

Конспект по матанализу за 4-й семестр.

Автор: Эмиль

4 апреля 2019 г.

Это конспект по матанализу за 4-й семестр. Любые предложения и сообщения об ошибках приветствуются, писать автору: t.me/buraindo

1 Поверхность

1.1 Поверхность

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ - кривая - отображение промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^3$ (или R^2).

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ - поверхность - отображение области $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3(x, y, z)$.

Записывается $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Для всех рассуждений будем предполагать, что x, y, z имеют непрерывные производные, а так же $rank \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$.

Если ранг равен 2, то поверхность назовем "хорошей", иначе, если ранг равен 1, то "плохой".

И тогда будем говорить, что $\vec{r}(t)$ - гладкая.

$\Omega \rightarrow \vec{r}(\Omega)$ - образ.

Если Ω отображается на свой образ $\vec{r}(\Omega)$ взаимно-однозначно, то $\vec{r}(\Omega)$

- **простая** поверхность.

ПРИМЕР:

$z = x^2 + y^2$ - параболоид, тогда $\vec{r} = (x, y, x^2 + y^2)$.

В общем виде это задание будет выглядеть так:

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$$

1.2 Край поверхности

Пусть Ω - ограниченная область, $\overrightarrow{\Omega}$ - замыкание $= \Omega \cup \partial\Omega$ (область плюс её граница).

Рассмотрим теперь $\partial\Omega$ - границу Ω :

$\partial\Omega : (u(t), v(t))$ - какая-то линия.

$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ - кривая, **край** поверхности, являющийся образом $\partial\Omega$.

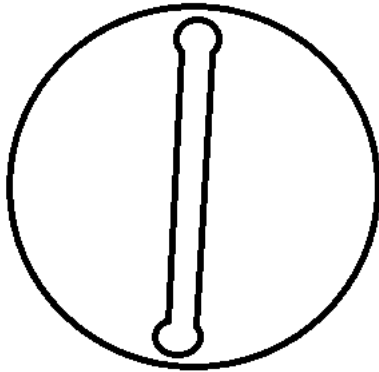
Будем обозначать за Σ саму поверхность $\overrightarrow{r}(u, v)$, а за $\partial\Sigma$ её край - $\overrightarrow{r}(u(t), v(t))$.

1.3 Почти простая поверхность

Определение: будем называть поверхность $\Omega \rightarrow \overrightarrow{r}(u, v)$ **почти простой**, если найдется такая исчерпывающая последовательность Ω_n , для которой каждая $\Omega_n \rightarrow \overrightarrow{r}(u, v)$ - простая поверхность.

Например, сфера и конус - не простые поверхности, но их можно немного изменить, чтобы они стали почти простыми:

Сфера:



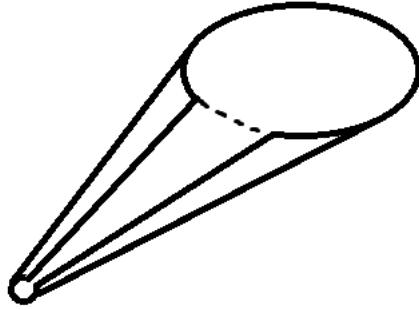
Вырежем из северного и южного полюсов сферы кружочки, а затем разрежем её от одного кружочка до другого. Этим действием мы немного изменили промежутки принимаемых углами φ и θ значений в сферических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

Конус:



Вырежем вершину конуса и разрежем его по вертикали. Этим действием мы немного изменили промежутки допустимых значений для радиуса r и угла φ в цилиндрических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

1.4 Функции, задающие одну и ту же поверхность

Пусть даны Ω и Ω' , а так же соответствия $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$.

Кроме того, пусть якобиан $[u_{u'} \quad u_{v'} v_{u'} \quad v_{v'}]$ не равен 0 (то есть, существует обратная функция).

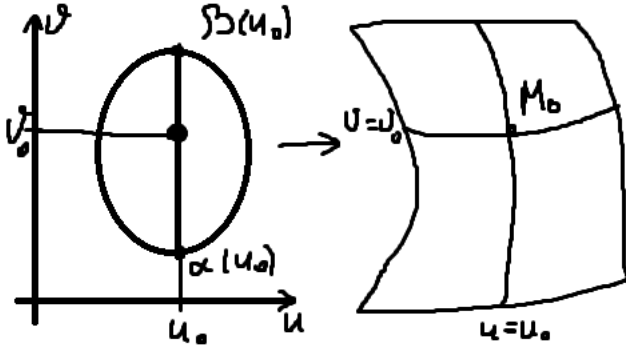
Это значит, что Ω отображается на Ω' взаимно-однозначно.

В таком случае будем считать, что

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \vec{\varrho}(u', v') - \Sigma$$

(задают одну и ту же поверхность).

1.5 Координатные кривые



Зафиксируем одну из координат, например, $u = u_0$, и будем менять v от $\alpha(u_0)$ до $\beta(u_0)$. Получим кривую $\vec{r}(u_0, v)$.

Аналогично, если зафиксировать $v = v_0$, то зададим кривую $\vec{r}(u, v_0)$.

Эти две кривые называются **координатными кривыми**.

1.6 Нормаль

Теперь рассмотрим \vec{r}_u, \vec{r}_v - касательные к кривой.

Пусть $A = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$, тогда если $\text{rank} A = 2$, то векторное произведение $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$.

Результат этого векторного произведения $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{n}$ является вектором **нормали** к поверхности Σ .

Убедимся, что нормаль не зависит от параметризации кривой:

Дано взаимно-однозначное отображение $\Omega \iff \Omega'$ и $\vec{r}(u, v) = \vec{\varrho}(u', v')$.

Посчитаем $\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}$:

Вспомним, что $\vec{\varrho}(u', v') = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v'))$, это значит, что

$$\vec{\varrho}_{u'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'},$$

$$\vec{\varrho}_{v'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

Перемножим, учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} + (\vec{r}_v \times \vec{r}_u) \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} =$$

$$= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) (\text{поменяли знак}) = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$$

Но этот якобиан не равен нулю!

Это значит, что получили тот же вектор нормали, у которого могла измениться лишь длина или направление, что и требовалось доказать.

1.7 Площадь поверхности

Даны Ω , $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Найдем дифференциал этого вектора:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

$$d\vec{r}^2 = |d\vec{r}|^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

Обозначим $E = \vec{r}_u^2$, $F = \vec{r}_u \vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v^2$.

$d\vec{r}^2$ называется первой квадратичной формой поверхности и для неё справедливо свойство:

$d\vec{r}^2 > 0$ (положительно определена)ю

Для того, чтобы это выполнялось (для нашей формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$), нужно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

В нашем случае второго дифференциала вектора \vec{r} это значит, что требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$

Первые два условия очевидны, проверим третье:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sin \varphi \quad (\varphi \neq 0)$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \cos \varphi$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 + (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2$$

Заметим, что правая часть это EG , а второе слагаемое в левой части это F^2 .

Тогда $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = EG - F^2 > 0$, так как $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, что и требовалось доказать.

