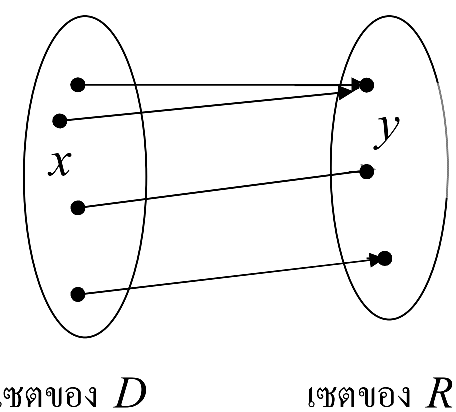
ฟังก์ชัน (Function)

ในบทนี้จะทบทวนนิยามของฟังก์ชัน พีชคณิตของฟังก์ชัน พร้อมทั้งคุณสมบัติเบื้องต้นเพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจเรื่องลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันในบทถัดไป

บทนิยาม 1 **ฟังก์ชัน**

ฟังก์ชันจากเซต D ไปยังเซต R คือ กฎเกณฑ์ที่บอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในเซต D และ R โดยสมาชิกในเซต D จะสัมพันธ์กับสมาชิกในเซต R เพียงตัวเดียวเท่านั้น



รูปที่ 1.1 แสดงความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซต D ไปยังเซต R ที่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชัน

จากนิยาม 1

- สมาชิกใน D เรียกว่า **โดเมน**(Domain) ของฟังก์ชันและสมาชิกในเซต R จะเรียกว่า **เรนจ์**(Range) ของฟังก์ชัน จึงสามารถเขียนฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับ โดยที่สมาชิกในโดเมนเป็นสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับ และสมาชิกในเรนจ์เป็นสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับ

ฟังก์ชันกำลังสามและกำลังสองข้างบนจึงเขียนในรูปเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$F1 = \{ (-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8) \}$$
$$F2 = \{ (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) \}$$

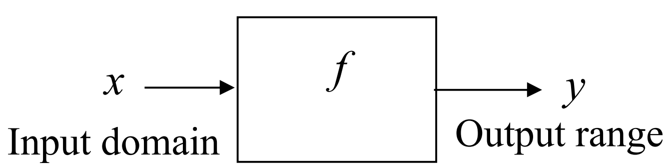
- ถ้าให้ x คือ สมาชิกในเซต D, y คือ สมาชิกในเซต R แล้ว f คือ สัญลักษณ์แทนฟังก์ชันที่ส่งจากสมาชิก x ในเซต D ไปยังสมาชิก y ในเซต R เขียนแทนด้วย

$$f : D \to R$$

จะได้ (x, y) เป็นค่าคู่อันดับความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน f โดยเรียก y ว่า**ค่าของฟังก์ชัน** f ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$y = f(x)$$

อาจกล่าวได้ว่านิยามของฟังก์ชันสามารถเปรียบเทียบว่าฟังก์ชัน f เป็นเสมือนเครื่องจักรชนิดหนึ่งที่เมื่อใส่ค่า x โดเมนของฟังก์ชันเข้าไปแล้วผลิตค่า y เรนจ์ของฟังก์ชันออกมาหนึ่งค่าเท่านั้นดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงแผนภูมิ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

เช่น

$$y = f(x) = x^2 + 2x \qquad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

จะเห็นว่าค่าของโดเมน x แต่ละค่าให้ค่าของเรนจ์ y เพียงค่าเดียว เช่น

$$x = 4 \quad \text{ได้} \quad y = f(4) = (4)^2 + 2(4) = 24$$

$$x = -1 \quad \text{ได้} \quad y = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -3$$

ตัวแปร x เรียกว่า **ตัวแปรอิสระ** ส่วน y เรียกว่า **ตัวแปรตาม**

Example 1.1 Consider the set $\{(-3,1),(0,2),(3,-1),(5,4)\}$.

(1) Is it a function? What are the domain and range of this set?

(2) Is the set $\{(4,3),(-1,2),(5,0),(4,6)\}$ a function?

Solution

Example 1.2 Let $f = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1^2\right\}$. Is f a function?

Solution

Example 2 Given $f(x) = -x^2 + 6x - 11$ find

(a) $f(2)$ (b) $f(-10)$ (c) $f(t)$ (e) $f(x-3)$

Example 1.3 Find the domain of the given functions**.**

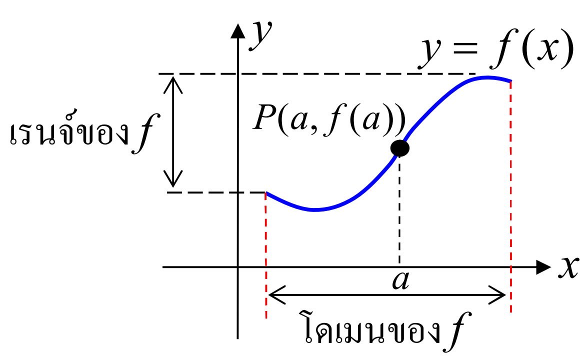
(a) $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$ (b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

(c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x}$ (d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

Solution

กราฟของฟังก์ชัน (Graph of a function)

กราฟของฟังก์ชัน f คือ กราฟของสมการ $y=f(x)$ ที่แสดงเส้นทางเดินของคู่อันดับ (x,y) บนระนาบพิกัดฉาก ดังรูป



รูปที่ 1.3

การสมมาตร (Symmetry)

นิยาม 4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน

ก. ฟังก์ชันคี่ (odd function) คือฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติ $f(-x) = -f(x)$

กราฟของฟังก์ชัน**คี่**จะสมมาตรกับจุดกำเนิด เช่น $f(x) = x^3$

ข. **ฟังก์ชันคู่** (even function) คือฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติ $f(-x) = f(x)$

กราฟของฟังก์ชัน**คู่**จะสมมาตรกับแกน y เช่น $f(x) = x^2$

Example 1.7

a) Let $f(x) = x^3$.

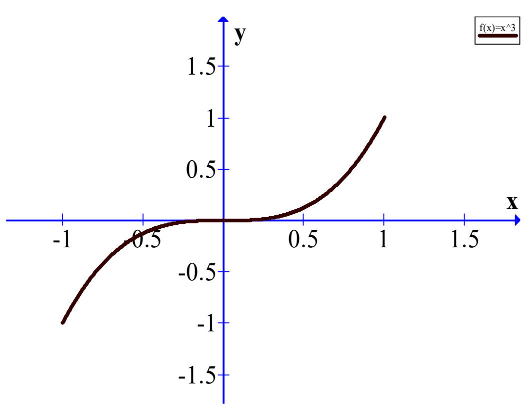
Since $f(-x) = -x^3 = -f(x)$,

thus f is an odd function whose graph is shown in figure 1.4.

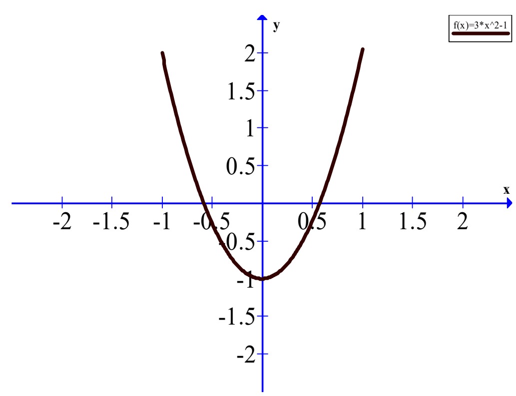
b) Consider $f(x) = 3x^2 - 1$.

Since $f(-x) = 3x^2 - 1 = f(x)$,

thus f is an even function whose graph is shown in Figure 1.5.



รูปที่ 1.4



รูปที่ 1.5

พีชคณิตของฟังก์ชัน

พีชคณิตของฟังก์ชัน คือการสร้างฟังก์ชันใหม่ โดยนำฟังก์ชันเดิมอย่างน้อยสองฟังก์ชัน มา บวก ลบ คูณ หาร กัน

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของ f และ g ตามลำดับ

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ และ $D_{f+g}=D_f \cap D_g$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ และ $D_{f-g}=D_f \cap D_g$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ และ $D_{f\cdot g}=D_f \cap D_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ และ $D_{f/g}=D_f \cap D_g$ และ x ที่ทำให้ $g(x)\neq 0$

Example 1.6 Let $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ and $g(x) = 3x + 1$. Find the sum, difference, product, and quotient of f and g, and specify the domain of each.

