

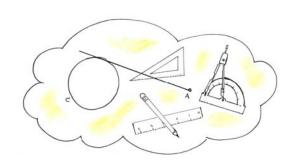
◄ فصل سوم

ightharpoonup زاویه و دایره

◄ ◄ رابطهى فيثاغورس

 \triangleright دوران

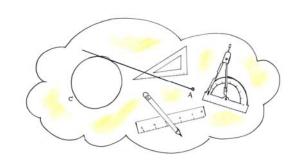




فهرست

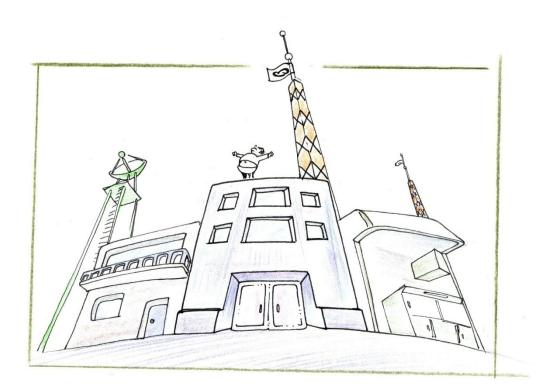
زاویه و دایره

٣	مکانهای هندسی
۶	ترسیمهای هندسی
17	زاویه در دایره
18	مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره
	رابطهى فيثاغورس
71	قضیهی فیثاغورس
۲۸	كاربردهاي قضيهي فيثاغورس
	دوران
٣۶	تركيب دورانها

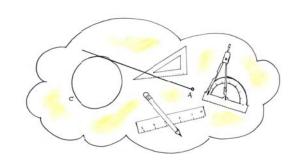


مكانهاى هندسي

۱- دو شرکت مخابراتی درکاری مشترک میخواهند شهری را تحت پوشش خطوط تلفن همراه قرار دهند.

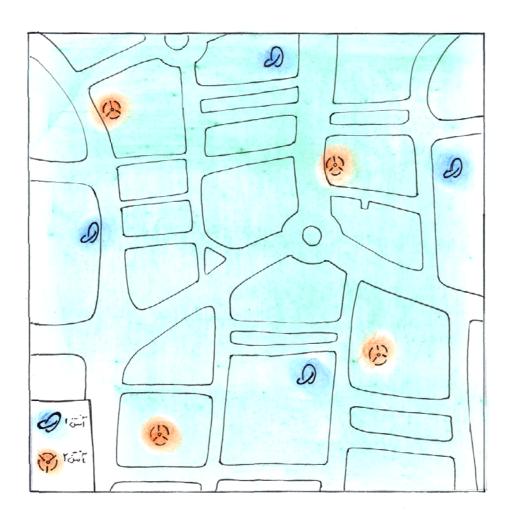


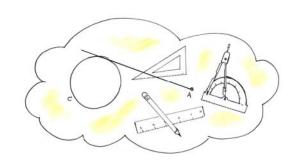
شعاع پوشش تلفنی هر آنتن شرکت ایرانسل ۵۰ متر و شعاع پوشش تلفنی هر آنتن شرکت همراه اول ۶۰ متر میباشد. نقشه ی شهر که مشاهده میکنید با مقیاس $\frac{1}{1 \circ 0}$ میباشد.



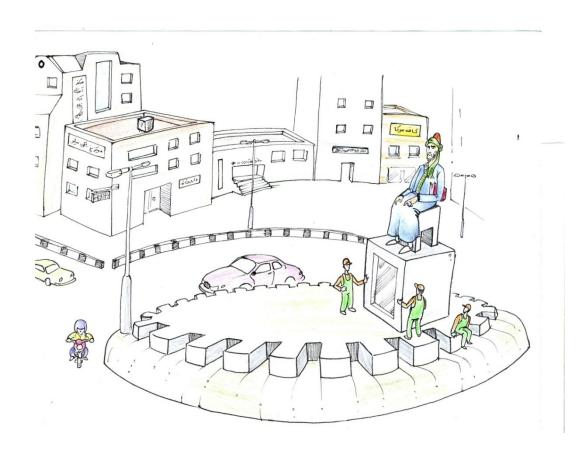
الف) آیا این دو شرکت با این چیدمان آنتنها موفق به پوشش کل شهر شدهاند یا اینکه هنوز نقاط کوری وجود دارد؟

ب) آیا راه بهتری برای پوشش این شهر وجود دارد تا آنتنهای کمتری مصرف شود؟ تعداد آنتنهای دو شرکت باید مساوی باشد.

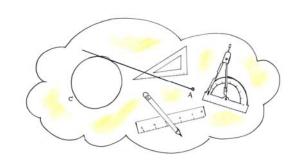




- ۲- میدانیم که از یک نقطه می توان بی شمار دایره گذراند. حال اگر دو نقطه داشته باشیم،
 چند دایره می توان رسم کرد که از این دو نقطه بگذرند؟ چگونه و چرا؟
- ۳- شهرداری شهر «عرفا» میخواهد مجسمه ی حافظ را دقیقاً در مرکز میدان «شعرا» بسازد. مشکل اصلی در این پروژه ی عمرانی این است که میدان ساخته شده است، اما اکنون مرکز آن مشخص نیست. حالا به شهردار کمک کنید تا مرکز میدان را بیابد.

