Подготовка к экзамену по матанализу, версия без доказательств

Автор: Эмиль

Отредактировал и привел в опрятный вид: Константин.

13 января 2019 г.

Это документ для подготовки к экзамену по матанализу в 3-м семестре. Вопросы и подвопросы - кликабельны (клик перенесет вас к ответу на него), некоторые термины (например, суммы Дарбу) - тоже.

Приятной подготовки и удачи на экзамене!

1 Вопросы

1. Евклидово метрическое пространство. Точки и множества в евклидовом пространстве. Сходимость последовательности точек в нем.
2. Функция нескольких переменных. Предел функции. Теорема о равенстве двойного и повторного пределов.
3. Непрерывность функции нескольких переменных.
4. Свойства функций, непрерывных на компакте и на связной области.
5. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Свойства дифференцируемых функций.
6. Производная по направлению.
7. Частные производные. Дифференцируемость функции и наличие частных производных. Дифференциал функции.
8. Формула полного приращения. Достаточное условие дифференцируемости функции.
9. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

10. Градиент функции. Вычисление производной по направлению. Основное свойство градиента.
11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
12. Формула Лагранжа.
13. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
14. Неявные функции. Теоремы о существовании функции, заданной неявно.
15. Теорема об обратимости регулярной функции.
16. Формула Тейлора.
17. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие.
18. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа нахождения условного экстремума. (Достаточное условие без доказательства).
19. Понятие о мере Жордана. Критерий измеримости множества в R^m (без доказательства).
20. Кратный интеграл Римана. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций.
21. Свойства кратного интеграла.
22. Сведение двойного интеграла к повторному. Вычисление тройного интеграла.
23. Замена переменной в кратном интеграле. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
24. Несобственные кратные интегралы. Теорема о несобственном интеграле от неотрицательной функции. Признаки сходимости. Необходимое и достаточное условме сходимости несобственного интеграла от функции, меняющей знак.
25. Кривые в пространстве. Параметризация на кривой.
26. Криволинейные интегралы первого рода и его свойства.
27. Криволинейные интегралы второго рода и его свойства.
28. Связь между интегралами первого и второго рода.
29. Формула Грина. Теорема о свойстве дифференциального выражения. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

2 Ответы

1. Пространство R^m (m-мерное), элементом которого является $\overrightarrow{x}(x_1, \ldots, x_m)$. x_i - координата, $\vec{x}$ - точка/вектор. Пространство R^m является линейным (арифметическим):

Сложение: $\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = (x_1^1 + x_2^2, \ldots, x_1^i + x_2^i, \ldots, x_1^m + x_2^m)$.

Умножение на скаляр: $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots, \lambda x_m)$

Расстояние между точками: $\rho(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_1^i - x_2^i)^2}$

Сходимость точек в R^m:

Дана последовательность $\overrightarrow{x_n}$, определение:

Точку $\overrightarrow{a}$ будем называть пределом последовательности $\vec{x_n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, начиная с которого, для любого n будет выполняться неравенство $\rho(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{a}) < \varepsilon$.

$$\overrightarrow{a} = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{x_n} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \rho(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{a}) < \varepsilon$$

Свойства предела:

1) Единственность.

2) Ограниченность сходящихся последовательностей.

3) $\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{a} \iff x_i \to a_i$, где $\overrightarrow{x_n} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Определение:

$\overrightarrow{x_n}$ - фундаментальная, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in N\ \rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$

4) $\overrightarrow{x_n}$ сходится $\iff$ $\overrightarrow{x_n}$ - фундаментальная.

Это означает, что R^m - полное пространство.

Точки и множества в R^m.

1) Шар

(открытый/закрытый в зависимости от знака неравенства $<$ или $\leq$).

$$K_R(\overrightarrow{x_0}) = \{\overrightarrow{x} \mid \rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}) < R\}$$

2) Внутренняя точка множества E.

Это такая точка, для которой можно найти окрестность, полностью входящую в E.

3) Открытое множество.

Это множество, все точки которого - внутренние.
Теорема:

1) R^m и $\emptyset$ - открыты.

2) Объединение ЛЮБОГО числа открытых множеств - открытое множество.

3) Пересечение КОНЕЧНОГО числа открытых множеств - открытое множество.

4) Окрестность $U(x_0)$; $\overset{o}{U}$.
Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

5) Предельная точка множества.
Это точка $\overrightarrow{x_0}$, в любой проколотой окрестности которой существует хотя бы одна точка, принадлежащая данному множеству.
Определение через предел:

$$\exists \overrightarrow{x_n} \in E : \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}$$

6) Изолированная точка множества.
Это такая точка $\overrightarrow{x_0}$, что $\exists U(x_0)$ такая, что $\overset{o}{U}(x_0) \cap E = \emptyset$. Другими словами, кроме этой точки в окрестности $U(x_0)$ ничего нет.