Solution

ฟังก์ชันประกอบ(Composite Function)

นิยาม 3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ **ฟังก์ชันประกอบ**ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f \circ g$ โดยที่

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

และโดเมนของ $f \circ g$ คือ $\{x / x \in D_g$ และ $g(x) \in D_f\}$

Example 1.6

Let $f(x) = \sqrt{x-3}$ and $g(x) = 2x - 1$.

a) If $F = f \circ g$, find $F(x)$ and the domain of F.

b) If $G = g \circ f$, find $G(x)$ and the domain of G.

c) If $H = f \circ f$, find $H(x)$ and the domain of H.

Solution

ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function)

นิยาม 5 ให้ f เป็นฟังก์ชัน เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน**หนึ่งต่อหนึ่ง** ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $(x, y) \in f$ และ $(z, y) \in f$ แล้ว $x = z$

นิยาม 6

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว **อินเวอร์ส**ของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} คือฟังก์ชันที่ได้จากการสลับสมาชิกในคู่อันดับทั้งหมดใน f ดังนั้น

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

- ถ้า f **ไม่เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

Example 1.8 Find an inverse of $f(x) = 2x - 1$

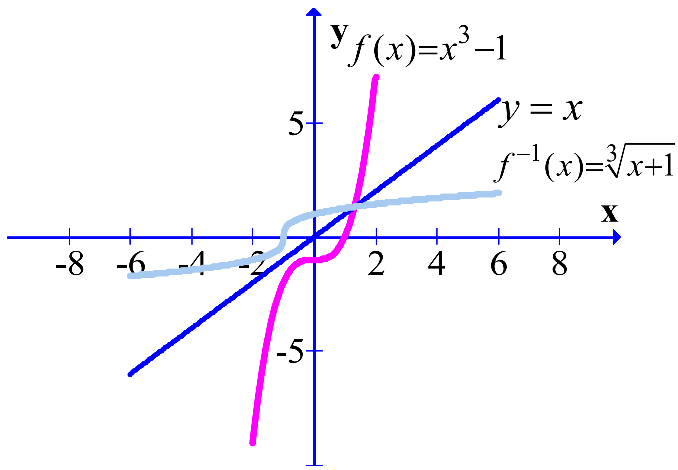
วิธีทำ

Example 1.8 Find an inverse of $f(x)=x^3-1$.

Solution From $y=f(x)=x^3-1$ i.e. $x=\sqrt[3]{y+1}$.

So $f^{-1}=\left\{(y,x) \mid x=y^3-1\right\}$ or $f^{-1}=\left\{(x,y) \mid y=\sqrt[3]{x+1}\right\}$.

ข้อสังเกต กราฟของฟังก์ชัน f และฟังก์ชันผกผัน f^{-1} จะสมมาตรกัน โดยมีเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตร ดังรูป 1.6



รูปที่ 1.6

ฟังก์ชันที่น่าสนใจ

ในวิชาคณิตศาสตร์แบ่งชนิดของฟังก์ชันเบื้องต้นออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) และฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Function)

1. ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function)

ก. ฟังก์ชันกำลัง(Power Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$f(x)=x^n$$

- เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก $y = x^n$ เป็นฟังก์ชันกำลังบวก ที่มี $D_f = (-\infty, \infty)$
- เมื่อ n คือ จำนวนเต็มลบ $y = x^{-n}$ หรือ $y = \frac{1}{x^n}$ เป็นฟังก์ชันกำลังลบ ที่มี $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- ฟังก์ชันรากที่ n $y = \sqrt[n]{x}$ หรือ $y = x^{\frac{1}{n}}$ เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก ที่มี $D_f = (0, \infty)$ สำหรับ n เป็นเลขคู่ และ $D_f = (-\infty, \infty)$ สำหรับ n เป็นเลขคี่

ข. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริง $i = 0, 1, 2, ..., n$

n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มใหญ่ที่สุด ซึ่ง $a_n \neq 0$ เราเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น n ที่มี $D_f = (-\infty, \infty)$ เช่น

- ฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 0 : $f(x) = c_0$ คือ ฟังก์ชันคงตัว (Constant Function)
- ฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 1 : $f(x) = c_0 + c_1 x$ คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นตรง(Linear Function)
- ฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 2 : $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ คือ ฟังก์ชันกำลังสอง(Quadratic Function)

- ฟังก์ชันพหุนามระดับชั้น 3 :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

คือ ฟังก์ชันกำลังสาม(Cubic Function) เป็นต้น

ค. ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนาม โดยมีรูปทั่วไปเป็น

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

เมื่อ $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 \neq 0$ ที่มี $D_f = (-\infty, \infty)$ ยกเว้นจุดที่ x ที่ทำให้ $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$

ง. ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt[n]{f(x)}$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามหรือฟังก์ชันตรรกยะ

จ. ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ (Piecewise Defined Functions) คือ ฟังก์ชันที่ถูกนิยามโดยหลาย ๆ สมการในโดเมนของฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Example 1.4 If $h(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4} & ,x\neq 4\\ 5 & ,x=4\end{cases}$ find the domain and range of h.

Solution The domain of h is R and the range is $R-\{7\}$.

ช. ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลบวก ลบ คูณ หรือหารของฟังก์ชันในข้อ ก.ถึง จ.

Example 1.10 Find the domain of each of the following functions.

1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

2. ฟังก์ชันอดิสัย (Transcendental Function)

ก. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบค่าคงตัวยกกำลังตัวแปรต้น อยู่ในรูป

$$f(x) = a^x \ ; \ a > 0 \ , \ a \neq 1$$

เรียกว่า **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเซียลฐาน** a ที่มีโดเมน คือ $D_f = (-\infty, \infty)$

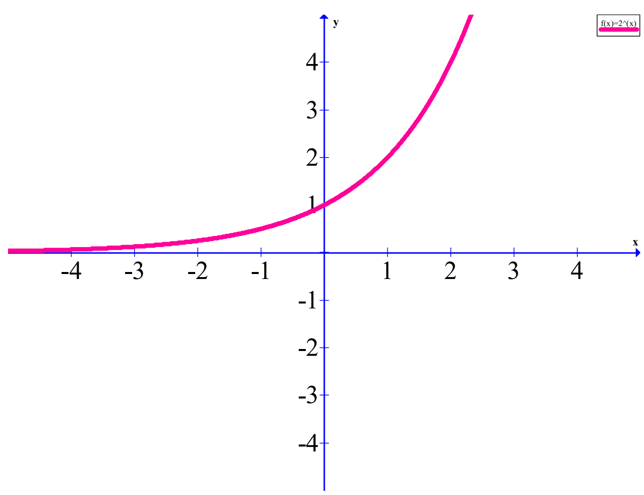
- ถ้า $a = e$ แล้ว $f(x) = e^x$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเซียลฐาน** e

  เมื่อ e คือ จำนวนอตรรกยะที่นิยามจาก $e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \approx 2.71$

