Подготовка к экзамену по матанализу, второе издание (исправленное)

Автор: Эмиль

Отредактировал и привел в опрятный вид: Константин.

13 января 2019 г.

Это документ для подготовки к экзамену по матанализу в 3-м семестре. Вопросы и подвопросы - кликабельны (клик перенесет вас к ответу на него), некоторые термины (например, суммы Дарбу) - тоже.

Приятной подготовки и удачи на экзамене!

1 Вопросы

1. Евклидово метрическое пространство. Точки и множества в евклидовом пространстве. Сходимость последовательности точек в нем.
2. Функция нескольких переменных. Предел функции. Теорема о равенстве двойного и повторного пределов.
3. Непрерывность функции нескольких переменных.
4. Свойства функций, непрерывных на компакте и на связной области.
5. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Свойства дифференцируемых функций.
6. Производная по направлению.
7. Частные производные. Дифференцируемость функции и наличие частных производных. Дифференциал функции.
8. Формула полного приращения. Достаточное условие дифференцируемости функции.
9. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

10. Градиент функции. Вычисление производной по направлению. Основное свойство градиента.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
12. Формула Лагранжа.
13. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
14. Неявные функции. Теоремы о существовании функции, заданной неявно.
15. Теорема об обратимости регулярной функции.
16. Формула Тейлора.
17. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие.
18. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа нахождения условного экстремума. (Достаточное условие без доказательства).
19. Понятие о мере Жордана. Критерий измеримости множества в R^m (без доказательства).
20. Кратный интеграл Римана. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций.
21. Свойства кратного интеграла.
22. Сведение двойного интеграла к повторному. Вычисление тройного интеграла.
23. Замена переменной в кратном интеграле. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
24. Несобственные кратные интегралы. Теорема о несобственном интеграле от неотрицательной функции. Признаки сходимости. Необходимое и достаточное условме сходимости несобственного интеграла от функции, меняющей знак.
25. Кривые в пространстве. Параметризация на кривой.
26. Криволинейные интегралы первого рода и его свойства.
27. Криволинейные интегралы второго рода и его свойства.
28. Связь между интегралами первого и второго рода.
29. Формула Грина. Теорема о свойстве дифференциального выражения. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

2 Ответы

1. Пространство R^m (m-мерное), элементом которого является $\overrightarrow{x}(x_1, \dots, x_m)$. x_i - координата, $\vec{x}$ - точка/вектор. Пространство R^m является линейным (арифметическим):

Сложение: $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = (x_1^1 + x_2^2, \dots, x_1^i + x_2^i, \dots, x_1^m + x_2^m)$.

Умножение на скаляр: $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots, \lambda x_m)$

Расстояние между точками: $\rho(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_1^i - x_2^i)^2}$

Сходимость точек в R^m:

Дана последовательность $\overrightarrow{x_n}$, определение:

Точку $\overrightarrow{a}$ будем называть пределом последовательности $\vec{x_n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, начиная с которого, для любого n будет выполняться неравенство $\rho(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{a}) < \varepsilon$.

$$\overrightarrow{a} = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{x_n} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \rho(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{a}) < \varepsilon$$

Свойства предела:

1) Единственность.

2) Ограниченность сходящихся последовательностей.

3) $\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{a} \iff x_i \to a_i$, где $\overrightarrow{x_n} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Определение:

$\overrightarrow{x_n}$ - фундаментальная, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in N\ \rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$

4) $\overrightarrow{x_n}$ сходится $\iff$ $\overrightarrow{x_n}$ - фундаментальная.

Это означает, что R^m - полное пространство.

Точки и множества в R^m.

1) Шар

(открытый/закрытый в зависимости от знака неравенства $<$ или $\leq$).

$$K_R(\overrightarrow{x_0}) = \{\overrightarrow{x} \mid \rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}) < R\}$$

2) Внутренняя точка множества E.

Это такая точка, для которой можно найти окрестность, полностью входящую в E.

3) Открытое множество.

Это множество, все точки которого - внутренние.
Теорема:

1) R^m и $\emptyset$ - открыты.

2) Объединение ЛЮБОГО числа открытых множеств - открытое множество.

3) Пересечение КОНЕЧНОГО числа открытых множеств - открытое множество.

4) Окрестность $U(x_0)$; $\overset{o}{U}$.
Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

5) Предельная точка множества.
Это точка $\overrightarrow{x_0}$, в любой проколотой окрестности которой существует хотя бы одна точка, принадлежащая данному множеству.
Определение через предел:

$$\exists \overrightarrow{x_n} \in E : \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}$$

6) Изолированная точка множества.

Это такая точка $\overrightarrow{x_0}$, что $\exists U(x_0)$ такая, что $\overset{o}{U}(x_0) \cap E = \emptyset$. Другими словами, кроме этой точки в окрестности $U(x_0)$ ничего нет.

7) Замкнутое множество.
Это множество, содержащее все свои предельные точки.

8) Замыкание.
Множество $\overline{E}$, содержащее все точки, не принадлежащие E, будем называть его замыканием.

9) Внутренность.
Это все внутренние точки множества, обозначается $intE$.
Теорема:

1) R^m, $\emptyset$ - замкнутые множества.

2) Объединение КОНЕЧНОГО числа замкнутых множеств - замкнутое множество.

3) Пересечение ЛЮБОГО числа замкнутых множеств - замкнутое

множество.

4) $X \setminus E$ - открытое множество $\iff$ E - замкнутое множество.

10) Ограниченное множество.
E - ограниченное множество, если $\exists K_R \supset E$ (открытый шар).
Теорема Больцано-Вейерштрасса:
Если E - ограниченное и бесконечное множество, то в нем можно выделить сходящую последовательность.

11) Компактное множество.
Множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.

I. E - компактно $\Rightarrow$ E ограничено и замкнуто.

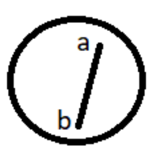
II. E - компактно $\Rightarrow \forall E' \subset E \; \exists \overrightarrow{x_n} \in E', \exists \overrightarrow{x_0} \in E' : \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}$ (E' - бесконечное).

Теорема:
В R^m для I и II выполняются и обратные утверждения ($\Leftarrow$).

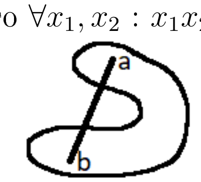
12) Граничная точка множества.
$\overrightarrow{x_n}$ - граничная точка E, если $\forall U(\overrightarrow{x_n}) \; \exists x_i \in E, \exists x_k \notin E$. ∂E - граница.

13) Прямая.
Пусть $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in R^m$:
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{b}(1-t); t \in R\}$ - прямая в R^m.
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{b}(1-t); t \in [0;1]\}$ - отрезок $[a;b]$.
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a} + \overrightarrow{l}t\}$ - луч.

14) Выпуклое множество.
Это такое множество, что $\forall x_1, x_2 : x_1x_2$ - отрезок, $x_1x_2 \in E$.



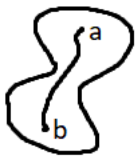
- выпуклое,

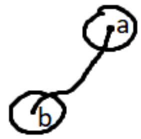


- не выпуклое.

15) Кривая.
$\{\overrightarrow{x}(t) \mid \overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t), \ldots, \overrightarrow{x_m}(t)\}$ - кривая.
Если $\overrightarrow{x_i}(t)$ - непрерывная функция, то $\overrightarrow{x}(t)$ - непрерывная кривая.

16) Связное множество.
Это такое множество, что $\forall x_1, x_2 \in E$ $\exists$ непрерывная кривая $x_1 x_2 \in E$.



- связное,


- несвязное.

17) Область.
Это открытое и связное множество.

2. Функции нескольких переменных.
Функция нескольких переменных $\overrightarrow{f} : R^m \to R^k$ - правило, отображающее m-мерный вектор в k-мерный.

Предел ФНП.
Пусть $\overrightarrow{f} : E \subset R^m \to R^k$, $\overrightarrow{x_0}$ - предельная точка E.
Определение предела:
1) По Коши:
$\overrightarrow{u_0} \in R^k$ будет пределом $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ при $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}$,
если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\overrightarrow{x_0}) : \forall \overrightarrow{x_i} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0})\ \rho(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_i}), \overrightarrow{u_0}) < \varepsilon)$.
2) По Гейне:

$$\overrightarrow{u_0} = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \iff \forall \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}\ (\overrightarrow{x_i} \in E) : \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_n}) \to \overrightarrow{u_0}$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ - двойной предел.
$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ и $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ - повторные пределы.

Теорема о равенстве двойного и повторного пределов.
$u = f(x,y); \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$,
и $\forall y : 0 < |y - y_0| < \delta_1, \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$.
Тогда существует повторный предел $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = A$.
Доказательство:
По определению $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 :$ при $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta : |f(x,y) - A| < \varepsilon$.
Зафиксируем $y, x \to x_0$, $|\varphi(y) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow A = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$, что и требовалось доказать.

3. Непрерывность ФНП.

Пусть $\overrightarrow{x_0}$ - внутренняя точка E, $\overrightarrow{f} : E \subset R^m \to R^k$.
Тогда $\overrightarrow{f}$ непрерывна в точке $\overrightarrow{x_0}$, если $\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$.

4. Свойства функций, непрерывных на компакте и на связной области.

