# Конспект по матанализу за 4-й семестр.

Автор: Эмиль

8 февраля 2019 г.

Это конспект по матанализу за 4-й семестр. Любые предложения и сообщения об ошибках приветствуются, писать автору: t.me/buraindo24

# 1 Поверхность

## 1.1 Поверхность

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ - кривая - отображение промежутка $< \alpha, \beta > \to R^3$ (или $R^2$).
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ - поверхность - отображение области $\Omega \subset R^2 \to R^3(x, y, z)$.
Записывается $\overrightarrow{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.
Для всех рассуждений будем предполагать, что $x, y, z$ имеют непрерывные производные, а так же $rank \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 2$.
Если ранг равен 2, то поверхность назовем "хорошей", иначе, если ранг равен 1, то "плохой".
И тогда будем говорить, что $\overrightarrow{r}(t)$ - гладкая.
$\Omega \to \overrightarrow{r}(\Omega)$ - образ.
Если $\Omega$ отображается на свой образ $\overrightarrow{r}(\Omega)$ взаимно-однозначно, то $\overrightarrow{r}(\Omega)$ - **простая** поверхность.
**ПРИМЕР:**
$z = x^2 + y^2$ - параболоид, тогда $\overrightarrow{r} = (x, y, x^2 + y^2)$.
В общем виде это задание будет выглядеть так:

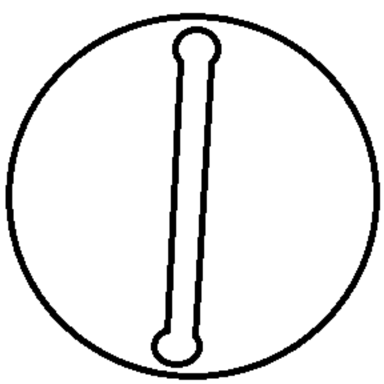
$$\overrightarrow{r} = (x, y, f(x, y))$$

## 1.2 Край поверхности

Пусть $\Omega$ - ограниченная область, $\overrightarrow{\Omega}$ - замыкание $= \Omega \cup \partial\Omega$ (область плюс её граница).
Рассмотрим теперь $\partial\Omega$ - границу $\Omega$:
$\partial\Omega : (u(t), v(t))$ - какая-то линия.
$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u(t), v(t))$ - кривая, **край** поверхности, являющийся образом $\partial\Omega$.
Будем обозначать за $\Sigma$ саму поверхность $\overrightarrow{r}(u, v)$, а за $\partial\Sigma$ её край - $\overrightarrow{r}(u(t), v(t))$.

## 1.3 Почти простая поверхность

Будем называть поверхность $\Omega \to \overrightarrow{r}(u, v)$ **почти простой**, если найдется такая исчерпывающая последовательность $\Omega_n$, для которой каждая $\Omega_n \to \overrightarrow{r}(u, v)$ - простая поверхность.
Например, сфера и конус - не простые поверхности, но их можно немного изменить, чтобы они стали почти простыми:
<u>Сфера</u>:

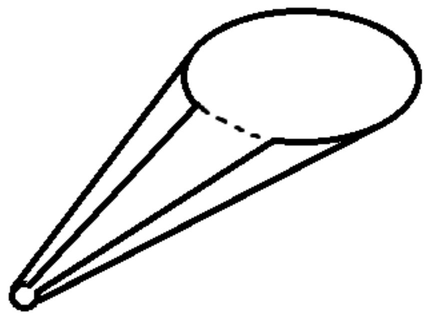


Вырежем из северного и южного полюсов сферы кружочки, а затем разрежем её от одного кружочка до другого. Этим действием мы немного изменили промежутки принимаемых углами $\varphi$ и $\theta$ значений в сферических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.
Конус:



Вырежем вершину конуса и разрежем его по вертикали. Этим действием мы немного изменили промежутки допустимых значений для радиуса $r$ и угла $\varphi$ в цилиндрических координатах, к которым мы и перейдем. Таким образом, теперь промежутки допустимых значений:

$$\frac{1}{n} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{n} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$$

И теперь новая поверхность является простой.

