Tarea 2 Metodos Computacionales

Luis Carlos Mantilla 201631487

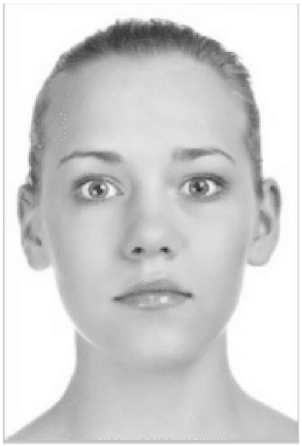
Julio 2019

Punto 1

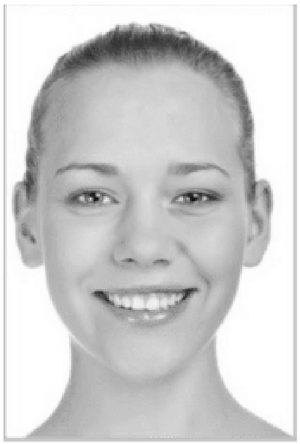
La idea de este ejercicio es lograr unir dos imágenes de tal manera que vista de cerca sea una imagen y vista de lejos sea la otra imagen. Esto lo podemos hacer tomando el espectro de Fourier de ambas imágenes y tomar las frecuencias altas de una y las bajas de la otra y finalmente sumar ambas. En nuestro caso, esta suma se hace con distintos pesos para resaltar más algunos detalles.

Imágenes a unir

Las dos imágenes que vamos a unir son las siguientes:



(a) Seria

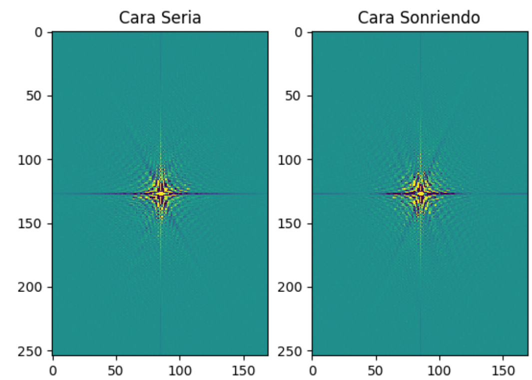


(b) Sonriendo

Figure 1: Caras a unir

Transformada de Fourier Caras Separadas

La transformada de Fourier de cada imagen se realiza con los paquetes de numpy de fft. Se obtienen los siguentes resultados:

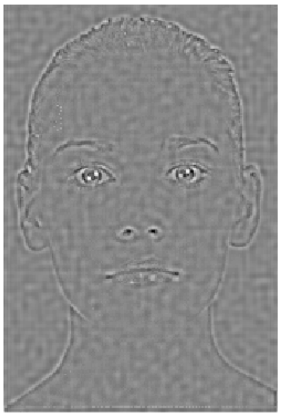


Podemos filtrar con una función Sigmond para obtener una función escalón suavizada

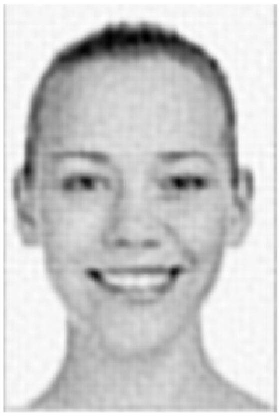
$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-15x)}$$

Transformada Inversa de Fourier Caras Separadas

Después del filtrado, usando los paquetes de numpy, se tienen las siguientes caras:



(a) Seria



(b) Sonriendo

Figure 2: Caras despues del filtrado

Transformada de Fourier Caras Juntas

Para juntar ambas caras, usamos el la función Sigmond desplazada y la multiplicamos por las frecuencias de la imagen. Para el filtro pasa altas (la cara seria) desplazamos la función Sigmond 24 unidades y se invierte. Para el filtro pasa bajas (la cara sonriendo) desplazamos la función Sigmond 27 unidades. Después de multiplicados los espectros de Fourier por estas funciones, al sumarlos obtenemos el siguiente espectro de Fourier:

Transformada Inversa de Fourier Caras Juntas

Finalmente, al juntar ambas imágenes y ajustar un poco sus tamaños para que los ojos en ambos casos se sobrepongan se obtiene el siguiente resultado.

