Конспект по матанализу за 4-й семестр.

Автор: Эмиль

26 апреля 2019 г.

Это конспект по матанализу за 4-й семестр. Любые предложения и сообщения об ошибках приветствуются, писать автору: t.me/buraindo

1 Поверхность

1.1 Поверхность

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ - кривая - отображение промежутка $<\alpha, \beta> \to R^3$ (или R^2).
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ - поверхность - отображение области $\Omega \subset R^2 \to R^3(x, y, z)$.
Записывается $\overrightarrow{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.
Для всех рассуждений будем предполагать, что x, y, z имеют непрерывные производные, а так же $rank \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$.
Если ранг равен 2, то поверхность назовем "хорошей", иначе, если ранг равен 1, то "плохой".
И тогда будем говорить, что $\overrightarrow{r}(t)$ - гладкая.
$\Omega \to \overrightarrow{r}(\Omega)$ - образ.
Если Ω отображается на свой образ $\overrightarrow{r}(\Omega)$ взаимно-однозначно, то $\overrightarrow{r}(\Omega)$ - **простая** поверхность.
ПРИМЕР:
$z = x^2 + y^2$ - параболоид, тогда $\overrightarrow{r} = (x, y, x^2 + y^2)$.
В общем виде это задание будет выглядеть так:

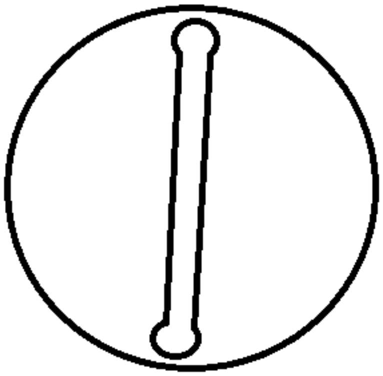
$$\overrightarrow{r} = (x, y, f(x, y))$$

1.2 Край поверхности

Пусть Ω - ограниченная область, $\overrightarrow{\Omega}$ - замыкание $= \Omega \cup \partial\Omega$ (область плюс её граница).
Рассмотрим теперь $\partial\Omega$ - границу Ω:
$\partial\Omega : (u(t), v(t))$ - какая-то линия.
$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ - кривая, **край** поверхности, являющийся образом $\partial\Omega$.
Будем обозначать за Σ саму поверхность $\overrightarrow{r}(u, v)$, а за $\partial\Sigma$ её край - $\overrightarrow{r}(u(t), v(t))$.

1.3 Почти простая поверхность

Определение: будем называть поверхность $\Omega \to \overrightarrow{r}(u,v)$ **почти простой**, если найдется такая исчерпывающая последовательность Ω_n, для которой каждая $\Omega_n \to \overrightarrow{r}(u,v)$ - простая поверхность.
Например, сфера и конус - не простые поверхности, но их можно немного изменить, чтобы они стали почти простыми:
Сфера:

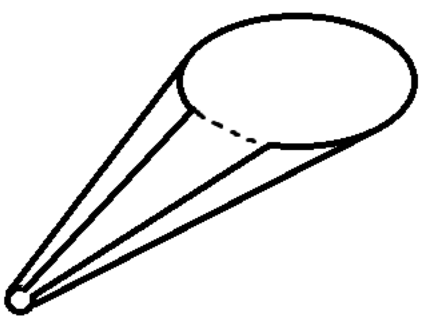


Вырежем из северного и южного полюсов сферы кружочки, а затем разрежем её от одного кружочка до другого. Этим действием мы немного изменили промежутки принимаемых углами φ и θ значений в сферических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.
Конус:



Вырежем вершину конуса и разрежем его по вертикали. Этим действием мы немного изменили промежутки допустимых значений для радиуса r и угла φ в цилиндрических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

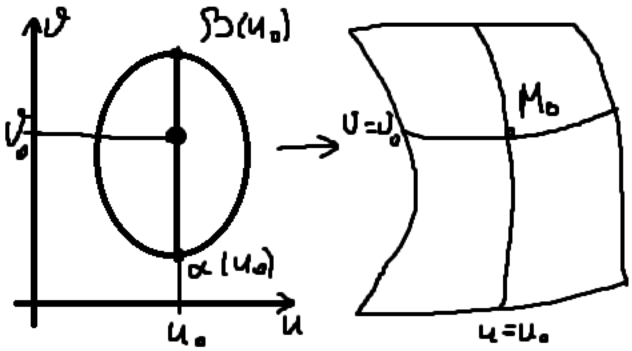
1.4 Функции, задающие одну и ту же поверхность

Пусть даны Ω и Ω', а так же соответствия $u = u(u', v'), v = v(u', v')$.
Кроме того, пусть якобиан $\begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$ не равен 0 (то есть, существует обратная функция).
Это значит, что Ω отображается на Ω' взаимно-однозначно.
В таком случае будем считать, что

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \overrightarrow{\varrho}(u', v') - \Sigma$$

(задают одну и ту же поверхность).

1.5 Координатные кривые



Зафиксируем одну из координат, например, $u = u_0$, и будем менять v от $\alpha(u_0)$ до $\beta(u_0)$. Получим кривую $\overrightarrow{r}(u_0, v)$.
Аналогично, если зафиксировать $v = v_0$, то зададим кривую $\overrightarrow{r}(u, v_0)$.
Эти две кривые называются **координатными кривыми**.

1.6 Нормаль

Теперь рассмотрим $\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v$ - касательные к кривой.
Пусть $A = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$, тогда если $rank A = 2$, то векторное произведение $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq 0$.
Результат этого векторного произведения $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \overrightarrow{n}$ является вектором **нормали** к поверхности Σ.
Убедимся, что нормаль не зависит от параметризации кривой:
Дано взаимно-однозначное отображение $\Omega \iff \Omega'$ и $\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{\varrho}(u', v')$.
Посчитаем $\overrightarrow{\varrho}_{u'} \times \overrightarrow{\varrho}_{v'}$:

Вспомним, что $\overrightarrow{\varrho}(u^{'}, v^{'}) = \overrightarrow{r}(u(u^{'}, v^{'}), v(u^{'}, v^{'}))$, это значит, что

$$\overrightarrow{\varrho}_{u'} = \overrightarrow{r}_u \frac{\partial u}{\partial u'} + \overrightarrow{r}_v \frac{\partial v}{\partial u'},$$

$$\overrightarrow{\varrho}_{v'} = \overrightarrow{r}_u \frac{\partial u}{\partial v'} + \overrightarrow{r}_v \frac{\partial v}{\partial v'}$$

Перемножим, учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{\varrho}_{u'} \times \overrightarrow{\varrho}_{v'} = (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} + (\overrightarrow{r}_v \times \overrightarrow{r}_u) \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} =$$

$$= (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'})(\text{поменяли знак}) = (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) \begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$$

Но этот якобиан не равен нулю!
Это значит, что получили тот же вектор нормали, у которого могла измениться лишь длина или направление, что и требовалось доказать.

1.7 Площадь поверхности

Даны $\Omega, \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$.
Найдем дифференциал этого вектора:

$$d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv$$

$$d\overrightarrow{r}^2 = |d\overrightarrow{r}|^2 = \overrightarrow{r}_u^2 du^2 + 2\overrightarrow{r}_u \overrightarrow{r}_v du dv + \overrightarrow{r}_v^2 dv^2$$

Обозначим $E = \overrightarrow{r}_u^2, F = \overrightarrow{r}_u \overrightarrow{r}_v, G = \overrightarrow{r}_v^2$.
$d\overrightarrow{r}^2$ называется первой квадратичной формой поверхности и для неё справедливо свойство:
$d\overrightarrow{r}^2 > 0$ (положительно определена)ю
Для того, чтобы это выполнялось (для нашей формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$), нужно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

В нашем случае второго дифференциала вектора $\overrightarrow{r}$ это значит, что требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$

Первые два условия очевидны, проверим третье:

$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = |\overrightarrow{r}_u||\overrightarrow{r}_v| \sin\varphi \ (\varphi \neq 0)$$

$$\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v = |\overrightarrow{r}_u||\overrightarrow{r}_v| \cos\varphi$$

$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|^2 + (\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v)^2 = |\overrightarrow{r}_u|^2|\overrightarrow{r}_v|^2$$

Заметим, что правая часть это EG, а второе слагаемое в левой части это F^2.
Тогда $|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|^2 = EG - F^2 > 0$, так как $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq 0$, что и требовалось доказать.

Площадь поверхности

$S(\Sigma) = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \ dudv$ - площадь поверхности.

Свойства площади:

1) Не зависит от параметризации.

Пусть дали две параметризации:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{\varrho}(u', v')$$

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\overrightarrow{\varrho}_{u'} \times \overrightarrow{\varrho}_{v'}| \ du'dv'$$

Вспомним, что $|\overrightarrow{\varrho}_{u'} \times \overrightarrow{\varrho}_{v'}| = |(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)| \ |I(\frac{u,v}{u',v'})|$.

Подставим это в интеграл:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega'} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \ |I| du'dv' = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \ dudv$$

Получили то же самое.

2) Рассмотрим случай, когда сама поверхность - плоскость. Сможем ли по той же формуле посчитать площадь? Проверим это, площадь это $\iint_\Omega \ dudv$.

Теперь посчитаем $S(\Omega)$:

Σ задается при помощи $\overrightarrow{r} = (x, y, 0)$.

Тогда $\overrightarrow{r}_x = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{r}_y = (0, 1, 0)$.

А $\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{k}, \Rightarrow |\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = 1$.

Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| \ dudv = \iint_\Omega dudv$, что и требовалось доказать.

3) Площадь аддитивна по отношению к поверхности. (Площадь поверхности, составленной из гладких кусков, равно сумме площадей).

4) $z = f(x, y)$.

$\overrightarrow{r} = (x, y, f(x, y))$.

$\overrightarrow{r}_x = (1, 0, f_x)$.

$\overrightarrow{r}_y = (0, 1, f_y)$.

$$\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = i(-f_x) - jf_y + \overrightarrow{k}.$$

$$|\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = \sqrt{EG - F} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

ПРИМЕРЫ:

1) Посчитать площадь:

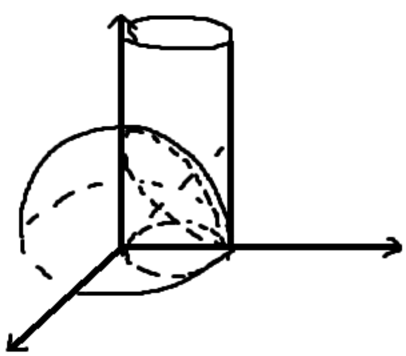
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

где $z \geq 0$.

Это половина сферы, которую вырезает цилиндр:

$$x^2 + y^2 = Rx, \Rightarrow x^2 - Rx + \frac{x^2}{4} + y^2 = (\frac{R}{2})^2, \Rightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$$

Это выглядит так:



Перейдем в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}.$$

Зададим поверхность:

$$\overrightarrow{r} = (R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta)$$

Посчитаем частные производные по φ и θ:

$\overrightarrow{r}_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0)$

$\overrightarrow{r}_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)$

Теперь посчитаем E, F, G:

$E = \overrightarrow{r}_\varphi^2 = R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta = R^2\sin^2\theta$.