7) Замкнутое множество.
Это множество, содержащее все свои предельные точки.

8) Замыкание.
Множество $\overline{E}$, содержащее все точки, не принадлежащие E, будем называть его замыканием.

9) Внутренность.
Это все внутренние точки множества, обозначается $intE$.
Теорема:

1) R^m, $\emptyset$ - замкнутые множества.

2) Объединение КОНЕЧНОГО числа замкнутых множеств - замкнутое множество.

3) Пересечение ЛЮБОГО числа замкнутых множеств - замкнутое

множество.

4) $X \setminus E$ - открытое множество $\iff$ E - замкнутое множество.

10) Ограниченное множество.
E - ограниченное множество, если $\exists K_R \supset E$ (открытый шар).
Теорема Больцано-Вейерштрасса:
Если E - ограниченное и бесконечное множество, то в нем можно выделить сходящую последовательность.

11) Компактное множество.
Множество называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.

I. E - компактно $\Rightarrow$ E ограничено и замкнуто.

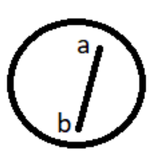
II. E - компактно $\Rightarrow \forall E^{'} \subset E \ \exists \overrightarrow{x_n} \in E^{'}, \exists \overrightarrow{x_0} \in E^{'} : \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0}$ ($E^{'}$ - бесконечное).

Теорема:
В R^m для I и II выполняются и обратные утверждения ($\Leftarrow$).

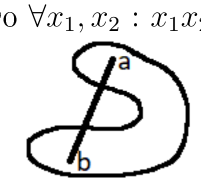
12) Граничная точка множества.
$\overrightarrow{x_n}$ - граничная точка E, если $\forall U(\overrightarrow{x_n}) \ \exists x_i \in E, \exists x_k \notin E$. ∂E - граница.

13) Прямая.
Пусть $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in R^m$:
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{b}(1-t); t \in R\}$ - прямая в R^m.
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{b}(1-t); t \in [0;1]\}$ - отрезок $[a;b]$.
$\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a} + \overrightarrow{l}t\}$ - луч.

14) Выпуклое множество.
Это такое множество, что $\forall x_1, x_2 : x_1x_2$ - отрезок, $x_1x_2 \in E$.



- выпуклое,

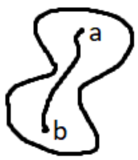


- не выпуклое.

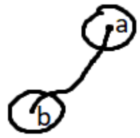
15) Кривая.
$\{\overrightarrow{x}(t) \mid \overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t), \ldots, \overrightarrow{x_m}(t)\}$ - кривая.
Если $\overrightarrow{x_i}(t)$ - непрерывная функция, то $\overrightarrow{x}(t)$ - непрерывная кривая.

16) Связное множество.

Это такое множество, что $\forall x_1, x_2 \in E$ $\exists$ непрерывная кривая $x_1 x_2 \in E$.



- связное,



- несвязное.

17) Область.

Это открытое и связное множество.

2. Функции нескольких переменных.

Функция нескольких переменных $\overrightarrow{f} : R^m \to R^k$ - правило, отображающее m-мерный вектор в k-мерный.

Предел ФНП.

Пусть $\overrightarrow{f} : E \subset R^m \to R^k$, $\overrightarrow{x_0}$ - предельная точка E.

Определение предела:

1) По Коши:

$\overrightarrow{u_0} \in R^k$ будет пределом $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ при $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}$,

если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists U(\overrightarrow{x_0}) : \forall \overrightarrow{x_i} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0}) \; \rho(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_i}), \overrightarrow{u_0}) < \varepsilon)$.

2) По Гейне:

$$\overrightarrow{u_0} = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \iff \forall \overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x_0} \; (\overrightarrow{x_i} \in E) : \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_n}) \to \overrightarrow{u_0}$$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ - двойной предел.

$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ и $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ - повторные пределы.

Теорема о равенстве двойного и повторного пределов.

$u = f(x,y); \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$,

и $\forall y : 0 < |y - y_0| < \delta_1, \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$.

Тогда существует повторный предел $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = A$.

3. Непрерывность ФНП.

Пусть $\overrightarrow{x_0}$ - внутренняя точка E, $\overrightarrow{f} : E \subset R^m \to R^k$.

Тогда $\overrightarrow{f}$ непрерывна в точке $\overrightarrow{x_0}$, если $\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x_0}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0})$.

4. Свойства функций, непрерывных на компакте и на связной области.