1) Суммы, произведения, частные непрерывных функций - непрерывные функции.
2) Суперпозиция двух непрерывных функций непрерывна.
3) Отделимость от нуля:
Если значение функции в некоторой точке положительно, а функция в этой точке непрерывна, то существует окрестность этой точки, такая, что все значения в этой окрестности положительны.
4) Функция непрерывна на области определения тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества открыт.
Доказательство:
$\Rightarrow$: f - непрерывна, g - открытое множество в области изменения, $\overrightarrow{y_0} \in g$. $\exists \overrightarrow{x_0} \xrightarrow{f} \overrightarrow{y_0}$.
Непрерывность $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \rho(y, y_0) < \varepsilon$, следовательно:
$\exists U(\overrightarrow{x_0}) : \overrightarrow{x} \in U(\overrightarrow{x_0}) : f(\overrightarrow{x}) \in K_\varepsilon(\overrightarrow{y_0}) \subset g \Rightarrow \overrightarrow{x} \in f^{-1}(g)$(прообраз), $\Rightarrow U(\overrightarrow{x_0}) \in f^{-1}(g) \Rightarrow \overrightarrow{x_0}$ - внутренняя точка, $\Rightarrow f^{-1}(g)$ - открытое множество.
$\Leftarrow$:
g - открытое множество, $f^{-1}(g)$ - открытое множество, требуется доказать непрерывность f:
$\forall \varepsilon > 0 \ \rho(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_0}) < \varepsilon, \{\overrightarrow{y}\}$ - открытое множество из $K_\varepsilon(\overrightarrow{y_0})$.
$f^{-1}(K_\varepsilon(\overrightarrow{y_0}))$ - открытое множество, содержит $\overrightarrow{x_0} \Rightarrow f^{-1}(K_\varepsilon(\overrightarrow{y_0}))$ - окрестность $\overrightarrow{x_0}$. То есть по ε мы нашли нужную окрестность.
5) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ непрерывна на компакте $\Rightarrow \overrightarrow{f}$ - ограничена.
6) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ непрерывна на компакте $\Rightarrow \exists \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} : \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_1}) - max, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_2}) - min$.
7) $K = 1, f(\overrightarrow{x})$ задана и непрерывна на области и принимает там значения A и $B, A \neq B$.
Тогда $\forall C : A < C < B$ найдется точка $\overrightarrow{c} : f(\overrightarrow{c}) = C$.

5. Дифференцируемость ФНП.

$\overrightarrow{f} : R^m \to R^k, \overrightarrow{x_0}$ - внутренняя точка области определения функции.

$\overrightarrow{f}$ дифференцируема в $\overrightarrow{x_0}$, если $\exists L: R^m \to R^k, \exists \overrightarrow{o}$ - какой-то вектор, что

$$\triangle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = L(\triangle \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{o}(\|\overrightarrow{x}\|)$$

Свойства дифференцируемых ФНП.

1) Если функция дифференцируема в точке, то L является матрицей частных производных:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \frac{\partial f_k}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

2) Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

6. Производная по направлению.

$k = 1, m \neq 1!$

Пусть $\overrightarrow{x_0} \in$ ООФ, $\overrightarrow{e}$ - какой-то вектор.

$\|\overrightarrow{e}\|$ - норма вектора $= \rho(\overrightarrow{e}, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m e_i^2}$.

$\frac{\overrightarrow{e}}{\|\overrightarrow{e}\|} = \overrightarrow{e_0}$ - орт.

I. Производной по направлению $\overrightarrow{e}$ в точке $\overrightarrow{x_0}$ функции $f(\overrightarrow{x})$ будем называть

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{e_0}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t} = \frac{\partial f}{\partial e}$$

II. Если направление совпадает с направлением координатной оси, то производная по такому направлению называется **частной** производной: $\overrightarrow{e_0} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ - единица на i-том индексе.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

7. Частные производные.

Если направление совпадает с направлением координатной оси, то производная по такому направлению называется **частной** производной, записывается $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Дифференцируемость функции и наличие частных производных.

Если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные по каждому аргументу.

Дифференциал.
Если функция дифференцируема в точке, то линейная относительно ее приращения часть называется полным дифференциалом этой функции в этой точке:

$$df(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1} \triangle x_1 + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2} \triangle x_2 + \dots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m} \triangle x_m$$

8. Формула полного приращения.
Пусть $f : R^m \to R^1$ не дифференцируема, но имеет частные производные в окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$. $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, \dots, x_m^0)$.
Тогда $\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = f(x_1, \dots, x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) = f(x_1, \dots, x_m) - f(x_1^0, x_2, \dots, x_m) + f(x_1^0, x_2, \dots, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3, \dots, x_m) + f(x_1^0, x_2^0, x_3, \dots, x_m) - \dots + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)$.
На отрезке $[a; b] : f(b) - f(a) = f'(c) * (b - a), c = a + \theta(b - a), \theta \in (0; 1)$.
Тогда полное приращение функции:
$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \triangle x_1, x_2, \dots, x_m) \triangle x_1 + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \triangle x_2, x_3, \dots, x_m) \triangle x_2 + \dots + f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \triangle x_m) \triangle x_m$.

Достаточное условие дифференцируемости функции.
Если функция имеет в окрестности точки частные производные, непрерывные в этой точке, то эта функция дифференцируема в этой точке.
Доказательство:
Нам дано, что частные производные непрерывны в точке $\overrightarrow{x_0}$, тогда

$$f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_i^0 + \theta_i \triangle x_i, x_{i+1}^0 + \theta_{i+1} \triangle x_{i+1}, \dots, x_m^0 + \theta_m \triangle x_m) = f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) + \alpha_i$$

Устремим $\triangle x_i$ к нулю:

$$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(\overrightarrow{x_0}) \triangle x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \triangle x_i$$

Теперь докажем, что второе слагаемое $= o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)$:

$$|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \triangle x_i| \le \sqrt{\sum \alpha_i^2} (\to 0) * \sqrt{\sum \triangle {x_i}^2} (= \|\triangle \overrightarrow{x}\|) = o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)$$

Тогда приращение функции представимо в необходимом виде, а значит, она дифференцируема, что и требовалось доказать.

9. Дифференцирование сложной функции.

Пусть $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x})$

$\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_l), \overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\overrightarrow{f} = (f_1, \ldots, f_k), \overrightarrow{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$

$\overrightarrow{f} : R^l \to R^k, \overrightarrow{\varphi} : R^m \to R^l$

Возьмем некоторую $\overrightarrow{x_0}$, такую, что $\overrightarrow{\varphi}$ дифференцируема в $\overrightarrow{x_0}$, а $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x_0})$, причем $\overrightarrow{f}$ дифференцируема в $\overrightarrow{y_0}$.

Тогда функция $\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x}))$ дифференцируема в точке $\overrightarrow{x_0}$.

Доказательство:

$$\triangle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y_0}) = L_1 \triangle \overrightarrow{y} + \overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|)$$

$$\triangle \overrightarrow{y} = \triangle \overrightarrow{\varphi} = L_2 \triangle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)$$

$$\triangle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x_0})) = L_1 L_2(\triangle \overrightarrow{x}) + L_1(\overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)) + \overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|)$$

$L_1 L_2$ - линейный оператор, осталось доказать, что второе слагаемое - $o(\triangle \overrightarrow{x})$:

$\|L_1(\overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|))\| \leq \|L_1\| * \|(\overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|))\|$, но

$\frac{\|(\overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|))\|}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|} \to 0$ при $\triangle \overrightarrow{x} \to 0$, следовательно, $L_1(\overrightarrow{o_2}(\|\triangle \overrightarrow{x}\|))$ - бесконечно малое.

Далее, $\frac{\|(\overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|))\|}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|} = \frac{\|(\overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|))\|}{\|\triangle \overrightarrow{y}\|} * \frac{\|\triangle \overrightarrow{y}\|}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|}$, $\frac{\|(\overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|))\|}{\|\triangle \overrightarrow{y}\|} \to 0$ при $\triangle \overrightarrow{y} \to 0$, а $\frac{\|\triangle \overrightarrow{y}\|}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|} \leq (\|L_2 + C\|)$, следовательно, $\frac{\|(\overrightarrow{o_1}(\|\triangle \overrightarrow{y}\|))\|}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|}$ тоже бесконечно малое и сумма также бесконечно малая, значит, мы представили приращение функции в необходимом виде, значит, она дифференцируема, что и требовалось доказать.

Инвариантность формы первого дифференциала.

Первый дифференциал обладает свойством инвариантности формы, то есть $d\overrightarrow{f} = Ld\overrightarrow{x}$, где $L = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij}$ всегда, неважно, что есть $\overrightarrow{x}$.

Доказательство:

Пусть $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{t})$.

Тогда $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(\overrightarrow{t}))$ имеет $d\overrightarrow{f} = \widetilde{L} \triangle \overrightarrow{t} = LL_1 \triangle \overrightarrow{t}$ (L_1 - матрица от x к t) $= L(L_1 \triangle \overrightarrow{t}) = Ld\overrightarrow{x}$, что и требовалось доказать.

10. Градиент функции.
Рассмотрим $u = f(x_1, \dots, x_m) \to R^1$.
$(\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m})$ - градиент функции в точке $\overrightarrow{x_0} = grad\overrightarrow{u}(M_0)$.

Градиент и вычисление производной по направлению.
Рассмотрим $u = f(x_1, \dots, x_m) \to R^1$.

$$\frac{\partial u(\overrightarrow{x_0})}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{l_0}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t}$$

$\overrightarrow{l_0}$ - единичный вектор $= (l_1, \dots, l_m) = \cos\alpha_1 \dots \cos\alpha_m$.

$$f(\overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{l_0}) = \varphi(t)$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi^{'}(0)$$

$$\varphi^{'}_t = (f(\overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{l_0}))^{'}_t = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}$$

$x_i = x_i^0 + tl_i^0$, тогда:

$$\frac{\partial u(\overrightarrow{x_0})}{\partial l} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \dots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m}\cos\alpha_m = gradf(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{l_0}$$

- конечная формула для вычисления производной по направлению.

Основное свойство градиента.
Производная функции по направлению достигает своего максимального значения, когда направление совпадает с направлением градиента этой функции.
Это следует из определения производной по направлению, она равна **скалярному** произведению градиента и направляющего вектора, скалярное произведение любых векторой максимально, если они сонаправлены.