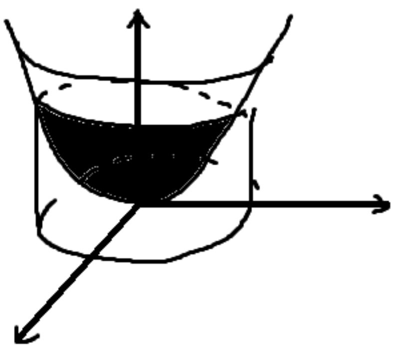
$F = \overrightarrow{r}_\theta^2 = R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2$.

$F = 0$ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).

$\sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\theta$.

Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega R^2\sin\theta\ d\varphi d\theta = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{?} \sin\theta\ d\theta$.

Осталось вычислить верхний предел интегрирования для θ, для этого нужно подставить сферические координаты в уравнение цилиндра:
$R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta = R^2\cos\varphi\sin\theta$.
Отсюда либо $\sin\theta = 0$, либо $\sin\theta = \cos\varphi$.
Первое нас не интересует, а вот второе можно решить и получить ответ:
$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.
Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega R^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin\theta\ d\theta = R^2(\pi - 2)$.
2) Посчитать площадь поверхности:
$z = x^2 + y^2$. Этот параболоид бесконечен, поэтому чтобы было, что считать, вырежем из него кусок $x^2 + y^2 = R^2$ и найдем площадь.
Вот как это выглядит:



Для этого перейдем к цилиндрическим координатам:
$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = \varrho^2 \end{cases}$.
Зададим поверхность:
$\overrightarrow{r} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2)$.
Посчитаем частные производные по ϱ и φ.
$\overrightarrow{r}_\varrho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2\varrho)$.
$\overrightarrow{r}_\varphi = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)$.
Теперь посчитаем E, F, G:
$E = \overrightarrow{r}_\varrho^2 = 1 + 4\varrho^2$.
$F = \overrightarrow{r}_\varphi^2 = \varrho^2$.
$F = 0$ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).
$\sqrt{EG - F^2} = \varrho\sqrt{1 + 4\varrho^2}$.

$$S(\Sigma) = \iint_\Omega \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\ d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\ d\varrho$$

<u>Важная информация про почти простые поверхности:</u>

Утверждение: если Σ - почти простая, а Ω_n - искомая исчерпывающая последовательность, то:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \, dudv = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \, dudv$$

2 Поверхностные интегралы

2.1 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть Σ - простая и гладкая поверхность. Дана $F(x, y, z)$ - непрерывная функция, определенная на Σ. Поверхностным интегралом I рода от функции F по поверхности Σ называется:

$$\iint_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \, dudv = \iint_{\Sigma} F(x, y, z) ds(d\sigma)$$

Свойства поверхностного интеграла I рода:
1) Не зависит от параметризации поверхности (доказывается так же, как независимость площади поверхности от параметризации).
2) Аддитивность и линейность.
3) Можно дать физическую интерпретацию:
Если $F(x, y, z) \geq 0$, и это плотность слоя, "намазанного" на поверхность, то $\iint F d\sigma$ - масса слоя.
Вместо $d\sigma$ можно написать $\sqrt{EG - F^2} \, dudv$.

2.2 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть Σ - двусторонняя (бывают односторонние поверхности, например, лист Мёбиуса и бутылка Клейна (Кляйна)). Выберем сторону (это означает, выберем, куда "смотрит" нормаль).
У нас есть поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0) \, d\sigma$,
где $\overrightarrow{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.
Если поменять сторону, то поменяется знак за счёт смены направления вектора нормали на противоположное.
Отсюда вытекает свойство:

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0) \, d\sigma = -\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0^-) \, d\sigma$$

2.3 Как считать поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0) = \overrightarrow{F} \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|} \, |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \, dudv = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v) \, dudv$ (смешанное произведение).
Посчитаем его:

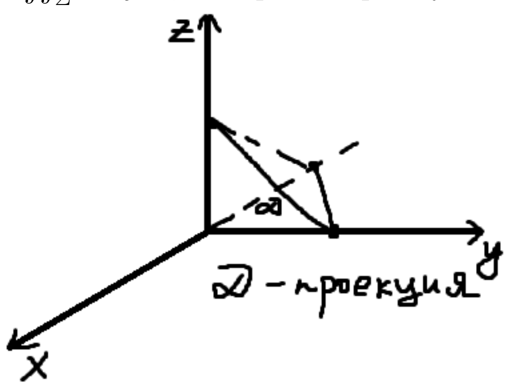
$$\begin{bmatrix} R & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \, dudv =$$

$$= (P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(\text{поменяли знак}) + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\ dudv$$

Рассмотрим $PI(\frac{y,z}{u,v})\ dudv$:
Если угол между вектором нормали и осью x острый, то $I > 0$, иначе $I < 0$.
Тогда для острого угла $\iint PI\ dudv = \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\ dydz$.
А для тупого угла $\iint PI\ dudv = -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\ dydz$.
Аналогично и другие слагаемые, тогда запишем сумму:
$P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ dudv + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\ dudv + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ dudv = P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy$.
Тогда

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0)\ d\sigma = \iint_\Sigma P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy$$

ПРИМЕР:
Дан $\iint_\Sigma x\ dydz$, и вырезан прямоугольник $z + y - x = 1$, верхняя сторона.



Посчитаем:
$\iint_\Sigma x\ dydz = -\iint(z+y-1)\ dydz$ (так как угол между нормалью и отсутствующей осью (в данном случае ось x) тупой).

$$-\iint(z+y-1)\ dydz = -\int_0^1 dy \int_0^{1-y}(z+(y-1))\ dz = \frac{1}{6}$$

3 Теория поля

$\Omega \subset R^3$.
I. Скалярное поле.
Если $\forall M \in \Omega\ \exists f(M)$ - число, тогда у нас на области Ω задано скалярное поле $f(M) = f(x,y,z)$.
Дифференцируемость.
Определение: будем называть $f(M)$ дифференцируемым в точке M_0, если существует такой вектор $\overrightarrow{c}$, что

$$\triangle f(M_0) = \triangle\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{c} + o(||\overrightarrow{MM_0}||)$$

$$\overrightarrow{c} = gradf(M_0) = (\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z})$$

Гуманитарии могут делать так:
$\sin x + \cos x = (\sin + \cos)x$.
Мы сделаем так для градиента, но осознанно и опираясь на законы:

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})f$$

Обозначим теперь $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ за ∇ (произносится "набла").
Это символический вектор, его координаты это вроде числа, но на самом деле, эта набла - целиком оператор и применяется к чему-то.
Тогда $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \nabla f$.
$\overrightarrow{c} = \nabla f$, тогда

$$\triangle f = \triangle \overrightarrow{r} \cdot \nabla f = (\triangle \overrightarrow{r} \cdot \nabla) f + o(||\overrightarrow{MM_0}||)$$

Производная по направлению.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim t \to 0 \frac{f(M_0 + t\overrightarrow{l_0}) - f(M_0)}{\partial t}$$

Здесь $t > 0$, а $\overrightarrow{l_0}$ - орт направления.
Заметим, что числитель - приращение, так что можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim t \to 0 \frac{(t\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla + o(t)}{\partial t} = (\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla) f$$

II. Векторное поле.
Если $\forall M \in \Omega \; \exists \overrightarrow{a}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, тогда на области Ω задано векторное поле $\overrightarrow{a}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.
Дифференцируемость.
Определение: будем называть $\overrightarrow{a}(M)$ дифференцируемым в точке M_0, если его приращение можно представить в виде:

$$\triangle \overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(M) - \overrightarrow{a}(M_0) = L(\overrightarrow{r}) + o(||\overrightarrow{r}||)$$

Тогда

$$\triangle \overrightarrow{a}(M) = (\triangle \overrightarrow{r} \cdot \nabla)\overrightarrow{a} + o(||\overrightarrow{r}||)$$

Производная по направлению.
$\frac{\partial f}{\partial l} = (\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla) f$ - для скалярного поля. В случае векторного поля:

$$\frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial l} = (\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)\overrightarrow{a}$$

ПРИМЕР:
$\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + (xy + yz)\overrightarrow{j} + xyz\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{l} = (1,1,1), \overrightarrow{l_0} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial l} = (\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)\overrightarrow{a}$
1) $(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial z}$, и все это нужно применить к вектору $\overrightarrow{a}$.
2) $(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)\overrightarrow{a}$ - рассмотрим результат покоординатно:
$(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)a_x = (\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial z})y = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)a_y = (\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial z})(xy+yz) = \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}}$
$(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)a_z = (\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial}{\partial z})(xy) = \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}}$
Тогда
$(\overrightarrow{l_0} \cdot \nabla)\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \frac{2y+x+z}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} + \frac{yz+xz+xy}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k}$.
<u>Введем понятия:</u>
Пусть дано поле $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M) = (P,Q,R)$.
<u>Определение:</u> **дивергенция** поля:

$$div\overrightarrow{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

<u>Определение:</u> **ротор** векторного поля:

$$rot\overrightarrow{a} = det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \overrightarrow{i}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \overrightarrow{j}(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \overrightarrow{k}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Упростим формулы для div и rot:
$div\overrightarrow{a} = (\nabla \cdot \overrightarrow{a})$ (скалярное произведение).
$rot\overrightarrow{a} = (\nabla \times \overrightarrow{a})$ (векторное произведение).
<u>**Действия с ∇**:</u>
1)

$$\nabla(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2$$

2) Посчитаем $\nabla(f_1 f_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} f_1$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} f_1$$

Будем иметь ввиду, что ∇ действует на поле, когда пишем следующим образом:

$$\nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2)$$

Здесь ∇ действует на поле f_1.

