

# Конспект по матанализу за 4-й семестр.

Автор: Эмиль

8 марта 2019 г.

Это конспект по матанализу за 4-й семестр. Любые предложения и сообщения об ошибках приветствуются, писать автору: [t.me/buraindo24](https://t.me/buraindo24)

## 1 Поверхность

### 1.1 Поверхность

$\vec{r} = \vec{r}(t)$  - кривая - отображение промежутка  $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^3$  (или  $R^2$ ).

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  - поверхность - отображение области  $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3(x, y, z)$ .

Записывается  $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Для всех рассуждений будем предполагать, что  $x, y, z$  имеют непрерывные производные, а так же  $\text{rank} \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$ .

Если ранг равен 2, то поверхность назовем "хорошей", иначе, если ранг равен 1, то "плохой".

И тогда будем говорить, что  $\vec{r}(t)$  - гладкая.

$\Omega \rightarrow \vec{r}(\Omega)$  - образ.

Если  $\Omega$  отображается на свой образ  $\vec{r}(\Omega)$  взаимно-однозначно, то  $\vec{r}(\Omega)$  - **простая** поверхность.

#### **ПРИМЕР:**

$z = x^2 + y^2$  - параболоид, тогда  $\vec{r} = (x, y, x^2 + y^2)$ .

В общем виде это задание будет выглядеть так:

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$$

## 1.2 Край поверхности

Пусть  $\Omega$  - ограниченная область,  $\vec{\Omega}$  - замыкание  $= \Omega \cup \partial\Omega$  (область плюс её граница).

Рассмотрим теперь  $\partial\Omega$  - границу  $\Omega$ :

$\partial\Omega : (u(t), v(t))$  - какая-то линия.

$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(t), v(t))$  - кривая, **край** поверхности, являющийся образом  $\partial\Omega$ .

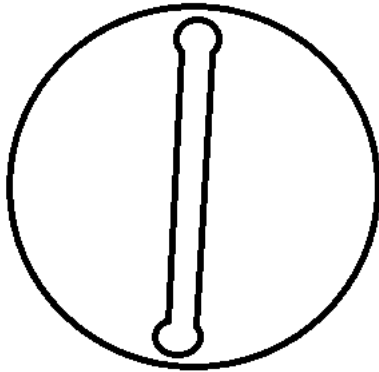
Будем обозначать за  $\Sigma$  саму поверхность  $\vec{r}(u, v)$ , а за  $\partial\Sigma$  её край -  $\vec{r}(u(t), v(t))$ .

## 1.3 Почти простая поверхность

Будем называть поверхность  $\Omega \rightarrow \vec{r}(u, v)$  **почти простой**, если найдется такая исчерпывающая последовательность  $\Omega_n$ , для которой каждая  $\Omega_n \rightarrow \vec{r}(u, v)$  - простая поверхность.

Например, сфера и конус - не простые поверхности, но их можно немного изменить, чтобы они стали почти простыми:

Сфера:



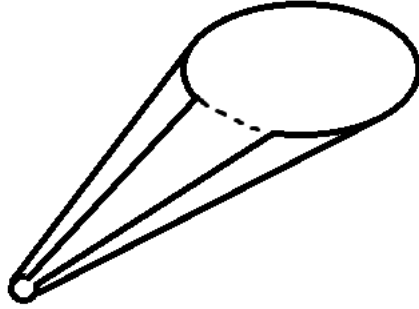
Вырежем из северного и южного полюсов сферы кружочки, а затем разрежем её от одного кружочка до другого. Этим действием мы немного изменили промежутки принимаемых углами  $\varphi$  и  $\theta$  значений в сферических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

Конус:



Вырежем вершину конуса и разрежем его по вертикали. Этим действием мы немного изменили промежутки допустимых значений для радиуса  $r$  и угла  $\varphi$  в цилиндрических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

#### 1.4 Функции, задающие одну и ту же поверхность

Пусть даны  $\Omega$  и  $\Omega'$ , а так же соответствия  $u = u(u', v'), v = v(u', v')$ .

Кроме того, пусть якобиан  $\begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$  не равен 0 (то есть, существует обратная функция).