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
Поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$,

возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) : F(M_0) = 0$.
Допустим, что $\exists U(M_0) : \forall (x, y) \in (U(M_0))_{xy}\ \exists! z : (x, y, z) \in \gamma$ ($\gamma-$ график уравнения $F(x, y, z) = 0$).
Графиком назовем все такие точки $\{x, y, z\}$, для которых выполняется $F(x, y, z) = 0$. Тогда z определена однозначно.
Допустим также, что $F(x, y, z)$ дифференцируема в M_0, рассмотрим все кривые $(x(t), y(t), z(t))$, дифференцируемые, $\alpha \leq t \leq \beta$.
Найдем такую кривую, что $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$,
тогда $F(x(t), y(t), z(t)) = 0, dF(t_0) = \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}dz = 0$.
Тогда $dF(t_0) = gradF(M_0) \cdot d\overrightarrow{x} = 0, d\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\tau}$ - касательный вектор к кривой.
$gradF(M_0)$ перпендикулярен $\overrightarrow{\tau}, \Rightarrow$ все векторы τ_i лежат в одной плоскости - **касательной плоскости**, $gradF(M_0)$ - нормаль к плоскости.
Запишем уравнение плоскости:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Нормаль (прямая, которая проходит через M_0, перпендикулярно плоскости):

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$$

12. Формула Лагранжа.
Пусть дана функция $f : R^m \to R^1$, дифференцируемая в некоторой выпуклой области. Тогда
$\forall \overrightarrow{x_0}$ и $\overrightarrow{x_1}$:

$$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x}) \triangle \overrightarrow{x_i}$$

, где $\triangle \overrightarrow{x_i} = x_1^i - x_0^i$, а $0 < \theta < 1$.
Доказательство:
l - отрезок $= \{\overrightarrow{x}; \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t\triangle \overrightarrow{x}\}$
$f(\overrightarrow{x})|_{\overrightarrow{x} \in l} = f(\overrightarrow{x_0} + t\triangle \overrightarrow{x}) = \varphi(t), t \in [0; 1]$.
$\varphi(0) = f(\overrightarrow{x_0}), \varphi(1) = f(\overrightarrow{x_1})$
$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = \varphi(1) - \varphi(0) =$ (по теореме Лагранжа) $= \varphi'(\theta)(1 - 0) = \varphi'(\theta)$, где $\theta \in (0; 1)$

$\varphi^{'}(\theta) = f(\overrightarrow{x_0} + t\triangle\overrightarrow{x})^{'}_t|_{t=\theta} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}$
$x_i = x_0^i + t\triangle x_i, \frac{dx_i}{dt} = \triangle x_i \Rightarrow \varphi^{'}(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0} + \theta\triangle\overrightarrow{x})\triangle\overrightarrow{x_i}$, что и требовалось доказать.

13. Производные и дифференциалы высших порядков.
$f : R^m \to R^1$, тогда $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f^{''}_{x_i x_j}$.
Если $i = j$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
Дифференциалы высших порядков.
$d^2 f = d(df), df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.
$d^2 f = d(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i) = \sum_{i=1}^m d(\frac{\partial f}{\partial x_i})dx_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ - квадратичная форма.

Теорема о равенстве смешанных производных.
Смешанные производные $f^{''}_{xy}$ и $f^{''}_{yx}$ равны не всегда.
Пусть есть $u = f(x, y)$ - дифференцируемая дважды в некоторой области функция, а в некоторой точке $f^{''}_{xy}$ и $f^{''}_{yx}$ - непрерывны. Тогда $f^{''}_{xy} = f^{''}_{yx}$.
Доказательство:
Возьмем функцию $\omega(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) - (f(x, y_0) - f(x_0, y_0))$
Зафиксируем x, тогда $f(x, y) - f(x_0, y) = \varphi(y), f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \varphi(y_0)$
$\omega(x, y) = \varphi(y) - \varphi(y_0) = \varphi^{'}(y_0 + \theta_1\triangle y)\triangle y = (f^{'}_y(x_1, y_0 + \theta_1\triangle y) -$
$- f^{'}_y(x_0, y_0 + \theta_1\triangle y))\triangle y = f^{''}_{yx}(x_0 + \theta_2\triangle x, y_0 + \theta_1\triangle y)$
Теперь зафиксируем y,
тогда $f(x, y) - f(x_0, y) = \psi(x), f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \psi(x_0)$
$\omega(x, y) = \psi(x) - \psi(x_0) = \psi^{'}(x_0 + \theta_3\triangle x)\triangle x = (f^{'}_x(x_0 + \theta_3\triangle x, y_1) -$
$- f^{'}_x(x_0 + \theta_3\triangle x, y_0))\triangle x = f^{''}_{xy}(x_0 + \theta_3\triangle x, y_0 + \theta_4\triangle y)$
Производные равны, но в разных точках. Устремим $\triangle x$ и $\triangle y$ к нулю:
$f^{''}_{xy}(x_0, y_0) = f^{''}_{yx}(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

14. Неявные функции.
Неявная функция - функция, заданная в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Теоремы о существовании функции, заданной неявно.
I. Теорема 1.
$F(x, y) = 0$, дано:

1) $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma : F(x_0, y_0) = 0, \Gamma$ - график уравнения - такие (x, y), что $F(x, y) = 0$.
2) $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные F_x, F_y в некоторой окрестности точки M_0.
3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Тогда существует такой прямоугольник $|x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq \sigma$, что $\forall x : |x - x_0| \leq \delta$ можно найти единственный $y : |y - y_0| \leq \sigma$, что $F(x, y) = 0$.
Это неявно задает некую функцию $y = f(x)$, **непрерывную** и **дифференцируемую** на $|x - x_0| \leq \delta$.
Доказательство:
Пусть $F_y(x_0, y_0) > 0$, F_y - непрерывна, тогда по теореме об отделимости от нуля $\exists U(x_0, y_0), \forall (x, y) \in U : F_y(x, y) > 0$.
Пусть $U = [x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \sigma_0; y_0 + \sigma_0]$:
$$\begin{cases} F(x, y_0 + \sigma_0) > 0, \text{где } x \in |x - x_0| < \delta_2 \\ F(x, y_0 - \sigma_0) < 0, \text{где } x \in |x - x_0| < \delta_3 \end{cases}$$
Возьмем $\delta = min(\delta_1, \delta_2, \delta_3), x^* \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, тогда:
$$\begin{cases} F(x^*, y_0 + \sigma_0) > 0 \\ F(x^*, y_0 - \sigma_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists y^* : F(x^*, y^*) = 0$$
А так как $F_y > 0$, то она монотонно возрастает, а значит существует **единственная** y^*, удовлетворяющая условию выше.
II. Теорема о неявной векторной функции.
Дано:
$\overrightarrow{x} = (x_1 \dots x_m)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots y_k)$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{F} = (F_1 \dots F_k)$
$$\begin{cases} F_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k) = 0 \\ \dots \\ F_k(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k) = 0 \end{cases}$$
Пусть $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0, M_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) : \overrightarrow{F}(M_0) = 0$
$$I(\overrightarrow{x_0}) = \prod_{i=1}^{m} [x_0^i - \delta_i; x_0^i + \delta_i]$$
$$Y(\overrightarrow{y_0}) = \prod_{i=1}^{k} [y_0^i - \sigma_i; y_0^i + \sigma_i]$$

(Клеточные замкнутые окрестности точек)
Пусть $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$ непрерывно дифференцируема в $I \times Y$, якобиан $\overrightarrow{F}$ не равен нулю.
Тогда

$$\forall \overrightarrow{x} \in I\ \exists! \overrightarrow{y} \in Y : \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 0, \exists \overrightarrow{x} \xrightarrow{\overrightarrow{f}} \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f} : R^m \to R^k$$

Доказательство:
Доказывать будем по индукции:
1) База индукции. При $k = 1$ утверждение верно по теореме 1.
2) Предположим, что если $\overrightarrow{y} = (y_1, \dots, y_{k-1}), \overrightarrow{F} = (F_1, \dots, F_{k-1})$, то существует неявная функция $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$.
$\begin{cases} F_1(\overrightarrow{x}, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k) = 0 \\ \dots \\ F_{k-1}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 0 \\ F_k(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 0 \end{cases}$, возьмем первые $k-1$ уравнений.
По условию, якобиан не равен нулю, тогда распишем его по последней строке:
$det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial y_k} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} A_{kj} \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow M_{kj_0} \neq 0$, пусть $M_{kk} \neq 0 \Rightarrow det(\frac{\partial F_i(x_0,y_0)}{\partial y_j})_{ij} \neq 0$
Тогда можем решить систему и найти первые $k-1$ игреков:
$\begin{cases} y_1 = y_1(\overrightarrow{x}, y_k) \\ y_2 = y_2(\overrightarrow{x}, y_k) \\ \dots \\ y_{k-1} = yk - 1(\overrightarrow{x}, y_k) \\ F_k(\overrightarrow{x}, y_1(\overrightarrow{x}, y_k), \dots, y_{k-1}(\overrightarrow{x}, y_k), y_k) = 0 \end{cases}$
x_i - независимые переменные, тогда $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = 0$:

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_k}{\partial y_k}$$

Теперь мы хотим доказать, что $\frac{\partial F_k}{\partial y_k}$ не равно нулю.
Пусть это не так, и $\frac{\partial F_k}{\partial y_k} = 0$, тогда $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_k} = 0$.

Тогда пусть $\overrightarrow{a}_k = (\frac{\partial F_k}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F_k}{\partial y_k})$, $\overrightarrow{b} = (\frac{\partial y_1}{\partial y_k}, \ldots, \frac{\partial y_{k-1}}{\partial y_k}, 1)$.
Тогда $\overrightarrow{a}_k \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.
Это, в свою очередь, означает, что $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}_i \ \forall i = 1 \ldots k-1$ (следует из системы сверху), а также $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}_k$ (по нашему предположению).
Но в k-мерном пространстве вектор не может быть перпендикулярен k векторам.
Это значит, что либо $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, либо $\overrightarrow{a}_k$ - линейно зависимый набор, но $\overrightarrow{b}$ ненулевой, тогда $\overrightarrow{a}_k$ - линейно зависимый набор, а значит $det = 0$, но по условию $det \neq 0$, противоречие. Следовательно, $\frac{\partial F_k}{\partial y_k} \neq 0 \Rightarrow$ можно найти окрестность, в которой можно найти единственную $y_k = y_k(\overrightarrow{x})$.

