3001 Midterm Exam Algorithms

Strings Matching

Rabin-Karp Algorithm

假设子串的长度为M,目标字符串的长度为N

计算子串的hash值，计算目标字符串中每个长度为M的子串的hash值（共需要计算N-M+1次），比较hash值，如果hash值不同，字符串必然不匹配，如果hash值相同，还需要使用朴素算法再次判断。

Rabin-Karp算法的预处理时间是O(m)， 匹配时间O((N-M+1)*M)。

为了快速的计算出目标字符串中每一个子串的hash值，Rabin-Karp算法并不是对目标字符串的 每一个长度为M的子串都重新计算hash值，而是在前几个字串的基础之上， 计算下一个子串的 hash值，这就加快了hash值的计算速度，将朴素算法中的内循环的时间复杂度从O(M)降到了O(1)。

我们将长度为5的整形数组中的每个数值都映射到一个5位数的每一位上，然后用这个数值跟m做“mod”运算。取模的意义在于将较大的集合映射为较小的集比较方便，使用素数是为了减少碰撞率。

Knuth-Morris-Pratt Algorithm

KMP 的思想与朴素搜索类似，但在执行普通的朴素搜索之前先对字符串进行分析并得出“部分匹配值”，每次遇到不匹配的地方可以通过读取部分匹配值不需要整个回溯。

“部分匹配值”就是”前缀”和”后缀"的最长的共有元素的长度。以"ABCDABD"为例。前面直到ABCD的部分匹配值都是0，但"ABCDA"的前缀为[A, AB, ABC, ABCD]，后缀为[BCDA, CDA, DA, A]，共有元素为”A”，长度为1。"ABCDAB"的前缀为[A, AB, ABC, ABCD, ABCDA]，后缀为[BCDAB, CDAB, DAB, AB, B]，共有元素为”AB”，长度为2。当搜索到 ABCDAB 的时候，如果下一位没有匹配就可以回到字符串的第二位，也就是 B 的那里。

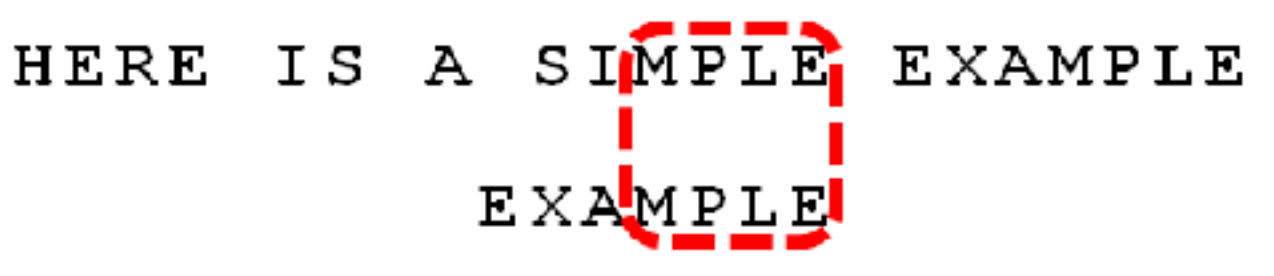
设主串与子串长度分别为m和n，BF算法在最坏的情况下，每一趟不成功的匹配都是在子串的最后的一个字符与主串中相应的字符匹配失败，即在最坏情况下时间复杂度为：O（n*m）

Boyer-Moore Algorithm

首先，”字符串"与"搜索词"头部对齐，从尾部开始比较。如果出现字符不匹配，这时，"S"就被称为"坏字符"（bad character），即不匹配的字符。"坏字符规则"后移位数 = 坏字符的位置 - 搜索词中的上一次出现位置

以"P"为例，它作为"坏字符"，出现在搜索词的第6位（从0开始编号），在搜索词中的上一次出现位置为4，所以后移 6 - 4 = 2位。再以前面第二步的"S"为例，它出现在第6位，上一次出现位置是 -1（即未出现），则整个搜索词后移 6 - (-1) = 7位。

