

投稿類別：數學類

篇名：

千變萬化的播棋世界—以Mancala為例

作者：

林柏勳。吉隆坡台灣學校。高一班
連正明。吉隆坡台灣學校。高一班

指導老師：
吳秉睿老師

壹、前言

一、研究動機

我們是馬來西亞的海外僑生，有許多的機會能接觸到當地的文化，其中一項便是這裡的傳統遊戲。我們的數學老師在課堂上給全班同學們玩播棋類遊戲，其中的遊戲之一為 Congkak，一個馬來西亞的傳統遊戲。在許多國家都有類似的遊戲，如：西非播棋、肯亞播棋、美國播棋等等，其規則上不盡相同，但基本的遊戲方式都是雙方從自己的地盤取棋子，以順時針或逆時針的方式放入棋洞內，最後得到較多旗子的一方即為獲勝方。在眾多玩法當中我們選擇以非洲播棋（Mancala）的遊戲規則為主要探討的對象，因為其玩法規則較前顯易懂。於是我們想透過數學分析與邏輯推理對這遊戲有更多的了解。

二、研究目的

經過25場賽局的統計，我們發現先攻的玩家勝率為68%，但最後比數平均為24.76：23.24，表示雖然先攻玩家勝率較高但結果差距並不大。賽局理論（game theory）中的策梅洛定理（Zermelo's theorem）提到符合特定條件的賽局中，雙方只有三種結果，玩家1有必勝招、玩家1有必和招、玩家2有必勝招，讓我們更想知道，在不失誤的前提下，這樣的賽局是否有最佳路徑？以及必勝的可能性？

三、研究方法

從第一回合開始，雙方互相討論該回合哪種取法是較佳的，互相討論的目的是因為每個人的攻守思維不盡相同，可以盡量避免個人的盲點或失誤，讓思考範圍更加全面。若遇到較多情況的分枝便透過樹狀圖來分類一回合中每一步延伸出的情況，最後透過實際賽局的結果製成折線圖，驗證我們的較佳取法對於玩家是否有幫助。

貳、正文

一、文獻探討

(一) 邏輯推論

推理固為人的基本能力，也是作學問所應具備的基本條件，推論要能有效，首須在推論當中充分運用冷靜的理性，而棄絕火熱的情感。訴諸理性才是研究學問的良方。邏輯既旨在探討抽象的推論法則。（林玉體，1993）

(二) 策梅洛定理（Zermelo's theorem）

賽局理論（game theory）中的策梅洛定理（Zermelo's theorem）提及，若一個賽局能滿足以下條件：

- 1、有兩個玩家
- 2、能在有限步之內完成賽局
- 3、每一回合玩家的行動都必須公開透明
- 4、玩家的每一個行動都存在因果關係
- 5、賽局的結果只有輸、贏、平手三種情況

那麼必定只會出下以下三種情況其中一種：

- 1、 玩家一有必勝法
- 2、 玩家二有必勝法
- 3、 雙方有必定和局的方法（引自Omer Tamuz—Lecture notes on game theory）