1) Суммы, произведения, частные непрерывных функций - непрерывные функции.
2) Суперпозиция двух непрерывных функций непрерывна.
3) Отделимость от нуля:
Если значение функции в некоторой точке положительно, а функция в этой точке непрерывна, то существует окрестность этой точки, такая, что все значения в этой окрестности положительны.
4) Функция непрерывна на области определения тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества открыт.
5) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ непрерывна на компакте $\Rightarrow \overrightarrow{f}$ - ограничена.
6) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ непрерывна на компакте $\Rightarrow \exists \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} : \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_1}) - max, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_2}) - min.$
7) $K = 1, f(\overrightarrow{x})$ задана и непрерывна на области и принимает там значения A и $B, A \neq B.$
Тогда $\forall C : A < C < B$ найдется точка $\overrightarrow{c} : f(\overrightarrow{c}) = C.$

5. Дифференцируемость ФНП.

$\overrightarrow{f} : R^m \to R^k, \overrightarrow{x_0}$ - внутренняя точка области определения функции.
$\overrightarrow{f}$ дифференцируема в $\overrightarrow{x_0}$, если $\exists L : R^m \to R^k, \exists \overrightarrow{o}$ - какой-то вектор, что

$$\triangle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x_0}) = L(\triangle \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{o}(\|\overrightarrow{x}\|)$$

<u>Свойства дифференцируемых ФНП.</u>
1) Если функция дифференцируема в точке, то L является матрицей частных производных:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \frac{\partial f_k}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

2) Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

6. Производная по направлению.

$k = 1, m \neq 1!$

Пусть $\overrightarrow{x_0} \in$ ООФ, $\overrightarrow{e}$ - какой-то вектор.
$\|\overrightarrow{e}\|$ - норма вектора $= \rho(\overrightarrow{e}, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m e_i^2}$.
$\frac{\overrightarrow{e}}{\|\overrightarrow{e}\|} = \overrightarrow{e_0}$ - орт.

I. Производной по направлению $\overrightarrow{e}$ в точке $\overrightarrow{x_0}$ функции $f(\overrightarrow{x})$ будем называть

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{e_0}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t} = \frac{\partial f}{\partial e}$$

II. Если направление совпадает с направлением координатной оси, то производная по такому направлению называется **частной** производной: $\overrightarrow{e_0} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ - единица на i-том индексе.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

7. Частные производные.

Если направление совпадает с направлением координатной оси, то производная по такому направлению называется **частной** производной, записывается $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Дифференцируемость функции и наличие частных производных.

Если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные по каждому аргументу.

Дифференциал.

Если функция дифференцируема в точке, то линейная относительно ее приращения часть называется полным дифференциалом этой функции в этой точке:

$$df(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1} \triangle x_1 + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2} \triangle x_2 + \cdots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m} \triangle x_m$$

8. Формула полного приращения.

Пусть $f: R^m \to R^1$ не дифференцируема, но имеет частные производные в окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$. $\overrightarrow{x_0} = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$.
Тогда $\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) = f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1^0, x_2, \ldots, x_m) + f(x_1^0, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_m) + f(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_m) - \cdots + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)$.

На отрезке $[a;b] : f(b)-f(a)=f'(c)*(b-a), c=a+\theta(b-a), \theta\in(0;1)$.
Тогда полное приращение функции:
$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = f'_{x_1}(x_1^0+\theta_1\triangle x_1, x_2, \ldots, x_m)\triangle x_1 + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0+\theta_2\triangle x_2, x_3, \ldots, x_m)\triangle x_2 + \cdots + f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m^0+\theta_m\triangle x_m)\triangle x_m$.

Достаточное условие дифференцируемости функции.
Если функция имеет в окрестности точки частные производные, непрерывные в этой точке, то эта функция дифференцируема в этой точке.

9. Дифференцирование сложной функции.
Пусть $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x})$
$\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_l), \overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_m)$
$\overrightarrow{f} = (f_1, \ldots, f_k), \overrightarrow{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$
$\overrightarrow{f} : R^l \to R^k, \overrightarrow{\varphi} : R^m \to R^l$
Возьмем некоторую $\overrightarrow{x_0}$, такую, что $\overrightarrow{\varphi}$ дифференцируема в $\overrightarrow{x_0}$, а $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x_0})$, причем $\overrightarrow{f}$ дифференцируема в $\overrightarrow{y_0}$.
Тогда функция $\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{x}))$ дифференцируема в точке $\overrightarrow{x_0}$.

Инвариантность формы первого дифференциала.
Первый дифференциал обладает свойством инвариантности формы, то есть $d\overrightarrow{f} = Ld\overrightarrow{x}$, где $L = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij}$ всегда, неважно, что есть $\overrightarrow{x}$.

10. Градиент функции.
Рассмотрим $u = f(x_1, \ldots, x_m) \to R^1$.
$(\frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m})$ - градиент функции в точке $\overrightarrow{x_0} = grad\,\overrightarrow{u}(M_0)$.