所有尾部匹配的字符串称为"好后缀"（good suffix），可以采用"好后缀规则"：后移位数 = 好后缀的位置 - 搜索词中的上一次出现位置



举例来说，如果字符串"ABCDAB"的后一个"AB"是"好后缀"。那么它的位置是5（从0开始计算，取最后的"B"的值），在"搜索词中的上一次出现位置"是1（第一个"B"的位置），所以后移 5 - 1 = 4位，前一个"AB"移到后一个"AB"的位置。 再举一个例子，如果字符串"ABCDEF"的"EF"是好后缀，则"EF"的位置是5 ，上一次出现的位置是 -1（即未出现），所以后移 5 - (-1) = 6位，即整个字符串移到”F"的后一位。

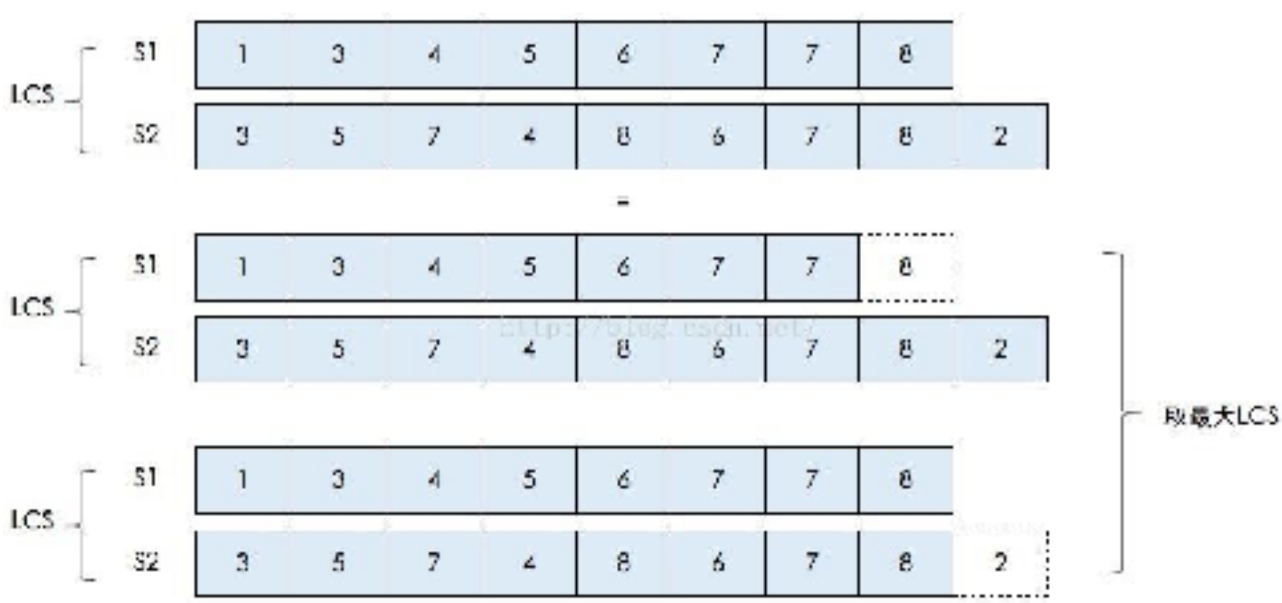
这个规则有三个注意点：（1）"好后缀"的位置以最后一个字符为准。假定"ABCDEF"的"EF"是好后缀，则它的位置以"F"为准，即5（从0开始计算）。 （2）如果"好后缀"在搜索词中只出现一次，则它的上一次出现位置为 -1。比如，"EF"在"ABCDEF"之中只出现一次，则它的上一次出现位置为-1（即未出现）。 （3）如果”好后缀"有多个，则除了最长的那个"好后缀"，其他"好后缀"的上一次出现位置必须在头部。比如，假定"BABCDAB"的"好后缀"是"DAB"、"AB"、"B"，请问这时"好后缀"的上一次出现位置是什么？回答是，此时采用的好后缀是"B"，它的上一次出现位置是头部，即第0位。这个规则也可以这样表达：如果最长的那个"好后缀"只出现一次，则可以把搜索词改写成如下形式进行位置计算"(DA)BABCDAB"，即虚拟加入最前面的"DA"。

回到上文的这个例子。此时，所有的"好后缀"（MPLE、PLE、LE、E）之中，只有"E"在"EXAMPLE"还出现在头部，所以后移 6 - 0 = 6位。

Longest Common Subsequence

Dynamic Programming

适合采用动态规划方法的两个要素：最优子结构性质，和子问题重叠性质



optimal substructure: optimal solutions to a problem incorporate optimal solutions to related subproblems, which we may solve independently.