二、遊戲介紹

(一) 起源

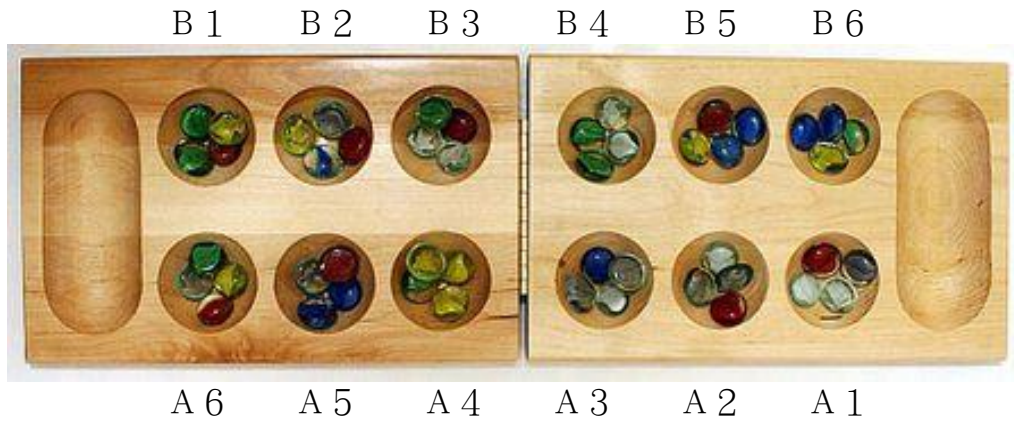
非洲播棋（Mancala）起源於西非地區，阿拉伯語是搬運的意思，在英文稱為sowing games意為播種遊戲，是一種兩人對戰的棋類遊戲的總稱，之所以取名為播種，是因為它的遊戲過程如播種般不斷搬移棋子，將棋子一一放進棋洞裡。普遍流行於非洲、中東、東南亞等地區。因為流行地區的不同，遊戲也衍生出各種不同的玩法規則。

(二) 規則

1、 遊戲準備

玩家兩人分別在棋盤的兩個長邊，棋盤一幅兩邊各六個小洞以及兩旁各一個大洞，還有小珠子48顆，一開始玩家先在各自的六個洞放入4顆，靠近玩家的那六個洞屬於玩家的可動區，稱謂自己的地盤，在玩家右邊的大洞稱為玩家的家，玩家會竭盡所能把棋子收集於此，家裡珠子的數量即為為玩家的得分，最終得分高者即為獲勝方，開始局面如下圖一，其中我們對雙方地盤的12個空格以代號暱稱。

圖一：遊戲開局圖

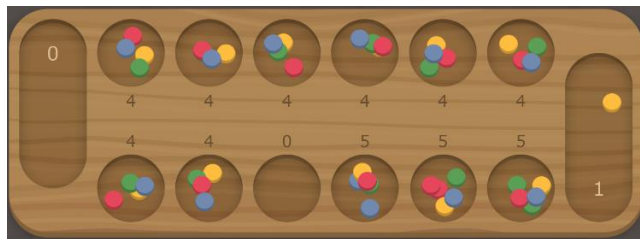


（圖一資料來源：The spruce craft。取自：<https://www.thesprucecrafts.com/mancala-411837>）

2、 棋子取法

玩家一開始以猜拳決定先攻後攻。每次玩家可在自己的地盤（也就是靠近自己的六個格子）中選一個格，取完洞裡所有的棋子，便像播種般逆時針每經過一個洞就放入一顆（不包括原來取棋的棋格），放到沒有棋子為止，稱為一步。若最後一顆放到自己的家，玩家便可獲得再一步的機會。以下圖二為例，若先攻方（下排）首先取A4格，最後一顆旗子便會放入自己的家，先攻方便可再同一回合進行第二步。

圖二：旗子取法圖



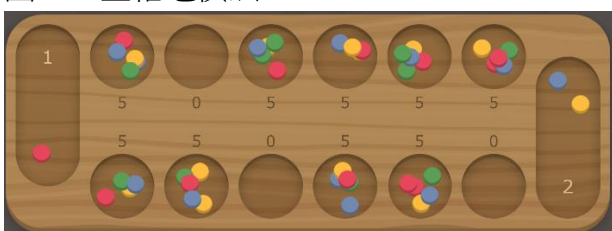
（圖二資料來源：線上非洲播棋。取自：<https://mancala.playdrift.com/>）

3、 得分方法

(1) 空格吃棋法：

若回合最後一顆棋放在自己地盤的空洞，玩家便能把空洞對面的洞及自己的那一顆棋子通通取走並放入自己的家，成為自己的分數。以下圖三為例，若先攻方（下排）取A6格，最後一顆旗子會放入A1格，便能連同那一顆旗子與B6格內的五顆棋子一同放入先攻方的家，如下圖四。