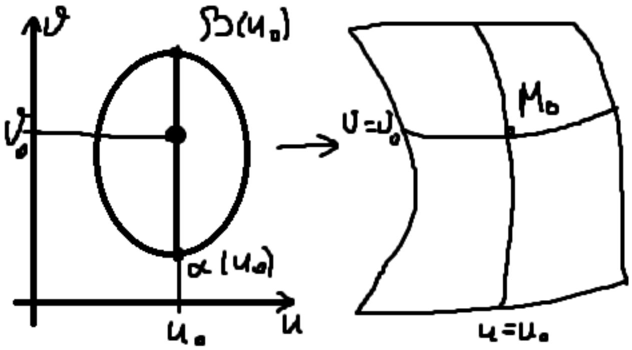
## 1.4 Функции, задающие одну и ту же поверхность

Пусть даны $\Omega$ и $\Omega'$, а так же соответствия $u = u(u', v'), v = v(u', v')$.
Кроме того, пусть якобиан $\begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$ не равен 0 (то есть, существует обратная функция).
Это значит, что $\Omega$ отображается на $\Omega'$ взаимно-однозначно.
В таком случае будем считать, что

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{r}(u(u', v'), v(u', v')) = \overrightarrow{\varrho}(u', v') - \Sigma$$

(задают одну и ту же поверхность).

## 1.5 Координатные кривые




Зафиксируем одну из координат, например, $u = u_0$, и будем менять $v$ от $\alpha(u_0)$ до $\beta(u_0)$. Получим кривую $\overrightarrow{r}(u_0, v)$.
Аналогично, если зафиксировать $v = v_0$, то зададим кривую $\overrightarrow{r}(u, v_0)$.
Эти две кривые называются **координатными кривыми**.

## 1.6 Нормаль

Теперь рассмотрим $\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v$ - касательные к кривой.
Пусть $A = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$, тогда если $rankA = 2$, то векторное произведение $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq 0$.
Результат этого векторного произведения $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \overrightarrow{n}$ является вектором **нормали** к поверхности $\Sigma$.
Убедимся, что нормаль не зависит от параметризации кривой:
Дано взаимно-однозначное отображение $\Omega \iff \Omega'$ и $\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{\varrho}(u', v')$.
Посчитаем $\overrightarrow{\varrho}_{u^‘} \times \overrightarrow{\varrho}_{v^‘}$:
Вспомним, что $\overrightarrow{\varrho}(u^‘, v^‘) = \overrightarrow{r}(u(u^‘, v^‘), v(u^‘, v^‘))$, это значит, что

$$\overrightarrow{\varrho}_{u^‘} = \overrightarrow{r}_u \frac{\partial u}{\partial u^‘} + \overrightarrow{r}_v \frac{\partial v}{\partial u^‘},$$

$$\overrightarrow{\varrho}_{v^‘} = \overrightarrow{r}_u \frac{\partial u}{\partial v^‘} + \overrightarrow{r}_v \frac{\partial v}{\partial v^‘}$$

Перемножим, учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{\varrho}_{u'} \times \overrightarrow{\varrho}_{v'} = (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + (\overrightarrow{r}_v \times \overrightarrow{r}_u)\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} =$$
$$= (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'})(\text{поменяли знак}) = (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)\begin{bmatrix} u_{u'} & u_{v'} \\ v_{u'} & v_{v'} \end{bmatrix}$$

Но этот якобиан не равен нулю!
Это значит, что получили тот же вектор нормали, у которого могла измениться лишь длина или направление, что и требовалось доказать.

## 1.7 Площадь поверхности

Даны $\Omega, \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$.
Найдем дифференциал этого вектора:

$$d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_u du + \overrightarrow{r}_v dv$$
$$d\overrightarrow{r}^2 = |d\overrightarrow{r}|^2 = \overrightarrow{r}_u^2 du^2 + 2\overrightarrow{r}_u\overrightarrow{r}_v dudv + \overrightarrow{r}_v^2 dv^2$$

Обозначим $E = \overrightarrow{r}_u^2, F = \overrightarrow{r}_u\overrightarrow{r}_v, G = \overrightarrow{r}_v^2$.
$d\overrightarrow{r}^2$ называется первой квадратичной формой поверхности и для неё справедливо свойство:
$d\overrightarrow{r}^2 > 0$ (положительно определена)ю
Для того, чтобы это выполнялось (для нашей формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$), нужно:

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

В нашем случае второго дифференциала вектора $\overrightarrow{r}$ это значит, что требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} E > 0 \\ G > 0 \\ EG - F^2 > 0 \end{cases}$$

Первые два условия очевидны, проверим третье:

$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = |\overrightarrow{r}_u||\overrightarrow{r}_v| \sin\varphi \ (\varphi \neq 0)$$

$$\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v = |\overrightarrow{r}_u||\overrightarrow{r}_v| \cos\varphi$$
$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|^2 + (\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v)^2 = |\overrightarrow{r}_u|^2|\overrightarrow{r}_v|^2$$

Заметим, что правая часть это $EG$, а второе слагаемое в левой части это $F^2$.
Тогда $|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|^2 = EG - F^2 > 0$, так как $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq 0$, что и требовалось доказать.