Площадь поверхности

$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$ - площадь поверхности.

Свойства площади:

1) Не зависит от параметризации.

Пусть дали две параметризации:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\varrho}(u', v')$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| \, du' dv'$$

Вспомним, что $|\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| = |(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)| \cdot |I(\frac{u, v}{u', v'})|$.

Подставим это в интеграл:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot |I| du' dv' = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

Получили то же самое.

2) Рассмотрим случай, когда сама поверхность - плоскость. Сможем ли по той же формуле посчитать площадь? Проверим это, площадь это $\iint_{\Omega} dudv$.

Теперь посчитаем $S(\Omega)$:

Σ задается при помощи $\vec{r} = (x, y, 0)$.

Тогда $\vec{r}_x = (1, 0, 0)$

$\vec{r}_y = (0, 1, 0)$.

А $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}$, $\Rightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1$.

Тогда $S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| \, dudv = \iint_{\Omega} dudv$, что и требовалось доказать.

3) Площадь аддитивна по отношению к поверхности. (Площадь поверхности, составленной из гладких кусков, равно сумме площадей).

4) $z = f(x, y)$.

$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$.

$\vec{r}_x = (1, 0, f_x)$.

$\vec{r}_y = (0, 1, f_y)$.

$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = i(-f_x) - jf_y + \vec{k}$.

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{EG - F} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

ПРИМЕРЫ:

1) Посчитать площадь:

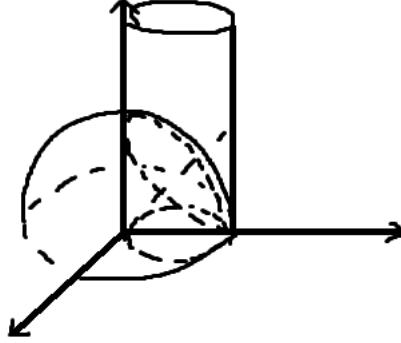
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где $z \geq 0$.

Это половина сферы, которую вырезает цилиндр:

$$x^2 + y^2 = Rx, \Rightarrow x^2 - Rx + \frac{x^2}{4} + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2, \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Это выглядит так:



Перейдем в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$$

Посчитаем частные производные по φ и θ :

$$\vec{r}_\varphi = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\theta = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta)$$

Теперь посчитаем E, F, G :

$$E = \vec{r}_\varphi^2 = R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta.$$

$$F = \vec{r}_\theta^2 = R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

$$F = 0 \text{ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \theta.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^? \sin \theta \, d\theta.$$

Осталось вычислить верхний предел интегрирования для θ , для этого нужно подставить сферические координаты в уравнение цилиндра:

$$R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \cos \varphi \sin \theta.$$

Отсюда либо $\sin \theta = 0$, либо $\sin \theta = \cos \varphi$.

Первое нас не интересует, а вот второе можно решить и получить ответ:

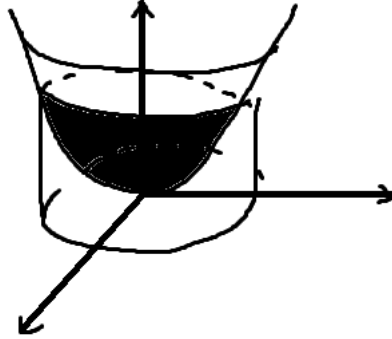
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \sin \theta \, d\theta = R^2(\pi - 2).$$

2) Посчитать площадь поверхности:

$z = x^2 + y^2$. Этот параболоид бесконечен, поэтому чтобы было, что считать, вырежем из него кусок $x^2 + y^2 = R^2$ и найдем площадь.

Вот как это выглядит:



Для этого перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = \varrho^2 \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varrho^2).$$

Посчитаем частные производные по ϱ и φ .

$$\vec{r}_{\varrho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2\varrho).$$

$$\vec{r}_{\varphi} = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0).$$

Теперь посчитаем E, F, G :

$$E = \vec{r}_{\varrho}^2 = 1 + 4\varrho^2.$$

$$F = \vec{r}_{\varphi}^2 = \varrho^2.$$

$F = 0$ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).

$$\sqrt{EG - F^2} = \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2}.$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho$$

Важная информация про почти простые поверхности:

Утверждение: если Σ - почти простая, а Ω_n - искомая исчерпывающая последовательность, то:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

2 Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть Σ - простая и гладкая поверхность. Дана $F(x, y, z)$ - непрерывная функция, определенная на Σ .

Поверхностным интегралом I рода от функции F по поверхности Σ называется:

$$\iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \iint_{\Sigma} F(x, y, z) ds(d\sigma)$$

Свойства поверхностного интеграла I рода:

1) Не зависит от параметризации поверхности (доказывается так же, как независимость площади поверхности от параметризации).

2) Аддитивность и линейность.

3) Можно дать физическую интерпретацию:

Если $F(x, y, z) \geq 0$, и это плотность слоя, "намазанного" на поверхность, то $\iint F d\sigma$ - масса слоя.

Вместо $d\sigma$ можно написать $\sqrt{EG - F^2} \, dudv$.

2.2 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть Σ - двусторонняя (бывают односторонние поверхности, например, лист Мёбиуса и бутылка Клейна (Кляйна)). Выберем сторону (это означает, выберем, куда "смотрит" нормаль).

У нас есть поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) \, d\sigma$, где $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Если поменять сторону, то поменяется знак за счёт смены направления вектора нормали на противоположное.

Отсюда вытекает свойство:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) \, d\sigma = - \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0^-) \, d\sigma$$

2.3 Как считать поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим $(\vec{F}, \vec{n}_0) = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = (\vec{F} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \, dudv$ (смешанное произведение).

Посчитаем его:

$$\begin{bmatrix} R & Q & Rx_u & y_u & z_u x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} dudv = \left(P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} (\text{поменяли знак}) + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

Рассмотрим $PI(\frac{y, z}{u, v}) dudv$:

Если угол между вектором нормали и осью x острый, то $I > 0$, иначе $I < 0$.

Тогда для острого угла $\iint PI dudv = \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$.

А для тупого угла $\iint PI dudv = - \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$.

Аналогично и другие слагаемые, тогда запишем сумму:

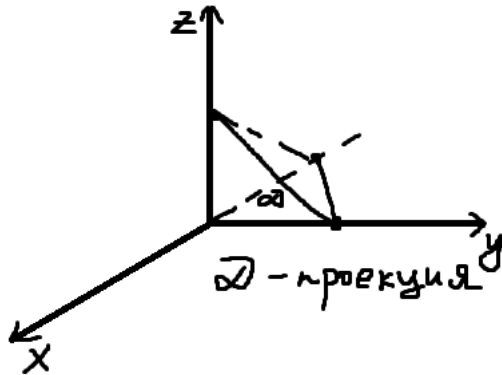
$$P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Тогда

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

ПРИМЕР:

Дан $\iint_{\Sigma} x dydz$, и вырезан прямоугольник $z + y - x = 1$, верхняя сторона.



