无锡学院 2021-2022 学年第 2 学期 高等数学Ⅰ（2）

课程试卷 B 答案与评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,3)$，则数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ____2____.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\cos x=$ ____0____.

3. 设函数 $z=\sin x-\mathrm{e}^y$, 则 $z_{xy}=$ ____0____.

4. 已知平面有界闭区域 D 关于 x 轴对称，则二重积分 $\iint_D x^{2022}\sin y\mathrm{d}\sigma=$ ____0____.

5. 微分方程 $y'=y$ 的通解为 ____$y=C\mathrm{e}^x$____.

二、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	*D*	*C*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*

1. 平面 $2x-4z+3=0$ 的一个法向量为（D）.

A. $(2,-4,3)$　　B. $(2,0,3)$　　C. $(1,-2,0)$　　D. $(1,0,-2)$

2. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程为（D）.

A. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ z=0\end{cases}$　　B. $z=0$　　C. $2x^2-2x+y^2=8$　　D. $\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8\\ z=0\end{cases}$

3. 曲线 $x=\mathrm{e}^{2t}, y=2t, z=-\mathrm{e}^{-3t}$ 在 $t=0$ 对应点处的切线方程为（C）

A. $2x+2y+3z+1=0$　　B. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$　　C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$　　D. 以上都不对

4. 一阶线性微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解为（A）.

A. $\mathrm{e}^{-x}(x+C)$　　B. $\mathrm{e}^{x}(x+C)$　　C. $x\mathrm{e}^{-x}+C$　　D. $x\mathrm{e}^{-x}$

5. 求函数 $u=2x+y$ 在条件 $x^2+4y^2=4$ 下的最值时，拉格朗日辅助函数应设为（A）.

A. $L=2x+y+\lambda(x^2+4y^2-4)$　　B. $L=2x+y+\lambda(x^2+4y^2)$

C. $L=x^2+4y^2+\lambda(2x+y)$　　D. $L=x^2+4y^2-4+\lambda(2x+y)$

6. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$的敛散性为（B）.

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 以上都不对

7. 函数$\ln(1+x)$的幂级数展开式为（B）.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}, x\in(-1,1]$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, x\in(-1,1]$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}, x\in[-1,1]$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n, x\in(-1,1)$

8. 设L为圆周$x^2+y^2=4$，则曲线积分$\int_L(x+y)^2\mathrm{d}s=$（B）.

A. 4π　　B. 16π　　C. 32π　　D. 16

9. 设y_1,y_2,y_3是某二阶非齐次线性方程的三个线性无关特解，则该方程的通解为（C）.

A. $y_1+C_1y_2$　　B. $y_1+C_1y_2+C_2y_3$　　C. $y_1+C_1(y_1-y_2)+C_2(y_1-y_3)$　　D. 以上都不对

10. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的和函数为（C）.

A. $\frac{x}{1-x}, x\in(-1,1)$　　B. $\frac{1}{(1-x)^2}, x\in[-1,1]$　　C. $\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$　　D. 以上都不对

三、计算题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 计算$\mathrm{d}z$，其中$z=x^2+y^3$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，　…………………（2 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2$，　…………………（2 分）

$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y$. ∎ …………………（1 分）

2. 计算$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$，其中$z=f(x-y,2x+4y)$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+2f_2$，　…………………（2 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=-f_1+4f_2$，　…………………（2 分）

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=6f_2$. ■ ………………（1 分）

3. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x,\ y=1$ 与 y 轴所围闭区域.

解： $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 xy\mathrm{d}y$ ………………（3 分）

$=\int_0^1\dfrac{1}{2}x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}x^4\right)_0^1=\dfrac{1}{8}$. ■ ………………（2 分）

或者：

$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y xy\mathrm{d}x$ ………………（3 分）

$=\int_0^1\dfrac{1}{2}y^3\mathrm{d}y=\dfrac{1}{8}y^4\Big|_0^1=\dfrac{1}{8}$. ■ ………………（2 分）

4. 计算 $\iiint\limits_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

解： 利用球坐标，$\iiint\limits_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$ ………（3 分）

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^2 r^4\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{32}{5}=\dfrac{128}{5}\pi$. ■ ………………（2 分）

5. 计算 $\oint_L\left(\cos x-y^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+\sin y\right)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

解： $P=\cos x-y^3,Q=x^3+\sin y,Q_x-P_y=3x^2+3y^2$，

由格林公式，$\oint_L\left(\cos x-y^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+\sin y\right)\mathrm{d}y=\iint\limits_D 3\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$ …………（2 分）

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 3\rho^2\rho\mathrm{d}\rho$ ………………（2 分）

$=\dfrac{3}{2}\pi$. ■ ………………（1 分）

6. 计算 $\oiint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，已知光滑闭曲面 Σ 所围立体体积为 V，取外侧.

解： $P=x,Q=y,R=z,P_x+Q_y+R_z=3$，

由高斯公式及三重积分的性质得 $\oiint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 3\mathrm{d}V$ …………（3 分）

$=3\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}V=3V$. ■ ………………（2 分）

四、解答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 求方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解.

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=2$， ………………（2 分）

通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$. ∎ ………………（3 分）

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的敛散性.

解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n}=\dfrac{1}{3}<1$， ………………（3 分）

由比值审敛法知原级数收敛. ………………（2 分）

或者：

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{3}=\dfrac{1}{3}<1$， ………………（3 分）

由根值审敛法知原级数收敛. ∎ ………………（2 分）

3. 求过点 $(2,-1,0)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+z-3=0\\x+y-z+2=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：由垂直关系知平面的一个法向量为

$$\vec{n}=(1,-2,1)\times(1,1,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,2,3),$$ ………………（3 分）

平面方程为 $(x-2)+2(y+1)+3z=0$，

即 $x+2y+3z=0$. ∎ ………………（2 分）

4. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y+1$ 的极值.

解：令 $\begin{cases}f_x=2x-y-2=0\\f_y=2y-x+1=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $(1,0)$， ………………（2 分）

$A=f_{xx}(1,0)=2, B=f_{xy}(1,0)=-1, C=f_{yy}(1,0)=2$，

$B^2-AC<0, A>0$，因此 $(1,0)$ 为极小值点， ………………（2 分）

函数有极小值 $f(1,0)=0$，无极大值. ∎ ………………（1 分）