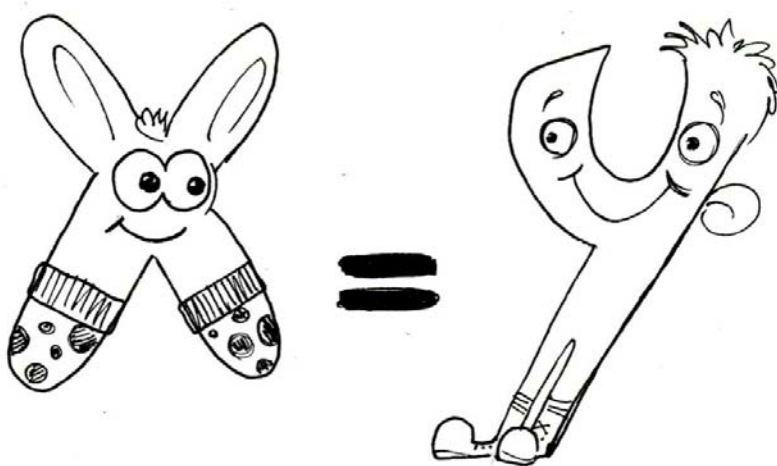




ریاضی - پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



فصل دوم

مختصات و جبر



## فهرست مطالب

### ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

مختصات .....	۴
مفهوم بردار .....	۶
کاربرد بردارها .....	۱۸
جمع بردارها .....	۲۴
جمع بردارها - مفهوم تعادل .....	۳۰
مسابقه‌ی سمپاد کولا .....	۳۴
طناب کشی فوق حرفه‌ای .....	۳۷
تجزیه‌ی بردارها .....	۴۱
عبارت‌های جبری - یافتن جمله‌ی $n^{\text{ام}}$ .....	۵۰
کاربرد رابطه‌های جبری .....	۵۷
ساده کردن عبارت‌های جبری .....	۵۹
توزیع پذیری ضرب روی جمع و تفریق .....	۶۰
بازی جبدوز .....	۶۳



## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

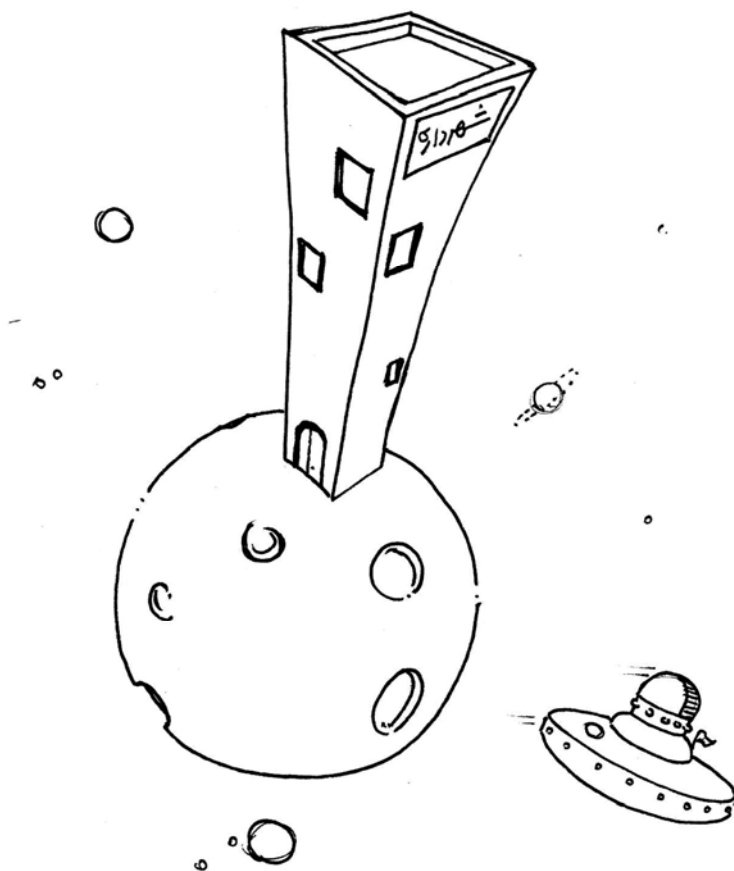
- معادله ..... ۶۵
- روش حدس و خطا ..... ۶۶
- مغالطه‌های جبری ..... ۶۸
- کاربرد معادله ..... ۷۲
- شعبده‌بازی‌های عددی ..... ۸۲
- رمزگشایی !!! ..... ۸۵



## مختصات

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۳۹]]

به شهر «زارف» واقع در سیاره‌ی «زیتو۹» خوش آمدید.



ریاضی طلایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



۱- آدرس سمیاد شهر زارف ۳- ۷ می باشد. برای رفتن به سمیاد چه باید کرد؟

## ۲- سازمان آموزش و پرورش شهر زارف در ۲

زافتي شمال سمپاد مي باشد. آدرس سازمان

## آموزش و پرورش چیست؟

$$-\gamma \square - \lambda \square$$

### ۳- آدرس شهرداری چیست؟

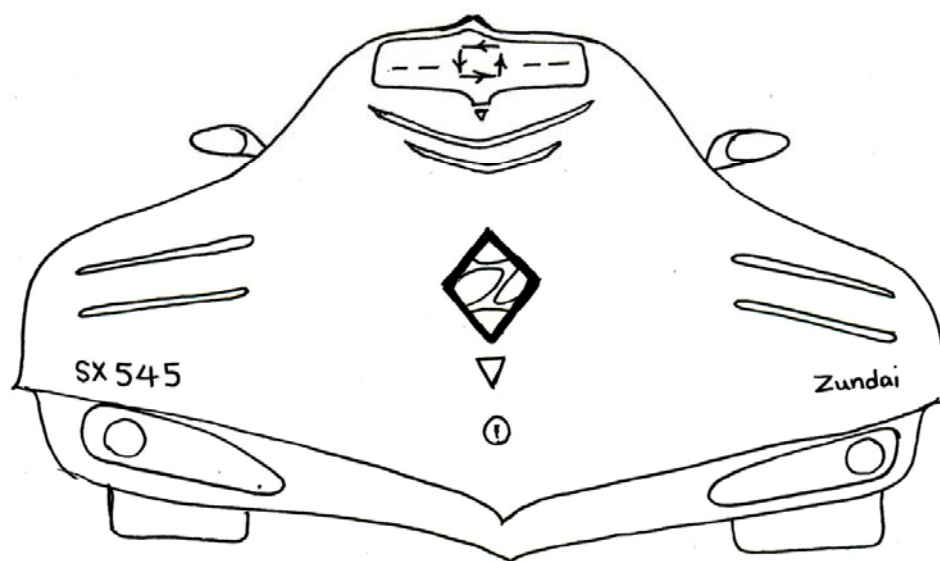
○ □ ○ □



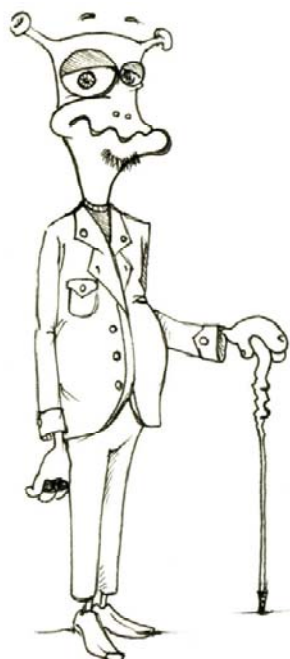


## مفهوم بردار

خیابان‌ها، اتوبان‌ها و تمام مسیرهای ماشینی زارف یا شمالی- جنوبی و یا شرقی- غربی هستند. بعضی از زاپوهای مُرَّقه، اتوموبیل‌های بسیار پیشرفته و هوشمندی به نام «زیوندای» دارند. زیوندای‌ها تنها با وارد کردن دو عدد به راننده را به مقصد می‌رسانند. عدد اول مقدار زافت حرکت به سمت شمال و عدد دوم مقدار زافت حرکت به سمت شرق را مشخص می‌کند.



ریاضی طلایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



۴- «زانا» یکی از اهالی پولدار زارف است. او برای آنکه از قصر با شکوه خود به آدرس ۵۳-۴۷۴۳، به شرکت خود به آدرس ۲۱۴۳۲۲ برود، می‌بایست چه عددی را در زیوندای خود وارد کند؟

✦ ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید با توجه به آنچه درباره‌ی بردارها می‌دانند و آنچه که در مورد حرکت زیوندای‌ها در صورت سؤال آمده است رابطه‌ای بیابند و تعریفی برای بردارها بیان کنند. رسیدن به تعریف زیر مناسب می‌باشد.

بردار دستور انتقال از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر می‌باشد.

در این تعریف کلمه‌ی کلیدی، دستور انتقال می‌باشد. توجه دانش‌آموزان را به اینکه بردار به مکان خاصی نیاز ندارد و اینکه تنها «یک دستور برای انتقال برای یک نقطه» است جلب کنید و اینکه ما این انتقال را به صورت یک پاره خط جهت‌دار نمایش می‌دهیم.

□ ۷۴۴۱۵-

$$\begin{bmatrix} ۳۲ \\ ۲۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴۷ \\ -۵۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۵ \\ ۷۴ \end{bmatrix}$$

✦ نکته‌ی دیگر درباره بردار آنست که برای یافتن مختصات یک بردار کافیت انتهای بردار را منهای ابتدای آن کنیم و یا بهتر آن است که بگوییم:



انتهای بردار = مختصات بردار + ابتدای بردار

۵- زانا برای برگشت از شرکت به منزل خود چه اعدادی را می‌بایست وارد کند؟

□ زانا برای بازگشت به خانه‌ی خود کافیت طبق قرینه‌ی بردار رفت، حرکت کند.

$$-۷۴ \begin{bmatrix} ۱۵ \\ -۷۴ \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} -۱۵ \\ ۷۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ -۷۴ \end{bmatrix}$$

۶- زانا یک روز، برای رفتن به خانه اعداد  $۵۰ \begin{bmatrix} ۵۴ \\ -۷۴ \end{bmatrix}$  را در زیوندای خود وارد کرد. زانا کجا بوده است؟ آیا زانا تیزهوش است؟

□ انتهای بردار (مختصات خانه) = ابتدای بردار (مجهول) + مختصات بردار  $(۵۰ \begin{bmatrix} ۵۴ \\ -۷۴ \end{bmatrix})$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵۴ \\ -۵۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۷ \\ -۵۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x = -۷ \\ y = -۳ \end{bmatrix}$$

که  $۳ \begin{bmatrix} -۷۴ \\ -۷۴ \end{bmatrix}$  آدرس سمپاد شهر زارف می‌باشد. حالا قضاوت اینکه زانا تیزهوش است یا نه با خود دانش‌آموزان.

۷- یک روز جمعه که زانا می‌خواست تعطیلات خود را به کنار دریاچه شهر به آدرس

$۳ \begin{bmatrix} ۱۰۳ \\ -۷۴ \end{bmatrix}$  برود، اتوموبیل نازنینش دچار مشکل شده و ارقام زوج را قبول نمی‌کرد. آیا





او می‌تواند بدون تعمیر ماشین از خانه به کنار دریاچه برود و از تعطیلات خود لذت ببرد.

□ اگر ماشین زانا خراب نبود کافی بود که ارقام ۱۵۶ و ۴۴- را وارد کند.

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۰۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴۷ \\ -۵۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴۴ \\ ۱۵۶ \end{bmatrix}$$

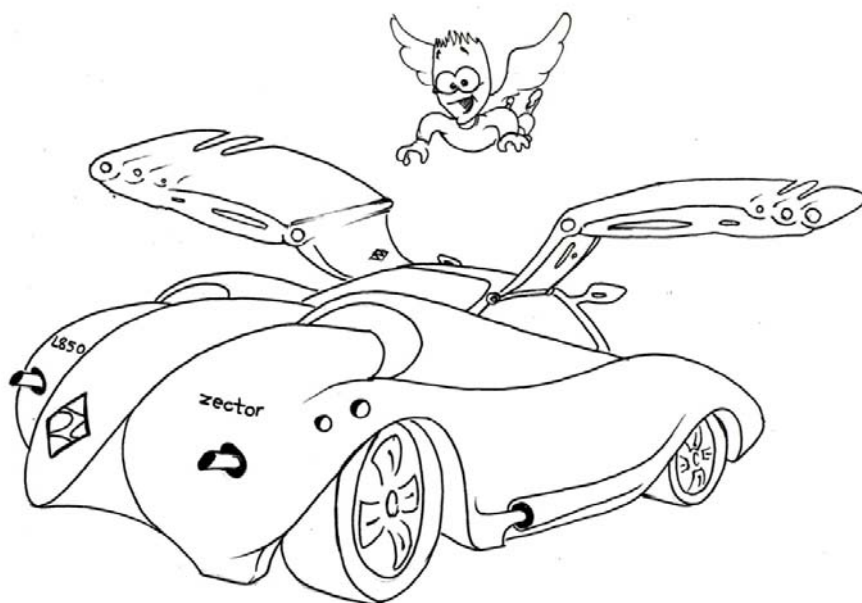
اما چون اتوموبیل، اعداد ۴۴- و ۱۵۶ را به علت آن‌که دارای ارقام زوج هستند قبول نمی‌کند. زانا می‌تواند ابتدا اعداد ۱۱ و ۱۵۵- را وارد کند و سپس اعداد ۱ و ۳۳- را تا به مقصد برسد. البته واضح است که این تنها جواب این مسأله نیست.

‡ این مسأله ذهن دانش‌آموزان را به مفهوم جمع بردارها نزدیک‌تر می‌کند. لذا بهتر است جواب‌های مختلف دانش‌آموزان را بررسی و روی تخته بنویسید تا بقیه‌ی دانش‌آموزان نیز آن‌ها را ببینند.

به تدریج و با افزایش سرمایه‌دارها، تعداد زیوندای‌های شهر زارف زیاد شده است و ترافیک سنگین در ساعات مختلف روز در شهر زاپوها را کلافه کرده است. به همین منظور، شرکت سازنده‌ی این خودروها نسل جدید آن‌ها را روانه‌ی بازار کرده است. سری جدید زیوندای‌ها به نام «زکتور» توانایی پرواز دارند و با وارد کردن دو عدد (مانند زیوندای‌ها) به پرواز در آمده و به‌صورت کاملاً هوشمند به مقصد می‌روند.



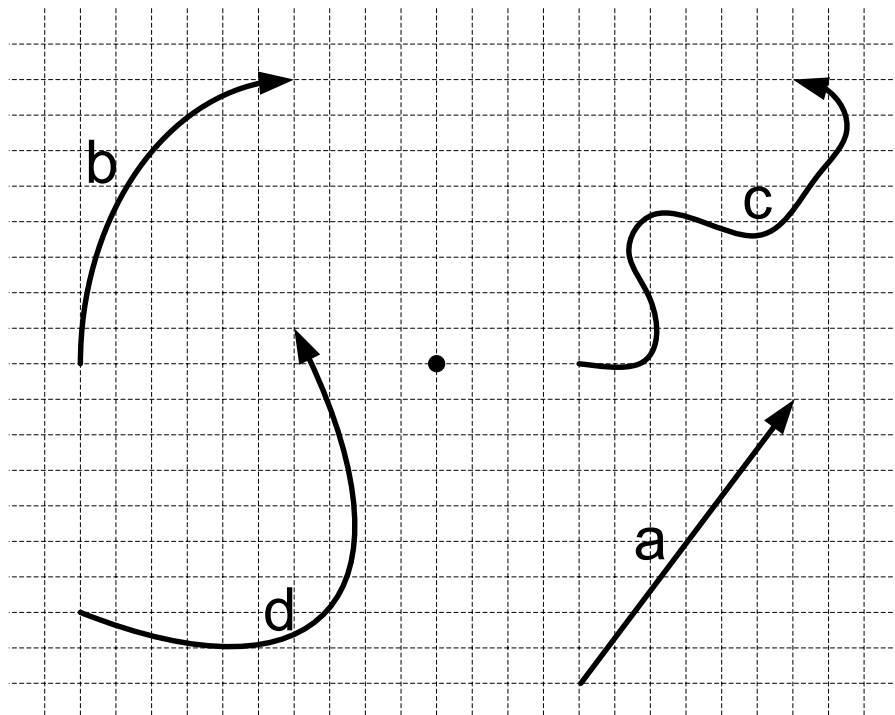
## ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



۸- سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف هم برای کنترل بهتر حرکت تمامی خودروها، مسیر حرکت آن‌ها را توسط یک سامانه‌ی بسیار هوشمند ثبت می‌کند. در شکل زیر بردار حرکت چهار زکتور در شهر زارف رسم شده است. اعداد وارد شده در کدام یک از این زکتورها با بقیه فرق می‌کند.