Посчитаем:

$\iint_{\Sigma} x dydz = - \iint (z + y - 1) dydz$ (так как угол между нормалью и отсутствующей осью (в данном случае ось x) тупой).

$$- \iint (z + y - 1) dydz = - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z + (y - 1)) dz = \frac{1}{6}$$

3 Теория поля

$\Omega \subset R^3$.

I. Скалярное поле.

Если $\forall M \in \Omega \exists f(M)$ - число, тогда у нас на области Ω задано скалярное поле $f(M) = f(x, y, z)$.

Дифференцируемость.

Определение: будем называть $f(M)$ дифференцируемым в точке M_0 , если существует такой вектор \vec{c} , что

$$\Delta f(M_0) = \Delta \vec{r} \cdot \vec{c} + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

$$\vec{c} = \text{grad} f(M_0) = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right)$$

Гуманитарии могут делать так:

$$\sin x + \cos x = (\sin + \cos)x.$$

Мы сделаем так для градиента, но осознанно и опираясь на законы:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

Обозначим теперь $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ за ∇ (произносится "набла").

Это символический вектор, его координаты это вроде числа, но на самом деле, эта набла - целиком оператор и применяется к чему-то.

Тогда $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$.

$\vec{c} = \nabla f$, тогда

$$\Delta f = \Delta \vec{r} \cdot \nabla f = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) f + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

Производная по направлению.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t \vec{l}_0) - f(M_0)}{t}$$

Здесь $t > 0$, а \vec{l}_0 - орт направления.

Заметим, что числитель - приращение, так что можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t \vec{l}_0 \cdot \nabla + o(t)) f}{t} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) f$$

II. Векторное поле.

Если $\forall M \in \Omega \exists \vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, тогда на области Ω задано векторное поле $\vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Дифференцируемость.

Определение: будем называть $\vec{a}(M)$ дифференцируемым в точке M_0 , если его приращение можно представить в виде:

$$\Delta \vec{a}(M) = \vec{a}(M) - \vec{a}(M_0) = L(\vec{r}) + o(\|\vec{r}\|)$$

Тогда

$$\Delta \vec{a}(M) = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{a} + o(\|\vec{r}\|)$$

Производная по направлению.

$\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla)f$ - для скалярного поля. В случае векторного поля:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

ПРИМЕР:

$$\vec{a} = y \vec{i} + (xy + yz) \vec{j} + xyz \vec{k}$$

$$\vec{l} = (1, 1, 1), \vec{l}_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

1) $(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}$, и все это нужно применить к вектору \vec{a} .

2) $(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$ - рассмотрим результат по координатам:

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_x = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_y = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) (xy + yz) = \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_z = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) (xy) = \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}}$$

Тогда

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}} \vec{k}.$$

Введем понятия:

Пусть дано поле $\vec{a} = \vec{a}(M) = (P, Q, R)$.

Определение: **дивергенция** поля:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Определение: **ротатор** векторного поля:

$$\text{rot } \vec{a} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Упростим формулы для div и rot :

$div \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a})$ (скалярное произведение).

$rot \vec{a} = (\nabla \times \vec{a})$ (векторное произведение).

Действия с ∇ :

1)

$$\nabla(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2$$

2) Посчитаем $\nabla(f_1 f_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} f_1$$

Будем иметь ввиду, что ∇ действует на поле, когда пишем следующим образом:

$$\nabla(\overset{\downarrow}{f_1 f_2})$$

Здесь ∇ действует на поле f_1 .

Тогда $\nabla(f_1 f_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2) + \nabla(f_1 \overset{\downarrow}{f_2}) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$.

3) Посчитаем $\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$:

Формально это смешанное произведение, тогда

$$\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2)$$

4) $grad f = \nabla f$

5) $grad(f_1 f_2) = f_1 grad f_2 + f_2 grad f_1$

6) $div \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$

7) $rot \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

8) $div(f \cdot \vec{a}) = \nabla(f \cdot \vec{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{f} \cdot \vec{a}) + \nabla(f \cdot \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = \vec{a} \nabla f + f \nabla \vec{a} = \vec{a} grad f + f div \vec{a}$

9) $div(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 rot \vec{a}_1 - \vec{a}_1 rot \vec{a}_2$

10) $rot(f \vec{a}) = \nabla \times (f \vec{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{f} \vec{a}) + \nabla \times (f \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\nabla f) \times \vec{a} + f(\nabla \times \vec{a}) = grad f \times \vec{a} + f rot \vec{a}$

$$\begin{aligned}
11) \operatorname{rot}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + \nabla \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 = (\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2 (\nabla \vec{a}_1) + \\
&+ \vec{a}_1 (\nabla \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2 = (\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \operatorname{div} \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \operatorname{div} \vec{a}_2 - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2 \\
12) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) f = \\
&= \nabla^2 f = \Delta f.
\end{aligned}$$

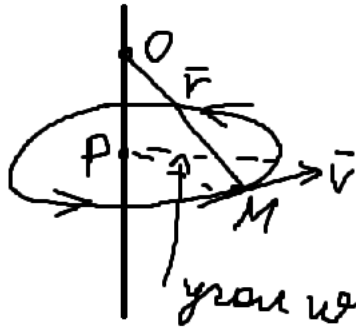
Δ - оператор Лапласа, $\Delta = \nabla^2$.

$$13) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

$$14) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla \cdot f) = 0.$$

Экскурс в физику - физический смысл ротора

Пусть дали твердое тело, оно вращается вокруг какой то оси, пусть по часовой стрелке:



$$|\vec{v}| = PM(\text{радиус}) \cdot \omega.$$

Вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$ параллелен \vec{v} (1)

$$|\vec{v}| = \omega \cdot |\vec{r}| \sin \varphi = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin(\pi - \varphi) \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Посчитаем $\operatorname{rot}(\vec{v})$:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \operatorname{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{r} - \vec{r} \operatorname{div} \vec{\omega} + (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r}.$$

$\vec{\omega}$ зависит только от времени, следовательно, везде, где дифференцируем $\vec{\omega}$, будут нули:

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0, (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} = 0.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{r} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, физический смысл ротора: удвоенная мгновенная угловая скорость, отсюда и его названия (ротатор, вихрь).

4 Интегральные характеристики векторного поля

поля

Дано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в Ω , а так же l - простой кусочно-гладкий замкнутый контур из Ω .

4.1 Циркуляция

Определение: **циркуляцией** векторного поля по замкнутому контуру l называется следующий интеграл второго рода:

$$\Pi = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

4.2 Поток

Дана поверхность Σ .

