

# Конспект по матанализу за 4-й семестр.

Автор: Эмиль

10 июня 2019 г.

Это конспект по матанализу за 4-й семестр. Любые предложения и сообщения об ошибках приветствуются, писать автору: [t.me/buraindo](mailto:t.me/buraindo)

## 1 Поверхность

### 1.1 Поверхность

$\vec{r} = \vec{r}(t)$  - кривая - отображение промежутка  $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^3$  (или  $R^2$ ).

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  - поверхность - отображение области  $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3(x, y, z)$ .

Записывается  $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Для всех рассуждений будем предполагать, что  $x, y, z$  имеют непрерывные производные, а так же

$$\text{rank} \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2.$$

Если ранг равен 2, то поверхность назовем "хорошей", иначе, если ранг равен 1, то "плохой".

И тогда будем говорить, что  $\vec{r}(t)$  - гладкая.

$\Omega \rightarrow \vec{r}(\Omega)$  - образ.

Если  $\Omega$  отображается на свой образ  $\vec{r}(\Omega)$  взаимно-однозначно, то  $\vec{r}(\Omega)$  - **простая** поверхность.

**ПРИМЕР:**

$z = x^2 + y^2$  - параболоид, тогда  $\vec{r} = (x, y, x^2 + y^2)$ .

В общем виде это задание будет выглядеть так:

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$$

### 1.2 Край поверхности

Пусть  $\Omega$  - ограниченная область,  $\bar{\Omega}$  - замыкание  $= \Omega \cup \partial\Omega$  (область плюс её граница).

Рассмотрим теперь  $\partial\Omega$  - границу  $\Omega$ :

$\partial\Omega : (u(t), v(t))$  - какая-то линия.

$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(t), v(t))$  - кривая, **край** поверхности, являющийся образом  $\partial\Omega$ .

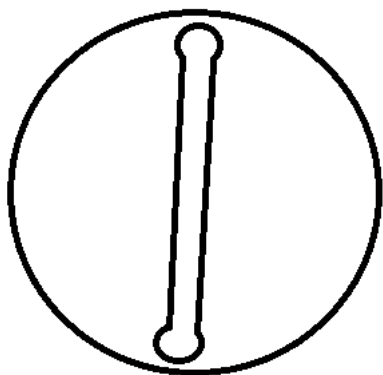
Будем обозначать за  $\Sigma$  саму поверхность  $\vec{r}(u, v)$ , а за  $\partial\Sigma$  её край -  $\vec{r}(u(t), v(t))$ .

### 1.3 Почти простая поверхность

Определение: будем называть поверхность  $\Omega \rightarrow \vec{r}(u, v)$  **почти простой**, если найдется такая исчерпывающая последовательность  $\Omega_n$ , для которой каждая  $\Omega_n \rightarrow \vec{r}(u, v)$  - простая поверхность.

Например, сфера и конус - не простые поверхности, но их можно немного изменить, чтобы они стали почти простыми:

Сфера:



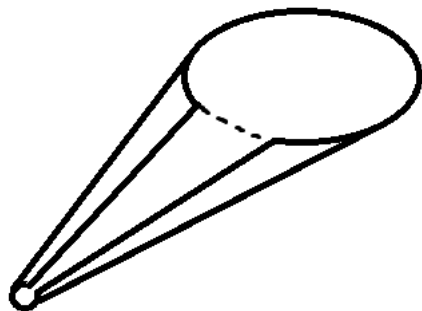
Вырежем из северного и южного полюсов сферы кружочки, а затем разрежем её от одного кружочка до другого. Этим действием мы немного изменили промежутки принимаемых углами  $\varphi$  и  $\theta$  значений в сферических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

Конус:



Вырежем вершину конуса и разрежем его по вертикали. Этим действием мы немного изменили промежутки допустимых значений для радиуса  $r$  и угла  $\varphi$  в цилиндрических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

## 1.4 Функции, задающие одну и ту же поверхность

Пусть даны  $\Omega$  и  $\Omega'$ , а так же соответствия  $u = u(u', v'), v = v(u', v')$ .

Кроме того, пусть якобиан  $\begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$  не равен 0 (то есть, существует обратная функция).

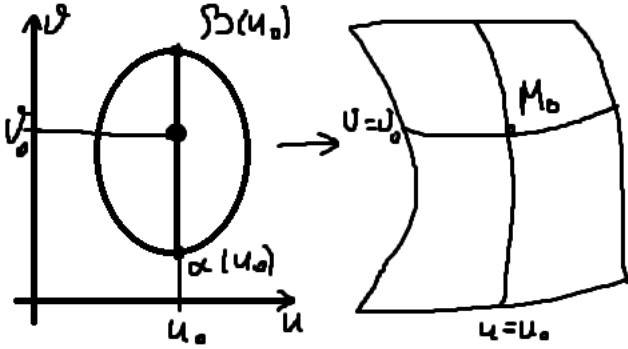
Это значит, что  $\Omega$  отображается на  $\Omega'$  взаимно-однозначно.

В таком случае будем считать, что

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \vec{\varrho}(u', v') - \Sigma$$

(задают одну и ту же поверхность).

## 1.5 Координатные кривые



Зафиксируем одну из координат, например,  $u = u_0$ , и будем менять  $v$  от  $\alpha(u_0)$  до  $\beta(u_0)$ . Получим кривую  $\vec{r}(u_0, v)$ .

Аналогично, если зафиксировать  $v = v_0$ , то зададим кривую  $\vec{r}(u, v_0)$ .

Эти две кривые называются **координатными кривыми**.

## 1.6 Нормаль

Теперь рассмотрим  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  - касательные к кривой.

Пусть  $A = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$ , тогда если  $\text{rank} A = 2$ , то векторное произведение  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ .

Результат этого векторного произведения  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{n}$  является вектором **нормали** к поверхности  $\Sigma$ .

Убедимся, что нормаль не зависит от параметризации кривой:

Дано взаимно-однозначное отображение  $\Omega \iff \Omega'$  и  $\vec{r}(u, v) = \vec{\varrho}(u', v')$ .

Посчитаем  $\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}$ :

Вспомним, что  $\vec{\rho}(u', v') = \vec{r}(u(u', v'), v(u', v'))$ , это значит, что

$$\vec{\rho}_{u'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'},$$

$$\vec{\rho}_{v'} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

Перемножим, учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{u'} \times \vec{\rho}_{v'} &= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} + (\vec{r}_v \times \vec{r}_u) \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} = \\ &= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) (\text{поменяли знак}) = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Но этот якобиан не равен нулю!

Это значит, что получили тот же вектор нормали, у которого могла измениться лишь длина или направление, что и требовалось доказать.

## 1.7 Площадь поверхности

Даны  $\Omega$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ .

Найдем дифференциал этого вектора:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

$$d\vec{r}^2 = |d\vec{r}|^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

Обозначим  $E = \vec{r}_u^2$ ,  $F = \vec{r}_u \vec{r}_v$ ,  $G = \vec{r}_v^2$ .

$d\vec{r}^2$  называется первой квадратичной формой поверхности и для неё справедливо свойство:

$d\vec{r}^2 > 0$  (положительно определена).

Для того, чтобы это выполнялось (для нашей формы  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ), нужно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

В нашем случае второго дифференциала вектора  $\vec{r}$  это значит, что требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$

Первые два условия очевидны, проверим третье:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sin \varphi \quad (\varphi \neq 0)$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \cos \varphi$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 + (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2$$

Заметим, что правая часть это  $EG$ , а второе слагаемое в левой части это  $F^2$ .

Тогда  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = EG - F^2 > 0$ , так как  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ , что и требовалось доказать.

### Площадь поверхности

$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$  - площадь поверхности.

Свойства площади:

1) Не зависит от параметризации.

Пусть дали две параметризации:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\varrho}(u', v')$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| \, du' dv'$$

Вспомним, что  $|\vec{\varrho}_{u'} \times \vec{\varrho}_{v'}| = |(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)| \cdot |I(\frac{u, v}{u', v'})|$ .

Подставим это в интеграл:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot |I| \, du' dv' = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

Получили то же самое.

2) Рассмотрим случай, когда сама поверхность - плоскость. Сможем ли по той же формуле посчитать площадь? Проверим это, площадь это  $\iint_{\Omega} \, dudv$ .

Теперь посчитаем  $S(\Omega)$ :

$\Sigma$  задается при помощи  $\vec{r} = (x, y, 0)$ .

Тогда  $\vec{r}_x = (1, 0, 0)$

$\vec{r}_y = (0, 1, 0)$ .

$$\text{А } \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \vec{k}, \Rightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1.$$

Тогда  $S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| \, dudv = \iint_{\Omega} \, dudv$ , что и требовалось доказать.

3) Площадь аддитивна по отношению к поверхности. (Площадь поверхности, составленной из гладких кусков, равно сумме площадей).

4)  $z = f(x, y)$ .

$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ .

$\vec{r}_x = (1, 0, f_x)$ .

$\vec{r}_y = (0, 1, f_y)$ .

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = i(-f_x) - jf_y + \vec{k}.$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

### ПРИМЕРЫ:

1) Посчитать площадь:

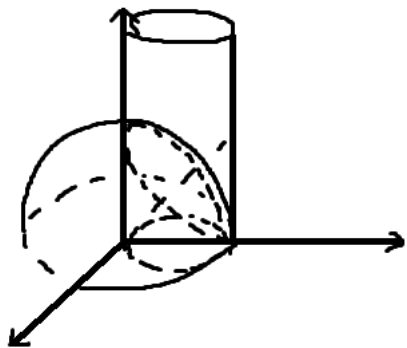
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где  $z \geq 0$ .

Это половина сферы, которую вырезает цилиндр:

$$x^2 + y^2 = Rx, \Rightarrow x^2 - Rx + \frac{x^2}{4} + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2, \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Это выглядит так:



Перейдем в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)$$

Посчитаем частные производные по  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$\vec{r}_\varphi = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0)$$

$$\vec{r}_\theta = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta)$$

Теперь посчитаем  $E, F, G$ :

$$E = \vec{r}_\varphi^2 = R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta.$$

$$G = \vec{r}_\theta^2 = R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

$F = 0$  (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \theta.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta.$$

Осталось вычислить верхний предел интегрирования для  $\theta$ , для этого нужно подставить сферические координаты в уравнение цилиндра:

$$R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = R^2 \cos \varphi \sin \theta.$$

Отсюда либо  $\sin \theta = 0$ , либо  $\sin \theta = \cos \varphi$ .

Первое нас не интересует, а вот второе можно решить и получить ответ:

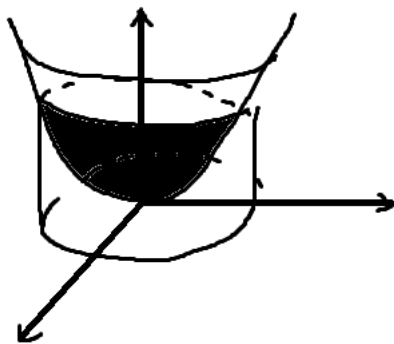
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\text{Тогда } S(\Sigma) = \iint_{\Omega} R^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin \theta \, d\theta = R^2(\pi - 2).$$

2) Посчитать площадь поверхности:

$z = x^2 + y^2$ . Этот параболоид бесконечен, поэтому чтобы было, что считать, вырежем из него кусок  $x^2 + y^2 = R^2$  и найдем площадь.

