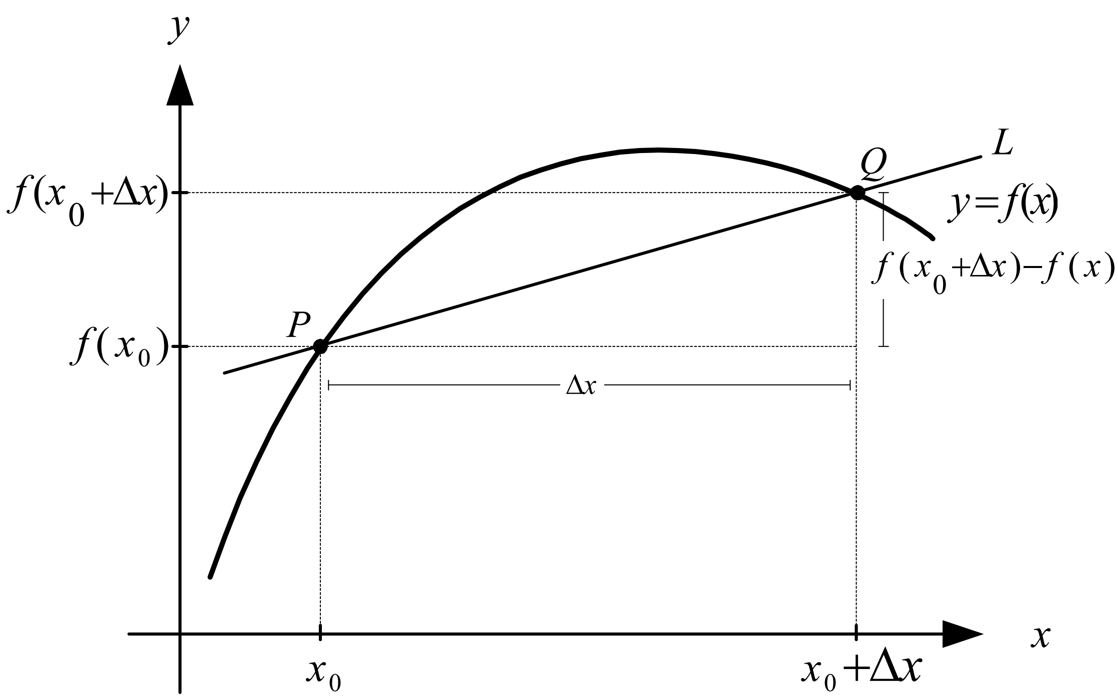
อนุพันธ์ : The Derivative

- ◎ นิยามของอนุพันธ์
- ◎ การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร
- ◎ กฎลูกโซ่
- ◎ อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและตรีโกณมิติผกผัน
- ◎ อนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม
- ◎ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก
- ◎ อนุพันธ์อันดับสูง
- ◎ อนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงปริยาย

นิยามของอนุพันธ์ (Definition of Derivative)

ให้ L เป็นเส้นตรงที่ตัดผ่านจุด P และ Q บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป



รูป 1

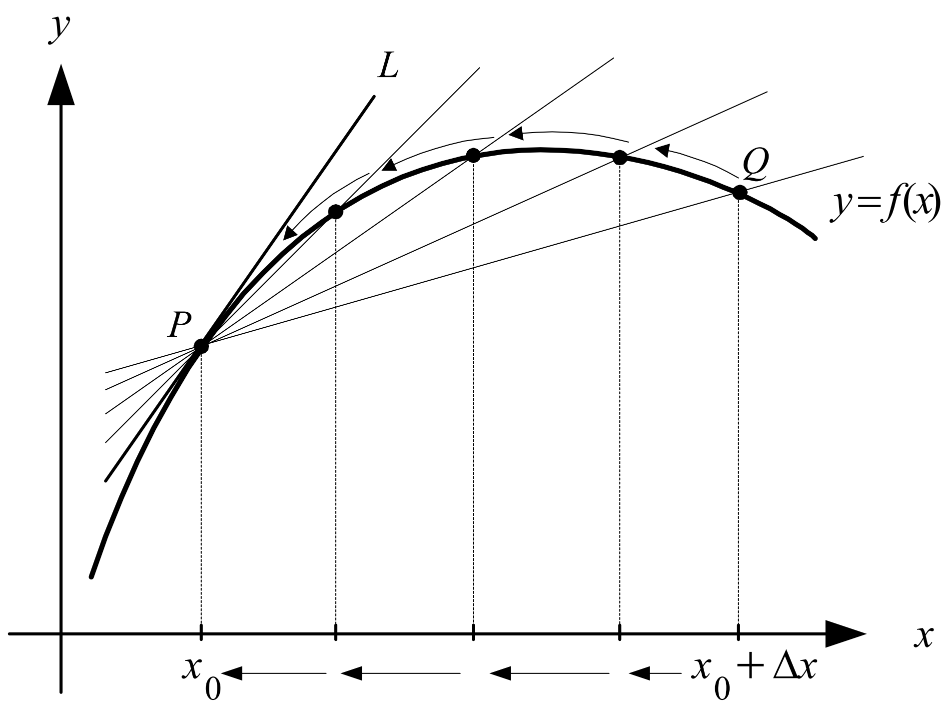
จากรูป 1 เรียกเส้นตรง PQ ว่าเส้นตัดโค้ง (secant line) และความชันของเส้นตรง PQ คือ

$$m_{PQ} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เรียก Δx ว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า x เมื่อ x เปลี่ยนค่าจาก x_0 ถึง $x_0 + \Delta x$

และเรียก $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของค่า f เมื่อ x เปลี่ยนค่าจาก x_0 ถึง $x_0 + \Delta x$

ให้จุด Q ถูกเลื่อนเข้าใกล้จุด P ตามแนวเส้นโค้ง $y = f(x)$
เส้นตรง PQ จะเคลื่อนที่เข้าใกล้เส้นตรง L ดังรูป 2



รูป 2

จากรูป 2 พบว่า ในขณะที่จุด Q ถูกเลื่อนเข้าใกล้จุด P จะทำให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 และ ความชันของเส้นตรง L ที่ได้ มีค่าเข้าใกล้ความชันของเส้นเส้นตรง L โดยที่เส้นตรง L เป็นเส้นสัมผัส (tangent line) เส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P นั่นคือ ขณะที่ $\Delta x \to 0$

$$m_L \approx m_{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสโค้งที่จุด P คือ

$$m_L = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{(เมื่อลิมิตหาค่าได้)}$$

นิยาม 1 : ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่มี x เป็นสมาชิก แล้ว ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ f **ที่จุด** $\left(x_0, f(x_0)\right)$ คือ $$m_L = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Example Find the slope of the tangent line to the graph of $y = \dfrac{1}{x^2}$ at the point $(1,1)$.

<u>วิธีทำ</u>

จากนิยาม 1 ให้ $y = f(x)$ จะนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ดังนี้

นิยาม 2 : อนุพันธ์

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่มี x เป็นสมาชิก แล้ว

- **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ** $y = f(x)$ **เทียบกับ** x **บนช่วง** $\left[x_0, x_0 + \Delta x\right]$ **คือ**

$$y_{av} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta t}$$

- **อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ (instantaneous rate of change) ของ** $y = f(x)$ **เทียบกับ** x **ที่** x_0 **คือ**

$$y_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta t}$$

หมายเหตุ ถ้า $x = t$ (เวลา) และ $y = s(t)$ (ตำแหน่งของวัตถุ) แล้ว

- **ความเร็วเฉลี่ย** (v_{av}) **คือ** อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s เทียบกับ t ในบางช่วงเวลา

- **ความเร็ว**$\left(v_{t_0}\right)$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ s เทียบกับ t ที่เวลา $t = t_0$

นิยาม 3 : อนุพันธ์ (Derivative)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่มี x เป็นสมาชิก แล้ว **อนุพันธ์ของ** f **ที่จุด** x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ นิยามโดย

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

หมายเหตุ

- สำหรับ $y = f(x)$ นอกจากสัญลักษณ์ $f'(x)$ ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ แล้วยังสามารถเขียนแทนด้วย

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d}{dx}f(x) \ \text{ หรือ } \ y'$$

- สำหรับอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x = a$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(a) \ \text{ หรือ } \ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Example Let $f(x) = x^2 + 4$.