解决LCS问题，需要把原问题分解成若干个子问题，所以需要刻画LCS的特征：

假如S1的最后一个元素 与 S2的最后一个元素相等，那么S1和S2的LCS就等于 {S1减去最后一个元素} 与 {S2减去最后一个元素} 的 LCS 再加上 S1和S2相等的最后一个元素。

假如S1的最后一个元素 与 S2的最后一个元素不等（本例子就是属于这种情况），那么S1和S2的LCS就等于： {S1减去最后一个元素} 与 S2 的LCS， {S2减去最后一个元素} 与 S1 的LCS 中的最大的那个序列。可得递归公式如下：

$$C[i,j]=\begin{cases}0 & 若\ i=0或j=0\\ C[i-1,j-1]+1 & 若\ i,j>0,x_i=y_j\\ \max\{C[i,j-1],C[i-1,j]\} & 若\ i,j>0,x_i\neq y_j\end{cases}$$

在填写过程中我们还是记录下当前单元格的数字来自于哪个单元格，以方便最后我们回溯找出最长公共子串。有时候左上、左、上三者中有多个同时达到最大，那么任取其中之一，但是在整个过程中你必须遵循固定的优先标准。

		G	C	C	C	T	A	G	C	G
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	2	2	2	2	2	3	3	3
C	0	1	2	3	3	3	3	3	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4
T	0	1	2	3	3	4	4	4	4	4
G	0	1	2	3	3	4	4	5	5	5

构建c[i][j]表需要Θ(mn)，输出1个LCS的序列需要Θ(m+n)。

Knapsack Problem

Fractional Knapsack Problem

普通的背包问题可以直接使用 Greedy Algorithm 得出最优解

0-1Knapsack Problem

用子问题定义状态：即f[i][v]表示前i件物品恰放入一个容量为v的背包可以获得的最大价值。则其状态转移方程便是： f[i][v]=max{f[i-1][v],f[i-1][v-c[i]]+w[i]}

“将前i件物品放入容量为v的背包中”这个子问题，若只考虑第i件物品的策略（放或不放），那么就可以转化为一个只牵扯前i-1件物品的问题。如果不放第i件物品，那么问题就转化为“前i-1件物品放入容量为v的背包中”，价值为f[i-1][v]；如果放第i件物品，那么问题就转化为“前i-1件物品放入剩下的容量为v-c[i]的背包中”，此时能获得的最大价值就是f[i-1][v-c[i]]再加上通过放入第i件物品获得的价值w[i]。

以上方法的时间和空间复杂度均为O(VN)。

细节问题：我们看到的求最优解的背包问题题目中，事实上有两种不太相同的问法。有的题目要求“恰好装满背包”时的最优解，有的题目则并没有要求必须把背包装满。一种区别这两种问法的实现方法是在初始化的时候有所不同。

如果是第一种问法，要求恰好装满背包，那么在初始化时除了f[0]为0其它f[1..V]均设为-∞，这样就可以保证最终得到的f[N]是一种恰好装满背包的最优解。 如果并没有要求必须把背包装满，而是只希望价格尽量大，初始化时应该将f[0..V]全部设为0。

可以这样理解：初始化的f数组事实上就是在没有任何物品可以放入背包时的合法状态。如果要求背包恰好装满，那么此时只有容量为0的背包可能被价值为0的nothing“恰好装满”，其它容量的背包均没有合法的解，属于未定义的状态，它们的值就都应该是-∞了。如果背包并非必须被装满，那么任何容量的背包都有一个合法解“什么都不装”，这个解的价值为0，所以初始时状态的值也就全部为0了。

