视觉SLAM:从理论到实践(深蓝学院第二期)

笔记本:	网课笔记		
创建时间:	2019/2/20 8:01	**更新时间:**	2019/2/27 14:37
作者:	elliszkn@163.com		
标签:	SLAM		
URL:	view-source:https://blog.csdn.net/youngpan1101/article/details/71086851		

视觉SLAM:从理论到实践

第一讲 概述与预备知识

> ### 1 课程内容与预备知识
>
> > KITTI
> > 几个视频
> > 稀疏
> > 半稠密semi-dense
> > 稠密dence
> >
> > ---
> >
> > SLAM应用：手持设备定位，自动驾驶，AR
> > 《视觉SLAM十四讲》+《多视图几何》（MVG）+《机器人状态估计》
>
> ### 2 SLAM是什么
>
> > - 视觉SLAM框架
> >   前端:Visual Odometry
> >   后端:Optimization
> >   回环:Loop Closing
> >   建图:Mapping

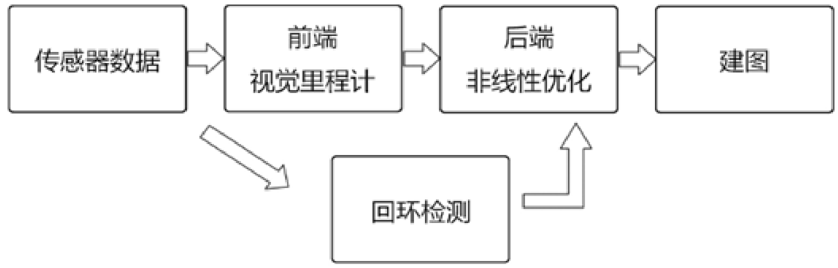
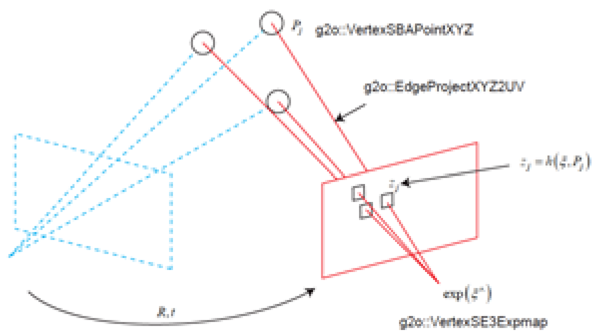


图 2-7　整体视觉 SLAM 流程图。

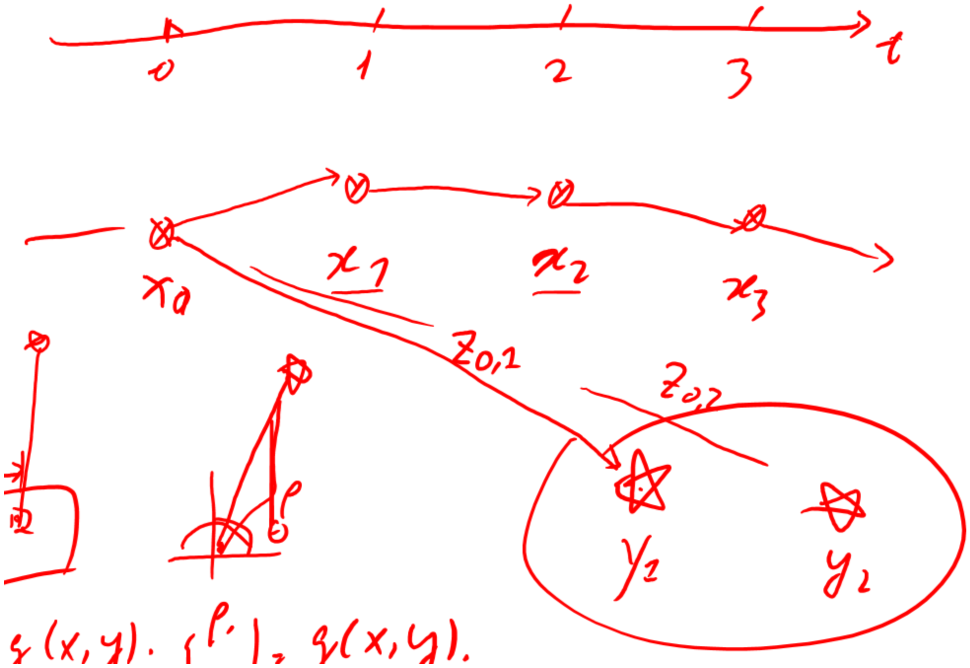
视觉里程计
估计邻近时刻的相机运动
最简化：两个图像的相对运动
方法：特征点法，直接法
后端
从带有噪声的数据中估计最优轨迹与地图
最大后验概率估计
滤波器
图优化