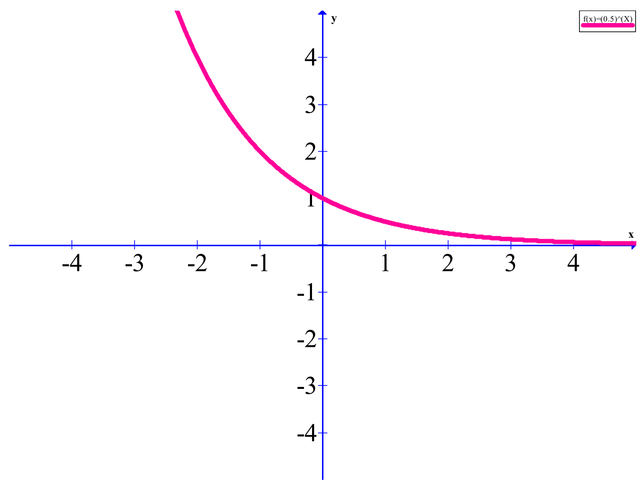
- **กราฟของ** $f(x) = a^x$

  ถ้า $a > 1$ และ $a \neq 1$ กราฟของ $f(x) = a^x$ ดังรูป 6

  ถ้า $0 < a < 1$ กราฟของ $f(x) = a^x$ ดังรูป 7



รูปที่ 1.7

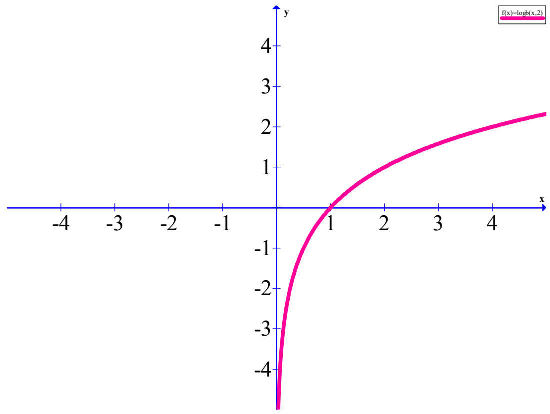


รูปที่ 1.8

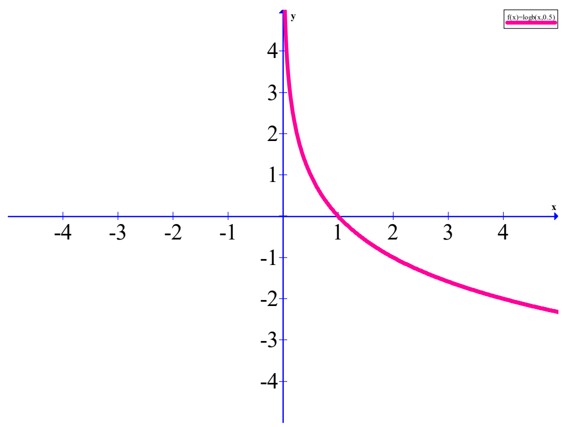
ข. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล นั่นคือ ถ้า $y = a^x$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล แล้วฟังก์ชันอินเวอร์สของ $y = a^x$ คือ $y = \log_a x$

- ถ้า $b = 10$ แล้ว $f(x) = \log_{10} x$ เขียนแทนด้วย $f(x) = \log x$
- ถ้า $b = e$ แล้ว $f(x) = \log_e x$ เขียนแทนด้วย $f(x) = \ln x$ เรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (Natural logarithm)
- กราฟของ $y = \log_a x$
  - ถ้า $a > 1$ กราฟของ $y = \log_a x$ แสดงดังรูป 8
  - ถ้า $0 < a < 1$ กราฟของ $y = \log_a x$ แสดงดังรูป 9



รูปที่ 1.9



รูปที่ 1.10

คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมจากรูปกราฟสรุปได้ดังนี้

1. ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. โดเมนของฟังก์ชันลอการิทึม คือ เซต $\{x : x$เป็นจำนวนจริงบวก $\}$ และ เรนจ์คือเซต $\{y : y$เป็นจำนวนจริง $\}$
3. $\log_a 1 = 0$
4. กราฟของ $y = \log_a x$ เป็นส่วนสะท้อนของกราฟ $y = a^x$ เทียบกับเส้นตรง $y = x$

หมายเหตุ กรณีที่ $a=e$ เมื่อ $e=2.71818...$ จะได้ว่า $y=e^x$ มี $y=\log_e x$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ซึ่งโดยทั่วไปจะเขียน $y=\ln x$ แทน $y=\log_e x$ และเรียกว่า ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural logarithm)

สำหรับคุณสมบัติของ $y=e^x$ และ $y=\ln x$ เหมือนกับ $y=a^x$ และ $y=\log_a x$ เมื่อ $a>0$

คุณสมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม

เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a\neq 1, b\neq 1$ และ $x,y\in R$ จะได้ว่า

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ และ $\dfrac{a^x}{b^x} = \left[\dfrac{a}{b}\right]^x$
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
6. ถ้า $x>0, y>0$ แล้ว $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

   $\log_a(\dfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
7. $\log_a x^r = r\log_a x$
8. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
9. $\log_a a = 1$

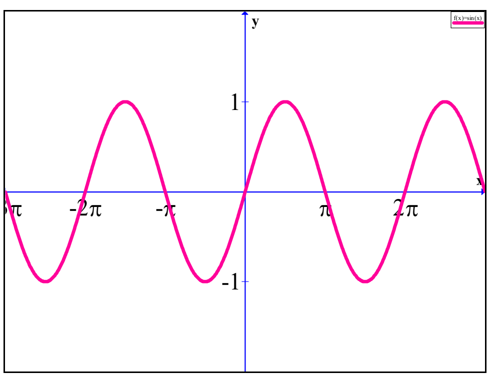
10. $\ln e^{x} = x$ และ $e^{\ln x} = x \quad , x > 0$

11. $a^{x} = y$ ก็ต่อเมื่อ $x = \log_{a} y \quad , y > 0$

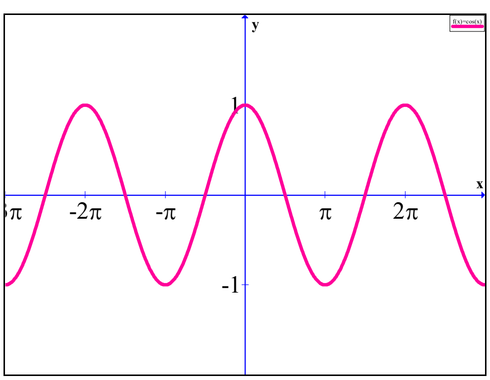
ค. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function) คือฟังก์ชันที่นิยามมาจากพิกัดของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยบนระนาบพิกัดฉาก x, y ที่สัมพันธ์กับมุมในหน่วยเรเดียนของรัศมีวงกลมกระทำกับแกน x ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกามี 6 รูปแบบ คือ

$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

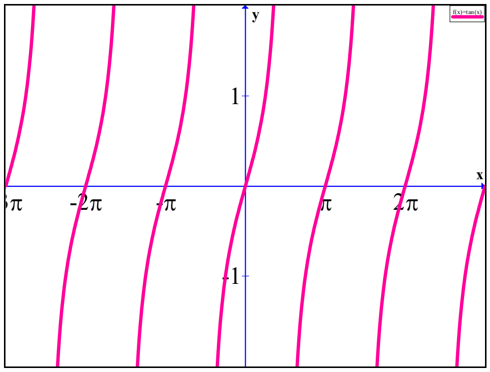
$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x} \qquad y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \qquad y = \cot x = \dfrac{\cos x}{sinx}$