(a) Find derivative of f.   (b) Find derivative of f at $x = 5$.

<u>วิธีทำ</u>

Example An object moves horizontally. At time t seconds, the object has distance $s = 5 - 2t + t^2$ meters. Compute

a. Average velocity of the object from 1 to 3 seconds

b. Instantaneous velocity of the object at t seconds

c. Instantaneous velocity of the object at $t = 1$ second

วิธีทำ

ข้อสังเกตุ ในทางตรงข้าม ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว f อาจมีหรือไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ ก็ได้

Example Find derivative of $f(x) = |x|$ at $x = 0$.

วิธีทำ

<u>Example</u> Let $f(x)=\sqrt{x}$ Compute $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right]}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (สังเกตว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x=0$)

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปลิมิตนั้นค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นเพื่อความสะดวกและรวดเร็ว จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับหาอนุพันธ์ขึ้นมาโดยอาศัยนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่ได้ศึกษามาแล้ว ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์

ให้ u, v แทนฟังก์ชันของ x และ c, n แทนค่าคงที่ แล้ว

1. $\dfrac{dc}{dx} = 0$ และ $\dfrac{dx}{dx} = 1$

2. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

4. $\dfrac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \cdot \dfrac{dx}{dx} = nx^{n-1}$

5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Example Find the derivatives of the following functions.

(a) $f(x) = 2x^9 - \dfrac{5}{x} + 7x - 1$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 2}}$

(c) $p(x) = \left(2x^7 - x^{-1}\right)\left(5x^9 - 10\right)$

Example Find the derivatives of the following functions

(a) $y = \dfrac{(2x-1)^2}{x^2+7}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^7 - 4\sqrt{x} - 2}{x^2}$

(c) $r(t) = \left(4t^3 - 7t^{-6}\right)^{12}$

(d) $y = \left(5x^{10} - 8\right) \cdot \sqrt[4]{x^2+9}$

(e) $y = \dfrac{4x^2+5}{3x-1}$

(f) $g(x) = \sqrt{\dfrac{8x^4}{2-x^7}}$

Example Find the equation of tangent line

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x}} \qquad \text{at the point } \; x = 1$$

กฎลูกโซ่ : The Chain Rule

ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ และ $F = f \circ g$ เป็นฟังก์ชันประกอบซึ่งกำหนดโดย $F(x) = f(g(x))$ แล้ว ฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$\boxed{F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

กล่าวคือ

ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

หมายเหตุ

ในกรณีที่ต้องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่มีจำนวนมากกว่า 2 ฟังก์ชันขึ้นไป เราสามารถขยายกฎลูกโซ่เพื่อหาอนุพันธ์ได้ ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ $y = f(u)$, $u = g(x)$ และ $x = h(t)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where $y=\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}-1}$

Example Let $y = \dfrac{u^2}{u^3 - 16}$, $u = 3x^2 - 8$ and $x = \sqrt[4]{t+5}$, find $\dfrac{dy}{dt}$ at $t = 11$.

วิธีทำ

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มี 6 สูตร ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์ได้

1. $$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$
2. $$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$
3. $$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$
4. $$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$
5. $$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$
6. $$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 1 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$

ให้ $y = \sin u$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u+\Delta u) - \sin u}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin u \cos \Delta u + \cos u \sin \Delta u - \sin u}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \left[\sin u \cdot \frac{(\cos \Delta u - 1)}{\Delta u} + \cos u \cdot \frac{\sin \Delta u}{\Delta u} \right]$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \sin u \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(\cos \Delta u - 1)}{\Delta u} +$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \cos u \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin \Delta u}{\Delta u}$$

$$= \cos u$$

จากกฎลูกโซ่ ; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$

พิสูจน์สูตร 2 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\cos u = \frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi}{2} - u)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - u)\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2} - u)$$

$$= \sin u \cdot (-\frac{du}{dx})$$

$$= -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$

พิสูจน์สูตร 3 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin u}{\cos u}\right]$$

$$= \frac{\cos u \frac{d}{dx}\sin u - \sin u \frac{d}{dx}\cos u}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{\cos^2 u \cdot \frac{du}{dx} + \sin^2 u \cdot \frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u) \cdot \frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

พิสูจน์สูตร 5 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \frac{d}{dx}(\cos u)^{-1} \qquad [\because \sec u = \frac{1}{\cos u}]$$

$$= -(\cos u)^{-2}\frac{d}{dx}(\cos u)$$

$$= -(\cos u)^{-2}(-\sin u)\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dx}$

* สำหรับสูตร 4,6 สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการเดียวกันกับสูตร 3,5 ตามลำดับ

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where

(a) $y = (x^4 + 1)\tan x$

(b) $y = \dfrac{\sin(2x)}{7 - \cos(3x)}$

(c) $y = \cot\sqrt[3]{4 - x^3}$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left[\sec(2x) + \tan(2x)\right]^3$

(e) $y = 8 + 3\cos(x^4)\sec(7x)$

Example Find the tangent line equation of $y = \cos(x)$ at $x = \dfrac{3\pi}{2}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม มี 2 สูตร ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์ได้

1. $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{du}{dx}$$

2. $$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 1 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{du}{dx}$

ให้ $y = \log_a u$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\log_a(u+\Delta u)-\log_a u}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta u}\cdot\log_a\left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$= \frac{1}{u}\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}$$

$$= \frac{1}{u}\cdot\log_a\left[\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\right]$$

$$= \frac{1}{u}\cdot\log_a e \qquad [\because\ e = \lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}]$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u\ln a}$$

จากกฎลูกโซ่ ; $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 2 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln u) &= \frac{d}{dx}(\log_e u)\\ &= \frac{1}{u\cdot\ln e}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where

(a) $y = \log_3(7x^4 + 1)$

(b) $y = [\ln(3 - x^2)]^4$

(c) $y = \ln\left[\dfrac{(8x-9)^4}{\sqrt{1+x^6}}\right]$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง มี 2 สูตร ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์ได้

1. $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

2. $$\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 1 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dx}$

ให้ $$y = a^u$$

$$\ln y = \ln a^u$$

$$\ln y = u \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx} u \ln a$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

Example Find $f'(x)$ where

(a) $f(x) = 10^{\sin(4x)}$ (b) $f(x) = e^{5x}\sin(\ln x)$

(c) $f(x) = e^{(x^2-3)\tan x}$

Example Let $y=\sqrt{e^{8x}+3e^{-8x}}$, find $\dfrac{dy}{dx}$ at $x=0$.