Вот как это выглядит:



Для этого перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = \varrho^2 \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\vec{r} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varrho^2).$$

Посчитаем частные производные по  $\varrho$  и  $\varphi$ .

$$\vec{r}_{\varrho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2\varrho).$$

$$\vec{r}_{\varphi} = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0).$$

Теперь посчитаем  $E, F, G$ :

$$E = \vec{r}_{\varrho}^2 = 1 + 4\varrho^2.$$

$$F = \vec{r}_{\varphi}^2 = \varrho^2.$$

$F = 0$  (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).

$$\sqrt{EG - F^2} = \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2}.$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho$$

Важная информация про почти простые поверхности:

Утверждение: если  $\Sigma$  - почти простая, а  $\Omega_n$  - искомая исчерпывающая последовательность, то:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

## 2 Поверхностные интегралы

### 2.1 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть  $\Sigma$  - простая и гладкая поверхность. Дана  $F(x, y, z)$  - непрерывная функция, определенная на  $\Sigma$ . Поверхностным интегралом  $I$  рода от функции  $F$  по поверхности  $\Sigma$  называется:

$$\iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \iint_{\Sigma} F(x, y, z) ds(d\sigma)$$

Свойства поверхностного интеграла  $I$  рода:

1) Не зависит от параметризации поверхности (доказывается так же, как независимость площади поверхности от параметризации).

2) Аддитивность и линейность.

3) Можно дать физическую интерпретацию:

Если  $F(x, y, z) \geq 0$ , и это плотность слоя, "намазанного" на поверхность, то  $\iint F d\sigma$  - масса слоя.

**Вместо  $d\sigma$  можно написать  $\sqrt{EG - F^2} \, dudv$ .**

### 2.2 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть  $\Sigma$  - двусторонняя (бывают односторонние поверхности, например, лист Мёбиуса и бутылка Клейна (Кляйна)). Выберем сторону (это означает, выберем, куда "смотрит" нормаль).

У нас есть поверхностный интеграл  $\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) \, d\sigma$ ,

где  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ .

Если поменять сторону, то поменяется знак за счёт смены направления вектора нормали на противоположное.

Отсюда вытекает свойство:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) \, d\sigma = - \iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0^-) \, d\sigma$$

### 2.3 Как считать поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим  $(\vec{F}, \vec{n}_0) = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = (\vec{F} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) \, dudv$  (смешанное произведение).

Посчитаем его:

$$\begin{bmatrix} R & Q & P \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \, dudv =$$



$$= (P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} (\text{поменяли знак}) + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}) dudv$$

Рассмотрим  $PI(\frac{y, z}{u, v}) dudv$ :

Если угол между вектором нормали и осью  $x$  острый, то  $I > 0$ , иначе  $I < 0$ .

Тогда для острого угла  $\iint PI dudv = \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$ .

А для тупого угла  $\iint PI dudv = - \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz$ .

Аналогично и другие слагаемые, тогда запишем сумму:

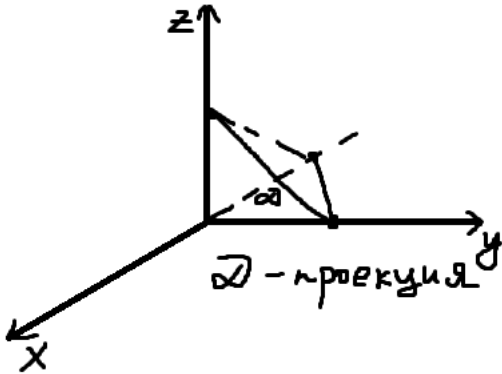
$$P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv = P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Тогда

$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

### ПРИМЕР:

Дан  $\iint_{\Sigma} x dydz$ , и вырезан прямоугольник  $z + y - x = 1$ , верхняя сторона.



Посчитаем:

$\iint_{\Sigma} x dydz = - \iint (z + y - 1) dydz$  (так как угол между нормалью и отсутствующей осью (в данном случае ось  $x$ ) тупой).

$$- \iint (z + y - 1) dydz = - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z + (y - 1)) dz = \frac{1}{6}$$

## 3 Теория поля

$\Omega \subset R^3$ .

I. Скалярное поле.

Если  $\forall M \in \Omega \exists f(M)$  - число, тогда у нас на области  $\Omega$  задано скалярное поле  $f(M) = f(x, y, z)$ .

Дифференцируемость.

Определение: будем называть  $f(M)$  дифференцируемым в точке  $M_0$ , если существует такой вектор  $\vec{c}$ , что

$$\Delta f(M_0) = \Delta \vec{r} \cdot \vec{c} + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

$$\vec{c} = \text{grad} f(M_0) = (\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z})$$

Гуманитарии могут делать так:

$$\sin x + \cos x = (\sin + \cos)x.$$

Мы сделаем так для градиента, но осознанно и опираясь на законы:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)f$$

Обозначим теперь  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  за  $\nabla$  (произносится "набла").

Это символический вектор, его координаты это вроде числа, но на самом деле, эта набла - целиком оператор и применяется к чему-то.

Тогда  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$ .

$\vec{c} = \nabla f$ , тогда

$$\Delta f = \Delta \vec{r} \cdot \nabla f = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla)f + o(|\overrightarrow{MM_0}|)$$

Производная по направлению.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t \vec{l}_0) - f(M_0)}{\partial t}$$

Здесь  $t > 0$ , а  $\vec{l}_0$  - орт направления.

Заметим, что числитель - приращение, так что можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \vec{l}_0 \cdot \nabla + o(t)}{\partial t} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla)f$$

II. Векторное поле.

Если  $\forall M \in \Omega \exists \vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , тогда на области  $\Omega$  задано векторное поле  $\vec{a}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ .

Дифференцируемость.

Определение: будем называть  $\vec{a}(M)$  дифференцируемым в точке  $M_0$ , если его приращение можно представить в виде:

$$\Delta \vec{a}(M) = \vec{a}(M) - \vec{a}(M_0) = L(\vec{r}) + o(|\vec{r}|)$$

Тогда

$$\Delta \vec{a}(M) = (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{a} + o(|\vec{r}|)$$

Производная по направлению.

$\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla)f$  - для скалярного поля. В случае векторного поля:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

**ПРИМЕР:**

$$\vec{a} = y \vec{i} + (xy + yz) \vec{j} + xyz \vec{k}$$

$$\vec{l} = (1, 1, 1), \vec{l}_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a}$$

$$1) (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}, \text{ и все это нужно применить к вектору } \vec{a}.$$

$$2) (\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} - \text{рассмотрим результат покомпонентно:}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_x = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_y = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) (xy + yz) = \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) a_z = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial z}) (xy) = \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}}$$

Тогда

$$(\vec{l}_0 \cdot \nabla) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}} \vec{k}.$$

Введем понятия:

Пусть дано поле  $\vec{a} = \vec{a}(M) = (P, Q, R)$ .

Определение: дивергенция поля:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Определение: ротор векторного поля:

$$\text{rot } \vec{a} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \vec{i} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \vec{j} (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \vec{k} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Упростим формулы для  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ :

$\text{div } \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a})$  (скалярное произведение).

$\text{rot } \vec{a} = (\nabla \times \vec{a})$  (векторное произведение).

Действия с  $\nabla$ :

$$1) \nabla(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2$$

$$2) \text{Посчитаем } \nabla(f_1 f_2):$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} f_1$$

Будем иметь ввиду, что  $\nabla$  действует на поле, когда пишем следующим образом:

$$\nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2)$$

Здесь  $\nabla$  действует на поле  $f_1$ .

Тогда  $\nabla(f_1 f_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2) + \nabla(f_1 \overset{\downarrow}{f_2}) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$ .

3) Посчитаем  $\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$ :

Формально это смешанное произведение, тогда

$$\nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2)$$

4)  $\text{grad } f = \nabla f$

5)  $\text{grad } (f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$

6)  $\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$

7)  $\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

8)  $\text{div}(f \cdot \vec{a}) = \nabla(f \cdot \vec{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{f} \cdot \vec{a}) + \nabla(f \cdot \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = \vec{a} \nabla f + f \nabla \vec{a} = \vec{a} \text{grad } f + f \text{div } \vec{a}$

9)  $\text{div}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2) + \nabla(\vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2}) = \vec{a}_2(\nabla \times \vec{a}_1) - \vec{a}_1(\nabla \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \text{rot } \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \text{rot } \vec{a}_2$

10)  $\text{rot}(f \vec{a}) = \nabla \times (f \vec{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{f} \vec{a}) + \nabla \times (f \overset{\downarrow}{\vec{a}}) = (\nabla f) \times \vec{a} + f(\nabla \times \vec{a}) = \text{grad } f \times \vec{a} + f \text{rot } \vec{a}$

11)  $\text{rot}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \nabla \overset{\downarrow}{\vec{a}_1} \times \vec{a}_2 + \nabla \vec{a}_1 \times \overset{\downarrow}{\vec{a}_2} = (\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2(\nabla \vec{a}_1) + \vec{a}_1(\nabla \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2 =$   
 $(\vec{a}_2 \nabla) \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \text{div } \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \text{div } \vec{a}_2 - (\vec{a}_1 \nabla) \vec{a}_2$

12)  $\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}) f =$   
 $= \nabla^2 f = \Delta f$ .

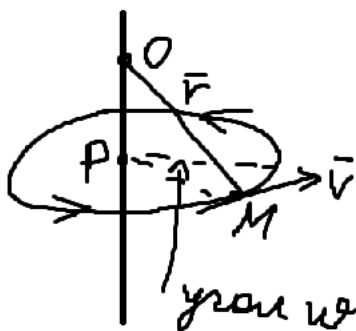
$\Delta$  - оператор Лапласа,  $\Delta = \nabla^2$ .

13)  $\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$ .

14)  $\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$ .

### Экспурс в физику - физический смысл ротора

Пусть дали твердое тело, оно вращается вокруг какой то оси, пусть по часовой стрелке:



$|\vec{v}| = PM(\text{радиус}) \cdot \omega$ .

Вектор  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  параллелен  $\vec{v}$  (1)

$|\vec{v}| = \omega \cdot |\vec{r}| \sin \varphi = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin(\pi - \varphi)$  (2)

Из (1) и (2) следует, что  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Посчитаем  $\text{rot}(\vec{v})$ :

$\text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \text{div } \vec{r} - \vec{r} \text{div } \vec{\omega} + (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r}$ .

$\vec{\omega}$  зависит только от времени, следовательно, везде, где дифференцируем  $\vec{\omega}$ , будут нули:  
 $div \vec{\omega} = 0, (\vec{r} \nabla) \vec{\omega} = 0$ .

Тогда  $rot \vec{v} = \vec{\omega} div \vec{r} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{r} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$ .

Таким образом, физический смысл ротора: удвоенная мгновенная угловая скорость, отсюда и его названия (ротор, вихрь).

## 4 Интегральные характеристики векторного поля

Дано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  в  $\Omega$ , а так же  $l$  - простой кусочно-гладкий замкнутый контур из  $\Omega$ .

### 4.1 Циркуляция

Определение: **циркуляцией** векторного поля по замкнутому контуру  $l$  называется следующий интеграл второго рода:

$$\Pi = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

### 4.2 Поток

Дана поверхность  $\Sigma$ .

Определение: **потоком** векторного поля по поверхности  $\Sigma$  называется следующий интеграл второго рода:

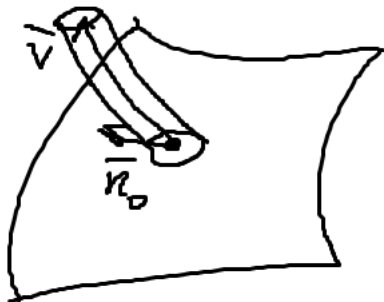
$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds$$

Приведем к привычному виду:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

#### Физический смысл потока

Пусть есть  $\vec{a} = \vec{v}$  - поле скоростей. Жидкость движется по какому-то пути, а затем мы ставим на этом пути решетку:



И сколько жидкости проходит через решетку за единицу времени?