Определение: **потоком** векторного поля по поверхности Σ называется следующий интеграл второго рода:

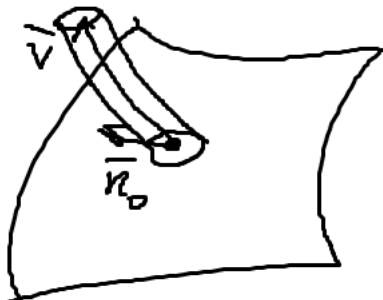
$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds$$

Приведем к привычному виду:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

Физический смысл потока

Пусть есть $\vec{a} = \vec{v}$ - поле скоростей. Жидкость движется по какому-то пути, а затем мы ставим на этом пути решетку:



И сколько жидкости проходит через решетку за единицу времени?
 Возьмем в нашей решетке маленький кусок, из-за пренебрежимо малой величины можем считать его плоским. Тогда за единицу времени жидкость займет объем цилиндра с площадью основания, равной площади куска, и высотой, равной проекции \vec{v} на ось вращения.
 Посчитаем этот объем:

$$V_{\text{ц}} = S \cdot |\vec{v}_{\text{пр.}\vec{n}_0}| = ds \vec{a} \vec{n}_0 = d\Pi$$

И поток будет равен приближенной сумме объемов по всем кусочкам, то есть интегралу.

5 Теорема Гаусса-Остроградского (Остроградского-Гаусса)

Пусть есть ограниченная область $\Omega \subset R^3$

Граница этой области - $\partial\Omega$ - кусочно-гладкая.

\vec{n} - внешняя нормаль.

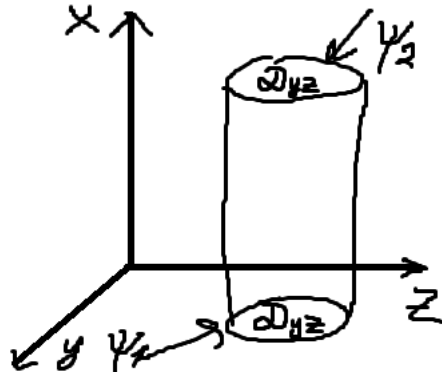
$\vec{a} = \vec{a}(M)$, $M \in \bar{\Omega}$, \vec{a} непрерывно дифференцируемо в каждой точке.

Утверждение (теорема Остроградского-Гаусса): выполняется равенство:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{a} dx dy dz$$

Доказательство:

Предположим, что Ω односвязна и элементарна по всем координатам.



Посчитаем одно из слагаемых, например, интеграл по $\frac{\partial P}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
&= \iint_{D_{yz}} P(\psi_2(y,z), y, z) dy dz - \iint_{D_{yz}} P(\psi_1(y,z), y, z) dy dz = \\
&= \iint_{\Sigma_1} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma_2} P(x, y, z) dy dz + 0 \text{ (интеграл по боковой по-} \\
&\text{верхности равен нулю)}.
\end{aligned}$$

Здесь Σ_1 образована функцией $x = \psi_1(y, z)$, Σ_2 образована функцией $x = \psi_2(y, z)$.

Тогда эта сумма - интеграл по всей границе (три слагаемых это интеграл по верхней части, нижней части и боковой поверхности), а значит, она равна

$$\iint_{\partial\Omega} P(x, y, z) dy dz$$

Аналогично доказывается для Q и для R .

5.1 Следствие из теоремы Остроградского-Гаусса

Возьмем непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ в открытой области Ω .

Возьмем из этой области точку M_0 и окружим ее сферой $S(M_0)$.

Обозначим за $V(M_0)$ шар, ограниченный сферой S , $V \subset \Omega$.

Запишем для сферы и шара формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{V(M_0)} \text{div } \vec{a} dV = I$$

Утверждение: для какой-то точки $\tilde{M} \in V(M_0)$ выполняется равенство:

$$I = \text{div } \vec{a}(\tilde{M}) \cdot \mathbf{V}$$

\mathbf{V} - объем шара. Отсюда выразим дивергенцию:

$$\text{div } \vec{a}(\tilde{M}) = \frac{\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds}{\mathbf{V}}$$

Полученную формулу принято называть средней плотностью источников (или стоков).

Какой в этом смысл:

Представим, что где-то через шар протекает жидкость. В нормальной ситуации вытекает жидкости ровно столько, сколько втекает, дивергенция равна нулю. Но если внутри шара есть источник/сток, тогда втекать будет меньше/больше, чем вытекать. Именно это и регулирует числитель в формуле дивергенции, полученной выше.

6 Теорема Стокса

Дано:

Простая и гладкая $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0})$ поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \Sigma$.

Плоскость $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3, (u, v) \in \Omega, \Omega$ - ограничена.

$\partial\Omega = \{u(t), v(t)\}, \alpha \leq t \leq \beta$.

$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ - граница поверхности, $\partial\Sigma$.

Теорема (Стокса):

Утверждение: имеет место формула:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$$

Доказательство:

1) Сведем $\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r}$ к интегралу по контуру $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{a}(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot (\vec{r}_u u_t dt + \vec{r}_v v_t dt) = \int_{\partial\Omega} \vec{a}(\vec{r}(u, v)) (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = I_1$$

2) Сведем $\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$ к интегралу по области Ω :

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot \left(\frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \right) dudv = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv = I_2$$

Рассмотрим подынтегральное выражение, оно представляет собой смешанное произведение, попробуем представить его в виде $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, чтобы применить формулу Грина в обратную сторону:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) &= \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \times (\nabla \times \vec{a}) = \\ &= \vec{r}_u \cdot \nabla (\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = (\vec{r}_u \cdot \nabla) (\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \\ &= \vec{r}_v (\vec{r}_u \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \vec{r}_v (x_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) - \vec{r}_u (x_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) = \\ &= \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v = \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v + \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} - \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \end{aligned}$$

Получили как раз, что хотели, осталось подставить в I_2 :

$$I_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial u} (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \right) dudv$$

Тогда по формуле Грина для этого интеграла:

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{r}_u du + \vec{a} \vec{r}_v dv = I_1$$

Таким образом, получили тот же интеграл, следовательно, формула верна и теорема доказана.

6.1 Следствие из теоремы Стокса

Дан интеграл $I = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$.

Утверждение: чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\text{rot } \vec{a} = 0$.

Доказательство:

1) Пусть l_1 и l_2 - какие-то два пути из A в B , и пусть эти кривые не пересекаются.

Тогда $I = \int_{l_1} - \int_{l_2} = \int_l$. l - контур, получаемый, если пойти из A в B по кривой l_1 , а затем обратно из B в A по l_2 .

Тогда $I = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$ - по теореме Стокса.

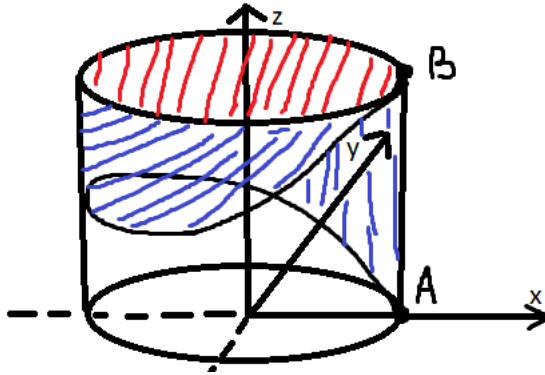
Следовательно, если $\text{rot } \vec{a} = 0$, то $I = 0 = \int_{l_1} - \int_{l_2} \Rightarrow \int_{l_1} = \int_{l_2}$, что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь $\int_{l_1} = \int_{l_2}$, тогда $\int_l = 0 = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0) ds$, следовательно, скалярное произведение равно нулю, но нормаль не может быть равна нулю, поэтому равен нулю ротор, что и требовалось доказать.