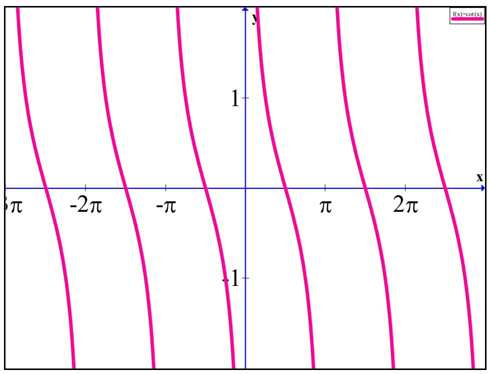
กราฟ $y = \sin x$



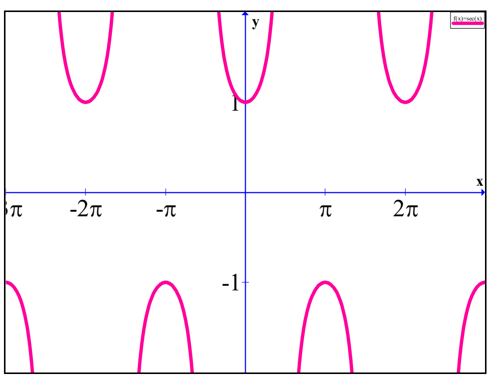
กราฟ $y = \cos x$



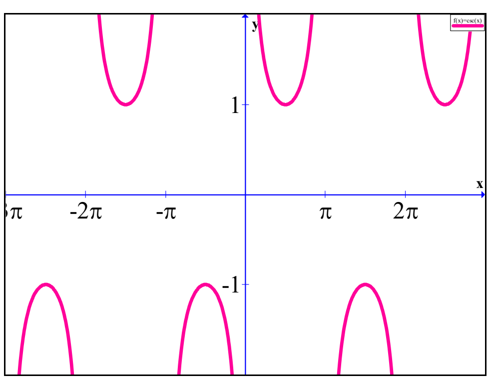
กราฟ $y = \tan x$



กราฟ $y = \cot x$



กราฟ $y = \sec x$

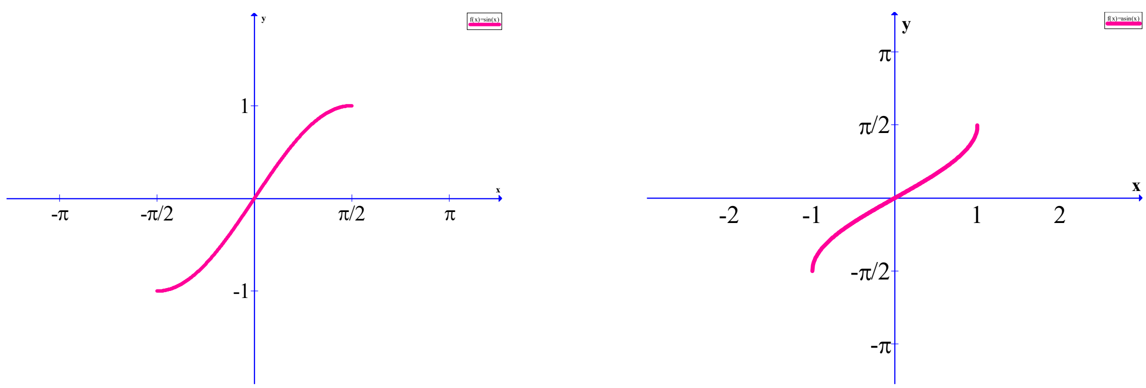


กราฟ $y = \csc x$

ง. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Function) คือ

จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติพบว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นการนิยามอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อให้ได้เป็นฟังก์ชันจึงต้องมีการกำหนดโดเมน ดังต่อไปนี้

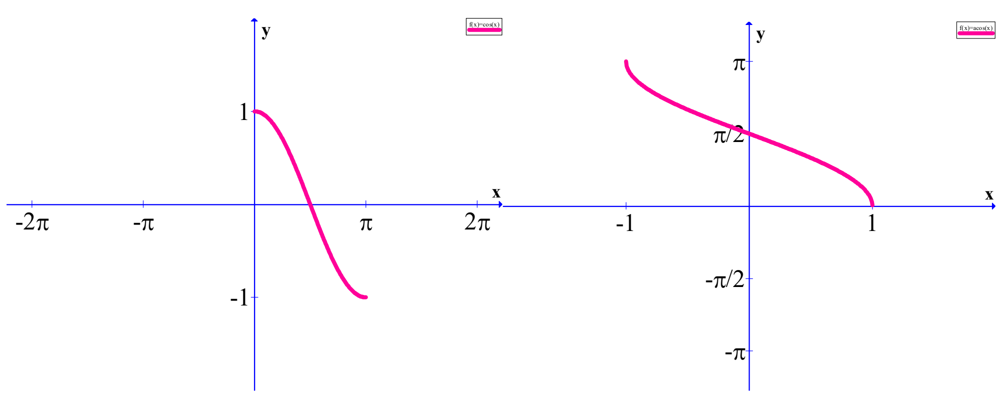
1) จำกัดโดเมนของ $y=\sin x$ ในช่วงปิด $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ดังรูป 1.10 (a) จะได้ $y=\arcsin x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y=\sin x$ และมีกราฟดังรูป 1.10 (b)



(a) $y=\sin x$ (b) $y=\arcsin x$

Figure 1.11

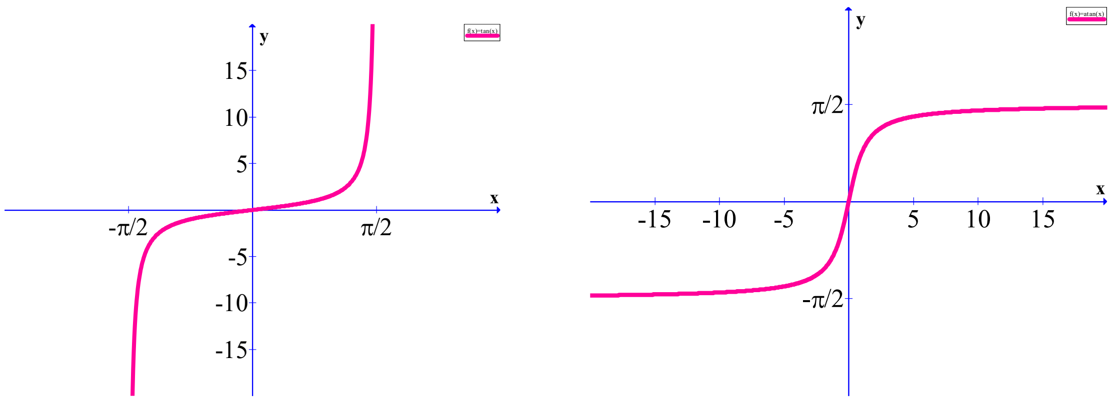
2) จำกัดโดเมนของ $y=\cos x$ ในช่วงปิด $[0,\pi]$ ดังรูป 1.11 (a) จะได้ $y=\arccos x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y=\cos x$ และมีกราฟดังรูป 1.11 (b)



(a) $y = \cos x$ (b) $y = \arccos x$

Figure 1.12

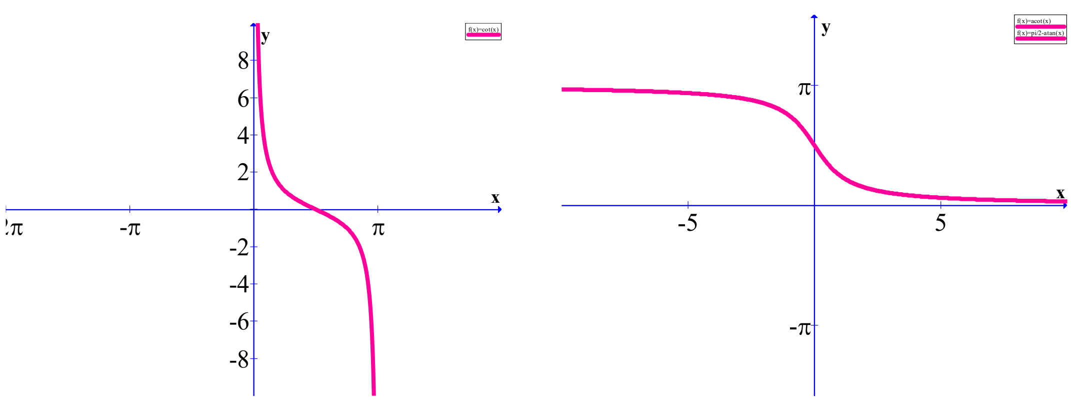
3) จำกัดโดเมนของ $y = \tan x$ ในช่วงเปิด $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ดังรูป 1.12 (a) จะได้ $y = \arctan x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \tan x$ และมีกราฟดังรูป 1.12 (b)



(a) $y = \tan x$ (b) $y = \arctan x$

Figure 1.13

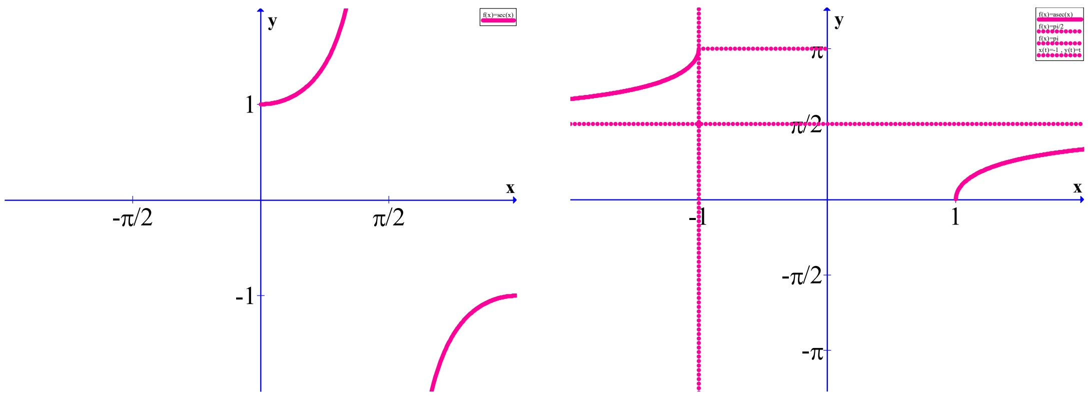
4) จำกัดโดเมนของ $y = \cot x$ ในช่วงเปิด $(0, \pi)$ ดังรูป 1.13 (a) จะได้ $y = \operatorname{arccot} x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \cot x$ และมีกราฟดังรูป 1.13 (b)