圖三：空格吃棋法1



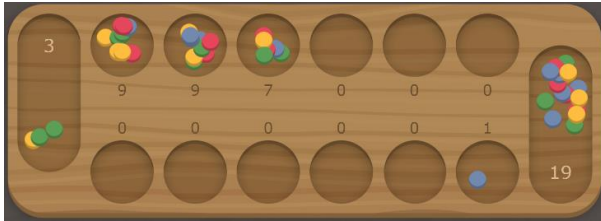
圖四：空格吃棋法二2



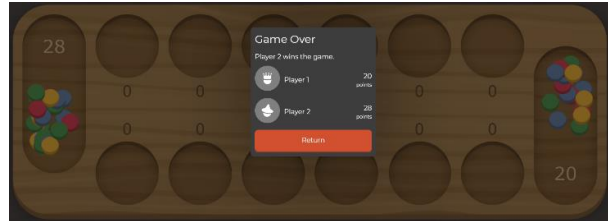
(2) 集結法：

把棋子集中於一格，並拖延至遊戲結束。這樣玩家集中於一格裡的棋子都會計做自己的分數。如下圖五、圖六。

圖五：遊戲結束圖1



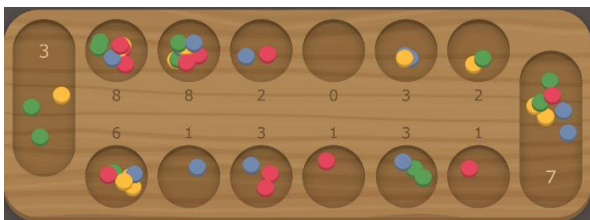
圖六：遊戲結束圖2



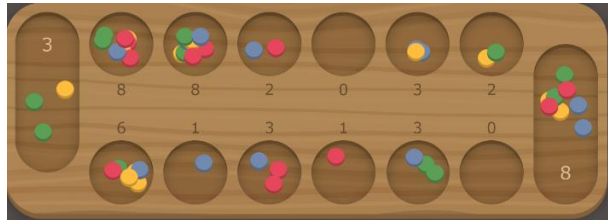
(3) 穩定累積法：

清空自己地盤中靠右的棋洞，並盡量讓An或Bn格的棋數子數量小於等於n，尤其是靠右的棋格。這樣玩家能不斷的把最後一顆棋子落在自家並獲得多一步的機會，一顆一顆的累積分數，如下圖七至圖十四。