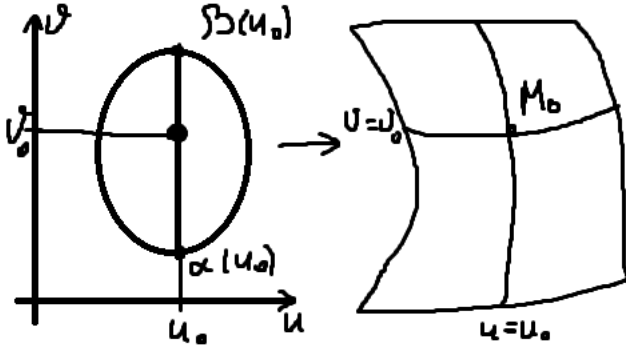
Это значит, что  $\Omega$  отображается на  $\Omega'$  взаимно-однозначно.

В таком случае будем считать, что

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \vec{\varrho}(u', v') - \Sigma$$

(задают одну и ту же поверхность).

## 1.5 Координатные кривые



Зафиксируем одну из координат, например,  $u = u_0$ , и будем менять  $v$  от  $\alpha(u_0)$  до  $\beta(u_0)$ . Получим кривую  $\vec{r}(u_0, v)$ .

Аналогично, если зафиксировать  $v = v_0$ , то зададим кривую  $\vec{r}(u, v_0)$ .

Эти две кривые называются **координатными кривыми**.

## 1.6 Нормаль

Теперь рассмотрим  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  - касательные к кривой.

Пусть  $A = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$ , тогда если  $\text{rank} A = 2$ , то векторное произведение  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ .

Результат этого векторного произведения  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{n}$  является вектором **нормали** к поверхности  $\Sigma$ .

Убедимся, что нормаль не зависит от параметризации кривой:

Дано взаимно-однозначное отображение  $\Omega \iff \Omega'$  и  $\vec{r}(u, v) = \vec{\varrho}(u', v')$ .

Посчитаем  $\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}$ :

Вспомним, что  $\vec{\varrho}(u', v') = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v'))$ , это значит, что

$$\vec{\varrho}_{u'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'},$$

$$\vec{\varrho}_{v'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

Перемножим, учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\begin{aligned}\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'} &= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} + (\vec{r}_v \times \vec{r}_u) \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} = \\ &= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) (\text{поменяли знак}) = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Но этот якобиан не равен нулю!

Это значит, что получили тот же вектор нормали, у которого могла измениться лишь длина или направление, что и требовалось доказать.

## 1.7 Площадь поверхности

Даны  $\Omega$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ .

Найдем дифференциал этого вектора:

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \\ d\vec{r}^2 &= |d\vec{r}|^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2\end{aligned}$$

Обозначим  $E = \vec{r}_u^2$ ,  $F = \vec{r}_u \vec{r}_v$ ,  $G = \vec{r}_v^2$ .

$d\vec{r}^2$  называется первой квадратичной формой поверхности и для неё справедливо свойство:

$d\vec{r}^2 > 0$  (положительно определена)ю

Для того, чтобы это выполнялось (для нашей формы  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ), нужно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

В нашем случае второго дифференциала вектора  $\vec{r}$  это значит, что требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$

Первые два условия очевидны, проверим третье:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sin \varphi \quad (\varphi \neq 0)$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v &= |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \cos \varphi \\ |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 + (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 &= |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2\end{aligned}$$

Заметим, что правая часть это  $EG$ , а второе слагаемое в левой части это  $F^2$ .

Тогда  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = EG - F^2 > 0$ , так как  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ , что и требовалось доказать.

### Площадь поверхности

$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$  - площадь поверхности.

Свойства площади:

1) Не зависит от параметризации.

Пусть дали две параметризации:

$$\begin{aligned}\vec{r}(u, v) &= \vec{\varrho}(u', v') \\ S(\Sigma) &= \iint_{\Omega'} |\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| \, du' dv'\end{aligned}$$

Вспомним, что  $|\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| = |(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)| \cdot |I(\frac{u, v}{u', v'})|$ .

Подставим это в интеграл:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot |I| \, du' dv' = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

Получили то же самое.

