۰$.

۷. الف)

$$\left(a + \frac{h}{۲a}\right)^{۲} = a^{۲} + h + \frac{h^{۲}}{۴a^{۲}}$$

چون $|h| < a^{۲}$، پس $\frac{|h|}{a^{۲}} < ۱$. بنابراین $\left(\frac{|h|}{a^{۲}}\right)^{۲} < \frac{|h|}{a^{۲}}$. در نتیجه $\frac{h^{۲}}{a^{۴}} < \frac{|h|}{a^{۲}}$. بنابراین خواهیم داشت $\frac{h^{۲}}{a^{۲}} < |h|$. پس $\frac{h^{۲}}{۴a^{۲}}$ بسیار کوچک‌تر از $|h|$ و $a^{۲}$ خواهد بود و مقدار آن در برابر مقدار h ناچیز خواهد شد. بنابراین می‌توان با تقریب چنین گفت:

$$\left(a + \frac{h}{۲a}\right)^{۲} \simeq a^{۲} + h$$

پس

$$a + \frac{h}{۲a} \simeq \sqrt{a^{۲} + h}$$

شاید این اولین جایی باشد که دانش‌آموزان یک تقریب ریاضی را می‌بینند. برای آنها این مطلب را توضیح دهید که دقت این تقریب به مقدار a و h بستگی دارد. هرچه a بزرگ‌تر از h باشد مقدار $\frac{h^۲}{۴a^۲}$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود و تقریب به‌دست آمده دقیق‌تر می‌شود.

د) $(۱{,}۲۴\ \ ۵۱\ \ ۱۰)_{۶۰} = ۱ + \frac{۲۴}{۶۰} + \frac{۵۱}{۳۶۰۰} + \frac{۱۰}{۲۱۶۰۰۰}$

به دانش‌آموزان بگویید آنچه که در تصویر برروی قطر مربع دیده می‌شود، همان تقریب عدد $\sqrt{۲}$ به خط میخی است که از بابِل به‌دست آمده است.

۸. از رابطه‌های زیر کمک می‌گیریم:

$$\text{الف)}\quad \left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ + \frac{۱}{a^۲} + ۲$$

$$\text{ب)}\quad \left(\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{a}}\right)^۲ = a + \frac{۱}{a} + ۲$$

$$\text{ج)}\quad \left(a-\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ + \frac{۱}{a^۲} - ۲$$

$$\text{د)}\quad \left(a^۲+\frac{۱}{a^۲}\right)^۲ = a^۴ + \frac{۱}{a^۴} + ۲$$

۹.

$$\frac{x}{x^۲+۱} = \frac{۱}{۵} \to \frac{x^۲+۱}{x} = ۵ \to x + \frac{۱}{x} = ۵$$
$$\to \left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲ = ۲۵ \to x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲ = ۲۵ \to x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = ۲۳$$
$$\to \frac{x^۴+۱}{x^۲} = ۲۳ \to \frac{x^۲}{x^۴+۱} = \frac{۱}{۲۳}$$

۱۰.

$$۴۹^x + ۴۹^{-x} = ۷ \to ۴۹^x + \frac{۱}{۴۹^x} = ۷ \to (۷^x)^۲ + \frac{۱}{(۷^x)^۲} = ۷$$

بنابراین:

$$\left(۷^x + \frac{۱}{۷^x}\right)^۲ = (۷^x)^۲ + ۲ + \frac{۱}{(۷^x)^۲} = ۷ + ۲ = ۹$$

$$\rightarrow ۷^x + \frac{۱}{۷^x} = ۳$$

؟ چرا $۷^x + \frac{۱}{۷^x} = -۳$ را به حساب نیاوردیم؟

□ زیرا ۷^x و $\frac{۱}{۷^x}$ هیچ‌کدام نمی‌توانند منفی شوند.

۱۱.

۱۲. محاسبه، نادرست است! محاسبه‌ی درست چنین است:

$$\sqrt{۲۹ - ۱۲\sqrt{۵}} = \sqrt{(۳ - ۲\sqrt{۵})^۲} = |۳ - ۲\sqrt{۵}| = ۲\sqrt{۵} - ۳$$

به دانش‌آموزان یادآور شوید که $\sqrt{x^۲} = |x|$!

۱۳.

الف)
$$\sqrt{۹ - \sqrt{۵۶}} = \sqrt{(\sqrt{۷} - \sqrt{۲})^۲} = \left|\sqrt{۷} - \sqrt{۲}\right| = \sqrt{۷} - \sqrt{۲}$$

ب)
$$\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۱}{۲} \times ۲(۲ + \sqrt{۳})} = \sqrt{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}}\sqrt{(\sqrt{۳} + ۱)^۲}$$
$$= \sqrt{\frac{۱}{۲}}(\sqrt{۳} + ۱) = \sqrt{\frac{۳}{۲}} + \sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

در هر مورد می‌توانستیم با به توان دو رساندن طرفین تساوی، به پاسخ دست یابیم.

مجموع مربعات

۱. این مسأله قسمتی اساسی در درس است. دانش‌آموز باید تشخیص دهد که مربع یک عدد منفی نیست؛ و اگر جمع مربع چند عدد صفر شود، همه‌ی آن چند عدد صفر خواهند بود.
به دانش‌آموز بگویید که:

$$(X)^۲ + (Y)^۲ + (Z)^۲ = ۰ \leftrightarrow X = Y = Z = ۰$$

۲. ب)

$$x^۲ + y^۲ + ۲ - ۲x - ۲y = ۰ \rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) = ۰$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \\ y - ۱ = ۰ \end{cases} \rightarrow x = y = ۱$$

۳.