ПРИМЕРЫ:

1) $\vec{a} = -y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$. Найти циркуляцию вдоль поля, если $L: \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$, $A(a, 0, 0)$, $B(a, 0, 2\pi b)$.

Это выглядит примерно так, закрашены две области, которые нас интересуют:



Тогда $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$.

Посчитаем ротор, он равен $2\vec{k}$.

Как видно на картинке выше, нас интересуют две области, на которые и делится Σ . $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

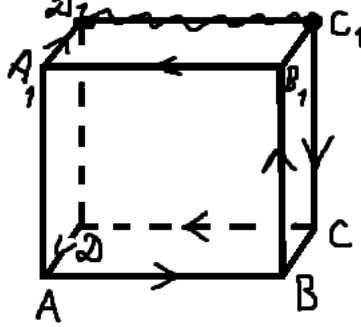
Рассмотрим по очереди каждую из этих областей:

$\Sigma_1 : x^2 + y^2 = a^2, \vec{n} = (x, y, 0), \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 0$.

$\Sigma_2 : z = 2\pi b, x^2 + y^2 \leq a^2, \vec{n} = \vec{k} = \vec{n}_0, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 2$.

Тогда $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma_2} 2 ds = 2\pi a^2$.

2) $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$. Дан куб, ребро имеет длину = 1. Найти циркуляцию вдоль ломаной $C_1CDABB_1A_1D_1$.



Замкнем ломаную, добавив отрезок D_1C_1 . $L = L_1 \cup D_1C_1$.

За поверхность возьмем грани $ABB_1A_1(\Sigma_1)$, $A_1D_1DA(\Sigma_2)$ и $C_1CDD_1(\Sigma_3)$.

Посчитаем ротор, он равен $-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

Тогда $\int_L = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}$.

Рассмотрим каждую их областей:

$\Sigma_1 : \vec{n} = -\vec{i}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 1, \iint_{\Sigma_1} = \iint ds = 1$.

$\Sigma_2 : \vec{n} = \vec{j}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_2} = \iint ds = -1$.

$\Sigma_3 : \vec{n} = \vec{i}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_3} = \iint ds = -1$.

Сложим, получим, что $\int_L = -1$. Осталось посчитать $\int_{D_1C_1} ydx + zdy + xdz = I$.

$D_1C_1 : x = 1, z = 1$, тогда $dx = 0, dz = 0$.

Отсюда $I = \int_0^1 zdy = 1$. Тогда $\int_{L_1} = \int_L - \int_{D_1C_1} = -2$.

6.2 Примечание к следствию из теоремы Стокса

Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой

простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Утверждение: следствие выполняется только если область, в которой работаем - линейно-односвязна. Пример, подтверждающий это:

Дана кривая AB и поле $\vec{a} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z)$. При этом $\text{rot } \vec{a} = 0$.

Искомое задание кривой:

$$l : \left\{ x^2 + y^2 = a^2 z = a \right.$$

Посчитаем интеграл $\int_{AB} \vec{a} d\vec{r}$:

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{r} = \int_l -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + z dz = I$$

Параметризуем кривую:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= ax = a \cos t \\ y &= a \sin t \end{aligned} \right.$$

Тогда $I = \int_0^{2\pi} (\frac{a^2 \sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2}) dt + 0$ (так как $dz = 0$, ведь z - константа).

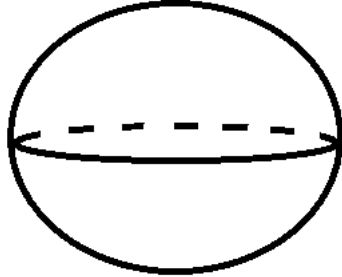
$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Что и требовалось доказать, ведь при $x = 0, y = 0$ у нас поле не определено, тогда область не является линейно-односвязной.

6.3 Линейно-односвязная и поверхностно-односвязная области

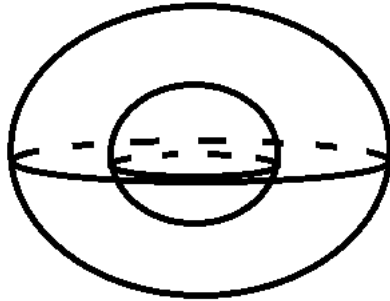
Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Определение: область G называется поверхностно-односвязной, если для любой простой замкнутой поверхности, ограничивающей некую область Ω , все точки Ω принадлежат G .



односвязной области.

- шар является примером поверхностно-



- шар, у которого внутри вырезан шар поменьше является примером поверхностно-неодносвязной области, ведь если взять шар радиусом больше, чем радиус вырезанного шара, но меньше, чем радиус искомого шара, то в нем будут точки из вырезанного шара, которые не принадлежат искомому шару.

7 Потенциальное поле

Дано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Определение: будем называть \vec{a} потенциальным, если $\exists U = U(x, y, z)$ такая, что $\text{grad} U = \vec{a}$.

Важно: $\vec{a} = \vec{\nabla} U$.

Определение: U - скалярный потенциал векторного поля.

Теорема: для того, чтобы \vec{a} было потенциальным, необходимо и (в случае линейной неодносвязности области, в которой задано поле) достаточно, чтобы $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Доказательство:

1) Необходимость. Если $\exists U$, то $\text{rot } \vec{a} = \text{rot grad } U = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = \vec{0}$.
То есть, если поле потенциально (есть скалярный потенциал), то ротор равен нулю.

2) Достаточность.

$\text{rot } \vec{a} = 0$, область (пусть будет g) - линейно-односвязна.

Тогда по теореме Стокса $\int_{AB} \vec{a} d\vec{r}$ не зависит от пути интегрирования.

Теперь просто попробуем найти скалярный потенциал.

Возьмем некую функцию $\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ и точку $\tilde{M} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Выберем их такими, что $\tilde{U} = \int_{M_0}^{\tilde{M}} \vec{a} d\vec{r}$.

Теперь докажем, что \tilde{U} - скалярный потенциал поля \vec{a} :

Пусть точка $M_1 = (\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Найдем производную \tilde{U} :

$$\Delta \tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \int_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0}^{\tilde{M}} = I$$

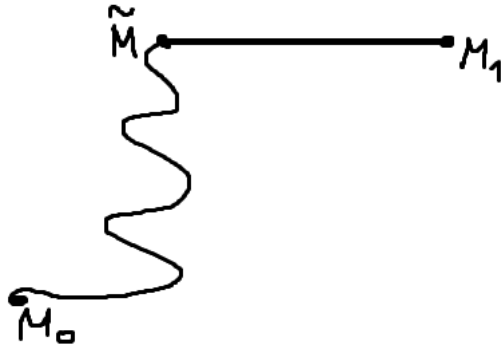
Оба интеграла из разности не зависят от пути интегрирования, тогда:

Выберем путь $M_0 \tilde{M}$ свободно, пусть будет каким угодно.

Путь $M_0 M_1 = M_0 \tilde{M} \cup \tilde{M} M_1$.