回环检测
检测相机是否到达过之前的位置
判断与之前位置的差异
计算图像间相似性
词袋模型
建图
导航，规划，通讯，交互，可视化
度量地图，拓扑地图
稀疏地图，稠密地图

3 视觉SLAM数学表述与框架

x_{k+1}=f(x_k，u_k)+w_k
此为**运动方程**
w_k噪声，u_k输入项
"星星"是路标，$z_{k,j}$表示x_k到y_j的一个测量采集

> $z_{k,j} = g(x_k, y_j) + v_{k,j}$
> **测量方程**
>
> $v_{k,j}$噪声
>
> 
>
>
> 通过u_k,$z_{k,j}$来表示x_k,y_j
>
> x_k称为定位，y_j称为建图
>
> $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_k = f\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_k\right) \\ \boldsymbol{z}_{k,j} = h\left(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_{k,j}\right) \end{array}\right. .$$
>
> x:旋转，位移

4 实践：Linux下的C++编程基础

gcc
g++
CMake

> CMakeLists.txt 语法:
> project（）项目名
> add_executable(xxx yyy.cpp) 添加权限
> add_library(libHello src/xxx.c)生成库文件
> target_link_libraries(xxx libHello)xxx调用了lib，生成一个lib.a文件
> include_directories("include")添加引用头文件的地方

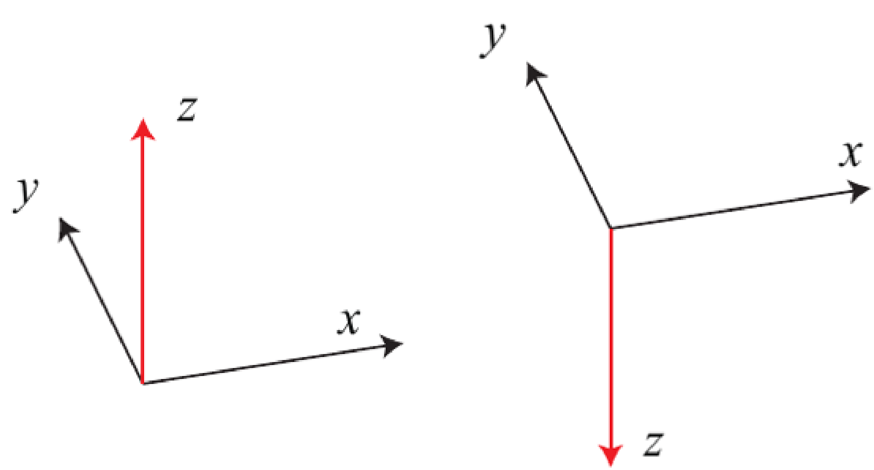
> 建build
> 用Clion
> debug时候
> set(CMAKE_BUILD_TYPE Debug)
>
> ---
>
> 前面要加cmake_minimum_required(VERSION 2.8)

第二讲 三维空间的刚体运动

运动方程:$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$

观测方程:$z_{k,j} = g(x_k, y_j) + v_{k,j}$
三个问题:

1. x_k如何表达
2. f, g如何表达
3. u,z->x,y

> ### 1 点与坐标系
>
> > 2D=两个坐标+旋转角
> >
> > - 坐标系(参考系)
> >
> > 
> >
> >
> > 右手系　　　　左手系
> >
> > - 点
> > - 向量
> > - 向量的坐标
> >
> > 问题:
> >
> > 1. 如何描述坐标系与坐标系之间的变换?

2. 如何计算同一个向量在不同坐标系中的坐标?