$$\begin{aligned} & x^۲ + y^۲ + ۰/۲۵z^۲ - ۲x + ۲y - z + ۳ = ۰ \\ & \rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ + ۲y + ۱) + \left(\frac{z^۲}{۴} - z + ۱\right) = ۰ \\ & \rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + \left(\frac{z}{۲} - ۱\right)^۲ = ۰ \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \\ y + ۱ = ۰ \rightarrow y = -۱ \\ \frac{z}{۲} - ۱ = ۰ \rightarrow z = ۲ \end{array} \right\} \rightarrow x + y + z = ۲ \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} ۹a^۴ + ۱۰a^۲ + b^۲ - ۴ab + ۱ &= (۹a^۴ + ۶a^۲ + ۱) + (۴a^۲ - ۴ab + b^۲) \\ &= (۳a^۲ + ۱)^۲ + (۲a - b)^۲ \end{aligned}$$

$(\text{۲}a - b)^{\text{۲}}$ همواره نامنفی است و از طرفی دیگر $\text{۳}a^{\text{۲}} + \text{۱}$ هیچ‌گاه از یک کوچک‌تر نمی‌شود؛ پس $(\text{۳}a^{\text{۲}} + \text{۱})^{\text{۲}}$ از یک کوچک‌تر نیست. بنابراین جمع دو عبارت $(\text{۲}a - b)^{\text{۲}}$ و $(\text{۳}a^{\text{۲}} + \text{۱})^{\text{۲}}$ نمی‌تواند منفی و یا صفر شود.

۵. این تمرین را با صبر و حوصله حل کنید. نکته‌های بسیار ریز و اساسی در آن نهفته است.

الف)

$$w^{\text{۲}} + x^{\text{۲}} = wx \to \text{۲}(w^{\text{۲}} + x^{\text{۲}}) = \text{۲}wx$$

$$\to (w^{\text{۲}} - \text{۲}wx + x^{\text{۲}}) + w^{\text{۲}} + x^{\text{۲}} = \text{۰} \to (w - x)^{\text{۲}} + w^{\text{۲}} + x^{\text{۲}} = \text{۰}$$

$$\to \begin{cases} w - x = \text{۰} \\ w = \text{۰} \\ x = \text{۰} \end{cases} \quad \to w = x = \text{۰}$$

ب) راه‌حل شبیه «الف» است.

ج)

$$
\begin{aligned}
& w^2+x^2+y^2+z^2=w(x+y+z)\\
\rightarrow & \frac{w^2}{4}+\frac{w^2}{4}+\frac{w^2}{4}+\frac{w^2}{4}+x^2+y^2+z^2=w(x+y+z)\\
\rightarrow & \left(\frac{w^2}{4}-wx+x^2\right)+\left(\frac{w^2}{4}-wy+y^2\right)+\left(\frac{w^2}{4}-wz+z^2\right)+\frac{w^2}{4}=0\\
\rightarrow & \left(\frac{w}{2}-x\right)^2+\left(\frac{w}{2}-y\right)^2+\left(\frac{w}{2}-z\right)^2+\frac{w^2}{4}=0\\
\rightarrow & \begin{cases}\frac{w}{2}-x=0\\ \frac{w}{2}-y=0\\ \frac{w}{2}-z=0\\ \frac{w}{2}=0\end{cases} \rightarrow w=x=y=z=0
\end{aligned}
$$

«الف» و «ب» دو نمونه‌ی مسأله‌ی عالی در جبر است؛ اینکه دانش‌آموزی (بدون راهنمایی) به حل این دو مسأله نایل شود، خبر از استعداد جبری ژرف در آن دانش‌آموز دارد.

؟ «الف» رابطه‌ی خاص با دو متغیر، «ب» با سه متغیر و «ج» با چهار متغیر بود. دیدیم که در «الف»، «ب» و «ج» نتیجه این بود که همه‌ی متغیرها باید برابر صفر شوند. اگر بخواهیم همه‌ی متغیرها صفر شوند رابطه‌ی خاص را با چه تعداد متغیرهایی می‌توانیم بنویسیم؟ برای مثال آیا نتیجه‌های زیر درست هستند؟

۱) اگر $w^2+x^2+y^2+z^2+u^2=w(x+y+z+u)$، آنگاه

$$w=x=y=z=u=0$$

۲) اگر $w^2+x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=w(x+y+z+u+v)$، آنگاه

$$w=x=y=z=u=v=0$$

□ به دانش‌آموزان بگویید طرح یک مسأله‌ی خوب، توانایی ویژه‌ای در ریاضیات است.

منتظر پاسخ‌ها و ایده‌های دانش‌آموزان درباره‌ی دو مسأله‌ی ۱ و ۲ی اخیر بمانید!

ابتدا مسأله‌ی ۸ از صفحه‌ی ۹۵ را حل کنید.

؟ درباره‌ی $(a+b+c+d)^۲$ چه می‌توان گفت؟

□ با کمک شکل مناسب اتحادی برای $(a+b+c+d)^۲$ به‌دست آورید.

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

۱.

۲. به سه روش، از $۴y^۲ + ۱ - ۴y$ می‌توان فهمید که مربع سه‌جمله‌ای به‌صورت $(۱ - ۲y + \cdots)^۲$ است.

$$\begin{cases} x^۴ + ۴y^۲ + ۱ - ۴y + ۴x^۲y - ۲x^۲ = (x^۲ + ۲y - ۱)^۲ \\ x^۴ + ۴y^۲ + ۱ - ۴y - ۴x^۲y + ۲x^۲ = (-x^۲ + ۲y - ۱)^۲ \\ x^۴ + ۴y^۲ + ۱ - ۴y + \dfrac{x^۸}{۴} - ۲x^۴y = \left(-\dfrac{x^۴}{۲} + ۲y - ۱\right)^۲ \end{cases}$$

۳. الف) $(a^۲ + a + ۱)^۲$

ب) $(a^۲ + \sqrt{۲}a - ۱)^۲$

۴. ب) پنج‌تا.