Travel Salesman Problem

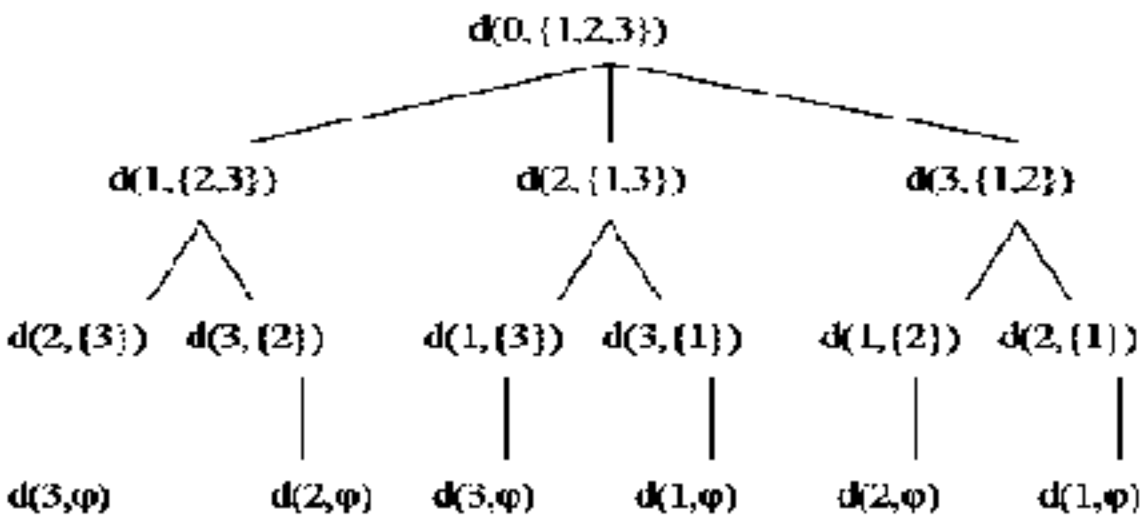
假设从顶点s出发，令d(i, V’)表示从顶点i出发经过V’(是一个点的集合)中各个顶点一次且仅一次，最后回到出发点s的最短路径长度。推导：

①当V’为空集，那么d(i, V’)，表示从i不经过任何点就回到s了，如上图的 城市3->城市0(0为起点城市)。此时d(i, V’)=Cis(就是 城市i 到 城市s 的距离)

②如果V’不为空，那么就是对子问题的最优求解。你必须在V’这个城市集合中，尝试每一个，并求出最优解。 d(i, V’)=min{Cik + d(k, V’-{k})} 注：Cik表示你选择的城市和城市i的距离，d(k, V’-{k})是一个子问题。

计算的流程如下图所示

$$d(i,V')=\begin{cases} c_{is} & V'=\phi, i\neq s \\ \min\limits_{k\in V'}\{c_{ik}+d(k,V'-\{k\})\} & V'\neq\phi \end{cases}$$



i \ j	{}	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
0								10
1	5		8	6			7	
2	6	9		5		10		
3	3	12	11		14			