Возьмем в нашей решетке маленький кусок, из-за пренебрежимо малой величины можем считать его плоским. Тогда за единицу времени жидкость займет объем цилиндра с площадью основания, равной площади куска, и высотой, равной проекции  $\vec{v}$  на ось вращения.

Посчитаем этот объем:

$$V_{\text{ц}} = S \cdot |\vec{v}_{\text{пр.}\vec{n}_0}| = ds \vec{a} \vec{n}_0 = d \prod$$

И поток будет равен приближенной сумме объемов по всем кусочкам, то есть интегралу.

## 5 Теорема Гаусса-Остроградского

Пусть есть ограниченная область  $\Omega \subset R^3$

Граница этой области -  $\partial\Omega$  - кусочно-гладкая.

$\vec{n}$  - внешняя нормаль.

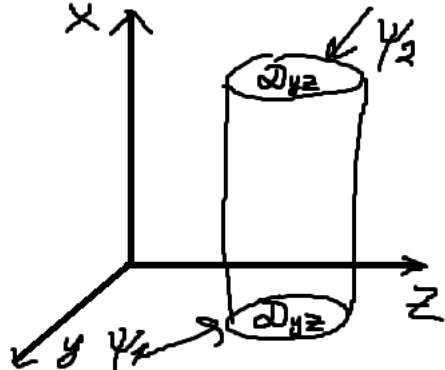
$\vec{a} = \vec{a}(M)$ ,  $M \in \bar{\Omega}$ ,  $\vec{a}$  непрерывно дифференцируемо в каждой точке.

Утверждение (теорема Остроградского-Гаусса): выполняется равенство:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{a} dx dy dz$$

Доказательство:

Предположим, что  $\Omega$  односвязна и элементарна по всем координатам.



Посчитаем одно из слагаемых, например, интеграл по  $\frac{\partial P}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x} = \\ &= \iint_{D_{yz}} P(\psi_2(y,z), y, z) dy dz - \iint_{D_{yz}} P(\psi_1(y,z), y, z) dy dz = \\ &= \iint_{\Sigma_1} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma_2} P(x, y, z) dy dz + 0 \quad (\text{интеграл по боковой поверхности равен нулю}). \end{aligned}$$

Здесь  $\Sigma_1$  образована функцией  $x = \psi_1(y, z)$ ,  $\Sigma_2$  образована функцией  $x = \psi_2(y, z)$ .

Тогда эта сумма - интеграл по всей границе (три слагаемых это интеграл по верхней части, нижней части и боковой поверхности), а значит, она равна

$$\iint_{\partial\Omega} P(x, y, z) dy dz$$

Аналогично доказывается для  $Q$  и для  $R$ .

## 5.1 Следствие из теоремы Остроградского-Гаусса

Возьмем непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a} = (P, Q, R)$  в открытой области  $\Omega$ .

Возьмем из этой области точку  $M_0$  и окружим ее сферой  $S(M_0)$ .

Обозначим за  $V(M_0)$  шар, ограниченный сферой  $S$ ,  $V \subset \Omega$ .

Запишем для сферы и шара формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_{V(M_0)} \text{div} \vec{a} dV = I$$

Утверждение: для какой-то точки  $\tilde{M} \in V(M_0)$  выполняется равенство:

$$I = \text{div} \vec{a}(\tilde{M}) \cdot V$$

$V$  - объем шара. Отсюда выразим дивергенцию:

$$\text{div} \vec{a}(\tilde{M}) = \frac{\iint_{S(M_0)} \vec{a} \vec{n}_0 ds}{V}$$

Полученную формулу принято называть средней плотностью источников (или стоков).

Какой в этом смысл:

Представим, что где-то через шар протекает жидкость. В нормальной ситуации вытекает жидкости ровно столько, сколько втекает, дивергенция равна нулю. Но если внутри шара есть источник/сток, тогда втекать будет меньше/больше, чем вытекать. Именно это и регулирует числитель в формуле дивергенции, полученной выше.

## 6 Теорема Стокса

Дано:

Простая и гладкая  $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0})$  поверхность  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \Sigma$ .

Плоскость  $\Omega \subset R^2 \rightarrow R^3, (u, v) \in \Omega, \Omega$  - ограничена.

$\partial\Omega = \{u(t), v(t)\}, \alpha \leq t \leq \beta$ .

$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  - граница поверхности,  $\partial\Sigma$ .

Теорема (Стокса):

Утверждение: имеет место формула:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$$

Доказательство:

1) Сведем  $\int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r}$  к интегралу по контуру  $\partial\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \vec{a} d\vec{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{a}(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot (\vec{r}_u u_t dt + \vec{r}_v v_t dt) = \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{a}(\vec{r}(u, v))(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = I_1 \end{aligned}$$

2) Сведем  $\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$  к интегралу по области  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds &= \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot \left( \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \right) dudv = \\ &= \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv = I_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение, оно представляет собой смешанное произведение, попробуем представить его в виде  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ , чтобы применить формулу Грина в обратную сторону:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) &= \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \times (\nabla \times \vec{a}) = \\ &= \vec{r}_u \cdot \nabla(\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u(\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = (\vec{r}_u \cdot \nabla)(\vec{r}_v \cdot \vec{a}) - \vec{r}_u(\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \\ &= \vec{r}_v(\vec{r}_u \cdot \nabla) \vec{a} - \vec{r}_u(\vec{r}_v \cdot \nabla) \vec{a} = \vec{r}_v(x_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_u \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) - \\ &\quad - \vec{r}_u(x_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + y_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + z_v \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}) = \\ &= \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v = \vec{r}_v \vec{a}_u - \vec{r}_u \vec{a}_v + \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} - \vec{r}_{uv} \vec{a}_{uv} = \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u}(\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \end{aligned}$$

Получили как раз, что хотели, осталось подставить в  $I_2$ :

$$I_2 = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial u}(\vec{a} \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{a} \cdot \vec{r}_u) \right) dudv$$

Тогда по формуле Грина для этого интеграла:

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{a} \vec{r}_u du + \vec{a} \vec{r}_v dv = I_1$$

Таким образом, получили тот же интеграл, следовательно, формула верна и теорема доказана.



## 6.1 Следствие из теоремы Стокса

Дан интеграл  $I = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ .

Утверждение: чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\text{rot } \vec{a} = 0$ .

Доказательство:

1) Пусть  $l_1$  и  $l_2$  - какие-то два пути из  $A$  в  $B$ , и пусть эти кривые не пересекаются.

Тогда  $I = \int_{l_1} - \int_{l_2} = \int_l$ .  $l$  - контур, получаемый, если пойти из  $A$  в  $B$  по кривой  $l_1$ , а затем обратно из  $B$  в  $A$  по  $l_2$ .

Тогда  $I = \int_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$  - по теореме Стокса.

Следовательно, если  $\text{rot } \vec{a} = 0$ , то  $I = 0 = \int_{l_1} - \int_{l_2} \Rightarrow \int_{l_1} = \int_{l_2}$ , что и требовалось доказать.

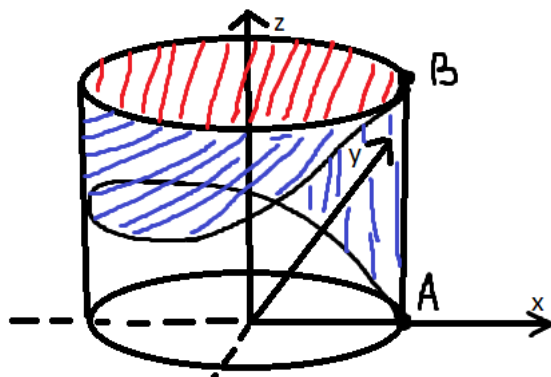
2) Пусть теперь  $\int_{l_1} = \int_{l_2}$ , тогда  $\int_l = 0 = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0) ds$ , следовательно, скалярное произведение равно нулю, но нормаль не может быть равна нулю, поэтому равен нулю ротор, что и требовалось доказать.

**ПРИМЕРЫ:**

1)  $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ . Найти циркуляцию вдоль поля, если

$L: \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(a, 0, 2\pi b)$ .

Это выглядит примерно так, закрашены две области, которые нас интересуют:



Тогда  $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds$ .

Посчитаем ротор, он равен  $2\vec{k}$ .

Как видно на картинке выше, нас интересуют две области, на которые и делится  $\Sigma$ .  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

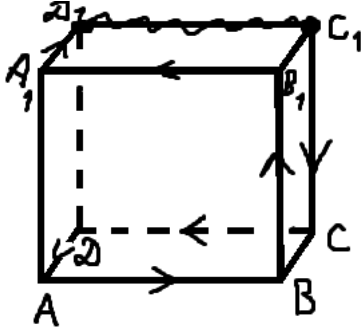
Рассмотрим по очереди каждую из этих областей:

$\Sigma_1: x^2 + y^2 = a^2, \vec{n} = (x, y, 0), \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 0$ .

$\Sigma_2: z = 2\pi b, x^2 + y^2 \leq a^2, \vec{n} = \vec{k} = \vec{n}_0, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 2$ .

Тогда  $\int_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_{\Sigma_2} 2 ds = 2\pi a^2$ .

2)  $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ . Дан куб, ребро имеет длину = 1. Найти циркуляцию вдоль ломаной  $C_1CDABB_1A_1D_1$ .



Замкнем ломаную, добавив отрезок  $D_1C_1$ .  $L = L_1 \cup D_1C_1$ .

За поверхность возьмем грани  $ABB_1A_1(\Sigma_1)$ ,  $A_1D_1DA(\Sigma_2)$  и  $C_1CDD_1(\Sigma_3)$ .

Посчитаем ротор, он равен  $-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .

Тогда  $\int_L = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}$ .

Рассмотрим каждую их областей:

$\Sigma_1 : \vec{n} = -\vec{i}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 1, \iint_{\Sigma_1} = \iint ds = 1$ .

$\Sigma_2 : \vec{n} = \vec{j}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_2} = \iint ds = -1$ .

$\Sigma_3 : \vec{n} = \vec{i}, \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_3} = \iint ds = -1$ .

Сложим, получим, что  $\int_L = -1$ . Осталось посчитать  $\int_{D_1C_1} ydx + zdy + xdz = I$ .

$D_1C_1 : x = 1, z = 1$ , тогда  $dx = 0, dz = 0$ .

Отсюда  $I = \int_0^1 zdy = 1$ . Тогда  $\int_{L_1} = \int_L - \int_{D_1C_1} = -2$ .

## 6.2 Примечание к следствию из теоремы Стокса

Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Утверждение: следствие выполняется только если область, в которой работаем - линейно-односвязна.

Пример, подтверждающий это:

Дана кривая  $AB$  и поле  $\vec{a} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z)$ . При этом  $\text{rot } \vec{a} = 0$ .

Искомое задание кривой:

$$l : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Посчитаем интеграл  $\int_{AB} \vec{a} d\vec{r}$ :

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{r} = \int_l -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + zdz = I$$

Параметризуем кривую:

$$\begin{cases} z = a \\ x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

Тогда  $I = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^2 \sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} \right) dt + 0$  (так как  $dz = 0$ , ведь  $z$  - константа).

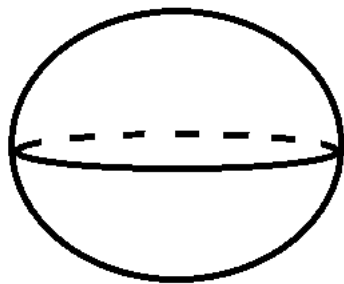
$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Что и требовалось доказать, ведь при  $x = 0, y = 0$  у нас поле не определено, тогда область не является линейно-односвязной.