Градиент и вычисление производной по направлению.
Рассмотрим $u = f(x_1, \ldots, x_m) \to R^1$.

$$\frac{\partial u(\overrightarrow{x_0})}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{l_0}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t}$$

$\overrightarrow{l_0}$ - единичный вектор $= (l_1, \ldots, l_m) = \cos\alpha_1 \ldots \cos\alpha_m$.

$$f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{l_0}) = \varphi(t)$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi^{'}(0)$$

$$\varphi^{'}_t = (f(\overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{l_0}))^{'}_t = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}$$

$x_i = x_i^0 + tl_i^0$, тогда:

$$\frac{\partial u(\overrightarrow{x_0})}{\partial l} = \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \dots + \frac{\partial f(\overrightarrow{x_0})}{\partial x_m}\cos\alpha_m = gradf(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{l_0}$$

- конечная формула для вычисления производной по направлению.

<u>Основное свойство градиента.</u>
Производная функции по направлению достигает своего максимального значения, когда направление совпадает с направлением градиента этой функции.

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
Поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$,
возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) : F(M_0) = 0$.
Допустим, что $\exists U(M_0) : \forall (x, y) \in (U(M_0))_{xy}\ \exists! z : (x, y, z) \in \gamma$ ($\gamma -$ график уравнения $F(x, y, z) = 0$).
Графиком назовем все такие точки $\{x, y, z\}$, для которых выполняется $F(x, y, z) = 0$. Тогда z определена однозначно.
Допустим также, что $F(x, y, z)$ дифференцируема в M_0, рассмотрим все кривые $(x(t), y(t), z(t))$, дифференцируемые, $\alpha \le t \le \beta$.
Найдем такую кривую, что $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$,
тогда $F(x(t), y(t), z(t)) = 0, dF(t_0) = \frac{\partial F(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}dz = 0$.
Тогда $dF(t_0) = gradF(M_0) \cdot d\overrightarrow{x} = 0, d\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\tau}$ - касательный вектор к кривой.
$gradF(M_0)$ перпендикулярен $\overrightarrow{\tau}, \Rightarrow$ все векторы τ_i лежат в одной плоскости - **касательной плоскости**, $gradF(M_0)$ - нормаль к плоскости.
Запишем уравнение плоскости:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Нормаль (прямая, которая проходит через M_0, перпендикулярно плоскости):

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$$

12. Формула Лагранжа.
Пусть дана функция $f : R^m \to R^1$, дифференцируемая в некоторой выпуклой области. Тогда
$\forall \overrightarrow{x_0}$ и $\overrightarrow{x_1}$:

$$\triangle f(\overrightarrow{x_0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0} + \theta \triangle \overrightarrow{x}) \triangle \overrightarrow{x_i}$$

, где $\triangle \overrightarrow{x_i} = x_1^i - x_0^i$, а $0 < \theta < 1$.

13. Производные и дифференциалы высших порядков.
$f : R^m \to R^1$, тогда $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}$.
Если $i = j$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
Дифференциалы высших порядков.
$d^2 f = d(df), df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
$d^2 f = d(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i) = \sum_{i=1}^{m} d(\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ - квадратичная форма.

Теорема о равенстве смешанных производных.
Смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} равны не всегда.
Пусть есть $u = f(x, y)$ - дифференцируемая дважды в некоторой области функция, а в некоторой точке f''_{xy} и f''_{yx} - непрерывны. Тогда $f''_{xy} = f''_{yx}$.

14. Неявные функции.
Неявная функция - функция, заданная в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Теоремы о существовании функции, заданной неявно.
I. Теорема 1.
$F(x, y) = 0$, дано:
1) $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma : F(x_0, y_0) = 0, \Gamma$ - график уравнения - такие (x, y), что $F(x, y) = 0$.
2) $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные F_x, F_y в некоторой

окрестности точки M_0.
3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Тогда существует такой прямоугольник $|x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq \sigma$, что $\forall x : |x - x_0| \leq \delta$ можно найти единственный $y : |y - y_0| \leq \sigma$, что $F(x, y) = 0$.
Это неявно задает некую функцию $y = f(x)$, **непрерывную** и **дифференцируемую** на $|x - x_0| \leq \delta$.
II. Теорема о неявной векторной функции.
Дано:
$\overrightarrow{x} = (x_1 \dots x_m),\ \overrightarrow{y} = (y_1, \dots y_k), \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{F} = (F_1 \dots F_k)$
$\begin{cases} F_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k) = 0 \\ \dots \\ F_k(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k) = 0 \end{cases}$
Пусть $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0, M_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) : \overrightarrow{F}(M_0) = 0$

$$I(\overrightarrow{x_0}) = \prod_{i=1}^{m} [x_0^i - \delta_i; x_0^i + \delta_i]$$

$$Y(\overrightarrow{y_0}) = \prod_{i=1}^{k} [y_0^i - \sigma_i; y_0^i + \sigma_i]$$