## ریاضی - طایفه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



□ دانش‌آموزان احتمالاً بردارهای **b** و **c** و **d** را متفاوت از بردار **a** می‌دانند زیرا بردار **a** برای آن‌ها ملموس‌تر است. در اینجا توجه دانش‌آموزان را به تعریف بردار جلب کنید.

بردار تنها دستور انتقال یک نقطه به نقطه‌ای دیگر است و درباره‌ی نوع حرکت توضیحی

نمی‌دهد. لذا در این تمرین هر ۴ بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  و  $\vec{d}$  نمایش انتقال  $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

می‌باشند و نوع نمایش آن‌ها مهم نیست. اما معمولاً یک بردار را به صورت یک پاره‌خط نمایش می‌دهند.

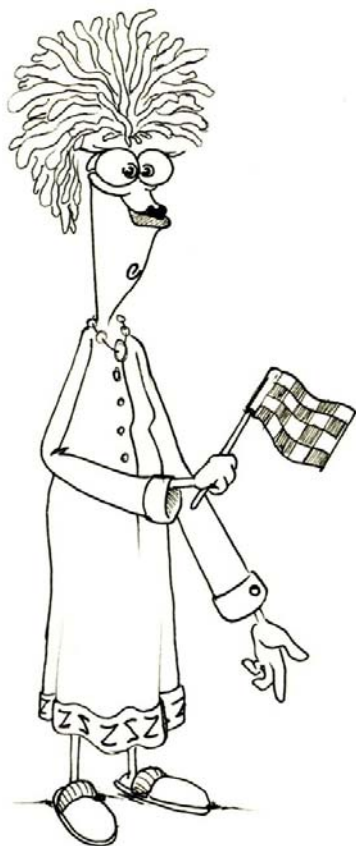


اینکه در بعضی کتب نوشته می‌شود که بردار، پاره‌خطی جهت‌دار می‌باشد به کلی نادرست می‌باشد.

۹- زلاتان امروز صبح با زکتور خود به اداره رفت و بازگشت، سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف بردار حرکت هر این شهروند را چگونه ثبت خواهد کرد.

□ سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف وظیفه‌ی رسم بردار حرکت زلاتان را بر عهده دارد و از نظر این سازمان زلاتان، به همان جایی بازگشته که از آن حرکت را آغاز کرده بود، پس بردار حرکت او یک بردار  $\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$  می‌باشد و سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف، آن را به صورت زیر ثبت خواهد کرد.





۱۰- شهردار شهر زارف، خانم «زن» تصمیم دارد به مناسبت روز جهانی ورزش، مسابقه‌ی اتوموبیل‌رانی دور شهر زارف را برگزار کند. این مسابقه رأس ساعت ۸ صبح آغاز شده و بعد از سه دور، حول شهر، به پایان می‌رسد. «زویی» می‌خواهد با زکتور خود در مسابقه‌ی اتوموبیل‌رانی دور زارف شرکت کند.

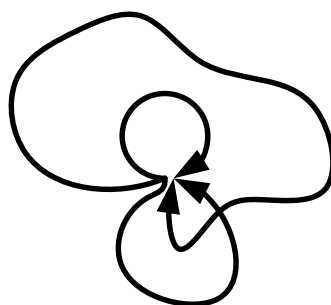
الف) او باید چه اعدادی را در زکتور خود وارد کند؟

ب) سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف، بردار حرکت اتوموبیل‌های شرکت کننده را چگونه ثبت خواهد کرد.

□ الف) چون نقطه‌ی شروع و پایان مسابقه یکسان است، زویی می‌بایست اعداد صفر تا صفر را در زکتور خود وارد کند که در این صورت زکتور او هیچ حرکتی نمی‌کند و به این ترتیب زویی برای پیروزی در این مسابقه دچار مشکل است زیرا او باید از بردارهای بسیاری که جمعشان صفر است استفاده کند.



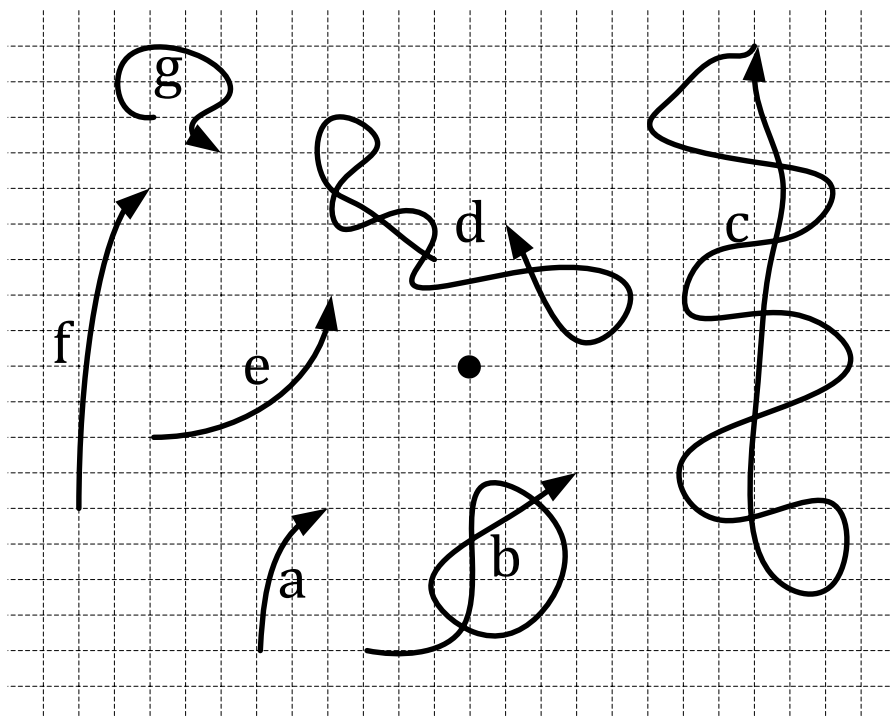
ب) سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف، تعداد زیادی بردارهای  
صفر را ثبت کرده است. که در این جا بردار حرکت سه اتوموبیل رسم شده  
است.



ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



۱۱- مختصات هر یک از بردارهای زیر را بنویسید.



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

۱۲- «باب زایس» نقاش معروف، یک روش جدید برای آموزش نقاشی اختراع کرده است.

او به وسیله‌ی بردارها، رسم اشکال مختلف را آموزش می‌دهد. مثلاً در زیر یک روش

ریاضی طایفه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



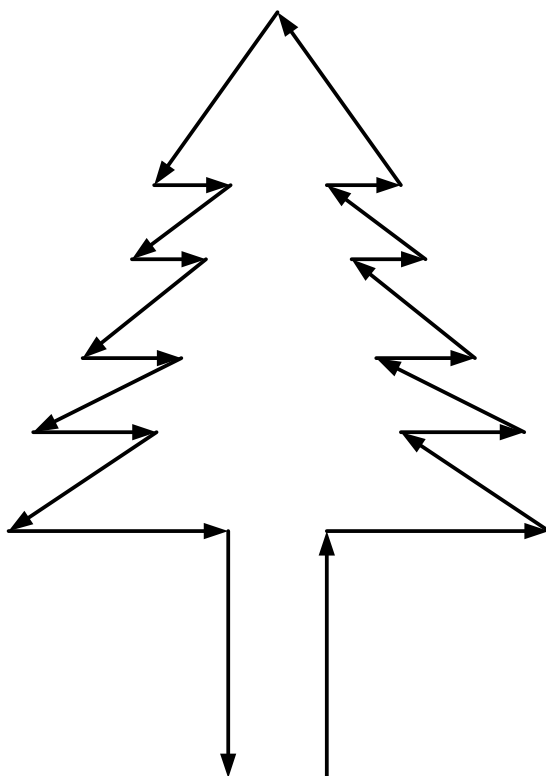
## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

الگوی نقاشی آمده است. کفایت از نقطه‌ای دلخواه شروع کنید و پشت سر هم طبق بردارهای آمده، شکلی را رسم کنید. آیا پیش از شروع کار می‌توانید حدس بزنید باب زایس چه شکلی را برای شما آماده کرده است؟

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

□

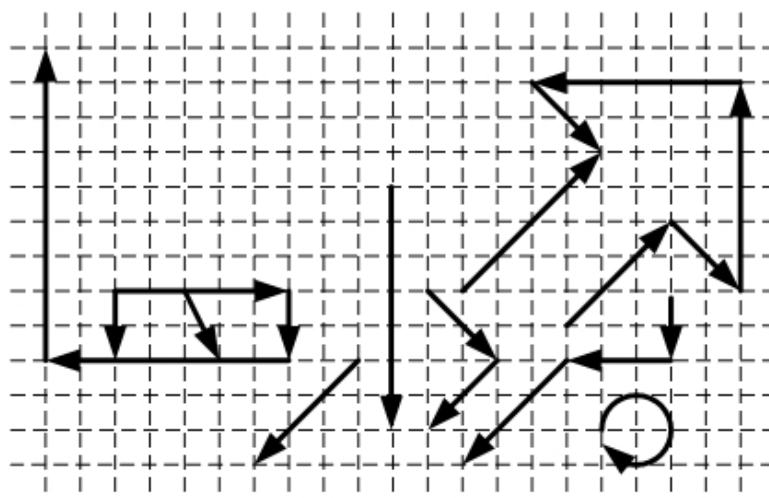






۱۳- به روش باب زایس طرح زیر را به صورت برداری بیان کنید. می‌توانید برای بعضی بردارها

نقطه‌ی شروع را بیان کنید. مثلاً بردار  $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$  ابتدا در  $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ .



ریاضی - طایفه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



## کاربرد بردارها

[[تدریس تا پایان صفحه ی ۴۱]]

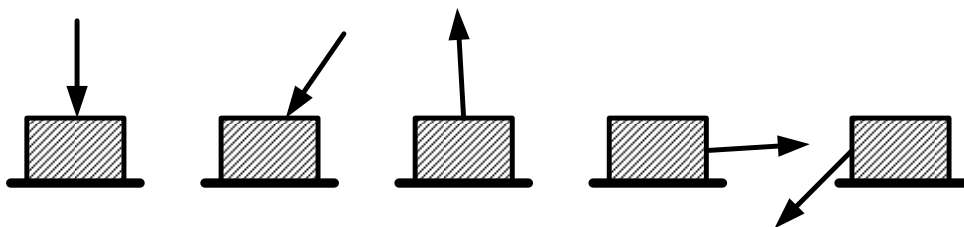
۱۴- در تمام علوم، دو نوع کمیت وجود دارد. کمیت‌های عددی مثل قد و کمیت‌های

برداری مثل نیرو. چه تفاوت‌هایی بین این دو نوع کمیت می‌بینید؟

□ از دانش‌آموزان بخواهید که درباره‌ی جمله‌ی زیر قضاوت کنند.

یک نیروی ۲۰ نیوتنی به یک جعبه وارد شده است.

اطلاعات این جمله اصلاً کافی نیست و تمام حالات زیر از جمله‌ی فوق نتیجه می‌شود.



البته این‌ها تنها بعضی از حالات ممکن است و دانش‌آموزان می‌توانند هر یک نظر متفاوتی

نسبت به جمله‌ی فوق داشته باشند.

اینجا به این نکته می‌رسیم که بعضی از کمیت‌ها مثل نیرو تنها با یک عدد قابل بیان نیستند و

نیاز است (به جز اندازه‌ی آنها) به راستا و جهت آنها نیز اشاره شود. پس می‌توان گفت

ریاضی - طایفه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



بردار برای کمیت‌هایی استفاده می‌شود که علاوه بر اندازه به راستا و جهت نیز نیاز دارند استفاده می‌شود.

❗ بعد از بررسی این سؤال به بیان ویژگی‌های بردار بپردازید. اینکه بردار در واقع مزیت‌های بسیاری برای بیان کمیت‌ها دارد زیرا علاوه بر اندازه (طول بردار)، راستا و جهت نیز دارد.

۱۵- سرعت یک خودرو چه نوع کمیتی است؟ جرم یک خودرو چگونه؟

□ سرعت یک کمیت برداری است زیرا نمی‌توان آن را تنها با یک عدد بیان کرد. مثلاً اگر بگوییم سرعت یک خودرو ۷۰ کیلومتر در ساعت است، این سؤال پیش می‌آید که این خودرو در چه راستایی در حال حرکت است مثلاً راستای شرقی - غربی یا راستای شمالی - جنوبی و یا راستای یک خیابان و ... و سؤال دیگری که پیش می‌آید این است که در این راستای مشخص در چه جهتی حرکت می‌کند در جهت رفت یا برگشت، در جهت شمال یا جنوب و ...

اما جرم یک کمیت عددی است زیرا تنها با یک عدد قابل بیان است. مثلاً وقتی می‌گوییم جرم یک نفر ۷۰ نیوتن است دیگر سؤالی پیش نمی‌آید که مثلاً در چه جهت یا راستایی و طرح چنین سؤالاتی بی‌معنی به نظر می‌رسد.

۱۶- دو خودروی سواری با سرعت‌های ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت در جاده کاشان - اصفهان در حال حرکت هستند. اگر این دو خودرو در یک لحظه در کنار هم باشند، بعد از گذشت ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟



□ احتمالاً دانش‌آموزان این سؤال را به این صورت حل خواهند کرد:

بعد از دو ساعت، ماشین اول ۴۰ کیلومتر و ماشین دوم ۶۰ کیلومتر حرکت کرده‌اند،

پس فاصله‌ی آن‌ها ۲۰ کیلومتر می‌باشد.

اما نکته‌ی مهم این است که در صورت سؤال درباره‌ی جهت حرکت اتوموبیل‌ها صحبت نشده است. شاید یکی از اتوموبیل‌ها به سمت شرق و دیگری به سمت غرب حرکت کرده باشند که در این صورت فاصله‌ی آن‌ها  $۶۰ + ۴۰ = ۱۰۰$  کیلومتر خواهد بود.

‡ در این سؤال اندازه‌ی بردارها ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد و راستای حرکت آن‌ها راستای جاده می‌باشد اما جهت بردارها در صورت سؤال مشخص نیست.



۱۷- شهر زارف که به خاطر می‌آورد! یک تاجر به نام «زاجر» می‌خواهد یک فروشگاه زنجیره‌ای بزرگ به مساحت ۳۰۰ زافت مربع در این شهر بسازد. او می‌خواهد فروشگاهش را در نقطه‌ای از شهر بسازد که فاصله‌اش تا مجتمع‌های مسکونی شهر به آدرس ۱۶-۹۴ و استادیوم ورزشی زارف به آدرس ۱۰-۵۴ مساوی باشد و بدین ترتیب هم مردمی که در مجتمع‌های مسکونی زندگی می‌کنند و هم تماشاچیان مسابقات ورزش به راحتی بتوانند به این فروشگاه رفت و آمد کنند. به زاجر کمک کنید و آدرسی را که باید در آن فروشگاه زنجیره‌ای خود را بنا کند بیابید.





□ در این سؤال در واقع می‌خواهیم مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط **AB** را به‌دست

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \end{bmatrix} \text{ آوریم.}$$

‡ از دانش‌آموزان بخواهید مسأله بفهمند و سپس آن‌ها را گام به گام راهنمایی کنید تا جواب مسأله بیابند.

گام اول) از دانش‌آموزان بخواهید ابتدا نام نقطه‌ی وسط را  $M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  بگذارند. در نتیجه داریم:  $\vec{AM} = \vec{MB}$ . چرا؟

دانش‌آموزان باید علت تساوی این دو بردار را به این صورت بیان کنند که این دو بردار اولاً هم‌اندازه‌اند زیرا **M** وسط **AB** است، دوماً هم‌جهتند و سوماً هم‌راستا هستند. هم‌جهت و هم‌راستا بودنشان باید با رسم دو بردار  $\vec{AM}$  و  $\vec{MB}$  بیان کنند.

گام دوم) مختصات بردارهای  $\vec{AM}, \vec{MB}$  را بر حسب به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{AM} = M - A = \begin{bmatrix} x + 5 \\ y - 10 \end{bmatrix}$$

$$\vec{MB} = B - M = \begin{bmatrix} 9 - x \\ -16 - y \end{bmatrix}$$



گام سوم) حال با توجه به اینکه  $\vec{AM} = \vec{MB}$ ، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست می‌آوریم.

$$\vec{AM} = \vec{MB} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 5 \\ y - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - x \\ -16 - y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 5 = 9 - x \\ y - 10 = -16 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

زاجر باید فروشگاه خود را باید در آدرس ۳-۲۴ بسازد.

۱۸- قرینه‌ی نقطه‌ی  $S = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$  نسبت به  $N = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$  را  $F$  می‌نامیم. مختصات  $F$  را

به دست آورید. (راهنمایی: نقطه‌ی وسط پاره خط  $FS$  نقطه‌ی  $N$  است.)