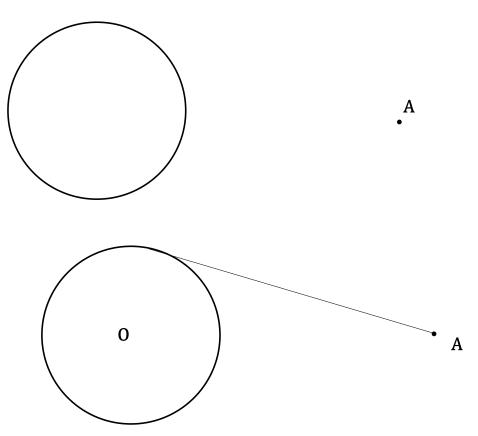


۴- از سه نقطهی دلخواه، چند دایره می توان گذراند.

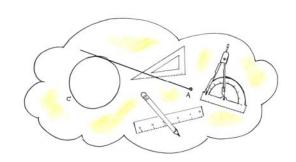


ترسیمهای هندسی

C ساره می خواهد از نقطه ی A بر دایره ی C مماسی رسم کند. او ابتدا خط کش خود را در کنار نقطه ی A قرار داد و آن را آنقدر جابجا کرد تا خط مماس را بیابد!

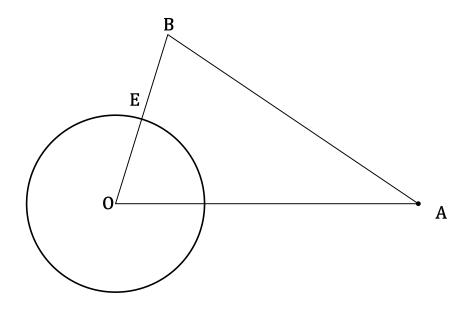


به نظر شما روش او دقیق است؟



۶- الف) سامان برادر ساره، روش دیگری برای رسم مماس ارائه می کند:

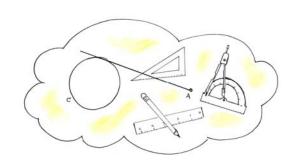
او ابتدا مثلث متساویالساقینی به ساق OA و قاعده ی دو برابر شعاع دایره رسم می کند.



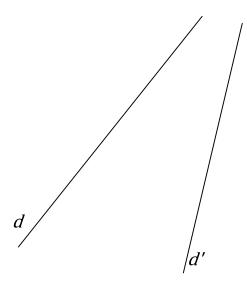
سپس محل برخورد OB با دایره را E نامیده و ادعا می کند AE مماس بر دایره است. آیا روش رسم مماس که سامان ارائه کرده، درست است؟ چرا؟

ب) دقت كدام روش بيشتر است: روش ساره يا روش سامان؟

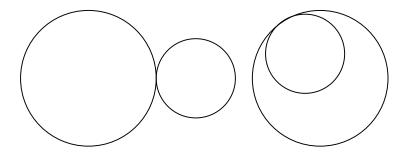
C از نقطه ی A دایره ای مماس بر دایره ی C به مرکز C و شعاع C، رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید. یادتان باشد که در ترسیمهای هندسی، تنها استفاده از پرگار و خطکش غیرمدرج (خطکشی که فقط خط می کشد) مجاز است.



۸- دایرهای به شعاع دو سانتی متر چنان رسم کنید که بر هر دو خط زیر مماس باشد. روش
 کار خود را توضیح دهید.

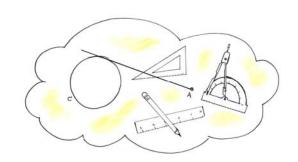


۹- الف) دو دایره ی با را (صرف نظر از اندازه ی آنها) تنها به دو روش می توان بر هم مماس کرد، به گونه ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند.



سه دایرهی متمایز را به چند طریق می توان بر هم مماس کرد، به گونهای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند و نقاط تماس آنها نیز متمایز باشد.

ب) چهار دایرهی متمایز چطور؟



دوایر اشمیتهابر ^۱

۱۰-آنچه می بینید، مجموعهای فوق العاده از دوایر اشمیت هابر می باشد. این شکل را رسم کنید.

برای خلق این الگو، ابتدا یک دایره به شعاع دلخواه رسم کنید. سپس دایرهی دیگری به مرکز نقطه ای روی محیط دایرهی اولیه به شعاع دایرهی اول رسم کنید. به این دو دایره «دوایر قانونی کنید. و کنید.

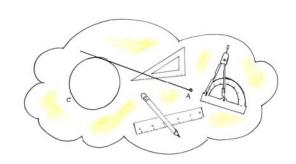
قانون ۱: اگر دو دایره ی قانونی هم شعاع بر یکدیگر مماس شدند یا یکدیگر را قطع کردند یک دایره قانونی دیگر همشعاع با دوایر قانونی به مرکز نقطه ی تماس یا تقاطع آن ها رسم کنید.