2) Рассмотрим случай, когда сама поверхность - плоскость. Сможем ли по той же формуле посчитать площадь? Проверим это, площадь это  $\iint_{\Omega} dudv$ .

Теперь посчитаем  $S(\Omega)$ :

$\Sigma$  задается при помощи  $\vec{r} = (x, y, 0)$ .

Тогда  $\vec{r}_x = (1, 0, 0)$

$\vec{r}_y = (0, 1, 0)$ .

$$\text{А } \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}, \Rightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1.$$

Тогда  $S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| \, dudv = \iint_{\Omega} dudv$ , что и требовалось доказать.

3) Площадь аддитивна по отношению к поверхности. (Площадь поверхности, составленной из гладких кусков, равно сумме площадей).

$$4) z = f(x, y).$$

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y)).$$

$$\vec{r}_x = (1, 0, f_x).$$

$$\vec{r}_y = (0, 1, f_y).$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = i(-f_x) - jf_y + \vec{k}.$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

### ПРИМЕРЫ:

1) Посчитать площадь:

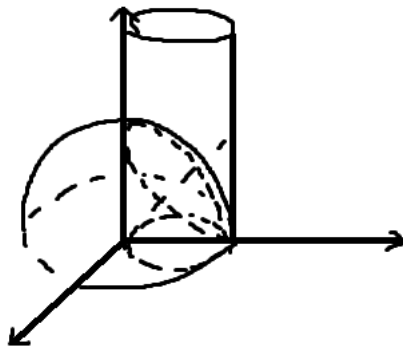
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где  $z \geq 0$ .

Это половина сферы, которую вырезает цилиндр:

$$x^2 + y^2 = Rx, \Rightarrow x^2 - Rx + \frac{x^2}{4} + y^2 = (\frac{R}{2})^2, \Rightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$$

Это выглядит так:



Перейдем в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$$

Посчитаем частные производные по  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$\vec{r}_\varphi = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\theta = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta)$$

Теперь посчитаем  $E, F, G$ :

$$E = \vec{r}_\varphi^2 = R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta.$$

$$F = \vec{r}_\theta^2 = R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

$$F = 0 \text{ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \theta.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta.$$

Осталось вычислить верхний предел интегрирования для  $\theta$ , для этого нужно подставить сферические координаты в уравнение цилиндра:

$$R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \cos \varphi \sin \theta.$$

Отсюда либо  $\sin \theta = 0$ , либо  $\sin \theta = \cos \varphi$ .

Первое нас не интересует, а вот второе можно решить и получить ответ:

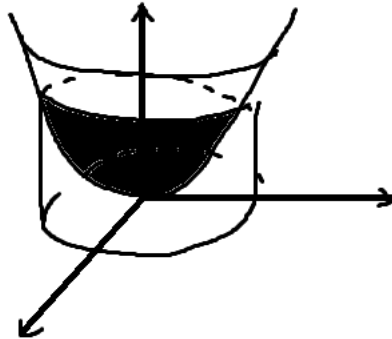
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin \theta \, d\theta = R^2(\pi - 2).$$

2) Посчитать площадь поверхности:

$z = x^2 + y^2$ . Этот параболоид бесконечен, поэтому чтобы было, что считать, вырежем из него кусок  $x^2 + y^2 = R^2$  и найдем площадь.

Вот как это выглядит:



Для этого перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = \varrho^2 \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varrho^2).$$

Посчитаем частные производные по  $\varrho$  и  $\varphi$ .



$$\vec{r}_\varrho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2\varrho).$$

$$\vec{r}_\varphi = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0).$$

Теперь посчитаем  $E, F, G$ :

$$E = \vec{r}_\varrho^2 = 1 + 4\varrho^2.$$

$$F = \vec{r}_\varphi^2 = \varrho^2.$$

$F = 0$  (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).

$$\sqrt{EG - F^2} = \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2}.$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho$$

Важная информация про почти простые поверхности:

Если  $\Sigma$  - почти простая, а  $\Omega_n$  - искомая исчерпывающая последовательность, то:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

## 2 Поверхностные интегралы

### 2.1 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть  $\Sigma$  - простая и гладкая поверхность. Дана  $F(x, y, z)$  - непрерывная функция, определенная на  $\Sigma$ .