(a) $y = \cot x$ (b) $y = \operatorname{arccot} x$

Figure 1.14

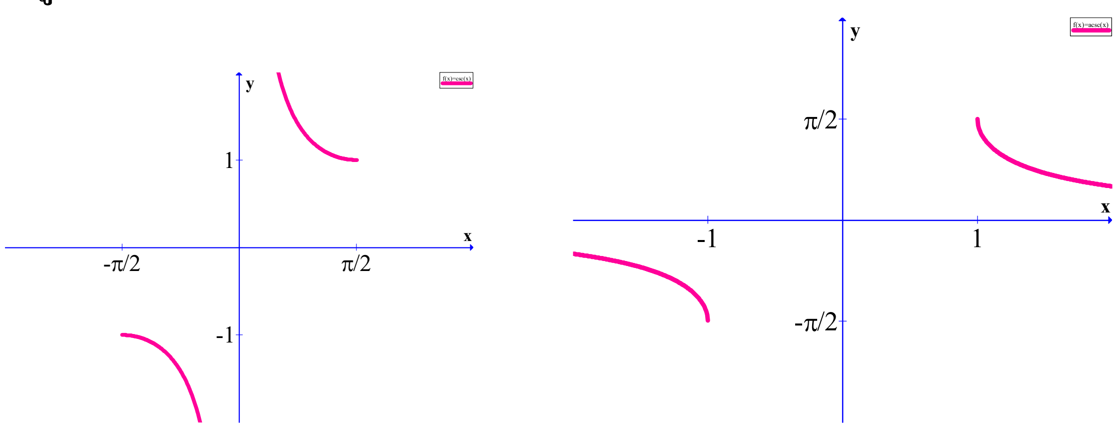
5) จำกัดโดเมนของ $y = \sec x$ ในช่วง $[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$ ดังรูป 1.14 (a) จะได้ $y = \text{arcsec}\, x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \tan x$ และมีกราฟดังรูป 1.14 (b)



$y = \sec x$ $\qquad$ $y = \text{arcsec}\, x$

Figure 1.15

6) จำกัดโดเมนของ $y = \csc x$ ในช่วง $[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$ ดังรูป 1.15 (a) จะได้ $y = \text{arccsc}\, x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = \csc x$ และมีกราฟดังรูป 1.15 (b)



(a) $y = \csc x$ $\qquad$ (b) $y = \text{arccsc}\, x$

Figure 1.16

Exercises

1. Determine if the following are functions. Locate domain and range.

   (a) $\{(1,3),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

   (b) $\{(x,y): y > 4x-1\}$

   (c) $y = x^4 - 1$

   (d)

x	y
15	2
2	13
13	13
5	3

2. Determine if each following function is either even or odd or neither.

   (a) $f(x) = x^3 + 2x$

   (b) $g(x) = \dfrac{8}{x^2 - 2}$

   (c) $h(x) = 3x|x|$

   (d) $k(x) = x + |x|$

3. What is the difference of $\sin x^2, \sin^2 x$ and $\sin(\sin x)$? Show in terms of composite functions.

4. Some special bacteria reproduce through cell division. Bacterial populations can double every 10 minutes. Find a formula for bacterial populations N at time t if the initial cell amount is 5.

5. If the number of trees in a forest increase exponentially at a rate of 3.5 % per year, how many percent of the number of trees increase in the next 10 years? How long does a forest take to double the number of trees?

Answers to Exercises

1. (a) yes $D = \{1, 2, 3, 4\}$ and $R = \{3, 4, 5\}$

   (b) no $D = R =$ all real numbers

   (c) yes $D = \mathbb{R}$ and $R = \{y : y \geq -1\}$

   (d) yes $D = \{2, 5, 13, 15\}$ and $R = \{2, 3, 13\}$

2. (a) odd function (b) even function

   (c) odd function (d) neither

3. Let $f(x) = \sin x$ and $g(x) = x^2$

$\sin x^2 = f(g(x)),\ \sin^2 x = g(f(x)),$ while

$\sin(\sin x) = f(f(x))$

4. $N = 5(2)^{\frac{t}{10}}$

5. 41% , more than 20 years.

2. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

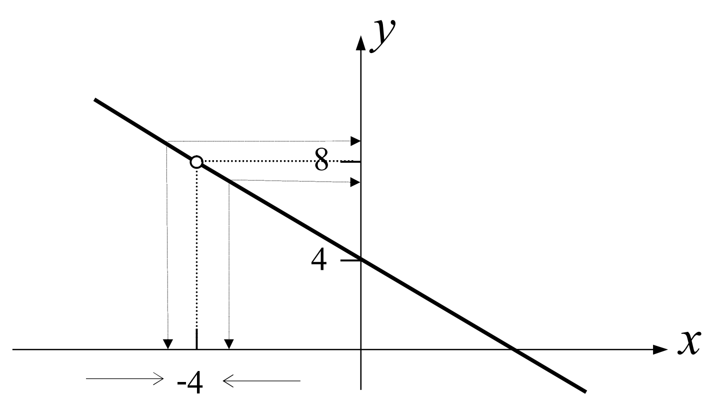
2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

การหาลิมิตของฟังก์ชันต่างกับการหาค่าของฟังก์ชัน เพราะในการหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $x = a$ หมายความว่า $f(a)$ มีค่าเท่าใด แต่ในการหาค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ต้องการพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ว่ามีค่าเป็นอย่างไรขณะที่ x เข้าใกล้ a โดยสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

2.1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \to a$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}, \; x \neq -4$

พบว่า $f(-4)$ ไม่มีค่า แต่เราสามารถหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ -4 ได้จากกราฟในรูปที่ 2.1 และตารางที่ 2.1 ดังนี้



รูปที่ 2.1 กราฟของ $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ -4

x	- 4.1	- 4.01	- 4.001	-4	- 3.999	- 3.99	- 3.9
$f(x)$	8.1	8.01	8.001		7.999	7.99	7.9

จากกราฟในรูปที่ 2.1 และค่าฟังก์ชันในตารางที่ 2.1 จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ -4 ไม่ว่าจากทางซ้ายหรือทางขวา ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้ 8

นั่นคือ เมื่อ x เข้าใกล้ -4 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 8

จะกล่าวว่า 8 เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ -4

เขียนแทนด้วย $f(x) \to 8$ เมื่อ $x \to -4$

หรือ $$\lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{4+x} = 8$$

ดังนั้น นิยามของลิมิต คือ

นิยาม 2.1 ถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้วจะเรียก L ว่าเป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = L$

การเข้าใกล้ของ x สู่ค่า a มีสองทาง เราจึงมีสัญลักษณ์เพิ่มเติมว่า

- x **เข้าใกล้** a **ทางขวา** เขียนแทนด้วย $x \to a^+$
- x **เข้าใกล้** a **ทางซ้าย** เขียนแทนด้วย $x \to a^-$

ซึ่งจากตัวอย่างพบว่า $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{16-x^2}{4+x} = 8$, $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{16-x^2}{4+x} = 8$

จะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$ หาได้ ดังนั้น

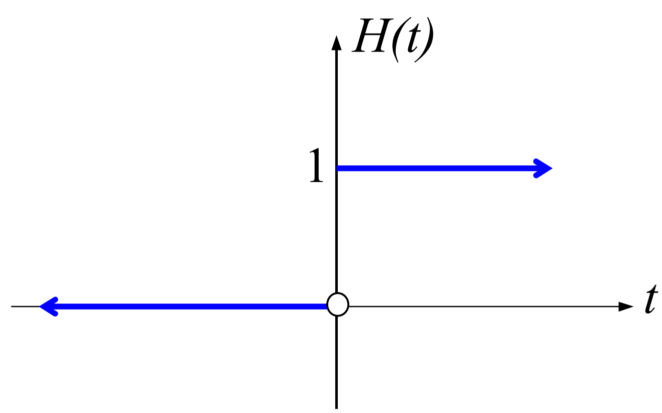
ความสัมพันธ์ระหว่าง ลิมิตและลิมิตทางเดียว สรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ L (จำนวนจริง) ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

ตัวอย่าง 1 ฟังก์ชัน เฮวีไซด์ (The Heaviside function) หรือ ฟังก์ชันขั้นบันได (**step** function) กำหนดโดย

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

(ฟังก์ชันนี้ถูกตั้งชื่อหลังจากวิศวกรไฟฟ้าชื่อ โอลิเวอร์ เฮวีไซด์ (Oliver Heaviside , 1850 – 1925) นำไปใช้อธิบายกระแสไฟฟ้าที่ถูกเปิด ณ เวลา $t = 0$) โดยกราฟแสดงดังรูปที่ 5



รูปที่ 2.2 แสดงกราฟของฟังก์ชันเฮวีไซด์

จากรูปที่ พบว่า ขณะ t เข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย $H(t)$ เข้าใกล้ 0 แต่ ขณะ t เข้าใกล้ 0 จากทางขวา $H(t)$ เข้าใกล้ 1 เนื่องจากค่าของ $H(t)$ ไม่มีจำนวนเดียว ขณะที่ t เข้าใกล้ 0 ดังนั้น จึง**สรุปได้ว่า** $\lim_{t\to 0} H(t)$ **ไม่มีค่า**

Example 2 Find $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ and $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$.

คุณสมบัติของลิมิตที่สำคัญมีดังนี้

ให้ a, k, L, M เป็นจำนวนจริง $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$

จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$
3. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = LM$
4. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0$
5. ถ้า $L > 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ หรือ ถ้า $L \leq 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)} = \sqrt[n]{L}$$

6. $\lim_{x \to a} k = k$
7. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
8. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า สำหรับจำนวน a ใดๆ

   $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

8. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ $\qquad$ $\lim_{x \to a} \csc x = \csc a$

   $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$ $\qquad$ $\lim_{x \to a} \sec x = \sec a$

   $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$ $\qquad$ $\lim_{x \to a} \cot x = \cot a$

Example 3 Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{\cos x}$

Solution

Example 4 Let $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , x < 0 \\ x & , 0 \le x < 1 \\ x + 1 & , x \ge 1 \end{cases}$.

Find the limits of $f(x)$ as x approaches 0 and 1.

Solution

ในการหาลิมิตบางครั้ง เราจะพบว่าเมื่อแทนค่า x ด้วย a แล้ว จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปก่อนที่จะหาลิมิตโดย

1) การแยกตัวประกอบ (Factor)

2) ใช้สังยุค (Conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน

Example 5 Evaluate $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

Solution $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+4x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+3} = -1$$

Example 6 Evaluate $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-x-6}$.

Solution

Example 7 Evaluate $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

Solution $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x} \cdot \dfrac{4+\sqrt{16+x}}{4+\sqrt{16+x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{4+\sqrt{16+x}} = \frac{1}{8}$$

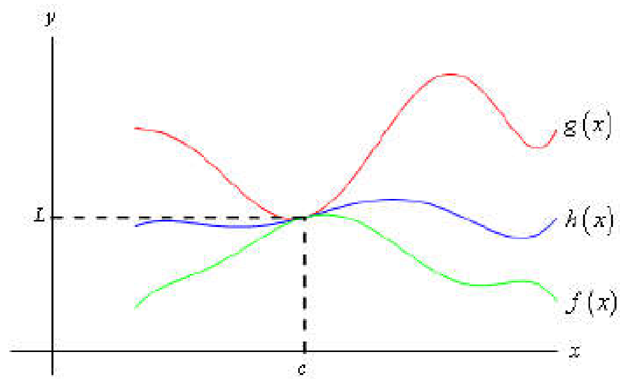
Example 8 Find $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{16+2\sqrt{x}}-4}$.

Solution

บางครั้ง เราไม่สามารถใช้วิธีแยกตัวประกอบหรือสังยุคในการกำจัด รูป $\frac{0}{0}$ แต่สามารถใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการหาลิมิตได้

ทฤษฎีบท 2.2 (Squeeze Theorem)

ถ้า $f(x) \le h(x) \le g(x)$ สำหรับทุกค่า $x, x \ne a$ ในบางย่านจุดของ a และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$



รูปที่ 2.3

Example 9 If $3x \le f(x) \le x^3 + 2$, $0 \le x \le 2$. Find $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solution เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1} 3x = 3 = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + 2$

โดย Squeeze Theorem จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

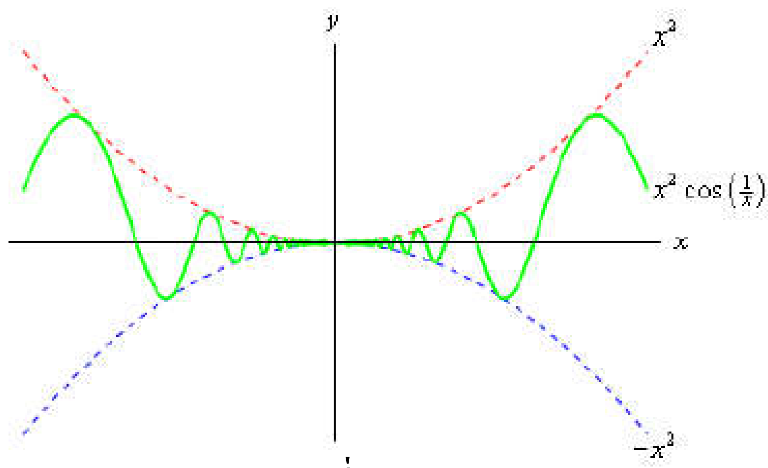
Example 10 Evaluate $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

Solution เนื่องจาก $-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$ พิจารณา

$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$ และ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ โดย Squeeze Theorem สรุป ได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$$

ค่าลิมิตของฟังก์ชันสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4

Example 11 Use Squeeze Theorem to evaluate

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\left(1+x^4\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Solution

2.1.2 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับค่าอนันต์ (Limits involving infinity)

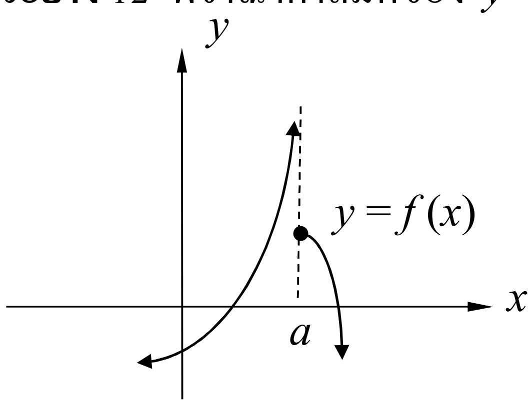
ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาลิมิตของฟังก์ชัน 2 กรณี

1. ลิมิตอนันต์ (Infinite limits).
2. ลิมิตที่อนันต์ (Limits at infinity)

ลิมิตอนันต์

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ขณะที่ $x \to a$ พบว่าฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $f(x) \to +\infty$) หรือมีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $f(x) \to -\infty$) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 12 พิจารณาค่าลิมิตของ $y = f(x)$ เมื่อ $x \to a$