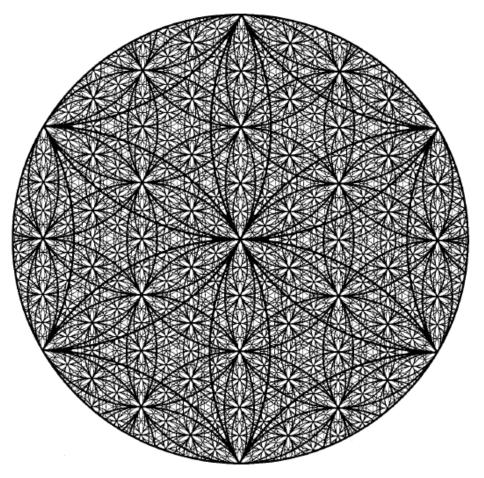
قانون ۲: درون هر دایره ی قانونی به مرکز P و شعاع r یک دایره ی قانونی دیگر به مرکز P اما به شعاع $\frac{r}{r}$ رسم کنید.

در نهایت کمانهایی که از دایرهی اولیه بیرون رفتهاند را یاک کنید.

Schmidhuber circles

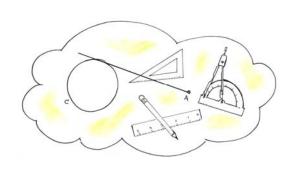
legal circles '





(www.idsia.ch/~juergen/)

۱۱-مطلبی با عنوان تثلیث زاویه بر روی وبگاه سمپاد دربارهی ترسیمهای هندسی وجود دارد که دانش آموزان علاقهمند می توانند به آن مراجعه کنند.



۱۲-دو سکه هر کدام به شعاع ۲سانتی متر داریم. یکی زرد و یک قرمز. سکه ی قرمز ثابت است ولی سکه ی زرد مماس بر سکه ی قرمز دور آن می چرخد. اگر سکه ی زرد یک دور کامل دور سکه ی قرمز بزند، چند بار دور خودش چرخیده است؟

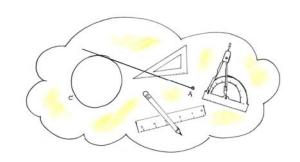
به نظر شما كدام يك جواب صحيح مسئله مي باشد؟

- يکبار
- ۱/۵ بار
- دو بار
- ۲/۵ بار
- هيچ کدام

۱۳-یک دایره و یک مربع با محیطهای برابر و مماس بر یکدیگر داریم. مربع ثابت است و دایره دور مربع و مماس بر آن میچرخد. اگر دایره، یک بار دور مربع بزند چند بار دور خودش چرخیده است؟

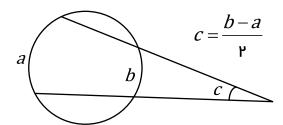


۱۴-دایره موجود بسیار عجیبی است که ویژگیهای بسیاری دارد. یکی از این ویژگیها، قضیهی جانسون میباشد. دانش آموزان علاقهمند می توانند مطلبی دربارهی قضیهی جانسون، روی وبگاه سمپاد بخوانند.

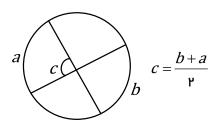


زاویه در دایره

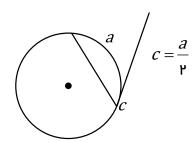
۱۵- ثابت کنید اندازه ی زاویه ی بیرونی دایره برابرست با نصف اختلاف کمانهای روبرو به آن زاویه.



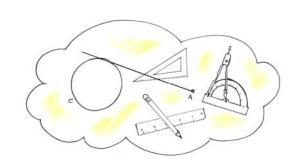
۱۶- ثابت کنید اندازهی زاویهی درونی دایره برابرست با نصف مجموع کمانهای روبرو به آن زاویه.



۱۷- ثابت کنید اندازهی زاویهی ظلی ٔ دایره برابرست با نصف کمان روبرو به آن زاویه.



۳ ظل به معنای سایه است.

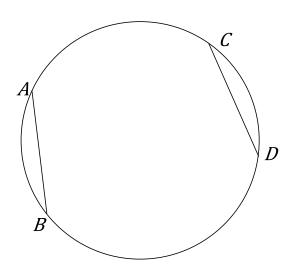


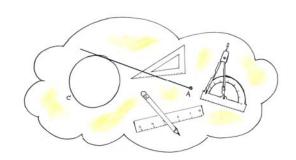
۱۸- روش سامان برای رسم مماس از نقطهای بر دایره، را بهخاطر بیاورید. پدر سامان می گوید در زمان تحصیلش، معلمشان روش دیگری برای رسم مماس گفته است:

فرض کن میخواهیم از نقطه ی A بر دایره ی C به مرکز O و شعاع T مماسی رسم M کنیم. ابتدا پاره خط OA را رسم کرده و وسط آن را می یابیم (نقطه ی OA). به مرکز OA و به شعاع OA دایره رسم می کنیم. از A به نقطه ی برخورد دو دایره وصل می کنیم. این پاره خط همان مماس مورد نظر است.