Поверхностным интегралом  $I$  рода от функции  $F$  по поверхности  $\Sigma$  называется:

$$\iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \iint_{\Sigma} F(x, y, z) ds(d\sigma)$$

Свойства поверхностного интеграла  $I$  рода:

1) Не зависит от параметризации поверхности (доказывается так же, как независимость площади поверхности от параметризации).

2) Аддитивность и линейность.

3) Можно дать физическую интерпретацию:

Если  $F(x, y, z) \geq 0$ , и это плотность слоя, "намазанного" на поверхность, то  $\iint F d\sigma$  - масса слоя.

**Вместо  $d\sigma$  можно написать  $\sqrt{EG - F^2} dudv$ .**

## 2.2 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть  $\Sigma$  - двусторонняя (бывают односторонние поверхности, например, лист Мёбиуса и бутылка Клейна (Кляйна)). Выберем сторону (это означает, выберем, куда "смотрит" нормаль).

У нас есть поверхностный интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) d\sigma$ , где  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ . Если поменять сторону, то поменяется знак за счёт смены направления вектора нормали на противоположное.

Отсюда вытекает свойство:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) d\sigma = - \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0^-) d\sigma$$

## 2.3 Как считать поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим  $(\vec{F}, \vec{n}_0) = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = (\vec{F} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) dudv$  (смешанное произведение).

Посчитаем его:

$$\begin{bmatrix} R & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} dudv = \left( P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} (\text{поменяли знак}) + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

Рассмотрим  $PI(\frac{y, z}{u, v}) dudv$ :

Если угол между вектором нормали и осью  $x$  острый, то  $I > 0$ , иначе  $I < 0$ .

Тогда для острого угла  $\iint PI dudv = \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$ .

А для тупого угла  $\iint PI dudv = - \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$ .

Аналогично и другие слагаемые, тогда запишем сумму:

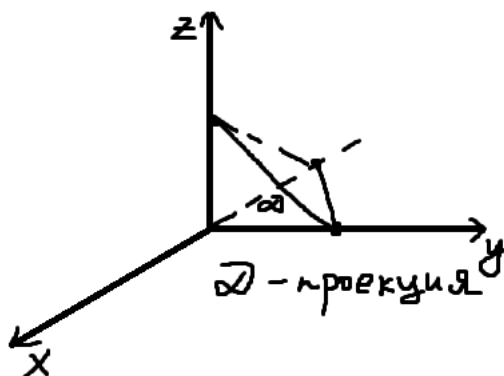
$$P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Тогда

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

### ПРИМЕР:

Дан  $\iint_{\Sigma} x dydz$ , и вырезан прямоугольник  $z + y - z = 1$ , верхняя сторона.



Посчитаем:

$\iint_{\Sigma} x \, dydz = - \iint (z + y - 1) \, dydz$  (так как угол между нормалью и отсутствующей осью (в данном случае ось  $x$ ) тупой).

$$- \iint (z + y - 1) \, dydz = - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z + (y - 1)) \, dz = \frac{1}{6}$$

### 3 Теория поля

$\Omega \subset R^3$ .

I. Скалярное поле.

Если  $\forall M \in \Omega \exists f(M)$  - число, тогда у нас на области  $\Omega$  задано скалярное поле  $f(M) = f(x, y, z)$ .

Дифференцируемость.

Будем называть  $f(M)$  дифференцируемым в точке  $M_0$ , если существует такой вектор  $\vec{c}$ , что

$$\Delta f(M_0) = \Delta \vec{r} \cdot \vec{c} + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

$$\vec{c} = \text{grad} f(M_0) = \left( \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right)$$

Гуманитарии могут делать так:

$$\sin x + \cos x = (\sin + \cos)x.$$

Мы сделаем так для градиента, но осознанно и опираясь на законы:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

Обозначим теперь  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  за  $\nabla$  (произносится "набла").

Это символический вектор, его координаты это вроде числа, но на самом

деле, эта набла - целиком оператор и применяется к чему-то.