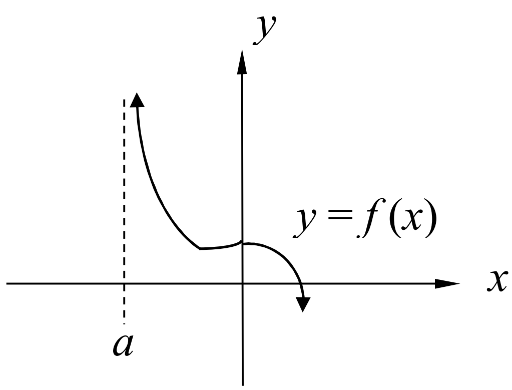


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

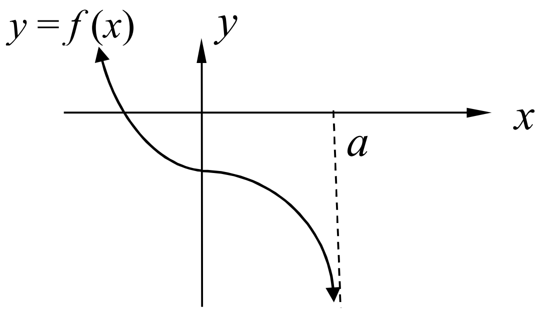
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

แสดงว่า

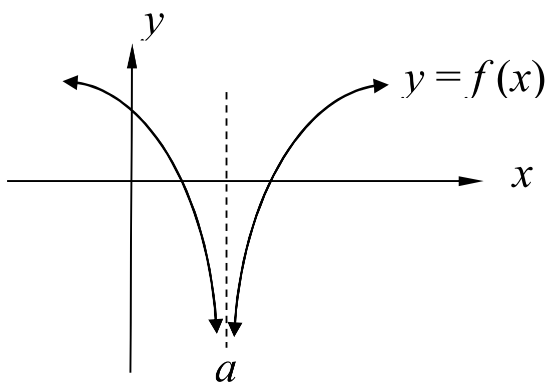
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

แสดงว่า

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างจะเรียก เส้นตรง x = a ว่า **เส้นกำกับแนวดิ่ง** (vertical asymptote)

Example 13 Evaluate $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2}$.

Solution พิจารณา $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2}$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-3) = -1 < 0$

และ $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0$ โดยที่ $x - 2 > 0$ เมื่อ $x > 2$

ดังนั้นโดยใช้คุณสมบัติข้อ 4 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2} = -\infty$

Example 14 Evaluate $\lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln x$.

Solution จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^+}(x-1) = -1 < 0$ และ $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

ดังนั้น จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln x = +\infty$

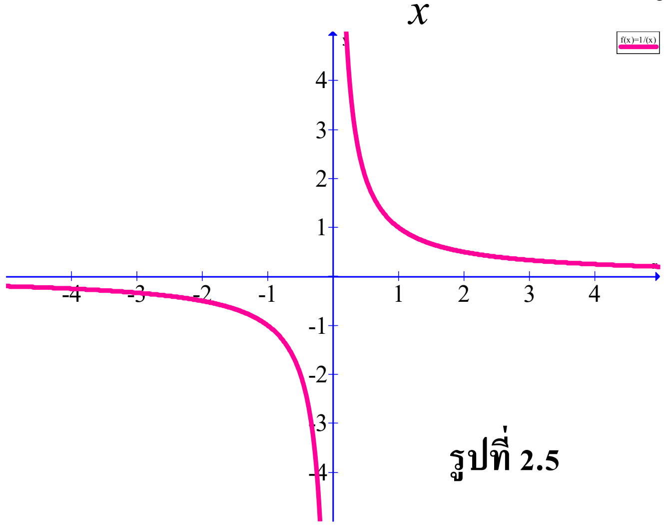
ลิมิตที่อนันต์

ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \to \infty$ (ลิมิตที่อนันต์)

ในกรณีนี้จะพิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $x \to +\infty$) หรือเมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต (เขียน $x \to -\infty$) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ หรือ } \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

ตัวอย่าง 15 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ซึ่งมีกราฟดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5

(1) พิจารณาค่าฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต

(2) พิจารณาค่าฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ x มีค่าลดลงเรื่อยๆ โดยไม่มีขอบเขต

ตารางที่ 2.2

x	100	1000	10000	เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต
$f(x)=\frac{1}{x}$	0.01	0.001	0.0001	$\ldots \to 0$
x	-100	-1000	-10000	ลดลงโดยไม่มีขอบเขต
$f(x)=\frac{1}{x}$	-0.01	-0.001	-0.0001	$\ldots \to 0$

จากตารางที่ 2.2 พบว่า ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ x มีค่าเป็นบวกเพิ่มมากขึ้น ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ $x \to +\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

ในทำนองเดียวกัน ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ $x \to -\infty$ เช่นกัน แต่ $f(x)<0$ ลักษณะเช่นนี้กล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 0 เมื่อ $x \to -\infty$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$

จากรูปที่ 2.5 พบว่า กราฟของ $f(x)=\frac{1}{x}$ เบนเข้าใกล้แกน x มากขึ้นเรื่อยๆ แต่ไม่ได้สัมผัสกับแกน x ในทางคณิตศาสตร์ จะเรียก

เส้นตรง $x = 0$ ที่กราฟเบนเข้าหาเช่นนี้ว่า **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote)

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า n เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ทฤษฎีบท 2.3 ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ \ a_n \neq 0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} a_n x^n\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$$\lim_{x \to \infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \right) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \right) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Example 16 Evaluate

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10x^5-3x^4+2x^2-8\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^7+20x^4-7x^2+9\right)$

2. ถ้า $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},\ \ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$

เป็นฟังก์ชันตรรกยะ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\left(\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}x+\dfrac{b_0}{x^m}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

Example 17 Evaluate

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2+x+2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^4+x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5}{3x^2+x+2}$

Example 18 Evaluate $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}$.

Solution เมื่อ $x<0$ จะเขียน $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}$ ได้ใหม่เป็น

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{-1}{1}=-1$$

Example 19 Evaluate $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+7x^2+6}}{4x^2-3x-6}$.

Solution

Example 20 Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}}$

Solution

2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuous functions)

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน พบว่า บางครั้งค่าของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ a จะเท่ากับค่าของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$ ซึ่ง เราจะเรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ซึ่งสามารถกำหนดเป็นนิยามได้ดังนี้

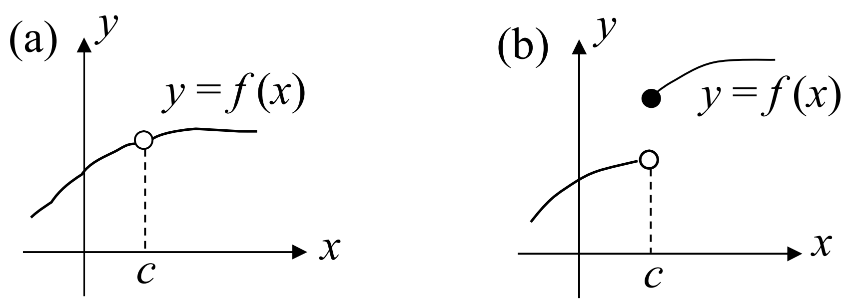
นิยาม 2.2 ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่ามีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ถ้าเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ

1. ถ้าฟังก์ชัน ขาดเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง จะได้ว่าฟังก์ชันนั้นไม่มีความต่อเนื่องที่จุด a

2. ถ้าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่จุดใด กราฟของฟังก์ชันจะไม่ขาดตอนที่จุดนั้น



รูปที่ 2.6 กราฟแสดงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

Example 21 Let $f(x) = x^2 + x + 1$.

Consider the continuity of this function at $x = 0$:

Solution 1. $f(0) = 1$ is defined

2. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ exists

3. $\lim_{x \to 0} f(0) = f(0) = 1$

Thus $f(x)$ is continuous at $x = 0$ as shown in Figure 2.7.

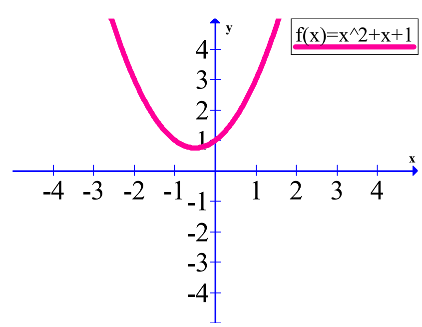


Figure 2.7

Example 22 Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-x} & ,x\neq 1\\ 3 & ,x=1\end{cases}.$

Determine if this function is continuous at $x=1$.