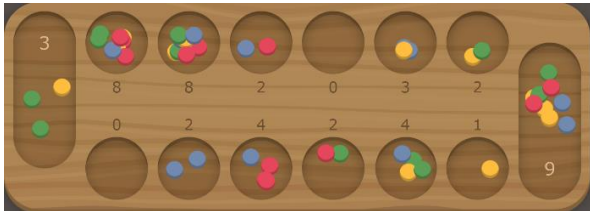
圖七：穩定累積法1



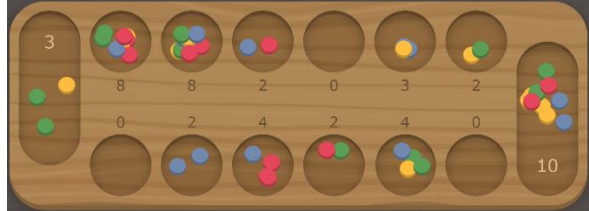
圖八：穩定累積法2



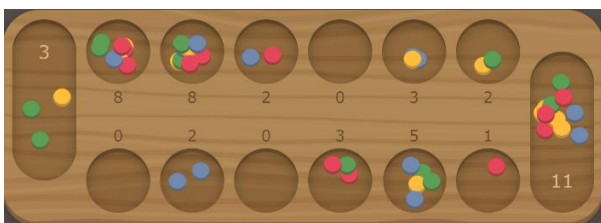
圖九：穩定累積法3



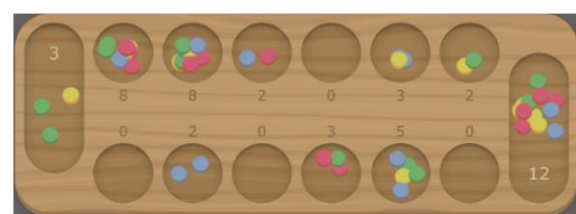
圖十：穩定累積法4



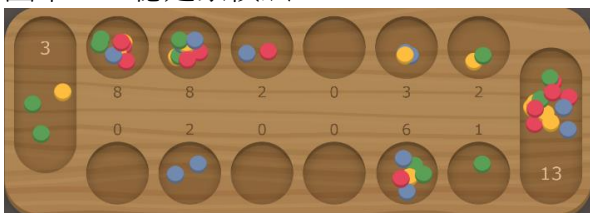
圖十一：穩定累積法5



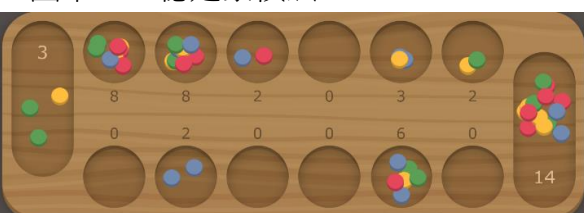
圖十二：穩定累積法6



圖十三：穩定累積法7



圖十四：穩定累積法8



4、遊戲結束

最後，其中一方已經無棋可動，也就是地盤上的六個洞全部沒有棋子，則另一方可得到自己地盤內所有剩餘的棋子，並結算自己家中棋子數量最高者獲勝。以下圖五為例，若先攻方(下排)取A1格放入自己家，之後先攻方的地盤就全部清空，後攻方(上排)便能將自己地盤的所有旗子放入自己的家，如下圖六。

(三) 玩法思路

- 1、透過多場的試驗，我們發現以守為攻是一個穩定提高勝率的方法，先盡量想著守護自己的棋子不被對方吃掉，有機會再來進攻對方的棋子，此概念能夠慢慢的增加我方棋子與對手拉開差距。
- 2、取棋時，盡量清空對面有空洞的棋洞，以避免下一回合對方最後一顆棋子放到空格並吃掉得分。
- 3、取棋時，若最後一顆能落到自家並獲得在一步的機會為佳，這樣能夠提供玩家穩定的得分。
- 4、以先攻方的角度，遊戲前期優先分散靠近家的棋洞，因為靠近家的棋洞為先攻玩家最穩定的得分方法，每經過一次靠右的棋洞就會有一兩顆棋子，再以獲得多一次取棋機會的方法穩定累積得分。
- 5、以後攻方的角度，集結法是較容易獲勝的一個方法，但使用集結法時，需特別注意可移動的總步數需少於先攻方棋子可移動的總步數，否則會被迫打散集結的棋子最後徒勞無功。

三、較佳取法

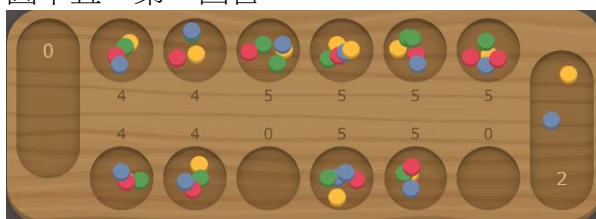
透過研究者們集思廣益與邏輯推論，在這一回合的所有選擇當中，能夠在下一至二回合中有較佳的效益，如：能迫使對方防守、限制對方的取法選擇、減少對手吃棋的數量等等，該取法我們稱為較佳取法。