Тогда  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \nabla f$ .

$\vec{c} = \nabla f$ , тогда

$$\Delta f = \Delta \vec{r} \cdot \nabla f = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) f + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

Производная по направлению.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t \vec{l}_0) - f(M_0)}{t}$$

Здесь  $t > 0$ , а  $\vec{l}_0$  - орт направления.

Заметим, что числитель - приращение, так что можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t \vec{l}_0 \cdot \nabla + o(t)) f}{t} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) f$$

II. Векторное поле.

Если  $\forall M \in \Omega \exists \vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , тогда на области  $\Omega$  задано векторное поле  $\vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ .

Дифференцируемость.

Будем называть  $\vec{a}(M)$  дифференцируемым в точке  $M_0$ , если его приращение можно представить в виде:

$$\Delta \vec{a}(M) = \vec{a}(M) - \vec{a}(M_0) = L(\vec{r}) + o(|\vec{r}|)$$

Тогда

$$\Delta \vec{a}(M) = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{a} + o(|\vec{r}|)$$

Производная по направлению.

$\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) f$  - для скалярного поля. В случае векторного поля:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

**ПРИМЕР:**

$$\vec{a} = y \vec{i} + (xy + yz) \vec{j} + xyz \vec{k}$$

$$\vec{l} = (1, 1, 1), \vec{l}_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

1)  $(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}$ , и все это нужно применить к вектору

$\vec{a}$ .

2)  $(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$  - рассмотрим результат покомпонентно:

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_x = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z} \right) y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_y = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (xy + yz) = \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_z = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (xy) = \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}}$$

Тогда

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}} \vec{k}.$$

Введем понятия:

Пусть дано поле  $\vec{a} = \vec{a}(M) = (P, Q, R)$ .

Тогда **дивергенция** поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

**Ротор** векторного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Упростим формулы для  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$ :

$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a})$  (скалярное произведение).

$\operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla \times \vec{a})$  (векторное произведение).

**Действия с  $\nabla$ :**

1)

$$\nabla(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2$$

2) Посчитаем  $\nabla(f_1 f_2)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} f_1$$

Будем иметь ввиду, что  $\nabla$  действует на поле, когда пишем следующим образом:

$$\nabla(f_1 f_2)$$

Здесь  $\nabla$  действует на поле  $f_1$ .

Тогда  $\nabla(f_1 f_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2) + \nabla(f_1 \overset{\downarrow}{f_2}) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$ .

3) Посчитаем  $\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$ :

Формально это смешанное произведение, тогда

$$\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2)$$

4)  $\text{grad } f = \nabla f$

5)  $\text{grad } (f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$

6)  $\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$

7)  $\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

8)  $\text{div}(f \cdot \vec{a}) = \nabla(f \cdot \vec{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{f} \cdot \vec{a}) + \nabla(f \cdot \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = \vec{a} \nabla f + f \nabla \vec{a} = \vec{a} \text{grad } f + f \text{div } \vec{a}$

9)  $\text{div}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \text{rot } \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \text{rot } \vec{a}_2$

10)  $\text{rot}(f \vec{a}) = \nabla \times (f \vec{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{f} \vec{a}) + \nabla \times (f \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\nabla f) \times \vec{a} + f(\nabla \times \vec{a}) = \text{grad } f \times \vec{a} + f \text{rot } \vec{a}$

11)  $\text{rot}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla \overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2 + \nabla \vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2} = (\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2(\nabla \vec{a}_1) + \vec{a}_1(\nabla \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2 = (\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \text{div } \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \text{div } \vec{a}_2 - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2$

12)  $\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}) f = \nabla^2 f = \Delta f$ .

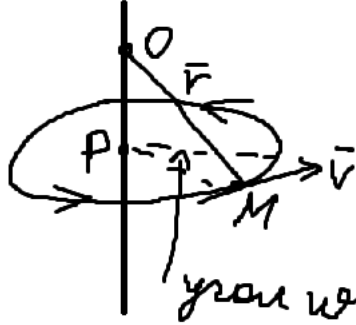
$\Delta$  - оператор Лапласа,  $\Delta = \nabla^2$ .