(Клеточные замкнутые окрестности точек)
Пусть $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ непрерывно дифференцируема в $I \times Y$, якобиан $\overrightarrow{F}$ не равен нулю.
Тогда

$$\forall \overrightarrow{x} \in I\ \exists! \overrightarrow{y} \in Y : \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0, \exists \overrightarrow{x} \xrightarrow{\overrightarrow{f}} \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{f} : R^m \to R^k$$

15. Теорема об обратимости регулярной функции.
Дана $\overrightarrow{f} : G \to R^n, G \in R^m, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$
Теорема (об обратимости регулярной функции):
Пусть $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ - непрерывно дифференцируема $\iff$ существуют все ее частные производные.
Предположим, что $\forall \overrightarrow{x} \in G : det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij} \neq 0$;
Тогда существует обратная функция $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{y})$, которая так же регулярная.

16. Формула Тейлора.
Для функций одной переменной выполняется формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + r_n(x)$$

Эту формулу можно обобщить для случая нескольких переменных. Теорема:
Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, которая имеет непрерывные производные в выпуклой окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$ всех порядков до n включительно.
Тогда имеет место формула:

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \frac{df(\overrightarrow{x_0})}{1!} + \frac{d^2f(\overrightarrow{x_0})}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1}f(\overrightarrow{x_0})}{(n-1)!} + r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = \frac{d^n f(\overrightarrow{x_0} + \theta\triangle\overrightarrow{x})}{n!}, 0 < \theta < 1$$

17. Экстремумы функции нескольких переменных.
Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, определенная на области $g, \overrightarrow{x_0} \in g$.
Точка $\overrightarrow{x_0}$ называется точкой максимума (минимума) для $f(\overrightarrow{x})$, если $\exists U(\overrightarrow{x_0})$ такая, что

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0}) : f(\overrightarrow{x_0}) > (<) f(\overrightarrow{x})$$

Минимум и максимум бывают строгими и нестрогими.

<u>Необходимое условие экстремума.</u>
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ в некоторой точке $\overrightarrow{x_0}$ имеет экстремум. Тогда

$$\exists f'_{x_i}(\overrightarrow{x_0}), f'_{x_i}(\overrightarrow{x_0}) = 0$$

<u>Достаточное условие экстремума.</u>
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ имеет вторые частные производные, $df(\overrightarrow{x_0}) = 0$.
Тогда, если $d^2f(\overrightarrow{x_0}) > 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка минимума,
если $d^2f(\overrightarrow{x_0}) < 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка максимума.

Теорема:

Если $d^2 f(\overrightarrow{x_0})$ неопределена, то в этой точке функция не имеет экстремума, такую точку принято называть седлообразной.

18. Условные экстремумы.
Пусть дана $f(\overrightarrow{x}) : R^m \to R^1$, а также $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ - уравнение связи (k - мерное, $k < m$).
Пусть множество $E = \{\overrightarrow{x} \in R^m \mid \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = 0\}$;
Тогда $\overrightarrow{x_0}$ является точкой условного минимума (максимума) $f(\overrightarrow{x})$ при условии $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = 0$, если

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overset{o}{U}(\overrightarrow{x_0}) \cap E : f(\overrightarrow{x_0}) > (<) f(\overrightarrow{x})$$

Условный экстремум бывает строгим и нестрогим.

<u>Метод множителей Лагранжа нахождения условного экстремума.</u>
Пусть дана $f(\overrightarrow{x}), g_1(\overrightarrow{x}) \ldots g_k(\overrightarrow{x})$ - функции связи.
Составим $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda}) = f(\overrightarrow{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(\overrightarrow{x})$

$$\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), L_{x_j} = f'_{x_j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g'_{x_j}(\overrightarrow{x}), L_{\lambda_i} = g_i(\overrightarrow{x})$$

Точка $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ называется стационарной, если $L_{x_j} = 0, L_{\lambda_i} = 0$.

Теорема 1:
Пусть дана $f(\overrightarrow{x})$ и набор связей $g(\overrightarrow{x}) = 0$, а также:
1) $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного экстремума.
2) $f(\overrightarrow{x})$ и $g_i(\overrightarrow{x})$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\overrightarrow{x_0}$.
3) $rank \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} = k.$
Тогда $\exists \overrightarrow{\lambda_0}$, что $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка функции $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda})$.

Теорема 2:
Пусть $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного экстремума функции, а также выполнены все условия теоремы 1. К тому же $f(\overrightarrow{x})$ и $g(\overrightarrow{x})$ имеют вторые непрерывные производные.
Тогда $d^2_{xx} L(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0}) \geq (\leq)\ 0$ - если в точке достигается минимум (максимум).