วิธีทำ

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน มี 6 สูตร ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์ได้

1. $$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

2. $$\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

3. $$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

4. $$\frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

6. $$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 1 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$

ให้ $y = \sin^{-1}u$

นั่นคือ $u = \sin y$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\sin y$$

$$\frac{du}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

* สำหรับสูตร 2-6 สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการเดียวกันกับสูตร 1

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where

(a) $y = \sin^{-1}(1 + x^2)$

Solution

(b) $y = [1 + \cos^{-1}(\sqrt{x})]^6$

Solution

(c) $y = e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})}$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})}$$

$$= e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})} \frac{d}{dx} \sec^{-1}(\sqrt{x})$$

$$= e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$= e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sec^{-1}(\sqrt{x})}}{2x\,\sqrt{x-1}}$$

(d) $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{1-x}{2+x}\right]$

Solution

อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกมี 6 สูตร ดังต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์ได้

1. $$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}$$
2. $$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \cdot \frac{du}{dx}$$
3. $$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$
4. $$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$
5. $$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot \frac{du}{dx}$$
6. $$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \cdot \frac{du}{dx}$$

พิสูจน์สูตร 1 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh u &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^{u} - \frac{d}{dx}e^{-u}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{u}\frac{du}{dx} + e^{-u}\frac{du}{dx}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}$

พิสูจน์สูตร 3 จะแสดงว่า $\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^{2} u \cdot \frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tanh u &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sinh u}{\cosh u}\right] \\
&= \frac{\cosh u \frac{d}{dx}\sinh u - \sinh u \frac{d}{dx}\cosh u}{(\cosh u)^{2}} \\
&= \frac{\cosh^{2} u - \sinh^{2} u}{(\cosh u)^{2}}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{(\cosh u)^{2}}\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^{2} u \cdot \frac{du}{dx}$

Example Find the following derivatives

(a) $\dfrac{d}{dx}\cosh(9x^2 - 2) =$

(b) $\dfrac{d}{dx}\ln(\tanh(x^3)) =$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{7x}\sinh^3(5x)\right) =$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sinh x}{\cosh x-1}\right]$

$$= \frac{(\cosh x-1)\dfrac{d}{dx}\sinh x-\sinh x\dfrac{d}{dx}(\cosh x-1)}{(\cosh x-1)^2}$$

$$= \frac{(\cosh x-1)\cdot\cosh x-\sinh x(\sinh x)}{(\cosh x-1)^2}$$

$$= \frac{\cosh^2 x-\cosh x-\sinh^2 x}{(\cosh x-1)^2}$$

$$= \frac{1-\cosh x}{(\cosh x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\cosh x}$$

(e) $\dfrac{d}{dx}\sinh^5(e^x+1)$

Solution

(f) $\dfrac{d}{dx}\left(x^9+\sin(\coth 2x)\right)$

Solution

ให้ a, b เป็นค่าคงที่ และ u, v เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว จงพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปยกกำลังแต่ละรูปแบบต่อไปนี้

1. $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$

2. $\frac{d}{dx}[u]^a = a\,u^{a-1}\cdot\frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln a\cdot\frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}[u]^v = \ldots$

การหาอนุพันธ์เชิงลอการิทึม

การหาอนุพันธ์เชิงลอการิทึมนี้ ใช้สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $[u(x)]^{v(x)}$ รวมทั้งฟังก์ชันในรูปผลคูณ ผลหาร ที่ยุ่งยากซ้ำซ้อน โดยใช้คุณสมบัติของลอการิทึมธรรมชาติเปลี่ยนรูปฟังก์ชันเพื่อหาอนุพันธ์ได้ง่ายขึ้น มีหลักการทำดังนี้

1. ใส่ ln ทั้งสองข้างของสมการ
2. เปลี่ยนรูปแบบฟังก์ชันตามคุณสมบัติของลอการิทึม
3. หาอนุพันธ์ตลอดทั้งสมการ
4. แก้สมการเพื่อหา $\frac{dy}{dx}$

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where $y = x^{\sin(3x)}$, $x > 0$.

Example Find $\dfrac{dy}{dx}$ where $y = (\sin^2 x + 4)^x$.

Solution

Take $\ln$ both sides of the equation

$$\ln y = \ln(\sin^2 x + 4)^x$$

$$\ln y = x\ln(\sin^2 x + 4)$$

Take derivative with respect to x both sides

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}x \ln(\sin^2 x + 4)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\ln(\sin^2 x + 4) + \ln(\sin^2 x + 4)\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{\sin^2 x + 4} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2 x + 4) + \ln(\sin^2 x + 4)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin^2 x + 4} \cdot 2\sin x \cos x + \ln(\sin^2 x + 4)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sin x\cos x}{\sin^2 x + 4} + \ln(\sin^2 x + 4)$$

Thus

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2x\sin x\cos x}{\sin^2 x + 4} + \ln(\sin^2 x + 4)\right]$$

$$= (\sin^2 x + 4)^x \left[\frac{2x\sin x\cos x}{\sin^2 x + 4} + \ln(\sin^2 x + 4)\right]$$

<u>Example</u> Find derivative of $y = x^{3x}\sqrt{\dfrac{(x^2+3)(6+x^4)}{3x+4}}$.

<u>Solution</u>

Exercise 1

1. Use definite to find $f'(x)$ where

(1.1) $f(x)=\pi$ (1.2) $f(x)=4x-3$

(1.3) $f(x)=2-x^2$ (1.4) $f(x)=(2-x)^2$

(1.5) $f(x)=x^3-9$ (1.6) $f(x)=\dfrac{1}{(5x-1)^2}$

(1.7) $f(x)=\sqrt{x}$ (1.8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(1.9) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ (1.10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

Answers

(1.1) 0 (1.5) $3x^2$ (1.8) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

(1.2) 4 (1.6) $-10(5x-1)^{-3}$ (1.9) $\dfrac{4}{(2x+1)^2}$

(1.3) $-2x$ (1.7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (1.10) $-\dfrac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}$

(1.4) $2x-4$

2. Find $f'(a)$ if it exists where

(2.1) $f(x) = |x^2 - 9|$; $a = 3$

(2.2) $f(x) = \dfrac{x-4}{|x-4|}$; $a = 4$

(2.3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ , & x \ge 0 \\ 2x \ , & x < 0 \end{cases}$; $a = 0$

(2.4) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ , & x \le 1 \\ 2 - 2x \ , & x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

Answer (2.1) does not exist (2.3) does not exist

(2.2) 0 (2.4) -2

3. A ball is being inflated. Let V be the volume of the ball in cm^3 and r be the ball's radius in cm such that $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Find

(3.1) The average rate of volume's change with respect to radius when the radius changes from 6 cm to 9 cm

(3.2) The instantaneous rate of volume's change with respect to radius when the radius is 9 cm

Answer (3.1) 228π (3.2) 324π

4. ในการเพาะเลี้ยงแบคทีเรียชนิดหนึ่ง พบว่า เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียเท่ากับ $7t^2 + 5$ หน่วย จงหา

(4.1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียเทียบกับเวลา ในช่วงเวลา 4 ถึง 7 ชั่วโมงในการเพาะเลี้ยง

(4.2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียเทียบกับเวลา เมื่อ $t = 4$

เฉลย (4.1) 77 (4.2) 56

Exercise 2

1. Find the derivatives of the following functions

(1.1) $y = 7 + 9x - 7x^3 + 4x^7$ (1.2) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

(1.3) $y = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3}$ (1.4) $y = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5x}}$

(1.5) $y = (x^5 - 4x)^{43}$ (1.6) $y = \dfrac{3}{(a^2 - x^2)^2}$

(1.7) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$ (1.8) $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

(1.9) $y = (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3$ (1.10) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

(1.11) $y = \dfrac{x^3 - 2x\sqrt{x}}{x}$ (1.12) $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

(1.13) $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{a}{x}}$

Answer

(1.1) $9 - 21x^2 + 28x^6$ (1.2) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{6}{x^4}$

(1.3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt{x}$ (1.4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{5x}}$

(1.5) $43(5x^4 - 4)(x^5 - 4x)^{42}$ (1.6) $\dfrac{12x}{(a^2 - x^2)^3}$

(1.7) $\dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$ (1.8) $\dfrac{-12}{(3 + 2x)^2}$

(1.9) $2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^2 (13x^3 + 36x - 2)$