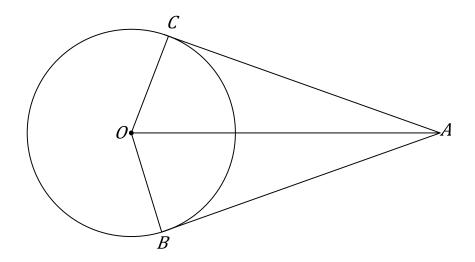
با استفاده از روشی که پدر سامان بیان کرده است مماسی بر دایره دلخواه رسم کنید. آیا این روش درست است؟ چرا؟

 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ در دایرهی زیر AB = CD، ثابت کنید ۱۹-در



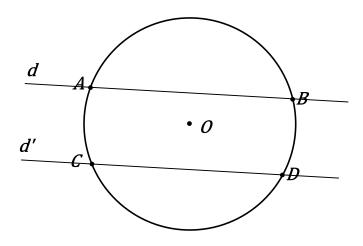


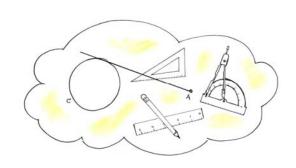
۲۰ ثابت کنید در دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با یکدیگر مساوی هستند.



۲۱-ثابت کنید اگر دو خط موازی یک دایره را قطع کنند، کمانهای بین این دو خط با هم برابرند.

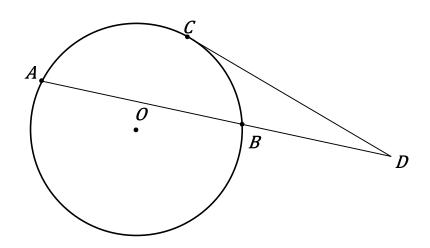
$$d \parallel d' \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

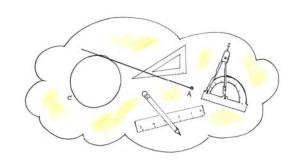




۲۲-در شکل زیر نشان دهید:

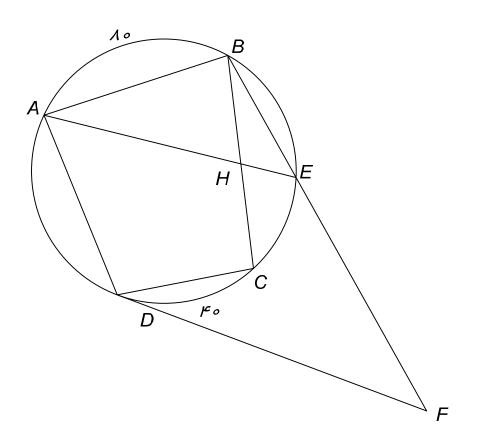
$$\angle D = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{Y}$$

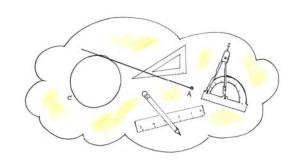




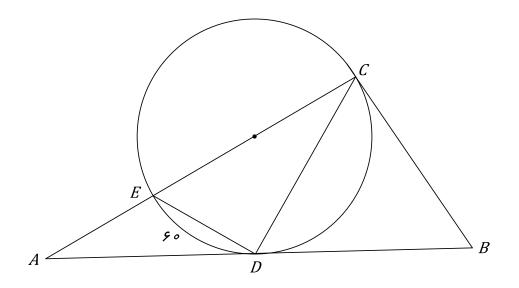
مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره

در شکل زیر FD مماس بر دایره و AB موازی AB و AD موازی BF است. زوایای BF ، AHB ، ADF

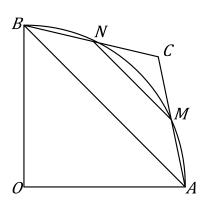


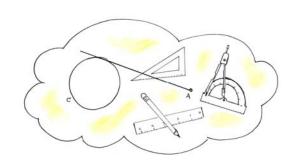


و BC بر دایره مماس هستند. زوایای EC بر دایره مماس هستند. زوایای EC -۲۴ و EC بر دایره مماس EC و EC و EC را بیابید.

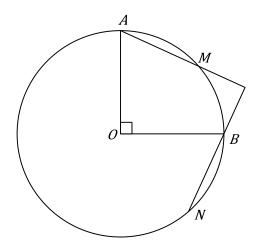


۲۵- ربع دایره ی AOB را در نظر بگیرید. دو وتر مساوی AM و BN و ار رسم کرده و امتداد می دهیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.

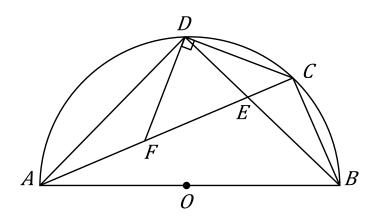


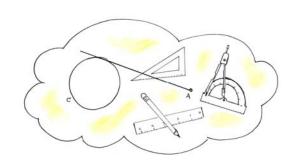


۲۶-در دایره ی روبه رو دو شعاع عمود بر هم OA و OB را رسم کرده ایم و از A و B دو کمان مساوی AM و BN را جدا کرده ایم. ثابت کنید که AM بر BN عمود است.

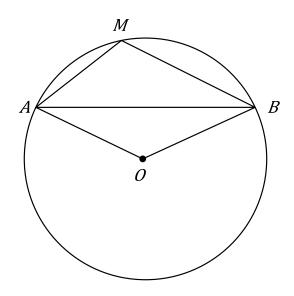


D و CD و CD و CD و CD و CD و از CD و از CD و از CD را جدا کرده ایم تا CD را در CD قطع کند. ثابت کنید نقطه CD و سط CD است.