□ چون  $N$  نقطه‌ی وسط پاره خط  $FS$  است پس

$$\vec{FN} = \vec{NS}, \quad F = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\vec{FN} = N - F = \begin{bmatrix} -2 - x \\ 7 - y \end{bmatrix}$$

$$\vec{NS} = S - N = \begin{bmatrix} 6 + 2 \\ 3 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{FN} = \vec{NS} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 - x \\ 7 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2 - x = 8 \\ 7 - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 11 \end{cases}$$

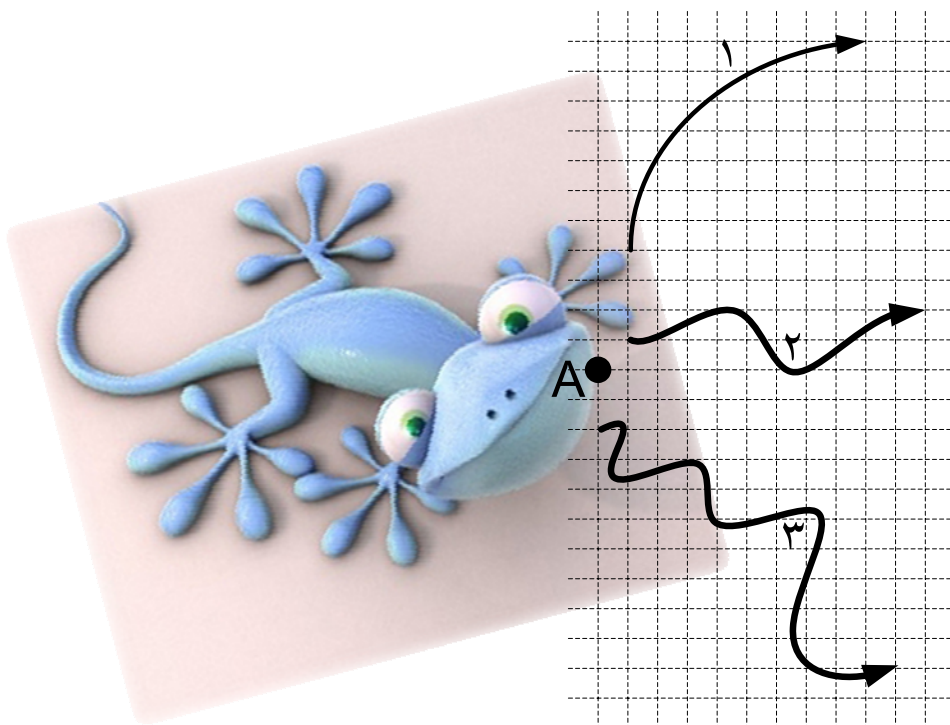
‡ در این بخش به حل تمرین‌های مهارتی متنوع بپردازید.



## جمع بردارها

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۴۳]]

۱۹-عموی الهه برای او یک عروسک کنترلی بسیار پیشرفته خریده است. روی کنترل این عروسک ۳ دکمه وجود دارد. الهه هر بار که دکمه‌ای را می‌فشارد عروسک طبق بردار آن حرکت می‌کند. مثلاً وقتی دکمه‌ی ۱ را می‌فشارد، عروسک طبق بردار ۱ شروع به حرکت می‌کند و وقتی دو دکمه‌ی ۳ و ۲ را با هم می‌فشارد، عروسک طبق بردار مجموع ۲ و ۳ حرکت می‌کند.



ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم





## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

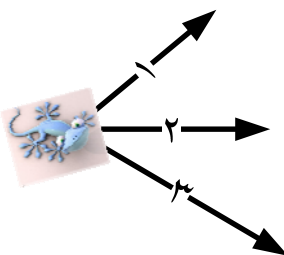
الف) عروسک با فشردن به ترتیب دکمه‌های ۱ و ۲ و ۳ (هر کدام یک بار) از نقطه‌ی شروع (A) به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

ب) اگر ترتیب فشردن دکمه‌ها را به صورت ۳ و ۲ و ۱ (هر کدام یک بار) تغییر دهیم، عروسک از نقطه‌ی شروع به کجا می‌رسد؟

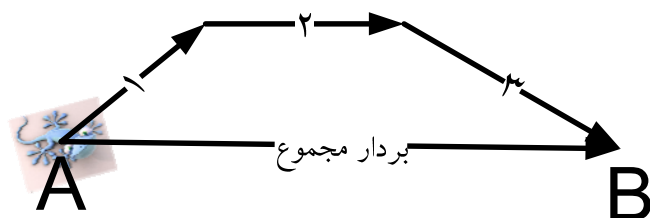
پ) اگر الهه هر یک بار سه دکمه را با هم بفشرد عروسک از نقطه‌ی شروع به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

ت) بهترین ترتیب فشردن دکمه‌ها برای آنکه عروسک به دورترین فاصله از مکان اولیه‌اش برسد، چیست؟ (به شرطی که هر دکمه را فقط یک بار بفشاریم)

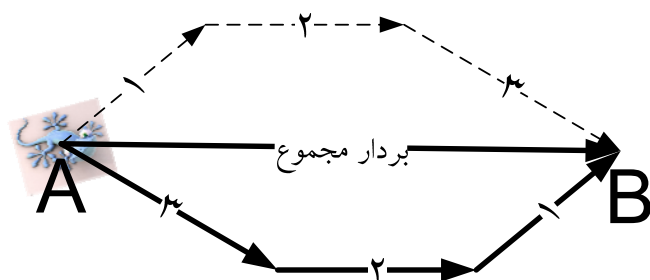
□ ابتدا بردارها را به صورت پاره خط می کشیم.



الف) اگر بردارهای ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب با یکدیگر جمع کنیم، عروسک از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B خواهد رسید:



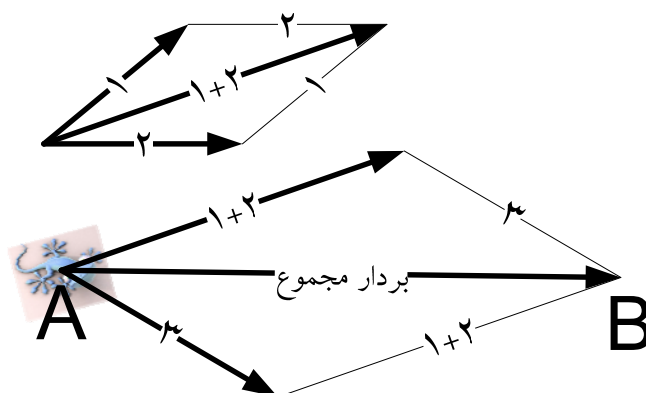
ب) اگر بردارهای ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب ۳ و ۲ و ۱ با یکدیگر جمع کنیم، خواهیم داشت:



که در این حالت نیز، عروسک از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌رود.

♣ بهتر است قسمت‌های الف و ب را در یک دستگاه مختصات رسم کنید تا دانش‌آموزان یکسان بودن بردار مجموع در دو حالت را راحت‌تر درک کنند.

پ) ابتدا بردارهای ۱ و ۲ را با یکدیگر جمع می‌زنیم و سپس بردار مجموع را با بردار ۳ جمع می‌کنیم:



که کاملاً واضح است که جواب هیچ تغییری نمی‌کند و حاصل جمع سه بردار در هر حالتی یکسان است.

ت) با توجه به آنچه که مشاهده شد می‌توان نتیجه‌گیری کرد که جمع بردارها دارای خاصیت جابه‌جایی است و بنابراین به هر صورتی که سه بردار را با هم جمع کنیم، حاصل تفاوتی نمی‌کند:

$$\vec{1} + \vec{2} + \vec{3} = \vec{3} + \vec{2} + \vec{1} = (\vec{1} + \vec{2}) + \vec{3} = \dots$$

۲۰- مورچه‌ها موجودات بسیار قدرتمند و پرکاری هستند و البته بعضی‌ها معتقدند که آن‌ها بسیار باهوش هم هستند. تا به حال حتماً حمل بار توسط تعداد زیادی از مورچه‌ها را دیدید که با یکدیگر و با نظم و ترتیب بار سنگینی رو تا لانه‌شان حمل می‌کنند. زیور یک دانشمند نوجوان و علاقه‌مند به کار روی زندگی مورچه‌هاست. او حالا که با بردارها تا حدی آشنا شده، می‌خواهد حمل بار توسط دسته‌ی مورچه‌ها را با بردار توصیف کند.



الف) به او در این کار کمک کنید و بردار حرکت تمام مورچه‌ها را رسم و بردار مجموع را بیابید. (توجه کنید یک مورچه می‌تواند جسمی را بکشد ولی نمی‌تواند هل دهد).

ب) اگر لانه‌ی این مورچه‌ها در شمال غرب تصویر واقع باشد، کدام جمله صحیح‌تر است؟

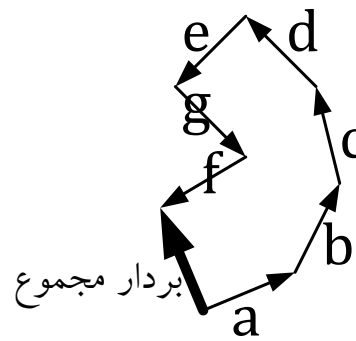
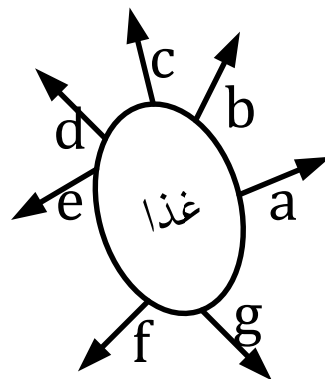
\* مورچه‌های پایین تصویر اصلاً باهوش نیستند.

\* هیچ مورچه‌ای در دنیا باهوش نیست.





□ الف)



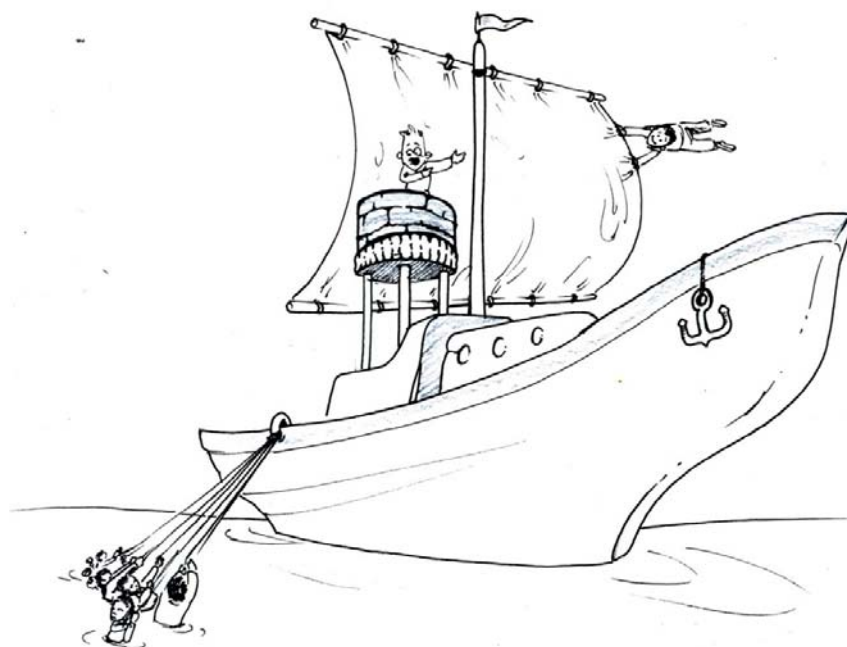
ب) برای دانش‌آموزان توضیح دهید که بردار مجموع تقریباً با بردار **d** برابر است و این بدان معناست که بقیه مورچه‌ها وقت و انرژی خود را تلف می‌کنند. مورچه‌ها به طوری غریزی دور غذا را می‌گیرند و به سمت لانه‌ی خود می‌برند اما تعداد مورچه‌هایی که به سمت لانه می‌روند بیشتر است، بنابراین موفق به حمل غذا تا خانه می‌شوند.

ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



## جمع بردارها - مفهوم تعادل

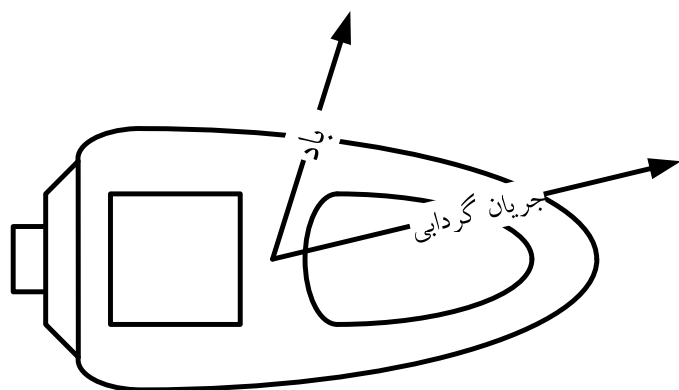
۲۱- ناخدا احد با کشتی بادبانی و صد خدمه‌ی خود در دریای طوفانی خلیج فارس گم شده است. در آخرین ارتباط رادیویی گارد ساحلی با ناخدا احد داشته‌اند به او دستور داده‌اند تا کشتی خود را به هیچ عنوان از جایش تکان ندهد تا تکاوران گارد ساحلی بتوانند پیدایشان کنند. اما باد شدید و جریان آب باعث شده‌اند تا ناخدا دچار مشکل بزرگی شود و بر خلاف دستور، کشتی به حرکت درآید. او به تمام خدمه‌ی شجاع خود دستور داد تا به آب بپرند و با طناب‌هایی کشتی را بکشند تا از جای خود تکان نخورد. به ناخدا احد کمک کنید و جهت و مقدار نیرویی را که خدمه‌اش باید وارد کنند را با یک بردار مشخص کنید.



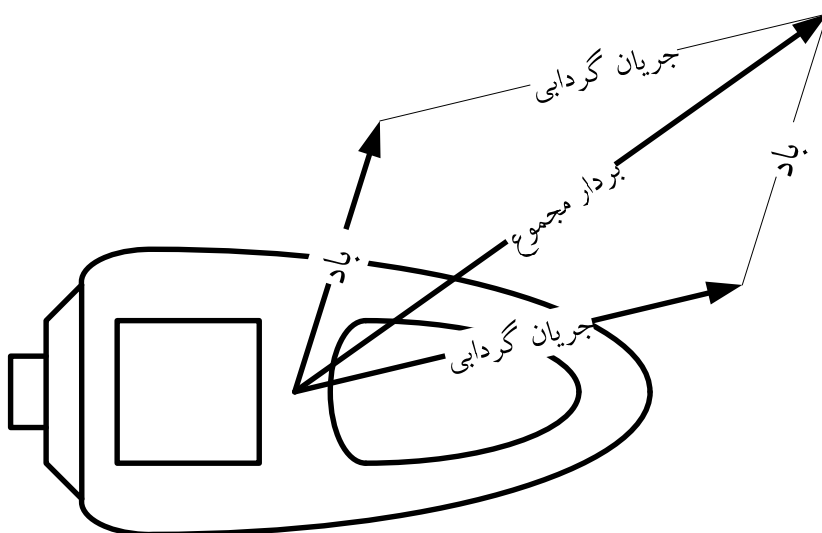
ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



# ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



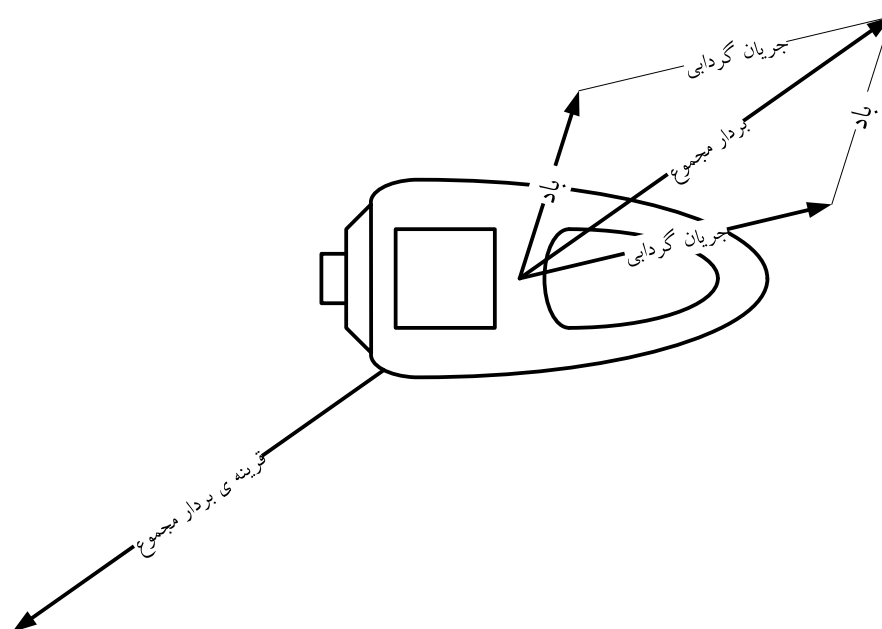
□ ابتدا حاصل جمع بردارهای مربوط به باد و جریان گردآبی را به دست می آوریم.