(1.10) $\dfrac{8x-x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (1.11) $2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(1.12) $\dfrac{-(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2}$ (1.13) $\dfrac{2ax}{(x^2+a)^2}$

2. Find the equation of a tangent line of $y=\dfrac{2x}{x+1}$ at $(1,1)$

Answer $y=\dfrac{x+1}{2}$

3. Find the equation of a tangent line of $y=x+\sqrt{x}$ at $(1,2)$

Answer $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

Exercise 3

1. Find the derivatives of the following functions

(1.1) $f(x) = x - 3\sin x$ (1.2) $y = \sin x + 10\tan x$

(1.3) $g(t) = t^3 \cos t$ (1.4) $h(\theta) = \theta\csc\theta - \cot\theta$

(1.5) $y = \dfrac{x}{\cos x}$ (1.6) $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$

(1.7) $y = \sqrt{\sin x}$ (1.8) $y = \cos(a^3 + x^3)$

(1.9) $y = \cot(\dfrac{x}{2})$ (1.10) $y = \sin(x\cos x)$

(1.11) $y = \tan(\cos x)$ (1.12) $y = (1+\cos^2 x)^6$

(1.13) $y = \sec^2 x + \tan^2 x$ (1.14) $y = \cot^2(\sin\theta)$

(1.15) $y = \sin(\tan\sqrt{\sin x})$

Answer

(1.1) $f'(x) = 1 - 3\cos x$ (1.2) $y' = \cos x + 10\sec^2 x$

(1.3) $g'(t) = 3t^2\cos t - t^3 \sin t$

(1.4) $h'(\theta) = \csc\theta - \theta\csc\theta\cot\theta + \csc^2\theta$

(1.5) $y' = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$ (1.6) $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{(1+\sec\theta)^2}$

(1.7) $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (1.8)

$y' = -3x^2 \sin(a^3 + x^3)$

(1.9) $y' = -\dfrac{1}{2}\csc^2(\dfrac{x}{2})$

(1.10) $y' = (\cos x - x\sin x)\cos(x\cos x)$

(1.11) $y' = -\sin x \sec^2(\cos x)$

(1.12) $y' = -12\cos x \sin x(1+\cos^2 x)^5$

(1.13) $y' = 4\sec^2 x \tan x$

(1.14) $y' = -2\cos\theta \cot(\sin\theta)\csc^2(\sin\theta)$

(1.15) $y' = \dfrac{\cos(\tan\sqrt{\sin x})(\sec^2\sqrt{\sin x})(\cos x)}{2\sqrt{\sin x}}$

2. Find the equation of a tangent line of each function at a given point

(2.1) $y = \tan x$ at $(\dfrac{\pi}{4}, 1)$

(2.2) $y = x + \cos x$ at $(0,1)$

(2.3) $y = x\cos x$ at $(\pi, -\pi)$

(2.4) $y = \sin(\sin x)$ at $(\pi, 0)$

(2.5) $y = \tan(\frac{\pi x^2}{4})$ at $(1,1)$

Answer

(2.1) $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ (2.2) $y = x + 1$ (2.3) $y = -x$

(2.4) $y = -x + \pi$ (2.5) $y = \pi x - \pi + 1$

3. Find the value of x such that there exists a tangent line of $f(x) = x + 2\sin x$ to be a horizontal line.

Answer $(2n+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$ where n is an integer

Exercise 4

1. Find the derivatives of the following functions.

(1.1) $y = \log_a(3x^2 - 5)$

(1.2) $y = \ln(x+3)^2$

(1.3) $y = \ln^2(x+3)$

(1.4) $y = \ln(x^3+2)(x^2+3)$

(1.5) $y = \ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2}$

(1.6) $y = \ln(\sin 3x)$

(1.7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(1.8) $y = x\ln x - x$

(1.9) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

(1.10) $y = \ln(\ln \tan x)$

(1.11) $y = \dfrac{(\ln x^2)}{x^2}$

(1.12) $y = \dfrac{1}{5}x^5(\ln x - 1)$

(1.13) $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$

(1.14) $y = \dfrac{\ln x}{1+\ln(2x)}$

(1.15) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

(1.16) $y = \ln(\dfrac{1}{x}) + \dfrac{1}{\ln x}$

Answer

(1.1) $\dfrac{6x}{(3x^2-5)\ln a}$

(1.2) $\dfrac{2}{x+3}$

(1.3) $\dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}$

(1.4) $\dfrac{3x^2}{x^3+2} + \dfrac{2x}{x^2+3}$

(1.5) $\dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{3x-4}$

(1.6) $3\cot 3x$

(1.7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(1.8) $\ln x$

(1.9) $\sec x$

(1.10) $\dfrac{2}{\sin(2x)\cdot\ln(\tan x)}$

(1.11) $\dfrac{2-4\ln x}{x^3}$ (1.12) $x^4\ln x-\dfrac{4x^4}{5}$

(1.13) $2\sin\ln x$ (1.14) $\dfrac{1+\ln 2}{x[1+\ln(2x)]^2}$

(1.15) $\dfrac{-x}{1+x}$ (1.16) $-\dfrac{1}{x}[1+\dfrac{1}{(\ln x)^2}]$

2. Let $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Find $f'(e)$

Answer 0

3. Find the equation of a tangent line of $y=\ln(\ln x)$ at $(e,0)$.

Answer $x-ey=e$

Exercise 5

1. Find the derivatives of the following functions.

(1.1) $f(x) = x^2e^x$

(1.2) $y = 3^{ax^3}$

(1.3) $f(u) = e^{1/u}$

(1.4) $f(t) = e^{t\sin 2t}$

(1.5) $y = \sqrt{1+2e^{3x}}$

(1.6) $y = e^{e^x}$

(1.7) $y = \dfrac{ae^x + b}{ce^x + d}$

(1.8) $f(t) = \cos(e^{-t\ln t})$

(1.9) $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$

(1.10) $y = 7^{x^3+8}$

(1.11) $y = 7^{x^3+8}\ (x^4 - x)$

(1.12) $h(t) = (\ln t + 1)10^{\ln t}$

(1.13) $g(x) = \dfrac{\ln x}{e^{x^2} - e^x}$

(1.14) $y = \tan^2(e^{3x})$

(1.15) $f(x) = e^{\sin^3(\ln(x^2+1))}$

Answer

(1.1) $f'(x) = x(x+2)e^x$

(1.2) $y' = 3^{ax^3}\ln 3 \cdot (3ax^2)$

(1.3) $f(u) = (-1/u^2)e^{1/u}$

(1.4) $f'(t) = e^{t\sin 2t}\,(2t\cos 2t + \sin 2t)$

(1.5) $y' = 3e^{3x} / \sqrt{1+2e^{3x}}$

(1.6) $y' = e^{e^x}\; e^x$

(1.7) $y' = \dfrac{(ad-bc)e^x}{(ce^x+d)^2}$

(1.8) $f'(t) = \sin(e^{-t\ln t})\cdot e^{-t\ln t}(1+\ln t)$

(1.9) $y' = -\dfrac{1}{2}a^{\sqrt{\cos x}}\cdot \sin x\;(\ln a + \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}})$

(1.10) $y' = 3x^2\ln 7\cdot 7^{x^3+8}$

(1.11) $y' = 7^{x^3+8}[(4x^3-1)+(3x^6-3x^3)\ln 7]$

(1.12) $h'(t) = \dfrac{10^{\ln t}}{t}[\ln 10(\ln t+1)+1]$

(1.13) $g'(x) = \dfrac{1}{x(e^{x^2}-e^x)} - \dfrac{\ln x(2xe^{x^2}-e^x)}{(e^{x^2}-e^x)^2}$