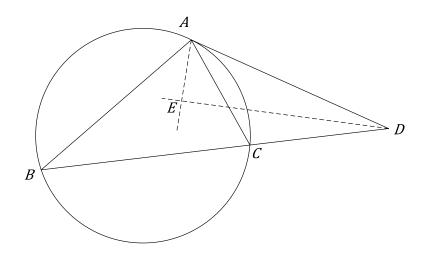


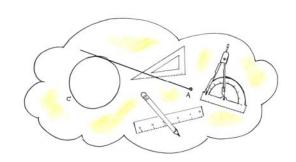


AMB جر دایره ی زیر، O مرکز و نقطه ی M بر محیط آن واقع است. اگر دو زاویه ی O -۲۸ و O مساوی باشند، اندازه ی زاویه ی O را به دست آورید.

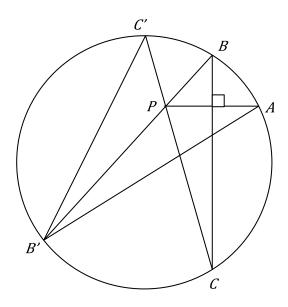


BAC در شکل زیر، AD مماس بر دایره است و AE و DE به ترتیب نیمساز زوایای ۲۹-در شکل زیر، AD مماشند. ثابت کنید AE بر DE عمود است.



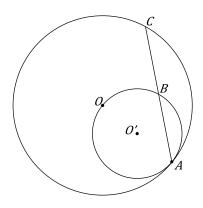


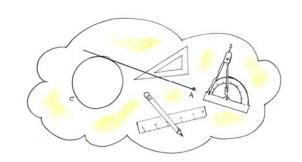
در شكل زير BC عمودمنصف PA مىباشد. ثابت كنيد زواياى BB'C' و BB'A برابرند.



۳۰-حداکثر چند دایره به شعاع یکسانتی متر را می توان بر دایره ای به شعاع یکسانتی متر مماس کرد؟ چرا؟ این کار را انجام دهید.

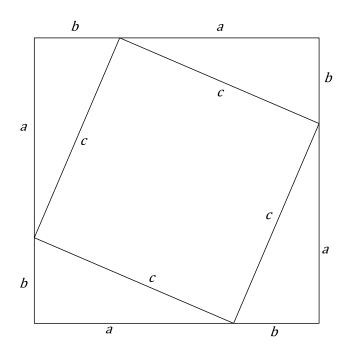
۳۱-دو دایره ی زیر در A مماسند و دایره ی کوچک تر از مرکز دایره ی بزرگ تر می گذرد. ثابت کنید B وسط AC است.





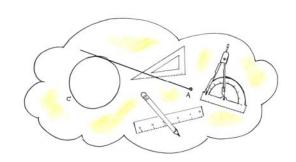
قضيهى فيثاغورس

۱- «فردوس» قضیه ی فیثاغورس را خوانده است (در مثلث قائمالزاویه، مجذور و تر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.) و میخواهد آن را اثبات کند. او مربعی به ضلع a+b رسم کرده و چهار مثلث قائمالزاویه با ساقهای a و a درون مربع رسم کرده است. روش اثبات او را با جواب دادن به سؤالات زیر بررسی کنید.



الف) چرا چهار مثلث برابرند؟

ب) چرا چهارضلعی حاصل از چهار و تر مربع است؟



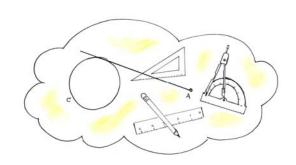
 ψ) با توجه به اینکه مساحت مربع بزرگ برابر مجموع مساحتهای چهار مثلث و مربع کوچک تر است مقدار $(a+b)^r$ برابر چه عبارتی است؟

ت) از فصل قبل به خاطر دارید که $(a+b)^{r}=a^{r}+rab+b^{r}$ از این رابطه استفاده کنید و $c^{r}=a^{r}+b^{r}$ ثابت کنید گنید و

۲- «فرشاد» دوست فردوس، برای آن که در رقابت با دوست خود کم نیاورد، میخواهد برعکس قضیهی فیثاغورس را ثابت کند.

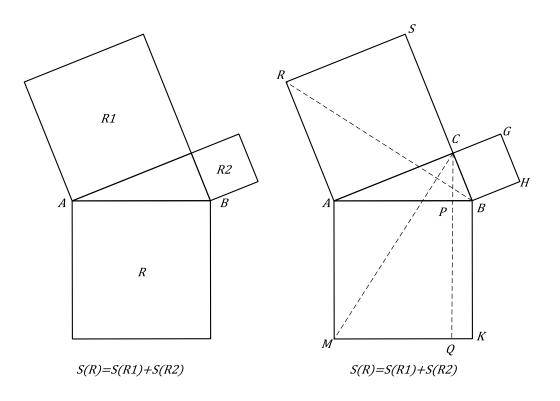
اگر مجذور یک ضلع از مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است. آن مثلث قائم الزاویه است و زاویهی قائمه اش روبه رو به ضلع بزرگ تر است.

آیا قضیهی جدید هم درست است؟ چرا؟



۳- یونانیان قدیم قضیهی فیثاغورس را به صورت زیر میشناختند.