## ریاضی - طایفه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

و این بدان معناست که قایق تحت تأثیر دو بردار باد و جریان گردابی، در راستا و جهت بردار مجموع و با نیرویی به اندازه‌ی این بردار حرکت می‌کند. پس خدمه‌ی این کشتی برای خنثی کردن این بردار باید نیروی معادل با این بردار اما در جهت عکس به آن وارد که کنند که این همان بردار قرینه می‌باشد.



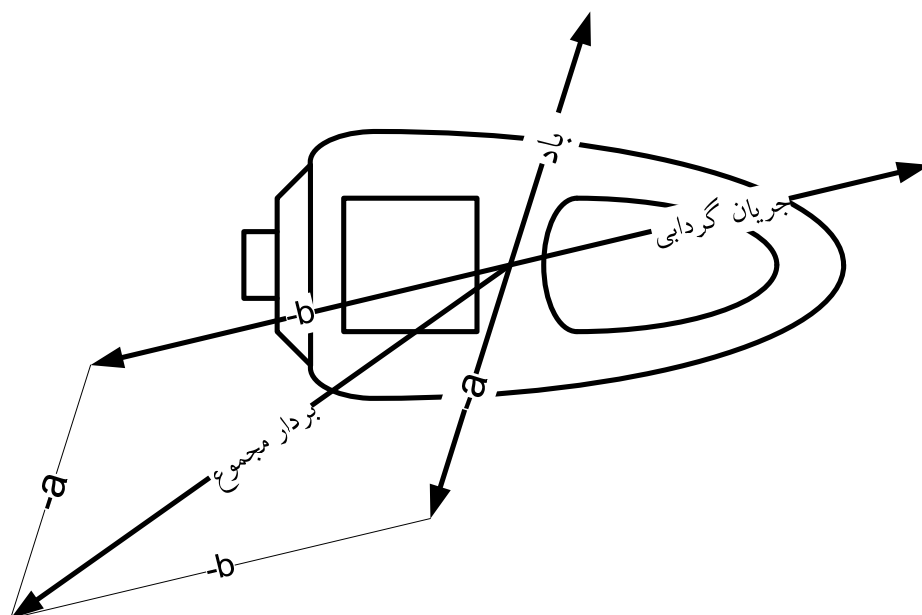
❗ راه دیگری برای حل این سؤال وجود دارد که ممکن است بعضی از دانش‌آموزان از آن استفاده کنند:

می‌بایست بر نیروهای باد ( $\vec{a}$ ) و جریان گردابی ( $\vec{b}$ ) غلبه کنیم. پس کافیه دو نیروی قرینه‌ی این نیروها را وارد کنیم:  $(-\vec{a}) + (-\vec{b})$





## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

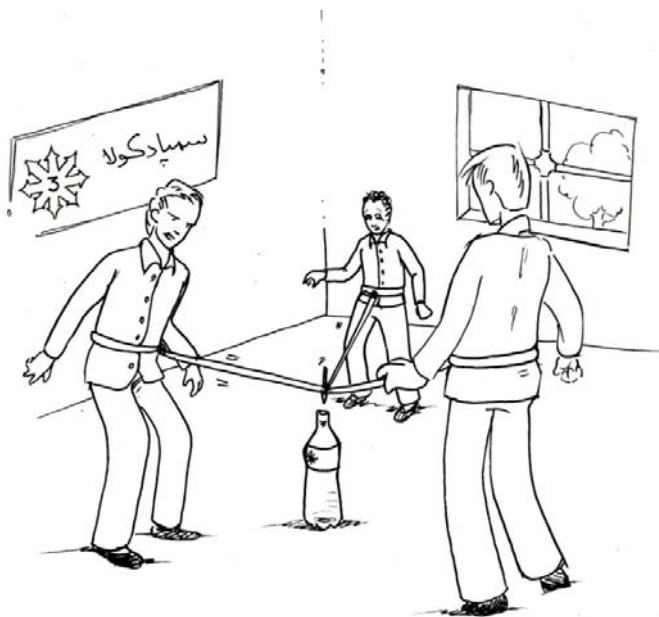


که البته جواب سؤال از هر دو روش یکسان است. اما می‌توان دیدن دو روش یک نتیجه -  
 گیری انجام داد و آن اینکه:  $(-\vec{a}) + (-\vec{b}) = -(\vec{a} + \vec{b})$ . که این یکی از خواص مهم  
 بردارهاست.



## مسابقه‌ی سمپاد کولا

۲۲- یک شرکت سازنده‌ی نوشابه‌ی مبتکر به نام «سمپاد کولا»، دست به طراحی بازی تلویزیونی جذابی، برای جلب مشتری‌های بیشتر زده است. در این بازی چند گروه سه نفره شرکت می‌کنند. به دور کمر هر یک از نفرات گروه یک نخ کاموایی به طول ۱۵۰ سانتی‌متر متصل می‌باشد و طرف دیگر هر سه نخ به یک خودکار وصل است. نفرات گروه به گونه‌ای مثلی می‌ایستند و یک شیشه‌ی نوشابه در مرکز مثلی قرار می‌گیرد. افراد گروه باید سعی کنند بدون استفاده از دست و تنها با تکان خوردن، خودکار را به درون شیشه‌ی نوشابه‌ی سمپاد کولا ببرند. گروهی برنده‌ی بازی است که بتواند زودتر از بقیه‌ی گروه‌ها و بدون دست زدن به نخ‌ها و تنها با حرکات بدن، خودکار را داخل شیشه‌ی نوشابه ببرد.



ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



# ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

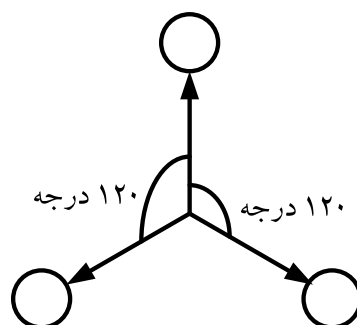


چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می کنید؟



‡ این بازی را در کلاس یا حیاط مدرسه چند بار انجام دهید. بهتر است یک جلسه از کلاس درس خود را به بازی و یک جلسه را به تحلیل و بررسی آن پردازید.

□ برای اینکه در بازی موفق شویم کفایت سه نفر اعضای گروه در حالتی بایستند که بیشترین تعادل موجود باشد. از دانش‌آموزان بپرسید این وضعیت چه زمانی اتفاق می‌افتد. اگر دانش‌آموزان به اندازه‌ی کافی این بازی را انجام داده باشند به‌صورت شهودی و حسی به جواب اشاره می‌کنند اما به لحاظ ریاضی بهترین حالت تعادل زمانی اتفاق می‌افتد که سه بردار نیروی وارده توسط اعضا با یکدیگر مساوی باشند و زاویه‌ی ۱۲۰ درجه نیز بسازند.

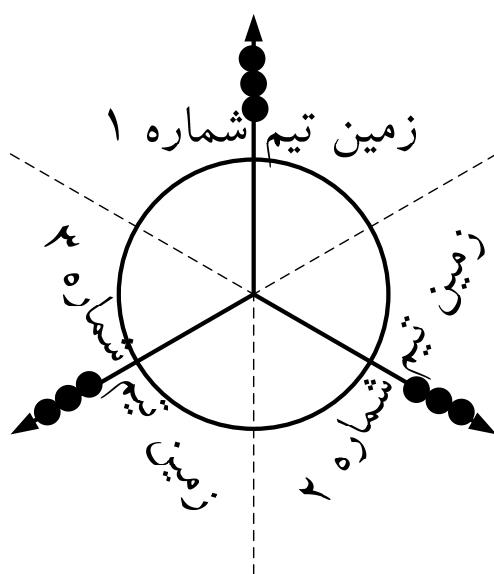


علت تعادلی بودن این شکل را از دانش‌آموزان بپرسید و از آن‌ها بخواهید آن را تحلیل کنند و به این موضوع پی ببرند که در این حالت جمع هر دو بردار برابر قرینه بردار سوم می‌شود که این یعنی جمع سه بردار مساوی در این حالت صفر می‌باشد.



## طناب کشی فوق حرفه‌ای

۲۳- نُه قهرمان مسابقات جهانی طناب کشی توانسته‌اند بازی طناب کشی را ارتقا دهند. آن‌ها در ۳ گروه ۳ نفره و در زمینی به شکل زیر قرار می‌گیرند.



دایره‌ی مرکز زمین به شعاع نیم متر می‌باشد. سه طناب در مرکز زمین به یکدیگر گره خورده‌اند و به گره سه طناب یک پارچه‌ی وصل شده است. سه گروه ابتدا در زمین مربوط به خود مستقر شده و سپس هم‌زمان و با سوت داور شروع به کشیدن طناب می‌کنند. گروهی برنده است که بتواند پارچه متصل به گره را به زمین خود بیاورد. دقت کنید که در ابتدای بازی زاویه‌ی سه طناب با یکدیگر ۱۲۰ درجه باشد.

چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می‌کنید؟

ریاضی - طلا به داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



♣ این بازی را در کلاس یا حیاط مدرسه چند بار انجام دهید. بهتر است یک جلسه از کلاس درس خود را به بازی و یک جلسه را به تحلیل و بررسی آن بپردازید.

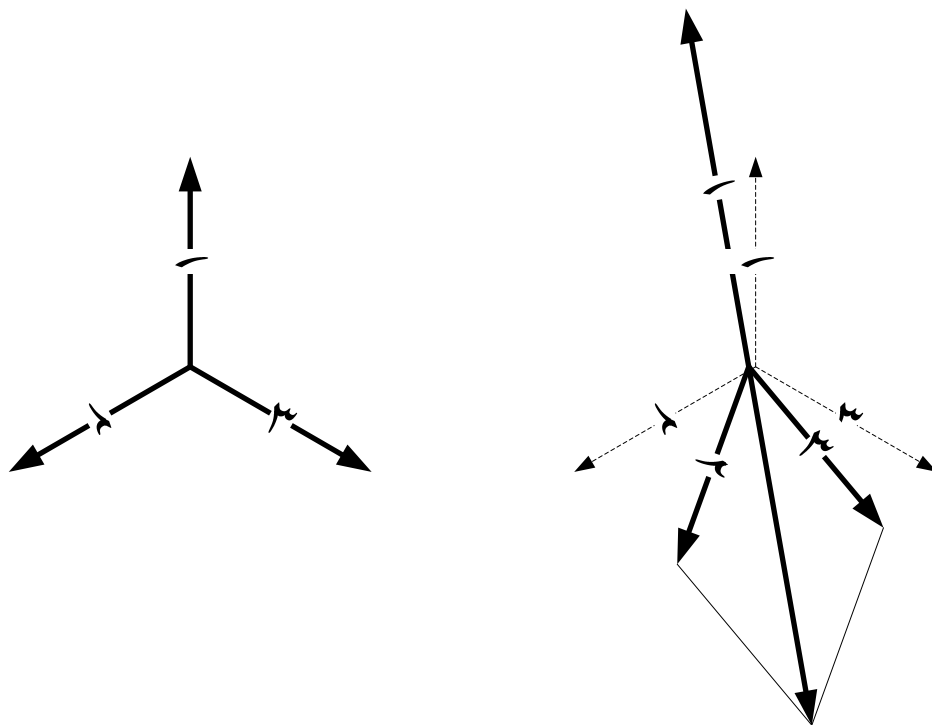
□ این مسأله را در دو حالت بررسی کنید.

حالت اول، زمانی که تیم‌ها از مسیر یا همان راستای خود جابه‌جا نشوند. از دانش‌آموزان سؤال کنید در این حالت اگر دو تیم دیگر هر کدام نیروهای ۲۰ نیوتنی وارد کنند، برای غلبه بر آن‌ها تیم سوم باید چه نیرویی وارد کند؟ واضح است که برای ایجاد تعادل بین سه بردار با زوایای ۱۲۰ درجه کفایت همه‌ی آن‌ها هم اندازه باشند و در نتیجه تیم سوم نیز اگر نیروی ۲۰ نیوتنی وارد کند تمام تیم‌ها در حالت تعادل قرار می‌گیرند و اینجا کفایت تا یکی از تیم‌ها مثلاً تیم سوم نیرویی اندکی بیشتر از ۲۰ نیوتن وارد کند تا تعادل را به نفع خود بر هم بزند.

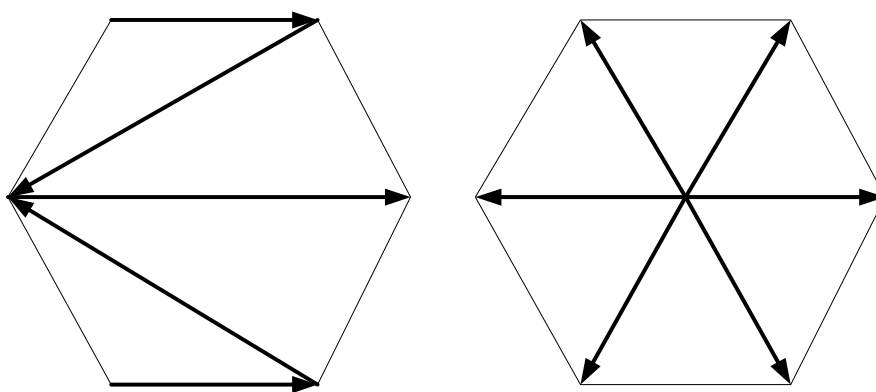
حالت دوم، زمانی که تیم‌ها نیروهای هم اندازه وارد می‌کنند ولی می‌توانند راستای خود را تغییر دهند (زاویه‌ی خود را با تیم کناری خود کم یا زیاد کنند). توجه دانش‌آموزان را به این مهم جلب کنید که حالت دوم حالت واقعی‌تری نسبت به حالت اول می‌باشد زیرا معمولاً در یارکشی اول بازی تیم‌ها دارای نیروهای مساوی هستند و آنچه که مهم است تغییر زاویه‌ها است. از دانش‌آموزان بپرسید که اگر دو تیم با زاویه‌ی کمتر از ۱۲۰ درجه نسبت به هم قرار بگیرند در آن صورت تیم سوم نیروی بیشتری باید وارد کند یا نیروی کمتر؟ البته واضح است که هر چه دو تیم دیگر به هم نزدیک‌تر شوند یا به بیان دیگر زاویه‌ی بین خود را کمتر کنند، کار برای تیم سوم سخت‌تر می‌شود و باید نیروی بیشتری وارد کند تا نبازد.



# ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



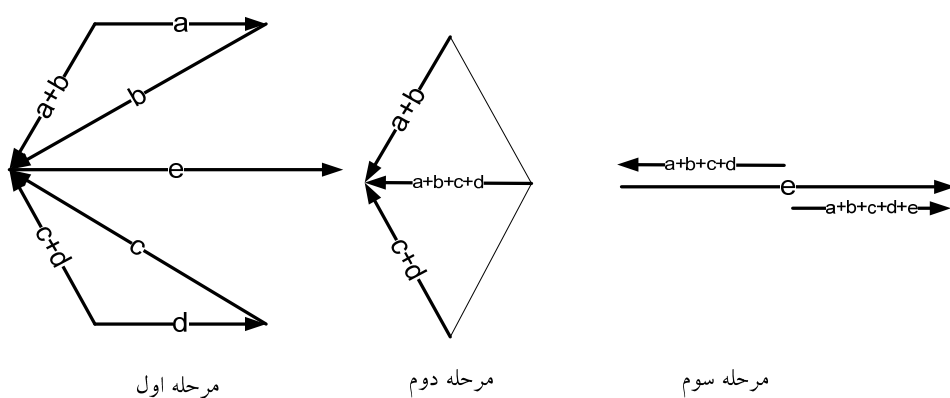
۲۴- بردار مجموع بردارهای زیر را رسم کنید. (شش ضلعی‌هایی که می‌بینید منتظم هستند.)





□ در شکل سمت راست مجموع بردارها صفر است زیرا هر دو بردار قرینه جمعشان صفر است و در این شکل سه جفت بردار قرینه وجود دارد که مجموعشان در نهایت  $\vec{O}$  می شود.