13)  $\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ .

14)  $\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$ .

### **Экскурс в физику - физический смысл ротора**

Пусть дали твердое тело, оно вращается вокруг какой то оси, пусть по часовой стрелке:



$$|\vec{v}| = PM(\text{радиус}) \cdot \omega.$$

Вектор  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  параллелен  $\vec{v}$  (1)

$$|\vec{v}| = \omega \cdot |\vec{r}| \sin \varphi = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin(\pi - \varphi) \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Посчитаем  $\text{rot}(\vec{v})$ :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \text{div} \vec{\omega} + (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r}.$$

$\vec{\omega}$  зависит только от времени, следовательно, везде, где дифференцируем  $\vec{\omega}$ , будут нули:

$$\text{div} \vec{\omega} = 0, (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} = 0.$$

$$\text{Тогда } \text{rot} \vec{v} = \vec{\omega} \text{div} \vec{r} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, физический смысл ротора: удвоенная мгновенная угловая скорость, отсюда и его названия (ротатор, вихрь).

## 4 Интегральные характеристики векторного поля

Дано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  в  $\Omega$ , а так же  $l$  - простой кусочно-гладкий замкнутый контур из  $\Omega$ .

### 4.1 Циркуляция

**Циркуляцией** векторного поля по замкнутому контуру  $l$  называется следующий интеграл второго рода:

$$\Pi = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

## 4.2 Поток

Дана поверхность  $\Sigma$ .

**Потоком** векторного поля по поверхности  $\Sigma$  называется следующий интеграл второго рода:

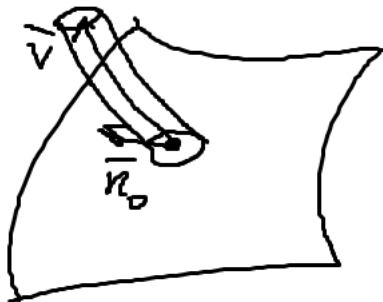
$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds$$

Приведем к привычному виду:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

### Физический смысл потока

Пусть есть  $\vec{a} = \vec{v}$  - поле скоростей. Жидкость движется по какому-то пути, а затем мы ставим на этом пути решетку:



И сколько жидкости проходит через решетку за единицу времени?

Возьмем в нашей решетке маленький кусок, из-за пренебрежимо малой величины можем считать его плоским. Тогда за единицу времени жидкость займет объем цилиндра с площадью основания, равной площади куска, и высотой, равной проекции  $\vec{v}$  на ось вращения.

Посчитаем этот объем:

$$V_{\Pi} = S \cdot |\vec{v}_{\text{пр.} \vec{n}_0}| = ds \vec{a} \vec{n}_0 = d \Pi$$



И поток будет равен приближенной сумме объемов по всем кусочкам, то есть интегралу.

## 5 Теорема Гаусса-Остроградского (Остроградского-Гаусса)

Пусть есть ограниченная область  $\Omega \subset R^3$

Граница этой области -  $\partial\Omega$  - кусочно-гладкая.

$\vec{n}$  - внешняя нормаль.

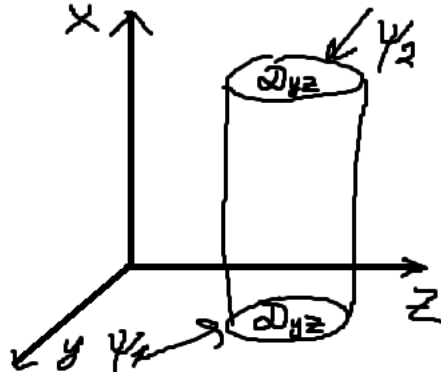
$\vec{a} = \vec{a}(M), M \in \bar{\Omega}$ ,  $\vec{a}$  непрерывно дифференцируемо в каждой точке.

Тогда выполняется равенство:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$$

Доказательство:

Предположим, что  $\Omega$  односвязна и элементарна по всем координатам.