$\tilde{M} M_1$ - отрезок, параллельный оси x .

Это выглядит так:



Тогда $I = \int_{\tilde{M}}^{M_1} P dx + Q dy + R dz$. Но $dy = 0, dz = 0$, так как меняется

только x . Тогда $I = \int_{\tilde{M}}^{M_1} P dx = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x} + \Delta x} P(x, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(\tilde{x} + \theta \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta x$
(по теореме о среднем), где $0 < \theta < 1$.

Тогда $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\tilde{x} + \theta \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Аналогично получится и для y и z . Тогда $\text{grad}\tilde{U} = \vec{a}$, значит, \tilde{U} - скалярный потенциал, то есть мы нашли искомую функцию, что и требовалось доказать.

Важно: если U - скалярный потенциал, то $U + c$, где $c = \text{const}$ - тоже скалярный потенциал.

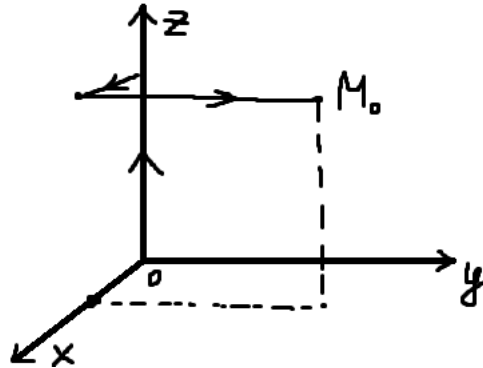
ПРИМЕР:

$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$. Задача: убедиться, что данное поле является потенциальным и найти его потенциал.

Решение:

1) $\text{rot}\vec{a} = \vec{0}$ (здесь нужно вычислить определитель матрицы), следовательно, поле потенциальное.

2) $U = \int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3}$. Выберем путь, по которому будем двигаться из точки $(0,0,0)$ в точку (x_0, y_0, z_0) : самый хороший путь - это двигаться вдоль координатных осей:



Тогда посчитаем каждый из трех интегралов:

a) $x = 0, y = 0, \Rightarrow dx = 0, dy = 0$. $0 \leq z \leq z_0$. Тогда $\int_{l_1} = 0dz = 0$.

b) $z = z_0, y = 0, \Rightarrow dz = 0, dy = 0$. $0 \leq x \leq x_0$. Тогда $\int_{l_2} = \int_0^{x_0} z_0 x = z_0 x_0$.

c) $x = x_0, z = z_0, \Rightarrow dz = 0, dx = 0$. $0 \leq y \leq y_0$. Тогда $\int_{l_3} = \int_0^{y_0} (x_0 + z_0) = x_0 y_0 + z_0 y_0$.

Сложим три интеграла, получим, что $U = xy + xz + yz$, что и будет ответом.

8 Соленоидальное поле

Дано \vec{a} - векторное поле, заданное на g - поверхностно-односвязной области.

Определение: векторное поле будем называть соленоидальным, если его поток через любую простую, кусочно-гладкую, замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = 0$$

Теорема 1: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0$$

Доказательство:

1)

$$\iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = 0, \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 0$$

2)

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0, \Rightarrow \iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = 0, \Rightarrow \vec{a} - \text{соленоидальное}$$

Определение: \vec{H} будем называть векторным потенциалом поля \vec{a} , если $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{a}$.

Важно: если \vec{H} - векторный потенциал, то $\vec{H}_1 = \vec{H} + \operatorname{grad} U$ (где U - какая-то скалярная функция) - тоже векторный потенциал.

Доказательство:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \operatorname{rot}(\vec{H} + \operatorname{grad} U) = \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} U (= 0) = \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{a}$$

Теорема 2: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал векторный потенциал.

Доказательство:

1)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

А по теореме 1, если дивергенция равна нулю, то поле соленоидальное.

2) \vec{a} - соленоидальное.

Будем искать \vec{H} в виде $\vec{H} = (H_x, H_y, 0)$.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{i} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$$

Отсюда

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -P, \Rightarrow H_y = -\int P dz + \varphi(x, y) \quad (\varphi(x, y) - \text{произвольная функция}).$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = Q, \Rightarrow H_x = \int Q dz + \psi(x, y) \quad (\psi(x, y) - \text{произвольная функция}).$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = R, \Rightarrow -\int P_x dz + \varphi_x(x, y) - \int Q_y dz + \psi_y(x, y)$$

Таким образом, мы нашли \vec{H} .

ПРИМЕР:

$$\vec{a} = 2z \vec{i} + 3y^2 \vec{k} = (2z, 0, 3y^2).$$

Найти векторный потенциал. Решение:

$$H_x = \int 0 + \psi(x, y).$$

$$H_y = -\int 2z dz + \varphi(x, y) = -z^2 + \varphi(x, y).$$

$$H_z = 0.$$

$$-0 + \varphi_x - 0 - \psi_y = 3y^2$$

$$\varphi_x - \psi_y = 3y^2$$

Обе функции произвольные, поэтому, пусть $\varphi \equiv 0, \psi = -y^3$.

Тогда, ответ: $\vec{H} = (-y^3, -z^2, 0)$.

9 Интегралы с параметрами

Дальше (похоже, до конца семестра) мы будем заниматься интегралами с параметрами.

10 Равномерная сходимость семейства функций

10.1 Определение равномерной сходимости

Дана функция $f(x, y)$ - на первый взгляд, функция двух переменных, однако, $x \in X$ - аргумент, а $y \in Y$ - число, параметр.

Например, если $Y = N$ (натуральные числа), то $f(x, n) = f_n(x)$ - функциональная последовательность.

Возьмем некую точку y_0 - точку сгущения Y (по сути, точка сгущения \sim предельная точка множества).

Тогда функцию $\varphi(x)$, такую, что:

$$\forall x \in X \quad f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \rightarrow \varphi(x)$$

будем называть **поточечным** пределом функции f .

Определение: $f(x, y)$ сходится равномерно на X при $y \rightarrow y_0$, если:

1) $f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \rightarrow \varphi(x) \forall x$ (сходится поточечно).

2)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

ПРИМЕР:

$f(x, y) = \frac{3x+y}{x+y}; Y = (0; 1), y_0 = 0$. Выяснить, сходится ли равномерно функция на множестве X , если X :

1) $X = (1, 2)$.

Найдем поточечный предел f :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f = \frac{3x}{x} = 3 = \varphi(x)$$

Подставим поточечный предел в определение:

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| \frac{3x+y}{x+y} - 3 \right| = \frac{2y}{x+y} < \varepsilon \quad \forall x \in (1, 2)$$

$$\frac{2y}{x+y} < \frac{2y}{1+y} < \frac{2y}{1} < \varepsilon$$

Тогда возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, значит, мы нашли δ , удовлетворяющую условию, значит, f равномерно сходится на X .

2) $X = (0, 1)$.

Докажем, что нет равномерной сходимости на этом множестве. Для этого докажем отрицание определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}, x_n = \frac{1}{n+1}$. Тогда $\frac{2y}{x+y} = 1 = \varepsilon_0$. То есть мы нашли ε_0 , а значит, доказали отрицание, а значит, f не сходится равномерно на данном X .