اما در شکل سمت راست به این صورت عمل می کنیم:



ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی معلم





## تجزیه‌ی بردارها

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۴۸]]

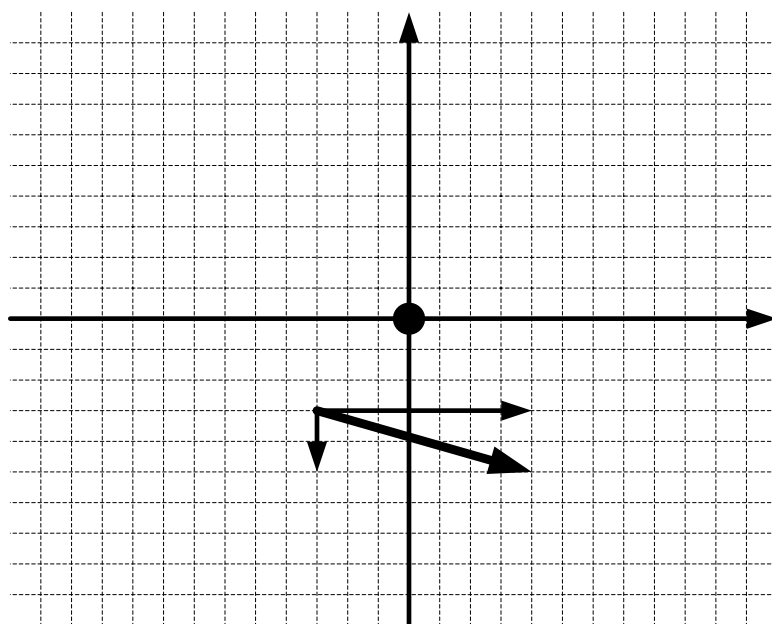
۲۵- بردار  $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۷ \\ -۲ \end{bmatrix}$  را رسم کنید.

الف) دو بردار را چنان رسم کنید که جمعشان برابر بردار  $\vec{a}$  شود.

ب) چند جفت بردار وجود دارند که جمعشان برابر بردار  $\vec{a}$  شود.

□ الف) در این جا به صورت نمونه دو بردار رسم شده است که مجموعشان برابر بردار

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} ۷ \\ -۲ \end{bmatrix} \text{ می باشد.}$$

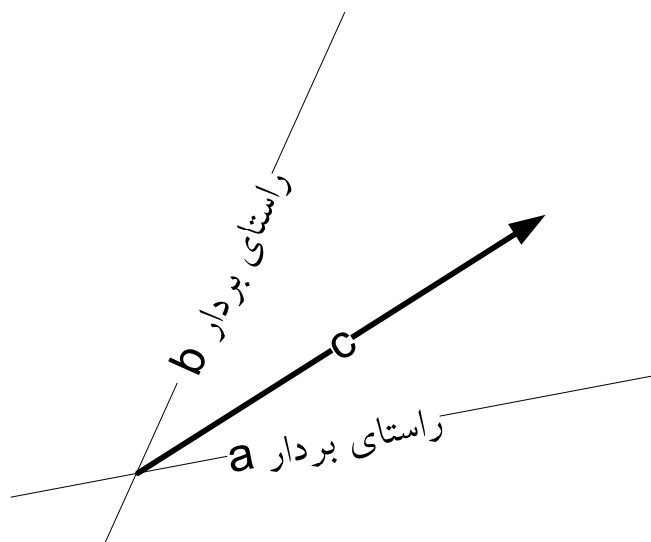




ب) بی‌شمار بردار وجود دارد که مجموعشان برابر این بردار باشد که برای آنکه دانش‌آموزان این موضوع را بهتر درک کنند کافیت سؤال را به این صورت بیان کنیم که چند جفت بردار وجود دارند که جمع طولشان ۷ و جمع عرضشان ۲- شود. در اینجا برای نمونه چند جفت از این بردارها را آورده‌ایم:

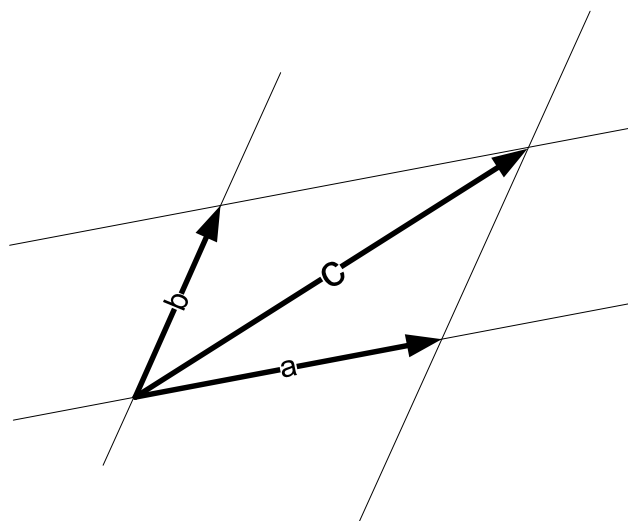
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} & \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} \\ \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} & \quad \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 \\ -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} \\ \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} & \quad \begin{bmatrix} -21 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 \\ -9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{a} \end{aligned}$$

۲۶- بردار  $\vec{c}$  رسم شده است و می‌دانیم که  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . راستاهای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  داده شده‌اند. بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید.





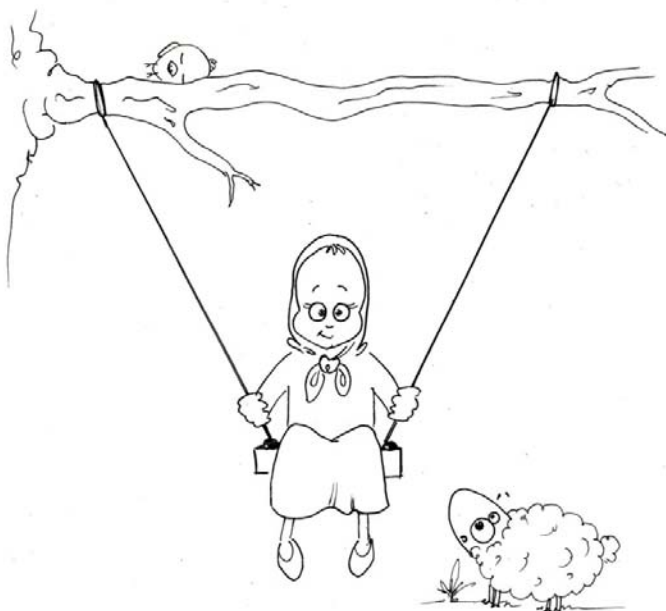
□ برعکس روش متوازی‌الاضلاع عمل می‌کنیم. در واقع باید متوازی‌الاضلاعی رسم کنیم که قطرش بردار  $c$  باشد. پس کفایت موازی راستاهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را طوری رسم کنیم که از انتهای بردار  $c$  عبور کنند.



۲۷- تینا، ۴۰ کیلوگرم وزن دارد. او دیروز که به همراه خانواده‌اش به دل طبیعت رفته بود طنابی را به شاخه‌ی قطور یک درخت وصل کرد و مشغول تاب بازی شد. طناب‌هایی که او استفاده کرده است، می‌بایست توانایی تحمل حداقل چند کیلوگرم وزن را داشته باشند تا تینا دچار مشکل نشود؟

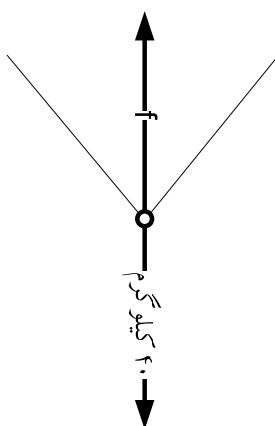


# ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی معلم

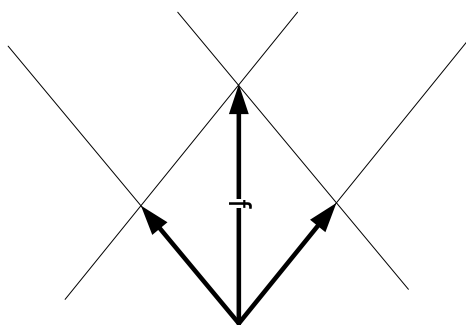




□ مسأله را تحلیل برداری می‌کنیم به این صورت که بردار وزن تینا را بر روی راستای طناب رسم می‌کنیم. در شکل زیر راستای طناب‌ها با خطوط کم‌رنگ و بردار وزنی را که طناب‌ها می‌بایست تحمل کنند با  $\vec{f}$  نمایش داده شده است.



کافیست  $\vec{f}$  را روی راستای دو طناب رسم کنیم تا بردار وزنی که هر کدام تحمل می‌کنند به دست آید.



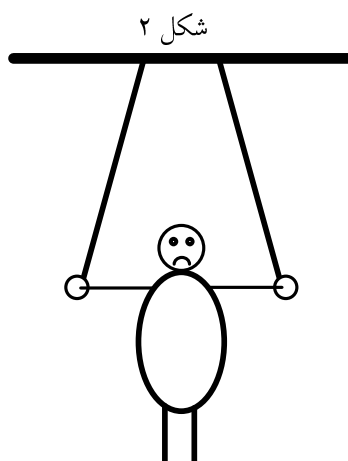
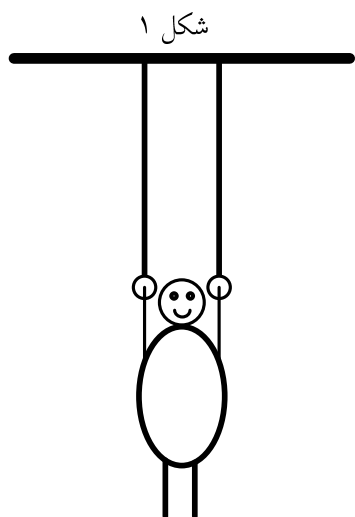


و با توجه به اینکه طول بردار  $f$  را ۴ سانتی متر در نظر گرفتیم، طول هر کدام از بردارهای به-  
دست آمده  $2/5$  سانتی متر شده است که این بدان معناست که هر کدام از طناب‌ها باید ۲۵  
کیلوگرم وزن را تحمل کنند.

۲۸- اتابک برادر تینا، یک ژیمناست نوجوان است. او خود را برای شرکت در مسابقات  
ژیمناستیک استان در دسته ۵۰ کیلوگرم آماده می‌کند. اتابک در بخش دارحلقه بسیار  
توانمند است. اما دیروز که همهی خانواده برای گردش به دل طبیعت رفتند او در خانه  
برای تمرین بیشتر تنها ماند. او ابتدا مثل هر روز به دارحلقه‌ای که خودش ساخته بود  
آویزان شد (شکل ۱). پس از مدتی به سراغ یک حرکت جدید تعادلی رفت (شکل ۲).  
اگر طناب‌هایی که او استفاده کرده است توانایی تحمل ۲۵۰ نیوتن وزن را داشته باشند،  
چرا او امروز در بیمارستان بستری است!؟

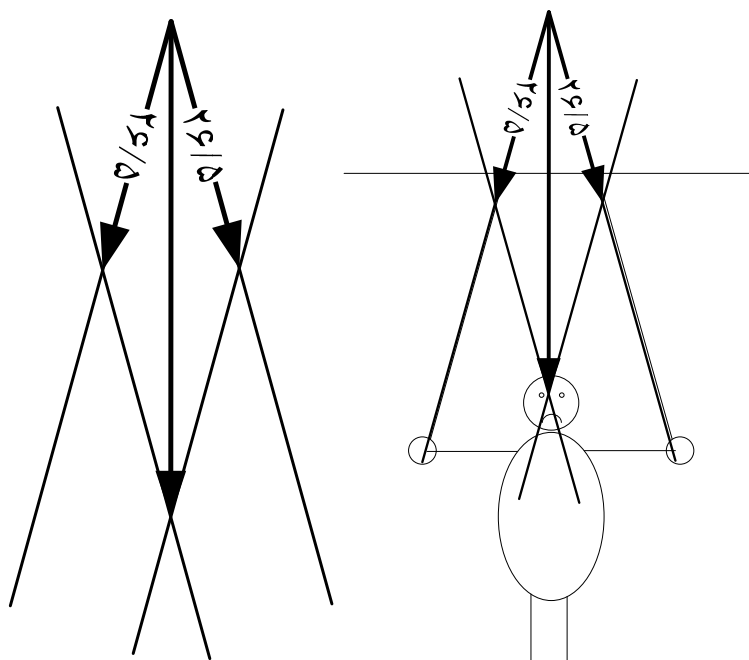


# ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم





□ در شکل ۱ با یک تحلیل برداری ساده متوجه می‌شویم که هر کدام از بردارها ۲۵۰ نیوتن وزن را تحمل می‌کنند. اما در شکل ۲ اگر تحلیل برداری را مانند شکل زیر انجام دهیم متوجه می‌شویم که طناب‌ها می‌بایست وزن بیشتری را تحمل کنند زیرا طول بردارهای روی طناب‌ها طولانی‌تر شده است. پس طناب‌ها چون توانایی تحمل بیشتر از ۲۵۰ نیوتن وزن را ندارند پاره می‌شوند و اتاقک به زمین می‌خورد و ...

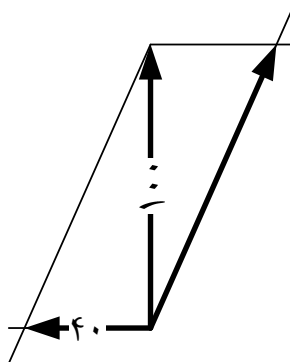
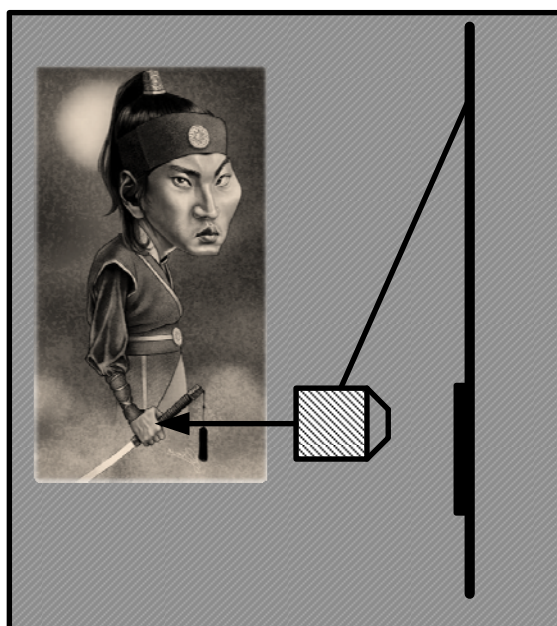






## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

۲۹- جومونگ را که می‌شناسید. او برای بیدار کردن مردم شهرش از وسیله‌ای به شکل زیر استفاده می‌کند. او هر روز باید این وزنه‌ی سنگین ۱۰۰ کیلوگرمی را کشیده و سپس رها کند تا با صدای برخورد این وزنه با طبل تمام مردم شهر بیدار شوند. مقدار نیرویی که او برای هر بار برای به‌صدا درآوردن طبل به کار می‌برد چقدر است؟



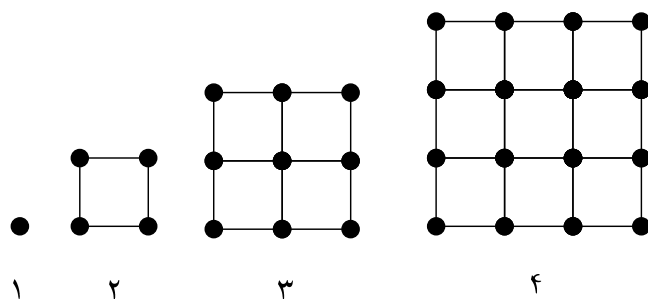


## عبارت‌های جبری - یافتن جمله $n^{\text{ام}}$

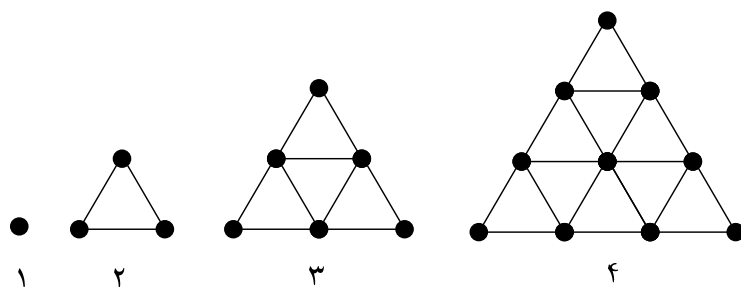
[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۵۲]]

۳۰- در ریاضیات بعضی دنباله‌ها بسیار معروف می‌باشند. در زیر چند دنباله‌ی شکلی آمده است. در این شکل‌ها تعداد دایره‌های سیاه موجود در شکل با شماره‌ی آن رابطه‌ای دارند. در مورد هر دنباله ابتدا شکل بعدی را رسم کرده و سپس تعداد دایره‌های سیاه  $n^{\text{ام}}$  شکل را با یک رابطه‌ی جبری بیان کنید.