۵. در هر مورد می‌توانیم چنین شروع کنیم:

$$\text{الف)}\ a + b = ۱ + c \rightarrow (a + b)^۲ = (۱ + c)^۲$$

$$\text{ب)}\ a - c = ۱ - b \rightarrow (a - c)^۲ = (۱ - b)^۲$$

$$\text{ج)}\ a + b - c = ۱ \rightarrow (a + b - c)^۲ = ۱^۲$$

$$\text{د)}\ a + b - ۱ = c \rightarrow (a + b - ۱)^۲ = c^۲$$

۶. الف) ازدرستی $a^۲+(a+۱)^۲ = c^۲$، درستی $(۳a+۲c+۱)^۲+(۳a+۲c+۲)^۲ = (۴a+۳c+۲)^۲$ را نتیجه بگیرید.

ج) از سه‌تا عدد فیثاغورسی ۳، ۴ و ۵ شروع کرده و با کمک رابطه‌ی «الف»، سه‌تا عدد فیثاغورسی دیگر می‌سازیم.

حال از آن سه‌تا عدد، سه‌تا عدد دیگر می‌سازیم و این کار را بارها و بارها می‌توانیم تکرار کنیم. تنها نیاز به اثبات این مطلب داریم که: «با این کار هیچ‌وقت به سه تا عدد تکراری نمی‌رسیم».

اثبات این مطلب سخت نیست؛ زیرا همیشه کوچک‌ترین عدد در بین سه‌تا عدد فیثاغورسی در حال رشد است (زیرا $a < ۳a + ۲c + ۱$). بنابراین هیچ‌گاه نمی‌توانیم با تکرار این کار به سه‌تا عدد فیثاغورسی یکسان برسیم. همچنین با توجه به اینکه $(۳a + ۲c + ۱)$ و $(۳a + ۲c + ۲)$ دو عدد طبیعی پشت‌سرهم هستند، پس ب.م.م آنها برابر یک خواهد شد.

کوچک‌ترین عدد در بین سه‌تا عدد فیثاغورسی اگر از ۳، ۴ و ۵ شروع کنیم و با روش «الف» سه تا عدد فیثاغورسی بسازیم، به ترتیب برابر ۳، ۲۰، ۱۱۹ و ۰۰۰ خواهد شد.

۷. این مسأله را می‌توان با اثبات درستی رابطه‌های زیر ثابت کرد.

$$a+b+c=0 \rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$

$$a+b+c=0 \rightarrow (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2=(ab+bc+ca)^2$$

اما هدف از این سؤال یافتن راه طولانی و مشکل نیست. هدف خوب دیدن امکانات است. با نگاهی دقیق به تمرین‌های قبل در قسمت «اتحاد» به چنین تمرینی برمی‌خوریم:

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)=(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

با کمک این رابطه به راحتی «ب» اثبات می‌شود. فراموش نکنید که با دردست داشتن «ب»، پاسخ درست به «الف» ندادن بسیار عجیب است!

به دانش‌آموزان بگویید «همیشه به شما گفته‌اند امکانات زندگی‌تان را خوب ببینید تا اشتباه نکنید! بد نیست امکانات ذهنتان را هم خوب ببینید، تا کمتر اشتباه کنید».

۸. می‌دانیم که: $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \rightarrow \frac{bc+ca+ab}{abc}=0 \rightarrow bc+ca+ab=0$$

بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$\rightarrow 1^2=a^2+b^2+c^2+2\times 0 \rightarrow a^2+b^2+c^2=1$$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای و بیشتر

۱. ؟ عبارت جبری $(a+b)^3-3ab(a+b)$ را ساده کنید.

$a^۳ + b^۳$ □

۲. برای دیدن تصویر مکعب چهاربعدی به جستجوی اینترنتی واژه‌ی «ابرمکعب[1]» بپردازید؛ و نظم موجود در آن را بیابید.

۳. «از جمع هر دو عدد سطر بالایی، عدد سطر پایینی به‌دست می‌آید».

برای مثال:

$$۱ \quad ۵ \quad ۱۰ \quad ۱۰ \quad ۵ \quad ۱$$

به همین ترتیب سطر بعدی به‌دست می‌آید. از جمله خاصیت‌های جالب این اعداد، جمع اعداد در هر سطر است. اگر سطر نخست را سطر صفرم، سطر بعدی را سطر یکم و ... بنامیم، جمع اعداد سطر nاُم برابر ۲^n خواهد شد. برای مثال:

$$\begin{array}{rr}
۱ & = ۲^۰ \\
۱ + ۱ & = ۲^۱ \\
۱ + ۲ + ۱ & = ۲^۲ \\
۱ + ۳ + ۳ + ۱ & = ۲^۳ \\
۱ + ۴ + ۶ + ۴ + ۱ & = ۲^۴ \\
۱ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ & = ۲^۵
\end{array}$$

۱. hypercube

؟ به الگوی زیر دقت کنید:

$$۱۱^۰ = ۱$$

$$۱۱^۱ = ۱۱$$

$$۱۱^۲ = ۱۲۱$$

$$۱۱^۳ = ۱۳۳۱$$

آیا ارقام هر سطر مثلث خیام بیانگر یک توانِ ۱۱ است؟

□ با اینکه حتی $۱۴۶۴۱ = ۱۱^۴$، ولی در سطر بعد این الگو صادق نیست!

$$۱۱^۵ = ۱۶۱۰۵۱ \neq ۱۵۱۰۱۰۵۱$$

با این همه، از هر سطر مثلث خیام می‌شود توان‌های ۱۱ را یافت؛ کافی است در اتحاد داده شده جایگذاری $a = ۱۰$ و $b = ۱$ را انجام دهید.

۴. ؟ عبارت جبری $(a-b)^۳ + ۳ab(a-b)$ را ساده کنید.