10.2 Признаки равномерной сходимости

1) Запишем очевидное неравенство:

Пусть $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$. Тогда

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = g(y)$$

Утверждение: семейство функций сходится равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) \Rightarrow |g(y)| < \varepsilon$$

Например, $\sup_{x \in (1;2)} \frac{2y}{x+y} = \frac{2y}{1+y} < \varepsilon$. Но

$\sup_{x \in (0;1)} \frac{2y}{x+y} = 2$ - не стремится к нулю.

2) Теорема (признак Коши):

Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось на X при $y \rightarrow y_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y', y'' \in U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Доказательство:

I. \Rightarrow

Если семейство функций сходится равномерно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) : |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем две точки из $\overset{o}{U}_\delta(y_0)$ - y' и y'' .

Тогда $|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$|f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq |f(x, y') - \varphi(x)| + |f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Доказано.

II. \Leftarrow

Теперь дано условие Коши.

Возьмем $x \in X$ и зафиксируем его. Тогда для фиксированного x выполняется:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \Rightarrow |g(y') - g(y'')| < \varepsilon$$

Отсюда следует, что у функции g есть предел при $y \rightarrow y_0$.

Получается, что для каждого такого фиксированного $x \in X \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$.

Осталось доказать вторую часть определения равномерной сходимости:

Для этого в выражении $|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ перейдем к пределу:

Пусть $y \rightarrow y_0$, тогда $|f(x, y') - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

3) Обозначим за \mapsto равномерную сходимость.

Утверждение: для того, чтобы $f(x, y)$ сходилась равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X и при $y \rightarrow y_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall y_n \rightarrow y_0 \ f(x, y_n) = f_n(x)_{n \rightarrow \infty} \mapsto \varphi(x) \ \forall x \in X$$

Здесь y_n - последовательность из Y .

Доказательство:

I. \Rightarrow

Если f равномерно сходится, то это значит, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) \ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Возьмем последовательность $y_n \rightarrow y_0$ и по δ , которую мы нашли, найдем n_0 , такой, что:

$$\forall n \geq n_0 \ y_n \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)$$

А это означает, что $\forall x \ |f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

II. \Leftarrow

Теперь дано: $\forall y_n \rightarrow y_0 \ f(x, y_n) = f_n(x)_{n \rightarrow \infty} \mapsto \varphi(x)$.

Докажем от противного, что $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$.

Пусть f сходится, но не равномерно, тогда снова попытаемся доказать отрицание:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Поскольку мы наложили условия на x_δ и y_δ , то можем взять какие-то последовательности x_n, y_n , а δ_n взять равное $\frac{1}{n}$.

Тогда:

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Но это противоречит условию, ведь по условию f_n равномерно сходится к φ . Теорема доказана.

Следствие:

Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x на множестве X , а так же эти $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$ на X .

Тогда $\varphi(x)$ непрерывна на X .

4) Утверждение: если рассматривать $f(x, y)$ на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$ как функцию двух переменных и предположить, что она на нем непрерывна, то

$$f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \mapsto \varphi_{y_0}(x)$$

Здесь $y_0 \in [c; d]$.

Доказательство:

Данный прямоугольник - компактное множество. А если функция непрерывна на компакте равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta; \forall y', y'' : |y' - y''| < \delta \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

Возьмем $x' = x'' = x, y' = y_0, y'' = y$.

Тогда $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$, но $f(x, y_0) = \varphi_{y_0}(x)$, тогда:

$$|f(x, y) - \varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b]$$

Но это и означает равномерную сходимость (по определению), что и требовалось доказать.

11 Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x, y)$ - интегрируемая по $x \in [a; b] \quad \forall y \in Y$.

Тогда рассмотрим интеграл:

$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ - собственный интеграл с параметром y .

Свойства:

1) Теорема 1: если $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Эта теорема дает нам возможность менять местами знаки предела и интеграла в случае, когда f равномерно сходится:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

Доказательство:

Оценим $|I(y) - \int_a^b \varphi(x)dx|$:

$$|I(y) - \int_a^b \varphi(x)dx| = \left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x, y) - \varphi(x))dx \right| \leq \int_a^b |(f(x, y) - \varphi(x))|dx$$

Но $f(x, y) \mapsto \varphi(x) \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\int_a^b |(f(x, y) - \varphi(x))|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

Значит, $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x)dx$, что и требовалось доказать.

Следствия:

а) Если f непрерывна на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$, то можно переставить знаки интегрирования и предела местами.

б) Если в точке y_0 $f(x, y)$ непрерывна, то из того, что $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$ следует, что:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b f(x, y_0)dx = I(y_0)$$

Отсюда следует, что I непрерывен в точке y_0 (по определению непрерывности в точке).

2) Теорема 2: если $f(x, y)$ непрерывна относительно x и y на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ можно интегрировать по y :

$$\exists \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Это повторные интегралы для двойного интеграла $\iint_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y)dx dy$. Другими словами,

$$\iint_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y)dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

3) Теорема 3:

Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a; b]$ для любых y из $[c; d]$, а $f'_y(x, y)$ непрерывна по x и y на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$.

Тогда существует $I'_y(y) \forall y \in [c; d]$:

$$I'_y(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

То есть, другими словами, можно поменять дифференцирование и интегрирование местами:

$(\int f)' = \int f'$ - это называется правило Лейбница.

Доказательство:

$$I'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = ?$$

Распишем $\frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} &= \frac{\int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^b \frac{f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y dx}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx, \quad 0 < \theta < 1 \text{ (по теореме о среднем)} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } I'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx =$$

$$= \int_a^b f'_y(x, y_0) dx, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Замечание:

Если пределы интегрирования зависят от y , вот таким образом:

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx = F(y, u, v)$$

$$\text{Тогда } \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dy} = \int_u^v f'(x, y) dx + f(v, y) v'_y - f(u, y) u'_y.$$

Это следует из теоремы Барроу (по словам некоторых, самой великой теоремы матанализа, а значит надо учить):

Теорема Барроу:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x)$$

$$\left(\int_x^b f(t) dt \right)'_x = f(-x)$$

ПРИМЕРЫ (здесь их много, 5 штук):

1) $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx; \quad y \in (0; 1]$.

Посчитаем этот интеграл:

$$\int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx = x \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^1 - 2 \int \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \ln(1 + y^2) - 2 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

Хотим узнать, как эта функция ведет себя в нуле, устремим y к нулю, тогда $I(y) \rightarrow 0$, то есть, 0 - точка устранимого разрыва.

Тогда $I(y) = \begin{cases} \ln(1 + y^2) - 2 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ -2, & y = 0 \end{cases}$.

Значит, $I(y)$ непрерывна на $[0; 1]$.

Теперь проверим дифференцируемость:

$y \neq 0, y \in [\delta; 1]$. Тогда на прямоугольнике $[0; 1] \times [\delta; 1]$ функция $\ln(x^2 + y^2)$ непрерывна по y , а функция $\frac{2y}{x^2 + y^2}$ непрерывна по x и по y .

