无锡学院

高等数学Ⅰ(2)期末试卷A参考答案与评分标准

2021—2022 学年第 2 学期

一、填空题（每空 4 分，共 28 分）

1. $\cos 1$　　2. 11　　3. Ce^{x^2}

4. 3　　5. $(1, 3)$　　6. $(1,1,-1)$

7. 0

二、选择题（每小题 4 分，共 32 分）

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	B	A	C	D	C	A

三、微分计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，其中 $z = f(x+y, x-y)$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_1 \cdot \dfrac{\partial (x+y)}{\partial y} + f_2 \cdot \dfrac{\partial (x-y)}{\partial y}$ ……………… 3 分

$= f_1 - f_2$ ……………… 2 分

2. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解：特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$，特征根 $r = -1, 3$ ……………… 2 分

通解 $y = C_1 e^{-1} + C_2 e^3$ ……………… 3 分

3. 求$z=7x+16y-4xy-x^2-5y^2$的驻点和极大值.

解：$\begin{cases} z_x = 7-4y-2x=0 \\ z_y=16-4x-10y=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点(1.5,1) ……………… 2 分

z 有上界，唯一驻点是极大值点. ……………… 2 分

（或：$A=z_{xx}=-2<0, B=z_{xy}=-4, C=z_{yy}=-10$

$AC-B^2>0$，所以驻点(1.5,1)是极大值点. ）

极大值 $z(1.5,1)=13.25$. ……………… 1 分

4. 将$\dfrac{1}{3+x}$展开为麦克劳林级数，并写出收敛域.

解：令$x=3t$. $\dfrac{1}{3+x}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+t}$ ……………… 2 分

$=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \quad (-1<t\le 1)$ ……………… 2 分

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n \quad (-3<x\le 3)$ ……………… 1 分

四、积分计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是光滑的外侧封闭曲面，所围体积为 V.

解：根据高斯公式，原式$=\iiint\limits_{\Omega}(P_x+Q_y+R_z)dv$ ……………… 3 分

$=6\iiint\limits_{\Omega} dv=6V$ ……………… 2 分

2. 计算$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线$y=x, y=1$和 y 轴所围成的区域.

解一： D: $0\le x\le 1, x\le y\le 1$. ……………… 2 分

原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1(x+y)\mathrm{d}y$ ……………… 2 分

$=\dfrac{3}{2}$. ……………… 1 分

解二： D: $0\le y\le 1, 0\le x\le y$. ……………… 2 分

原式 $=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y(x+y)\mathrm{d}x$ ……………… 2 分

$=\dfrac{3}{2}$. ……………… 1 分

3. 计算$\oint_L (2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中$L$是两条抛物线$y=x^2$及$y^2=x$所围闭区域$D$的边界曲线，取逆时针方向.

解一：根据格林公式，

$$原式=\iint_D (Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

$$=\int_0^1 (1-2x)\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

$$=\frac{1}{30} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

解二：分解为两段曲线，分别计算。

$L_1: y=x^2, x:0\to 1;\quad L_2: x=y^2, x:1\to 0$ ……………… 1 分

$I_1=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^3+x^2+2x^5)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$ ………… 2 分

$I_2=\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_1^0(4y^4-2y^5+2y^2)\mathrm{d}x=-\frac{34}{30}$ ……… 2 分

原式$=\frac{7}{6}-\frac{34}{30}=\frac{1}{30}$

4. 计算$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\boldsymbol{\Omega}$是由曲面$x^2+y^2=2z$与$z=2$所围封闭区域.

解一：投影法（先一后二法）.

曲面交线$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$，投影区域$D_{xy}:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2$. ………… 2 分

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^2(2r^3-\frac{r^5}{2})\mathrm{d}r \quad \cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=\frac{16}{3}\boldsymbol{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

解二：截面法（先二后一法）.

截线$\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=z\end{cases}$，截面$D_z:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2z}$ ……………… 2 分

$$原式=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=\frac{16}{3}\boldsymbol{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$