□ $a^۳ - b^۳$

۵.

$$\sqrt[۳]{۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}} = \sqrt[۳]{(۲ + \sqrt{۳})^۳} = ۲ + \sqrt{۳}$$
$$\sqrt[۳]{۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}}(۲ - \sqrt{۳}) = (۲ + \sqrt{۳})(۲ - \sqrt{۳}) = ۴ - ۲\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} - ۳ = ۱$$

توجه کنید که در ضرب مزدوج محاسبه‌ی بالا، از اتحاد مزدوج استفاده نکردیم و ضرب را مستقیماً حساب کردیم.

؟ آنچه با آن سروکار داشتیم درباره‌ی $(a+b)^n$ بود. اما درباره‌ی $(a+b+c)^n$ چه می‌توانیم بگوییم؟

بیایید درباره‌ی ضریب صورت استاندارد $(a+b+c)^n$ تحقیق کنیم:

$$(a+b+c)^{۰} = ۱$$

$$(a+b+c)^{۱} = ۱a + ۱b + ۱c$$

$$(a+b+c)^{۲} = ۱a^{۲} + ۱b^{۲} + ۱c^{۲} + ۲ab + ۲bc + ۲ca$$

برای مثال انجام سه طرح زیر جالب است:

۱. $(a+b+c)^{۳}$ را به‌صورت استاندارد بنویسید.

۲. با در زیر هم قرار دادن ضرایب صورت استانداردشده‌ی $(a+b+c)^{۰}$، $(a+b+c)^{۱}$، $(a+b+c)^{۲}$ و $(a+b+c)^{۳}$ آیا می‌توانید به نظم و الگویی پی ببرید؟

۳. اگر ادعا می‌کنید که به نظمی در بین ضرایب پی‌برده‌اید، باید بتوانید ضرایب صورت استانداردشده‌ی $(a+b+c)^{۴}$ را حدس بزنید. می‌توانید یک‌بار با حدس خودتان و یک‌بار با محاسبه‌ی $(a+b+c)^{۴}$، ضرایب را به‌دست آورده و صحت حدس خودتان را بررسی کنید.

به دانش‌آموزان بگویید که «نظم این اعداد، را می‌توانید در «الگوی هرمی» در وب‌گاه ریاضی سمپاد ببینید».

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۸۹، صفحه‌ی ۹۰ تا سر «فعالیت»]]

؟ کدام‌یک از تجزیه‌های چندجمله‌ای‌های زیر درست است؟

الف) $x^{۲} = x.x$ ب) $x^{۲} + ۲x + ۳ = x(x+۲) + ۳$

ج) $x^{۲} + ۱ = x\left(x + \frac{۱}{x}\right)$ د) $۲۵ = ۵ \times ۵$

ه) $۵x = \frac{۱}{۵}(۲۵x)$

☐ فقط «الف» درست است. علت نادرستی هر مورد را شرح دهید.

[[تدریس بقیه‌ی صفحه‌ی ۹۰ و صفحه‌ی ۹۱ تا سر «فعالیت»]]

اتحاد مزدوج

۱. «الف» به‌صورت $\Big((x^۳ - x) - (۲x^۲ + ۴)\Big)\Big((x^۳ - x) + (۲x^۲ + ۴)\Big)$ درآمده و حل می‌شود.

۲.

۳. الف) از رابطه‌ی $\left(x - \frac{۱}{x}\right)^۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲$ کمک می‌گیریم.

ب) از رابطه‌ی $\left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} + ۲$

برای «ب» می‌توان با کمک تمرین ۲ راه حل ساده‌تری نوشت.

۴. چون $a - b = ۱$، پس ضرب آن در یک عبارت بی‌تأثیر است.

$$(a+b)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)(a^۸+b^۸) = (a-b)(a+b)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)(a^۸+b^۸)$$
$$= (a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)(a^۸+b^۸) = (a^۴-b^۴)(a^۴+b^۴)(a^۸+b^۸)$$
$$= (a^۸-b^۸)(a^۸+b^۸) = a^{۱۶} - b^{۱۶}$$

در روش دیگری، می‌توان با تجزیه‌ی $a^{۱۶} - b^{۱۶}$، از سمت راست به سمت چپ رسید.

.۵

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۱۶}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲۵۶}\right)$$

$$=\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۸}\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۴}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۸}\right)}{\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)}=\cdots$$

با ادامه‌ی همین روند مزدوج‌نویسی، داریم:

$$=\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲^۸}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲^۸}\right)}{\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲^{۱۶}}\right)}{\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۶۵۵۳۵}{۳۲۷۶۸}$$

.۶

الف) $(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{۹۹۸}(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})^{۹۹۸}=(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^۲((\sqrt{۶}-\sqrt{۵})(\sqrt{۶}+\sqrt{۵}))^{۹۹۸}$

$$=(۱۱-۲\sqrt{۳۰})(۶-۵)^{۹۹۸}=۱۱-۲\sqrt{۳۰}$$

ب) $\sqrt[۳]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{(۷-۴\sqrt{۳})(۷+۴\sqrt{۳})}=\sqrt[۳]{۴۹-۴۸}=۱$

.۷

$*$ $\quad a^۲+b^۲=c^۲+d^۲\rightarrow a^۲-c^۲=d^۲-b^۲\rightarrow(a-c)(a+c)=(d-b)(d+b)$

چون $a+b=c+d$ بنابراین $a-c=d-b$. دو حالت متفاوت داریم:

حالت اول) $a - c = 0$.

در این حالت می‌توان گفت که $d - b = 0$. بنابراین

$$\begin{cases} a - c = 0 \rightarrow a = c \\ d - b = 0 \rightarrow d = b \end{cases}$$

بنابراین $\{a, b\} = \{c, d\}$

حالت دوم) $a - c \neq 0$.

در این حالت می‌توان گفت که $d - b \neq 0$.