   向量的运算可由坐标运算表达
   加法和减法
   内积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle .$$

   外积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} \triangleq \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b}.$$

SLAM中

1. 固定的世界坐标系和移动的机器人坐标系
2. 不同的传感器坐标系

2 旋转矩阵

考虑一次旋转

- 坐标系(e_1, e_2, e_3)发生了旋转，变成了$(e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'})$

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{e}_1^{'}, \boldsymbol{e}_2^{'}, \boldsymbol{e}_3^{'}\right] \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} . \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_1^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_2^T \boldsymbol{e}_3^{'} \\ \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_1^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_2^{'} & \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{e}_3^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{'}.$$

R为旋转矩阵
可以验证:

> - R是一个正交矩阵
> - R的行列式为+1

满足这两个性质的矩阵称为**旋转矩阵**

$$SO(n) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1\}.$$

Special Orthogonal Group特殊正交群

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'.$$

于是，1到2的旋转可表达为：

$$a_1 = R_{12}a_2$$

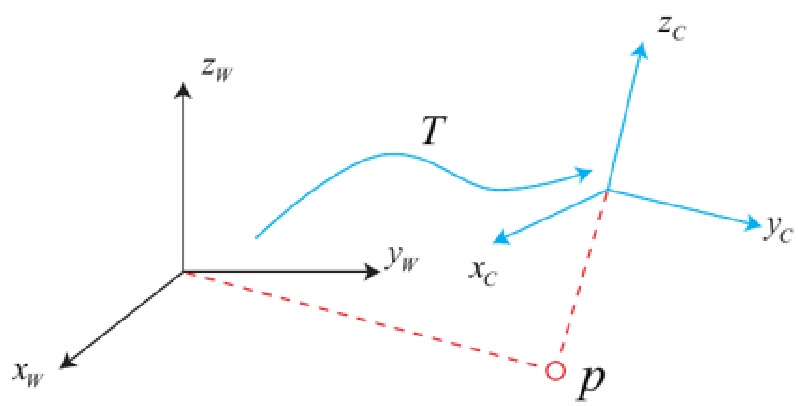
反之： $a_2 = R_{21}a_1$

矩阵关系： $\boxed{R_{21} = R_{12}^{-1} = R_{12}^T}$

旋转+平移

$a' = Ra + t$

两个坐标系间的运动可用R, t完全描述



欧拉旋转定理（Euler's rotation theorem）：刚体在三维空间里的一般运动，可分解为刚体上方某一点的平移，以及绕经过此点的旋转轴的转动

齐次坐标与变换矩阵：

> 旋转加平移在表达复合情况下有不便之处
>
> $b = R_1a + t_1$
>
> $c = R_2b + t_2$
>
> $=> c = R_2(R_1a + t_1) + t_2$

齐次形式（Homogeneous）：

变换矩阵

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \tilde{b} = T_1 \tilde{a},\ \tilde{c} = T_2 \tilde{b} \quad \Rightarrow \tilde{c} = T_2 T_1 \tilde{a}.$$

齐次坐标

$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ 乘任意非零常数时仍表达同一坐标 $\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$

齐次：射影几何里用很多

变换矩阵的集合称为特殊欧式群SE(3) （Special Euclidean Group）

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | R \in SO(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

逆形式：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

3 旋转向量和欧拉角

除了旋转矩阵\变换矩阵外，还存在其他的表达方式

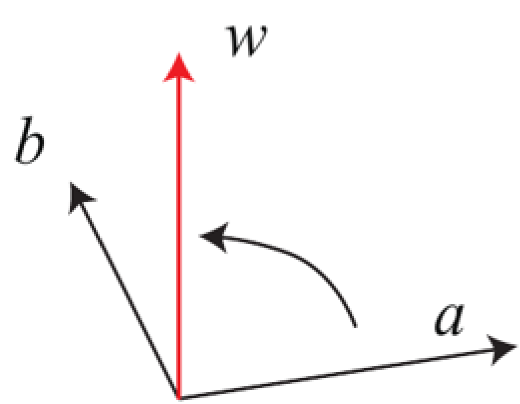
旋转矩阵R 9个元素表达3个自由度

用更少的元素来表达

旋转向量

方向为旋转轴，长度为转过的角度

称为轴角(Angle Axis)or旋转向量(Rotation Vector)