الف) اعداد مربعی



ب) اعداد مثلثی

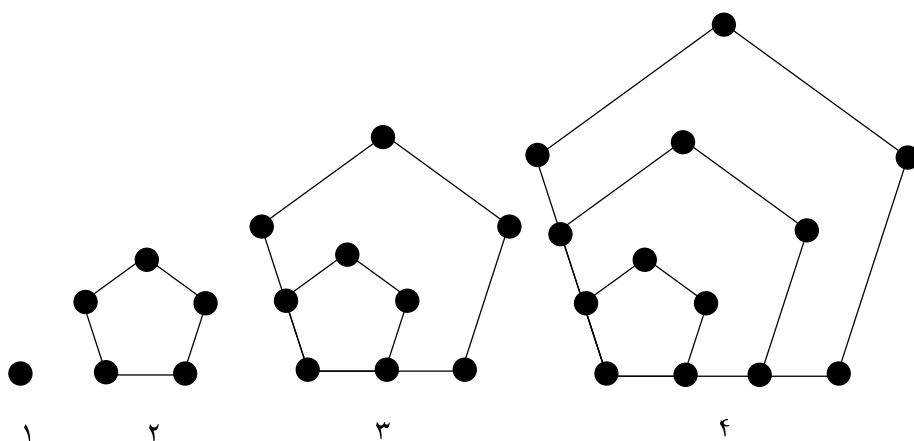


ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

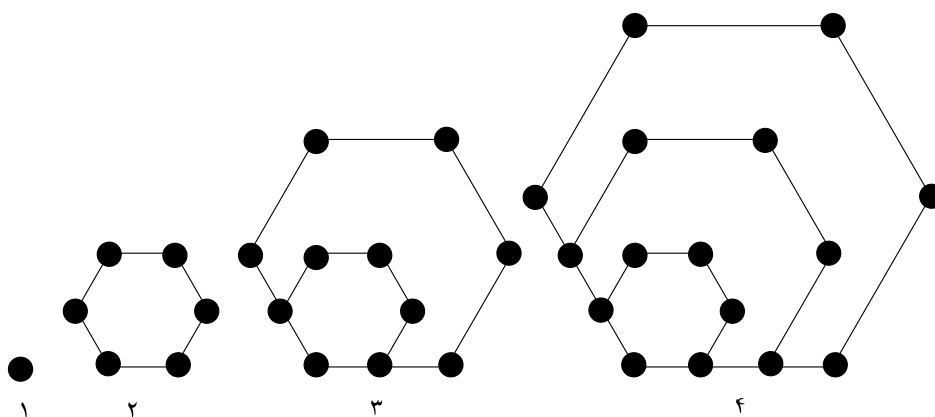


# ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

پ) اعداد مُخَمَّسی



ت) اعداد مُسَدَّسی





♣ در این سؤال، از دانش‌آموزان بخواهید که روش‌های مختلفی را برای شمردن پیشنهاد کنند.

□ الف)  $n^2$

ب)  $\frac{n(n+1)}{2}$

پ)  $1 + 4(n-1) = 4n - 3$

ت)  $1 + 5(n-1) = 5n - 4$

۳۱- «لیندا» با جمع و تفریق بعضی دنباله‌های بالا، دنباله‌های جدیدی به دست آورده است.

مثلاً با جمع کردن دو دنباله‌ی اول (اعداد مربعی و مثلثی) دنباله‌ی

$2, 7, 15, 26, 40, \dots$

را ساخته است. جمله  $n$ ام هر یک دنباله‌های لیندا را بیابید.

الف)  $2, 7, 15, 26, 40, \dots$

ب)  $2, 8, 15, 23, 32, \dots$

پ)  $2, 10, 20, 32, 46, \dots$

ت)  $2, 9, 18, 29, 42, \dots$

ث)  $2, 11, 20, 29, 38, \dots$

ج)  $3, 14, 26, 39, 53, \dots$



□ الف) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مربعی و مثلثی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$   $n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$  است.

ب) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مخمسی و مثلثی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  برابرست با:

$$4n - 3 + \frac{n(n+1)}{2}$$

پ) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مربعی و مسدسی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  برابرست با:

$$n^2 + 5n - 4$$

ت) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مربعی و مخمسی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  برابرست با:

$$n^2 + 4n - 3$$

ث) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مخمسی و مسدسی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  برابرست با:

$$4n - 3 + 5n - 4 = 9n - 7$$

ج) حاصل جمع دنباله‌ی اعداد مخمسی و مسدسی که جمله‌ی  $n^{\text{ام}}$  برابرست با:

$$9n - 7 + \frac{n(n+1)}{2}$$

۳۲- نشان دهید جمع هر دو عدد مثلثی متوالی، یک عدد مربعی است.

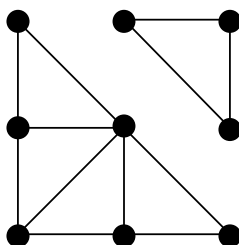
□ هر عدد مثلثی به صورت  $\frac{n(n+1)}{2}$  می‌باشد. دو عدد مثلثی متوالی فرض می‌کنیم:



$$\frac{m(m+1)}{2} \text{ و } \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+m+2)}{2} = \frac{(m+1)(2m+2)}{2} \\ &= \frac{(m+1) \times \cancel{2} (m+1)}{\cancel{2}} = (m+1)^2 \end{aligned}$$

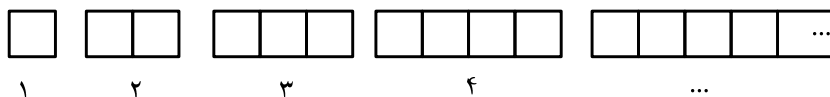
اثبات بی‌کلام زیر نیز می‌تواند در تفهیم این موضوع به دانش‌آموزان کمک کند. در این شکل نیز جمع دو مثلث  $(3 + 6)$  یک مربع شده است.



۳۳- آقای «ترنم» معلم ریاضی سال سوم راهنمایی است. او روی تخته‌ی کلاس با چوب-

کبریت دنباله‌ی شکلی زیر را رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تعداد چوب‌کبریت-

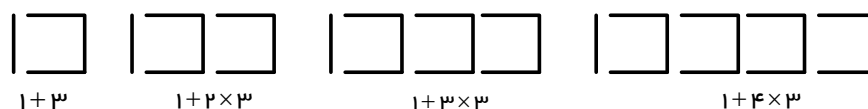
های  $n$ امین شکل را بیابند.



هر یک از دانش‌آموزان یک روش را برای شمارش تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل پیشنهاد کردند.



الف) «تفکر» گفت می‌توانیم تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را بدین صورت بشماریم:



با روش تفکر، جمله‌ی  $n$ ام این دنباله را بیابید.

ب) «تحول» دوست تفکر نوشت:

$$1 \times 4 - 0, \quad 2 \times 4 - 1, \quad 3 \times 4 - 2, \quad 4 \times 4 - 3, \quad 5 \times 4 - 4, \quad \dots$$

تحول چگونه چوب‌کبریت‌ها را شمرده است.

پ) جمله‌ی  $n$ ام این دنباله به روش تحول به‌دست آورید.

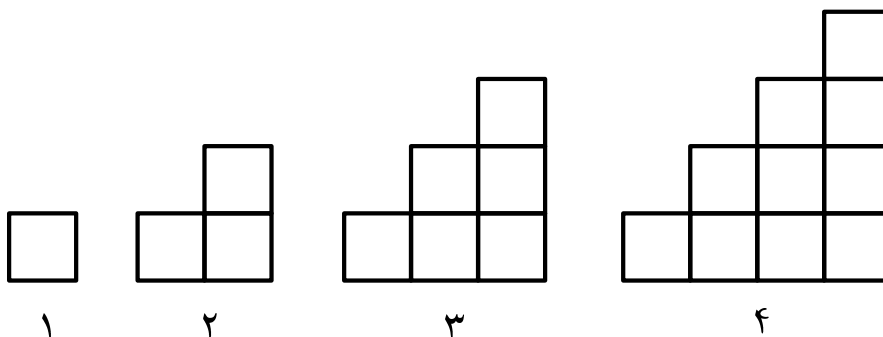
ت) «تصور» شاگرد اول کلاس، جمله‌ی  $pn + (n + 1)$  را پیشنهاد کرده است. او چگونه چوب‌کبریت‌ها را شمرده است.

□ الف)  $1 + 3n$

ب)  $pn + 1 = 4n - (n - 1)$  تحول تعداد مربع‌ها را در ۴ (تعداد اضلاع) ضرب کرده است و اضلاع مشترک بین مربع‌ها را کم کرده است.

پ) او تعداد اضلاع افقی ( $pn$ ) را با اضلاع عمودی ( $n + 1$ ) جمع کرده است.

۳۴- در دنباله‌ی شکلی زیر که با چوب‌کبریت می‌توان آن را نشان داد:



الف) تعداد مربع‌های  $1 \times 1$  شکل  $n$ م چندتا است؟

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل  $n$ م را بیابید.

□ الف)  $\frac{n(n+1)}{2}$  این همان دنباله‌ی اعداد مثلثی است.

❗ یکی از روش‌های شمارش در اینجا پیشنهاد شده است و ممکن است دانش‌آموزان با روشی ابتکاری و بهتر تعداد این پاره‌خط‌ها را بشمارد.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی برابر است. پس کافیه تعداد چوب‌کبریت‌های افقی را بشماریم و دوبرابر کنیم. تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را می‌نویسیم:

$$1+1, 2+2+1, 3+3+2+1, 4+4+3+2+1$$

$$1+1, 2+3, 3+6, 4+10$$

در نتیجه جمله‌ی  $n$ م برابرست با:  $n + \frac{n(n+1)}{2}$  که با دو برابر کردن آن تعداد کل چوب-

کبریت‌های به دست می‌آید:





$$2 \times \left( n + \frac{n(n+1)}{2} \right) = 2n + n(n+1) = 2n + n^2 + n = n^2 + 3n$$

## کاربرد رابطه‌های جبری

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۵۴]]

۳۵- در ادامه چند رابطه‌ی پرکاربرد فیزیکی آمده است. در هر مورد، متغیر خواسته شده را بیابید.

الف) قانون لنز<sup>۱</sup>

F: فاصله‌ی کانونی آینه

D<sub>o</sub>: فاصله‌ی جسم تا آینه

D<sub>i</sub>: فاصله‌ی تصویر تا آینه

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D_o} + \frac{1}{D_i}$$

$$D_o = 0.2, D_i = 1 \rightarrow f = ?$$

ب) ظرفیت یک خازن

$$C = \frac{k \times \epsilon_o \times A}{d}$$

$$k = 2, \epsilon_o = 8.85 \times 10^{-12}, A = 0.01, d = 1 \times 10^{-10} \rightarrow C = ?$$

پ) رابطه‌ی رادرفورد<sup>۲</sup> - بور<sup>۳</sup>

---

Lenz's law <sup>۱</sup>  
Ernest Raderford <sup>۲</sup>  
Niels Bohr <sup>۳</sup>



# ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

$$\frac{1}{\lambda} = R \times \left( \frac{1}{n_s^r} - \frac{1}{n^r} \right)$$

$$R = 1/0.9 \times 10^9, n = 2, n_s = 4 \rightarrow \lambda = ?$$

۳۶- با توجه به فرمول‌های ریاضی زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف) قضیه پیک<sup>۴</sup>: به دست آوردن مساحت یک شکل شبکه‌ای

I: تعداد نقاط درون شکل

B: تعداد نقاط مرزی

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

$$I = 21, B = 28 \rightarrow S = ?$$

ب) رابطه‌ی هرون<sup>۵</sup>

$$p = \frac{a+b+c}{2}, S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$a = 3, b = 4, c = 5 \rightarrow S = ?$$

Pick<sup>۴</sup>  
Heron<sup>۵</sup>



## ساده کردن عبارت‌های جبری

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۵۵]]

۳۷- در هر یک از عبارات، زیر جملات متشابه خط بکشید و سپس آن‌ها را ساده کنید.

( $\pi = 3/1415\dots$ )

الف)  $\pi a + 3a + \pi^2 a =$

ب)  $3a + \pi^2 a - 2a + 4\sqrt{2} \times a =$

پ)  $\sqrt{3}a^2b + \sqrt{2}ab^2 - \pi^2ab^2 - \sqrt{6}a^2b =$

ت)  $\sqrt{2}s^2b + \sqrt{8}b^2s - 2\sqrt{2}sb^2 - \sqrt{32}s^2b =$

ث)  $\sqrt{2}\sqrt{p}^2m + \pi^2pm^2 - \pi^2pm^2 - \sqrt{3}p^2m =$

□ الف)  $\pi a + 3a + \pi^2 a = (\pi + 3 + \pi^2) \times a$

ب)  $3a + \pi^2 a - 2a + 4\sqrt{2} \times a = (3 + \pi^2 - 2 + 4\sqrt{2}) \times a = (1 + \pi^2 + 4\sqrt{2}) \times a$

پ)  $\sqrt{3}a^2b + \sqrt{2}ab^2 - \pi^2ab^2 - \sqrt{6}a^2b = (\sqrt{3} + \sqrt{6})a^2b + (\sqrt{2} - \pi^2)ab^2$

ت)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}s^2b + \sqrt{8}b^2s - 2\sqrt{2}sb^2 - \sqrt{32}s^2b &= (\sqrt{2} - \sqrt{32})s^2b + (\sqrt{8} - 2\sqrt{2})sb^2 \\ &= (\sqrt{2} - 4\sqrt{2})s^2b + (\cancel{2\sqrt{2}} - \cancel{2\sqrt{2}})sb^2 = (\sqrt{2} - 4\sqrt{2})s^2b = -3\sqrt{2}s^2b \end{aligned}$$

ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



ث)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sqrt{p^2m} + \pi^3 pm^2 - \pi^2 pm^2 - \sqrt{3}p^2m &= (\sqrt{2}\sqrt{p^2m} - \sqrt{3}p^2m) + (\pi^3 - \pi^2)pm^2 \\ &= (\sqrt{2}\sqrt{p^2m} - \sqrt{3}p^2m) + (\pi^3 - \pi^2)pm^2 = (\sqrt{2}\sqrt{p^2m} - \sqrt{3}p^2m) + (\pi^3 - \pi^2)pm^2 \end{aligned}$$

❗ در مورد اینکه عبارتی مثل  $\pi' = \pi + 1$  یک عدد ساده شده است و دیگر از این ساده‌تر نمی‌شود دانش‌آموزان را توجیه کنید.

## توزیع‌پذیری ضرب روی جمع و تفریق

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۵۸]]

۳۸- پادشاه شهر الجبرا اعلام کرد که هر سال به مناسبت سالروز پادشاهیش، بار عامی برگزار می‌کند و به هر یک از مهمانان سکه‌ی طلا می‌دهد. نکته‌ی جالب آن است که اگر  $a$  پسر به دیدنش بروند به هر کدام  $a$  تا سکه‌ی طلا می‌دهد و اگر  $b$  دختر به دیدنش بروند به هر کدام  $b$  تا سکه‌ی طلا می‌دهد. که در این صورت در مجموع، دخترها و پسرها  $a^2 + b^2$  سکه‌ی طلا می‌گیرند. حال اگر  $a$  پسر و  $b$  دختر هم‌زمان به دیدن پادشاه بروند چند سکه‌ی طلا بیشتر از قبل می‌گیرند؟



# ریاضی طلایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



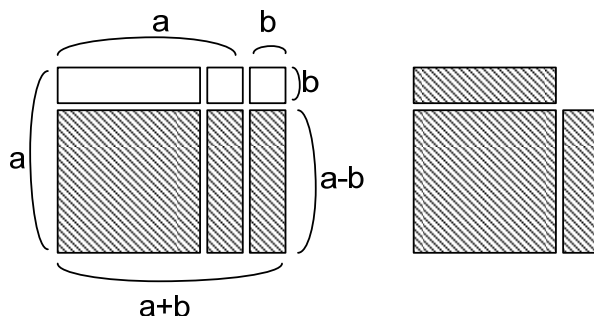
$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a(a+b) + b(a+b) \quad \square$$

پس دخترها هر کدام  $a$  سکه‌ی طلا بیشتر و پسرها هر کدام  $b$  سکه‌ی طلا بیشتر می‌گیرند.

✎ برای فهم بیشتر مسأله آن را با عددگذاری بررسی کنید.



۳۹- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف)  $(a+b)(a-b) =$

ب)  $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) =$

پ)  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{1388}(\sqrt{5} - \sqrt{2})^{1388} =$

ت)  $1999 \times 2001 =$

ث)  $6002 \times 5998 =$

♣ در این سؤال از لفظ اتحاد استفاده نکنید. اینجا فقط یک کاربرد برای عبارت‌های جبری بیان شده است و هدف حفظ کردن اتحاد نیست.