چون $a - c$ و $d - b$ دو عدد مساوی و مخالف صفر هستند، می‌توانیم آنها را از طرفین تساوی «*»، ساده کنیم:

$$a + c = d + b$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + c = d + b \\ a + b = c + d \end{cases}$$

با جمع دو طرف دو رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$(a + c) + (a + b) = (d + b) + (c + d) \rightarrow 2a = 2d \rightarrow a = d$$

با تفریق دو طرف دو رابطه‌ی به‌دست‌آمده خواهیم داشت:

$$(a + c) - (a + b) = (d + b) - (c + d) \rightarrow c - b = b - c$$

$$\rightarrow 2c = 2b \rightarrow c = b$$

بنابراین در این حالت هم خواهیم داشت: $\{a,b\}=\{c,d\}$

؟ اگر در صورت سؤال به جای «چهار عدد» می‌نوشتیم «چهار متغیر»، آیا رابطه‌ی به‌دست آمده درست بود؟

□ مسلماً خیر! اگر a، b، c و d چهار متغیر باشند، همیشه خواهیم داشت: $\{a,b\}\neq\{c,d\}$.

⟦ تدریس صفحه‌های ۹۳ و ۹۴ تا سر «مسائل»⟧

اتحاد چاق و لاغر

توجه کنید که در تقویم تدریس، اتحاد یک‌جمله‌ای مشترک را با چاق و لاغر عوض کرده‌ایم. به‌طور طبیعی اتحاد چاق و لاغر تعمیم اتحاد مزدوج است.

$$
\begin{aligned}
a-b&=(a-b)\\
a^{۲}-b^{۲}&=(a-b)(a+b)\\
a^{۳}-b^{۳}&=(a-b)(a^{۲}-ab+b^{۲})\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

۱. به دانش‌آموز بخش‌های «چاق » و «لاغر» اتحاد چاق و لاغر را معرفی کنید.

$$a^{۳}+b^{۳}=\underbrace{(a+b)}_{\text{لاغر}}\ \underbrace{(a^{۲}-ab+b^{۲})}_{\text{چاق}}\qquad a^{۳}-b^{۳}=\underbrace{(a-b)}_{\text{لاغر}}\ \underbrace{(a^{۲}+ab+b^{۲})}_{\text{چاق}}$$

هدف «ب» جستجو و کنکاش درباره‌ی اثبات هندسی اتحادهای چاق و لاغر است. اجازه بدهید (و تشویق کنید) که دانش‌آموزان دراین‌باره فکر کنند و منتظر راه‌حلی از طرف دانش‌آموزان باهوش بمانید.

۲. تنها «الف»، «ب»، «ز»، «ح»، «م» و «ن» به کمک اتحاد چاق و لاغر تمرین ۱ تجزیه می‌شوند.

۳.

۴.

$$\text{الف)}\ (\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳})(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}) = ۲-۳$$

$$(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}) = ۳-۲$$

$$\text{ب)}\ \sqrt[۳]{۲۵۶}+۲۵+۲\sqrt[۳]{۲۵۰} = ۲۵+۱۰\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۴}$$

$$(۵-۲\sqrt[۳]{۲})(۲۵+۱۰\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۴}) = ۱۲۵-۱۶$$

۵. الف) می‌توانید ابتدا $a^۲+\frac{۱}{a^۲}$ را محاسبه کنید و سپس از رابطه‌ی زیر کمک بگیرید.

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳} = \left(a+\frac{۱}{a}\right)\left(a^۲-۱+\frac{۱}{a^۲}\right)$$

ب) می‌توانید ابتدا با کمک رابطه‌ی $\left(a^۲+\frac{۱}{a^۲}\right)^۲ = a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲$، $a^۴+\frac{۱}{a^۴}$ را محاسبه کنید. سپس، از رابطه‌ی زیر کمک بگیرید.

$$a^۶+\frac{۱}{a^۶} = \left(a^۲+\frac{۱}{a^۲}\right)\left(a^۴-۱+\frac{۱}{a^۴}\right)$$

۶. ابتدا $a-\frac{۱}{a}$ را حساب کنید. سپس از رابطه‌ی $\left(a^۲+۱+\frac{۱}{a^۲}\right)\left(a-\frac{۱}{a}\right) = a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ استفاده کنید.

۷. الف)

$$a+b+c \rightarrow c=-(a+b) \rightarrow c^۲ = a^۲+b^۲+۲ab$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
a^۳ + b^۳ + c^۳ &= (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) + c^۳ \\
&= (-c)((c^۲ - ۲ab) - ab) + c^۳ \\
&= (-c)(c^۲ - ۳ab) + c^۳ = -c^۳ + ۳abc + c^۳ = ۳abc
\end{aligned}
$$

ب) چون

$$(-۲ + \sqrt{۳}) + (-۲\sqrt{۳}) + (۲ + \sqrt{۳}) = ۰$$

بنابراین با استفاده از «الف» داریم:

$$
\begin{aligned}
&(-۲ + \sqrt{۳})^۳ + (-۲\sqrt{۳})^۳ + (۲ + \sqrt{۳})^۳ = ۳(-۲ + \sqrt{۳})(-۲\sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳}) \\
&= ۳(۳ - ۴)(-۲\sqrt{۳}) = ۶\sqrt{۳}
\end{aligned}
$$

۸.

$$(۲a - b) + (۲b - c) + (۲c - a) = a + b + c$$

اما بنابه فرض مساله $a + b + c = ۰$، پس مجموع $(۲a - b)$ و $(۲b - c)$ و $(۲c - a)$ برابر صفر می‌شود. اکنون می‌توانیم از قسمت «الف» تمرین ۷ استفاده کنیم.