(1.14) $y' = 6e^{3x}\tan(e^{3x})\sec^2(e^{3x})$

(1.15) $f'(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}\sin^2(\ln(x^2+1))\cdot\cos(\ln(x^2+1))\cdot e^{\sin^3(\ln(x^2+1))}$

Exercise 6

1. Find the derivatives of the following functions.

(1.1) $y = \arcsin(2x-3)$ (1.2) $y = \arccos(x^2)$

(1.3) $y = \arctan 3x^2$ (1.4) $y = \operatorname{arc}\cot\dfrac{1+x}{1-x}$

(1.5) $f(x) = x\csc^{-1}(\dfrac{1}{x}) + \sqrt{1+x^2}$

(1.6) $y = \dfrac{1}{ab}\arctan(\dfrac{b}{a}\tan x)$

(1.7) $y = x\ln(4+x^2) + 4\arctan\dfrac{x}{2} - 2x$

(1.8) $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(\dfrac{1}{t})$

(1.9) $y = \cos^{-1}\left[\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right]$

Answer

(1.1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$

(1.2) $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(1.3) $y' = \dfrac{6x}{1+9x^4}$

(1.4) $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(1.5) $f'(x) = \csc^{-1}(\frac{1}{x}) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(1.6) $y' = \dfrac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

(1.7) $y' = \ln(4+x^2)$

(1.8) $h'(t) = 0$

(1.9) $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

2. Show that

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2(1+x)(1+x^2)}$$

Exercise 7

1. Evaluate $\dfrac{dy}{dx}$ of the following functions.

(1.1) $y = \sinh 3x$ (1.2) $y = \tanh(1 + x^2)$

(1.3) $y = \coth(\dfrac{1}{x})$ (1.4) $y = x\,\text{sech}\,x^2$

(1.5) $y = \text{csch}^2(x^2 + 1)$ (1.6)

$y = \ln(\tanh(2x))$

(1.7) $y = \sinh(\tan^{-1} e^{3x})$

Answer

(1.1) $3\cosh 3x$ (1.2) $2x\,\text{sech}^2(1 + x^2)$

(1.3) $\dfrac{1}{x^2}\text{csch}^2(\dfrac{1}{x})$

(1.4) $-2x^2\,\text{sech}\,x^2 \tanh x^2 + \text{sech}\,x^2$

(1.5) $-4x\,\text{csch}^2(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1)$

(1.6) $4\,\text{csch}\,4x$

(1.7) $\dfrac{3e^{3x}\cosh(\tan^{-1} e^{3x})}{1 + e^{6x}}$

Exercise 8

1. Use logarithmic derivative to find $\dfrac{dy}{dx}$ where

(1.1) $y=(x^2+2)(1-x^3)^4$ (1.2) $y=\dfrac{x(1-x^2)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(1.3) $y=\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ (1.4) $y=(2x+1)^5(x^4-3)^6$

(1.5) $y=\dfrac{\sin^2 x\tan^4 x}{(x^2+1)^2}$ (1.6) $y=x^2e^{2x}\cos 3x$

(1.7) $y=x^x$ (1.8) $y=x^{\ln x}$

(1.9) $y=x^{\sin x}$

Answer

(1.1) $y'=2x^2(1-x^3)^3(-7x^2-11)$

(1.2) $y'=\dfrac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

(1.3) $y'=\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{15}{3x+2}\right]$

(1.4) $y'=(2x+1)^5(x^4-3)^6\left(\dfrac{10}{2x+1}+\dfrac{24x^3}{x^4-3}\right)$

(1.5) $y' = \dfrac{\sin^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^2}\left(2\cot x + \dfrac{4\sec^2 x}{\tan x} - \dfrac{4x}{x^2+1}\right)$

(1.6) $y' = x^2 e^{2x} \cos 3x[2/x + 2 - 3\tan 3x]$

(1.7) $y' = x^x(1+\ln x)$

(1.8) $y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x$

(1.9) $y' = x^{\sin x}[(\sin x)/x + \ln x \cos x]$

อนุพันธ์อันดับสูง

(Derivatives of Higher Order)

นิยาม 4 **Derivatives of Higher Order**

อนุพันธ์อันดับสูง หมายถึง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งครั้งขึ้นไป เรียกว่า อนุพันธ์อันดับสอง อันดับสามของฟังก์ชัน ตามลำดับ เช่น ถ้าให้ $y = f(x)$ แล้ว

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ เรียกว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}f'(x) = f''(x)$ เรียกว่าอนุพันธ์อันดับสอง

$\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d}{dx}f''(x) = f'''(x)$ เรียกว่าอนุพันธ์อันดับสาม

$\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$ เรียกว่าอนุพันธ์อันดับ n

Example Find $f^{(n)}(x)$ where $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)}$.

Solution

Example Find $f^{(n)}(x)$ where $f(x) = \ln(1-x)$.

Solution

Exercise 10

1. Find $f^{(5)}(x)$ where $f(x) = 3^x$.
2. Find $f'''(x)$ where $f(x) = e^{3x+1}$.
3. Find $f^{(n)}(x)$ where $f(x) = (ax+b)^n$.

Answer

1. $3^x \ln^5 3$
2. $27e^{3x+1}$
3. $a^n n!$

การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยาย

(Implicit Differentiation)

นิยาม 5 Implicit function

ฟังก์ชันแฝง (Implicit function) หรือฟังก์ชันนิยามโดยปริยาย ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรอิสระ คือ ฟังก์ชันที่เขียนนิยามในรูป $F(x, y) = 0$ เช่น ฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่นิยามโดยสมการ $x^2 + 3xy^2 + 2y - 5 = 0$ คือ $F(x, y) = x^2 + 3xy^2 + 2y - 5$ เป็นต้น

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง $F(x, y) = 0$ เทียบกับ x เมื่อ $y = f(x)$ จะใช้กระบวนการที่เรียกว่า **การหาอนุพันธ์โดยปริยาย**(Implicit Differentiation) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

  1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x
  2. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

Example Find $f'(x)$ of a function defined by

$$y^2 + xy - 6x = 0.$$

Solution

Example Find $f'(x)$ of a function defined by

$$x = a\sec h^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}\ .$$

Solution

Exercise 9

Exer. 1-5: Find $f'(x)$ of each function defined by

1. $2x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = 0$

2. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$

3. $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

4. $x\sec 5x = 4y - y\tan 8x$

5. $\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x} + \cos y} = 1$

Answer

1. $\dfrac{3xy^2 - 4x^3}{2y^3 - 3x^2y}$ **2.** $\dfrac{x^3 - y}{x - y^3}$ **3.** $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$

4. $\dfrac{8y\sec^2 8x + \sec 5x + 5x\sec 5x\tan 5x}{4 - \tan 8x}$

5. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x} + \cos y}}{\sin y\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sin y\sqrt{x}}$

รูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate forms)

พิจารณาลิมิตของผลหารของฟังก์ชัน จากที่เคยเรียนมาแล้ว ทราบว่า ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ หาค่าได้ โดยที่ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{หาค่าได้}$$

แต่ถ้า $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ จะยังไม่สามารถบอกได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้หรือไม่ ต้องทำการพิจารณาใหม่ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) =$ ค่าคงที่ $\neq 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

   จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้ $(=\infty)$

2. ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

ในกรณีนี้เราเรียก $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ว่าอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นลักษณะที่ยังบอกค่าที่แน่นอนไม่ได้ นอกจากนี้ยังมีรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate forms) รูปอื่นๆ อีกดังนี้ $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

การหาค่าของลิมิตในรูปแบบยังไม่กำหนด ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ โลปิตาล (L' Hopital) <u>กฎของโลปิตาล</u> (L' Hopital 's rule) กล่าวไว้ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง x_0 , $f(x)$ และ g(x) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุกค่าภายใน $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ ถ้า $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ จะได้ว่า เมื่อ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ จะได้ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

และถ้า $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดรูป $\frac{0}{0}$ อีกก็ใช้กฎของโลปิตาลทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่า $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x)$ และ $\lim\limits_{x\to x_0} g^{(n)}(x)$ ไม่เป็น 0 พร้อมกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$=\ldots= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

Example 1 Evaluate $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{4+\cos\theta}-2}{\theta-\dfrac{\pi}{2}}$.