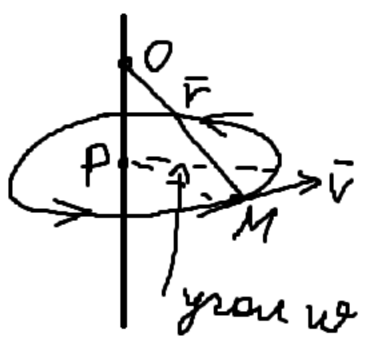
Тогда $\nabla(f_1 f_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{f_1} f_2) + \nabla(f_1 \overset{\downarrow}{f_2}) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$.
3) Посчитаем $\nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2})$:
Формально это смешанное произведение, тогда

$$\nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_1}} \times \overrightarrow{a_2}) + \nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_2}}) = \overrightarrow{a_2}(\nabla \times \overrightarrow{a_1}) - \overrightarrow{a_1}(\nabla \times \overrightarrow{a_2})$$

4) $grad\ f = \nabla f$
5) $grad\ (f_1 f_2) = f_1 grad\ f_2 + f_2 grad\ f_1$
6) $div\,\overrightarrow{a} = \nabla \cdot \overrightarrow{a}$
7) $rot\,\overrightarrow{a} = \nabla \times \overrightarrow{a}$
8) $div(f \cdot \overrightarrow{a}) = \nabla(f \cdot \overrightarrow{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{f} \cdot \overrightarrow{a}) + \nabla(f \cdot \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a}}) = \overrightarrow{a}\nabla f + f\nabla\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}\,grad\ f + f div\,\overrightarrow{a}$
9) $div(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = \nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_1}} \times \overrightarrow{a_2}) + \nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_2}}) = \overrightarrow{a_2}(\nabla \times \overrightarrow{a_1}) - \overrightarrow{a_1}(\nabla \times \overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{a_2} rot \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_1} rot \overrightarrow{a_2}$
10) $rot(f\overrightarrow{a}) = \nabla \times (f\overrightarrow{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{f}\overrightarrow{a}) + \nabla \times (f\overset{\downarrow}{\overrightarrow{a}}) = (\nabla f) \times \overrightarrow{a} + f(\nabla \times \overrightarrow{a}) = grad\ f \times \overrightarrow{a} + f\ rot\,\overrightarrow{a}$
11) $rot(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = \nabla(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) = \nabla\overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_1}} \times \overrightarrow{a_2} + \nabla\overrightarrow{a_1} \times \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a_2}} = (\overrightarrow{a_2}\nabla)\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}(\nabla\overrightarrow{a_1}) + \overrightarrow{a_1}(\nabla\overrightarrow{a_2}) - (\overrightarrow{a_1}\nabla)\overrightarrow{a_2} =$
$(\overrightarrow{a_2}\nabla)\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} div \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_1} div \overrightarrow{a_2} - (\overrightarrow{a_1}\nabla)\overrightarrow{a_2}$
12) $div(grad\ f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2})f =$
$= \nabla^2 f = \triangle f$.
$\triangle$ - оператор Лапласа, $\triangle = \nabla^2$.
13) $div(rot\,\overrightarrow{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{a}) = 0$.
14) $rot(grad\ f) = \nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$.

Экскурс в физику - физический смысл ротора

Пусть дали твердое тело, оно вращается вокруг какой то оси, пусть по часовой стрелке:



$|\overrightarrow{v}| = PM$(радиус)$\cdot\omega$.
Вектор $\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$ параллелен $\overrightarrow{v}$ (1)
$|\overrightarrow{v}| = \omega \cdot |\overrightarrow{r}| \sin\varphi = |\overrightarrow{\omega}|\ |\overrightarrow{r}| \sin(\pi - \varphi)$ (2)
Из (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$.
Посчитаем $rot(\overrightarrow{v})$:
$rot(\overrightarrow{v}) = rot(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\omega}\,div\,\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\,div\,\overrightarrow{\omega} + (\overrightarrow{r}\nabla)\overrightarrow{\omega} - (\overrightarrow{\omega}\nabla)\overrightarrow{r}$.

$\overrightarrow{\omega}$ зависит только от времени, следовательно, везде, где дифференцируем $\overrightarrow{\omega}$, будут нули:
$div\overrightarrow{\omega} = 0, (\overrightarrow{r}\nabla)\overrightarrow{\omega} = 0$.
Тогда $rot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega}div\overrightarrow{r} - (\overrightarrow{\omega}\nabla)\overrightarrow{r} = 3\overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega} = 2\overrightarrow{\omega}$.
Таким образом, физический смысл ротора: удвоенная мгновенная угловая скорость, отсюда и его названия (ротор, вихрь).

4 Интегральные характеристики векторного поля

Дано векторное поле $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M)$ в Ω, а так же l - простой кусочно-гладкий замкнутый контур из Ω.

4.1 Циркуляция

Определение: **циркуляцией** векторного поля по замкнутому контуру l называется следующий интеграл второго рода:

$$\text{Ц} = \int_l \overrightarrow{a}d\overrightarrow{r} = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

4.2 Поток

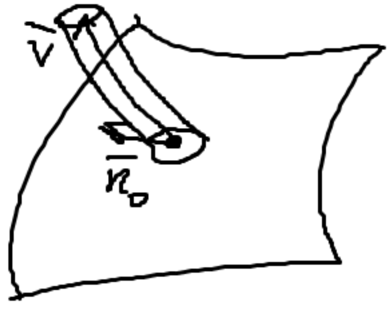
Дана поверхность Σ.
Определение: **потоком** векторного поля по поверхности Σ называется следующий интеграл второго рода:

$$\prod = \iint_\Sigma \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds$$

Приведем к привычному виду:

$$\prod = \iint_\Sigma \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Физический смысл потока
Пусть есть $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{v}$ - поле скоростей. Жидкость движется по какому-то пути, а затем мы ставим на этом пути решетку:



И сколько жидкости проходит через решетку за единицу времени?
Возьмем в нашей решетке маленький кусок, из-за пренебрежимо малой величины можем считать его плоским. Тогда за единицу времени жидкость займет объем цилиндра с площадью основания, равной площади куска, и высотой, равной проекции $\overrightarrow{v}$ на ось вращения.
Посчитаем этот объем:

$$V_{\text{Ц}} = S \cdot |\overrightarrow{v}_{\text{пр.}\overrightarrow{n_0}}| = ds\overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0} = d\prod$$

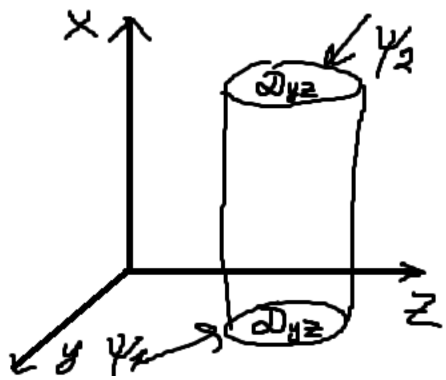
И поток будет равен приближенной сумме объемов по всем кусочкам, то есть интегралу.

5 Теорема Гаусса-Остроградского

Пусть есть ограниченная область $\Omega \subset R^3$
Граница этой области - $\partial\Omega$ - кусочно-гладкая.
$\overrightarrow{n}$ - внешняя нормаль.
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M), M \in \overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{a}$ непрерывно дифференцируемо в каждой точке.
Утверждение (теорема Остроградского-Гаусса): выполняется равенство:

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds = \iiint_{\Omega} div\overrightarrow{a}dxdydz$$

Доказательство:
Предположим, что Ω односвязна и элементарна по всем координатам.



Посчитаем одно из слагаемых, например, интеграл по $\frac{\partial P}{\partial x}$:
$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x} =$
$= \iint_{D_{yz}} P(\psi_2(y,z), y, z)dydz - \iint_{D_{yz}} P(\psi_1(y,z), y, z)dydz =$
$= \iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma_2} P(x,y,z)dydz + 0$ (интеграл по боковой поверхности равен нулю).
Здесь Σ_1 образована функцией $x = \psi_1(y,z)$, Σ_2 образована функцией $x = \psi_2(y,z)$.
Тогда эта сумма - интеграл по всей границе (три слагаемых это интеграл по верхней части, нижней части и боковой поверхности), а значит, она равна

$$\iint_{\partial\Omega} P(x,y,z)dydz$$

Аналогично доказывается для Q и для R.

5.1 Следствие из теоремы Остроградского-Гаусса

Возьмем непрерывно дифференцируемое векторное поле $\overrightarrow{a} = (P, Q, R)$ в открытой области Ω.
Возьмем из этой области точку M_0 и окружим ее сферой $S(M_0)$.
Обозначим за $V(M_0)$ шар, ограниченный сферой S, $V \subset \Omega$.
Запишем для сферы и шара формулу Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{S(M_0)} \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0} ds = \iiint_{V(M_0)} div\overrightarrow{a} dV = I$$

Утверждение: для какой-то точки $\widetilde{M} \in V(M_0)$ выполняется равенство:

$$I = div\overrightarrow{a}(\widetilde{M}) \cdot \mathbf{V}$$

V - объем шара. Отсюда выразим дивергенцию:

$$div\overrightarrow{a}(\widetilde{M}) = \frac{\iint_{S(M_0)} \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0} ds}{\mathbf{V}}$$

Полученную формулу принято называть средней плотностью источников (или стоков).
Какой в этом смысл:
Представим, что где-то через шар протекает жидкость. В нормальной ситуации вытекает жидкости ровно столько, сколько втекает, дивергенция равна нулю. Но если внутри шара есть источник/сток, тогда втекать будет меньше/больше, чем вытекать. Именно это и регулирует числитель в формуле дивергенции, полученной выше.

6 Теорема Стокса

Дано:
Простая и гладкая ($\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq \overrightarrow{0}$) поверхность $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) = \Sigma$.
Плоскость $\Omega \subset R^2 \to R^3, (u, v) \in \Omega, \Omega$ - ограничена.
$\partial\Omega = \{u(t), v(t)\}, \alpha \leq t \leq \beta$.
$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ - граница поверхности, $\partial\Sigma$.
Теорема (Стокса):
Утверждение: имеет место формула:

$$\int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r} = \iint_{\Sigma} rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0} ds$$

Доказательство:

1) Сведем $\int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r}$ к интегралу по контуру $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Sigma} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \overrightarrow{a}(\overrightarrow{r}(u(t), v(t))) \cdot (\overrightarrow{r}_u u_t dt + \overrightarrow{r}_v v_t dt) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{a}(\overrightarrow{r}(u, v))(\overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv) = I_1$$

2) Сведем $\iint_{\Sigma} rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0} ds$ к интегралу по области Ω:

$$\iint_{\Sigma} rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0} ds = \iint_{\Omega} rot\overrightarrow{a} \cdot (\frac{(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|) dudv =$$

$$= \iint_{\Omega} rot\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv = I_2$$

Рассмотрим подынтегральное выражение, оно представляет собой смешанное произведение, попробуем представить его в виде $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, чтобы применить формулу Грина в обратную сторону:

$$rot\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) = rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v = \overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v \times (\nabla \times \overrightarrow{a}) =$$

$$= \overrightarrow{r}_u \cdot \nabla(\overrightarrow{r}_v \cdot \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a}}) - \overrightarrow{r}_u(\overrightarrow{r}_v \cdot \nabla)\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{r}_u \cdot \nabla)(\overrightarrow{r}_v \cdot \overset{\downarrow}{\overrightarrow{a}}) - \overrightarrow{r}_u(\overrightarrow{r}_v \cdot \nabla)\overrightarrow{a} =$$

$$= \overrightarrow{r}_v(\overrightarrow{r}_u \cdot \nabla)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{r}_u(\overrightarrow{r}_v \cdot \nabla)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r}_v(x_u \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial x} + y_u \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial y} + z_u \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial z}) -$$

$$-\overrightarrow{r}_u(x_v \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial x} + y_v \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial y} + z_v \frac{\partial \overrightarrow{a}}{\partial z}) =$$

$$= \overrightarrow{r}_v \overrightarrow{a}_u - \overrightarrow{r}_u \overrightarrow{a}_v = \overrightarrow{r}_v \overrightarrow{a}_u - \overrightarrow{r}_u \overrightarrow{a}_v + \overrightarrow{r}_{uv} \overrightarrow{a}_{uv} - \overrightarrow{r}_{uv} \overrightarrow{a}_{uv} =$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}_u)$$