旋转向量与矩阵的不同：

- 仅有三个量
- 无约束
- 更直观

罗德里格斯公式(Rodrigues's Formula)

$\boldsymbol{R} = cos\theta \cdot \boldsymbol{I} + (1 - cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + sin\theta \cdot \boldsymbol{n}^{\wedge}$

旋转矩阵转向量：

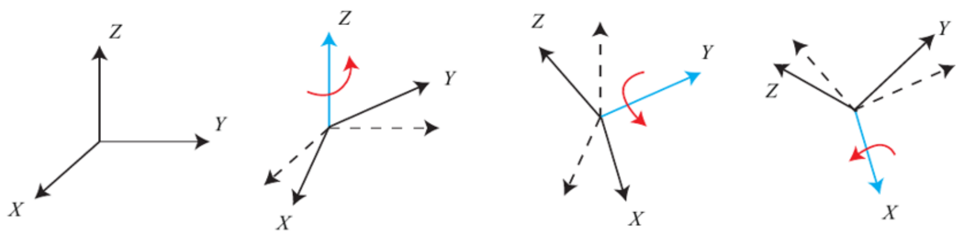
角度：$\theta = arccos(\frac{tr(\boldsymbol{R}) - 1}{2})$

轴：$\boldsymbol{R}n = n$

n是λ=1的特征向量

欧拉角(Euler Angles)

- 将旋转分解为三个方向上的转动
- 轴可定可动
- 绕Z轴:yaw偏航角
- 绕Y轴:pitch俯仰角
- 绕X轴:roll滚转角
- **万向锁**(Gimbal Lock)
  - 欧拉角的奇异性，特定值，旋转自由度减1
  - 因此欧拉角不适合插值和迭代
  - 可以证明：仅用3个实数表达旋转，不可避免发生奇异性



原始坐标系　第一次旋转　第二次旋转　第三次旋转

4 四元数

2D情况下，可用单位复数表达旋转

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$$

乘i转90度，乘-i转-90度

3D情况下，四元数作为复数的扩充

四元数(Quaternion)

- 三个虚部，一个实部

$$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

- 虚部之间满足：
$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases}$$

自己和自己算像复数，自己和别人算像叉乘

- 单位四元数可表达旋转

$$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$\boldsymbol{q} = [s, \boldsymbol{v}]$
$s = q_0 \in R, \boldsymbol{v} = [q_1, q_2, q_3] \in R^3$

- 四元数的运算

$$\boldsymbol{q}_a \pm \boldsymbol{q}_b = [s_a \pm s_b, \boldsymbol{v}_a \pm \boldsymbol{v}_b].$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b = & \; s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ & + (s_a x_b + x_a s_b + y_a z_b - z_a y_b)\, i \\ & + (s_a y_b - x_a z_b + y_a s_b + z_a x_b)\, j \\ & + (s_a z_b + x_a y_b - y_b x_a + z_a s_b)\, k. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b = \left[s_a s_b - \boldsymbol{v}_a^T \boldsymbol{v}_b, s_a \boldsymbol{v}_b + s_b \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{v}_b\right].$$

$$\boldsymbol{q}_a^* = s_a - x_a i - y_a j - z_a k = [s_a, -\boldsymbol{v}_a].$$

$$\|\boldsymbol{q}_a\| = \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*/\|\boldsymbol{q}\|^2.$$

$$k\boldsymbol{q} = [ks, k\boldsymbol{v}].$$

$$\boldsymbol{q}_a \cdot \boldsymbol{q}_b = s_a s_b + x_a x_b i + y_a y_b j + z_a z_b k.$$

- 四元数到角轴:
$\boldsymbol{q} = [cos\frac{\theta}{2}, n_x sin\frac{\theta}{2}, n_y sin\frac{\theta}{2}, n_z sin\frac{\theta}{2}]$
- 角轴到四元数:

$$\begin{cases} \theta = 2arccosq_0 \\ [n_x, n_y, n_z]^T = [q_1, q_2, q_3]^T / sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