الف)  $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$

ب)  $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 7 - 3 = 4$

پ)  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{1388}(\sqrt{5} - \sqrt{2})^{1388} = ((\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}))^{1388} = (5 - 2)^{1388} = (3)^{1388}$

ت)  $1999 \times 2001 = (2000 - 1)(2000 + 1) = 2000^2 - 1^2 = 4000000 - 1 = 3999999$

ث)  $6002 \times 5998 = (6000 + 2)(6000 - 2) = 6000^2 - 2^2 = 36000000 - 4 = 35999996$



۴۰- عبارت  $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}$  را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت را در  $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{11}}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$  ضرب کنید. آیا عبارت ساده‌تر نشده است؟

ب) عبارت  $\frac{1}{\sqrt{2009}-\sqrt{1388}}$  را ساده کنید.

□

$$\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{12}+\sqrt{11}}{\sqrt{12}+\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{11}}{(\sqrt{12})^2 - (\sqrt{11})^2} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{11}}{12-11} = \sqrt{12}+\sqrt{11} \quad \text{الف)}$$

ب)

$$\frac{1}{\sqrt{2009}-\sqrt{1388}} \times \frac{\sqrt{2009}+\sqrt{1388}}{\sqrt{2009}+\sqrt{1388}} = \frac{\sqrt{2009}+\sqrt{1388}}{2009-1388} = \frac{1}{621} \times (\sqrt{2009}+\sqrt{1388})$$

## بازی جبدوز<sup>۶</sup>

۴۱- این بازی دارای دو جدول است. جدول کوچک پایین دربرگیرنده‌ی عبارات جبری ساده است و جدول بزرگ  $6 \times 6$  بالا دربرگیرنده‌ی عبارت‌های با  $x^3$  می‌باشد. در ابتدا دو مهره همسان (مثلاً دو عدد دکمه) در مرکز جدول کوچک قرار دارد. هرکس در نوبت بازی خود، یکی از مهره‌ها را به دلخواه برمی‌گزیند و بر روی یکی از عبارت‌های جدول کوچک قرار می‌دهد. با این حرکت او می‌تواند در جدول بزرگ، عبارتی را که از حاصل ضرب دو عبارت ساده‌ی مهره‌دار به دست می‌آید تصاحب کند و با X یا O به خود اختصاص دهد. هر کس که بتواند سه خانه‌ی متوالی (افقی - عمودی - مورب) را

<sup>۶</sup> جبر + دوز = جبدوز



به خود اختصاص دهد برنده است. دقت کنید که نفر اولی که مهره انتخاب می‌کند عبارت جبری درجه‌ی دویی را برای خود نمی‌کند و نفر دومی که مهره انتخاب می‌کند اولین عبارت جبری درجه‌ی دو را از جدول  $6 \times 6$  از آن خود می‌کند.

$x^2 + 2x + 1$	$x^2 + x - 2$	$x^2 - x - 6$	$x^2 - 9$	$x^2 - 1$	$x^2 - 3x + 2$
$x^2 + 6x + 8$	$x^2 + 7x + 12$	$x^2 + 3x + 2$	$x^2 + 2x - 3$	$x^2 - 2x - 8$	$x^2 - x - 12$
$x^2 - x - 2$	$x^2 - 4x + 3$	$x^2 - 4x + 4$	$x^2 - 6x + 9$	$x^2 + 4x + 3$	$x^2 + 3x - 4$
$x^2 + x - 6$	$x^2 + x - 12$	$x^2 - 2x - 3$	$x^2 - 5x + 4$	$x^2 - 5x + 6$	$x^2 - 7x + 12$
$x^2 + 5x + 4$	$x^2 + 4x + 4$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 + 8x + 16$	$x^2 - 2x - 4$	$x^2 - 4$
$x^2 - 6x + 8$	$x^2 - 16$	$x^2 - 2x + 1$	$x^2 + 5x + 6$	$x^2 + 6x + 9$	$x^2 - 8x + 16$
$x + 1$	$x - 3$	$x + 2$			
$x - 4$		$x + 4$			
$x - 2$	$x + 3$	$x - 1$			

ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم





## معادله

[[تدریس تا پایان صفحه‌ی ۶۲]]

۴۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{4(3x-6)+12}{5x^2-3x-1}=0$

ب)  $3x-2(x^2-3x+1)=(-2x+1)(x-5)$

پ)  $\frac{-(2x-3)(x^2-13)}{9-5x^2}=0$

ت)  $\frac{\frac{4x-8}{10}-\frac{20-x}{4}+\frac{x+\frac{1}{2}}{20}-\frac{1}{6}}{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-x+17}=\frac{0}{17}$

ث)  $x^2(x^2+8)=0$

ج)  $(2x-3y+5)^{20}+(3x-6)^{22}+(z-2y)^8=0$

چ)  $\frac{(x^2-8)^{20}(x^2-16)^{20}(x^2+125)^{20}((2x-6)^2+9)((2x+3)^2-(x+3)^2)(x^{11}-1)^{10}}{(x^{22}+27)^6(x^{10}+1)^{16}(x^2-625)(x^5-32)^8\left(\frac{x}{3}-84\right)^8}=0$

ح)  $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}$

خ)  $\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^2+x}$

د)  $5^{x+1}+5^{x-1}=130$

ذ)  $3^{x-2}=5^{6-3x}$

ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



$$ر) \sqrt{2^x \times 3^{y+1}} = 72$$

$$ز) 3^x \times 42 + 3^{x-1} \times 27 = 459$$

‡ در این سؤال، فقط انواع معادله بررسی شده است. خودتان به حل مثال‌های متنوع بپردازید. دانش‌آموزان را به استفاده از نرم‌افزار Microsoft Math برای حل معادلات ترغیب کنید. در این نرم‌افزار با استفاده از دستور solve معادلات حل می‌شوند. مثلاً برای حل معادله‌ی  $2x + 3 = 7$  باید دستور  $solve(2x + 3 = 7, x)$  را وارد کنیم.

## روش حدس و خطا

۴۳- می‌خواهیم معادله‌ی  $x^2 - 10x + 9 = 0$  را حل کنیم. اما با توجه به اینکه این معادله درجه‌ی دو می‌باشد، اندکی دچار مشکل می‌شویم. یکی از روش‌های حل این گونه معادلات روش حدس و خطاست. در این روش ابتدا جوابی را حدس می‌زنیم و در معادله آن را بررسی می‌کنیم. مثلاً  $x = 5$ .

$$x = 5 \rightarrow 5^2 - 10 \times 5 + 9 = -16 < 0$$

مقدار عبارت سمت چپ باید صفر باشد اما کمتر از آن شده است. بنابراین این بار عددی بزرگ‌تر از ۵ را امتحان می‌کنیم. مثلاً  $x = 10$ .

$$x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 \times 10 + 9 = 9 > 0$$

این بار مقدار عبارت سمت چپ از صفر بیشتر شد، پس عددی بین ۵ و ۱۰ را امتحان می‌کنیم.  $x = 8$ .

$$x = 8 \rightarrow 8^2 - 10 \times 8 + 9 = -7 < 0$$



این بار مقدار عبارت سمت چپ از صفر کمتر شد، پس عددی بین ۸ و ۱۰ را امتحان می‌کنیم.  $x = 9$ .

$$x = 9 \rightarrow 9^2 - 10 \times 9 + 9 = 0 = 0$$

پس نتیجه می‌شود که  $x = 9$  جواب این معادله می‌باشد.

البته این روش برای حل انواع معادله، روش بدی نیست. اما دقت داشته باشید که همواره پاسخگو نیست. مثلاً وقتی که جواب معادله عددی گویا باشد. نکته‌ی دیگر اینکه این روش ساده است اما وقت‌گیر می‌باشد. با استفاده از این روش معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 - 7x - 30 = 0$

ب)  $x^2 + 7x - 24 = 0$

پ)  $x^2 - 10x - 24 = 0$

ت)  $x^3 - 6x + 9 = 0$

ث)  $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$



## مغالطه‌های جبری

۴۴- ارسال ثابت می‌کند که ۱ برابر ۲ است. اثبات او را بخوانید:

قبول داریم که  $۴-۶=۱-۳$  و اگر دو طرف این تساوی را در ۱- ضرب کنیم، به-  
دست می‌آید که:  $۴-۶=۱-۳$  . به دو طرف تساوی می‌توان یک مقدار مساوی اضافه  
کرد:

$$۱-۳+\frac{۹}{۴}=۴-۶+\frac{۹}{۴}$$

هر دو طرف تساوی را می‌توان (با توجه به اینکه  $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ) به صورت  
زیر نوشت:

$$۱-۳+\frac{۹}{۴}=۴-۶+\frac{۹}{۴}$$

$$۱^2 - 2(1)(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2 = ۲^2 - 2(۲)(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2$$

$$(1 - \frac{3}{2})^2 = (۲ - \frac{3}{2})^2$$

و اگر از دو طرف جذر بگیریم، داریم:

$$(1 - \frac{3}{2}) = (۲ - \frac{3}{2})$$

حالا به دو طرف تساوی عدد را اضافه می‌کنیم، و خواهیم داشت  $۱=۲$ .

اشتباه اثبات ارسال را بباید.



این استدلال مثل آن است که بگوییم:

ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



اسب حیوان است. گاو حیوان است. پس اسب و گاو یکی هستند.

در مورد این مسأله نیز به همین ترتیب است:

مربع عددهای مساوی، مساوی‌اند. مربع دو عدد مفروض مساوی شده است. پس دو عدد مساوی‌اند و می‌دانیم که مربع یک عدد منفی می‌تواند مساوی یک عدد مثبت شود.

$$2^2 = (-2)^2$$

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \left(1 - \frac{3}{2}\right) \neq \left(2 - \frac{3}{2}\right)$$

۴۵- اردلان برادر ارسلان اثبات جالبی انجام داده است:

معادله‌ی  $x^2 - 1 = 2x$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم که اگر یک مقدار مساوی را در دو طرف یک معادله ضرب کنیم، حاصل ضرب‌های مساوی به‌دست می‌آید. دو طرف این تساوی را در  $x - 5$  ضرب می‌کنیم و داریم:

$$x^2 - 6x + 5 = 2x - 1 \circ$$

حالا از دو طرف تساوی مقدار  $x - 7$  را کم می‌کنیم:

$$x^2 - 7x + 12 = x - 3$$

و چون  $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$  پس می‌توان نوشت:

$$(x - 3)(x - 4) = (x - 3)$$

و با تقسیم دو طرف معادله بر  $(x - 3)$  به این نتیجه می‌رسیم که:

$$(x - 4) = 1 \rightarrow x = 5$$

پس جواب معادله  $x = 5$  است.



زیرا جواب معادله  $x - 1 = 2$ ،  $x = 5$  نیست.

به نظر شما اشتباه اردلان چیست؟

□ سرچشمه‌ی اشتباه در اینجا است که در مورد اصل ضرب یا تقسیم دو طرف تساوی، نباید عددی که در دو طرف ضرب می‌شود یا دو طرف بر آن تقسیم می‌شود مساوی صفر باشد و ما، بدون در نظر گرفتن این نکته، دو طرف را در  $(x - 3)$  ضرب یا بر آن تقسیم کرده‌ایم. ما در مسأله منتظر جواب  $x = 3$  هستیم و با تقسیم دو طرف تساوی بر  $(x - 3)$  این جواب را از معادله حذف کرده‌ایم.

۴۶- ارمغان خواهر اردلان و ارسلان اثبات می‌کند که هر عدد با نصف خودش مساویست!

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+a)(a-a) = a^2 - a^2$$

$$(a+a)(a-a) = a(a-a)$$

حال دو طرف تساوی را بر  $(a-a)$  تقسیم می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$(a+a) = a \rightarrow 2a = a \rightarrow a = \frac{a}{2}$$

اشتباه اثبات ارمغان از چه نوعی است؟ اردلانی یا ارسلانی؟

□ این همان اشتباه اردلان است. نمی‌توان دو طرف تساوی را بر صفر  $(a-a)$  تقسیم کرد.



۴۷- اردشیر می‌گوید که به اندازه‌ی انیشتین باهوش است و این موضوع را به صورت زیر ثابت کرده است:

فرض کنید  $M$  مقدار هوش من و  $N$  مقدار هوش انیشتین باشد. متوسط این دو عدد می‌شود  $A = \frac{M+N}{2}$  و این یعنی اینکه  $2A = M + N$ . حالا در دو طرف این عبارت مقدار  $M - N$  را ضرب می‌کنیم:

$$(M - N)(M + N) = 2A(M - N)$$

$$M^2 - N^2 = 2AM - 2AN$$

$$M^2 - 2AM = N^2 - 2AN$$

حالا به دو طرف عبارت  $A^2$  را اضافه می‌کنیم:

$$M^2 - 2AM + A^2 = N^2 - 2AN + A^2$$

$$(M - A)^2 = (N - A)^2$$

و از دو طرف جذر می‌گیریم:

$$(M - A) = (N - A)$$

$$M = N$$

پس من و انیشتین به یک میزان باهوشیم.

اشتباه اردشیر از چیست و از چه نوعی است؟ اردلانی یا ارسلائی؟

□ این همان اشتباه ارسلائی است. تساوی مجذور دو عدد، دلیلی برای تساوی آن دو عدد نیست.



## کاربرد معادله

[[تدریس تا پایان صفحه ی ۶۵]]

۴۸- تاجری مبلغی پول داشت، در سال اول صد میلیون خرج کرد و یک سوم آنچه که  
برایش باقیمانده بود به پولش اضافه شد. در سال بعد دوباره صد میلیون خرج کرد و  
یک سوم باقیمانده ی پولش به آنچه داشت اضافه شد. در سال سوم باز هم صد میلیون  
خرج کرد و بعد وقتی یک سوم دارایی حال حاضرش را به پولی که داشت اضافه کرد  
دید که دو برابر سرمایه ی اولیه اش پول دارد. سرمایه ی اولیه ی این تاجر چقدر است؟

□ ابتدا مسأله را به زبان جبر یعنی معادله ترجمه می کنیم:

$x$	تاجری مبلغی پول داشت
$x - ۱۰۰$	در سال اول صد میلیون خرج کرد
$(x - ۱۰۰) + \frac{(x - ۱۰۰)}{۳} = \frac{۴x - ۴۰۰}{۳}$	یک سوم آنچه که برایش باقی مانده بود به پولش اضافه شد.
$\frac{۴x - ۴۰۰}{۳} - ۱۰۰ = \frac{۴x - ۷۰۰}{۳}$	در سال بعد دوباره صد میلیون خرج کرد
$\frac{۴x - ۷۰۰}{۳} + \frac{۴x - ۷۰۰}{۹} = \frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹}$	یک سوم باقی مانده ی پولش به آنچه داشت اضافه شد.
$\frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹} - ۱۰۰ = \frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹}$	در سال سوم باز هم صد میلیون خرج کرد
$\frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹} + \frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۲۷} = \frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷}$	بعد وقتی یک سوم دارایی حال حاضرش را به پولی که داشت اضافه کرد
$\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷} = ۲x$	دید که دو برابر سرمایه ی اولیه اش پول دارد

حالا معادله ی  $\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷} = ۲x$  را حل می کنیم و به جواب  $x = ۱۴۸۰$  می رسیم.

ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی معلم





۴۹- درباره‌ی شرح حال «دیوفانت» ریاضی‌دان مشهور باستان، اطلاعات خیلی کمی داریم. همه آنچه درباره‌ی او می‌دانیم از نوشته‌ای بر روی کتیبه‌ی مقبره‌اش به‌دست آمده است: رهگذر! در اینجا دیوفانت خوابیده است.



زندگی پرماجرایی او به این ترتیب است. یک‌ششم عمرش دوران خوش زندگی کودکی او بود. یک‌دوازدهم دیگر عمرش هم در وضعی گذشت که در حال تحصیل علوم ابتدایی بود. یک‌هفتم عمر دیوفانت در زندگی زناشویی ولی بدون بچه گذشت.

ریاضی طلایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



بعد از ۵ سال با تولد اولین پسر زیبایش، خوشبختی به او رو کرد. ولی تقدیر چنین بود که فقط نیمی از عمرش پدرش را خوشبخت و روشن کند. بالاخره در چهارسال آخر عمرش با اندوه عمیقی زندگی کرد، زیرا که پسرش را از دست داده بود. حالا بگویید وقتی که مرگ زندگی دیوفانت را درهم نوردید، چند سال داشت؟

□ ابتدا مسأله را به زبان جبر یعنی معادله ترجمه می‌کنیم:

$x$	رهگذر! در اینجا دیوفانت خوابیده است. زندگی پرماجرای او به این ترتیب است.
$\frac{x}{6}$	یک‌ششم عمرش دوران خوش زندگی کودکی او بود.
$\frac{x}{12}$	یک‌دوازدهم دیگر عمرش هم در وضعی گذشت که در حال تحصیل علوم ابتدایی بود.
$\frac{x}{7}$	یک‌هفتم عمر دیوفانت در زندگی زناشویی ولی بدون بچه گذشت.
۵	بعد از ۵ سال با تولد اولین پسر زیبایش، خوشبختی به او رو کرد.
$\frac{x}{2}$	ولی تقدیر چنین بود که فقط نیمی از عمرش پدرش را خوشبخت و روشن کند.
$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$	بالاخره در چهارسال آخر عمرش با اندوه عمیقی زندگی کرد، زیرا که پسرش را از دست داده بود.