Получили как раз, что хотели, осталось подставить в I_2:

$$I_2 = \iint_{\Omega} (\frac{\partial}{\partial u}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}_u)) dudv$$

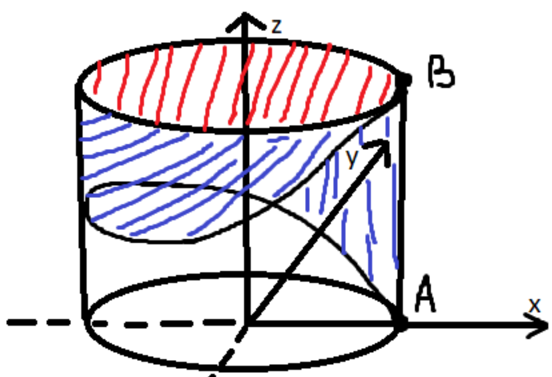
Тогда по формуле Грина для этого интеграла:

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{a}\overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{a}\overrightarrow{r}_v dv = I_1$$

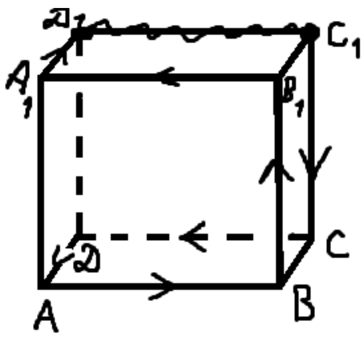
Таким образом, получили тот же интеграл, следовательно, формула верна и теорема доказана.

6.1 Следствие из теоремы Стокса

Дан интеграл $I = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$.
Утверждение: чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $rot\overrightarrow{a} = 0$.
Доказательство:
1) Пусть l_1 и l_2 - какие-то два пути из A в B, и пусть эти кривые не пересекаются.
Тогда $I = \int_{l_1} - \int_{l_2} = \int_l$. l - контур, получаемый, если пойти из A в B по кривой l_1, а затем обратно из B в A по l_2.
Тогда $I = \int_l \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \iint_\Sigma rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 ds$ - по теореме Стокса.
Следовательно, если $rot\overrightarrow{a} = 0$, то $I = 0 = \int_{l_1} - \int_{l_2} \Rightarrow \int_{l_1} = \int_{l_2}$, что и требовалось доказать.
2) Пусть теперь $\int_{l_1} = \int_{l_2}$, тогда $\int_l = 0 = \iint_\Sigma (rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0) ds$, следовательно, скалярное произведение равно нулю, но нормаль не может быть равна нулю, поэтому равен нулю ротор, что и требовалось доказать.
ПРИМЕРЫ:
1) $\overrightarrow{a} = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Найти циркуляцию вдоль поля, если
$L : \overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k}, A(a,0,0), B(a,0,2\pi b)$.
Это выглядит примерно так, закрашены две области, которые нас интересуют:



Тогда $\int_L \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \iint_\Sigma rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 ds$.
Посчитаем ротор, он равен $2\overrightarrow{k}$.
Как видно на картинке выше, нас интересуют две области, на которые и делится Σ. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
Рассмотрим по очереди каждую из этих областей:
$\Sigma_1 : x^2 + y^2 = a^2, \overrightarrow{n} = (x, y, 0), rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 = 0$.
$\Sigma_2 : z = 2\pi b, x^2 + y^2 \le a^2, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{k} = \overrightarrow{n}_0, rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 = 2$.
Тогда $\int_L \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \iint_\Sigma rot\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{n}_0 ds = \iint_{\Sigma_2} 2ds = 2\pi a^2$.
2) $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$. Дан куб, ребро имеет длину $= 1$. Найти циркуляцию вдоль ломаной $C_1CDABB_1A_1D_1$.



Замкнем ломаную, добавив отрезок D_1C_1. $L = L_1 \cup D_1C_1$.
За поверхность возьмем грани $ABB_1A_1(\Sigma_1), A_1D_1DA(\Sigma_2)$ и $C_1CDD_1(\Sigma_3)$.
Посчитаем ротор, он равен $-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.
Тогда $\int_L = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}$.
Рассмотрим каждую их областей:
$\Sigma_1 : \overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i}, rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 = 1, \iint_{\Sigma_1} = \iint ds = 1$.
$\Sigma_2 : \overrightarrow{n} = \overrightarrow{j}, rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_2} = \iint ds = -1$.
$\Sigma_3 : \overrightarrow{n} = \overrightarrow{i}, rot\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}_0 = -1, \iint_{\Sigma_3} = \iint ds = -1$.
Сложим, получим, что $\int_L = -1$. Осталось посчитать $\int_{D_1C_1} ydx + zdy + xdz = I$.
$D_1C_1 : x = 1, z = 1$, тогда $dx = 0, dz = 0$.
Отсюда $I = \int_0^1 zdy = 1$. Тогда $\int_{L_1} = \int_L - \int_{D_1C_1} = -2$.

6.2 Примечание к следствию из теоремы Стокса

Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.
Утверждение: следствие выполняется только если область, в которой работаем - линейно-односвязна.
Пример, подтверждающий это:
Дана кривая AB и поле $\overrightarrow{a} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z)$. При этом $rot\overrightarrow{a} = 0$.
Искомое задание кривой:

$$l : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a \end{cases}$$

Посчитаем интеграл $\int_{AB} \overrightarrow{a}d\overrightarrow{r}$:

$$\int_{AB} \overrightarrow{a}d\overrightarrow{r} = \int_l -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + zdz = I$$

Параметризуем кривую:

$$\begin{cases} z = a \\ x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

Тогда $I = \int_0^{2\pi}(\frac{a^2\sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2\cos^2 t}{a^2})dt + 0$ (так как $dz = 0$, ведь z - константа).

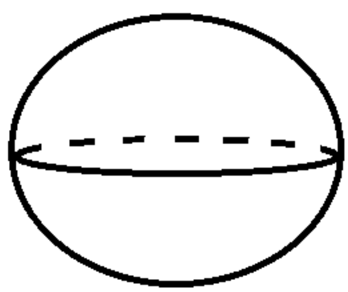
$$I = \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Что и требовалось доказать, ведь при $x = 0, y = 0$ у нас поле не определено, тогда область не является линейно-односвязной.

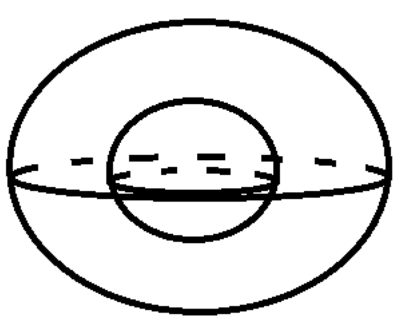
6.3 Линейно Ь поверхностно односвязные области

Определение: область называется линейно-односвязной, если на любой простой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Определение: область G называется поверхностно-односвязной, если для любой простой замкнутой поверхности, ограничивающей некую область Ω, все точки Ω принадлежат G.



шар является примером поверхностно односвязной области.



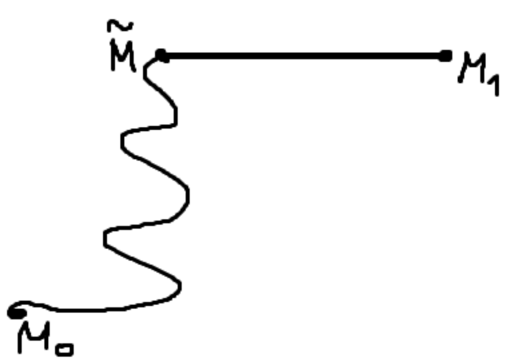
- шар, у которого внутри вырезан шар поменьше является примером поверхностно-неодносвязной области, ведь если взять шар радиусом больше, чем радиус вырезанного шара, но меньше, чем радиус искомого шара, то в нем будут точки из вырезанного шара, которые не принадлежат искомому шару.

7 Потенциальное поле

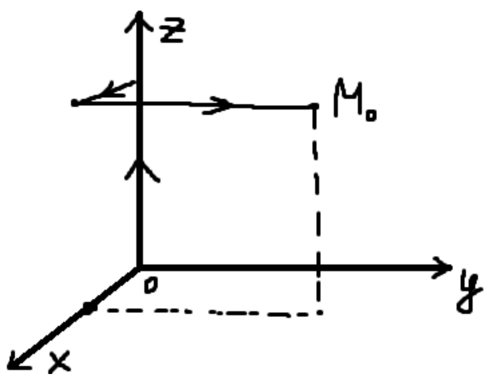
Дано векторное поле $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M)$.
Определение: будем называть $\overrightarrow{a}$ потенциальным, если $\exists U = U(x, y, z)$ такая, что $gradU = \overrightarrow{a}$.
Важно: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla} U$.
Определение: U - скалярный потенциал векторного поля.
Теорема: для того, чтобы $\overrightarrow{a}$ было потенциальным, необходимо и (в случае линейной неодносвязности области, в которой задано поле) достаточно, чтобы $rot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.
Доказательство:
1) Необходимость. Если $\exists U$, то $rot\overrightarrow{a} = rot\ grad\ U = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} U = \overrightarrow{0}$.
То есть, если поле потенциально (есть скалярный потенциал), то ротор равен нулю.
2) Достаточность.
$rot\overrightarrow{a} = 0$, область (пусть будет g) - линейно-односвязна.
Тогда по теореме Стокса $\int_{AB} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r}$ не зависит от пути интегрирования.
Теперь просто попробуем найти скалярный потенциал.
Возьмем некую функцию $\widetilde{U}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ и точку $\widetilde{M} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$.
Выберем их такими, что $\widetilde{U} = \int_{M_0}^{\widetilde{M}} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r}$.
Теперь докажем, что $\widetilde{U}$ - скалярный потенциал поля $\overrightarrow{a}$:
Пусть точка $M_1 = (\widetilde{x} + \triangle x, \widetilde{y}, \widetilde{z})$.
Найдем производную $\widetilde{U}$:

$$\triangle\widetilde{U} = \widetilde{U}(\widetilde{x} + \triangle x, \widetilde{y}, \widetilde{z}) - \widetilde{U}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \int_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0}^{\widetilde{M}} = I$$

Оба интеграла из разности не зависят от пути интегрирования, тогда:
Выберем путь $M_0\widetilde{M}$ свободно, пусть будет каким угодно.
Путь $M_0M_1 = M_0\widetilde{M} \cup \widetilde{M}M_1$.
$\widetilde{M}M_1$ - отрезок, параллельный оси x.
Это выглядит так:



Тогда $I = \int_{\widetilde{M}}^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz$. Но $dy = 0, dz = 0$, так как меняется только x. Тогда $I = \int_{\widetilde{M}}^{M_1} Pdx = \int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{x}+\triangle x} P(x, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = P(\widetilde{x} + \theta \triangle x, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \triangle x$ (по теореме о среднем), где $0 < \theta < 1$.
Тогда $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle \widetilde{U}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} P(\widetilde{x} + \theta \triangle x, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = P(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$.
Аналогично получится и для y и z. Тогда $grad\widetilde{U} = \overrightarrow{a}$, значит, $\widetilde{U}$ - скалярный потенциал, то есть мы нашли искомую функцию, что и требовалось доказать.
Важно: если U - скалярный потенциал, то $U + c$, где $c = const$ - тоже скалярный потенциал.
ПРИМЕР:
$\overrightarrow{a} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$. Задача: убедиться, что данное поле является потенциальным и найти его потенциал.
Решение:
1) $rot\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (здесь нужно вычислить определитель матрицы), следовательно, поле потенциальное.
2) $U = \int_{(0,0,0)}^{(x_0,y_0,z_0)} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3}$. Выберем путь, по которому будем двигаться из точки $(0,0,0)$ в точку (x_0, y_0, z_0): самый хороший путь - это двигаться вдоль координатных осей:



Тогда посчитаем каждый из трех интегралов:
a) $x = 0, y = 0, \Rightarrow dx = 0, dy = 0$. $0 \le z \le z_0$. Тогда $\int_{l_1} = 0dz = 0$.
b) $z = z_0, y = 0, \Rightarrow dz = 0, dy = 0$. $0 \le x \le x_0$. Тогда $\int_{l_2} = \int_0^{x_0} z_0 x = z_0 x_0$.
c) $x = x_0, z = z_0, \Rightarrow dz = 0, dx = 0$. $0 \le y \le y_0$. Тогда $\int_{l_3} = \int_0^{y_0} (x_0 + z_0) = x_0 y_0 + z_0 y_0$.
Сложим три интеграла, получим, что $U = xy + xz + yz$, что и будет ответом.

8 Соленоидальное поле

Дано $\overrightarrow{a}$ - векторное поле, заданное на g - поверхностно-односвязной области.
Определение: векторное поле будем называть соленоидальным, если его поток через любую простую, кусочно-гладкую, замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iint_S \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds = 0$$

Теорема 1: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$div\,\overrightarrow{a} = 0$$

Доказательство:
1)

$$\iint_S \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds = \iiint_V div\,\overrightarrow{a}\,dV = 0, \Rightarrow div\,\overrightarrow{a} = 0$$

2)

$$div\,\overrightarrow{a} = 0, \Rightarrow \iint_S \overrightarrow{a}\overrightarrow{n_0}ds = 0, \Rightarrow \overrightarrow{a} - \text{соленоидальное}$$

Определение: $\overrightarrow{H}$ будем называть векторным потенциалом поля $\overrightarrow{a}$, если $rot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{a}$.
Важно: если $\overrightarrow{H}$ - векторный потенциал, то $\overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{H} + gradU$ (где U - какая-то скалярная функция) - тоже векторный потенциал.
Доказательство:

$$rot\overrightarrow{H_1} = rot(\overrightarrow{H} + gradU) = rot\overrightarrow{H} + rot\ gradU(=0) = rot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{a}$$

Теорема 2: для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал векторный потенциал.
Доказательство:
1)

$$div\,\overrightarrow{a} = div\ rot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = 0$$

А по теореме 1, если дивергенция равна нулю, то поле соленоидальное.
2) $\overrightarrow{a}$ - соленоидальное.
Будем искать $\overrightarrow{H}$ в виде $\overrightarrow{H} = (H_x, H_y, 0)$.

$$rot\overrightarrow{H} = -\overrightarrow{i}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial H_x}{\partial z} + \overrightarrow{k}(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}) = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$$

Отсюда
$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -P, \Rightarrow H_y = -\int Pdz + \varphi(x,y)$ ($\varphi(x,y)$ - произвольная функция).
$\frac{\partial H_x}{\partial z} = Q, \Rightarrow H_x = \int Qdz + \psi(x,y)$ ($\psi(x,y)$ - произвольная функция).

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = R, \Rightarrow -\int P_x dz + \varphi_x(x,y) - \int Q_y dz + \psi_y(x,y)$$

Таким образом, мы нашли $\overrightarrow{H}$.
ПРИМЕР:
$\overrightarrow{a} = 2z\overrightarrow{i} + 3y^2\overrightarrow{k} = (2z, 0, 3y^2)$.
Найти векторный потенциал. Решение:

$H_x = \int 0 + \psi(x, y)$.
$H_y = -\int 2zdz + \varphi(x, y) = -z^2 + \varphi(x, y)$.
$H_z = 0$.

$$-0 + \varphi_x - 0 - \psi_y = 3y^2$$

$$\varphi_x - \psi_y = 3y^2$$

Обе функции произвольные, поэтому, пусть $\varphi \equiv 0, \psi = -y^3$.
Тогда, ответ: $\overrightarrow{H} = (-y^3, -z^2, 0)$.

9 Интегралы с параметрами

Дальше (похоже, до конца семестра) мы будем заниматься интегралами с параметрами.

10 Равномерная сходимость семейства функций

10.1 Определение равномерной сходимости

Дана функция $f(x, y)$ - на первый взгляд, функция двух переменных, однако, $x \in X$ - аргумент, а $y \in Y$ - число, параметр.
Например, если $Y = N$ (натуральные числа), то $f(x, n) = f_n(x)$ - функциональная последовательность.
Возьмем некую точку y_0 - точку сгущения Y (по сути, точка сгущения $\sim$ предельная точка множества).
Тогда функцию $\varphi(x)$, такую, что:

$$\forall x \in X \;\; f(x, y)_{y \to y_0} \to \varphi(x)$$

будем называть **поточечным** пределом функции f.
Определение: $f(x, y)$ сходится равномерно на X при $y \to y_0$, если:
1) $f(x, y)_{y \to y_0} \to \varphi(x) \forall x$ (сходится поточечно).
2)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \;\; \forall x$$

ПРИМЕР:
$f(x, y) = \frac{3x+y}{x+y}; Y = (0; 1), y_0 = 0$. Выяснить, сходится ли равномерно функция на множестве X, если X:
1) $X = (1, 2)$.
Найдем поточечный предел f:

$$\lim_{y \to y_0} f = \frac{3x}{x} = 3 = \varphi(x)$$

Подставим поточечный предел в определение:

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |\frac{3x + y}{x + y} - 3| = \frac{2y}{x + y} < \varepsilon \;\; \forall x \in (1, 2)$$

$$\frac{2y}{x+y} < \frac{2y}{1+y} < \frac{2y}{1} < \varepsilon$$

Тогда возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, значит, мы нашли δ, удовлетворяющую условию, значит, f равномерно сходится на X.
2) $X = (0,1)$.
Докажем, что нет равномерной сходимости на этом множестве. Для этого докажем отрицание определения равномерной сходимости:

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}, x_n = \frac{1}{n+1}$. Тогда $\frac{2y}{x+y} = 1 = \varepsilon_0$. То есть мы нашли ε_0, а значит, доказали отрицание, а значит, f не сходится равномерно на данном X.

10.2 Признаки равномерной сходимости

1) Запишем очевидное неравенство:
Пусть $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in X$. Тогда

$$|f(x,y) - \varphi(x)| \leq sup_{x\in X}|f(x,y) - \varphi(x)| = g(y)$$

Утверждение: семейство функций сходится равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) \Rightarrow |g(y)| < \varepsilon$$

Например, $sup_{x\in(1;2)}\frac{2y}{x+y} = \frac{2y}{1+y} < \varepsilon$. Но
$sup_{x\in(0;1)}\frac{2y}{x+y} = 2$ - не стремится к нулю.
2) Теорема (признак Коши):
Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось на X при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall y', y'' \in U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon\ \ \forall x \in X$$

Доказательство:
$I. \Rightarrow$
Если семейство функций сходится равномерно, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) : |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем две точки из $\overset{o}{U}_\delta(y_0)$ - y' и y''.
Тогда $|f(x,y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,
$|f(x,y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leq |f(x,y') - \varphi(x)| + |f(x,y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Доказано.
$II. \Leftarrow$
Теперь дано условие Коши.
Возьмем $x \in X$ и зафиксируем его. Тогда для фиксированного x выполняется:

$$|f(x, y^{'}) - f(x, y^{''})| < \varepsilon \Rightarrow |g(y^{'}) - g(y^{''})| < \varepsilon$$

Отсюда следует, что у функции g есть предел при $y \to y_0$.
Получается, что для каждого такого фиксированного $x \in X$
$\exists \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$.
Осталось доказать вторую часть определения равномерной сходимости:
Для этого в выражении $|f(x, y^{'}) - f(x, y^{''})| < \frac{\varepsilon}{2}$ перейдем к пределу:
Пусть $y \to y_0$, тогда $|f(x, y^{'}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.
Теорема доказана.
3) Обозначим за $\mapsto$ равномерную сходимость.
Утверждение: для того, чтобы $f(x, y)$ сходилась равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X и при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall y_n \to y_0 \ f(x, y_n) = f_n(x)_{n \to \infty} \mapsto \varphi(x) \ \forall x \in X$$

Здесь y_n - последовательность из Y.
Доказательство:
$I. \Rightarrow$
Если f равномерно сходится, то это значит, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \overset{o}{U}_\delta(y_0) \ |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Возьмем последовательность $y_n \to y_0$ и по δ, которую мы нашли, найдем n_0, такой, что:

$$\forall n \geq n_0 \ y_n \in \overset{o}{U}_\delta(y_0)$$

А это означает, что $\forall x \ |f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.
$II. \Leftarrow$
Теперь дано: $\forall y_n \to y_0 \ f(x, y_n) = f_n(x)_{n \to \infty} \mapsto \varphi(x)$.
Докажем от противного, что $f(x, y) \mapsto \varphi(x)$.
Пусть f сходится, но не равномерно, тогда снова попытаемся доказать отрицание:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0; \exists y_\delta \in U_\delta(y_0); \exists x_\delta \Rightarrow |f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

Поскольку мы наложили условия на x_δ и y_δ, то можем взять какие-то последовательности x_n, y_n, а δ_n взять равное $\frac{1}{n}$.
Тогда:

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

Но это противоречит условию, ведь по условию f_n равномерно сходится к φ. Теорема доказана.
Следствие:
Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x на множестве X, а так же эти $f(x,y) \mapsto \varphi(x)$ при $y \to y_0$ на X.
Тогда $\varphi(x)$ непрерывна на X.
4) Утверждение: если рассматривать $f(x,y)$ на прямоугольнике $[a;b] \times [c;d]$ как функцию двух переменных и предположить, что она на нем непрерывна, то

$$f(x,y)_{y \to y_0} \mapsto \varphi_{y_0}(x)$$

Здесь $y_0 \in [c;d]$.
Доказательство:
Данный прямоугольник - компактное множество. А если функция непрерывна на компакте равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x^{'}, x^{''} : |x^{'} - x^{''}| < \delta ; \forall y^{'}, y^{''} : |y^{'} - y^{''}| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x^{'}, y^{'}) - f(x^{''}, y^{''})| < \varepsilon$$

Возьмем $x^{'} = x^{''} = x, y^{''} = y_0, y^{'} = y$.
Тогда $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$, но $f(x,y_0) = \varphi_{y_0}(x)$, тогда:

$$|f(x,y) - \varphi_{y_0}(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a;b]$$

Но это и означает равномерную сходимость (по определению), что и требовалось доказать.