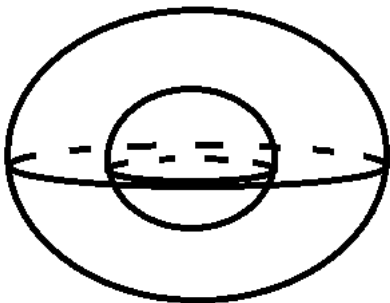
### 6.3 Линейно и поверхностно односвязные области

Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Определение: область  $G$  называется поверхностно-односвязной, если для любой простой замкнутой поверхности, ограничивающей некую область  $\Omega$ , все точки  $\Omega$  принадлежат  $G$ .



шар является примером поверхностно односвязной области.



- шар, у которого внутри вырезан шар поменьше является примером поверхностно-неодносвязной области, ведь если взять шар радиусом больше, чем радиус вырезанного шара, но меньше, чем радиус искомого шара, то в нем будут точки из вырезанного шара, которые не принадлежат искомому шару.

## 7 Потенциальное поле

Дано векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(M)$ .

Определение: будем называть  $\vec{a}$  потенциальным, если  $\exists U = U(x, y, z)$  такая, что  $\text{grad} U = \vec{a}$ .

**Важно:**  $\vec{a} = \vec{\nabla} U$ .

Определение:  $U$  - скалярный потенциал векторного поля.

Теорема: для того, чтобы  $\vec{a}$  было потенциальным, необходимо и (в случае линейной односвязности области, в которой задано поле) достаточно, чтобы  $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$ .

Доказательство:

1) Необходимость. Если  $\exists U$ , то  $\text{rot} \vec{a} = \text{rot} \text{grad} U = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = \vec{0}$ .

То есть, если поле потенциально (есть скалярный потенциал), то ротор равен нулю.

2) Достаточность.

$\text{rot} \vec{a} = 0$ , область (пусть будет  $g$ ) - линейно-односвязна.

Тогда по теореме Стокса  $\int_{AB} \vec{a} d\vec{r}$  не зависит от пути интегрирования.

Теперь просто попробуем найти скалярный потенциал.

Возьмем некую функцию  $\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  и точку  $\tilde{M} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

Выберем их такими, что  $\tilde{U} = \int_{M_0}^{\tilde{M}} \vec{a} d\vec{r}$ .

Теперь докажем, что  $\tilde{U}$  - скалярный потенциал поля  $\vec{a}$ :

Пусть точка  $M_1 = (\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

Найдем производную  $\tilde{U}$ :

$$\Delta \tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \int_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0}^{\tilde{M}} = I$$

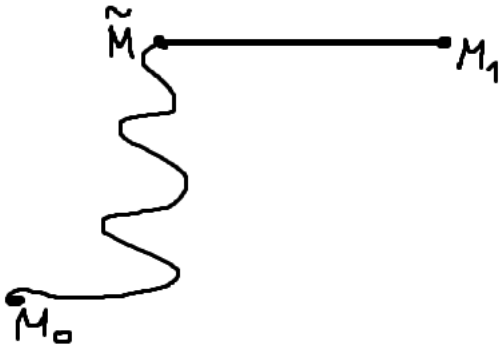
Оба интеграла из разности не зависят от пути интегрирования, тогда:

Выберем путь  $M_0 \tilde{M}$  свободно, пусть будет каким угодно.

Путь  $M_0 M_1 = M_0 \tilde{M} \cup \tilde{M} M_1$ .

$\tilde{M} M_1$  - отрезок, параллельный оси  $x$ .

Это выглядит так:



Тогда  $I = \int_{\tilde{M}}^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz$ . Но  $dy = 0, dz = 0$ , так как меняется только  $x$ . Тогда  $I = \int_{\tilde{M}}^{M_1} Pdx = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+\Delta x} P(x, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(\tilde{x} + \theta \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) \Delta x$  (по теореме о среднем), где  $0 < \theta < 1$ .

Тогда  $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\tilde{x} + \theta \Delta x, \tilde{y}, \tilde{z}) = P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

Аналогично получится и для  $y$  и  $z$ . Тогда  $\text{grad} \tilde{U} = \vec{a}$ , значит,  $\tilde{U}$  - скалярный потенциал, то есть мы нашли искомую функцию, что и требовалось доказать.

**Важно:** если  $U$  - скалярный потенциал, то  $U + c$ , где  $c = \text{const}$  - тоже скалярный потенциал.

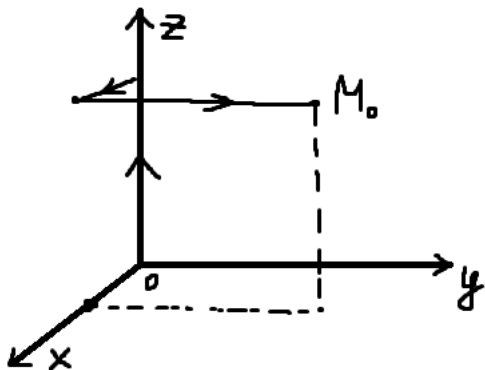
**ПРИМЕР:**

$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ . Задача: убедиться, что данное поле является потенциальным и найти его потенциал.

Решение:

1)  $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$  (здесь нужно вычислить определитель матрицы), следовательно, поле потенциальное.

2)  $U = \int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3}$ . Выберем путь, по которому будем двигаться из точки  $(0,0,0)$  в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ : самый хороший путь - это двигаться вдоль координатных осей:



Тогда посчитаем каждый из трех интегралов:

a)  $x = 0, y = 0, \Rightarrow dx = 0, dy = 0$ .  $0 \leq z \leq z_0$ . Тогда  $\int_{l_1} = 0dz = 0$ .

b)  $z = z_0, y = 0, \Rightarrow dz = 0, dy = 0$ .  $0 \leq x \leq x_0$ . Тогда  $\int_{l_2} = \int_0^{x_0} z_0 dx = z_0 x_0$ .

c)  $x = x_0, z = z_0, \Rightarrow dz = 0, dx = 0$ .  $0 \leq y \leq y_0$ . Тогда  $\int_{l_3} = \int_0^{y_0} (x_0 + z_0) dy = x_0 y_0 + z_0 y_0$ .

Сложим три интеграла, получим, что  $U = xy + xz + yz$ , что и будет ответом.

## 8 Соленоидальное поле

Дано  $\vec{a}$  - векторное поле, заданное на  $g$  - поверхностно-односвязной области.

**Определение:** векторное поле будем называть соленоидальным, если его поток через любую простую, кусочно-гладкую, замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = 0$$

Теорема 1: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0$$

Доказательство:

1)

$$\iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = 0, \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 0$$

2)

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0, \Rightarrow \iint_S \vec{a} \vec{n}_0 ds = 0, \Rightarrow \vec{a} - \text{соленоидальное}$$

Определение:  $\vec{H}$  будем называть векторным потенциалом поля  $\vec{a}$ , если  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{a}$ .

**Важно:** если  $\vec{H}$  - векторный потенциал, то  $\vec{H}_1 = \vec{H} + \operatorname{grad} U$  (где  $U$  - какая-то скалярная функция) - тоже векторный потенциал.

Доказательство:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \operatorname{rot}(\vec{H} + \operatorname{grad} U) = \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} U (= 0) = \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{a}$$

Теорема 2: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал векторный потенциал.

Доказательство:

1)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

А по теореме 1, если дивергенция равна нулю, то поле соленоидальное.

2)  $\vec{a}$  - соленоидальное.

Будем искать  $\vec{H}$  в виде  $\vec{H} = (H_x, H_y, 0)$ .

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{i} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial H_x}{\partial z} + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$$

Отсюда

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -P, \Rightarrow H_y = -\int P dz + \varphi(x, y) \quad (\varphi(x, y) - \text{произвольная функция}).$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = Q, \Rightarrow H_x = \int Q dz + \psi(x, y) \quad (\psi(x, y) - \text{произвольная функция}).$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = R, \Rightarrow -\int P_x dz + \varphi_x(x, y) - \int Q_y dz + \psi_y(x, y)$$

Таким образом, мы нашли  $\vec{H}$ .

**ПРИМЕР:**

$$\vec{a} = 2z \vec{i} + 3y^2 \vec{k} = (2z, 0, 3y^2).$$

Найти векторный потенциал. Решение:

$$\begin{aligned}H_x &= \int 0 + \psi(x, y). \\H_y &= - \int 2z dz + \varphi(x, y) = -z^2 + \varphi(x, y). \\H_z &= 0.\end{aligned}$$

$$-0 + \varphi_x - 0 - \psi_y = 3y^2$$

$$\varphi_x - \psi_y = 3y^2$$

Обе функции произвольные, поэтому, пусть  $\varphi \equiv 0, \psi = -y^3$ .  
Тогда, ответ:  $\vec{H} = (-y^3, -z^2, 0)$ .

## 9 Интегралы с параметрами

Дальше (похоже, до конца семестра) мы будем заниматься интегралами с параметрами.

## 10 Равномерная сходимость семейства функций

### 10.1 Определение равномерной сходимости

Дана функция  $f(x, y)$  - на первый взгляд, функция двух переменных, однако,  $x \in X$  - аргумент, а  $y \in Y$  - число, параметр.

Например, если  $Y = N$  (натуральные числа), то  $f(x, n) = f_n(x)$  - функциональная последовательность. Возьмем некую точку  $y_0$  - точку сгущения  $Y$  (по сути, точка сгущения  $\sim$  предельная точка множества). Тогда функцию  $\varphi(x)$ , такую, что:

$$\forall x \in X \quad f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \rightarrow \varphi(x)$$

будем называть **поточечным** пределом функции  $f$ .

Определение:  $f(x, y)$  сходится равномерно на  $X$  при  $y \rightarrow y_0$ , если:

1)  $f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \rightarrow \varphi(x) \forall x$  (сходится поточечно).

2)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

**ПРИМЕР:**

$f(x, y) = \frac{3x+y}{x+y}; Y = (0; 1), y_0 = 0$ . Выяснить, сходится ли равномерно функция на множестве  $X$ , если  $X$ :

1)  $X = (1, 2)$ .

Найдем поточечный предел  $f$ :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f = \frac{3x}{x} = 3 = \varphi(x)$$

Подставим поточечный предел в определение:

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| \frac{3x+y}{x+y} - 3 \right| = \frac{2y}{x+y} < \varepsilon \quad \forall x \in (1, 2)$$

$$\frac{2y}{x+y} < \frac{2y}{1+y} < \frac{2y}{1} < \varepsilon$$

Тогда возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , значит, мы нашли  $\delta$ , удовлетворяющую условию, значит,  $f$  равномерно сходится на  $X$ .

2)  $X = (0, 1)$ .

Докажем, что нет равномерной сходимости на этом множестве. Для этого докажем отрицание определения равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Пусть  $\delta_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n+1}$ ,  $x_n = \frac{1}{n+1}$ . Тогда  $\frac{2y}{x+y} = 1 = \varepsilon_0$ . То есть мы нашли  $\varepsilon_0$ , а значит, доказали отрицание, а значит,  $f$  не сходится равномерно на данном  $X$ .

## 10.2 Признаки равномерной сходимости

1) Запишем очевидное неравенство:

Пусть  $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ . Тогда

$$|f(x, y) - \varphi(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = g(y)$$

Утверждение: семейство функций сходится равномерно к  $\varphi(x)$  на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) \Rightarrow |g(y)| < \varepsilon$$

Например,  $\sup_{x \in (1;2)} \frac{2y}{x+y} = \frac{2y}{1+y} < \varepsilon$ . Но

$\sup_{x \in (0;1)} \frac{2y}{x+y} = 2$  - не стремится к нулю.