设点 p 经过一次以 q 表示的旋转后，得到了 p'，它们关系如何表示?
将 p 的坐标用四元数表示（虚四元数）： $\boldsymbol{p} = [0, x, y, z] = [0, \boldsymbol{v}].$
旋转之后的关系为:

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}.$$

四元数相比于角轴，欧拉角的优势：紧凑，无奇异性

5 实践:Eigen

Eigen::Matrix<>

第三讲 李群与李代数

1. 群

- 三维旋转矩阵构成了**特殊正交群**(Special Orthogonal Group)

$$SO(3) = \{\boldsymbol{R} \in R^{3x3} \mid \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, det(\boldsymbol{R}) = 1\}$$

- 三维变换矩阵构成了**特殊欧式群**(Special Euclidean Group)

$$SE(3) = \{\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{T} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in R^{4x4} \mid \boldsymbol{R} \in SO(3), \boldsymbol{t} \in R^3\}$$

- 什么是群?
  - 群(Group)是一种集合加上一种运算的代数结构
  - 记集合为A，运算为·，那么运算满足以下时，称为(A,·)成群

    1. 封闭性： $\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A.$

    2. 结合律： $\forall a_1, a_2, a_3 \in A, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3).$

    3. 幺元： $\exists a_0 \in A, \quad s.t. \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a.$

    4. 逆： $\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad s.t. \quad a \cdot a^{-1} = a_0.$

    封结幺逆 “凤姐咬你”
    有时候加一个交换律
  - 容易验证：
    - 旋转矩阵集合与矩阵乘法构成群
    - 变换矩阵集合与矩阵乘法构成群
  - 其他群的例子：

一般线性群 $GL(n)$	指 $n \times n$ 的可逆矩阵，它们对矩阵乘法成群。
特殊正交群 $SO(n)$	也就是所谓的旋转矩阵群，其中 $SO(2)$ 和 $SO(3)$ 最为常见。
特殊欧氏群 $SE(n)$	也就是前面提到的 n 维欧氏变换，如 $SE(2)$ 和 $SE(3)$。

    《应用近世代数》
  - 群结构保证了群上的运算具有良好的性质
  - 群论是研究群的各种结构和的性质的理论

2. 李群和李代数

- **李群**(Lie Group)
  - 具有连续(光滑)性质的群
  - 既是群也是流形
  - 直观上看，一个刚体能够连续在空间中运动，故$SO(3)$和$SE(3)$都是李群
  - 但是，$SO(3)$和$SE(3)$只有定义良好的乘法，没有加法，故难以进行取极限、求导等操作

- **李代数**: 与李群对应的一种结果，位于向量空间
  - 通常记作小写的so(3)和se(3)
  - 这实际是李群单位元处的正切空间
  - 从旋转矩阵引入李代数:
    - 考虑任意旋转矩阵R，满足

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}$$

    - 令$\boldsymbol{R}$随时间变化(连续运动),有:

$$\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = \boldsymbol{I}$$

    - 两侧对时间**求导**:

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T + \boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)^T = 0$$

整理一下:

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = -(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^T)^T$$

反对称矩阵

$$-(\phi(t)^\wedge) = \phi(t)^\wedge$$

    - 记$\phi(t)^\wedge$ $\dot{R}(t)\boldsymbol{R}(t)^T = \phi(t)^\wedge$
      两边右乘$\boldsymbol{R}(t)$
      有：$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \phi(t)^\wedge \boldsymbol{R}(t)$
      即：**对R求导后，左侧多出一个$\phi(t)$**

反对称符号

$$\boldsymbol{a}^\wedge = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^\vee = \boldsymbol{a}.$$

    - 在单位元附近:
      $t_0 = 0, \boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t_0) + \dot{\boldsymbol{R}}(t_0)(t - t_0)$$

$$= \boldsymbol{I} + \phi(t_0)^\wedge(t)$$

- 由此可见，ϕ反映了**一阶导数性质**，它位于正切空间(tangent space)
- 在t_0附近，假设ϕ不变，有微分方程:

  $\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \phi(t_0)^{\wedge} \boldsymbol{R}(t) = \phi_0^{\wedge} \boldsymbol{R}(t)$