15. Теорема об обратимости регулярной функции.
Дана $\overrightarrow{f} : G \to R^n, G \in R^m, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$
Теорема (об обратимости регулярной функции):
Пусть $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ - непрерывно дифференцируема $\iff$ существуют все ее частные производные.
Предположим, что $\forall \overrightarrow{x} \in G : det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij} \neq 0$;
Тогда $\overrightarrow{f}$ - регулярное отображение и $\forall \overrightarrow{x_0} \in G \ \exists A(\overrightarrow{x_0}), B(\overrightarrow{y_0})$ - окрестности, где $\overrightarrow{y_0} = f(\overrightarrow{x_0})$ такие, что:
$f : A(\overrightarrow{x_0}) \to B(\overrightarrow{y_0})$ - взаимно однозначное отображение. Это означает, что:

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{x} \in A(\overrightarrow{x_0}) \ \exists! \overrightarrow{y} \in B(\overrightarrow{y_0}) \\ \forall \overrightarrow{y} \in B(\overrightarrow{y_0}) \ \exists! \overrightarrow{x} \in A(\overrightarrow{x_0}) \end{cases} \quad | \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$$

(Грубо говоря, мы хотим как то выразить х через у)
Рассмотрим $intB(\overrightarrow{y_0})$ - открытое множество;
$f^{-1}(intB(\overrightarrow{y_0}))$ - прообраз множества $B(\overrightarrow{y_0})$ для $f = \widetilde{A}(\overrightarrow{x_0})$
Рассмотрим теперь $\widetilde{A}(\overrightarrow{x_0})$ и $intB(\overrightarrow{y_0})$: f отображает $\widetilde{A}(\overrightarrow{x_0})$ на $intB(\overrightarrow{y_0})$ взаимно однозначно, ведь иначе нарушается теорема о неявной функции. Докажем, что это отображение регулярно, для этого нужно доказать, что якобиан не равен нулю:
$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, подставим $\overrightarrow{x}$:

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{y}))$$

$$y_i = f_i(f_1^{-1}(y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m^{-1}(y_1, \ldots, y_m))$$

Продифференцируем по всем y:

$$\text{При } j \neq i : 0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_j}$$

$$\dots$$

$$\text{При } j = i : 1 = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_i}$$

Это можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1(i - \text{тая строка}) \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда следует:

$$(\frac{\partial x_k}{\partial y_i})(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = E - \text{единичная матрица},$$

где $(\frac{\partial x_k}{\partial y_i})$ - якобиан обратного отображения, а $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ - якобиан прямого отображения. Их произведение дает ненулевой результат, $\Rightarrow$ якобиан обратного отображения не равен нулю, что и требовалось доказать.

16. Формула Тейлора.

Для функций одной переменной выполняется формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + r_n(x)$$

Эту формулу можно обобщить для случая нескольких переменных. Теорема:

Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, которая имеет непрерывные производные в выпуклой окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$ всех порядков до n включительно.

Тогда имеет место формула:

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \frac{df(\overrightarrow{x_0})}{1!} + \frac{d^2 f(\overrightarrow{x_0})}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1} f(\overrightarrow{x_0})}{(n-1)!} + r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})}{n!}, 0 < \theta < 1$$

Доказательство:
Рассмотрим окрестность точки $\overrightarrow{x_0}$ - $U(\overrightarrow{x_0})$, она является открытым и выпуклым множеством.
Тогда $\forall \overrightarrow{x^*} \in U(\overrightarrow{x_0})$ эту точку $\overrightarrow{x^*}$ можно соединить отрезком с точкой $\overrightarrow{x_0}$, тогда

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t(\overrightarrow{x^*} - \overrightarrow{x_0}), 0 \leq t \leq 1$$

Рассмотрим теперь f только на этом отрезке и получим, что $f(\overrightarrow{x}) = \varphi(t)$ - некой функции, зависящей от одной переменной t и дифференцируемой n раз.
Тогда для нее справедлива формула Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi^{'}(0)t}{1!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)t^{n-1}}{(n-1)!} + r_{n-1}$$

Посчитаем производные φ:

$$\varphi(0) = f(\overrightarrow{x_0})$$

$$\varphi(1) = f(\overrightarrow{x^*})$$

$$\varphi^{'}(t)|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0})\triangle \overrightarrow{x_i} = df(\overrightarrow{x_0})$$

$$\varphi^{''}(t)|_{t=0} = \sum \frac{\partial^2 f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_i \partial x_j}\triangle \overrightarrow{x_i}\triangle \overrightarrow{x_j} = d^2 f(\overrightarrow{x_0})$$

$$\varphi^{(n-1)}(t)|_{t=0} = d^{n-1} f(\overrightarrow{x_0})$$

$$r_{n-1} = \frac{\varphi^{(n)}(\theta)t^n}{n!} = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})t^n}{n!}|_{t=1} = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})}{n!}$$

(Значение берем в точке $t = 1$, так как наша цель и есть получение разложения в конечной точке, то есть, при $t = 1$).
Тогда $\varphi(t) = f(\overrightarrow{x_0}) + \frac{df(\overrightarrow{x_0})}{1!} + \frac{d^2 f(\overrightarrow{x_0})}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f(\overrightarrow{x_0})}{(n-1)!} + r_{n-1}(f)$, где $r_{n-1}(f)|_{t=1} = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})}{n!}$, что и требовалось доказать.

Следствие:

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\overrightarrow{x_0})}{n!} + o(\|\triangle x\|^n)$$

$$r_{n-1}(f) = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})}{n!}$$

$$d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x}) = d^n f(\overrightarrow{x_0}) + \sum \alpha_{i_1 \ldots i_k} \triangle x_{i_1} \triangle x_{i_2} \ldots \triangle x_{i_n}$$

По определению непрерывной функции: $f(\overrightarrow{x_0} + \triangle \overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \alpha(\triangle \overrightarrow{x})$.

$$\frac{\partial^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial^n f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n}$$

Заметим, что $|\triangle x_i| \leq \|\triangle \overrightarrow{x}\|$ и $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда

$$|r_n(f)| \leq \frac{\sum |\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n}| \|\triangle \overrightarrow{x}\|^n}{n!}$$

Так как слагаемых конечное число, а $\forall \alpha \to 0$, то:

$$\frac{r_n(f)}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|^n} \to 0 \text{ -- формула Пеано}$$

17. Экстремумы функции нескольких переменных.

Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, определенная на области $g, \overrightarrow{x_0} \in g$.
Точка $\overrightarrow{x_0}$ называется точкой максимума (минимума) для $f(\overrightarrow{x})$, если $\exists U(\overrightarrow{x_0})$ такая, что

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0}) : f(\overrightarrow{x_0}) > (<) f(\overrightarrow{x})$$

Минимум и максимум бывают строгими и нестрогими.

Необходимое условие экстремума.
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ в некоторой точке $\overrightarrow{x_0}$ имеет экстремум. Тогда

$$\exists f'_{x_i}(\overrightarrow{x_0}), f'_{x_i}(\overrightarrow{x_0}) = 0$$

Доказательство:
Пусть $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, зафиксируем все координаты, кроме i-той, тогда получим функцию
$\varphi(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$, зависящую от одной переменной и имеещую экстремум в точке x_i^0, тогда
$\varphi'(x_i) = 0 = f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0) = f'_{x_i}(\overrightarrow{x_0})$, что и требовалось доказать.
Следствие: если $f(\overrightarrow{x})$ дифференцируема в $\overrightarrow{x_0}$ и $\overrightarrow{x_0}$ - точка экстремума, то $df(\overrightarrow{x_0}) = 0$.

Достаточное условие экстремума.
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ имеет вторые частные производные, $df(\overrightarrow{x_0}) = 0$.
Тогда, если $d^2 f(\overrightarrow{x_0}) > 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка минимума,
если $d^2 f(\overrightarrow{x_0}) < 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка максимума.
Доказательство:
Рассмотрим какую-то проколотую окрестность точки $\overrightarrow{x_0}$:
$\forall \overrightarrow{x} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0})$:
Функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка в $\overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0})$, следовательно, ее можно разложить по формуле Тейлора в точке $\overrightarrow{x_0}$:

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + df(\overrightarrow{x_0}) + \frac{d^2 f(\overrightarrow{x_0})}{2} + o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)$$

$df(\overrightarrow{x_0}) = 0$ по условию, тогда

$$\triangle f = f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{d^2 f(\overrightarrow{x_0})}{2} + o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|)$$

$$d^2 f(\overrightarrow{x_0}) = \sum A_{ij} \triangle x_i \triangle x_j = \|\triangle \overrightarrow{x}\|^2 \sum A_{ij} \xi_i \xi_j,$$

где

$$\xi_i = \frac{\triangle \overrightarrow{x_i}}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|}, \xi_j = \frac{\triangle \overrightarrow{x_j}}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|}$$

$$\|\triangle \overrightarrow{x}\|^2 \sum A_{ij} \xi_i \xi_j \geq \gamma \|\triangle \overrightarrow{x}\|^2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle f \geq \|\triangle \overrightarrow{x}\|^2 \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|^2)}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|^2}\right)$$

$\frac{o(\|\triangle \overrightarrow{x}\|^2)}{\|\triangle \overrightarrow{x}\|^2} \to 0$ при $\triangle \overrightarrow{x} \to 0$, тогда
отсюда следует, что $\exists \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0})$ такая, что $\gamma > 0, \Rightarrow \triangle f > 0 \Rightarrow \overrightarrow{x_0}$ - точка минимума, что и требовалось доказать. Аналогично с точкой максимума.

Теорема:
Если $d^2 f(\overrightarrow{x_0})$ неопределена, то в этой точке функция не имеет экстремума, такую точку принято называть седлообразной.
Доказательство:
Если $\overrightarrow{x_0}$ - экстремальная точка, то $d^2 f(\overrightarrow{x_0})$ всегда определена однозначно

$(\leq / \geq)$.

18. Условные экстремумы.

Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, а также $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ - уравнение связи (k - мерное, $k < m$).
Пусть множество $E = \{\overrightarrow{x} \in R^m \mid \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = 0\}$;
Тогда $\overrightarrow{x_0}$ является точкой условного минимума (максимума) $f(\overrightarrow{x})$ при условии $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = 0$, если

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0}) \cap E : f(\overrightarrow{x_0}) > (<) f(\overrightarrow{x})$$

Условный экстремум бывает строгим и нестрогим.

Метод множителей Лагранжа нахождения условного экстремума.
Пусть дана $f(\overrightarrow{x}), g_1(\overrightarrow{x}) \ldots g_k(\overrightarrow{x})$ - функции связи.
Составим $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}) = f(\overrightarrow{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(\overrightarrow{x})$

$$\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), L_{x_j} = f'_{x_j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g'_{x_j}(\overrightarrow{x}), L_{\lambda_i} = g_i(\overrightarrow{x})$$

Точка $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ называется стационарной, если $L_{x_j} = 0, L_{\lambda_i} = 0$.