2) Теорема (признак Коши):

Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось на  $X$  при  $y \rightarrow y_0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y', y'' \in U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Доказательство:

$I. \Rightarrow$

Если семейство функций сходится равномерно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) : |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем две точки из  $\overset{o}{U}_\delta(y_0)$  -  $y'$  и  $y''$ .

Тогда  $|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

$|f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq |f(x, y') - \varphi(x)| + |f(x, y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$



Доказано.

II.  $\Leftarrow$

Теперь дано условие Коши.

Возьмем  $x \in X$  и зафиксируем его. Тогда для фиксированного  $x$  выполняется:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \Rightarrow |g(y') - g(y'')| < \varepsilon$$

Отсюда следует, что у функции  $g$  есть предел при  $y \rightarrow y_0$ .

Получается, что для каждого такого фиксированного  $x \in X$

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x).$$

Осталось доказать вторую часть определения равномерной сходимости:

Для этого в выражении  $|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}$  перейдем к пределу:

Пусть  $y \rightarrow y_0$ , тогда  $|f(x, y') - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

3) Обозначим за  $\mapsto$  равномерную сходимость.

Утверждение: для того, чтобы  $f(x, y)$  сходилась равномерно к  $\varphi(x)$  на множестве  $X$  и при  $y \rightarrow y_0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall y_n \rightarrow y_0 \quad f(x, y_n) = f_n(x)_{n \rightarrow \infty} \mapsto \varphi(x) \quad \forall x \in X$$

Здесь  $y_n$  - последовательность из  $Y$ .

Доказательство:

I.  $\Rightarrow$

Если  $f$  равномерно сходится, то это значит, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \overset{\circ}{U}_\delta(y_0) \quad |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Возьмем последовательность  $y_n \rightarrow y_0$  и по  $\delta$ , которую мы нашли, найдем  $n_0$ , такой, что:

$$\forall n \geq n_0 \quad y_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(y_0)$$

А это означает, что  $\forall x \quad |f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

II.  $\Leftarrow$

Теперь дано:  $\forall y_n \rightarrow y_0 \quad f(x, y_n) = f_n(x)_{n \rightarrow \infty} \mapsto \varphi(x)$ .

Докажем от противного, что  $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$ .

Пусть  $f$  сходится, но не равномерно, тогда снова попытаемся доказать отрицание:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Поскольку мы наложили условия на  $x_\delta$  и  $y_\delta$ , то можем взять какие-то последовательности  $x_n, y_n$ , а  $\delta_n$  взять равное  $\frac{1}{n}$ .

Тогда:

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Но это противоречит условию, ведь по условию  $f_n$  равномерно сходится к  $\varphi$ . Теорема доказана.

Следствие:

Пусть  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$  на множестве  $X$ , а так же эти  $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$  на  $X$ .

Тогда  $\varphi(x)$  непрерывна на  $X$ .

4) Утверждение: если рассматривать  $f(x, y)$  на прямоугольнике  $[a; b] \times [c; d]$  как функцию двух переменных и предположить, что она на нем непрерывна, то

$$f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \mapsto \varphi_{y_0}(x)$$

Здесь  $y_0 \in [c; d]$ .

Доказательство:

Данный прямоугольник - компактное множество. А если функция непрерывна на компакте равномерно непрерывна:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta; \forall y', y'' : |y' - y''| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon \end{aligned}$$

Возьмем  $x' = x'' = x, y' = y_0, y'' = y$ .

Тогда  $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ , но  $f(x, y_0) = \varphi_{y_0}(x)$ , тогда:

$$|f(x, y) - \varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b]$$

Но это и означает равномерную сходимость (по определению), что и требовалось доказать.

## 11 Интеграл с переменным верхним пределом

Дана  $f(x, y)$  - интегрируемая по  $x \in [a; b] \quad \forall y \in Y$ .

Тогда рассмотрим интеграл:

$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  - собственный интеграл с параметром  $y$ .

Свойства:

1) Теорема 1: если  $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

Эта теорема дает нам возможность менять местами знаки предела и интеграла в случае, когда  $f$  равномерно сходится:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

Доказательство:

Оценим  $|I(y) - \int_a^b \varphi(x) dx|$ :

$$|I(y) - \int_a^b \varphi(x) dx| = \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b (f(x, y) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_a^b |(f(x, y) - \varphi(x))| dx$$

Но  $f(x, y) \mapsto \varphi(x) \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{b-a}$ :

$$\int_a^b |(f(x, y) - \varphi(x))| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

Значит,  $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x) dx$ , что и требовалось доказать.

Следствия:

а) Если  $f$  непрерывна на прямоугольнике  $[a; b] \times [c; d]$ , то можно переставить знаки интегрирования и предела местами.

б) Если в точке  $y_0$   $f(x, y)$  непрерывна, то из того, что  $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$  следует, что:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0)$$

Отсюда следует, что  $I$  непрерывен в точке  $y_0$  (по определению непрерывности в точке).

2) Теорема 2: если  $f(x, y)$  непрерывна относительно  $x$  и  $y$  на прямоугольнике  $[a; b] \times [c; d]$ , то  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  можно интегрировать по  $y$ :

$$\exists \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Это повторные интегралы для двойного интеграла  $\iint_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y) dx dy$ .

Другими словами,

$$\iint_{[a; b] \times [c; d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy dx$$

3) Теорема 3:

Пусть  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$  на  $[a; b]$  для любых  $y$  из  $[c; d]$ , а  $f'_y(x, y)$  непрерывна по  $x$  и  $y$  на прямоугольнике  $[a; b] \times [c; d]$ .

Тогда существует  $I'_y(y) \forall y \in [c; d]$ :

$$I'_y(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

То есть, другими словами, можно поменять дифференцирование и интегрирование местами:

$(\int f)' = \int f'$  - это называется правило Лейбница.

Доказательство:

$$I'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = ?$$

Распишем  $\frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I(y_0)}{\Delta y} &= \frac{\int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx}{\Delta y} = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_a^b \frac{f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx, \quad 0 < \theta < 1 \text{ (по теореме о среднем)}\end{aligned}$$

Тогда  $I'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$ , что и требовалось доказать.

Замечание:

Если пределы интегрирования зависят от  $y$ , вот таким образом:

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx = F(y, u, v)$$

Тогда  $\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dy} = \int_u^v f'(x, y) dx + f(v, y) v'_y - f(u, y) u'_y$ .

Это следует из теоремы Барроу (по словам некоторых, самой великой теоремы матанализа, а значит надо учить):

Теорема Барроу:

$$\begin{aligned}\left(\int_a^x f(t) dt\right)'_x &= f(x) \\ \left(\int_x^b f(t) dt\right)'_x &= f(-x)\end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ (здесь их много, 5 штук):

1)  $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx$ ;  $y \in (0; 1]$ .

Посчитаем этот интеграл:

$$\int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx = x \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^1 - 2 \int \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \ln(1 + y^2) - 2 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

Хотим узнать, как эта функция ведет себя в нуле, устремим  $y$  к нулю, тогда  $I(y) \rightarrow 0$ , то есть, 0 - точка устранимого разрыва.

$$\text{Тогда } I(y) = \begin{cases} \ln(1 + y^2) - 2 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ -2, & y = 0 \end{cases}.$$

Значит,  $I(y)$  непрерывна на  $[0; 1]$ .

Теперь проверим дифференцируемость:

$y \neq 0, y \in [\delta; 1]$ . Тогда на прямоугольнике  $[0; 1] \times [\delta; 1]$  функция  $\ln(x^2 + y^2)$  непрерывна по  $y$ , а функция  $\frac{2y}{x^2 + y^2}$  непрерывна по  $x$  и по  $y$ .

Тогда  $I'_y(y) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}$ , рассмотрим её поведение в нуле:  
 $y_0 = 0$ .

$$I'_y(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} = \frac{y}{1+y^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$$

Очевидно, эта функция не непрерывна в нуле, устремим  $y$  к нулю, тогда  $I'_y(0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

С другой стороны,  $I'_y(0) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2} dx = 0$ .

Получили разные ответы. Это потому, что на самом деле мы не могли здесь пользоваться теоремой, ведь нарушается условие непрерывности  $f'_y$  по  $x$  и по  $y$ .

2)  $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} dx$ ,  $b > a > 0$ .

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

Тогда  $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 dy \int_a^b x^y dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$ .

С другой стороны,

$$I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} dx \Rightarrow I'_b(a, b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{b+1}$$

Тогда  $\int I'_b(a, b) = \int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C$ . Найдем  $C$ :

$$I(a, a) = \ln(a+1) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln(a+1)$$

Отсюда  $I(a, b) = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{b+1}{a+1}$ , получили то же самое.

3)  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ .

Рассмотрим  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}, \text{ тогда } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)g(x)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)g(x)dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^{-\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1} (\text{подстановка Абеля}) = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1} = \\ &= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(t\sqrt{y^2+1})}{\sqrt{y^2+1}} \Big|_0^{\infty} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Второй способ:

Найдем  $I'_y$ :

$$I'_y = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Получили производную, осталось найти саму функцию:

$$I(y) = \int I'_y = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) + C$$

Найдем  $C$ :

$I(0) = 0, \Rightarrow C = 0$ , а наша цель -  $I(1)$ .

$$I(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

4)  $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t) dt, a > 0$ .

$$I'_y(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 - \sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$I(a) = \int I'_y = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C$$

С другой стороны,  $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t)) dt = \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt$   
 Устремим  $a$  к  $+\infty$ , тогда  $\ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) \rightarrow 0$ . Выясним, равномерно ли сходится семейство функций:

$$|\ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t)| \leq |\ln(1 - \frac{1}{a^2})| < \varepsilon$$

Следовательно, сходимость равномерная.

Тогда  $C = I(a) - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) = \pi \ln a - \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt = \pi \ln \frac{a}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2} \sin^2 t) dt$ .

При  $a \rightarrow \infty$  первое слагаемое стремится к  $\ln \frac{1}{2}$ , а второе к нулю, тогда  $C = \ln \frac{1}{2}$ , а  $I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2}$ .

## 12 Несобственный интеграл

### 12.1 Определение несобственного интеграла

Возьмем интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , у которого либо  $b = +\infty$ , либо  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow b - 0$ .

При этом  $f(x)$  интегрируема на  $[a; c]$ , где  $a < c < b$ .

Определение:

Предел  $\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$  будем называть несобственным интегралом. Если этот предел существует, то будем говорить, что интеграл сходится, иначе расходится.

Теперь рассмотрим функцию двух переменных  $f(x, y), x \in [a; b]$ ,

$-\infty < b \leq +\infty$ .

Тогда существует  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x, y) dx$ .

ПРИМЕР:

$$I(y) = \int_0^\infty y e^{-xy} dx = \int_0^\infty e^{-xy} d(xy) = e^{-xy}|_0^\infty = 1$$

То есть,  $\int_0^\infty = \begin{cases} 0, y = 0 \\ 1, y \neq 0 \end{cases}$ .

Определение: будем говорить, что несобственный интеграл сходится равномерно на  $Y$ , если:

1) Он сходится.

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, b - \delta > a, \forall c \ 0 < b - \delta < c < b : |\int_c^b f(x, y) dx| < \varepsilon \ \forall y \in Y$ .

ПРИМЕРЫ:

1)  $\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ .

Оценим этот интеграл:

$$|\int_1^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx| \leq \int_1^\infty \frac{|y^2 - x^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \varepsilon$$

Тогда этот интеграл равномерно сходится.

2)  $\int_0^\infty y e^{-xy} dx$ .