۹. الف) با استفاده از قسمت «الف» تمرین ۷ و این واقعیت که $(۳x - ۲) + (۷ - ۴x) + (x - ۵) = ۰$، می‌توان نوشت:

$$(۳x - ۲)^۳ + (۷ - ۴x)^۳ + (x - ۵)^۳ = ۳(۳x - ۲)(۷ - ۴x)(x - ۵)$$

بنابراین:

$$۳(۳x - ۲)(۷ - ۴x)(x - ۵) = ۰$$

پس $3x - 2 = 0$ یا $4x - 7 = 0$ یا $x - 5 = 0$. بنابراین این معادله سه جواب دارد:

$$5, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{2}{3}$$

ب)

$$(3x-2)^3 + (2x-3)^3 = 125(x-1)^3$$
$$\rightarrow (3x-2)^3 + (2x-3)^3 - 125(x-1)^3 = 0$$
$$\rightarrow (3x-2)^3 + (2x-3)^3 + (5-5x)^3 = 0$$

چون $(3x-2) + (2x-3) + (5-5x) = 0$، بنابراین با کمک قسمت «الف» تمرین ۷، می‌توانیم چنین نتیجه‌ای بگیریم:

$$3(3x-2)(2x-3)(5-5x) = 0$$

پس $3x - 2 = 0$ یا $2x - 3 = 0$ یا $5 - 5x = 0$. بنابراین معادله‌ی داده‌شده سه جواب متفاوت دارد: $\left\{1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{2}{3}\right\}$

۱۰.

$$1001 = 10^3 + 1^3 = (10+1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \times 91$$

۱۱. الف) $(x^2 + 2y)^3 + 1$

ب) $(x^2)^3 - (2y-1)^3$

ج) $(x^2-1)^3 - (2y)^3$

۱۲. پس از حل تمرین‌ها، با دانش‌آموزان این نتیجه را به‌دست آوردید که:

اولاً) اتحاد چاق و لاغر تعمیم اتحاد مزدوج است.

ثانیاً) اتحاد چاق و لاغر تعمیم‌های دیگری هم دارد.

بیشتر درباره‌ی اتحادها

۱. الف)

ب) تلاش می‌کنیم که معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$(a^۲ + b^۲)(x^۲ + y^۲) = ۴۸۱$$

$$\rightarrow (a^۲ + b^۲)(x^۲ + y^۲) = ۱۳ \times ۳۷$$

برای مثال این معادله می‌تواند به صورت زیر حل شود.

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۱۳ \\ x^۲ + y^۲ = ۳۷ \end{cases}$$

فقط به‌دست آوردن دو جواب (که نتیجه‌ی متمایز بدهند،) از این معادله‌ها بسنده می‌کنیم.

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \\ x = ۶ \\ y = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \\ x = ۶ \\ y = ۱ \end{cases}$$

اکنون با کمک اتحاد دیوفانت، پاسخ مسأله را می‌نویسیم.

$$۴۸۱ = (۲^۲ + ۳^۲)(۶^۲ + ۱^۲) = (۲ \times ۶ - ۳ \times ۱)^۲ + (۳ \times ۶ - ۳ \times ۱)^۲ = ۹^۲ + ۲۰^۲$$

$$۴۸۱ = (۳^۲ + ۲^۲)(۶^۲ + ۱^۲) = (۳ \times ۶ - ۲ \times ۱)^۲ + (۲ \times ۶ + ۳ \times ۱)^۲ = ۶^۲ + ۱۵^۲$$

ج) تلاش می‌کنیم که معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)=۱۱۰۵$$

$$\rightarrow (a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)=۵\times ۱۳\times ۱۷$$

برای مثال این معادله می‌تواند به یکی از سه صورت زیر حل شود؛ در هر مورد دو پاسخ از آنها نوشته شده است.

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=۵=۱+۴ \\ x^۲+y^۲=۱۳\times ۱۷=۲۲۱=۲۵+۱۹۶ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \\ x=۵ \\ y=۱۴ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \\ x=۵ \\ y=۱۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=۱۳=۴+۹ \\ x^۲+y^۲=۵\times ۱۷=۸۵=۴+۸۱ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۳ \\ x=۲ \\ y=۹ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} a=۳ \\ b=۲ \\ x=۲ \\ y=۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=۱۷=۱+۱۶ \\ x^۲+y^۲=۵\times ۱۳=۶۵=۱+۶۴ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۴ \\ x=۱ \\ y=۸ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} a=۴ \\ b=۱ \\ x=۱ \\ y=۸ \end{cases}$$

با کمک این پاسخ‌ها و اتحاد دیوفانت می‌توانیم به شش پاسخ مسأله برسیم.

$$۱۱۰۵ = (۱^۲ + ۲^۲)(۵^۲ + ۱۴)^۲ = (۱ \times ۵ - ۲ \times ۱۴)^۲ + (۲ \times ۵ + ۱ \times ۱۴)^۲ = ۲۳^۲ + ۲۴^۲$$

$$۱۱۰۵ = (۲^۱ + ۱^۲)(۵^۲ + ۱۴)^۲ = (۲ \times ۵ - ۱ \times ۱۴)^۲ + (۱ \times ۵ + ۲ \times ۱۴) = ۴^۲ + ۳۳^۲$$

$$۱۱۰۵ = (۲^۲ + ۳^۲)(۲^۲ + ۹^۲) = (۲ \times ۲ - ۳ \times ۹)^۲ + (۳ \times ۲ + ۲ \times ۹)^۲ = ۲۳^۲ + ۲۴^۲$$

$$۱۱۰۵ = (۳^۲ + ۲^۲)(۲^۲ + ۹^۲) = (۳ \times ۲ - ۲ \times ۹)^۲ + (۲ \times ۲ + ۳ \times ۹)^۲ = ۱۲^۲ + ۳۱^۲$$

$$۱۱۰۵ = (۱^۲ + ۴^۲)(۱^۲ + ۸^۲) = (۱ \times ۱ - ۴ \times ۸)^۲ + (۴ \times ۱ + ۱ \times ۸)^۲ = ۳۱^۲ + ۱۲^۲$$

$$۱۱۰۵ = (۴^۲ + ۱^۲)(۱^۲ + ۸^۲) = (۴ \times ۱ - ۱ \times ۸)^۲ + (۱ \times ۱ + ۴ \times ۸)^۲ = ۴^۲ + ۳۳^۲$$

از این شش پاسخ، تنها سه‌تای آنها متمایز هستند.