**Площадь поверхности**

$S(\Sigma) = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \; dudv$ - площадь поверхности.
Свойства площади:
1) Не зависит от параметризации.
Пусть дали две параметризации:

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{\varrho}(u`, v`)$$
$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega`} |\overrightarrow{\varrho}_{u`} \times \overrightarrow{\varrho}_{v`}| \; du`dv`$$

Вспомним, что $|\overrightarrow{\varrho}_{u`} \times \overrightarrow{\varrho}_{v`}| = |(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)| \; |I(\frac{u,v}{u`,v`})|$.
Подставим это в интеграл:

$$S(\Sigma) = \iint_{\Omega`} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \; |I| du`dv` = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \; dudv$$

Получили то же самое.
2) Рассмотрим случай, когда сама поверхность - плоскость. Сможем ли по той же формуле посчитать площадь? Проверим это, площадь это $\iint_\Omega \; dudv$.
Теперь посчитаем $S(\Omega)$ :
$\Sigma$ задается при помощи $\overrightarrow{r} = (x, y, 0)$.
Тогда $\overrightarrow{r}_x = (1, 0, 0)$
$\overrightarrow{r}_y = (0, 1, 0)$.
А $\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{k}, \Rightarrow |\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = 1.$
Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| \; dudv = \iint_\Omega dudv$, что и требовалось доказать.
3) Площадь аддитивна по отношению к поверхности. (Площадь поверхности, составленной из гладких кусков, равно сумме площадей).

4) $z = f(x, y)$.
$\overrightarrow{r} = (x, y, f(x, y))$.
$\overrightarrow{r}_x = (1, 0, f_x)$.
$\overrightarrow{r}_y = (0, 1, f_y)$.
$\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = i(-f_x) - jf_y + \overrightarrow{k}$.

$$|\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y| = \sqrt{EG - F} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

**ПРИМЕРЫ:**

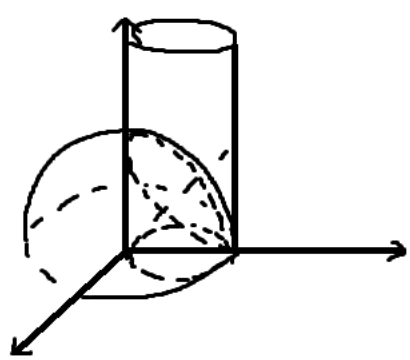
1) Посчитать площадь:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

где $z \geq 0$.
Это половина сферы, которую вырезает цилиндр:

$$x^2 + y^2 = Rx, \Rightarrow x^2 - Rx + \frac{x^2}{4} + y^2 = (\frac{R}{2})^2, \Rightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$$

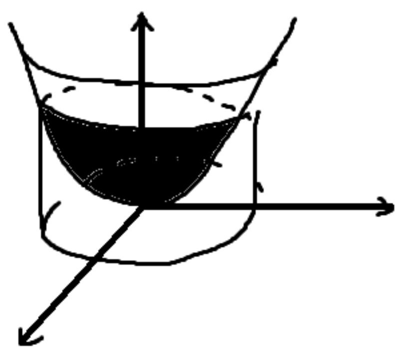
Это выглядит так:



Перейдем в сферические координаты:
$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$.
Зададим поверхность:

$$\overrightarrow{r} = (R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta)$$

Посчитаем частные производные по $\varphi$ и $\theta$:
$\overrightarrow{r}_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0)$
$\overrightarrow{r}_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)$
Теперь посчитаем $E, F, G$:
$E = \overrightarrow{r}_\varphi^2 = R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta = R^2\sin^2\theta.$
$F = \overrightarrow{r}_\theta^2 = R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2.$
$F = 0$ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).
$\sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\theta.$
Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega R^2\sin\theta\ d\varphi d\theta = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{?} \sin\theta\ d\theta.$
Осталось вычислить верхний предел интегрирования для $\theta$, для этого нужно подставить сферические координаты в уравнение цилиндра:
$R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta = R^2\cos\varphi\sin\theta.$
Отсюда либо $\sin\theta = 0$, либо $\sin\theta = \cos\varphi$.
Первое нас не интересует, а вот второе можно решить и получить ответ: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.
Тогда $S(\Sigma) = \iint_\Omega R^2\sin\theta\ d\varphi d\theta = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin\theta\ d\theta = R^2(\pi - 2).$
2) Посчитать площадь поверхности:
$z = x^2 + y^2$. Этот параболоид бесконечен, поэтому чтобы было, что считать, вырежем из него кусок $x^2 + y^2 = R^2$ и найдем площадь.
Вот как это выглядит:



Для этого перейдем к цилиндрическим координатам:
$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = \varrho^2 \end{cases}.$$
Зададим поверхность:
$\overrightarrow{r} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2).$
Посчитаем частные производные по $\varrho$ и $\varphi$.