Uninformed Search Algorithms

Breadth First

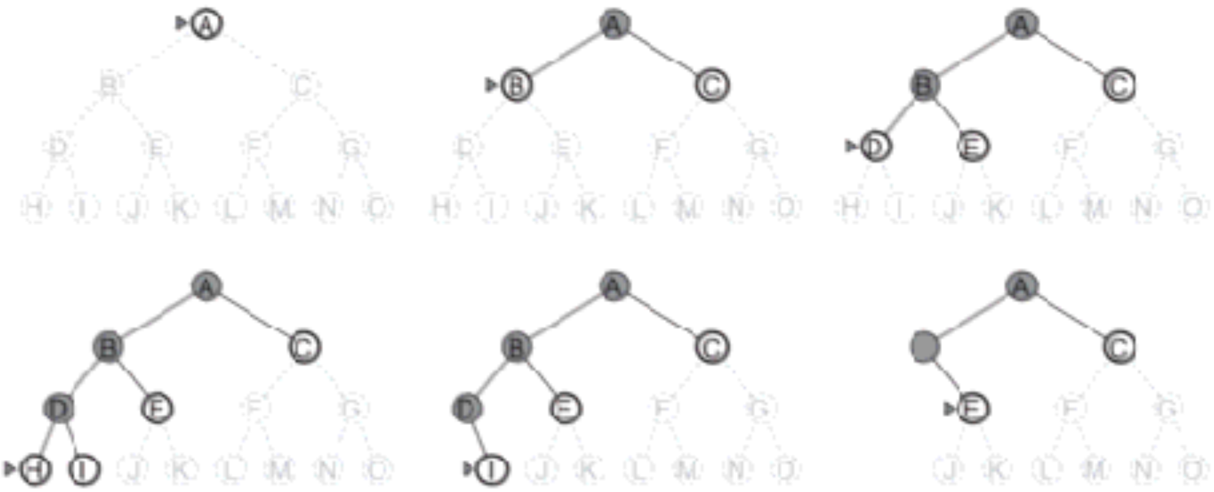
广度优先算法，通过一个 FIFO 队列来实现，总是有到每一个边缘节点的最浅路径，所以如果路径基于节点深度的非递减函数，那么这是最优的。但他的时间和空间复杂度并不好。O(b^(d+1))，因为每个节点都会储存在内存中所以空间复杂度 O(b^d)，一般来讲指数级别复杂度的搜索问题不能用无信息的搜索算法求解，除非是规模很小的实例。

Uniform Cost

一致代价搜索扩展的是路径消耗最小的节点，可以通过将边缘节点按照代价排序的队列来实现。该算法对步数并不关心，只关心路径总代价。所以如果存在另代价的行动可能陷入死循环。

Depth First

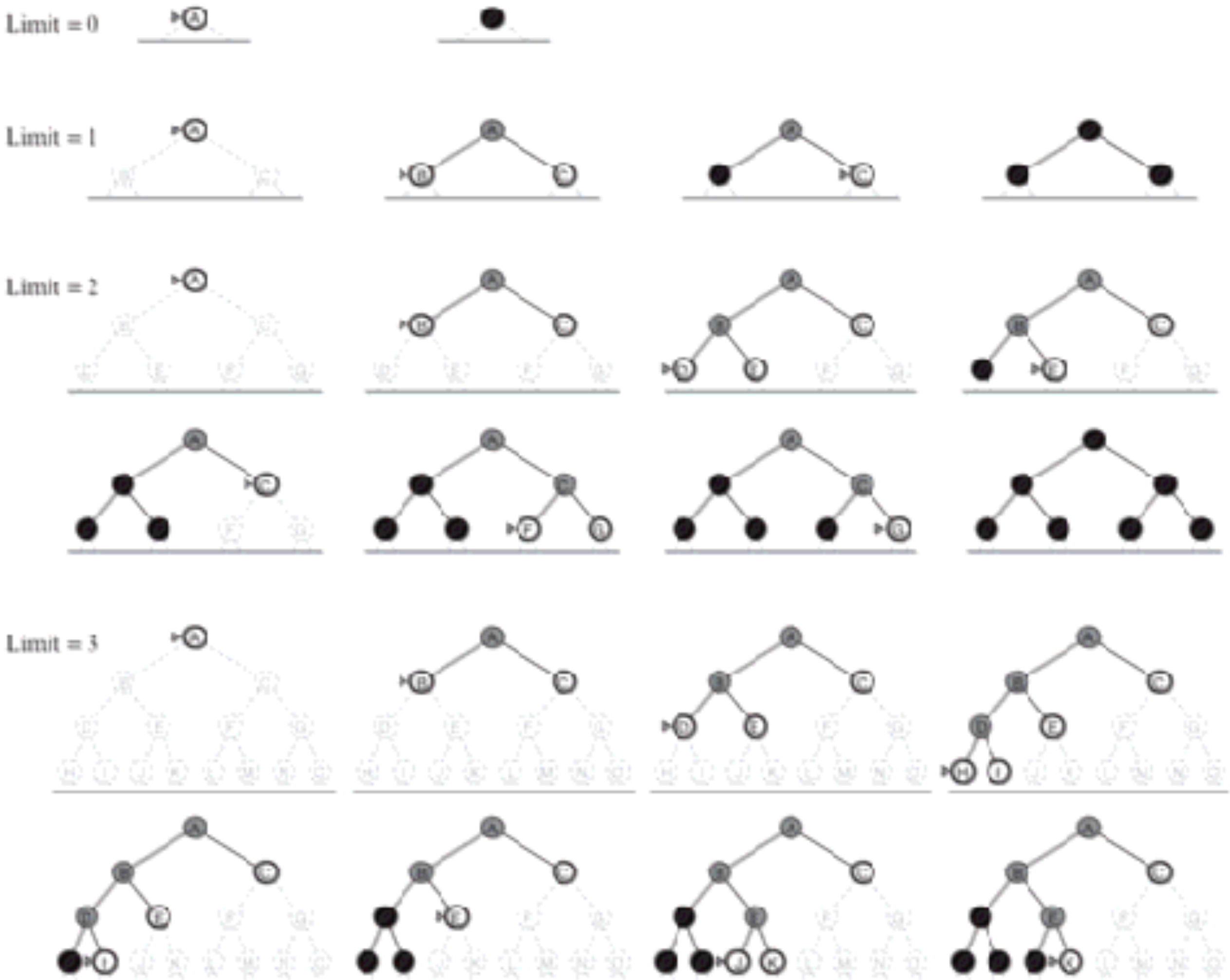
该算法在有限状态空间是完备的，因为他至多扩展所有节点。
他的时间复杂度受限于状态空间的规模（可能是无限的），但在空间复杂度，只需要存储一条从根节点到叶节点的路径，只需要存储 O(bm)个结点。