توجه کنید که در حل این مسأله و مسأله پیش، به دنبال همه‌ی جواب‌ها نبودیم.

د) عبارت سمت راستی:

$$\begin{aligned}
(۴a^۲ + ۹b^۲)(a^۲ + ۴b^۲) &= \Big((۲a)^۲ + (۳b)^۲\Big)\Big(a^۲ + (۲b)^۲\Big) \\
&= \Big((۲a)a - (۳b)(۲b)\Big)^۲ + \Big((۳b)a + (۲a)(۲b)\Big)^۲ \\
&= (۲a^۲ - ۶b^۲)^۲ + (۳ab + ۴ab)^۲ \\
&= (۲a^۲ - ۶b^۲)^۲ + (۷ab)^۲
\end{aligned}$$

با کمک اتحاد اویلر نتوانستیم به صورت مجموع مربعات دوتا «دوجمله‌ای» بنویسیم!

؟ آیا واقعا از هیچ راهی نمی‌توان این عبارت را به صورت مجموع مربعات دوتا دوجمله‌ای نوشت؟

□ منتظر پاسخ‌های ابتکاری دانش‌آموزان بمانید!

عبارت میانی:

$$\begin{aligned}(۳a^۲+۹b^۲)(a^۴+a^۲)&=\Big((\sqrt{۳}a)^۲+(۳b)^۲\Big)\Big((a^۲)^۲+a^۲\Big)\\&=\Big((\sqrt{۳}a)a^۲-(۳b)a\Big)^۲+\Big((۳b)(a^۲)+(\sqrt{۳}a)a\Big)^۲\\&=\Big(\sqrt{۳}a^۳-۳ab\Big)^۲+\Big(۳a^۲b+\sqrt{۳}a^۲\Big)^۲\end{aligned}$$

عبارت سمت چپی:

$$\begin{aligned}(۳a^۲+۴b^۲)(x^۲+۷)&=\Big((\sqrt{۳}a)^۲+(۲b)^۲\Big)\Big(x^۲+(\sqrt{۷})^۲\Big)\\&=\Big((\sqrt{۳}a)x-(۲b)\sqrt{۷}\Big)^۲+\Big((۲b)x+(\sqrt{۳}a)\sqrt{۷}\Big)^۲\\&=\Big(\sqrt{۳}ax-۲\sqrt{۷}b\Big)^۲+\Big(۲bx+\sqrt{۲۱}a\Big)^۲\end{aligned}$$

۲. الف) فرض می‌کنیم $A=\{a^۲+b^۲|a,b\in\mathbb{Z}\}$. باید ثابت کنیم که حاصل‌ضرب دو عضو A، عضوی از A می‌شود.

فرض می‌کنیم که این دو عضو به صورت زیر باشند. $(w,x,y,z\in\mathbb{Z})$

$$y^۲+z^۲ \qquad \text{و} \qquad w^۲+x^۲$$

اکنون حاصل‌ضرب را محاسبه می‌کنیم.

$$(w^۲+x^۲)(y^۲+z^۲)=(wy-xz)^۲+(xy+wz)^۲$$

چون $w,x,y,z\in\mathbb{Z}$، پس $wy-xz\in\mathbb{Z}$ و $xy+wz\in\mathbb{Z}$. بنابراین حاصل‌ضرب دو عضو دلخواه از A، عضوی از A می‌شود.

ب) فرض می‌کنیم $B=\{۳a^۲+b^۲|a,b\in\mathbb{Z}\}$. باید ثابت کنیم که حاصل‌ضرب دو عضو B ، عضوی از B می‌شود.

فرض می‌کنیم که این دو عضو به صورت زیر باشند. $(w, x, y, z \in \mathbb{Z})$

$$۳w^۲ + x^۲ \qquad \text{و} \qquad ۳y^۲ + z^۲$$

اکنون حاصل‌ضرب را محاسبه می‌کنیم.

$$(۳w^۲ + x^۲)(۳y^۲ + z^۲) = \Big((\sqrt{۳}w)^۲ + x^۲\Big)\Big((\sqrt{۳}y)^۲ + z^۲\Big)$$

$$= \Big((\sqrt{۳}w)(\sqrt{۳}y) - xz\Big)^۲ + \Big(x(\sqrt{۳}y) + (\sqrt{۳}w)z\Big)^۲$$
$$= (۹wy - xz)^۲ + ۳(xy + wz)^۲$$

چون $w, x, y, z \in \mathbb{Z}$، پس $۹wy - xz \in \mathbb{Z}$ و $xy + wz \in \mathbb{Z}$. بنابراین حاصل‌ضرب دو عضو دلخواه از B، عضوی از B می‌شود.

روش‌های تجزیه

در این بخش تنها پاسخ (و یا ایده‌ی پاسخ) برخی از تمرین‌های سخت‌تر آمده است.

- $(x + y + z)^۳ - (x^۳ + y^۳ + z^۳) = \Big((x + y + z)^۳ - x^۳\Big) + (y^۳ + z^۳)$
  $= \Big((x + y + z) - x\Big)(\cdots) + (y + z)(\cdots) = \cdots$
- $x^۷ + x^۶ + \cdots + ۱ = (x^۷ + x^۶) + (x^۵ + x^۴) + (x^۳ + x^۲) + (x + ۱) = \cdots$