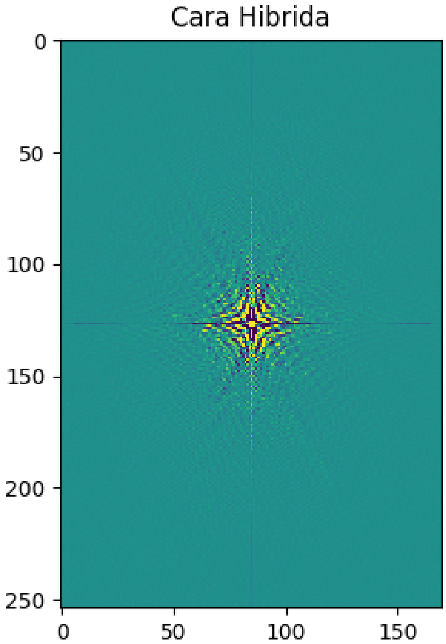


Figure 3: Espectro de Fourier para la suma de imágenes filtradas

Figure 4: De cerca se ve una cara seria y de lejos una cara sonriendo

Punto 2

Métodos para solucionar el problema

La idea de este ejercicio es solucionar la ecuación diferencial de segundo orden de la fuerza gravitacional entre dos masas para una condición inicial de $\vec{v} = (-6.35, 0.606)$[AU]/[YR] y $\vec{r} = (0.1163, 0.9772)$ [AU].

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Esto lo podemos descomponer en dos ecuaciones de primer orden para poder solucionarlas simultáneamente

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

y

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

Solucionamos las siguientes ecuaciones con distintas elecciones de dt para aproximar las derivadas temporales con 3 métodos numéricos: Euler, RungeKutta de 4to Orden y LeapFrog. Se solucionan con los siguientes distintos valores de dt.

- $dt1 = 0.0006283$[YR] $= 19814.0688$[s]
- $dt2 = 0.006283$ [YR] $= 198140.688$[s]
- $dt3 = 0.12566$ [YR] $= 3962813.76$[s]

Esto con el fin de dar aproximadamente 10000 pasos por orbita con el primer dt, 1000 pasos con el segundo dt y 500 pasos con el tercer dt.

Las siguientes gráficas están organizadas de la siguiente manera: La primera fila utiliza el método de Euler, la segunda fila el método de RungeKutta de cuarto orden y la tercera fila el método de LeapFrog. La primera columna utiliza el $dt1$ para calcular la evolución temporal del sistema, la segunda columna el $dt2$ y la tercera columna el $dt3$.

NOTA SOBRE UNIDADES: Dado que se trabaja con unidades de Unidades Astronómicas [AU], Masas Solares [MS] y años [YR], los valores de energías cinéticas, potenciales, totales y los momentos angulares se multiplican por un factor de 100000 para cuantificar con mayor facilidad las fluctuaciones en las gráficas.

Posiciones Orbitales

Para hallar las posiciones orbitales necesitamos solucionar la ecuación de movimiento anteriormente descrita. Se simula un total de 20 años con cada método. Se puede apreciar que el método de Euler es el que peor simula esta situación dado a la forma como aproxima (con Forward Difference) y el que mejor simula es RungeKutta (aunque LeapFrog también hace un muy buen trabajo).

Momento Angular

El momento angular es una cantidad física conservada

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Vemos que los métodos de RungeKutta y LeapFrog mantienen muy bien esta cantidad. El método de Euler causa un aumento significativo del Momento Angular, en el tercer dt se llega casi a duplicar el momento inicial después de 20 años de evolución temporal. En las gráficas, dado que las componentes z de nuestra posición y momento lineal son nulas, la dirección del momento angular será únicamente en dirección z, por ende solo se grafica su magnitud (escalada por 100000).

Energía Potencial

Se sabe que la energía potencial gravitacional de un sistema de dos masas está dada por

$$U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r}$$

En una orbita elíptica como lo es la tierra, uno debería esperar un comportamiento sinusoidal en la energía potencial. Los tres métodos presentan comportamientos sinusoidales pero el método de Euler presenta un aumento en energía potencial, indicando que la orbita está aumentando, lo cual se sabe que está mal.