Докажем, что этот интеграл не сходится равномерно, для этого докажем отрицание определения:

$$\exists \varepsilon_0 \ \forall \delta \ \exists C_\delta; \exists y_\delta : |\int_{C_\delta}^\infty y_\delta e^{-xy_\delta} dx| \geq \varepsilon_0$$

Пусть  $xy_\delta = t$ :

$$I = \int_{C_\delta y_\delta}^\infty e^{-t} dt = e^{-C_\delta y_\delta}$$

Отсюда очевидно, что можно найти  $C_\delta$  и  $y_\delta$  такие, что  $e^{-C_\delta y_\delta} \geq \varepsilon_0$ , тогда интеграл не сходится равномерно.

## 12.2 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

1) Признак Коши.

Утверждение: для того, чтобы несобственный интеграл  $\int_a^b f(x, y) dx$  равномерно сходиллся на  $Y$ , необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall c_1, c_2 \ a < b - \delta < c_1, c_2 < b : |\int_{c_1}^{c_2} f(x, y) dx| < \varepsilon \ \forall y \in Y$$

Доказательство:

$I. \Rightarrow$

Пусть  $\int_a^b f(x, y) dx$  сходится равномерно на  $Y$ . Тогда по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \ \forall c \ a < b - \delta < c < b : |\int_a^b f(x, y) dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем два разных  $c$ :  $c_1$  и  $c_2$  такие, что  $a < b - \delta < c_1, c_2 < b$ , тогда:

$$|\int_{c_1}^{c_2} \leq |\int_{c_1}^b| + |\int_b^{c_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

II.  $\Leftarrow$

Теперь нам дано, что  $|\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Пусть  $c_2 \rightarrow b - 0$ , тогда

$$|\int_{c_1}^{\infty} f(x, y)dx| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

Что и требовалось доказать.

2) Признак Вейерштрасса:

Утверждение: если существует функция  $\varphi(x)$ , которая не имеет особых точек кроме  $b$ , а так же  $\int_a^b \varphi(x)$  сходится, то и интеграл  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится равномерно.

Доказательство:

Используем признак Коши, оценим интеграл:

$$|\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)dx| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f(x, y)|dx \leq \int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx < \varepsilon$$

Тогда по признаку Коши этот интеграл сходится равномерно.

В следующих двух признаках дан интеграл  $I = \int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ , а так же некоторые условия.

В доказательстве обоих понадобится следующая выкладка:

Распишем  $\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)g(x, y)dx$ :

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y)g(x, y)dx &= g(c_1, y) \int_{c_1}^{\xi} f(x, y)dx + g(c_2, y) \int_{\xi}^{c_2} f(x, y)dx \\ |\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)g(x, y)dx| &\leq |g(c_1, y)| \cdot |\int_{c_1}^{\xi} f(x, y)dx| + |g(c_2, y)| \cdot |\int_{\xi}^{c_2} f(x, y)dx| \end{aligned}$$

3) Признак Абеля.

а)  $g(x, y)$  монотонна по  $x$ .

$|g(x, y)| < C$

б)  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится равномерно на  $Y$ .

Утверждение:  $I$  сходится равномерно.

Доказательство:

$f(x, y)dx$  сходится равномерно, а  $|g(c_1, y)| < C$ ;  $|g(c_2, y)| < C$ .

Тогда по признаку Коши:

$$|\int_{c_1}^{\xi} f(x, y)dx| < \frac{\varepsilon}{2C}; \quad |\int_{c_2}^{\xi} f(x, y)dx| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

Отсюда  $|\int_{c_1}^{c_2} f(x, y)g(x, y)dx| < \frac{C\varepsilon}{2C} + \frac{C\varepsilon}{2C} = \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

4) Признак Дирихле.

а)  $g(x, y)$  монотонна по  $x$ .

$g(x, y)_{x \rightarrow b-0} \mapsto 0$ .



$$б) \left| \int_a^c f(x, y) dx \right| \leq M.$$

Утверждение:  $I$  сходится равномерно.

Доказательство:

По условию,  $\left| \int_a^c f(x, y) dx \right| \leq M.$

Так как  $g$  равномерно сходится, то  $\begin{cases} |g(c_1, y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ |g(c_2, y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}.$

Отсюда  $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

**ВАЖНО:**

На лекции мы договорились, что можно не отличать признак Абеля от признака Дирихле при решении задач. Вместо этого можно писать/говорить "по признаку Дирихле-Абеля".

**ПРИМЕРЫ:**

$$1) \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx, a \in [\delta; +\infty), \delta > 0$$

$$f(x, a) = \sin ax, g(x) = \frac{1}{x}$$

а)  $g$  - монотонна, не зависит от  $a$  и равномерно стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

б) Проверим условие  $\left| \int f(x, a) dx \right| < C$ :

$$\left| \int f(x, a) dx \right| = \left| \int \sin ax dx \right| = \left| -\frac{1}{a} \cos ax \right| \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\delta}$$

Оба условия выполнены, следовательно, по признаку Дирихле исходный интеграл сходится равномерно на данном промежутке.

$$2) \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx, a \in [0; +\infty), \text{ докажем, что этот интеграл не сходится равномерно.}$$

$$\text{Пусть } ax = t, \text{ тогда } \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_{a\xi_1}^{a\xi_2} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{Пусть теперь } a = \frac{1}{n}, \xi_1 = 2\pi n, \xi_2 = 3\pi n.$$

$$\text{Тогда } \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{1}{3\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t dt = \frac{2}{3\pi} = \varepsilon_0$$

Таким образом, мы доказали отрицание признака Коши, а значит интеграл не сходится равномерно.

$$3) I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx, a \geq 0.$$

а)  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  сходится, это интеграл Дирихле.

б)  $|e^{-ax}| \leq 1, e^{-ax}$  монотонно не возрастает

Тогда по признаку Абеля интеграл  $I(a)$  сходится равномерно на данном промежутке.

## 13 Свойства несобственных интегралов с параметром

1) Теорема 1:

Пусть :

а)  $f(x, y)$  интегрируема по  $x$  на каждом промежутке вида  $[a; b']$ ,

$$a < b' < b.$$

б)  $f(x, y)_{y \rightarrow y_0} \mapsto \varphi(x), \exists \int_a^b \varphi(x) dx$

с)  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится равномерно

Утверждение: допустим предельный переход:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Доказательство:

а)  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится равномерно, тогда

$$\exists b' : \left| \int_{b'}^b f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in Y$$

б)  $\int_a^b \varphi(x)dx$  сходится, тогда

$$\exists b'' : \left| \int_{b''}^b \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{с) } \left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{b'} (f(x, y) - \varphi(x))dx \right| + \left| \int_{b'}^b f(x, y)dx \right| + \left| \int_{b'}^b \varphi(x)dx \right| = I$$

Но так как  $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$ , то  $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b' - a)}$ , тогда:

$$I < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

Следствие:

Если  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a; b] \times [c; d]$ , то если  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится равномерно, то  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx$

2) Теорема 2:

Пусть  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a; b] \times [c; d]$ , а так же  $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  равномерно сходится.

Утверждение:  $\exists \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$

Доказательство:

а)  $I(y)$  непрерывна (по теореме 1), тогда  $\exists \int_c^d I(y)dy$

б) Если взять какую то точку  $b'$ , не особую, то интеграл  $\int_a^{b'}$  - собственный и по одной из теорем выше:

$$\int_c^d dy \int_a^{b'} f(x, y)dx = \int_a^{b'} dx \int_c^d f(x, y)dy$$

с) Докажем, что  $\int_c^d dy \int_a^{b'} f(x, y)dx \rightarrow_{b' \rightarrow b-0} \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx$ :

Для этого составим разность этих величин:

$$\left| \int_c^d dy \int_a^{b'} dx - \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \right| = \left| \int_c^d \left( \int_a^{b'} - \int_a^b \right) f(x, y)dx \right| = \left| \int_c^d dy \int_b^{b'} f(x, y)dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_c^d dy \left| \int_{b'}^b f(x, y) dx \right| \right| = I$$

Вспомним, что у нас  $\int_a^b f(x, y) dx$  равномерно сходится, используем это:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b_0 \ b' > b_0 : \left| \int_{b'}^b f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

Тогда  $I < \frac{\varepsilon}{d - c} (d - c) = \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

### 3) Теорема 3:

Дано:

- a)  $f(x, y)$  непрерывна  $[a; b] \times [c; d]$
- b)  $f(x, y)$  дифференцируема по  $y$ , а  $f'_y$  непрерывна на  $[a; b] \times [c; d]$
- c)  $\int_a^b f(x, c) dx$  сходится
- d)  $\int_a^b f_y dx$  сходится равномерно

Утверждение:

$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  дифференцируема на  $[c; d]$ , а так же  $\frac{dI}{dy} = \int_a^b f_y dx$

Доказательство:

Возьмем какую-то точку  $y$  на отрезке  $[c; d]$ ,  $F(t) = \int_a^b f_y(x, t) dx, c \leq t \leq y$ .

Тогда по теореме 2 мы имеем право интегрировать  $F(t)$  на промежутке  $[c; y]$ :

$$\begin{aligned} \int_c^y F(t) dt &= \int_c^y dt \int_a^b f_y(x, t) dx = \int_a^b dx \int_c^y f_y(x, t) dt = \\ &= \int_a^b dx (f(x, y) - f(x, c)) = \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, c) dx = \int_a^b f(x, y) dx + c_0 \end{aligned}$$

Отсюда  $F(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$

С другой стороны,  $F(y) = (\int_a^b f(x, y) dx + c_0)'_y$

Значит,  $\int_a^b f_y(x, y) dx = (\int_a^b f(x, y) dx)'_y$ , что и требовалось доказать.

### 4) Теорема 4:

Пусть:

- a)  $f(x, y)$  определена и непрерывна на  $[a; b] \times [c; d]$
- b)  $\int_a^b |f(x, y)| dx$  сходится равномерно на любом  $[c'; d'] \subset [c; d]$
- c)  $\int_c^d |f(x, y)| dy$  сходится равномерно на любом  $[a'; b'] \subset [a; b]$
- d) Сходится  $\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$  **или**  $\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx$

Утверждение:

Сходятся оба повторных интеграла:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

и они равны между собой.

Доказательство:

I.  $f \geq 0$ , пусть для определенности сходится  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ , тогда  $\int_a^b dx \int_{c'}^{d'} f(x, y) dy = \int_{c'}^{d'} dy \int_a^b f(x, y) dx$  по теореме 2.

Так как  $f \geq 0$ , то чем больше промежуток интегрирования, тем больше сам интеграл, тогда  $\int_{c'}^{d'} f(x, y) dy \leq \int_c^d f(x, y) dy$ , тогда

$$\int_a^b dx \int_{c'}^{d'} f(x, y) dy = \int_{c'}^{d'} dy \int_a^b f(x, y) dx \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

То есть, существует  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$

При этом  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ .

С другой стороны,  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \leq \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ .

Отсюда следует, что эти интегралы равны.

II.  $f$  любого знака.

Тогда введем две функции:

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}$$

$$f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

Отсюда  $f = f^+ - f^-$ , тогда поскольку каждая из этих функций положительна, то для них выполняется условие I, а значит, и для их линейной комбинации выполняется это же условие.

### ПРИМЕРЫ:

Интегралы ниже **очень** важны, их скорее всего будут спрашивать на экзамене, либо они будут спрашиваться в рубежном тестировании.

1) Интеграл Дирихле.