Теорема 1:
Пусть дана $f(\overrightarrow{x})$ и набор связей $g(\overrightarrow{x}) = 0$, а также:
1) $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного экстремума.
2) $f(\overrightarrow{x})$ и $g_i(\overrightarrow{x})$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$.
3) $rank \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} = k$.
Тогда $\exists \overrightarrow{\lambda_0}$, что $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка функции $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda})$.
Доказательство:
Пусть определитель матрицы, состоящей из первых k столбцов матрицы частных производных, не равен нулю:

$$det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{bmatrix} \neq 0$$

Тогда:

$$\begin{cases} g_1(\overrightarrow{x}) = 0 \\ \dots \\ g_k(\overrightarrow{x}) = 0 \end{cases}$$

И по теореме о неявной функций эта система задает функцию

$$g_i(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = 0,$$

которую можно решить относительно первых k переменных. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_{k+1}, \dots, x_m) \\ \dots \\ x_k = x_k(x_{k+1}, \dots, x_m) \end{cases} \quad \text{в некоторой окрестности } \widetilde{U}(\overrightarrow{x_0}).$$

$\overrightarrow{x_0}$ - точка условного экстремума, пусть, для определенности, точка минимума. Тогда

$$\forall \overrightarrow{x} \in \widetilde{U} \cap E (E = \{x \in R^m \mid \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = 0\}) : f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{x_0})$$

Пусть $\widetilde{\widetilde{U}}(\overrightarrow{x_0}) = \widetilde{U}(\overrightarrow{x_0}) \cap U(\overrightarrow{x_0})$.
$g_i(x_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, x_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) \equiv 0$, тогда по свойству инвариантности формы первого дифференциала:

$$dg_i(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j \equiv 0$$

Возьмем $\overrightarrow{x} \in \widetilde{\widetilde{U}} \cap E$:
$f(\overrightarrow{x}) = f(x_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, x_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) \geq f(\overrightarrow{x_0})$.
Но $f(\overrightarrow{x})$ это некоторая $\widetilde{f}(x_{k+1}, \dots, x_m)$, а $f(\overrightarrow{x_0})$ это некоторая $\widetilde{f}(x^0_{k+1}, \dots, x^0_m)$
Тогда $\widetilde{f}(x_{k+1}, \dots, x_m) \geq \widetilde{f}(x^0_{k+1}, \dots, x^0_m)$, следовательно, точка $\overrightarrow{x} = (x^0_{k+1}, \dots, x^0_m)$ - точка обыкновенного минимума функции $\widetilde{f} \Rightarrow d\widetilde{f}(x^0_{k+1}, \dots, x^0_m) = 0$
Но $d\widetilde{f}(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j} dx_j = 0$
Возьмем некий $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j} dx_j = 0$$

Поменяем местами знаки суммы, чтобы вынести за скобки суммирование по j:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j}dx_j=0$$

$$\sum_{j=1}^{m}(\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j})dx_j=0$$

Отсюда следует, что выражение под знаком суммы равно нулю:

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0$$

Теперь если из этой суммы взять первые k слагаемых и приравнять нулю (остальные $(k+1\dots m)$ слагаемые не играют роли, поскольку они независимы), то так как якобиан не равен нулю, а требуется, чтобы сумма элементов матрицы Якоби, помноженных на λ_i, была равной нулю, то это обычная линейная система, у которой существует единственное решение - набор λ_i^0.
$\exists!\lambda_i^0 : \sum_{i=1}^{k}(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^0\frac{\partial g_i}{\partial x_j})dx_j=0$
Заметим, что искомая сумма, которую мы получили, это не что иное, как L_{x_j}, она равна нулю. Кроме того, $L_{\lambda_i}=(\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j})'_{\lambda_i}=g_i=0$, так как это уравнение связи.
Тогда, действительно, мы нашли стационарную точку, что и требовалось доказать.
Теорема 2:
Пусть $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного экстремума функции, а также выполнены все условия теоремы 1. К тому же $f(\overrightarrow{x})$ и $g(\overrightarrow{x})$ имеют вторые непрерывные производные.
Тогда $d^2_{xx}L(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{\lambda_0})\geq(\leq)\ 0$ - если в точке достигается минимум (максимум).
$(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка $L(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda})$.

Теорема 3 (о достаточном условии условного экстремума):
Пусть дана $f(\overrightarrow{x})$ и связь $g(\overrightarrow{x})=0$, а также выполнены условия теоремы 1, $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка $L(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\lambda})$.
Пусть также существуют вторые непрерывные производные $f(\overrightarrow{x})$ и $g(\overrightarrow{x})$.

Тогда:
Если $d^2_{xx}L(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0}) > 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного минимума.
Если $d^2_{xx}L(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0}) < 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного максимума.

19. Понятие о мере Жордана.
E - клетка. В R_1 это отрезок, в R_2 - прямоугольник, в R_3 - прямоугольный паралеллепипед, и так далее.
Мерой клетки $\mu(E)$ будем называть $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Критерий измеримости множества.
Множество g измеримо $\iff$ g ограничено и $\mu(\partial g) = 0$.

20. Кратный интеграл Римана.
Дано D - измеримое множество. $f(\overrightarrow{x})$ задана на D, $\overrightarrow{x} \in D \subset R^n$.
$D = \cup_{i=1}^n D_i, D_i$ - измеримо, $D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j, \mu(D) = \sum_{i=1}^n \mu(D_i)$.
$d(D_i)$ - диаметр куска $= sup \rho(x, y) = d_i$.
T - разбиение - множество всех $d_i, \lambda(T) = max d_i$ - мелкость разбиения.
$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\overrightarrow{\xi_i})\mu(D_i)$ - интегральная сумма.
Число I называется интегралом $f(\overrightarrow{x})$ на области D, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$ $\lambda(T) < \delta \Rightarrow |I - \sigma_T(f, \xi)| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_T(f, \xi)$$

В $R^2 : I = \iint f(x, y) dxdy$.

Необходимое условие интегрируемости.
Если функция интегрируема, то она ограничена.

Критерии интегрируемости функции.
1) Для того, чтобы функция была интегрируема на области D, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow S_T - s_T < \varepsilon,$$

где S_T и s_T - верхняя и нижняя суммы Дарбу.

2) Для того, чтобы **ограниченная** функция была интегрируема на измеримом множестве D, небходимо и достаточно, чтобы $I_* = I^*$, где I_* -

нижний интеграл Дарбу, а I^* - верхний интеграл Дарбу.

3) Ограниченная функция интегрируема на измеримом множестве тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T : S_T - s_T < \varepsilon$$

Классы интегрируемых функций.
1) Если функция непрерывна на измеримом и ограниченном компакте D, то она интегрируема.

2) Пусть функция ограничена, задана на измеримом компакте D, а также имеет точки разрыва на множестве E, мера которого равна нулю. Тогда эта функция интегрируема.
Доказательство:
Пусть $M = sup(|f(\overrightarrow{x})|)$. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon : \mu(A_E) < \frac{\varepsilon}{4M}, E \subset A_\varepsilon$.
Будем считать, A_ε - открытое множество. Тогда $D \backslash A_\varepsilon$ - замкнутое множество $\Rightarrow$ оно компактно, причем на нем $f(\overrightarrow{x})$ непрерывна, $\Rightarrow$ она на нем интегрируема. Это значит, что мы можем по нашему ε найти $T^{'}$ - разбиение $D \backslash A_\varepsilon$, такое, что $S_{T'} - s_{T'} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Тогда $T = T^{'} \cup A_\varepsilon$ - разбиение D.

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\mu_i = (M_\varepsilon - m_\varepsilon)\mu(A_\varepsilon) + (S_{T'} - s_{T'})$$

Во-первых, $S_{T'} - s_{T'} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Во-вторых, $|(M_\varepsilon - m_\varepsilon)\mu(A_\varepsilon)| \leq |M_\varepsilon \mu(A_\varepsilon)| + |m_\varepsilon \mu(A_\varepsilon)| \leq 2M\mu(A_\varepsilon) < \frac{2\varepsilon M}{4M} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Тогда сумма меньше ε, что и требовалось доказать.

21. Свойства кратного интеграла.
1) $\int_D 1 d\mu = \mu(D)$.
2) $f(\overrightarrow{x}) \geq 0 \Rightarrow \int_D f(\overrightarrow{x}) d\mu \geq 0$.
3) $\int_D (\alpha f(\overrightarrow{x}) + \beta g(\overrightarrow{x})) d\mu = \alpha \int_D f(\overrightarrow{x}) d\mu + \beta \int_D g(\overrightarrow{x}) d\mu$.
4) Если $\forall \overrightarrow{x} : f(\overrightarrow{x}) \geq g(\overrightarrow{x})$, то $\int_D f(\overrightarrow{x}) d\mu \geq \int_D g(\overrightarrow{x}) d\mu$.
5) $\int_D f(\overrightarrow{x}) d\mu = \int_{D_1} f(\overrightarrow{x}) d\mu + \int_{D_2} f(\overrightarrow{x}) d\mu$, если $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$.
6) f - интегрируема, $\Rightarrow |f|$ - также интегрируема.
Доказательство:

$$|\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu| \le \int_D |f(\overrightarrow{x})|d\mu$$

7) Теорема о среднем:
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ - непрерывная на связном измеримом компакте D функция.
Тогда
$\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu = f(\overrightarrow{\xi})\mu D, , \xi$ - внутренняя точка D.

22. Сведение двойного интеграла к повторному.