Solution

Example 2 Evaluate $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-(1+\dfrac{t}{2})}{t^2}$

Solution

ในบางครั้ง ฟังก์ชันที่จะหาค่าลิมิตประกอบด้วย พจน์ที่สามารถแยกออกไปแล้วหาค่าลิมิตได้เป็นค่าคงที่ คูณกับ ลิมิตของส่วนที่เหลือที่ยังอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด เราควรจะแยกพจน์เหล่านั้นออกไปก่อนเพื่อที่จะได้ใช้กฎของโลปิตาลกระทำกับส่วนที่เหลือได้ง่ายขึ้น

Example 3 Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \,(1 - e^x)}{(1 + x)\ln(1 - x)}$

Solution

กรณีที่ลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$ ทำได้ 2 แบบ คือ

(1) พยายามกำจัดพจน์ที่เข้าใกล้ ∞ โดยเอาพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของฟังก์ชันพหุนามหารตลอด

(2) ใช้กฎของโลปิตาลเข้าช่วยในกรณีที่ไม่ใช่ลิมิตของผลหารของฟังก์ชันพหุนาม

คือเปลี่ยน $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad (= \dfrac{\infty}{\infty})$

ให้อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ โดยให้ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$

<u>ทฤษฎีบท 1</u> กำหนด $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ และ

ถ้า $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้

จะได้ว่า $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ อีก ให้ใช้การทำซ้ำจนกระทั่งลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นเศษ หรือฟังก์ชันที่เป็นส่วน มีค่าไม่เป็นอนันต์พร้อมๆกัน การหาลิมิตในลักษณะนี้ถือว่าเป็นการหาลิมิตโดยใช้กฎของโลปิตาลเช่นกัน

Example 4 Evaluate $\lim_{x\to\infty} \frac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x}$

Solution

Example 5 Evaluate $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

Solution

Example 6 Evaluate $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-3/x}}{x^2}$

Solution

สำหรับรูปแบบยังไม่กำหนดรูป $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ จะหาค่าลิมิตได้โดยจัดให้อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ก่อน แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาล

Example 7 Evaluate $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

Solution

Example 8 Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \dfrac{1}{x})$

Solution

Example 9 Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x} \right)$

Solution

สำหรับรูปแบบยังไม่กำหนดรูป 0^0 , ∞^0 , 1^∞ ได้จากการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y=f(t)^{g(t)}$ โดยที่ $g(a)=f(a)=0$ หรือ $\lim\limits_{t\to a} f(t)=\infty$, $g(a)=0$ หรือ $f(a)=1$, $\lim\limits_{t\to a} g(t)=\infty$ จะหาค่าลิมิตโดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลัง และจัดให้อยู่ในรูป $0\cdot(-\infty)$ หรือ $0\cdot\infty$ ซึ่งหาค่าลิมิตได้โดยวิธีที่กล่าวไปแล้ว

<u>หมายเหตุ</u> $1^{\infty} \neq 1$ เสมอไป เช่น $1^{\frac{1}{h}}$ และ $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ มีค่าแตกต่างกัน แม้ว่าขณะที่ h เข้าใกล้ 0 ทั้ง 2 เทอมจะมีรูปเป็น 1^{∞} แต่ $\lim_{h \to 0} 1^{\frac{1}{h}} = 1$ และ $\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

Example 10 Evaluate $\lim_{x \to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$

Solution

Example 11 Evaluate $\lim_{x \to 0^+} (1+\frac{5}{x})^{2x}$

Solution

Example 12 Find a value for r and s that make

$$\lim_{x \to 0} (\, x^{-3} \sin 3x + r x^{-2} + s \,) = 0$$

Solution

Exercise

Compute the following limits.

1. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z^2 - \sin^2 z}{z^4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + (1-x)}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{1-e^x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 2^x}{4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan^{-1} x - x}{2x - \sin^{-1} x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln^2(x+1)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{100}}{e^x}$

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

13. $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\dfrac{5}{x})^{2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty} (1-e^{-x})^{e^x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}})$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

19. $\lim\limits_{x\to 0} x\, \mathrm{cosec}^2 \sqrt{2x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 1 - e^{x-2}}{1 - \cos 2\pi x}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x}$ (a is constant)

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1+x) - \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - (1+x-\sinh x)}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - ax - 1}{ax^2}$

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^4 + x^2}{e^x + 1}$

28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2^x}{3^{x^2}}$

29. Find a value for a, b, c that makes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh ax + bx + c}{x^3} = \frac{1}{6}$$

30. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(x+\sqrt{x})\sin^2 2x}{x^{3/2}}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x^2}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

33. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln^5 x}{x^2}$

34.

$\lim_{x\to \pi/2} (\sec^3 x - \tan^3 x)$

35. $\lim_{x\to 0} (\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x})$

36. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^3}$

Answer to Exercise

1. $\frac{1}{3}$	2. $\frac{1}{3}$	3. $\frac{1}{2}$	4. -1
5. $\frac{1}{2}\ln 2$	6. 1	7. 4	
8. does not exist			
9. $-\frac{1}{4}$	10. $\frac{1}{\pi}$	11. 0	12. 0
13. e^{10}	14. e^{4}	15. $\frac{1}{e}$	16. 3
17. $+\infty$	18. $-\frac{1}{2}$	19. $\frac{1}{2}$	20. $\frac{5}{3}$
21. 0	22. $-\frac{1}{4\pi^2}$	23. a	24. $\frac{1}{6}$
25. $\frac{1}{2}$	26. 0	27. 0	28. 0
29. $a=1, b=-1, c=0$		30. 0	31. ∞
32. 2	33. 0	34. ∞	35. $-\frac{1}{3}$
36. 1			

การประยุกต์อนุพันธ์ (Application of Derivative)

1. ผลต่างเชิงอนุพันธ์ (Differentials)

นิยาม 1 Differential

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ แล้วจะเรียก

$$dy = f'(x)dx$$

ว่า ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของ y (ตัวแปรตาม) ที่จุด x ใด ๆ (หรือเรียกว่าผลต่างอนุพันธ์ของ y ที่จุด x)

ตัวอย่างสูตรหาผลต่างเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเบื้องต้น

1. $da = 0$; a คือค่าคงตัว
2. $dx^n = nx^{n-1}dx$
3. $d\sin x = \cos x dx$
4. $d\cos x = -\sin x dx$
5. $da^x = a^x \ln a dx$
6. $de^x = e^x dx$
7. $d\ln x = \frac{1}{x}dx$
8. $d\log_a x = \frac{\log_a e}{x}dx$

หมายเหตุ

นิยามผลต่างเชิงอนุพันธ์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเสริมได้

$$\frac{\text{differential of } y}{\text{differential of } x} = \frac{dy}{dx} = g(t)$$

เมื่อ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปร x, y นิยามโดยสมการตัวแปรเสริม(t)

Example 1 Find dy where $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Solution

Example 2 Evaluate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ where $y = f(x)$ is defined by $y = t^2 + 1$ and $x = t^3 + 3$.