$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Для того, чтобы посчитать этот интеграл, нужно посчитать интеграл с параметром  $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ ,  $a \geq 0$ ,  $I(a)$  - непрерывна, а затем устремить параметр  $a$  к нулю

Пусть  $a \geq \delta > 0$ ;  $I'(a) = -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx$ , тогда этот интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Вычислим его:

$$I'(a) = -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = -\frac{1}{1+a^2}, \text{ тогда } I(a) = -\arctg a + c.$$

Устремим  $a$  к  $+\infty$ , тогда  $I(a) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + c$

С другой стороны  $I(a) \rightarrow 0$  (если в исходном интеграле устремить  $a$  к  $+\infty$ )

Отсюда следует, что  $c = \frac{\pi}{2}$

$$I(a) = -\arctg a + \frac{\pi}{2}, \text{ устремим } a \rightarrow 0, I(0) = I = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

2) Интеграл Дирихле с параметром.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ если } a > 0, \text{ так как можно заменить } ax \text{ на } t \text{ и } \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Если } a < 0, \text{ то } -\int_0^\infty \frac{\sin |ax|}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Если } a = 0, \text{ то } \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = 0$$

Обобщим это:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a)$$

3) Интегралы Лапласа.

Это два таких интеграла:

$$\text{a) } I_1(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$$

$$\text{b) } I_2(a) = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$$

Первый интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, для любых  $a$ .

Второй интеграл сходится равномерно по признаку Дирихле для  $a \geq \delta > 0$ .

Найдем производную от  $I_1(a)$ :

$I_1'(a) = -\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = -I_2(a)$ , а этот интеграл сходится равномерно, тогда можно брать производную для всех  $a \geq \delta > 0$ .

Избавимся от  $x$  во втором интеграле:

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$\text{Тогда } \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx$$

Отсюда  $I_2'(a) = -\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = -I_1(a)$ , а этот интеграл сходится равномерно, тогда можно брать производную для всех  $a \geq \delta > 0$ .

Дальше можем найти  $I_1''(a)$ , она равна  $I_1(a)$ . Теперь решим диффур, выясним, что  $I_1(a) = c_1 e^a + c_2 e^{-a}$ .

$$|I_1(a)| \leq \left| \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow c_1 = 0, \Rightarrow I_1(a) = c_2 e^{-a}$$

$$\text{Но } I_1(0) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = c_2, \Rightarrow I_1(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a}, a \geq \delta > 0$$

$$\text{Отсюда } I_2(a) = -I_1'(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a}, a \geq \delta > 0.$$

$$\text{При } a = 0 \quad I_1 = \frac{\pi}{2}, I_2 = 0.$$

При  $a < 0$ :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos |a|x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

$$I_2 = -\frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

Обобщим это:

$$I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \operatorname{sign}(a)$$

4) Интеграл Эйлера-Пуассона.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Сделаем замену  $x = ty, y \geq 0$

$$I = y \int_0^\infty e^{-t^2 y^2} dt$$

$$e^{-y^2} I = ye^{-y^2} \int_0^\infty e^{-t^2 y^2} dt = \int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)} dt$$

Интеграл  $\int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)} dt$  сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, кроме того равномерно сходится и интеграл  $\int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)} dy$

Проинтегрируем обе части:

$$\begin{aligned} I \int_0^\infty e^{-y^2} dy &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} dy^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Заметим, что у нас  $I \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I^2$ , так как второй множитель - по сути, тот же  $I$ , только вместо  $x$  стоит  $y$ .

Тогда  $I^2 = \frac{\pi}{4}, \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

5) Интегралы Френеля.

Это два таких интеграла:

a)  $I_1 = \int_0^\infty \sin x^2 dx$

b)  $I_2 = \int_0^\infty \cos x^2 dx$

Сделаем замену  $x^2 = t$ , отсюда  $x = \sqrt{t}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}, I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}$  - этот интеграл сходится по признаку Дирихле-Абеля.

$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t dt}{\sqrt{t}}$  - сходится (можно разбить на два интеграла по смежным промежуткам, оба будут сходиться).

Теперь вычислим оба интеграла:

a)  $I_1(a) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-at} dt, a \geq 0$

Вычислим этот интеграл, для этого возьмем интеграл Эйлера-Пуассона и заменим  $x$  на  $y\sqrt{t}$ :

$\int_0^\infty e^{-y^2 t} \sqrt{t} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , отсюда  $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2 t} dy$ .

Тогда  $I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t e^{-at} dt \int_0^\infty e^{-y^2 t} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty \sin t e^{-t(y^2+a)} dy$  - сходится равномерно по  $t$  и по  $y$ .

Тогда можно поменять порядок:

$$I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \int_0^\infty \sin t e^{-t(y^2+a)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1+(y^2+a)^2}$$

Тогда  $I_1 = \lim_{a \rightarrow 0} I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

Вольфрамираем, получаем, что  $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ , тогда

Ответ:  $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

b) Считается абсолютно так же. Ответ абсолютно такой же.

6) Интегралы Фруллани.

Это интегралы вида  $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx, a > 0, b > 0, f(x)$  - непрерывна на  $[0; +\infty)$ .

Рассмотрим три случая:

I. Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(+\infty)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = I \end{aligned}$$

Разобьем каждый интеграл на два:  $\int_{a\delta}^{a\Delta} = \int_{a\delta}^{b\delta} + \int_{b\delta}^{a\Delta}$ ;  $\int_{b\delta}^{b\Delta} = \int_{b\delta}^{a\Delta} + \int_{a\Delta}^{b\Delta}$ .

Тогда  $I = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi_1) \ln \frac{b}{a} - f(\xi_2) \ln \frac{b}{a}$  (по теореме о среднем).

Устремим  $\delta$  к нулю, тогда  $\Delta \rightarrow \infty$ :

$$I = f(0) \ln \frac{b}{a} - f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$$

II. Пусть  $\exists \int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \forall A$ .

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{a\delta}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Устремим  $\delta$  к нулю, тогда  $I = f(0) \ln \frac{b}{a}$ .

III. Пусть  $\exists \int_0^A \frac{f(t)}{t} dt \forall A$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_0^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_0^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_0^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_0^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{b\Delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \ln \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Устремим  $\Delta$  к  $+\infty$ :  $I = f(+\infty) \ln \frac{a}{b} = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$ .

**ПРИМЕРЫ:**

1)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx$ . Здесь справедлив второй случай, тогда

Ответ:  $f(0) \ln \frac{b}{a} = 0$ .

2)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ . Здесь также справедлив второй случай, тогда

Ответ:  $f(0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}$ .

## 14 Эйлеровы интегралы (гамма и бета функции)

I. Гамма функции.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

Рассмотрим  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt, x \in [a; b], a > 0$ , тогда  $e^{-t} \leq 1, t^{x-1}$  - показательная по  $x$ , она убывает, тогда  $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ , следовательно,  
 $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1}$ .

А интеграл  $\int_0^1 t^{a-1} dt$  сходится, тогда  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  равномерно сходится на  $[0; 1]$ .

Возьмем второй интеграл и тоже постараемся оценить подынтегральное выражение:

$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t}$ , а интеграл  $\int_1^\infty t^{b-1} e^{-t} dt$  сходится, тогда и интеграл  $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  сходится равномерно по Вейерштрассу.

Свойства гамма функции.

1) Гамма функция непрерывна  $\forall x > 0$ .

2)  $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$ . Докажем это:

Рассмотрим  $\int_0^1 : |t^{x-1} e^{-t} \ln t| \leq |t^{a-1} \ln t|, |\ln t| < \frac{1}{t^s} \forall s > 0$ , тогда

$|t^{a-1} \ln t| \leq t^{a-s-1}$ , а интеграл  $\int_0^1 t^{a-s-1}$  сходится, тогда и наш интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу.

Аналогично, второй интеграл,  $\int_1^\infty :$

$t^{x-1} e^{-t} \ln t \leq t^{b-1} e^{-t} t \leq t^b e^{-t}$ , а интеграл от этого выражения сходится, тогда и наш интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу.

Значит, дифференцирование законно.

$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt > 0$ , значит, вторая производная выпуклая вниз. Отсюда можем сделать вывод, что первая производная  $\Gamma'(x)$  возрастает.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1, \quad \Gamma(2) = \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1.$$

Тогда если соединить эти факты (вторая производная выпукла, а так же в 1 и 2 значение = 1), то выясняется, что между точками 1 и 2 существует глобальный минимум второй производной.

3) Основное свойство гамма функции.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = 0 + x\Gamma(x)$$

Таким образом, формулируем основное свойство гамма функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\text{Отсюда } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Устремим  $x$  к нулю справа:  $x \rightarrow 0+0$ . Тогда  $\Gamma(x+1) \sim \Gamma(1) = 1$ , а  $\frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}$ .

Отсюда же следует, что если  $x \rightarrow +\infty$ , то и  $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ .

4) Благодаря предыдущему свойству мы можем искусственно продолжить гамма функцию на отрицательную область.

Возьмем  $-1 < x < 0$ , тогда  $0 < x+1 < 1$ ,  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ , аналогично можем продолжать ее на  $-2 < x < -1, \dots, -n < x < -n+1$ .

Пусть  $x+1 = y, x = y-1, x \rightarrow 0$ , тогда  $\Gamma(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{y-1} \sim \frac{1}{y-1} \sim \frac{1}{x}$ .



Пусть теперь  $x \rightarrow -1, y \rightarrow +0$ , тогда  $\Gamma(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{-1} \sim -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x+1}$ .

Аналогично, далее на промежутках знаки будут меняться. TODO: график гамма функции.

## II. Бета функции.

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

$\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$ , оба интеграла сходятся, поэтому и бета функция сходится.

Свойства бета функции.

1) Бета функция симметрична относительно параметров:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

$$t' = 1 - t$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_1^0 (1-t')^{x-1} t'^{y-1} dt' = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt = \beta(y, x)$$

2) Основное свойство бета функции.

Для  $y > 1$  справедливо  $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x(1-t)^{y-2} dt$

Запишем  $t^x$  в виде  $t^x = t^x - t^{x-1} + t^{x-1} = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x(1-t)^{y-2} dt &= \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2} dt - \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \\ &= \frac{y-1}{x} \beta(x, y-1) - \frac{y-1}{x} \beta(x, y) \end{aligned}$$

Тогда  $\frac{x+y-1}{x} \beta(x, y) = \frac{y-1}{x} \beta(x, y-1)$ .

Тогда для  $y > 1$  справедливо  $\beta(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} \beta(x, y-1)$ .

В силу симметрии для  $x > 1$  справедливо  $\beta(x, y) = \frac{x-1}{x+y-1} \beta(x-1, y)$

3) Еще одно представление бета функции:

Пусть  $t = \frac{u}{1+u}, dt = \frac{du}{(1+u)^2}$

$$\beta(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1} du}{(1+u)^{x-1}(1+u)^{y-1}(1+u)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{x-1} du}{(1+u)^{x+y}}$$

4) Еще одно представление бета функции:

Разделим интеграл, полученный в прошлом пункте, на сумму двух:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty \frac{u^{x-1} du}{(1+u)^{x+y}}$$

Рассмотрим второй интеграл, сделаем замену  $u = \frac{1}{t}$ , тогда

$$-\int_1^0 \frac{t^{x+y} dt}{t^{x-1}(1+t)^{x+y}t^2} = \int_0^1 \frac{u^{y-1} du}{(1+u)^{x+y}}$$

Тогда  $\beta(x, y) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du$

5) Пусть  $0 < x < 1$ :

$$\beta(x, 1-x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1} du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

6) Связь гамма и бета функций.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Заменим  $t = (1+u)v$ , новая переменная интегрирования -  $v$ . Тогда

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (1+u)^x v^{x-1} e^{-(1+u)v} dv = (1+u)^x \int_0^\infty v^{x-1} e^{-(1+u)v} dv$$

Вместо  $x$  подставим  $x+y$ :

$$\Gamma(x+y) = (1+u)^{x+y} \int_0^\infty v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv$$

Поделим обе части на  $(1+u)^{x+y}$ :

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^\infty v^{x+y-1} e^{-(1+u)v} dv$$

Домножим на  $u^{x-1}$  и проинтегрируем от 0 до  $+\infty$ :

$$\beta(x, y) \Gamma(x+y) = \int_0^\infty u^{x-1} du \int_0^\infty v^{x+y-1} e^{-v} e^{-uv} dv = \int_0^\infty e^{-v} v^{x+y-1} dv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-uv} du$$

Заменим  $uv = t$ :

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{v^x} e^{-t} dt = \frac{1}{v^x} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(x)}{v^x}$$

Тогда:

$$\int_0^\infty e^{-v} v^{x+y-1} dv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-uv} du = \Gamma(x) \int_0^\infty e^{-v} v^{y-1} dv = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

И таким образом,

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

**ПРИМЕРЫ:**

$$1) \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{2x dx}{x} = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (Интеграл Пуассона).