Solution

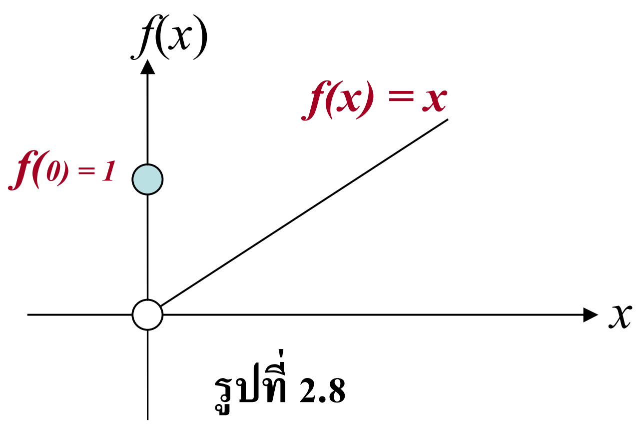
Example 23 Let $f(x)=\begin{cases} bx^2+1 & ,x<-2 \\ x & ,x\geq -2 \end{cases}$.

Find a value for b that makes $f(x)$ continuous at $x=-2$.

Solution

ชนิดของความไม่ต่อเนื่อง (The Kind of Discontinuity) แบ่งได้ 3 ชนิด ดังนี้

1. ความไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ (removable discontinuity) คือ ฟังก์ชันที่ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากับค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้น หรือค่าของฟังก์ชันไม่นิยาม ณ จุดนั้น เช่น $f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ x & , x \neq 0 \end{cases}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ ดังรูปที่ 2.8

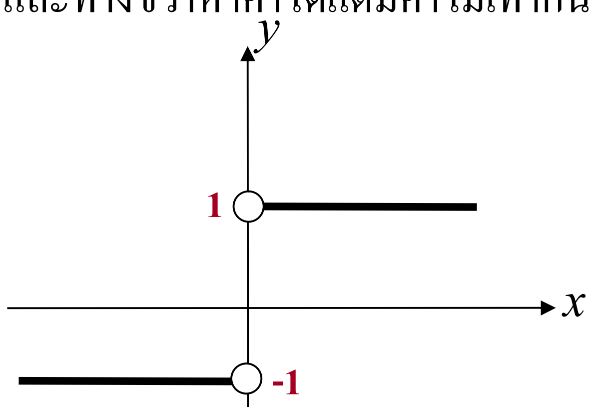


รูปที่ 2.8

2. ความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด (jump discontinuity or ordinary discontinuity) เกิดจากลิมิตของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้ โดยลิมิตทางซ้ายและทางขวาหาค่าได้แต่มีค่าไม่เท่ากัน เช่น ฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

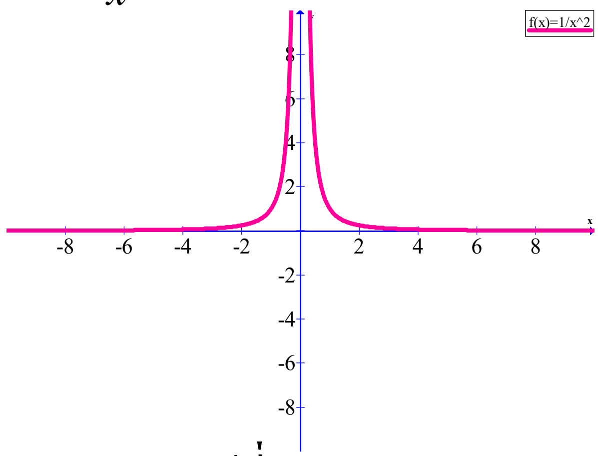
ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9

3. ความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ (infinite discontinuity) เกิดขึ้นเมื่อลิมิตทางซ้าย หรือลิมิตทางขวาของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้

เช่น ฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ไม่มีต่อเนื่องที่ $x=0$ ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10

คุณสมบัติทางพีชคณิตของฟังก์ชันเกี่ยวกับความต่อเนื่องมีดังนี้

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ จะได้ว่า $f \pm g, f.g, \dfrac{f}{g}$ ($g(a)\neq 0$) และ kf (k เป็นจำนวนจริง) มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ ด้วย
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=b$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ จะได้ว่า
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$$
3. ถ้าฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ และฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $g(a)$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $f \circ g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$

ทฤษฎีบท **2.4**

1. ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจำนวนจริง c

2. ฟังก์ชันตรรกยะ $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจำนวนจริงยกเว้นจุด c ที่ทำให้ $g(\mathrm{c})=0$

Example 24 Let $f(x)=\dfrac{2(x^2+4x+2)}{(x^2-9)(x-1)}$.

Determine where f is continuous.

Solution ให้ $\mathrm{F(x)=2(x^2+4x+2)}$ $,\mathrm{G(x)=x^2-9}$ และ $\mathrm{H(x)=x-1}$ ดังนั้น $\mathrm{F,G,H}$ จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ x

ดังนั้น $\mathrm{f}=\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{G.H}}$ ต่อเนื่องทุกแห่ง ยกเว้นจุด x ซึ่ง $\mathrm{G(x)=0}$

หรือ $\mathrm{H(x)=0}$

นั่นคือฟังก์ชันนี้จะต่อเนื่องทุกแห่งยกเว้นที่ $\mathrm{x=\pm 3}$ และ $\mathrm{x=1}$

นิยาม 2.3 ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง (a,b) จะเรียก f มีความต่อเนื่องใน (a,b)

นิยาม 2.4 ฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ โดยที่ $a<b$ ถ้า

1. $f(x)$ มีความต่อเนื่องใน (a,b)
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$
3. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

Example 25 Show that $g(x)=\sqrt{x-4}$ is continuous on the closed interval $[4,8]$.

Solution เนื่องจาก

1. g เป็นฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $(4,8)$
2. $\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=0$
3. $\lim\limits_{x\to 8^-}\sqrt{x-4}=2$

ดังนั้น จากนิยาม 2.4 จะได้ว่า $g(x)=\sqrt{x-4}$ เป็นฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $[4,8]$

Example 26 Let $g(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{4+x}}$.

Find all number at which g is continuous.

Solution เนื่องจาก $\mathrm{g(x)}=\sqrt{\dfrac{3-\mathrm{x}}{4+\mathrm{x}}}$ จะมีค่า เมื่อ $\dfrac{3-\mathrm{x}}{4+\mathrm{x}}\geq 0$

ซึ่งเกิดขึ้นได้สองกรณีคือ $3-\mathrm{x}\geq 0$ และ $4+\mathrm{x}>0$

หรือ $3-\mathrm{x}\leq 0$ และ $4+\mathrm{x}<0$

ทำให้ได้ $-4<\mathrm{x}\leq 3$

ดังนั้น ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน $(-4,3]$

Exercises

1. Find the limit, if it exists.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x),\quad f(x)=\dfrac{x^3}{|x-1|}$

(b) $\lim_{x\to 1} 3x[\![x]\!]$

(c) $\lim_{x\to 0} g(x),\ \ g(x)=\begin{cases} x^2-2; & x>0 \\ -2-x; & x<0 \end{cases}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6\sqrt{x^2-3}}{2x-1}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x-4}$

2. Determine whether the following function is continuous.

(a) $h(x)=\dfrac{2}{x^2+3x-28}$

(b) $k(x)=\sqrt[3]{(x-a)(x-b)}$

3. Explain why f is not continuous at a.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1};\ a=1$

(b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3 \\ 4, & x=3 \end{cases}$

4. Find all numbers at which f is discontinuous.

(a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-6}$ (b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

5. Find a value k that

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}; & x\neq 2\\ kx-3; & x=2\end{cases}$$ is continuous.

6. Find a value k in which the following limits exist.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-kx+4}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-5}{2x^2-1+x^k}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-5}{e^{kx}+4}$

7. Compute the following limits.

(a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$ (b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1/(1+h)-1}{h}$

(c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

Answers

1.

(a) $+\infty$ (b) Does not exist (c) -2

(d) 3 (e) $-1/2$

2. (a) $x\neq -7,4$ (b) $(-\infty,\infty)$

3. (a) f is not defined at x = 1

(b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6\neq 4=f(3)$

4. (a) $-3,2$ (b) $-2,1$

5. 1

6. (a) 5 (b) greater than or equal to 4

   (c) less than or equal to 2

7. (a) 6 (b) –1 (c) 1/4