Solution

Exercise of Differential

Find differentials of the following functions

1. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

2. $x^2 y - y^2 x + 2 = 0$

3. $x + xy\sin x + \dfrac{y^2 \cos x}{x} = 1$

Answers

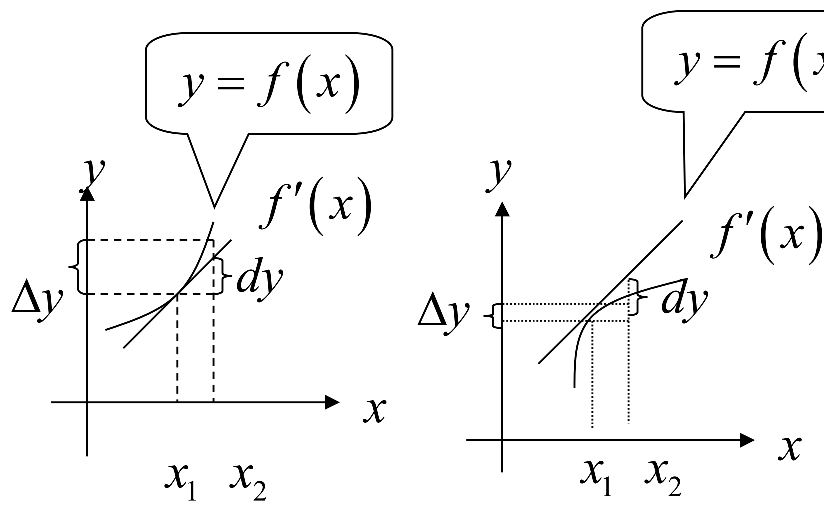
1. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}dx$ **2.** $\dfrac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}dx$

3. $$\left(\frac{\dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2}y^2 - xy\cos x - y\sin x - 1}{x\sin x + 2y\dfrac{\cos x}{x}} \right)dx$$

2. การประมาณค่าเชิงเส้น

(Linear Approximation)

จากนิยามผลต่างเชิงอนุพันธ์ $dy = f'(x)dx$ และส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ ซึ่งความหมายทางเรขาคณิตพิจารณาได้จากรูปข้างล่าง



รูป 1 แสดง $dy, \Delta y$

ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของตัวแปรตาม y ณ.จุดใด ๆ จะเกิดจากส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ x ณ.จุดนั้น นั่นคือ $dx = \Delta x$ แต่ผลต่างเชิงอนุพันธ์ของตัวแปรตามจะมีค่าใกล้เคียงกับส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม $dy \approx \Delta y$ และเมื่อ $\Delta x \to 0$ จำทำให้ $dy = \Delta y$

การประมาณค่าเชิงเส้นของฟังก์ชันด้วยค่าผลต่างเชิงอนุพันธ์มีหลักการพิจารณาดังนี้

$$\Delta y \approx dy$$
$$y_2 - y_1 \approx f'(x)dx$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$$
$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

สมการนี้เป็นการประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(x+\Delta x)$ ด้วยค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อนิยามการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x ณ.จุดนี้ $\Delta x = dx$

Example 3 Use a linear approximation (formula (1)) to estimate $f(x) = \sqrt{1+x}$ at $x = 0$ when $\Delta x = a$

Solution

Example 4 Use (1) to approximate $\sqrt{1.1}$.

Solution

Example 5 Use (1) to approximate $\cos 62^{\circ}$.

Solution

Exercise of Linear Approximation

Use a linear approximation (formula (1)) to estimate the value of the following quality:

1. $\sqrt{63.999}$ 2. $(31)^{\frac{3}{5}}$ 3. $\cos(44^{\circ})$

4. $(1.01)^{5}+3(1.01)^{\frac{3}{2}}-1$

Answer

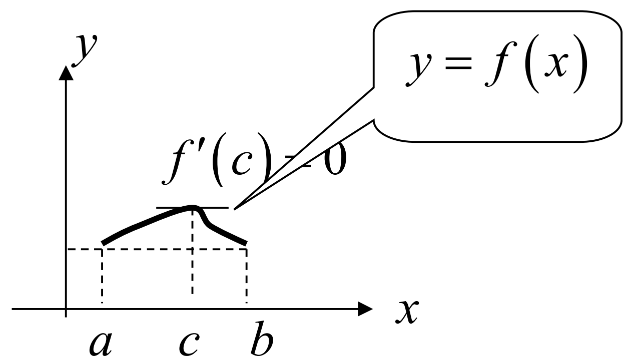
1. 7.9999 2. 7.85 3. 0.7194 4. 3.095

3. ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน

Mean - Value of Function

<u>Roll's Theorem</u>

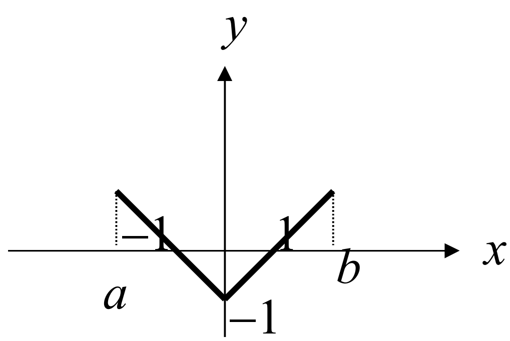
ถ้า $f(x)$เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ใด ๆ และมีอนุพันธ์บนช่วง(a,b) แล้ว $f(a)=f(b)$ จะได้ว่าจะต้องมีจุด $x=c$ อย่างน้อยหนึ่งจุดบน (a,b)ที่ $f'(c)=0$



รูป 2 แสดงกราฟตามทฤษฎีบทของโรลล์

หมายเหตุ

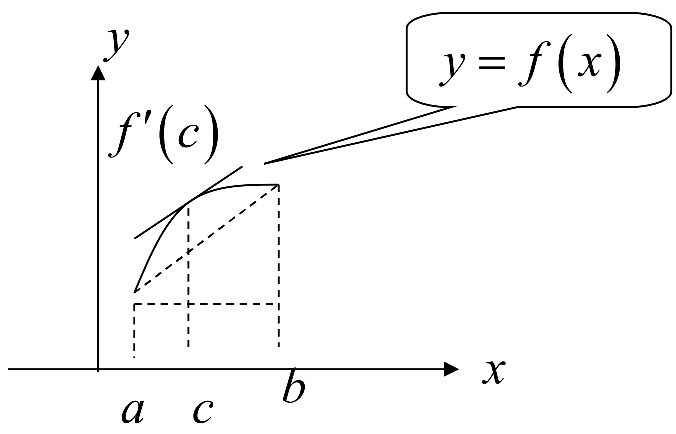
ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ เช่น $y=|x|-1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุด แต่จุดหักมุม$(0,-1)$เป็นจุดไม่มีอนุพันธ์ ดังนั้นจึงไม่สอดคล้องกับทฤษฎีของโรลล์ คือ ไม่มี $f'(c)=0$



รูป 3 แสดงรูปกราฟ $y = |x| - 1$

Mean - Value Theorem

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ใด ๆ และมีอนุพันธ์บนช่วง (a,b) แล้วจะได้ว่าจะต้องมีจุด $x = c$ อย่างน้อยหนึ่งจุดบน (a,b) ที่ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



รูป 4 แสดงกราฟตาม Mean - Value Theorem

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{mean of } f(x)$$

Example 6 Verify Roll's Theorem to the function $f(x) = x^2 - 6x + 8$ on the interval $[2, 4]$.