Тогда $I'_y(y) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx$, рассмотрим её поведение в нуле:

$y_0 = 0$.

$$I'_y(y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \frac{y}{1 + y^2} = \frac{y}{1 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

Очевидно, эта функция не непрерывна в нуле, устремим y к нулю, тогда $I'_y(0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, $I'_y(0) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2} dx = 0$.

Получили разные ответы. Это потому, что на самом деле мы не могли здесь пользоваться теоремой, ведь нарушается условие непрерывности f'_y по x и по y .

2) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad b > a > 0$.

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

Тогда $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 dy \int_a^b x^y dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$.

С другой стороны,

$$I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \Rightarrow I'_b(a, b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{b+1}$$

Тогда $\int I'_b(a, b) = \int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C$. Найдем C :

$$I(a, a) = \ln(a+1) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln(a+1)$$

Отсюда $I(a, b) = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{b+1}{a+1}$, получили то же самое.

3) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

Рассмотрим $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}, \text{ тогда } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)g(x)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)g(x)dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -\int_0^1 dy \int_0^{-\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1} (\text{подстановка Абеля}) = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1} = \\ &= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(t\sqrt{y^2+1})}{\sqrt{y^2+1}} \Big|_0^{\infty} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Второй способ:

Найдем I'_y :

$$I'_y = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Получили производную, осталось найти саму функцию:

$$I(y) = \int I'_y = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{y^2+1}) + C$$

Найдем C :

$I(0) = 0, \Rightarrow C = 0$, а наша цель - $I(1)$.

$$I(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

4) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t) dt, a > 0$.

$$I'_y(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 - \sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$I(a) = \int I'_y = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C$$

С другой стороны, $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t)) dt = \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt$

Устремим a к $+\infty$, тогда $\ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) \rightarrow 0$. Выясним, равномерно ли сходится семейство функций:

$$|\ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t)| \leq |\ln(1 - \frac{1}{a^2})| < \varepsilon$$

Следовательно, сходимость равномерная.

Тогда $C = I(a) - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) = \pi \ln a - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt = \pi \ln \frac{a}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt$.

При $a \rightarrow \infty$ первое слагаемое стремится к $\ln \frac{1}{2}$, а второе к нулю, тогда $C = \ln \frac{1}{2}$, а $I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}$.

12 Несобственный интеграл

12.1 Определение несобственного интеграла

Возьмем интеграл $\int_a^b f(x) dx$, у которого либо $b = +\infty$, либо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b - 0$.

При этом $f(x)$ интегрируема на $[a; c]$, где $a < c < b$.

Определение:

Предел $\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$ будем называть несобственным интегралом. Если этот предел существует, то будем говорить, что интеграл сходится, иначе расходится.

Теперь рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, $x \in [a; b]$, $-\infty < b \leq +\infty$.

Тогда существует $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x, y) dx$.

ПРИМЕР:

$$I(y) = \int_0^\infty y e^{-xy} dx = \int_0^\infty e^{-xy} d(xy) = e^{-xy} \Big|_0^\infty = 1$$

То есть, $\int_0^\infty = \left\{ 0, y = 0; 1, y \neq 0 \right.$.

Определение: будем говорить, что несобственный интеграл сходится равномерно на Y , если:

1) Он сходится.

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, b - \delta > a, \forall c \ 0 < b - \delta < c < b : |\int_c^b f(x, y) dx| < \varepsilon \ \forall y \in Y$.

ПРИМЕРЫ:

1) $\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$.

Оценим этот интеграл:

$$|\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx| \leq \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \varepsilon$$

Тогда этот интеграл равномерно сходится.

2) $\int_0^\infty ye^{-xy} dx$.

Докажем, что этот интеграл не сходится равномерно, для этого докажем отрицание определения:

$$\exists \varepsilon_0 \ \forall \delta \ \exists C_\delta; \exists y_\delta : |\int_{C_\delta}^\infty y_\delta e^{-xy_\delta} dx| \geq \varepsilon_0$$

Пусть $xy_\delta = t$:

$$I = \int_{C_\delta y_\delta}^\infty e^{-t} dt = e^{-C_\delta y_\delta}$$

Отсюда очевидно, что можно найти C_δ и y_δ такие, что $e^{-C_\delta y_\delta} \geq \varepsilon_0$, тогда интеграл не сходится равномерно.

12.2 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

1) Признак Коши.

Утверждение: для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно сходилась на Y , необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall c_1, c_2 \ a < b - \delta < c_1, c_2 < b : |\int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx| < \varepsilon \ \forall y \in Y$$

Доказательство:

$I. \Rightarrow$

Пусть $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y . Тогда по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \ \forall c \ a < b - \delta < c < b : |\int_a^b f(x, y) dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем два разных c : c_1 и c_2 такие, что $a < b - \delta < c_1, c_2 < b$, тогда:

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} \leq \left| \int_{c_1}^b \right| + \left| \int_b^{c_2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

II. \Leftarrow

Теперь нам дано, что $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $c_2 \rightarrow b - 0$, тогда

$$\left| \int_{c_1}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

Что и требовалось доказать.

2) Признак Вейерштрасса:

Утверждение: если существует функция $\varphi(x)$, которая не имеет особых точек кроме b , а так же $\int_a^b \varphi(x)$ сходится, то и интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно.

Доказательство:

Используем признак Коши, оценим интеграл:

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx \right| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{c_1}^{c_2} \varphi(x) dx < \varepsilon$$

Тогда по признаку Коши этот интеграл сходится равномерно.

В следующих двух признаках дан интеграл $I = \int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$, а так же некоторые условия.

В доказательстве обоих понадобится следующая выкладка:

Распишем $\int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx$:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx = g(c_1, y) \int_{c_1}^{\xi} f(x, y) dx + g(c_2, y) \int_{\xi}^{c_2} f(x, y) dx$$

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq |g(c_1, y)| \cdot \left| \int_{c_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |g(c_2, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{c_2} f(x, y) dx \right|$$

3) Признак Абеля.

а) $g(x, y)$ монотонна по x .

$$|g(x, y)| < C$$

б) $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y .

Утверждение: I сходится равномерно.

Доказательство:

$f(x, y)dx$ сходится равномерно, а $|g(c_1, y)| < C$; $|g(c_2, y)| < C$.

Тогда по признаку Коши:

$$\left| \int_{c_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2C}; \quad \left| \int_{c_2}^{\xi} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

Отсюда $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \frac{C\varepsilon}{2C} + \frac{C\varepsilon}{2C} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.

4) Признак Дирихле.

а) $g(x, y)$ монотонна по x .

$g(x, y)_{x \rightarrow b-0} \mapsto 0$.

б) $\left| \int_a^c f(x, y) dx \right| \leq M$.

Утверждение: I сходится равномерно.

Доказательство:

По условию, $\left| \int_a^c f(x, y) dx \right| \leq M$.

Так как g равномерно сходится, то $\left\{ |g(c_1, y)| < \frac{\varepsilon}{2M} |g(c_2, y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \right.$.

Отсюда $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.