Посчитаем одно из слагаемых, например, интеграл по  $\frac{\partial P}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x} = \\ &= \iint_{D_{yz}} P(\psi_2(y,z), y, z) dy dz - \iint_{D_{yz}} P(\psi_1(y,z), y, z) dy dz = \\ &= \iint_{\Sigma_1} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma_2} P(x, y, z) dy dz + 0 \text{ (интеграл по боковой по-} \\ &\text{верхности равен нулю).} \end{aligned}$$

Здесь  $\Sigma_1$  образована функцией  $x = \psi_1(y, z)$ ,  $\Sigma_2$  образована функцией  $x = \psi_2(y, z)$ .

Тогда эта сумма - интеграл по всей границе (три слагаемых это интеграл по верхней части, нижней части и боковой поверхности), а значит, она

равна

$$\iint_{\partial\Omega} P(x, y, z) dydz$$

Аналогично доказывается для  $Q$  и для  $R$ .

## 5.1 Следствие из теоремы Остроградского-Гаусса

Возьмем непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a} = (P, Q, R)$  в открытой области  $\Omega$ .

Возьмем из этой области точку  $M_0$  и окружим ее сферой  $S(M_0)$ .

Обозначим за  $V(M_0)$  шар, ограниченный сферой  $S$ ,  $V \subset \Omega$ .

Запишем для сферы и шара формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{V(M_0)} \text{div } \vec{a} dV = I$$

Тогда для какой-то точки  $\tilde{M} \in V(M_0)$  выполняется равенство:

$$I = \text{div } \vec{a}(\tilde{M}) \cdot V$$

$V$  - объем шара. Отсюда выразим дивергенцию:

$$\text{div } \vec{a}(\tilde{M}) = \frac{\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds}{V}$$

Полученную формулу принято называть средней плотностью источников (или стоков).

Какой в этом смысл:

Представим, что где-то через шар протекает жидкость. В нормальной ситуации вытекает жидкости ровно столько, сколько втекает, дивергенция равна нулю. Но если внутри шара есть источник/сток, тогда втекать будет меньше/больше, чем вытекать. Именно это и регулирует числитель в формуле дивергенции, полученной выше.

## 6 Теорема Стокса

Дано:

Простая и гладкая  $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0})$  поверхность  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \Sigma$ .

Плоскость  $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3, (u, v) \in \Omega, \Omega$  - ограничена.

$\partial\Omega = \{u(t), v(t)\}, \alpha \leq t \leq \beta$ .

$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  - граница поверхности,  $\partial\Sigma$ .

Теорема (Стокса):

Имеет место формула:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$$

Доказательство:

1) Сведем  $\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r}$  к интегралу по контуру  $\partial\Omega$ :

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{a}(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot (\vec{r}_u u_t dt + \vec{r}_v v_t dt) = \int_{\partial\Omega} \vec{a}(\vec{r}(u, v)) (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = I_1$$

2) Сведем  $\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$  к интегралу по области  $\Omega$ :

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot \left( \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \right) dudv = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv = I_2$$

Рассмотрим подынтегральное выражение, оно представляет собой смешанное произведение, попробуем представить его в виде  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ , чтобы применить формулу Грина в обратную сторону:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) &= \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \times (\nabla \times \vec{a}) = \\ &= \vec{r}_u \cdot \nabla (\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = (\vec{r}_u \cdot \nabla) (\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \\ &= \vec{r}_v (\vec{r}_u \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{r}_u (\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \vec{r}_v (x_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) - \vec{r}_u (x_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) = \\ &= \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v = \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v + \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} - \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \end{aligned}$$

Получили как раз, что хотели, осталось подставить в  $I_2$ :

$$I_2 = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial u} (\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \right) dudv$$

Тогда по формуле Грина для этого интеграла:

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{r}_u du + \vec{a} \vec{r}_v dv = I_1$$

Таким образом, получили тот же интеграл, следовательно, формула верна и теорема доказана.

## 6.1 Следствие из теоремы Стокса

Дан интеграл  $I = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ . Чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\text{rot } \vec{a} = 0$ .

Доказательство:

1) Пусть  $l_1$  и  $l_2$  - какие-то два пути из  $A$  в  $B$ , и пусть эти кривые не пересекаются.