2)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^{\frac{1}{3}} x dx = ?$

Пусть  $\sin^2 x = t$ :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^{\frac{1}{3}} x dx = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{1}{6}} dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \beta(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}).$$

## 15 Преобразование Фурье

### 15.1 Преобразование Фурье

Дана функция  $f(x)$ ,  $x$  - вещественное число, а  $f(x)$  может быть комплексным. Кроме этого, нам известно, что  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Это значит, что на  $R$  существует конечный набор точек  $a_1 < \dots < a_n$ , при этом существует интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , где  $[a; b]$  не содержит ни одной особой точки.

А интегралы  $\int_{-\infty}^{a_1}, \int_{a_1}^{a_2}, \dots, \int_{a_n}^{\infty}$  сходятся абсолютно.

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dt$$

$$b(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ty dt$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ity} dt$$

При этом  $|e^{-ity}| \leq 1$ .

И интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ity} dt = F(f)$  называется прямым преобразованием Фурье. Важно: этот интеграл сходится равномерно.

Есть и обратное преобразование Фурье:  $F^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy = f_1(x)$

Свойства прямого преобразования Фурье:

1)  $\hat{f}(y)$  - ограничена и непрерывна по  $y$  на всей оси.

Ограниченность:

$$|\hat{f}(y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = C$$

Непрерывность:

Перейдем к синусам и косинусам:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos ty - i \sin ty) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ty dt = 2\pi(a(y) - ib(y))$$

Теперь доказательство непрерывности сводится к доказательству непрерывности  $a(y)$  и  $b(y)$ :

$$a_1(y) = 2\pi a(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dt$$

Эта функция непрерывна, если  $\lim_{y \rightarrow y_0} a_1(y) = a_1(y_0)$ , возьмем значение функции в  $y_0$  (произвольная точка) и рассмотрим разность интегралов:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ty_0 dt \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\xi_1} f(t) \cos ty dt \right| + \left| \int_{\xi_2}^{\infty} f(t) \cos ty dt \right| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^{\xi_1} f(t) \cos ty_0 dt \right| + \left| \int_{\xi_2}^{\infty} f(t) \cos ty_0 dt \right| + \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t) (\cos ty - \cos ty_0) dt \right| \end{aligned}$$

Выберем  $\xi_1$  так, что  $\left| \int_{-\infty}^{\xi_1} f(t) \cos ty dt \right| < \frac{\varepsilon}{6}$ , тогда и  $\left| \int_{-\infty}^{\xi_1} f(t) \cos ty_0 dt \right| < \frac{\varepsilon}{6}$

Аналогично и  $\left| \int_{\xi_2}^{\infty} f(t) \cos ty dt \right| < \frac{\varepsilon}{6}$  для какой-то выбранной  $\xi_2$ , а так же  $\left| \int_{\xi_2}^{\infty} f(t) \cos ty_0 dt \right| < \frac{\varepsilon}{6}$

За счет выбранной окрестности (по теореме) можем утверждать, что  $\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t) (\cos ty - \cos ty_0) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда вся сумма меньше  $\varepsilon$ , что и требовалось доказать.

2) Дифференцирование преобразования Фурье.

Продифференцируем  $\hat{f}(y)$ :

$$\hat{f}'(y) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-ity} dy = F(-it f(t))$$

Так можно сделать только если  $f$  и  $t f(t)$  - абсолютно интегрируемые функции, кроме того, при этом условии интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-ity} dy$  сходится равномерно.

## 15.2 Интеграл Фурье

У нас есть два преобразования Фурье - прямое и обратное:

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ity} dt \\ F^{-1}(\hat{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy = f_1(x) \end{aligned}$$

Бывает, что полноценного интеграла не существует, но существует его главное значение:

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(x) dx$$

Подставим вместо нашей  $\hat{f}$  во второй интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iy(t-x)} dt$$

И этот интеграл называется интегралом Фурье.

$e^{-iy(t-x)} = \cos y(t-x) - i \sin y(t-x)$ , подставим это в интеграл Фурье, получим два интеграла, рассмотрим один из них:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin y(t-x) dt = g(y) - \text{нечетная функция, тогда } \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 0.$$

То есть, вместо  $e^{-iy(t-x)}$  мы запишем  $\cos y(t-x)$ :

$$\text{Тогда интеграл Фурье равен } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t(y-x) dt$$

Разложим косинус разности и подставим результат в интеграл Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(t-x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left( \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ytdt \right) \cos yx + \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ytdt \right) \sin yx \right)$$

Заметим, что часть этого мы обозначали за  $a(y)$  и  $b(y)$ , заменим, получим конечную формулу интеграла Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a(y) \cos yx + b(y) \sin yx) dy$$

Получили полный аналог ряда Фурье.

Лемма: если существует такая последовательность  $\alpha_n$ , которая монотонно стремится к  $+\infty$  и существует такое  $b$  - положительное число, такое, что  $\alpha_{n-1} - \alpha_n < b$ , и при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = A$ , то  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx$  тоже равен  $A$ .

Доказательство:

Определим функцию  $F(\omega) = \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx$ , кроме того из условия леммы следует, что если в качестве  $\omega$  брать  $\alpha_n$ , то  $F(\alpha_n) \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Докажем нашу лемму по Гейне, для этого нужно найти  $\omega_k \rightarrow \infty$ , что  $F(\omega_k) \rightarrow A$ .

Мы можем взять нашу  $\alpha_n$  и взять такую последовательность индексов  $n_k$ , что  $\alpha_{n_k} \leq \omega_k \leq \alpha_{n_k+1}$

Получилась последовательность  $\alpha_{n_k}$ . При этом  $0 \leq \omega_k - \alpha_{n_k} \leq b$ . Теперь оценим разность между интегралом  $\int_0^a f(x) \frac{\sin \omega_k x}{x} dx$  и  $\int_0^a f(x) \frac{\sin \alpha_{n_k} x}{x} dx$ :

По лемме Римана  $\int_a^b f(x) \sin \omega x dx \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$ , если  $f(x)$  - абсолютно интегрируема.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega_k x}{x} dx - \int_0^a f(x) \frac{\sin \alpha_{n_k} x}{x} dx \right| &\leq \left| \int_0^\delta f(x) \left( \frac{\sin \omega_k x}{x} - \frac{\sin \alpha_{n_k} x}{x} \right) dx \right| + \\ &+ \left| \int_\delta^a f(x) \frac{\sin \omega_k x}{x} dx \right| + \left| \int_\delta^a f(x) \frac{\sin \alpha_{n_k} x}{x} dx \right| \\ \left| \int_0^\delta f(x) \frac{\sin \omega_k x - \sin \alpha_{n_k} x}{x} dx \right| &\leq \int_0^\delta |f(x)| \frac{2 \left| \sin \frac{(\omega_k - \alpha_{n_k})x}{2} \right|}{x} dx \leq \int_0^\delta |f(x)| \frac{2x(\omega_k - \alpha_{n_k})}{2x} dx \leq b \int_0^\delta |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

### 15.3 Связь между интегралом и рядом Фурье

У нас есть интеграл Фурье:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dx$$

Кроме того, если  $f(t)$  абсолютно интегрируема на  $[0; a]$ , то  $\exists \alpha_n \rightarrow \infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = A$ , а так же  $\exists b > 0, 0 < \alpha_{n+1} - \alpha_n < b : \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx = A$ .

Теорема (о равенстве интеграла Фурье сумме соответствующего ряда Фурье):

Пусть  $f(t)$  абсолютно интегрируема на  $R$ , и  $\forall l > 0$  ряд Фурье по тригонометрической системе, ортогональной на промежутке  $[x_0 - l; x_0 + l]$  сходится в точке  $x_0$  к числу  $S$ .

Тогда  $\Phi(x_0) = S$ .

Доказательство:

Для начала вспомним, что такое ряд Фурье:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l}) = S$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, n \in 0 \dots \infty$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, n \in 1 \dots \infty$$

Теперь вспомним, чему равна частная сумма этого ряда:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x-t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{l})}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} dt$$

$\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{l})}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} = D_n(t)$  - ядро Дирихле, а  $f(x-t) = f(x+t)$ , тогда перепишем результат:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x+t) D_n(t) dt$$

Тогда  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$

Обозначим  $f(x_0 + t)$  за  $g(t)$ , тогда  $f(x_0) = g(0)$ , а  $S_n(x_0)$  (в терминах  $f$ ) =  $S_n(0)$  (в терминах  $g$ ).

Тогда  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(t) D_n(t) dt$

Обозначим за  $\varphi(t)$  разность  $\frac{1}{2l \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{\pi t}$

$$\varphi(t) = \frac{\pi t - 2l \sin \frac{\pi t}{2l}}{\pi t 2l \sin \frac{\pi t}{2l}}$$

Доопределим функцию в нуле, тогда при  $t \rightarrow 0$  функция  $\varphi \rightarrow 0$ . Теперь вернемся к  $S$ :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(t) D_n(t) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} dt = \\
&= \int_{-l}^l g(t) \left( \left( \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{\pi t} \right) + \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{\pi t} \right) dt = \\
&= \int_{-l}^l g(t) \varphi(t) \sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l}) dt + \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{\pi t} dt = \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{\pi t} dt
\end{aligned}$$

(Так как, по лемме Римана, первое слагаемое идет к нулю). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l g(t) \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{l})}{\pi t} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt$$

Поскольку, по лемме Римана,

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-l} g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_l^{\infty} g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = 0 \end{cases}$$

То  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt$ .

Но  $\frac{\sin \omega t}{t} = \int_0^{\omega} \cos(yt) dy$ .

Тогда  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\sin \omega t}{t} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_0^{\omega} \cos(yt) dy$ .

Как доказывалось ранее, в данном случае можно поменять местами пределы интегрирования:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_0^{\omega} \cos(yt) dy = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} \cos(yt) dy \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(yt) dt = \Phi(0)$$

Вернемся к  $f$ :  $g(t) = f(x_0 + t)$ , тогда заменим  $x_0 + t = u$ ,  $\Rightarrow t = u - x_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \cos(yt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(y(u - x_0)) du = \Phi(x_0)$$

Что и требовалось доказать.

Следствия:

1) Если  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $R$  и в точке  $x_0$  удовлетворяет условию Гёльдера, то

$$\Phi(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Условие Гёльдера:

Значения в соседних точках идут к нулю:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$$

2) Если  $f$  - абсолютно интегрируема и в точке  $x_0$  имеет производную или односторонние производные (но при этом непрерывна), то

$$\Phi(x_0) = f(x_0)$$

В С Ё