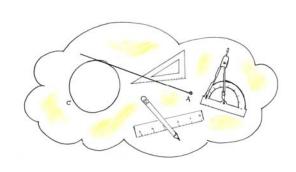
مساحت مربعی که روی و تر مثلث قائم الزاویه ای رسم شود برابر است با مجموع مساحتهای دو مربعی که روی ساقهای آن مثلث رسم می شوند.



شکل سمت چپ قضیه را نشان میدهد و شکل سمت راست برای اثبات آن به کار میرود.

سوالهای زیر به همراه پاسخشان، روش اثبات را به شما نشان می دهند. دقت کنید که منظور از $S(\triangle ABC)$ مساحت مثلث ABC است.

 $?\angle RAB = \angle CAM$ الف) چرا



$$S(\triangle RAB) = S(\triangle CAM)$$
 چرا

ت) آیا یکی از ارتفاعهای مثلث
$$RAB$$
 با AC برابر است؟

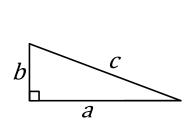
$$S(ACSR) = \gamma S(\triangle RAB)$$
 ث) چرا

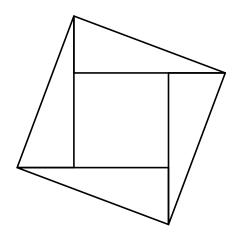
$$S(AMQP) = \gamma S(\triangle CAM)$$
ې چرا (S(AMQP)

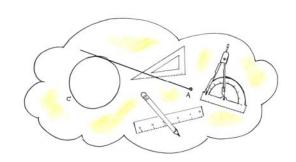
$$S(AMQP) = S(ACSR)$$
 چرا (چ

$$S(BHGC) = S(PQKB)$$
 يآ (ر

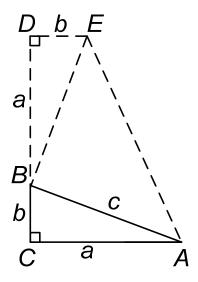
۴- در شکل زیر چهار مثلث قائم الزاویهی مساوی در کنار یکدیگر شکل زیر را تشکیل داده اند. آیا می توانید از روی شکل اثباتی برای قضیهی فیثاغورس بیابید.



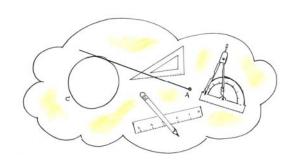




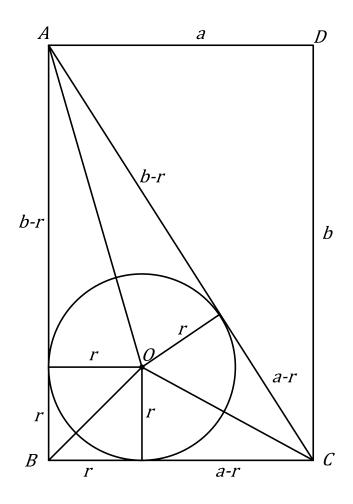
ما هم با قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحتهای سه مثلث، ثابت کنید که شما هم با قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحتهای سه مثلث، ثابت کنید که $c^r = a^r + b^r$. یادتان باشد که ابتدا قائمه بودن $c^r = a^r + b^r$



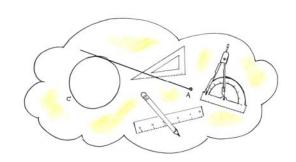
و General James A.Garfield رئيس جمهور پيشين آمريکا General James A.Garfield



۶- شکل زیر نیز مربوط به یک اثبات هندسی^۵ برای قضیهی فیثاغورس میباشد. اثبات را با توجه به شکل کامل کنید.

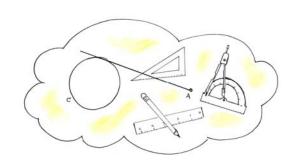


المنسوب به آقای Jack Oliver



۷- سعی کنید با ایده هایی که برای اثبات قضیه ی فیثاغورس دیدید، خودتان اثباتی برای قضیه ی فیثاغورس بیابید.

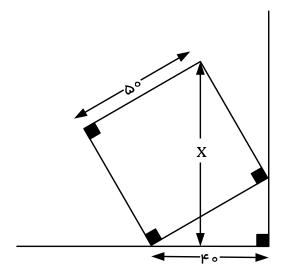
۸- مطلبی درباره ی اعداد فیثاغورثی در وبگاه سمپاد موجود میباشد که برای دانش آموزان علاقه مند میباشد.



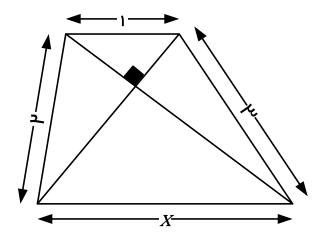
كاربردهاى قضيهى فيثاغورس

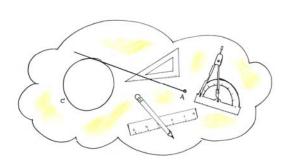
۹- در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

الف)

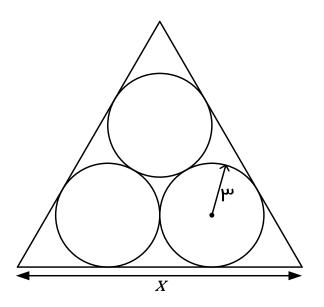


ب)