(一) 前四回合較佳取法

1、第一回合

先攻方第一步先攻方取A4格，可先得到一分並獲得多一次的取棋機會，再取A1格，優先清空靠右的棋格以便於先攻方之後使用穩定累積法，取完後如下圖十五。

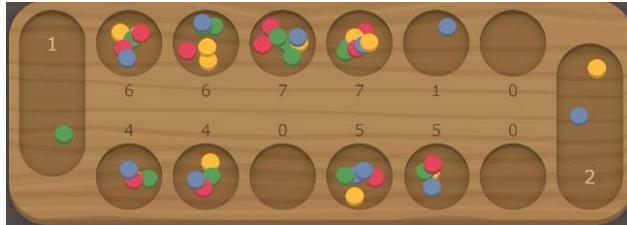
圖十五：第一回合



2、第二回合

後攻方優先取B5格，能夠得到一分且獲得再一次取棋機會，接下來取B6格，因為要預防先攻方的A5格以空格吃棋法吃掉後攻方的B6格，取完後如下圖十六。

圖十六：第二回合



3、第三回合

先攻方以清空靠右棋格為前提優先取A2格，一來可增加自己的空格數量，提高使用空格吃棋法的機率；二來可清空靠右的棋格，增加使用穩定累積法的機率，取完後如下圖十七。

圖十七：第三回合



4、第四回合

後攻方優先取B3格，因為須防守B5避免被先攻方的A6吃掉，除了能守住B5以外，還能迫使先攻方必須防守A4不被B2吃掉，且對面為空格（降低被對方使用空格吃棋法的機率）。若取B6，只會使先攻方多吃一顆棋子。若取B5，會使棋子更加集中於靠右的棋格，降低使用穩定累積法的機率。若取B2或B1，相較之下失分較多，效益較低，取完後如下圖十八。