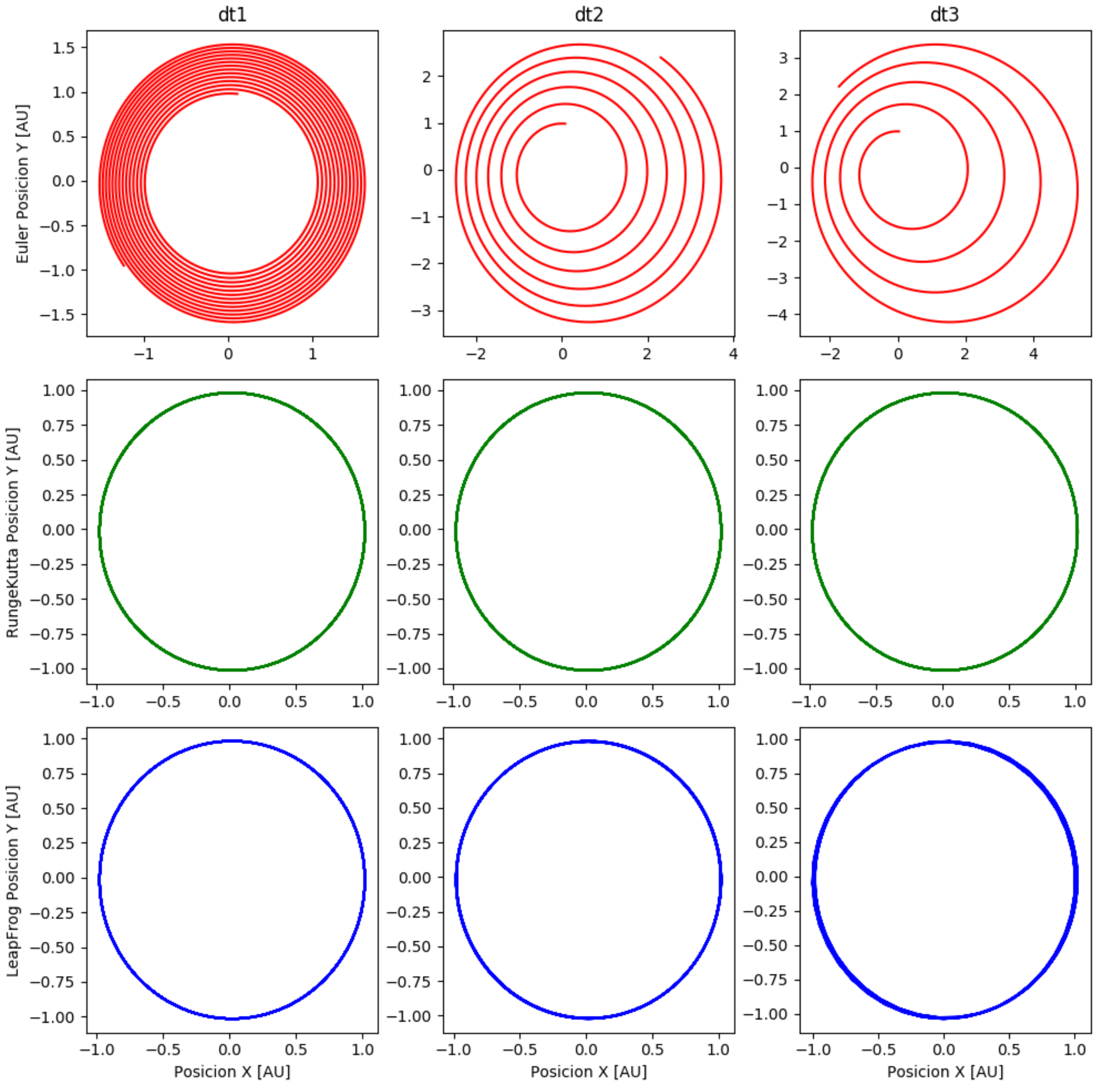


Figure 5: Orbitas descritas por distintos métodos en 20 años

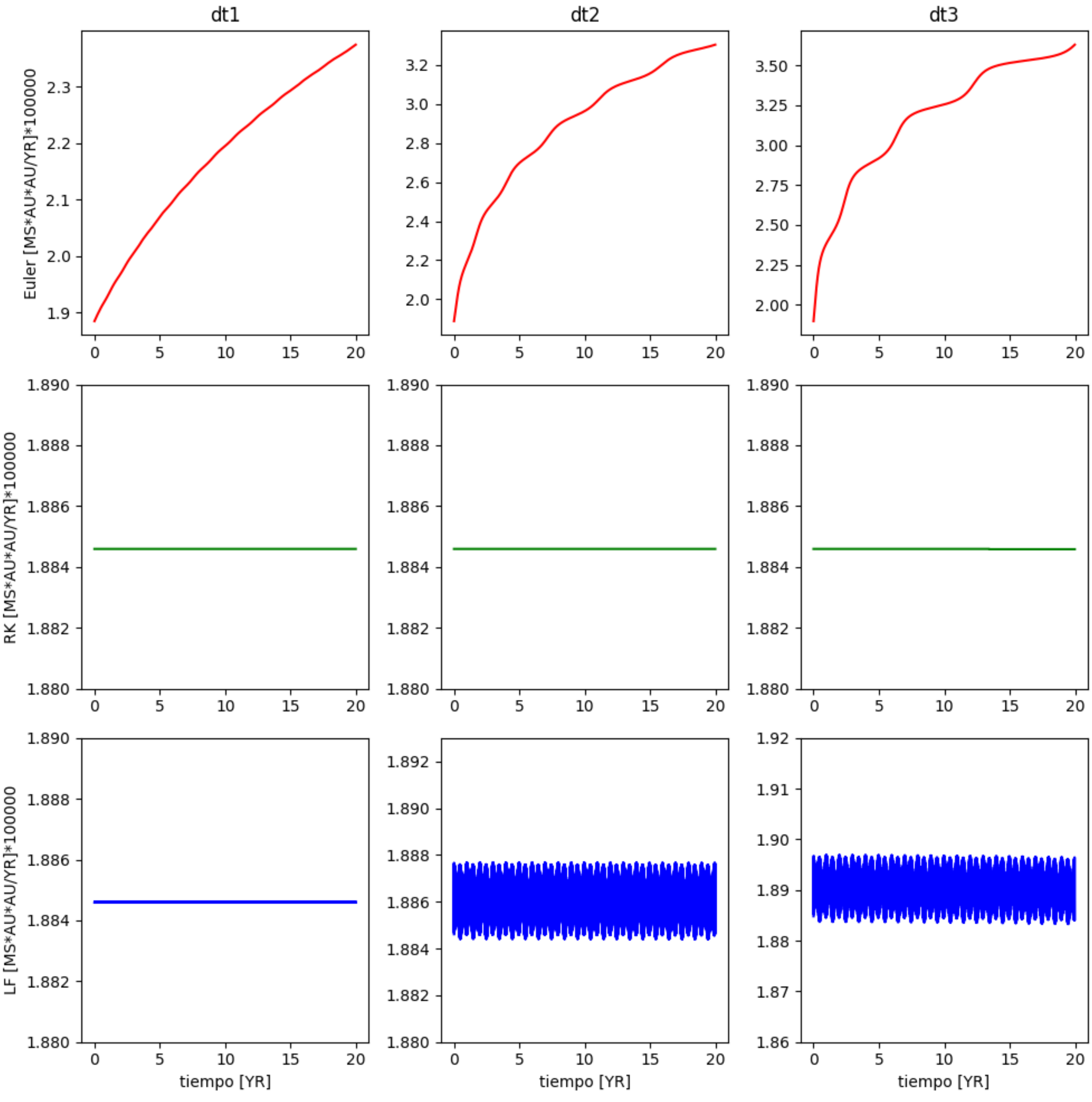


Figure 6: Momento Angular

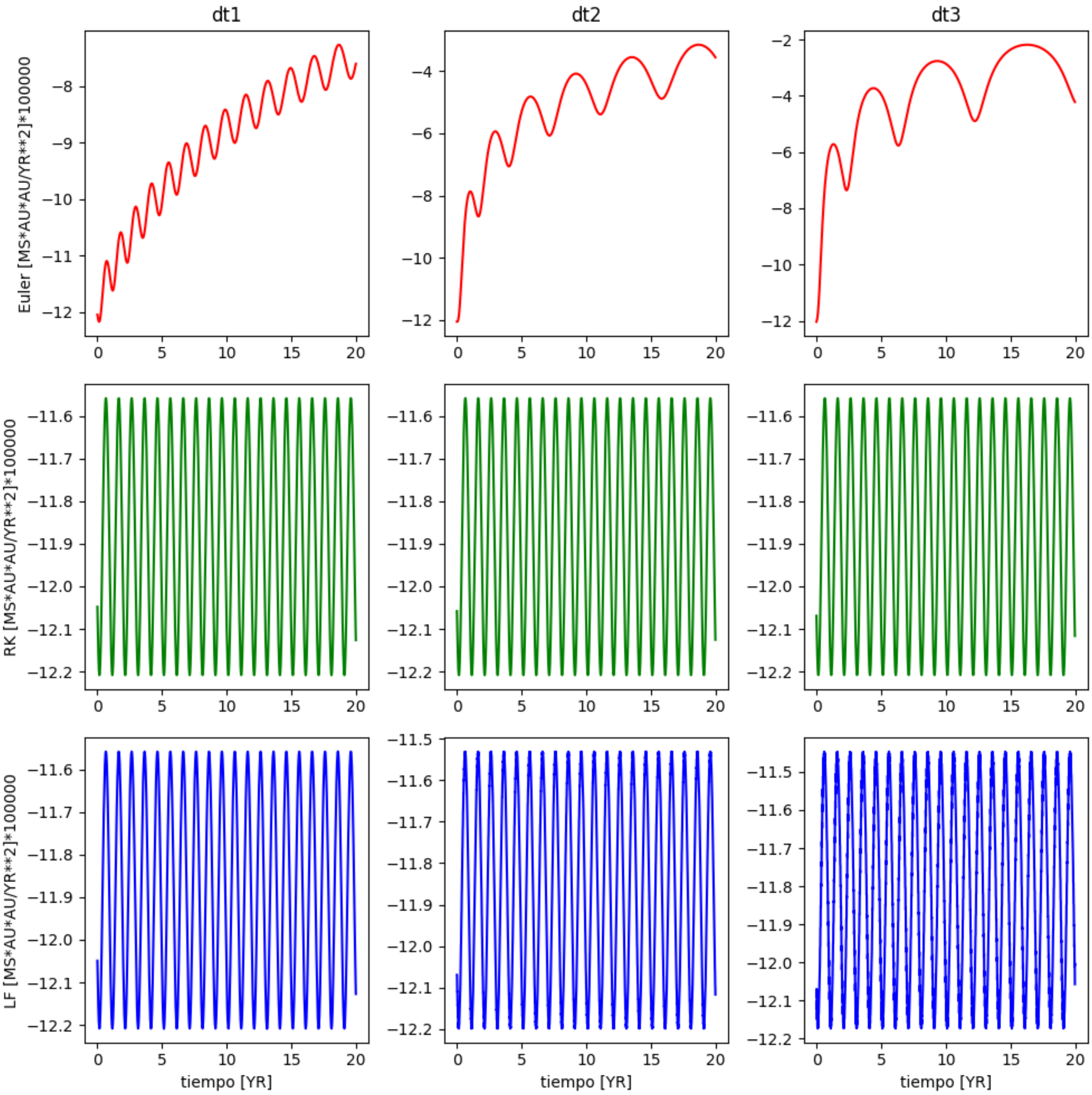


Figure 7: Energía Potencial

Energía Cinética

Se sabe que la energía cinética de una masa con velocidad $\dot{\vec{r}}$ es

$$K(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

De igual manera que la energía potencial, esperamos para una orbita elíptica un comportamiento sinusoidal en la energía cinética. Dado que en una orbita elíptica entre más lejos se encuentre del sol (una mayor energía potencial) se tendrá una velocidad menor y viceversa entre más cerca se encuentre del sol, esperamos encontrar que este comportamiento sinusoidal sea opuesto a aquel de la energía potencial. Esto se ve de manera clara para los métodos de RungeKutta y LeapFrog, no tanto para el método de Euler.