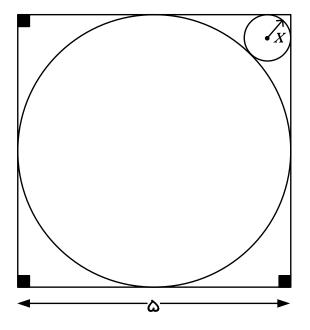




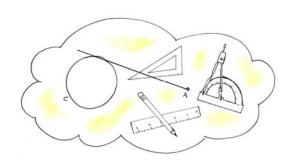
پ)



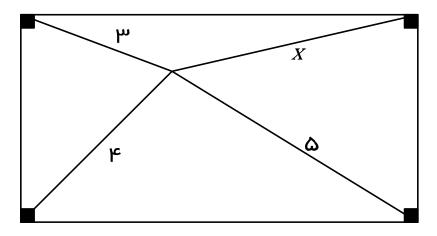
ت)

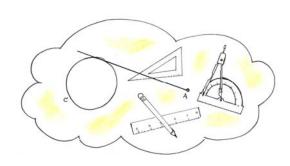


ریاضی طلایه داران - سوم راهنمایی - نسخه ی دانش آموز

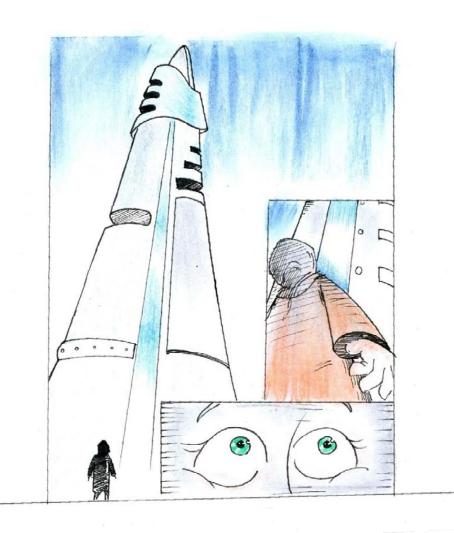


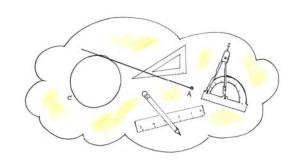
ث)





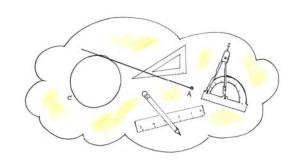
۱۰-سحر میخواهد ارتفاع برجی را که در آن زندگی می کند را اندازه بگیرد. او ابتدا در فاصله ۱۲۰ ی ۵۰ متری برج به آن نگاه کرد و آن را با زاویهی ۵۳ درجه دید. سپس از فاصلهی ۱۲۰ متری به آن نگاه کرد و آن را با زاویهی ۲۷ درجه دید.میدانیم قد سحر، یک و نیم متر است. به سحر کمک کنید تا ارتفاع برج را بهدست آورد؟ روش کار خود را توضیح دهید.





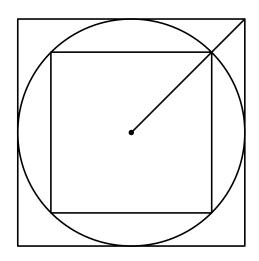
۱۱- شکور، از خانه شان ۲۵ کیلومتر به سمت جنوب، ۶۰ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت جنوب دور شده است. او اکنون در چه فاصلهای از خانه شان قرار دارد؟



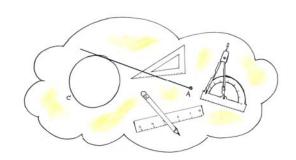


۱۲- دو وتر عمود بر هم در یک دایره یکدیگر را قطع کردهاند. اگر طول دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ شده روی یکی از وترها ۳ و ۴ باشد و دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ باشد، طول قطر دایره را بدست آورید.

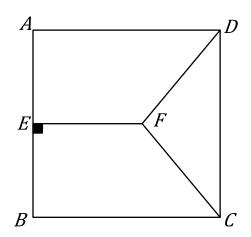
۱۳-در شکل زیر نسبت مساحت مربع کوچک تر به مساحت مربع بزرگ تر چقدر است؟



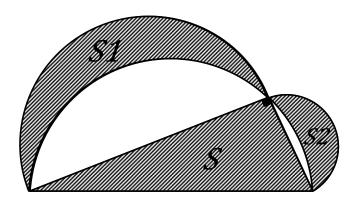
۱۴-«مشهدی حسن» میخواهد باغی را که در روستا دارد بفروشد و برای پسرش در شهر یک اتوموبیل بخرد. باغ مشهدی حسن، به شکل مثلث و به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ متر میباشد. اگر در روستا هر مترمربع زمین، یکمیلیون تومان ارزش داشته باشد، مشهدی حسن چقدر بابت خرید ماشین میتواند هزینه کند؟

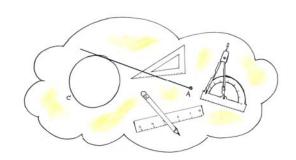


EF و FB و اصلاع FB و اصلاع FB و اصلاع FB و اصلاع FBC و مساویند. مساحت مثلث FBC را بیابید.