حالا کافیت معادله‌ی  $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$  را حل کنیم که به جواب  $x = 84$  می‌رسیم که یعنی دیوفانت ۸۴ سال زندگی کرد. در ۲۱ سالگی ازدواج و در ۳۸ سالگی پدر شد و در ۸۰ سالگی پسرش را از دست داد.

۵۰- چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر به ترتیب یک سوم، یک هشتم، یک چهارم و یک پنجم تعداد کل آن‌ها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب داشته باشد و یک سیب هم برای نفر ششم باقی بماند؟

□ مسأله را به زبان جبر ترجمه و سپس حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 10 + 1 = x$$

$$\frac{40x + 15x + 30x + 24x + 1320}{120} = x$$

$$109x + 1320 = 120x \rightarrow 11x = 1320 \rightarrow x = 120$$

۵۱- چهار شریک به نام‌های رها، راحله، الهه، الهام روی هم ۴۵ میلیون پول داشتند. اگر به پول رها ۲ میلیون اضافه کنیم، از پول راحله ۲ میلیون کم کنیم، پول الهه را دو برابر و پول الهام را نصف کنیم، پول هر چهار نفر مساوی می‌شود. هر کدام چقدر پول به اشتراک گذاشته‌اند.



□ ابتدا مسأله را به زبان جبر یعنی معادله ترجمه می‌کنیم. فقط این بار مسأله را از آخر به اول حل می‌کنیم. در انتهای مسأله آمده است که پول هر چهار نفر مساوی می‌شود. این مقدار را  $x$  در نظر می‌گیریم. در مسأله می‌خوانیم که اگر به پول رها ۲ میلیون اضافه کنیم، از پول راحله ۲ میلیون کم کنیم، پول الهه را دو برابر و پول الهام را نصف کنیم، پول هر چهار نفر مساوی مقدار  $x$  می‌شود. پس پول هر نفر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{الهه: } \frac{x}{2}, \quad \text{راحله: } x + 2, \quad \text{رها: } x - 2, \quad \text{الهام: } 2x$$

و جمع پول آن‌ها ۴۵ میلیون می‌باشد.

$$2x + \frac{x}{2} + x - 2 + x + 2 = 45$$

$$\frac{4x + x + 2x + 2x}{2} = 45$$

$$9x = 90 \rightarrow x = 10$$

۵۲- سه شکارچی، چند روز متوالی را در جنگل برای شکار گذراندند. صبح روز آخر، حادثه‌ی ناگواری پیش آمد. وقتی که آن‌ها پیاده از جوی آب می‌گذشتند، دو شکارچی در آب افتادند و فشنگ‌دان‌هایشان خیس شد و مقداری از فشنگ‌هایشان بی‌مصرف شد. سه دوست، فشنگ‌هایی را که برایشان باقی مانده بود، به طور مساوی بین خودشان تقسیم کردند. بعد از آن، هر یک از شکارچی‌ها ۴ تیر در کردند و برای همه‌ی آن‌ها روی هم همان قدر فشنگ باقی‌ماند که هر یک، بعد از تقسیم فشنگ‌ها داشتند. در موقع تقسیم، روی هم چقدر فشنگ داشتند.



□ مقدار تیرهای هر کدام از شکارچی‌ها را پس از تقسیم  $x$  قرار می‌دهیم و معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$3x - 3 \times 4 = x$$

$$2x = 12 \rightarrow x = 6 \rightarrow 3x = 18$$

پس روی هم ۱۸ فشنگ داشته‌اند.

۵۳- به مکالمه‌ی زیر بین «دکتر کاظم» و «حسین» توجه کنید و فاصله‌ی بین خانه آن‌ها را محاسبه کنید.

دکتر کاظم به یکی از آشنایانش به نام حسین گفت: فردا پیش من بیا!

- از شما متشکرم. من ساعت ۳ از منزل خارج می‌شود، ولی اگر شما تصمیم به گردش داشته باشید، می‌توانید در همین ساعت از منزل حرکت کنید تا در نیمه‌ی راه به هم برسیم و ادامه مسیر را با هم باشیم.
- ولی فراموش نکنید که سن من زیاد است و ساعتی بیش از ۳ کیلومتر نمی‌توانم راه بروم. ولی شما جوانید و اگر با قدم‌های آهسته هم راه بروید در هر ساعت ۴ کیلومتر می‌شود. عیبی ندارد اگر به هم کمی تخفیف بدهید ممنون می‌شوم.
- حق با شماست! چون من ساعتی یک کیلومتر بیشتر از شما راه می‌روم، این یک کیلومتر را به شما می‌دهم یعنی یک ربع زودتر از شما حرکت می‌کنم، به نظر شما کافی است؟

دکتر موافقت کرد و گفت: از محبت شما متشکرم. حسین همین کار را کرد. او یک ربع به ۳ از منزل خارج شد و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت به راه افتاد و دکتر هم



درست ساعت ۳ از منزلش خارج شد و با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت به راه افتاد. وقتی به هم رسیدند، پیرمرد (دکتر کاظم) برگشت و با مرد جوان به طرف منزل خود قدم زدند. مرد جوان (حسین) وقتی به منزل خود بازگشت، پیش خود حساب کرد و دید که به خاطر تخفیف یک ربع ساعت، در مجموع درست چهار برابر دکتر راه رفته است.

□ فاصله‌ی بین دو منزل را  $x$  کیلومتر فرض می‌کنیم.

مرد جوان روی هم  $2x$  کیلومتر و دکتر یک‌چهارم او یعنی  $\frac{x}{4}$  راه رفته است. به این ترتیب در لحظه‌ی ملاقات، دکتر نصف این مقدار یعنی  $\frac{x}{8}$  و مرد جوان بقیه‌ی آن یعنی  $\frac{3x}{8}$  طی کرده بوده است. با توجه به اینکه سرعت دکتر در هر ساعت ۳ کیلومتر و سرعت مرد جوان ۴ کیلومتر در ساعت است، بنابراین وقتی که به هم رسیدند، دکتر  $\frac{x}{12}$  و مرد جوان  $\frac{3x}{16}$  ساعت در راه بوده است. از طرف دیگر می‌دانیم که مرد جوان یک ربع ساعت زودتر به راه افتاده بود و بنابراین معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 2/4 Km$$

۵۴- در کتیبه‌هایی که از قومی مربوط به قرون ابتدایی به‌دست آمده است نوشته شده بود:

$71 = 8 \times 8$ ، به نظر شما این قوم بدوی، مقدار  $8 \times 5$  را چه عددی می‌دانسته‌اند؟

♣ قبل از حل این سؤال، دستگاه‌های شمار سال دوم راهنمایی را یادآوری کنید.

□ واضح است که این ضرب در مبنای شمارشی غیر از ده انجام شده است:



$$8 \times 8 = (71)_x \rightarrow 64 = 7x + 1 \rightarrow x = 9$$

پس این ضرب در مبنای ۹ می‌باشد و مقدار  $8 \times 5$  در مبنای ۹ برابرست با:

$$8 \times 5 = (y)_9 \rightarrow 40 = (y)_9 \rightarrow y = 44$$

۵۵- در یک مسابقه‌ی تلویزیونی، مجری به شرکت کننده‌ای که به مرحله‌ی کشف رمز

گاوصندوق حاوی صد میلیون تومان رسیده بود راهنمایی به صورت زیر کرد:

رمز سه رقمی این گاوصندوق دارای خصوصیات زیر است:

رقم دهگان آن مساوی ۷، رقم صدگان آن ۴ واحد کمتر از یکان آن است و اگر ارقام

عدد را به ترتیب عکس بنویسیم، عدد حاصل ۳۹۶ واحد از عدد مجهول بزرگ‌تر می‌شود.

آیا مجری با شرکت کننده فامیل بوده است؟!؟

□ رقم یکان را  $x$  فرض می‌کنیم و معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$100x + 70 + x - 4 - (100(x - 4) + 70 + x) = 396$$

این معادله پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید:

$$396 = 396$$

مسلماً دانش آموزان متوجه می‌شوند که چرا به این نتیجه رسیدیم: هر عدد سه رقمی که در آن

رقم صدگان ۴ واحد کمتر از رقم یکان باشد، با تغییر ارقام به اندازه‌ی ۳۹۶ واحد بزرگ‌تر

می‌شود و رقم دهگان هیچ گونه دخالتی در این امر ندارد.



## ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم

۵۶- مرد بیکاری به نام «حسن کچل» این طرف آن طرف می‌رفت و بدون این که به فکر کار و تلاش باشد، دائماً از بی‌پولی خود گِله می‌کرد. به هر کس می‌رسید، درد دلش باز می‌شد و از این که نمی‌تواند پول‌دار شود و زندگی راحتی داشته باشد، آه و ناله می‌کرد. کلاه‌برداری تصمیم گرفت از طمع حسن استفاده کند. پیش او آمد و از موجودیش پرسید. وقتی که از موجودی حسن بیکاره آگاه شد، به او گفت:

- من راه‌حل ساده و خوبی برای پول‌دار شدن تو دارم.
- چطور؟
- در خارج این شهر پلی بر روی رودخانه است، تو هر بار که از پل عبور کنی، من پولت را دو برابر خواهم کرد.
- تو چرا پولت را مجانی به من می‌دهی؟
- من بابت این کار از تو دستمزدی خواهم گرفت.
- چقدر؟
- هر بار که پول تو را دو برابر کردم، ۲۴ هزار تومان بابت دستمزد به من پرداخت می‌کنی.
- همین!
- بله. همین!

بعد از قول و قرار، به بیرون شهر رفتند، حسن کچل بیکار طمع کار از پل گذشت و مرد حيله گر خبیث حقه‌باز پول او را دو برابر کرد و بعد ۲۴ هزار تومان دستمزد از او گرفت. حسن دوباره از پل گذشت و باز هم پولش دو برابر شد و مبلغ دستمزد را پرداخت. برای سومین بار عمل تکرار شد، ولی وقتی که این بار حسن بعد دو برابر شدن پولش





دستمزد کلاه‌بردار را پرداخت، دیگر چیزی برایش نمانده بود که برای دوبرابر کردن آن از پل عبور کند. طمع حسن کچل، تمام پولش را بر باد داده بود. موجودی حسن در ابتدا چقدر بوده است؟



‡ کافیت مسأله را از آخر به اول حل کنید.

□ ۲۱ هزار تومان

ریاضی - طلایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



## شعبده بازی های عددی

۵۷- بسیاری از حیل‌های ساده با اعداد، که در آن‌ها باید عدد انتخاب شده‌ای را حدس زد، دارای دلایلی هستند که با کمک جبر می‌توان به آن‌ها پی برد. به نمونه‌ی زیر دقت کنید:

شعبده بازی از یکی از حاضرین خواست که یک عدد دورقمی در نظر بگیرد. سپس از وی خواست که دهم دهگان را در ۵ ضرب و با ۷ جمع کند، حاصل را دوبار کند و رقم یکان عدد اصلی را به آن اضافه، نتیجه‌ی نهایی را اعلام نماید. شعبده باز از عدد حاصل ۱۴ واحد کم می‌کند و عدد اصلی را به دست می‌آورد. فرض کنید عدد اولیه ۲۶ باشد:

$$(۱) A = ۲۶ \rightarrow ۲ \times ۵ + ۷ = ۱۷ \rightarrow ۱۷ \times ۲ + ۶ = \boxed{۴۰}$$

$$(۲) ۴۰ - ۱۴ = ۲۶ = A$$

به نظر شما این شعبده باز چرا عدد ۱۴ را کم می‌کند؟

□ مسأله را بدین صورت حل می‌کنیم:

$$(۱) A = \overline{xy} \rightarrow x \times ۵ + ۷ = ۵x + ۷ \rightarrow (۵x + ۷) \times ۲ + y = \boxed{۱۰x + ۱۴ + y}$$

$$(۲) ۱۰x + ۱۴ + y - ۱۴ = ۱۰x + y = \overline{xy} = A$$

۵۸- از شخصی خواسته می‌شود که یک عدد سه رقمی در نظر بگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود رقم صدگان را در ۲ ضرب و با ۳ جمع کند، حاصل را در ۵ ضرب و سپس با ۷ جمع کند، رقم دهگان را به آن بیفزاید، حاصل را در ۲ ضرب و با ۳ جمع کند، این



حاصل جمع را در ۵ ضرب کند و رقم یکان را به آن بیفزاید، و نتیجه را اعلام کند. از این نتیجه چه عددی را کم کنیم تا عدد اصلی به دست آید؟ چرا؟

□

$$\begin{aligned} (i) \quad A = \overline{xyz} &\rightarrow x \times 2 + 3 = 2x + 3 \rightarrow (2x + 3) \times 5 + 7 + y = 10x + 22 + y \\ &\rightarrow (10x + 22 + y) \times 2 + 3 = 20x + 47 + 2y \\ &\rightarrow (20x + 47 + 2y) \times 5 + z = 100x + 10y + z + 235 \\ (ii) \quad 100x + 10y + z + 235 - \boxed{235} &= 100x + 10y + z = \overline{xyz} = A \end{aligned}$$

۵۹- از شخصی خواسته می شود که یک عدد سه رقمی که صدگان و یکان آن متفاوتند در نظر بگیرد. سپس از وی خواسته می شود که تفاضل این عدد و عددی که با عکس ترتیب سه رقم عدد به دست می آید، بیابد. تنها با معلوم شدن آخرین رقم این تفاضل، شخص تر دست تمام تفاضل را اعلام می کند. او چگونه این کار را انجام می دهد. مثلاً شخص عدد ۲۳۵ را انتخاب کرده است:

$$A = 235 \rightarrow 532 - 235 = 297$$

تر دست با دانستن رقم یکان (۷) اعداد ۲ و ۹ را نیز می گوید.

□ رقم دهگان همواره ۹ و رقم یکان و صدگان مجموعشان ۹ می باشد. اما این موضوع را این گونه اثبات می کنیم:

$$\begin{aligned} A = \overline{xyz} &\rightarrow \overline{xyz} - \overline{zyx} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) \\ &= 99x - 99z = 99(x - z) \end{aligned}$$

پس تفاضل بر ۹ و ۱۱ بخش پذیر است:

ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی معلم



$$A = \overline{xyz} \rightarrow \overline{xyz} - \overline{zyx} = 99(x - z) = \overline{abc}$$

$$\left. \begin{array}{l} 9 : a + b + c = 18 \\ 11 : a + c = b \end{array} \right\} \rightarrow 2b = 18 \rightarrow b = 9 \rightarrow a + c = 9$$

‡ دیدن اثبات برای همه‌ی دانش‌آموزان الزامی نیست.

۶۰- امیرعلی به غلام‌علی گفت:

- نمی‌خواهی بگویی چند سال داری؟
- نه، نمی‌گویم.
- بسیار خب! به من بگو که اگر از ۱۰ برابر سن تو، ۹ برابر رقمی دلخواه را کم کنیم چه عددی به دست می‌آید؟
- ۱۴۳!
- پس تو ۱۷ ساله هستی!
- چطور فهمیدی؟
- کافیت یکان عددی را که به من گفتی با بقیه‌ی عدد جمع کنم:  $14 + 3 = 17$

علت درستی این روش را بیان کنید.

□

$$(i) A = \overline{xy} \rightarrow 10\overline{xy} - 9z = 10(10x + y) - 9z = 100x + 10y - 9z$$

و مجموع ارقام  $10y$  و  $10y - 9z$  یکی است. بنابراین مجموع یکان و دو رقم باقی‌مانده همان عدد اصلی است.

ریاضی پایه‌داران - سوم راهنمایی - نسخه‌ی معلم



این که مجموع ارقام ۱۰۷ و ۹۷-۱۰۷ یکی است می تواند برای دانش آموزان علاقه مند موضوعی برای اثبات باشد.

## رمزگشایی!!!

در هر یک از موارد زیر هر حرف جایگزین یک رقم شده و حرف های متفاوت بیانگر ارقام متفاوتند. به متخصصین رمزگشایی کمک کنید و در هر مورد مشخص کنید هر حرف جایگزین چه رقمی شده است.

-۶۱

$$\begin{array}{r} AB \\ + CDE \\ \hline FGHI \end{array}$$

-۶۲

$$\begin{array}{r} CD \\ \times CD \\ \hline ABCD \end{array}$$

-۶۳

$$\sqrt{ATOM} = A + TO + M$$

-۶۴

$$\begin{array}{r} FIVE \\ +FOUR \\ \hline NINE \end{array}$$

ریاضی پایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی معلم