Теорема 1.
$D = [a;b] \times [c;d], f(x,y)$ - интегрируема и ограничена на D.
$\forall x \in [a;b] \ \exists \int_c^d f(x,y)dy$
Тогда $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ и $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.
Доказательство:
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ - разбили отрезки на части.
Возьмем D_{ij} - один из прямоугольников, $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
На этом прямоугольнике:

$$m_{ij} = inf f(x,y) f(x,y) \le sup f(x,y) = M_{ij}$$
$$m_{ij} \triangle y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \le M_{ij} \triangle y_j$$

Просуммируем:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \triangle y_j \le \int_c^d f(x,y)dy \le \sum_{j=1}^m M_{ij} \triangle y_j$$

Пусть $\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$.
$F(x)$ - ограничена, $\Rightarrow intF(x) = m_i \le F(x) \le M_i = supF(x)$
Тогда

$$\begin{cases} \text{На отрезке } [x_{i-1}, x_i] : F(x) \le M_i \le \sum_{j=1}^m M_{ij} \triangle y_j \\ \text{На отрезке } [x_{i-1}, x_i] : F(x) \ge m_i \ge \sum_{j=1}^m m_{ij} \triangle y_j \end{cases} \qquad \text{(неравенство 1)}$$

Домножим m_i и M_i на $\triangle x_i$:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \triangle y_j \triangle x_i \le m_i \triangle x_i \le M_i \triangle x_i \le \sum_{j=1}^m M_{ij} \triangle y_j \triangle x_i$$

Просуммируем по $i \in 1..n$:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\triangle y_j\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\triangle y_j\triangle x_i$$

Заметим, что $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\triangle y_j\triangle x_i$ - нижняя сумма Дарбу ($s_T(f(x,y))$), $\sum_{i=1}^{n} m_i\triangle x_i$ - тоже нижняя сумма Дарбу ($s_T(F)$)
$\sum_{i=1}^{n} M_i\triangle x_i$ - верхняя сумма Дарбу ($S_T(F)$), $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\triangle y_j\triangle x_i$ - тоже верхняя сумма Дарбу ($S_T(f(x,y))$).
Получаем, что

$$S_T(F) - s_T(F) \leq S_T(f) - s_T(f)$$

Но f интегрируема на $D, \Rightarrow$ можно добиться того, что $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ (по критерию интегрируемости).
Тогда и $S_T(F) - s_T(F) < \varepsilon \Rightarrow \exists \int_a^b F(x)dx \Rightarrow \exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.
Осталось доказать, что полученный повторный интеграл равен двойному:
Проинтегрируем неравенство 1:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\triangle y_j\triangle x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)dx \leq \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\triangle y_j\triangle x_i$$

Просуммируем по i:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\triangle y_j\triangle x_i \leq \int_a^b F(x)dx \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\triangle y_j\triangle x_i$$

$$s_T(F) \leq \int_a^b F(x)dx \leq S_T(F)$$

Но $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b\int_c^d f(x)dx$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.
Пусть D - измерима и элементарна по y, $f(x,y)$ интегрируема на $D, \forall x \in [a;b]\ \exists \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.
Тогда $\exists \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и $\exists \iint_D f(x,y)dxdy$, причем $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$.
Доказательство:

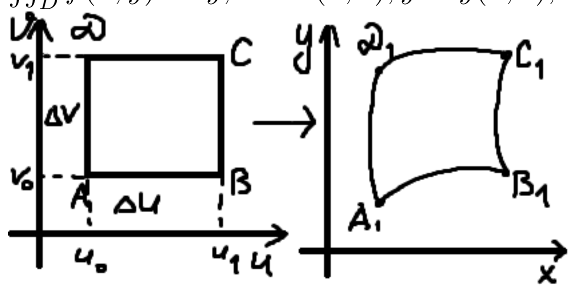
$\exists [a;b] \times [c;d] = \prod$ - какой то прямоугольник, такой, что $D \subset S$.
Пусть $c = inf\varphi(x), d = sup\psi(x)$:
Пусть $\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \in \prod \backslash D \end{cases}$,
$\widetilde{f}(x,y)$ интегрируема на D и на $\prod \backslash D$
Это значит, что $\exists \iint_{\prod} \widetilde{f}(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{\prod \backslash D} 0dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \widetilde{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx(\int_c^{\varphi(x)} 0dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dxdy + \int_{\psi(x)}^d 0dy) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, что и требовалось доказать.

Вычисление тройных интегралов.
Теорема:
Пусть дана функция $f(x,y,z)$, ограниченная и интегрируемая в D - области, элементарной по z.
Также $\forall (x,y) \in g \ \exists \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$
Тогда $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_g dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$.
Доказывается так же, как и сведение двойного интеграла к повторному, но с оговоркой:
$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{\text{проекция} S_x(D)} f(x,y,z)dz$, S_x - сечение плоскостью $x = const$.

23. Замена переменных в кратном интеграле.
Дана область $D \subset R^m$, $\overrightarrow{g} : D \to D' \subset R^m$
$\overrightarrow{g} : \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_m) \\ x_2 = x_2(u_1, \ldots, u_m) \\ \ldots \\ x_m = x_m(u_1, \ldots, u_m) \end{cases}$, $\overrightarrow{g}$ дифференцируема на D.
$\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ - равномерно непрерывна и ограничена на D.

$$|I(\frac{x_1 \ldots x_m}{u_1 \ldots u_m})| \geq \alpha > 0$$

$\iint_D f(x,y)dxdy, x = x(u,v), y = y(u,v), R^2 \to R^2$



$S = |\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1D_1}| = |det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{bmatrix}| = |I|(\frac{x,y}{u,v})$ - якобиан.

Таким образом, нашим "коэффициентом" при замене координат является якобиан!

Тогда запишем конечную формулу:

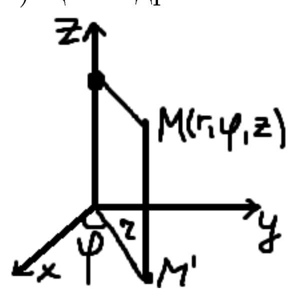
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} |I|\widetilde{f}(u,v)dudv$$

<u>Полярная, цилиндрическая, сферическая система координат.</u>

1) Полярные координаты:

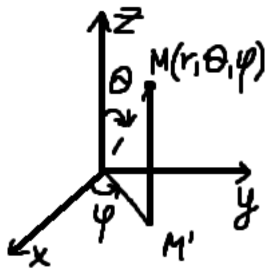
$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}, |I| = r$$

2) Цилиндрические координаты.



$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}, |I| = r$$

3) Сферические координаты.



$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases} \quad ,|I| = r^2 sin\theta$$

24. Несобственные кратные интегралы.

Дана область $g \subset R^2, f(x,y)$ интегрируема на каждом измеримом $g^{'} \subset g$. Тогда будем называть несобственным кратным интегралом:

$$\iint_g f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{g_n} f(x,y)dxdy$$

$\{g_n\}$ - последовательность, исчерпывающая g.

Теорема о несобственном интеграле от неотрицательной функции.

Если $f(x,y) \geq 0$ на g, то определение несобственного кратного интеграла не зависит от выбора последовательности $\{g_n\}$.

Доказательство:

I. Возьмем две последовательности, g_n и $g_n^{'}$, которые исчерпывают g.

Тогда $\forall n\ \exists k(n) : \overline{g_n} \subset g^{'}_{k(n)}$.

Предположим, что это не так, тогда:

$\exists g_n : \exists x_1 \in g_n, x_1 \notin g_1^{'}; \exists x_2 \in g_n, x_2 \notin g_2^{'}; \ldots \exists x_m \in g_n, x_m \notin g_m^{'}$

Полученная последовательность $\{x_m\}$ входит в g_n и является ограниченной, следовательно, из нее можно выделить сходящую к x_0 подпоследовательность, тогда x_0 будет являться предельной точкой для $\overline{g_n}$,

$x_0 \in \overline{g_n} \subset g_{n+1} \subset g$.

Рассмотрим теперь последовательность $g_n^{'}$:

$x_0 \in g \Rightarrow x_0 \in g_k^{'} \Rightarrow \exists U_\varepsilon(x_0) \subset g_k^{'}$, тогда, так как $x_m \to x_0$, то можно по ε найти n_0, что $\forall n \geq n_0 : x_n \in U_\varepsilon(x_0) \in g_k^{'}$, таким образом, если взять $n > k$, то $x_n \in g_k^{'}$, но по нашему предположению x с такими номерами не долж-

ны попадать в $g_k^{'}$, противоречие. Следовательно, $\forall n\ \exists K(n) : \overline{g_n} \subset g_{K(n)}^{'}$.
II. $f \geq 0$, кроме того, если одна из двух данных последовательностей имеет конечный предел, то конечный предел имеет и другая.
Пусть $\alpha_n = \iint_{g_n} f, \beta_n = \iint_{g_n^{'}} f$
$\overline{g_n} \subset g_{n+1} \Rightarrow \alpha_n$ и β_n - возрастают.
1) Так как $\overline{g_n} \subset g_{n+1}$, то $\alpha_n \leq \beta_k$ (если $f \geq 0$, то чем больше область, тем больше интеграл).
Пусть $\alpha_n \to a,\ \beta_k \to b$, тогда $\alpha \leq \beta$.
Но последовательности g_n и $g_n^{'}$ равноправны.
2) Тогда $\forall n\ \exists k(n) : \overline{g_n^{'}} \subset g_{k(n)}$.
Это значит, что $\beta_k \leq \alpha_n$
Получили, что $\alpha_n \leq \beta_k$ и $\beta_k \leq \alpha_n$, тогда $\alpha_n = \beta_k$, что и требовалось доказать.

<u>Признаки сходимости.</u>
1) $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$
$\iint g$ сходится $\Rightarrow \iint f$ сходится.
$\iint f$ расходится $\Rightarrow \iint g$ расходится.

2) Предельный признак сравнения:
Если $lim \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = l(\neq 0) \Rightarrow \iint f$ и $\iint g$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Необходимое и достаточное условие интегрируемости несобственного интеграла от функции, меняющей знак.</u>
Пусть функция $f(x,y) \geq 0$, введем две функции:

$$f_+ = \begin{cases} f, f > 0 \\ 0, f < 0 \end{cases}$$

$$f_- = \begin{cases} -f, f < 0 \\ 0, f > 0 \end{cases}$$

f_+, f_- - положительные.