11 Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x,y)$ - интегрируемая по $x \in [a;b] \ \forall y \in Y$.
Тогда рассмотрим интеграл:
$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ - собственный интеграл с параметром y.
Свойства:
1) Теорема 1: если $f(x,y) \mapsto \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Эта теорема дает нам возможность менять местами знаки предела и интеграла в случае, когда f равномерно сходится:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx$$

Доказательство:
Оценим $|I(y) - \int_a^b \varphi(x)dx|$:

$$|I(y) - \int_a^b \varphi(x)dx| \ |\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx| =$$

$$= |\int_a^b (f(x,y)-\varphi(x))dx| \leq \int_a^b |(f(x,y)-\varphi(x))|dx$$

Но $f(x,y) \mapsto \varphi(x) \Rightarrow |f(x,y)-\varphi(x)| < \varepsilon$.
Пусть $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{b-a}$:

$$\int_a^b |(f(x,y)-\varphi(x))|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$$

Значит, $\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \varphi(x)dx$, что и требовалось доказать.
Следствия:
a) Если f непрерывна на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$, то можно переставить знаки интегрирования и предела местами.
b) Если в точке y_0 $f(x,y)$ непрерывна, то из того, что $f(x,y)\mapsto\varphi(x)$ следует, что:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b f(x,y_0)dx = I(y_0)$$

Отсюда следует, что I непрерывен в точке y_0 (по определению непрерывности в точке).
2) Теорема 2: если $f(x,y)$ непрерывна относительно x и y на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ можно интегрировать по y:

$$\exists \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Это повторные интегралы для двойного интеграла $\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)dxdy$.
Другими словами,

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dydx$$

3) Теорема 3:
Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x на $[a;b]$ для любых y из $[c;d]$, а $f_y'(x,y)$ непрерывна по x и y на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$.
Тогда существует $I_y'(y)$ $\forall y\in[c;d]$:

$$I_y'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)dx$$

То есть, другими словами, можно поменять дифференцирование и интегрирование местами:
$(\int f)' = \int f'$ - это называется правило Лейбница.
Доказательство:

$$I_y'(y_0) = \lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle I(y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y\to 0}\frac{I(y_0+\triangle y)-I(y_0)}{\triangle y} =?$$

Распишем $\frac{\triangle I(y_0)}{\triangle y}$:

$$\frac{\triangle I(y_0)}{\triangle y} = \frac{\int_a^b f(x, y_0 + \triangle y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx}{\triangle y} =$$

$$= \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \triangle y) - f(x, y_0)}{\triangle y} dx = \int_a^b \frac{f_y'(x, y_0 + \theta \triangle y)\triangle y dx}{\triangle y} =$$

$$= \int_a^b f_y'(x, y_0 + \theta\triangle y)dx,\ 0 < \theta < 1 (\text{по теореме о среднем})$$

Тогда $I_y'(y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \int_a^b f_y'(x, y_0 + \theta\triangle y)dx = \int_a^b \lim_{\triangle y \to 0} f_y'(x, y_0 + \theta\triangle y)dx =$
$= \int_a^b f_y'(x, y_0)dx$, что и требовалось доказать.
Замечание:
Если пределы интегрирования зависят от y, вот таким образом:

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)dx = F(y, u, v)$$

Тогда $\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} = \int_u^v f'(x, y)dx + f(v, y)v_y' - f(u, y)u_y'$.
Это следует из теоремы Барроу (по словам некоторых, самой великой теоремы матанализа, а значит надо учить):
Теорема Барроу:

$$(\int_a^x f(t)dt)_x' = f(x)$$

$$(\int_x^b f(t)dt)_x' = f(-x)$$

ПРИМЕРЫ (здесь их много, 5 штук):
1) $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)dx;\ y \in (0; 1]$.
Посчитаем этот интеграл:

$$\int_0^1 \ln(x^2 + y^2)dx = x\ln(x^2 + y^2)|_0^1 - 2\int \frac{xdx}{x^2 + y^2} = \ln(1 + y^2) - 2 + y \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

Хотим узнать, как эта функция ведет себя в нуле, устремим y к нулю, тогда $I(y) \to 0$, то есть, 0 - точка устранимого разрыва.
Тогда $I(y) = \begin{cases} \ln(1 + y^2) - 2 + y\operatorname{arctg}\frac{1}{y}, y \neq 0 \\ -2, y = 0 \end{cases}$.
Значит, $I(y)$ непрерывна на $[0; 1]$.
Теперь проверим дифференцируемость:
$y \neq 0, y \in [\delta; 1]$. Тогда на прямоугольнике $[0; 1] \times [\delta; 1]$ функция $\ln(x^2 + y^2)$ непрерывна по y, а функция $\frac{2y}{x^2+y^2}$ непрерывна по x и по y.

Тогда $I'_y(y) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}$, рассмотрим её поведение в нуле:
$y_0 = 0$.

$$I'_y(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} = \frac{y}{1+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

Очевидно, эта функция не непрерывна в нуле, устремим y к нулю, тогда $I'_y(0) \to \frac{\pi}{2}$.
С другой стороны, $I'_y(0) = \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx = 0$.
Получили разные ответы. Это потому, что на самом деле мы не могли здесь пользоваться теоремой, ведь нарушается условие непрерывности f'_y по x и по y.
2) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, \ b > a > 0$.

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

Тогда $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_0^1 dy \int_a^b x^y dx = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{b+1}{a+1}$.
С другой стороны,

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx \Rightarrow I'_b(a,b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1}|_0^1 = \frac{1}{b+1}$$

Тогда $\int I'_b(a,b) = \int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C$. Найдем C:

$$I(a,a) = \ln(a+1) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln(a+1)$$

Отсюда $I(a,b) = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}$, получили то же самое.
3) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.
Рассмотрим $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}, \text{тогда} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)g(x)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)g(x)dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^{-\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1}(\text{подстановка Абеля}) = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2(y^2+1)+1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(t\sqrt{y^2+1})}{\sqrt{y^2+1}}|_0^{\infty} dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}}dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

Второй способ:
Найдем I'_y:

$$I'_y = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

Получили производную, осталось найти саму функцию:

$$I(y) = \int I_y^{'} = \frac{\pi}{2}\ln(y + \sqrt{y^2+1}) + C$$

Найдем C:
$I(0) = 0, \Rightarrow C = 0$, а наша цель - $I(1)$.

$$I(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

4) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t)dt, a > 0$.

$$I_y^{'}(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 t}dt = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2-\sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$I(a) = \int I_y^{'} = \pi\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C$$

С другой стороны, $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t))dt = \pi\ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t)dt$
Устремим a к $+\infty$, тогда $\ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t) \to 0$. Выясним, равномерно ли сходится семейство функций:

$$|\ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t)| \le |\ln(1 - \frac{1}{a^2})| < \varepsilon$$

Следовательно, сходимость равномерная.
Тогда $C = I(a) - \pi\ln(a+\sqrt{a^2-1}) = \pi\ln a - \pi\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t)dt = \pi\ln\frac{a}{a+\sqrt{a^2-1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 t)dt$.
При $a \to \infty$ первое слагаемое стремится к $\ln\frac{1}{2}$, а второе к нулю, тогда $C = \ln\frac{1}{2}$, а $I(a) = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

12 Несобственный интеграл

12.1 Определение несобственного интеграла

Возьмем интеграл $\int_a^b f(x)dx$, у которого либо $b = +\infty$, либо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$.
При этом $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$, где $a < c < b$.
Определение:
Предел $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$ будем называть несобственным интегралом. Если этот предел существует, то будем говорить, что интеграл сходится, иначе расходится.
Теперь рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y), x \in [a;b]$,
$-\infty < b \le +\infty$.
Тогда существует $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x,y)dx$.
ПРИМЕР:

$$I(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}dx = \int_0^\infty e^{-xy}d(xy) = e^{-xy}|_0^\infty = 1$$

То есть, $\int_0^\infty = \begin{cases} 0, y = 0 \\ 1, y \neq 0 \end{cases}$.

Определение: будем говорить, что несобственный интеграл сходится равномерно на Y, если:

1) Он сходится.

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, b - \delta > a, \forall c\ 0 < b - \delta < c < b : |\int_c^b f(x,y)dx| < \varepsilon\ \forall y \in Y$.

ПРИМЕРЫ:

1) $\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

Оценим этот интеграл:

$$|\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx| \leq \int_1^\infty \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \varepsilon$$

Тогда этот интеграл равномерно сходится.

2) $\int_0^\infty ye^{-xy}dx$.

Докажем, что этот интеграл не сходится равномерно, для этого докажем отрицание определения:

$$\exists \varepsilon_0\ \forall \delta\ \exists C_\delta; \exists y_\delta : |\int_{c_\delta}^\infty y_\delta e^{-xy_\delta}dx| \geq \varepsilon_0$$

Пусть $xy_\delta = t$:

$$I = \int_{c_\delta y_\delta}^\infty e^{-t}dt = e^{-c_\delta y_\delta}$$

Отсюда очевидно, что можно найти C_δ и y_δ такие, что $e^{-c_\delta y_\delta} \geq \varepsilon_0$, тогда интеграл не сходится равномерно.

12.2 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

1) Признак Коши.