$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda})$.

Теорема 3 (о достаточном условии условного экстремума):
Пусть дана $f(\overrightarrow{x})$ и связь $g(\overrightarrow{x}) = 0$, а также выполнены условия теоремы 1, $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0})$ - стационарная точка $L(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\lambda})$.
Пусть также существуют вторые непрерывные производные $f(\overrightarrow{x})$ и $g(\overrightarrow{x})$.
Тогда:
Если $d^2_{xx}L(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0}) > 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного минимума.
Если $d^2_{xx}L(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\lambda_0}) < 0$, то $\overrightarrow{x_0}$ - точка условного максимума.

19. Понятие о мере Жордана.
E - клетка. В R_1 это отрезок, в R_2 - прямоугольник, в R_3 - прямоугольный паралеллепипед, и так далее.
Мерой клетки $\mu(E)$ будем называть $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Критерий измеримости множества.
Множество g измеримо $\iff$ g ограничено и $\mu(\partial g) = 0$.

20. Кратный интеграл Римана.
Дано D - измеримое множество. $f(\overrightarrow{x})$ задана на D, $\overrightarrow{x} \in D \subset R^n$.
$D = \cup_{i=1}^{n} D_i, D_i$ - измеримо, $D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j, \mu(D) = \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i)$.
$d(D_i)$ - диаметр куска $= sup\rho(x, y) = d_i$.
T - разбиение - множество всех $d_i, \lambda(T) = max d_i$ - мелкость разбиения.
$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\overrightarrow{\xi_i})\mu(D_i)$ - интегральная сумма.
Число I называется интегралом $f(\overrightarrow{x})$ на области D, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$ $\lambda(T) < \delta \Rightarrow |I - \sigma_T(f, \xi)| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_T(f, \xi)$$

В $R^2 : I = \iint f(x, y)dxdy$.

Необходимое условие интегрируемости.
Если функция интегрируема, то она ограничена.

Критерии интегрируемости функции.
1) Для того, чтобы функция была интегрируема на области D, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\lambda(T)<\delta\Rightarrow S_T-s_T<\varepsilon,$$

где S_T и s_T - верхняя и нижняя суммы Дарбу.

2) Для того, чтобы **ограниченная** функция была интегрируема на измеримом множестве D, небходимо и достаточно, чтобы $I_*=I^*$, где I_* - нижний интеграл Дарбу, а I^* - верхний интеграл Дарбу.

3) Ограниченная функция интегрируема на измеримом множестве тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists T:S_T-s_T<\varepsilon$$

Классы интегрируемых функций.
1) Если функция непрерывна на измеримом и ограниченном компакте D, то она интегрируема.

2) Пусть функция ограничена, задана на измеримом компакте D, а также имеет точки разрыва на множестве E, мера которого равна нулю. Тогда эта функция интегрируема.

21. Свойства кратного интеграла.
1) $\int_D 1d\mu=\mu(D)$.
2) $f(\overrightarrow{x})\geq 0\Rightarrow\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu\geq 0$.
3) $\int_D(\alpha f(\overrightarrow{x})+\beta g(\overrightarrow{x}))d\mu=\alpha\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu+\beta\int_D g(\overrightarrow{x})d\mu$.
4) Если $\forall\overrightarrow{x}:f(\overrightarrow{x})\geq g(\overrightarrow{x})$, то $\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu\geq\int_D g(\overrightarrow{x})d\mu$.
5) $\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu=\int_{D_1}f(\overrightarrow{x})d\mu+\int_{D_2}f(\overrightarrow{x})d\mu$, если $D=D_1\cup D_2, D_1\cap D_2=\emptyset$.
6) f - интегрируема, $\Rightarrow|f|$ - также интегрируема.
7) Теорема о среднем:
Пусть $f(\overrightarrow{x})$ - непрерывная на связном измеримом компакте D функция.
Тогда
$\int_D f(\overrightarrow{x})d\mu=f(\overrightarrow{\xi})\mu D,,\xi$ - внутренняя точка D.

22. Сведение двойного интеграла к повторному.
Теорема 1.
$D=[a;b]\times[c;d], f(x,y)$ - интегрируема и ограничена на D.
$\forall x\in[a;b]\ \exists\int_c^d f(x,y)dy$

Тогда $\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ и $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.

Теорема 2.
Пусть D - измерима и элементарна по y, $f(x,y)$ интегрируема на $D, \forall x \in [a;b]$ $\exists \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.
Тогда $\exists \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ и $\exists \iint_D f(x,y)dxdy$, причем $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Вычисление тройных интегралов.
Теорема:
Пусть дана функция $f(x,y,z)$, ограниченная и интегрируемая в D - области, элементарной по z.
Также $\forall (x,y) \in g$ $\exists \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$
Тогда $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_g dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$.