<u>Необходимое условие:</u>
Если f интегрируема, то она абсолютно интегрируема. Доказательство:
Докажем это утверждение от противного. Пусть $\int_g |f| = +\infty$, возьмем

последовательность $\{g_n\}, \alpha_n = \int_{g_n} |f| \to +\infty$.
Тогда $\alpha_{n+1} \geq 3\alpha_n + 2n$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 2\alpha_n + 2n$$

$$\int_{g_{n+1}} |f| - \int_{g_n} |f| = \int_{g_{n+1} \setminus g_n} |f| > 2\alpha_n + 2n$$

$$\int_{g_{n+1} \setminus g_n} |f| = \int_{g_{n+1} \setminus g_n} f_+ + \int_{g_{n+1} \setminus g_n} f_-$$

Пусть $f_+ > f_-$, тогда

$$2\int_{g_{n+1} \setminus g_n} f_+ > \int_{g_{n+1} \setminus g_n} |f| > 2\alpha_n + 2n$$

$$\int_{g_{n+1} \setminus g_n} f_+ > \alpha_n + n$$

Так как по условию $\alpha_n = \int_{g_n} |f|$, то $\int_{g_{n+1} \setminus g_n} f_+ > \int_{g_n} |f| + n$
Распишем интеграл в левой части по определению:
$\sum m_n^i \mu(\omega_n^i) > \int_{g_n} |f| + n$, где ω_n^i - элементы разбиения по n (кусок плоскости). Выберем теперь такие элементы $\widetilde{\omega}_n^i$, где $m_n^i > 0$, тогда
$\sum m_n^i \mu(\omega_n^i) =$ (так как выкинули только слагаемые $= 0$) $= \sum m_n^i \mu(\widetilde{\omega}_n^i)$
$\sum m_n^i \mu(\widetilde{\omega}_n^i) > \int_{g_n} |f| + n$
Кроме того, теперь m_n^i - инфимум не для f_+, а для f, тогда и сумма $\sum m_n^i \mu(\widetilde{\omega}_n^i)$ - интегральная сумма не для f_+, а для f.
Пусть $A_n = \cup \widetilde{\omega}, B_n = A_n \cup g_n$, тогда:

$$\int_{A_n} f > \int_{g_n} |f| + n$$

Так как $f \geq -|f|$, то $\int_{g_n} f \geq -\int_{g_n} |f|$, тогда

$$\int_{B_n} f > n$$

$g_n \subset B_n$, так как $B_n = A_n \cup g_n$.
Кроме того, $B_n \subset g_{n+1}$, так как $A_n \subset g_{n+1} \setminus g_n$, следовательно, все точки A_n принадлежат g_{n+1}, а значит и все точки B_n принадлежат g_{n+1}.
$g_{n+1} \subset B_{n+1}$ по определению B_{n+1}.

А также, так как $B_n \subset g_{n+1}$, то и $\overline{B_n} \subset \overline{g_{n+1}}$, но $\overline{g_{n+1}} \subset g_{n+2} \subset B_{n+2}$, значит, $\overline{B_n} \subset B_{n+2}$ (это нормально, что через один, просто тогда выделим подпоследовательность с индексами через один, главное, что теперь B_n - исчерпывающая для g).
Но у нас $\int_{B_n} f > n \to \infty$, а значит, ни о какой сходимости речи быть не может, противоречие.

Достаточное условие:
Если f абсолютно интегрируема, то она интегрируема. Доказательство:
$f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$
$\int_g f = \int_g f_+ - \int_g f_-$, но $f_+ \leq |f|, f_- \leq |f|$
Тогда отсюда следует, что если f абсолютно интегрируема, то она интегрируема, что и требовалось доказать.

25. Кривые в пространстве. Параметризация кривой.
Кривая - $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), R^1 \to R^3, \alpha \leq t \leq \beta$
$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$\overrightarrow{r}(t)$ - непрерывна.
$\overrightarrow{r}(t)$ является гладкой, если $\exists x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)$, которые являются непрерывными.
$\overrightarrow{r}^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t))$ - касательная к кривой.

$$|\overrightarrow{r}^{'}(t)| \neq 0 \iff \overrightarrow{r}^{'}(t) \neq 0$$

Если существует конечное число частей $\overrightarrow{r}(t)$, в которой она гладкая, при этом $\overrightarrow{r}(t)$ непрерывна, то кривая называется кусочно-гладкой.
Будем говорить, что две функции $\overrightarrow{r}(t)$ и $\overrightarrow{\rho}(\tau)$ задают одну и ту же кривую, если $\exists t = t(\tau)$ - дифференцируемая функция, $t^{'}(\tau) > 0$, отображает $[a; b]$ на $[\alpha; \beta]$, и эта t такая, что $\forall \tau \in [a; b] : \overrightarrow{r}(t(\tau)) = \overrightarrow{\rho}(\tau)$
Если $t_1 \neq t_2, \overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{r}(t_2)$, то кривая имеет точку самопересечения.
Если кривая имеет лишь одну точку самопересечения, причем $\overrightarrow{r}(\alpha) = \overrightarrow{r}(\beta)$, то кривая называется простым замкнутым контуром.
Если взять $t = \alpha + \beta - \tau$, то новая кривая $\overrightarrow{r}(\alpha + \beta - \tau)$ - та же самая кривая, но с противоположным направлением обхода (ориентацией).

26. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
Пусть Γ - гладкая кривая, $f(x, y, z)$ - непрерывная функция в области $D \supset \Gamma$.

Криволинейным интегралом I рода от $f(x,y,z)$ по кривой Γ будем называть

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\|\overrightarrow{r}'(t)\|dt = \int_{\Gamma} f ds(dl)$$

Свойства криволинейного интеграла I рода.
1) Определение не зависит от параметризации кривой.
Доказательство:
Возьмем две кривые, $\overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{\rho}(t)$, а также функцию $t = t(\tau)$ такую, что $\overrightarrow{r}(t(\tau)) = \overrightarrow{\rho}(\tau), \alpha \le t \le \beta,\ a \le \tau \le b$
Подставим $t(\tau)$ вместо t:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\|\overrightarrow{r}'(t)\|dt = \int_{a}^{b} f(x(t(\tau)),y(t(\tau)),z(t(\tau)))\|\overrightarrow{r}'(t(\tau))\|t'(\tau)d\tau$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}$$

$\overrightarrow{r}(t(\tau)) = \overrightarrow{\rho}(\tau)$, продифференцируем по τ:

$$\overrightarrow{r}'_t * t'_\tau = \overrightarrow{\rho}'_\tau$$

С другой стороны:

$$\xi(\tau) = x(t(\tau)), \varphi(\tau) = y(t(\tau)), \nu(\tau) = z(t(\tau))$$

$$\overrightarrow{\rho}'(\tau) = (\xi'(\tau), \varphi'(\tau), \nu'(\tau))$$

Теперь приравняем разные определения $\|\overrightarrow{\rho}'(\tau)\|$:

$$\|\overrightarrow{r}'_t * t'_\tau\| = \sqrt{\xi_\tau'^2 + \varphi_\tau'^2 + \nu_\tau'^2} = \sqrt{(x_t' t_\tau')^2 + (y_t' t_\tau')^2 + (x_t' t_\tau')^2} = t'_\tau \|\overrightarrow{r}'_t\|$$

Выполним обратную подстановку, получим:

$$\int_{a}^{b} f(x(t(\tau)),y(t(\tau)),z(t(\tau)))\|\overrightarrow{r}'(t(\tau))\|t'(\tau)d\tau = \int_{a}^{b} f(\xi(\tau),\varphi(\tau),\nu(\tau))\|\overrightarrow{\rho}'_\tau\|d\tau$$

Получили такой же интеграл, что и требовалось доказать.

2) Определение не зависит от направления кривой.

Доказательство:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\|\overrightarrow{r}'(t)\|dt$$

Возьмем подстановку $t = \alpha+\beta-\tau$, чтобы изменить ориентацию кривой:

$$\int_\beta^\alpha f(x(\alpha+\beta-\tau),y(\alpha+\beta-\tau),z(\alpha+\beta-\tau))\|\overrightarrow{r}'_t(\alpha+\beta-\tau)\|(-d\tau) = \int_\alpha^\beta \dots d\tau$$

(поменяли пределы интегрирования местами, так как убрали минус из под дифференциала).
Пусть

$$\xi(\tau) = x(\alpha+\beta-\tau), \varphi(\tau) = y(\alpha+\beta-\tau), \nu(\tau) = z(\alpha+\beta-\tau)$$

Посчитаем $\|\overrightarrow{r}'_\tau(\alpha+\beta-\tau)\|$:

$$\|\overrightarrow{r}'_\tau(\alpha+\beta-\tau)\| = \|\overrightarrow{r}'_t * (-1)\| = \|\overrightarrow{r}'_t\|$$

Тогда выполним обратную подстановку, получим:

$$\int_\alpha^\beta f(x(\alpha+\beta-\tau),y(\alpha+\beta-\tau),z(\alpha+\beta-\tau))\|\overrightarrow{r}'_t(\alpha+\beta-\tau)\|d\tau = \int_\alpha^\beta f(\xi(\tau),\varphi(\tau),\nu(\tau))\|\overrightarrow{r}'_\tau\|d\tau$$

Получили такой же интеграл, что и требовалось доказать.

3) Криволинейный интеграл I рода - линейная функция.
4) Криволинейный интеграл I рода - аддитивная функция.
5) Криволинейный интеграл I рода можно задать через интегральную сумму:

$$f(x,y,z)dl = \sum f(x(\overrightarrow{t_i}),y(\overrightarrow{t_i}),z(\overrightarrow{t_i}))\|\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{t_i})\|\triangle\overrightarrow{t_i} = \sum f(\overrightarrow{M_i})S_i$$

27. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
$\Gamma : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{F} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, $R^3 \to R^3 \overrightarrow{F}$ непрерывна в D
Криволинейным интегралом II рода от функции $\overrightarrow{F}$ по кривой Γ будем называть

$$\int_a^b \overrightarrow{F}\overrightarrow{r}'(t)dt = \int_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt$$

Чаще применяют следующую запись:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

Свойства криволинейного интеграла II рода.
1) Не зависит от параметризации кривой.
2) **Зависит** от направления кривой. Доказательство:
Возьмем подстановку $t = \alpha + \beta - \tau$, поменяв таким образом ориентацию кривой.
Вычислим интеграл:

$$\int_\beta^\alpha \overrightarrow{F}(\xi(\tau), \varphi(\tau), \nu(\tau))r^{'}(\tau)d\tau = -\int_\alpha^\beta \overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t))r^{'}(t)dt$$

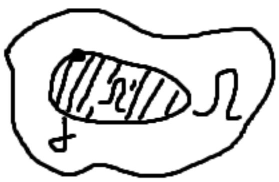
Мы получили интеграл, противоположный исходному по знаку, следовательно, интеграл зависит от направления кривой.
3) Криволинейный интеграл II рода - линейная функция.
4) Криволинейный интеграл II рода - аддитивная функция.
5) Криволинейный интеграл II рода можно задать через интегральную сумму:

$$\overrightarrow{F}\overrightarrow{r}'(t)dt = \sum(Px^{'}(t_i) + Qy^{'}(t_i) + Rz^{'}(t_i))\triangle t_i$$

28. Связь между интегралами первого и второго рода.