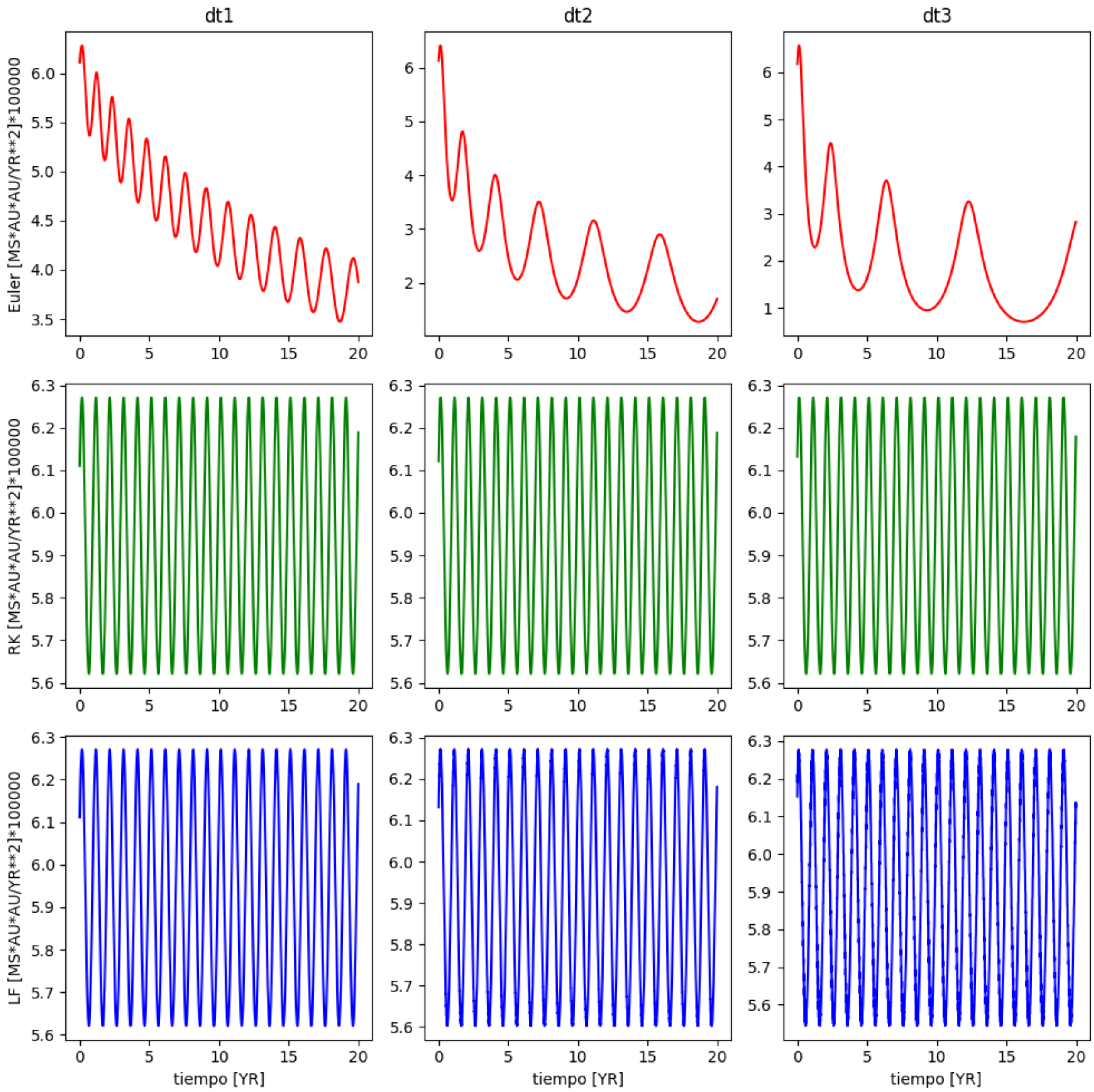


Figure 8: Energía Cinética

Energía Total

La energía total del sistema es una cantidad conservada.