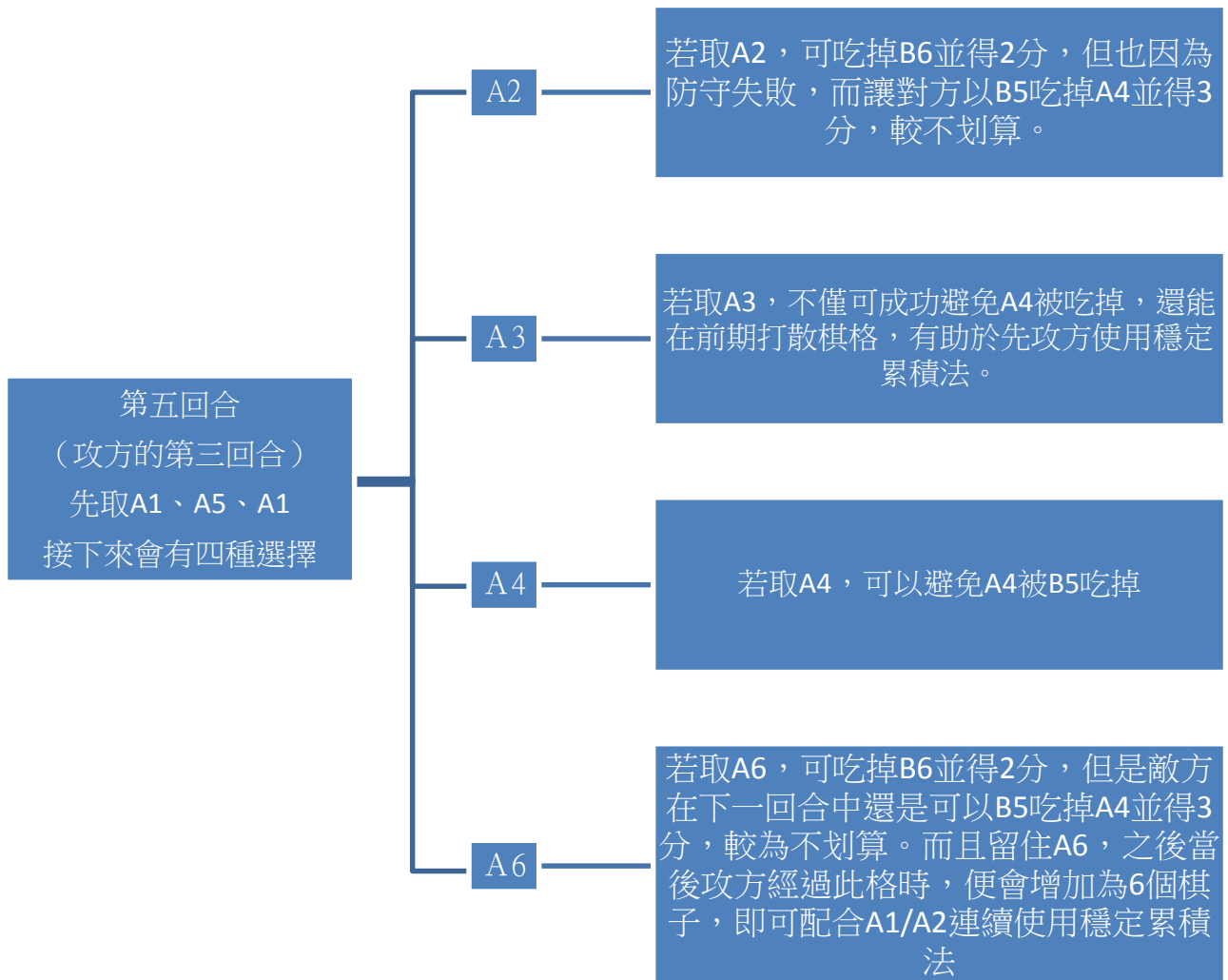
圖十八：第四回合



(二) 第五回合

在第五回合中，先攻方會依序先取A1、A5、A1，接下來的情況如下圖十九。

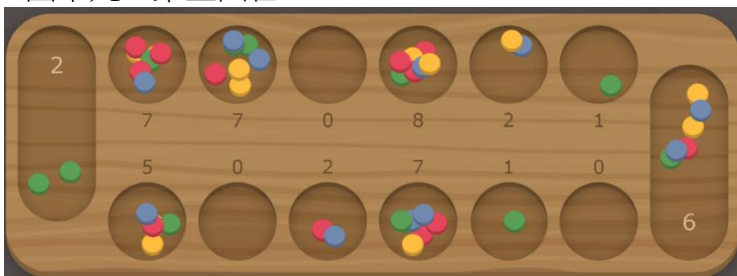
圖十九：第五回合的取法樹狀圖



(圖十九來源：學生整理)

明顯地，取A3或A4跟A2和A6比起來較為優勢且在下一回合的效益較佳。但是取A3或A4在下兩回合內不會有太大的差異，無法找出較佳取法，後面就以實際的競賽繼續探討，如下圖十九。

圖十九：第五回合



四、第六回合後的實際賽局

按照我們前面的較佳取法進行前四回合，第五回合之後便由兩位玩家競賽，根據結果顯示，先攻者勝率較高（57%），但從賽局過程中我們發現一些端倪，後攻方若不採取集

結法幾乎是無法獲勝的；若採取集結法雙方勝率約50%，因此我們發現後攻方要贏都有一個共通點，皆以一次性大量得分的方式取勝，因為穩定累積法無法彌補與先攻者的差距。集結法、進階空格吃棋法等大量得分才有逆轉獲勝的可能，於是我們著手研究有幾種能讓後攻方使用集結法並獲得勝利的方法？

經過實驗，我們發現其中一種能使後攻方獲勝的方式如下：

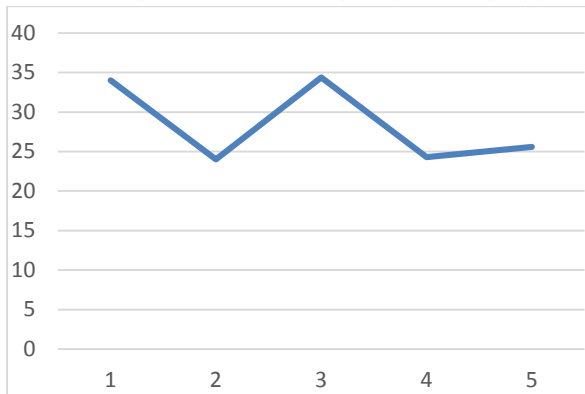
A4→A1；B5→B6；A2；B3；A1→A5→A3；B1；A6→A4→A3→A5；B3；A1；B4；A2；B3→B4；A1。