Depth Limited

对深度优先搜索设置界限来避免无限状态空间，但如果目标节点 l 深度超过了深度限制d，那么这种算法就是不完备的，同样如果深度限制超过了目标节点深度，该算法也不是最优的。时间复杂度是 O(b^l) 空间复杂度是 O(bl)。

Iterative Deepening



重复地运行一个有深度限制的深度优先搜索，每次运行结束后，它增加深度并迭代，直到找到目标状态。 IDDFS 与广度优先搜索有同样的时间复杂度，而空间复杂度远优。如同广度优先搜索，分枝

因子有限时，该算法是完备的，当路径基于节点深度的非递减函数，也是最优的。重复生成上层状态需要付出额外代价，但事实上并不是多大。一般来说，当搜索空间较大同时不知道解的所在深度，迭代加深的深度优先搜索是搜选的无信息搜索方法。

Bidirectional

双向搜索的思想是同时运行两个搜索，一个从初始状态正向搜索，另一个从目标状态反向搜索，当两者在中间汇合时搜索停止。在很多情况下该算法更快，假设搜索一棵分支因子b的树，初始节点到目标节点的距离为d，该算法的正向和反向搜索复杂度都是O(bd/2)，两者相加后远远小于普通的单项搜索算法（复杂度为O(bd)）。

Criterion	Breadth-First	Uniform-Cost	Depth-First	Depth-Limited	Iterative Deepening	Bidirectional (if applicable)
Complete?	Yes^{a}	Yes^{a,b}	No	No	Yes^{a}	Yes^{a,d}
Time	$O(b^d)$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(b^m)$	$O(b^\ell)$	$O(b^d)$	$O(b^{d/2})$
Space	$O(b^d)$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(bm)$	$O(b\ell)$	$O(bd)$	$O(b^{d/2})$
Optimal?	Yes^{c}	Yes	No	No	Yes^{c}	Yes^{c,d}

Figure 3.21 Evaluation of tree-search strategies. b is the branching factor; d is the depth of the shallowest solution; m is the maximum depth of the search tree; l is the depth limit. Superscript caveats are as follows: ^{a} complete if b is finite; ^{b} complete if step costs $\geq \epsilon$ for positive ϵ; ^{c} optimal if step costs are all identical; ^{d} if both directions use breadth-first search.

Informed Search Algorithms

Greedy Algorithm

A* Algorithm

Game Playing

Minimax algorithm

Alpha-Beta Pruning