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \overrightarrow{F}\overrightarrow{r}'dt = \int_\alpha^\beta (\overrightarrow{F}\frac{\overrightarrow{r}'}{\|r^{'}\|})\|r^{'}\|dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta (Pcos\varphi + Qcos\theta + Rcos\gamma)\|r^{'}\|dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\overrightarrow{r_0}'dl$$

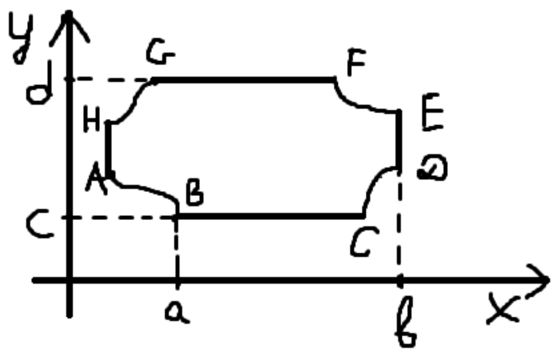
29. Формула Грина.
Введем понятие односвязной области:
Односвязная область - такая область, что любая простая замкнутая кривая, лежащая в этой области ограничивает часть плоскости, полностью лежащей в этой области.



Ω - односвязная область, γ - замкнутая простая кривая.
Ориентация кривой относительно области - обход кривой так, чтобы область оставалась **слева**. Такой обход назовем **положительным**:

Теорема Грина:
Пусть даны $P(x,y), Q(x,y)$ - непрерывно дифференцируемые функции, Ω - односвязная область, Γ - кусочно гладкий контур, граница области:

Тогда $\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ - формула Грина.
Доказательство:
Рассмотрим 3 случая:
1) Ω элементарна относительно x и y.



$\Omega = \{(x,y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} = \{(x,y) | c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$

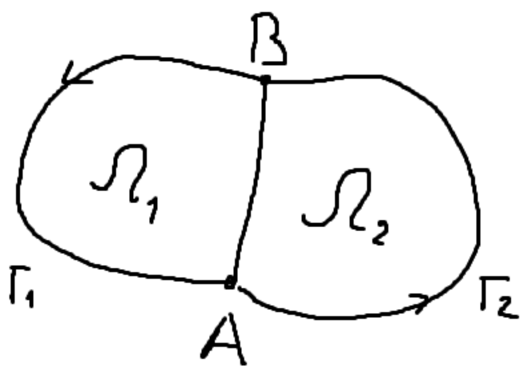
Тогда формула Грина справедлива. Доказательство:
Посчитаем $\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$:

$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d Q(x,y)|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y)dy - \int_c^d Q(x_1(y), y)dy = \int_{CDEF} Q(x,y)dy + \int_{GHAB} Q(x,y)dy + \int_{BC} Q(x,y)dy +$$

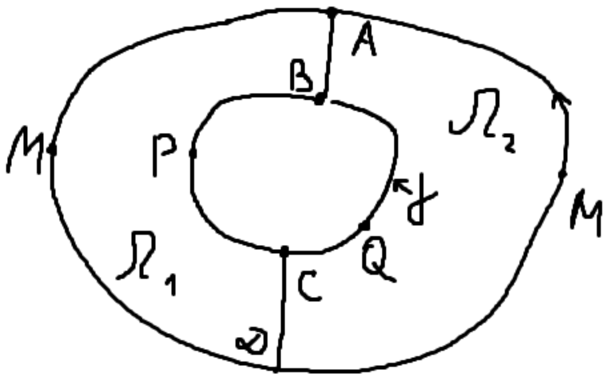
$$+ \int_{FG} Q(x,y) = \int_{CDEF} Q(x,y)dy + \int_{GHAB} Q(x,y)dy = \int_\Gamma Q(x,y)dy$$

Аналогично, $\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} = \int_\Gamma P(x,y)dx$, что и требовалось доказать.
2) Ω не элементарна, но делится на элементарные.



$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
$\int_{\Gamma_1 \cup AB} = \iint_{\Omega_1}$, $\int_{\Gamma_2 \cup AB^-} = \iint_{\Omega_2}$
Сложим эти два интеграла, получим интеграл по Ω, так как интегралы

по AB и AB^{-} сократятся, формула работает, что и требовалось доказать.
3) Ω не односвязна.



$\int_{AMDCPBA} = \iint_{\Omega_1}, \ \int_{ABQCDNA} = \iint_{\Omega_2}$
Если сложить эти два интеграла, то много чего сократится, останется сумма $\int_{\Gamma} + \int_{\gamma} = \iint_{\Omega}$, формула Грина справедлива, что и требовалось доказать.

Формула Грина помогает при вычислении площадей:
Пусть $Q(x,y) = x, P(x,y) = -y$, тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \int_{\Gamma} = 2S_{\Omega}$.

Теорема о свойстве дифференциального выражения $Pdx + Qdy$.
Пусть P, Q - непрерывно дифференцируемые функции, Ω односвязна.
Тогда для того, чтобы $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$, где γ - любой контур, лежащий в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$$

Доказательство:
I. Необходимость:
Пусть $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \iint_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 0$
Пусть также существует хоть одна точка M_0, где $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$, для определенности больше нуля.
$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} > 0$ в окрестности точки M_0.
Тогда в некоторой окрестности этой точки есть замкнутая область
$\Omega_1 \subset \Omega$, на которой $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \geq c > 0$

$$\int_{\gamma_{\Omega_1}} = \iint_{\Omega_1} (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) dxdy \geq c > 0$$

Получили противоречие тому, что $\iint_{\Omega_1} (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) dxdy = 0$.
II. Достаточность:
Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$:

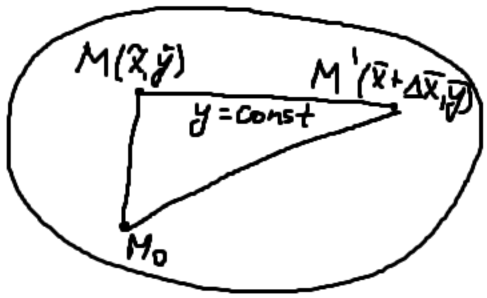
$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 0$$

Что и требовалось доказать.

Следствие:
Чтобы $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$.
Доказательство:
I. Необходимость:
Если интеграл не зависит от пути, то $\exists u : du = Pdx + Qdy$ (по теореме о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, она расположена ниже).
$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, доказано.

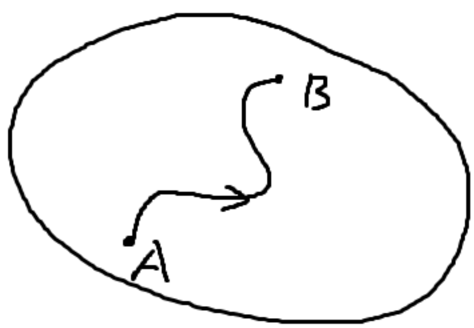
II. Достаточность:
Если условие выполняется, то интеграл по любому контуру равен нулю всегда, независимо от выбора пути.

Независимость криволинейного интеграла от выбора пути.
Для того, чтобы $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от выбора пути интегрирования в области Ω^{AB}, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая u, что $du = Pdx + Qdy$.
Доказательство:
I. Необходимость:
Пусть $\int_{AB}$ не зависит от пути.



Возьмем $M_0(x_0, y_0)$ и $M(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ - произвольные точки.
Рассмотрим $u(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_{M_0M} Pdx + Qdy$, докажем, что это именно та функция, которая нам нужна, для этого найдем производные:
Возьмем точки $\widetilde{x}, \widetilde{x} + \triangle\widetilde{x}$:
$u(\widetilde{x} + \triangle\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_{(x_0,y_0)}^{(\widetilde{x}+\triangle\widetilde{x},\widetilde{y})} Pdx + Qdy = \int_{M_0M} + \int_{MM'}$.
$\triangle u = \int_{MM'} Pdx + Qdy = \int_{MM'} Pdx = \int_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}^{(\widetilde{x}+\triangle\widetilde{x},\widetilde{y})} Pdx = P(\widetilde{x} + \theta\triangle\widetilde{x}, \widetilde{y})\triangle\widetilde{x}$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0} P(\widetilde{x} + \theta\triangle\widetilde{x}, \widetilde{y}) = P(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, аналогично и $\frac{\partial u}{\partial y}$, что и требовалось доказать.

II. Достаточность:
$\exists u : du = Pdx + Qdy$



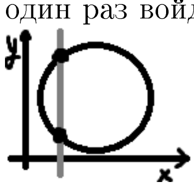
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt$$

$AB: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
$x(t_0) = x_A, y(y_0) = y_A, x(t_1) = x_B, y(t_1) = y_B$
Рассмотрим $u(x(t), y(t))_t^{'}|_0^1 = P(x(t), y(t))x^{'}(t) + Q(x(t), y(t))y^{'}(t)$
Тогда $\int_{AB} Pdx + Qdy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$, теперь важны только сами точки, но не путь, что и требовалось доказать.
Таким образом, если интеграл не зависит от выбора пути, то

$$\int_{AB} du = u(B) - u(A)$$

Honourable mentions:
Суммы Дарбу:
$m_i = inf_{\overrightarrow{x} \in D_i} f(\overrightarrow{x});\ M_i = sup_{\overrightarrow{x} \in D_i} f(\overrightarrow{x})$.
$s_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(D_i)$ - нижняя сумма Дарбу.
$S_T(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(D_i)$ - верхняя сумма Дарбу.

Интеграл Дарбу.
$sup\ s_T = I_*$ - нижний интеграл Дарбу.
$inf\ S_T = I^*$ - верхний интеграл Дарбу.

Элементарная область.
Область называется элементарной по y, если мы прямой вдоль оси Y один раз войдем в нее и один раз выйдем. Аналогично по другим осям.


- элементарная по y область.


- не элементарная по y область.

Исчерпывающая последовательность.
Дана g - неограниченная область в R^m
$\{g_n\}$ - множество открытых измеримых ограниченных множеств из R^m.
Тогда будем называть $\{g_n\}$ исчерпывающей последовательностью для g, если:

$$\forall n : \overrightarrow{g_n} \subset g_{n+1}, \cup_{n=1}^{\infty} g_n = g$$