結果：23：25

五、驗證較佳路徑

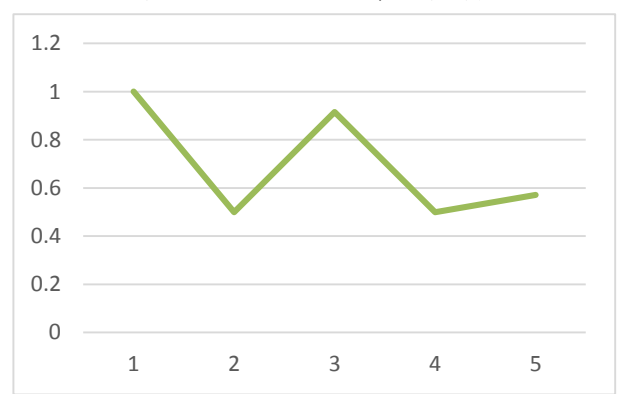
最後，我們將賽局分成五種類別，分別為：前一回合、前兩回合、前三回合、前四回合、前五回合使用較佳路徑，每一種類實際競賽約十到十二場，並觀察五種類別與攻方平均得分、五種類別與勝率之間的關係，並繪製成折線圖，如下表一、表二。

表一：五種類別與攻方平均得分的關係



（表一來源：學生整理）

表二：五種類別與攻方勝率的關係



（表二來源：學生整理）

透過上圖我們發現，在前一回合、前三回合、前五回使用較佳路徑等三種情況時，先攻方的平均得分與勝率明顯較高，原因可歸納為與後攻方相比使用了多一次的較佳路徑，即擁有較大的優勢；在前二回合、前四回合、使用較佳路徑等兩種情況時，先攻方的勝率與平均得分降低，原因可歸納為雙方都使用了相同次數的較佳路徑，戰況會相對比較接近。因此我們可以說較佳路徑的確對於雙方玩家皆有一定的幫助。

參、結論

透過探討研究與賽局結果分析，發現在不失誤的前提下，先攻方獲勝的機率會高於後攻者但不會相差太大。分析原因如下，以先攻方的角度，優先清空靠右的棋格並盡可能打散自己的地盤，方便之後穩定累積法的使用，穩定累積法的使用相較來說較為簡單，此為先攻方的一大優勢，並盡可能迫使後攻方無法使用集結法；以後攻方的角度，想辦法為後期的集結法做鋪陳，集結法的使用需要一定的技巧，雖然這是後攻方逆轉的一好方法，但不能前期就著急與集結，因為前期先攻方的棋子較散，可移動總步數較多，因此前期要以防守為主，盡量影響並阻止先攻方穩定累積法的使用。兩方所採取的玩法會因為先後攻的順序不一樣而不盡相同，然而空格吃棋法在熟練玩家的賽局中較少出現，因為玩家只要夠細心，就能避免該吃法。

在我們有限的討論範圍內尚未找到一個必勝或必和的方法，本文僅提供一套研究者們集思廣益的思路與取其技巧，並提高勝率。尚有許多種情況並未探討，例如：若玩家不先考慮防守並採用犧牲法會怎麼發展？或是玩家考量到更長遠回合的設計等等。實際賽局中還有許多變因，例如：玩家的心理狀態、細心程度等等，況且雙方玩家的思路不一定相同，這些都足以影響賽局的結果。

肆、引註資料

- 1、 介紹Mancala遊戲規則與由來。2019年3月28日。
<https://www.thesprucecrafts.com/mancala-411837>
- 2、 遊戲技巧與參考。2019年3月28日。<https://m.wikihow.com/Win-Mancala>
- 3、 線上Mancala遊戲。2019年3月28日。<https://mancala.playdrift.com/>
- 4、 林玉體（1993）。邏輯。台北市：三民書局。
- 5、 OMER TAMUZ. (2018). LECTURE NOTES ON GAMES THEORY, 1(1), 7.