Утверждение: для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходился на Y, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall c_1, c_2\ a < b - \delta < c_1, c_2 < b : |\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)dx| < \varepsilon\ \forall y \in Y$$

Доказательство:

$I. \Rightarrow$

Пусть $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. Тогда по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall c\ a < b - \delta < c < b : |\int_a^b f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем два разных c: c_1 и c_2 такие, что $a < b - \delta < c_1, c_2 < b$, тогда:

$$|\int_{c_1}^{c_2} \leq |\int_{c_1}^{b}| + |\int_{b}^{c_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.
$II. \Leftarrow$
Теперь нам дано, что $|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Пусть $c_2 \to b - 0$, тогда

$$|\int_{c_1}^{\infty} f(x,y)dx| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall y \in Y$$

Что и требовалось доказать.
2) Признак Вейерштрасса:
Утверждение: если существует функция $\varphi(x)$, которая не имеет особых точек кроме b, а так же $\int_a^b \varphi(x)$ сходится, то и интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно.
Доказательство:
Используем признак Коши, оценим интеграл:

$$|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)dx| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f(x,y)|dx \leq \int_{c_1}^{c_2} \varphi(x)dx < \varepsilon$$

Тогда по признаку Коши этот интеграл сходится равномерно.
В следующих двух признаках дан интеграл $I = \int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$, а так же некоторые условия.
В доказательстве обоих понадобится следующая выкладка:
Распишем $\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)g(x,y)dx$:

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(c_1,y)\int_{c_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(c_2,y)\int_{\xi}^{c_2} f(x,y)dx$$

$$|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)g(x,y)dx| \leq |g(c_1,y)| \cdot |\int_{c_1}^{\xi} f(x,y)dx| + |g(c_2,y)| \cdot |\int_{\xi}^{c_2} f(x,y)dx|$$

3) Признак Абеля.
а) $g(x,y)$ монотонна по x.
$|g(x,y)| < C$
б) $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.
Утверждение: I сходится равномерно.
Доказательство:
$f(x,y)dx$ сходится равномерно, а $|g(c_1,y)| < C;\ |g(c_2,y)| < C$.
Тогда по признаку Коши:

$$|\int_{c_1}^{\xi} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2C};\ |\int_{c_2}^{\xi} f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

Отсюда $|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)g(x,y)dx| < \frac{C\varepsilon}{2C} + \frac{C\varepsilon}{2C} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.
4) Признак Дирихле.
а) $g(x,y)$ монотонна по x.
$g(x,y)_{x \to b-0} \mapsto 0$.

б) $|\int_a^c f(x,y)dx| \le M$.
Утверждение: I сходится равномерно.
Доказательство:
По условию, $|\int_a^c f(x,y)dx| \le M$.
Так как g равномерно сходится, то $\begin{cases} |g(c_1,y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ |g(c_2,y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$.
Отсюда $|\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)g(x,y)dx| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$, что и требовалось доказать.
ВАЖНО:
На лекции мы договорились, что можно не отличать признак Абеля от признака Дирихле при решении задач. Вместо этого можно писать/говорить "по признаку Дирихле-Абеля".
ПРИМЕРЫ:
1) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx, a \in [\delta; +\infty), \delta > 0$

$$f(x,a) = \sin ax, g(x) = \frac{1}{x}$$

a) g - монотонна, не зависит от a и равномерно стремится к нулю при $x \to \infty$.
b) Проверим условие $|\int f(x,a)dx| < C$:

$$|\int f(x,a)dx| = |\int \sin axdx| = |-\frac{1}{a}\cos ax| \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{\delta}$$

Оба условия выполнены, следовательно, по признаку Дирихле исходный интеграл сходится равномерно на данном промежутке.
2) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx, a \in [0; +\infty)$, докажем, что этот интеграл не сходится равномерно.
Пусть $ax = t$, тогда $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sin ax}{x}dx = \int_{a\xi_1}^{a\xi_2} \frac{\sin t}{t}dt$
Пусть теперь $a = \frac{1}{n}, \xi_1 = 2\pi n, \xi_2 = 3\pi n$.
Тогда $\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}dt \ge \frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi} \sin tdt = \frac{2}{3\pi} = \varepsilon_0$
Таким образом, мы доказали отрицание произнака Коши, а значит интеграл не сходится равномерно.
3) $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx, a \ge 0$.
a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, это интеграл Дирихле.
b) $|e^{-ax}| \le 1, e^{-ax}$ монотонно не возрастает
Тогда по признаку Абеля интеграл $I(a)$ сходится равномерно на данном промежутке.

13 Свойства несобственных интегралов с параметром

1) Теорема 1:
Пусть :
a) $f(x,y)$ интегрируема по x на каждом промежутке вида $[a; b']$,
$a < b' < b$.
b) $f(x,y)_{y \to y_0} \mapsto \varphi(x), \exists \int_a^b \varphi(x)dx$

c) $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно
Утверждение: допустим предельный переход:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Доказательство:
a) $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно, тогда

$$\exists b^{'} : |\int_{b^{'}}^b f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall y \in Y$$

b) $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, тогда

$$\exists b^{''} : |\int_{b^{''}}^b \varphi(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$$

c) $|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx| \leq |\int_a^{b^{'}} (f(x,y) - \varphi(x))dx| + |\int_{b^{'}}^b f(x,y)dx| + +|\int_{b^{'}}^b \varphi(x)dx| = I$
Но так как $f(x,y) \mapsto \varphi(x)$, то $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b^{'}-a)}$, тогда:

$$I < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.
Следствие:
Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b)\times[c;d]$, то если $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно, то $\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx$
2) Теорема 2:
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b) \times [c;d]$, а так же $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится.
Утверждение: $\exists \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$
Доказательство:
a) $I(y)$ непрерывна (по теореме 1), тогда $\exists \int_c^d I(y)dy$
b) Если взять какую то точку $b^{'}$, не особую, то интеграл $\int_a^{b^{'}}$ - собственный и по одной из теорем выше:

$$\int_c^d dy \int_a^{b^{'}} f(x,y)dx = \int_a^{b^{'}} dx \int_c^d f(x,y)dy$$

c) Докажем, что $\int_c^d dy \int_a^{b^{'}} f(x,y)dx \to_{b^{'}\to b-0} \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx$:
Для этого составим разность этих величин:

$$|\int_c^d dy \int_a^{b^{'}} dx - \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx| = |\int_c^d (\int_a^{b^{'}} - \int_a^b)| = |\int_c^d dy \int_b^{b^{'}} | \leq$$

$$\le |\int_c^d dy|\int_{b'}^b f(x,y)dx|| = I$$

Вспомним, что у нас $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится, используем это:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0\ b^{'} > b_0 : |\int_{b'}^b f(x,y)dx| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

Тогда $I < \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$, что и требовалось доказать.
3) Теорема 3:
Дано:
a) $f(x,y)$ непрерывна $[a;b)\times[c;d]$
b) $f(x,y)$ дифференцируема по y, а $f_y^{'}$ непрерывна на $[a;b)\times[c;d]$
c) $\int_a^b f(x,c)dx$ сходится
d) $\int_a^b f_y dx$ сходится равномерно
Утверждение:
$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c;d]$, а так же $\frac{dI}{dy} = \int_a^b f_y dx$
Доказательство:
Возьмем какую-то точку y на отрезке $[c;d]$, $F(t) = \int_a^b f_y(x,t)dx, c \le t \le y$.
Тогда по теореме 2 мы имеем право интегрировать $F(t)$ на промежутке $[c;y]$:

$$\int_c^y F(t)dt = \int_c^y dt \int_a^b f_y(x,t)dx = \int_a^b dx \int_c^y f_y(x,t)dt =$$

$$= \int_a^b dx(f(x,y) - f(x,c)) = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,c)dx = \int_a^b f(x,y)dx + c_0$$

Отсюда $F(y) = \int_a^b f_y(x,y)dx$
С другой стороны, $F(y) = (\int_a^b f(x,y)dx + c_0)_y^{'}$
Значит, $\int_a^b f_y(x,y)dx = (\int_a^b f(x,y)dx)_y^{'}$, что и требовалось доказать.
4) Теорема 4:
Пусть:
a) $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a;b)\times[c;d)$
b) $\int_a^b |f(x,y)|dx$ сходится равномерно на любом $[c^{'};d^{'}] \subset [c;d)$
c) $\int_c^d |f(x,y)|dx$ сходится равномерно на любом $[a^{'};b^{'}] \subset [a;b)$
d) Сходится $\int_a^b dx \int_c^d |f(x,y)|dy$ **или** $\int_c^d dy \int_a^b |f(x,y)|dx$
Утверждение:
Сходятся оба повторных интеграла:
$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$
$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$
и они равны между собой.

Доказательство:

I. $f \geq 0$, пусть для определенности сходится $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$, тогда $\int_a^b dx \int_{c'}^{d'} f(x,y)dy = \int_{c'}^{d'} dy \int_a^b f(x,y)dx$ по теореме 2.

Так как $f \geq 0$, то чем больше промежуток интегрирования, тем больше сам интеграл, тогда $\int_{c'}^{d'} f(x,y)dy \leq \int_c^d f(x,y)dy$, тогда

$$\int_a^b dx \int_{c'}^{d'} f(x,y)dy = \int_{c'}^{d'} dy \int_a^b f(x,y)dx \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

То есть, существует $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$

При этом $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.

С другой стороны, $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \leq \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$.

Отсюда следует, что эти интегралы равны.

II. f любого знака.

Тогда введем две функции:

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}$$

$$f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

Отсюда $f = f^+ - f^-$, тогда поскольку каждая из этих функций положительна, то для них выполняется условие I, а значит, и для их линейной комбинации выполняется это же условие.

ПРИМЕРЫ:

Интегралы ниже **очень** важны, их скорее всего будут спрашивать на экзамене, либо они будут напрашиваться в рубежном тестировании.

1) Интеграл Дирихле.

$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Для того, чтобы посчитать этот интеграл, нужно посчитать интеграл с параметром $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx, a \geq 0, I(a)$ - непрерывна, а затем устремить параметр a к нулю

Пусть $a \geq \delta > 0; I'(a) = -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx$, тогда этот интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Вычислим его:

$I'(a) = -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = -\frac{1}{1+a^2}$, тогда $I(a) = -\operatorname{arctg} a + c$.

Устремим a к $+\infty$, тогда $I(a) \to -\frac{\pi}{2} + c$

С другой стороны $I(a) \to 0$ (если в исходном интеграле устремить a к $+\infty$)

Отсюда следует, что $c = \frac{\pi}{2}$

$I(a) = -\operatorname{arctg} a + \frac{\pi}{2}$, устремим $a \to 0, I(0) = I = \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

2) Интеграл Дирихле с параметром.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, если $a > 0$, так как можно заменить ax на t и $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Если $a < 0$, то $-\int_0^\infty \frac{\sin |ax|}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$

Если $a = 0$, то $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = 0$

Обобщим это:
$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}sign(a)$
3) Интегралы Лапласа.
Это два таких интеграла:
a) $I_1(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$
b) $I_2(a) = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx$
Первый интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, для любых a.
Второй интеграл сходится равномерно по признаку Дирихле для $a \geq \delta > 0$.
Найдем производную от $I_1(a)$:
$I_1'(a) = -\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx = -I_2(a)$, а этот интеграл сходится равномерно, тогда можно брать производную для всех $a \geq \delta > 0$.
Избавимся от x во втором интеграле:

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)}$$

Тогда $\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}dx$
Отсюда $I_2'(a) = -\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} = -I_1(a)$, а этот интеграл сходится равномерно, тогда можно брать производную для всех $a \geq \delta > 0$.
Дальше можем найти $I_1''(a)$, она равна $I_1(a)$. Теперь решим диффур, выясним, что $I_1(a) = c_1e^a + c_2e^{-a}$.

$$|I_1(a)| \leq |\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}| \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow c_1 = 0, \Rightarrow I_1(a) = c_2e^{-a}$$

Но $I_1(0) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = c_2, \Rightarrow I_1(a) = \frac{\pi}{2}e^{-a}, a \geq \delta > 0$
Отсюда $I_2(a) = -I_1'(a) = \frac{\pi}{2}e^{-a}, a \geq \delta > 0$.
При $a = 0$ $I_1 = \frac{\pi}{2}, I_2 = 0$.
При $a < 0$:
$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos |a|x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$.
$I_2 = -\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$.
Обобщим это:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}sign(a)$$

4) Интеграл Эйлера-Пуассона.
$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$
Сделаем замену $x = ty, y \geq 0$

$$I = y\int_0^\infty e^{-t^2y^2}dt$$

$$e^{-y^2}I = ye^{-y^2}\int_0^\infty e^{-t^2y^2}dt = \int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)}dt$$

Интеграл $\int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)}dt$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, кроме того равномерно сходится и интеграл $\int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)}dy$

Проинтегрируем обе части:

$$I\int_0^\infty e^{-y^2} = \int_0^\infty dy\int_0^\infty ye^{-y^2(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)}dy^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Заметим, что у нас $I\int_0^\infty e^{-y^2} = I^2$, так как второй множитель - по сути, тот же I, только вместо x стоит y.