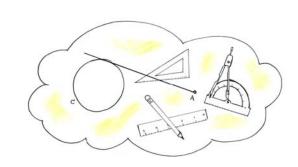
۱۶-در شکل روبهرو، دایرههایی به قطر اضلاع مثلث قائم
الزاویه ABC رسم شده است. ثابت کنید $S=S_1+S_2$.

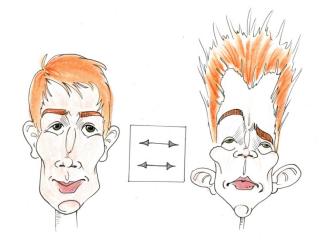




۱۷-در مربع ABCD به ضلع چهار سانتی متر، دایرهای از A و D بگذرانید به گونهای که بر BC مماس شود. شعاع این دایره چقدر است؟ روش کار خود را به طور کامل توضیح دهید.

۱۸-مطلبی درباره ی عدد پی و روش بهدست آوردن آن روی وبگاه سمپاد موجود می باشد که برای دانش آموزان علاقه مند می باشد.



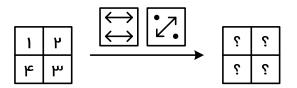


تركيب دورانها

۱- شکل زیر را در نظر بگیرید.

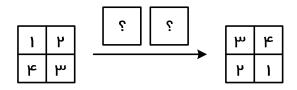
١	۲
۴	۳

الف) این شکل، تحت دو دوران زیر، به چه صورتی در می آید؟



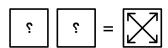
ب) اگر بخواهیم به جای این دو دوران، یک دوران قرار دهیم و نتیجه ثابت بماند. چه دورانی را انتخاب می کنید.

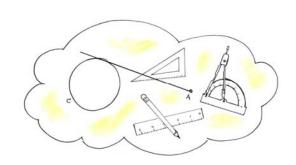
۲- الف) به جای مربعهای مجهول، چه دورانهایی قرار دهیم تا عبارت زیر کامل گردد؟



ب) چند جواب ممكن براى اين سؤال وجود دارد؟

پ) چند جفت جواب برای عبارت مقابل وجود دارد؟

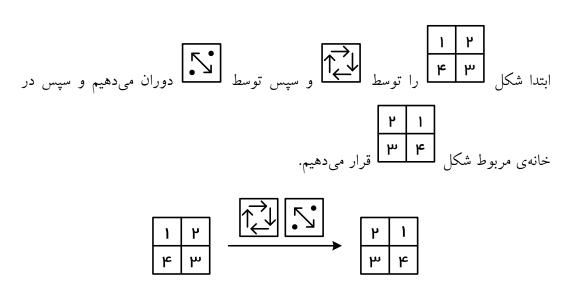


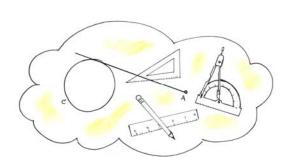


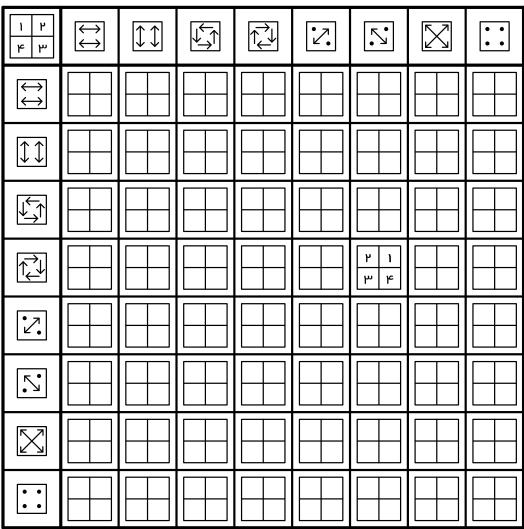
۳- جدول زیر را یک جدول دوران مینامند. در هر خانهی این جدول میبایست دوران یافتهی شکل زیر را (ابتدا نسبت به ردیف مربوطه و سپس نسبت به ستون) قرار داد.

١	۲
۴	۳

مثلاً، خانهای که در ردیف ۴ و ستون ۶ میباشد را این گونه پر می کنیم (به جدول صفحهی بعد نگاه کنید):



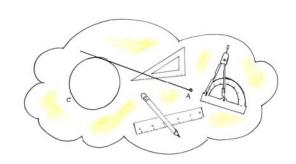




با توجه به جدول، به سؤالات ۴ تا ۶ پاسخ دهید.

۴- آیا دورانها خاصیت جابجایی دارند؟ یعنی آیا فرقی نمی کند که بین دو دوران، کدام یک را زودتر تاثیر بدهیم؟

←→
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒
 ⇒</li



۶- مجموعهی دورانهای شکل زیر چند عضو دارد؟

١	۲
۳	۴

۷- شکلی رسم کنید که مجموعهی دورانهایش به صورت زیر باشد.









۸- شکلی رسم کنید که مجموعهی دورانهایش

الف) ۸ عضوی باشد.

ب) ۷ عضوی باشد.

پ)۶ عضوی باشد.

ت) ۵ عضوی باشد.

ث) ۴ عضوی باشد.

ج)**۳ ع**ضوی باشد.

چ)۲ عضوی باشد.

ح) ۱ عضوی باشد.

خ)صفر عضوی باشد.