  已知初始情况：$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$

  有：$\boldsymbol{R}(t) = exp(\phi_0^{\wedge} t)$
- 该式说明，对于任何的t，都可以找到一个R和一个ϕ的对应关系

  此关系称为**指数映射**(Exponential Map)

  且这里的ϕ称为$SO(3)$对应的**李代数**：$\mathfrak{so}(3)$

  李群：高维空间的低维曲面（流形）

  李代数：曲线的切面

- 李代数(Lie Algebra)
  - 每个李群都有与之对应的李代数。
  - 李代数描述了李群单位元附近的正切空间性质。

李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：

$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$

3. 自反性[①]　$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0}$.
4. 雅可比等价　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] = \boldsymbol{0}$.

- 二元运算$[,]$被称为**李括号**(Lie Bracket)

  直观的来说，李括号表达了两个元素的差异
- 例子：三维空间向量+叉积运算 构成李代数
- 李代数$\mathfrak{so}(3)$:

$$\mathfrak{so}(3) = \{\boldsymbol{\phi} \in R^3, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\phi}^{\wedge} \in R^{3x3}\}$$

- 其中

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

李括号：

$$[\phi_1, \phi_2] = (\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1)^{\vee}.$$

- 同理，$SE(3)$亦有李代数$\mathfrak{se}(3)$:

$$\mathfrak{se}(3) = \{\xi = \begin{bmatrix}\rho \\ \phi\end{bmatrix} \in R^6, \rho \in R^3, \phi \in \mathfrak{so}(3), \xi^{\wedge} = \begin{bmatrix}\phi^{\wedge} & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix} \in R^{4x4}\}$$

上尖尖^ 不再是反对称矩阵，但仍保留记法：

$$\xi^{\wedge} = \begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

李括号：

$$[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1^{\wedge}\xi_2^{\wedge} - \xi_2^{\wedge}\xi_1^{\wedge})^{\vee}$$

李代数可以理解成向量和矩阵，向量自然一些

3. 指数映射与对数映射

- 指数映射反映了从李代数到李群的对应关系：
  - $R = exp(\phi^{\wedge})$
  - 但是$\phi^{\wedge}$是一个矩阵，对于矩阵求指数运算：

$$exp(\phi^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^{\wedge})^n$$

  - 由于ϕ是向量，定义其角度和模长：

    角度乘单位向量：$\phi = \theta a$

    关于a，可以验证：

    - $a^{\wedge}a^{\wedge} = aa^T - \boldsymbol{I}$
    - $a^{\wedge}a^{\wedge}a^{\wedge} = -a^{\wedge}$

    这为化解Taylor展开式中的高阶项提供了有效方法

  Taylor展开：

$$\begin{aligned}
\exp(\phi^{\wedge}) &= \exp(\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\theta \boldsymbol{a}^{\wedge})^n \\
&= \boldsymbol{I} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^{\wedge})^4 + \ldots \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^{\wedge})^2 + \ldots \\
&= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \ldots\right)\boldsymbol{a}^{\wedge} - \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \ldots\right)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge} - \cos\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&= \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}.
\end{aligned}$$

  结果：

$$\boxed{\exp(\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}) = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}.}$$

  ！！！和上一讲的罗德里格斯公式很像

  - 上一讲的罗德里格斯公式：

    $exp(\theta a^{\wedge}) = cos\theta \cdot \boldsymbol{I} + (1 - cos\theta)\boldsymbol{aa}^T + sin\theta \cdot \boldsymbol{a}^{\wedge}$

    这说明$so(3)$的物理意义是**旋转向量**

- 反之给定旋转矩阵时，亦能求李代数

$$\boxed{\phi = \ln(\boldsymbol{R})^{\vee} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I})^{n+1}\right)^{\vee}.}$$

对数映射

但是实际中没必要这样做，前面介绍了矩阵到向量的转化：

$$\theta = arccos(\frac{tr(\boldsymbol{R}) - 1}{2})$$

$$\boldsymbol{R}n = n$$

- 至此，说明了$SO(3)$和so(3)的对应关系

4. 求导与扰动模型

实践:Sophus