Тогда  $I = \int_{l_1} - \int_{l_2} = \int_l$ .  $l$  - контур, получаемый, если пойти из  $A$  в  $B$  по кривой  $l_1$ , а затем обратно из  $B$  в  $A$  по  $l_2$ .

Тогда  $I = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$  - по теореме Стокса.

Следовательно, если  $\text{rot } \vec{a} = 0$ , то  $I = 0 = \int_{l_1} - \int_{l_2} \Rightarrow \int_{l_1} = \int_{l_2}$ , что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь  $\int_{l_1} = \int_{l_2}$ , тогда  $\int_l = 0 = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0) ds$ , следовательно, скалярное произведение равно нулю, но нормаль не может быть равна нулю, поэтому равен нулю ротор, что и требовалось доказать.

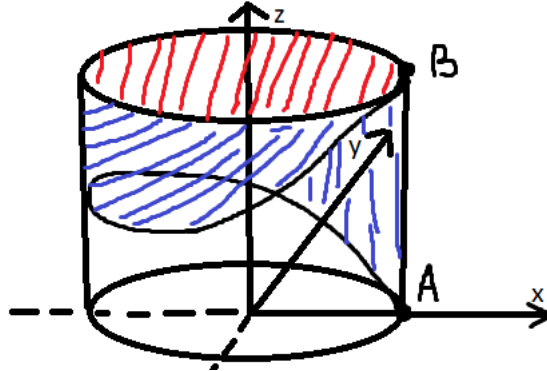
TODO: убедиться, что это верно

### ПРИМЕРЫ:

1)  $\vec{a} = -y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$ . Найти циркуляцию вдоль поля, если

$L : \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(a, 0, 2\pi b)$ .

Это выглядит примерно так, закрашены две области, которые нас интересуют:



Тогда  $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$ .

Посчитаем ротор, он равен  $2\vec{k}$ .

Как видно на картинке выше, нас интересуют две области, на которые и делится  $\Sigma$ .  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

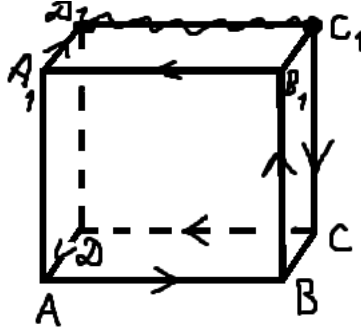
Рассмотрим по очереди каждую из этих областей:

$\Sigma_1 : x^2 + y^2 = a^2, \vec{n} = (x, y, 0), \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 0$ .

$\Sigma_2 : z = 2\pi b, x^2 + y^2 \leq a^2, \vec{n} = \vec{k} = \vec{n}_0, \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 2$ .

Тогда  $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma_2} 2 ds = 2\pi a^2$ .

2)  $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ . Дан куб, ребро имеет длину = 1. Найти циркуляцию вдоль ломаной  $C_1CDABB_1A_1D_1$ .



Замкнем ломаную, добавив отрезок  $D_1C_1$ .  $L = L_1 \cup D_1C_1$ .

За поверхность возьмем грани  $ABB_1A_1(\Sigma_1)$ ,  $A_1D_1DA(\Sigma_2)$  и  $C_1CDD_1(\Sigma_3)$ .

Посчитаем ротор, он равен  $-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .

Тогда  $\int_L = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}$ .

Рассмотрим каждую их областей:

$\Sigma_1 : \vec{n} = -\vec{i}, \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 1, \iint_{\Sigma_1} = \iint ds = 1$ .

$$\Sigma_2 : \vec{n} = \vec{j}, \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_2} = \iint ds = -1.$$

$$\Sigma_3 : \vec{n} = \vec{i}, \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_3} = \iint ds = -1.$$

Сложим, получим, что  $\int_L = -1$ . Осталось посчитать  $\int_{D_1 C_1} y dx + z dy + x dz = I$ .

$D_1 C_1 : x = 1, z = 1$ , тогда  $dx = 0, dz = 0$ .

Отсюда  $I = \int_0^1 z dy = 1$ . Тогда  $\int_{L_1} = \int_L - \int_{D_1 C_1} = -2$ .