$$E(\vec{r}) = U(\vec{r}) + K(\dot{\vec{r}})$$

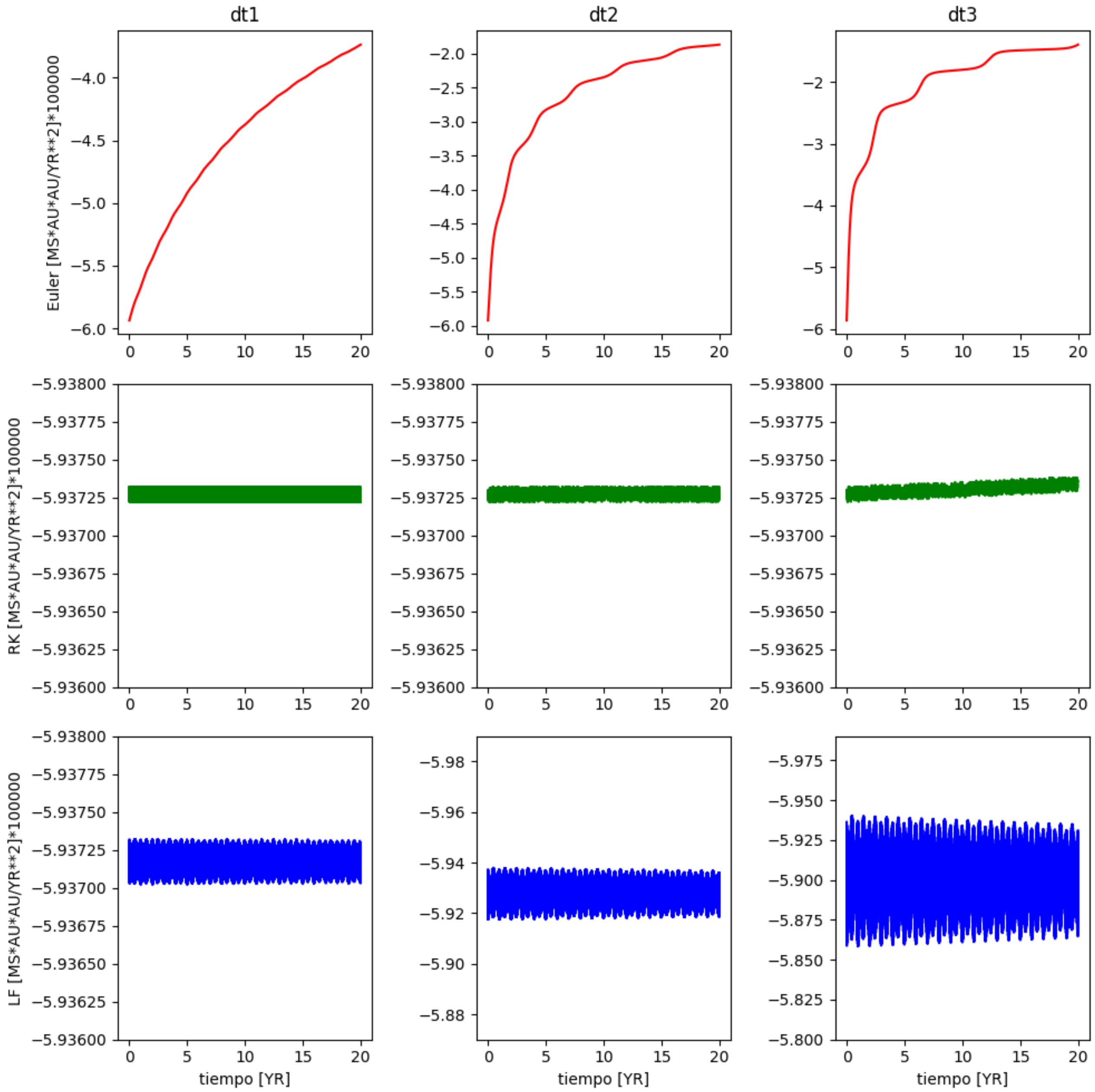


Figure 9: Energía Total (Cinética + Potencial)

Vemos que la energía total prácticamente se conserva cuando implementamos el método de RungeKutta y LeapFrog, se mantienen muy estables. En contraste, el método de Euler presenta grandes fallos, y la energía no se esta conservando, aumenta en cada paso. En el caso de la energía cinética y la energía potencial, es claro ver que comienzan y terminan en puntos opuestos y presentan comportamientos periódicos, de tal manera que la suma es constante. Este comportamiento periódico ocurre cuando la tierra esta en el Perihelio o en el Afelio.