$\overrightarrow{r}_\varrho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2\varrho)$.
$\overrightarrow{r}_\varphi = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)$.
Теперь посчитаем $E, F, G$:
$E = \overrightarrow{r}_\varrho^2 = 1 + 4\varrho^2$.

$F = \overrightarrow{r}_\varphi^2 = \varrho^2$.
$F = 0$ (если раскрыть скобки, то и правда получится 0).
$\sqrt{EG - F^2} = \varrho\sqrt{1 + 4\varrho^2}$.

$$S(\Sigma) = \iint_\Omega \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\ d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\ d\varrho$$

Важная информация про почти простые поверхности:
Если $\Sigma$ - почти простая, а $\Omega_n$ - искомая исчерпывающая последовательность, то:

$$S(\Sigma) = \iint_\Omega |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|\ dudv = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|\ dudv$$

# 2 Поверхностные интегралы

## 2.1 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть $\Sigma$ - простая и гладкая поверхность. Дана $F(x, y, z)$ - непрерывная функция, определенная на $\Sigma$.
Поверхностным интегралом $I$ рода от функции $F$ по поверхности $\Sigma$ называется:

$$\iint_\Omega F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|\ dudv = \iint_\Sigma F(x,y,z)ds(d\sigma)$$

Свойства поверхностного интеграла $I$ рода:
1) Не зависит от параметризации поверхности (доказывается так же, как независимость площади поверхности от параметризации).
2) Аддитивность и линейность.
3) Можно дать физическую интерпретацию:
Если $F(x, y, z) \geq 0$, и это плотность слоя, "намазанного" на поверхность, то $\iint F d\sigma$ - масса слоя.
**Вместо $d\sigma$ можно написать $\sqrt{EG - F^2}\ dudv$.**

## 2.2 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть $\Sigma$ - двусторонняя (бывают односторонние поверхности, например, лист Мёбиуса и бутылка Клейна (Кляйна)). Выберем сторону (это означает, выберем, куда "смотрит" нормаль).
У нас есть поверхностный интеграл $\iint_\Sigma (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0)\ d\sigma$, где $\overrightarrow{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.
Если поменять сторону, то поменяется знак за счёт смены направления вектора нормали на противоположное.
Отсюда вытекает свойство:

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0)\ d\sigma = -\iint_\Sigma (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0^-)\ d\sigma$$

## 2.3 Как считать поверхностный интеграл второго рода

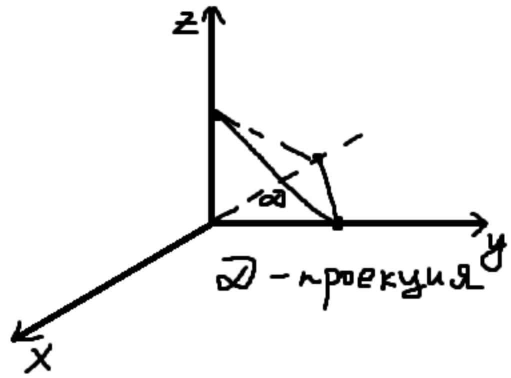
Рассмотрим $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0) = \overrightarrow{F} \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|}\ |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|\ dudv = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{r}_v)\ dudv$ (смешанное произведение).
Посчитаем его:

$$\begin{bmatrix} R & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}\ dudv = (P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(\text{поменяли знак}) + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\ dudv$$

Рассмотрим $PI(\frac{y,z}{u,v})\ dudv$:
Если угол между вектором нормали и осью $x$ острый, то $I > 0$, иначе $I < 0$.
Тогда для острого угла $\iint PI\ dudv = \iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\ dydz$.
А для тупого угла $\iint PI\ dudv = -\iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\ dydz$.
Аналогично и другие слагаемые, тогда запишем сумму:
$P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ dudv + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\ dudv + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ dudv = P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy$.
Тогда

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}_0)\ d\sigma = \iint_\Sigma P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy$$

**ПРИМЕР:**
Дан $\iint_\Sigma x\ dydz$, и вырезан прямоугольник $z + y - z = 1$, верхняя сторона.




Посчитаем:

$\iint_\Sigma x\ dydz = -\iint (z+y-1)\ dydz$ (так как угол между нормалью и отсутствующей осью (в данном случае ось $x$) тупой).

$$-\iint (z+y-1)\ dydz = -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z+(y-1))\ dz = \frac{1}{6}$$