23. Замена переменных в кратном интеграле.

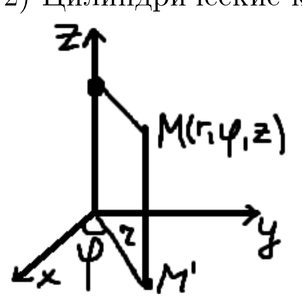
Если перешли от $f(x,y)$ к $\tilde{f}(u,v)$, то вот так вычисляем интеграл:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} |I|\tilde{f}(u,v)dudv$$

Полярная, цилиндрическая, сферическая система координат.
1) Полярные координаты:

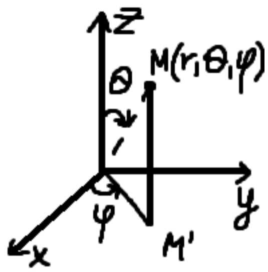
$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} , |I| = r$$

2) Цилиндрические координаты.



$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = z \end{cases}, |I| = r$$

3) Сферические координаты.



$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}, |I| = r^2 sin\theta$$

24. Несобственные кратные интегралы.

Дана область $g \subset R^2$, $f(x,y)$ интегрируема на каждом измеримом $g' \subset g$. Тогда будем называть несобственным кратным интегралом:

$$\iint_g f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{g_n} f(x,y)dxdy$$

$\{g_n\}$ - последовательность, исчерпывающая g.

<u>Теорема о несобственном интеграле от неотрицательной функции.</u>

Если $f(x,y) \geq 0$ на g, то определение несобственного кратного интеграла не зависит от выбора последовательности $\{g_n\}$.

<u>Признаки сходимости.</u>

1) $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$

$\iint g$ сходится $\Rightarrow \iint f$ сходится.

$\iint f$ расходится $\Rightarrow \iint g$ расходится.

2) Предельный признак сравнения:

Если $lim\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = l(\neq 0) \Rightarrow \iint f$ и $\iint g$ сходятся или расходятся одновременно.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости несобственного интеграла от функции, меняющей знак.
Пусть функция $f(x,y) \geq 0$, введем две функции:

$$f_+ = \begin{cases} f, f > 0 \\ 0, f < 0 \end{cases}$$

$$f_- = \begin{cases} -f, f < 0 \\ 0, f > 0 \end{cases}$$

f_+, f_- - положительные.

Необходимое условие:
Если f интегрируема, то она абсолютно интегрируема.

Достаточное условие:
Если f абсолютно интегрируема, то она интегрируема.

25. Кривые в пространстве. Параметризация кривой.
Кривая - $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), R^1 \to R^3, \alpha \leq t \leq \beta$
$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$\overrightarrow{r}(t)$ - непрерывна.
$\overrightarrow{r}(t)$ является гладкой, если $\exists x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)$, которые являются непрерывными.
$\overrightarrow{r}'(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t))$ - касательная к кривой.

$$|\overrightarrow{r}'(t)| \neq 0 \iff \overrightarrow{r}'(t) \neq 0$$

Если существует конечное число частей $\overrightarrow{r}(t)$, в которой она гладкая, при этом $\overrightarrow{r}(t)$ непрерывна, то кривая называется кусочно-гладкой.
Будем говорить, что две функции $\overrightarrow{r}(t)$ и $\overrightarrow{\rho}(\tau)$ задают одну и ту же кривую, если $\exists t = t(\tau)$ - дифференцируемая функция, $t^{'}(\tau) > 0$, отображает $[a;b]$ на $[\alpha;\beta]$, и эта t такая, что $\forall \tau \in [a;b] : \overrightarrow{r}(t(\tau)) = \overrightarrow{\rho}(\tau)$
Если $t_1 \neq t_2$, $\overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{r}(t_2)$, то кривая имеет точку самопересечения.
Если кривая имеет лишь одну точку самопересечения, причем $\overrightarrow{r}(\alpha) = \overrightarrow{r}(\beta)$, то кривая называется простым замкнутым контуром.

Если взять $t = \alpha + \beta - \tau$, то новая кривая $\overrightarrow{r}(\alpha + \beta - \tau)$ - та же самая кривая, но с противоположным направлением обхода (ориентацией).

26. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
Пусть Γ - гладкая кривая, $f(x, y, z)$ - непрерывная функция в области $D \supset \Gamma$.
Криволинейным интегралом I рода от $f(x, y, z)$ по кривой Γ будем называть

$$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \|\overrightarrow{r}'(t)\| dt = \int_\Gamma f ds(dl)$$

Свойства криволинейного интеграла I рода.
1) Определение не зависит от параметризации кривой.
2) Определение не зависит от направления кривой.
3) Криволинейный интеграл I рода - линейная функция.
4) Криволинейный интеграл I рода - аддитивная функция.
5) Криволинейный интеграл I рода можно задать через интегральную сумму:

$$f(x, y, z) dl = \sum f(x(\overrightarrow{t_i}), y(\overrightarrow{t_i}), z(\overrightarrow{t_i})) \|\overrightarrow{r}'(\overrightarrow{t_i})\| \triangle \overrightarrow{t_i} = \sum f(\overrightarrow{M_i}) S_i$$

27. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
$\Gamma : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $R^3 \to R^3 \overrightarrow{F}$ непрерывна в D
Криволинейным интегралом II рода от функции $\overrightarrow{F}$ по кривой Γ будем называть

$$\int_a^b \overrightarrow{F} \overrightarrow{r}'(t) dt = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)) x^{'}(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y^{'}(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z^{'}(t)) dt$$

Чаще применяют следующую запись:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz$$

Свойства криволинейного интеграла II рода.
1) Не зависит от параметризации кривой.
2) **Зависит** от направления кривой.

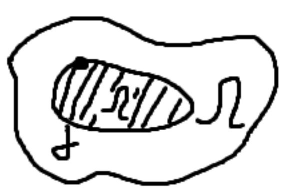
3) Криволинейный интеграл II рода - линейная функция.
4) Криволинейный интеграл II рода - аддитивная функция.
5) Криволинейный интеграл II рода можно задать через интегральную сумму:

$$\overrightarrow{F}\overrightarrow{r}'(t)dt = \sum(Px^{'}(t_i) + Qy^{'}(t_i) + Rz^{'}(t_i))\triangle t_i$$

28. Связь между интегралами первого и второго рода.

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta \overrightarrow{F}\overrightarrow{r}'dt = \int_\alpha^\beta (\overrightarrow{F}\frac{\overrightarrow{r}'}{\|r^{'}\|})\|r^{'}\|dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta (Pcos\varphi + Qcos\theta + Rcos\gamma)\|r^{'}\|dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\overrightarrow{r_0}'dl$$

29. Формула Грина.
Введем понятие односвязной области:
Односвязная область - такая область, что любая простая замкнутая кривая, лежащая в этой области ограничивает часть плоскости, полностью лежащей в этой области.



Ω - односвязная область, γ - замкнутая простая кривая.
Ориентация кривой относительно области - обход кривой так, чтобы область оставалась **слева**. Такой обход назовем **положительным**:

Теорема Грина:
Пусть даны $P(x, y), Q(x, y)$ - непрерывно дифференцируемые функции, Ω - односвязная область, Γ - кусочно гладкий контур, граница области:

Тогда $\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ - формула Грина.

Формула Грина помогает при вычислении площадей:
Пусть $Q(x, y) = x, P(x, y) = -y$, тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \int_\Gamma = 2S_\Omega$.

Теорема о свойстве дифференциального выражения $Pdx + Qdy$.
Пусть P, Q - непрерывно дифференцируемые функции, Ω односвязна. Тогда для того, чтобы $\int_\gamma Pdx + Qdy = 0$, где γ - любой контур, лежащий в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$$

Следствие:
Чтобы $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$.

Независимость криволинейного интеграла от выбора пути.
Для того, чтобы $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от выбора пути интегрирования в области Ω^{AB}, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая u, что $du = Pdx + Qdy$.

Honourable mentions:
Суммы Дарбу:
$m_i = inf_{\overrightarrow{x} \in D_i} f(\overrightarrow{x})$; $M_i = sup_{\overrightarrow{x} \in D_i} f(\overrightarrow{x})$.
$s_T(f) = \sum_{i=1}^n m_i \mu(D_i)$ - нижняя сумма Дарбу.
$S_T(f) = \sum_{i=1}^n M_i \mu(D_i)$ - верхняя сумма Дарбу.

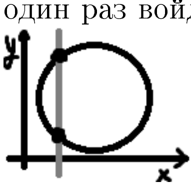
Интеграл Дарбу.

$sup\ s_T = I_*$ - нижний интеграл Дарбу.

$inf\ S_T = I^*$ - верхний интеграл Дарбу.

Элементарная область.

Область называется элементарной по y, если мы прямой вдоль оси Y один раз войдем в нее и один раз выйдем. Аналогично по другим осям.



- элементарная по y область.


- не элементарная по y область.

Исчерпывающая последовательность.

Дана g - неограниченная область в R^m

$\{g_n\}$ - множество открытых измеримых ограниченных множеств из R^m. Тогда будем называть $\{g_n\}$ исчерпывающей последовательностью для g, если:

$$\forall n : \overrightarrow{g_n} \subset g_{n+1}, \cup_{n=1}^{\infty} g_n = g$$