- $x^۸ + x^۷ + \cdots ۱ = (x^۸ + x^۷ + x^۶) + (x^۵ + x^۴ + x^۳) + (x^۲ + x + ۱) = \cdots$
- $(x^۳ + x^۲ + x + ۱) - ۴ = (x^۳ - ۱) + (x^۲ - ۱) + (x - ۱) + (۱ - ۱) = \cdots$
- $x^۴ + y^۴ = (x^۴ + y^۴ + ۲x^۲y^۲) - ۲x^۲y^۲ = \cdots$
- $x^۴ + x^۲ + ۱ = (x^۴ + ۲x^۲ + ۱) - x^۲ = \cdots$
- $x^۴ - ۳x^۲ - ۴ = (x^۴ + ۴x^۲ - ۴) - ۷x^۲ = \cdots$
- $(x^۲ + y^۲) + x^۴ + y^۴ = ۲x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۲y^۴ = ۲(x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴) = \cdots$

- صورت اتحاد یک‌جمله‌ی (پنج‌بار) مشترک:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$$

$$= x^۵ + (a+b+c+d+e)x^۴$$

$$+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)x^۳$$

$$+(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)x^۲$$

$$+(abcd+abce+abde+acde+bcde)x+abcde$$

- $x^{۳} + ۸x^{۲} + ۱۷x + ۱۰ = (x + ۱)(x + ۲)(x + ۵)$

- $x^{۳} + ۴x^{۲} - ۷x - ۱۰ = (x + ۱)(x - ۲)(x + ۵)$

- $x^{۴} + x^{۳} - ۷x^{۲} - x + ۶ = (x - ۱)(x + ۱)(x - ۲)(x + ۳)$

- $۲x^{۳} - ۵x^{۲} - ۴x + ۳ = \frac{۱}{۴}۴(۲x^{۳} - ۵x^{۲} - ۴x + ۳) = \frac{۱}{۴}(۸x^{۳} - ۲۰x^{۲} - ۱۶x + ۱۲)$
  $= \frac{۱}{۴}\Big((۲x)^{۳} - ۵(۲x)^{۲} - ۸(۲x) + ۱۲\Big) = \frac{۱}{۴}(۲x - ۱)(۲x + ۲)(۲x - ۶)$

- $۶x^{۲} + ۱۳x + ۶ = (۳x + ۲)(۲x + ۳)$

- $۲۴x^{۲} + ۴۳x + ۵ = (۸x + ۱)(۳x + ۵)$

- $۱۲x^{۲} + ۲۵x + ۱۲ = (۳x + ۴)(۴x + ۳)$

- $۱۴x^{۲} + ۱۳x - ۱۲ = (۷x - ۴)(۲x + ۳)$

- $(۲x + ۳)^{۲} + (۲x + ۵)(x + ۱) - ۲۱ = ۶x^{۲} + ۱۹x - ۷ = (۲x + ۷)(۳x - ۱)$

- $۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۵xy - ۵x - ۷y + ۳ = (x + ۲y - ۱)(۲x + y - ۳)$

- $۲x^{۲} + ۶y^{۲} - ۷xy + ۵x - ۷y - ۳ = (۲x - ۳y - ۱)(x - ۲y + ۳)$

- $x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + ۲x + ۱ = (x + ۱)(x^{۳} + x + ۱)$

- $x^{۴} + ۲x^{۳} + x^{۲} + x + ۱ = (x + ۱)(x^{۳} + x^{۲} + ۱)$

- $x^{۴} + ۲x^{۳} + ۳x^{۲} + ۲x + ۱ = (x^{۲} + x + ۱)^{۲}$

- $x^{۵} + x^{۴} - ۲x + ۱ = (x^{۳} + x - ۱)(x^{۲} + x - ۱)$

- $(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳)(x + ۴) - ۲۴ = \Big((x + ۱)(x + ۴)\Big)\Big((x + ۲)(x + ۳)\Big) - ۲۴$
  $$\left.\begin{aligned} &= (x^{۲} + ۵x + ۴)(x^{۲} + ۵x + ۶) - ۲۴ \\ &y = x^{۲} + ۵x + ۴ \end{aligned}\right\} \to \cdots$$

- $(x + ۱)(x + ۳)(x + ۵)(x + ۷) + ۱۵ = \Big((x + ۱)(x + ۷)\Big)\Big((x + ۳)(x + ۵)\Big) + ۱۵$
  $$\left.\begin{aligned} &= (x^{۲} + ۸x + ۷)(x^{۲} + ۸x + ۱۵) + ۱۵ \\ &y = x^{۲} + ۸x + ۷ \end{aligned}\right\} \to \cdots$$

- $(۶x+۷)^۲(۳x+۴)(x+۱)=۶ \rightarrow (۳۶x^۲+۸۴x+۴۹)(۳x^۲+۷x+۴)=۶$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \Big(۱۲(۳x^۲+۷x+۴)+۱\Big)(۳x^۲+۷x+۴)=۶ \\ y=۳x^۲+۷x+۴ \end{array}\right\} \rightarrow \cdots$$

- $(۴x+۱)^۲(۲x-۱)(x+۱)=۲۴۵ \rightarrow (۱۶x^۲+۸x+۱)(۲x^۲+x-۱)=۲۴۵$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \Big(۸(۲x^۲+x-۱)+۹\Big)(۲x^۲+x-۱)=۲۴۵ \\ y=۲x^۲+x-۱ \end{array}\right\} \rightarrow \cdots$$

- $x^۲(x+۱)^۲+x^۲=۸(x+۱)^۲ \rightarrow x^۲(x+۱)^۲-۴(x+۱)^۲=۴(x+۱)^۲-x^۲$

$$\rightarrow \Big(x(x+۱)-۲(x+۱)\Big)\Big(x(x+۱)+۲(x+۱)\Big)=\Big(۲(x+۱)-x\Big)\Big(۲(x+۱)+x\Big)$$

$$\rightarrow (x^۲-x-۲)(x^۲+۳x+۲)=(x+۲)(۳x+۲)$$

$$\rightarrow (x^۲-x-۲)(x+۲)(x+۱)=(x+۲)(۳x+۲)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \\ (x^۲-x-۲)(x+۱)=۳x+۲ \rightarrow x^۳-۶x-۴=۰ \rightarrow \cdots \end{cases}$$