Тогда $I^2 = \frac{\pi}{4}, \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5) Интегралы Френеля.

Это два таких интеграла:

a) $I_1 = \int_0^\infty \sin x^2 dx$

b) $I_2 = \int_0^\infty \cos x^2 dx$

Сделаем замену $x^2 = t$, отсюда $x = \sqrt{t}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}, I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}$ - этот интеграл сходится по признаку Дирихле-Абеля.

$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t dt}{\sqrt{t}}$ - сходится (можно разбить на два интеграла по смежным промежуткам, оба будут сходиться).

Теперь вычислим оба интеграла:

a) $I_1(a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-at}dt, a \geq 0$

Вычислим этот интеграл, для этого возьмем интеграл Эйлера-Пуассона и заменим x на $y\sqrt{t}$:

$\int_0^\infty e^{-y^2t}\sqrt{t}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, отсюда $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2t}dy$.

Тогда $I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin te^{-at}dt\int_0^\infty e^{-y^2t}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\int_0^\infty \sin te^{-t(y^2+a)}dy$ - сходится равномерно по t и по y.

Тогда можно поменять порядок:

$$I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty \sin te^{-t(y^2+a)}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+(y^2+a)^2}$$

Тогда $I_1 = \lim_{a\to 0} I_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$

Вольфрамируем, получаем, что $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, тогда

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

b) Считается абсолютно так же. Ответ абсолютно такой же.

6) Интегралы Фруллани.

Это интегралы вида $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx, a > 0, b > 0, f(x)$ - непрерывна на $[0; +\infty)$.

Рассмотрим три случая:
I. Пусть $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = f(+\infty)$.

$$\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}dx =$$
$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}dt = I$$

Разобьем каждый интеграл на два: $\int_{a\delta}^{a\Delta} = \int_{a\delta}^{b\delta} + \int_{b\delta}^{a\Delta}$; $\int_{b\delta}^{b\Delta} = \int_{b\delta}^{a\Delta} + \int_{a\Delta}^{b\Delta}$.
Тогда $I = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} = f(\xi_1)\ln\frac{b}{a} - f(\xi_2)\ln\frac{b}{a}$(по теореме о среднем).
Устремим δ к нулю, тогда $\Delta \to \infty$:

$$I = f(0)\ln\frac{b}{a} - f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

II. Пусть $\exists \int_A^\infty \frac{f(x)}{x}dx \ \forall A$.

$$\int_\delta^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_\delta^\infty \frac{f(ax)}{x}dx - \int_\delta^\infty \frac{f(bx)}{x}dx =$$
$$= \int_{a\delta}^\infty \frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\delta}^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

Устремим δ к нулю, тогда $I = f(0)\ln\frac{b}{a}$.
III. Пусть $\exists \int_0^A \frac{f(t)}{t}dt \ \forall A$.

$$\int_0^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_0^\Delta \frac{f(ax)}{x}dx - \int_0^\Delta \frac{f(bx)}{x}dx =$$
$$= \int_0^{a\Delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int_0^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}dt = \int_{b\Delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\ln\frac{a}{b}$$

Устремим Δ к $+\infty$: $I = f(+\infty)\ln\frac{a}{b} = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$.
<u>ПРИМЕРЫ</u>:
1) $\int_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x}dx$. Здесь справедлив второй случай, тогда
Ответ: $f(0)\ln\frac{b}{a} = 0$.
2) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$. Здесь также справедлив второй случай, тогда
Ответ: $f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$.

14 Эйлеровы интегралы (гамма и бета функции)

I. <u>Гамма функции</u>.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0$$

$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$
Рассмотрим $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt, x \in [a;b], a > 0$, тогда $e^{-t} \le 1, t^{x-1}$ - показательная по x, она убывает, тогда $t^{x-1} \le t^{a-1}$, следовательно,
$0 < t^{x-1}e^{-t} \le t^{a-1}$.
А интеграл $\int_0^1 t^{a-1}dt$ сходится, тогда $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ равномерно сходится на $[0;1]$.
Возьмем второй интеграл и тоже постараемся оценить подынтегральное выражение:
$t^{x-1}e^{-t} \le t^{b-1}e^{-t}$, а интеграл $\int_1^\infty t^{b-1}e^{-t}dt$ сходится, тогда и интеграл $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ сходится равномерно по Вейерштрассу.
<ins>Свойства гамма функции</ins>.
1) Гамма функция непрерывна $\forall x > 0$.
2) $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$. Докажем это:
Рассмотрим $\int_0^1 : |t^{x-1}e^{-t}\ln t| \le |t^{a-1}\ln t|, |\ln t| < \frac{1}{t^s}\ \forall s > 0$, тогда
$|t^{a-1}\ln t| \le t^{a-s-1}$, а интеграл $\int_0^1 t^{a-s-1}$ сходится, тогда и наш интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу.
Аналогично, второй интеграл, $\int_1^\infty$:
$t^{x-1}e^{-t}\ln t \le t^{b-1}e^{-t}t \le t^b e^{-t}$, а интеграл от этого выражения сходится, тогда и наш интеграл сходится равномерно по Вейерштрассу.
Значит, дифференцирование законно.
$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2 dt > 0$, значит, вторая производная выпуклая вниз. Отсюда можем сделать вывод, что первая производная $\Gamma'(x)$ возрастает.
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1,\ \Gamma(2) = \int_0^\infty te^{-t}dt = 1$.
Тогда если соединить эти факты (вторая производная выпукла, а так же в 1 и 2 значение $=$ 1), то выясняется, что между точками 1 и 2 существует глобальный минимум второй производной.
3) Основное свойство гамма функции.
$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = 0 + x\Gamma(x)$
Таким образом, формулируем основное свойство гамма функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Отсюда $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.
Устремим x к нулю справа: $x \to 0+0$. Тогда $\Gamma(x+1) \sim \Gamma(1) = 1$, а $\frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}$.
Отсюда же следует, что если $x \to +\infty$, то и $\Gamma(x) \to +\infty$.
4) Благодаря предыдущему свойству мы можем искусственно продолжить гамма функцию на отрицательную область.
Возьмем $-1 < x < 0$, тогда $0 < x+1 < 1$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, аналогично можем продолжать ее на $-2 < x < -1, \cdots, -n < x < -n+1$.
Пусть $x+1 = y, x = y-1, x \to 0$, тогда $\Gamma(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{y-1} \sim \frac{1}{y-1} \sim \frac{1}{x}$.

Пусть теперь $x \to -1, y \to +0$, тогда $\Gamma(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{-1} \sim -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x+1}$.
Аналогично, далее на промежутках знаки будут меняться. TODO: график гамма функции.
II. Бета функции.

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ x,y>0$$

$\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$, оба интеграла сходятся, поэтому и бета функция сходится.
Свойства бета функции.
1) Бета функция симметрична относительно параметров:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$t' = 1-t$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-t')^{x-1}t'^{y-1}dt' = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = \beta(y,x)$$

2) Основное свойство бета функции.
Для $y>1$ справедливо $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}dt$
Запишем t^x в виде $t^x = t^x - t^{x-1} + t^{x-1} = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$, тогда

$$\frac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}dt = \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}dt - \frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt =$$

$$= \frac{y-1}{x}\beta(x,y-1) - \frac{y-1}{x}\beta(x,y)$$

Тогда $\frac{x+y-1}{x}\beta(x,y) = \frac{y-1}{x}\beta(x,y-1)$.
Тогда для $y>1$ справедливо $\beta(x,y) = \frac{y-1}{x+y-1}\beta(x,y-1)$.
В силу симметрии для $x>1$ справедливо $\beta(x,y) = \frac{x-1}{x+y-1}\beta(x-1,y)$
3) Еще одно представление бета функции:
Пусть $t = \frac{u}{1+u}, dt = \frac{du}{(1+u)^2}$

$$\beta(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x-1}(1+u)^{y-1}(1+u)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

4) Еще одно представление бета функции:
Разделим интеграл, полученный в прошлом пункте, на сумму двух:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

Рассмотрим второй интеграл, сделаем замену $u = \frac{1}{t}$, тогда

$$-\int_1^0 \frac{t^{x+y}dt}{t^{x-1}(1+t)^{x+y}t^2} = \int_0^1 \frac{u^{y-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

Тогда $\beta(x,y) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du$

5) Пусть $0 < x < 1$:

$$\beta(x,1-x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

6) Связь гамма и бета функций.

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

Заменим $t = (1+u)v$, новая переменная интегрирования - v. Тогда

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (1+u)^x v^{x-1}e^{-(1+u)v}dv = (1+u)^x \int_0^\infty v^{x-1}e^{-(1+u)v}dv$$

Вместо x подставим $x+y$:

$$\Gamma(x+y) = (1+u)^{x+y} \int_0^\infty v^{x+y-1}e^{-(1+u)v}dv$$

Поделим обе части на $(1+u)^{x+y}$:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} = \int_0^\infty v^{x+y-1}e^{-(1+u)v}dv$$

Домножим на u^{x-1} и проинтегрируем от 0 до $+\infty$:

$$\beta(x,y)\Gamma(x+y) = \int_0^\infty u^{x-1}du \int_0^\infty v^{x+y-1}e^{-v}e^{-uv}dv = \int_0^\infty e^{-v}v^{x+y-1}dv \int_0^\infty u^{x-1}e^{-uv}du$$

Заменим $uv = t$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{v^x}e^{-t}dt = \frac{1}{v^x}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(x)}{v^x}$$

Тогда:

$$\int_0^\infty e^{-v}v^{x+y-1}dv \int_0^\infty u^{x-1}e^{-uv}du = \Gamma(x) \int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

И таким образом,

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x) - \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

<u>ПРИМЕРЫ</u>:

1) $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi, \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{2xdx}{x} = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (Интеграл Пуассона).
2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^{\frac{1}{3}} x x dx = ?$
Пусть $\sin^2 x = t$:
$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^{\frac{1}{3}} x x dx = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{1}{6}} dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2}\beta(\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$.