Solution

Example 7 Let $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 3$. Find x such that $f'(x)$ equals to the average value of f over $0 \le x \le 2$

Solution

Exercise of Mean-Value Function

Find a point c on $[a,b]$ such that $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

1. $f(x)=x^6 \quad ;[-3,3]$
2. $f(x)=\sin x \quad ;[0,2\pi]$
3. $f(x)=x^3-2x^2+x+1 \quad ;[0,1]$

Answers

1. 0 2. $\dfrac{\pi}{2}$ or $\dfrac{3\pi}{2}$ 3. $\dfrac{1}{3}$

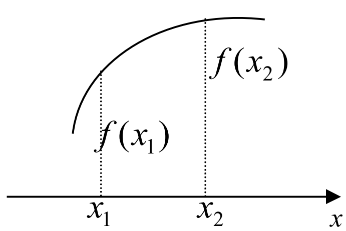
การประยุกต์อนุพันธ์ (Application of Derivative)

4. <u>ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด</u> (Increasing and Decreasing Functions)

นิยาม 2 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และฟังก์ชันคงที่

ให้ f นิยามบนช่วง I และ x_1, x_2 เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วง I

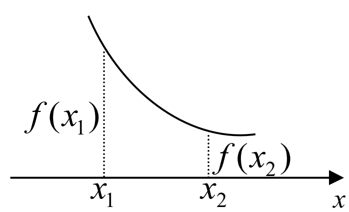
1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
3. f เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) บนช่วง I ถ้าทุกๆค่า x_1, x_2 แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$



<u>Increasing</u>

$f(x_1) < f(x_2)$

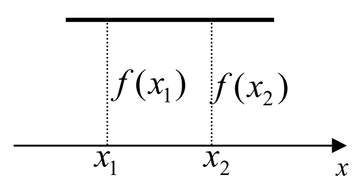
เมื่อ $x_1 < x_2$



<u>Decreasing</u>

$f(x_1) > f(x_2)$

เมื่อ $x_1 < x_2$



<u>Constant</u>

$f(x_1) = f(x_2)$

ทุกๆ x_1, x_2

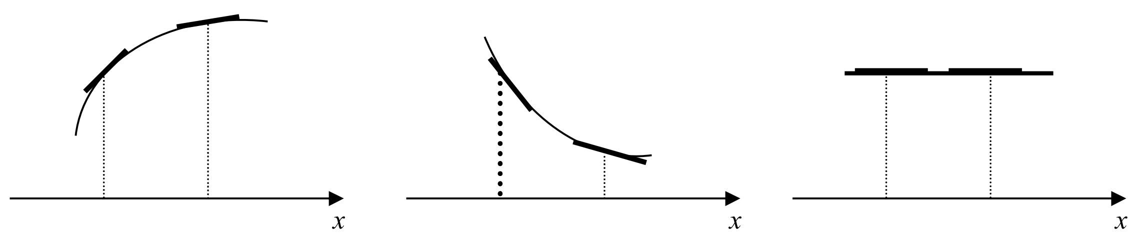
ทฤษฎีบท 1

ให้ f เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a,b] และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เพิ่มขึ้นบนช่วง[a,b]

2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f ลดลงบนช่วง[a,b]

3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f คงที่บนช่วง[a,b]

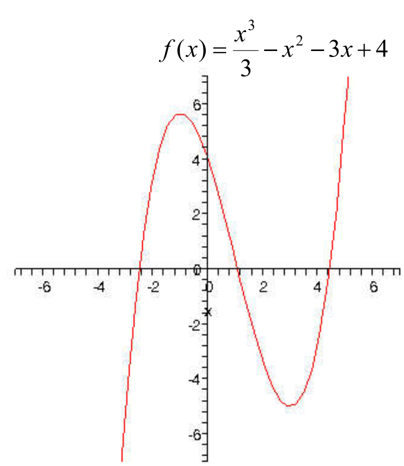


Example 8 Identify the intervals of x where a given function

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ is increasing and where it is

decreasing.

Solution

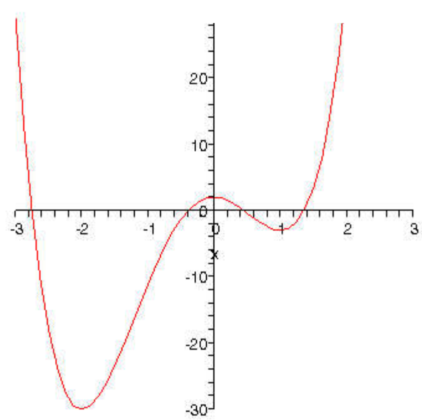


Example 9 Identify the intervals of x where

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ is increasing and decreasing.

Solution

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$



5. <u>โค้งคว่ำ โค้งหงาย และจุดเปลี่ยนเว้า</u>

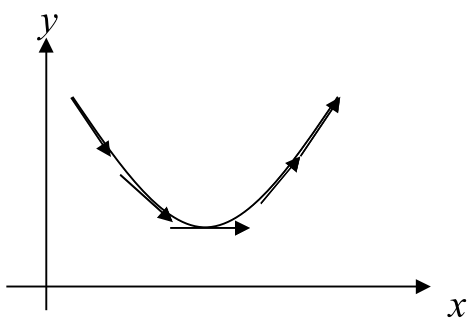
(Concavity and Point of Inflection)

นิยาม 3 โค้งคว่ำและโค้งหงาย (Concave Up and Concave Down)

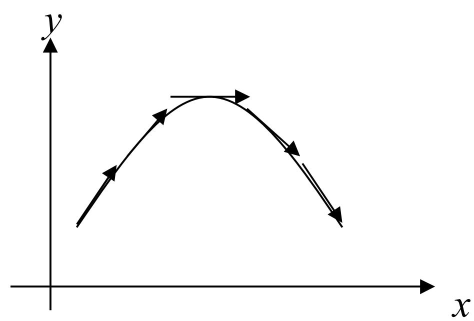
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I

1. f จะเรียกว่า <u>โค้งหงาย</u> (concave up) บนช่วง I ถ้า f' เพิ่มค่าขึ้นบนช่วง I

2. f จะเรียกว่า <u>โค้งคว่ำ</u> (concave down) บนช่วง I ถ้า f' ลดค่าลงบนช่วง I



concave up



concave down

ทฤษฎีบท 2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับสองได้บนช่วงเปิด I

1. ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง I แล้ว f เป็นโค้งหงายบนช่วง I

2. ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง I แล้ว f เป็นโค้งคว่ำบนช่วง I

Example 10 Identify the intervals of x where the following functions are concave up and where they are concave down.

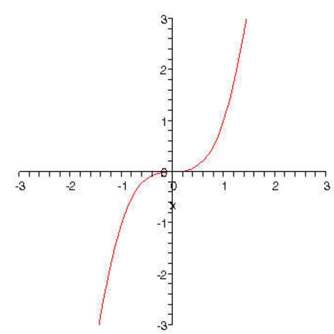
a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Solution

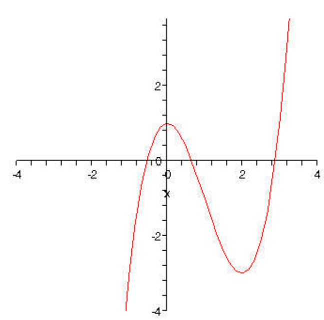
a.

$f(x) = x^3$



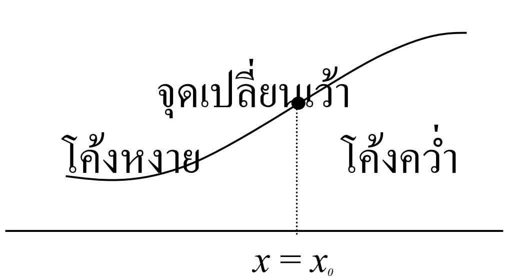
b.

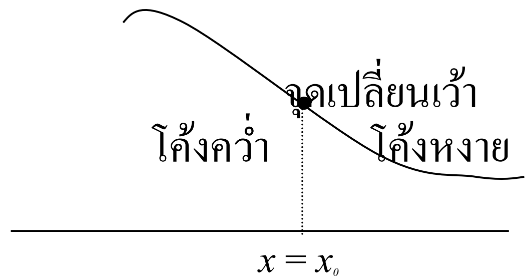
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$



นิยาม 4 จุดเปลี่ยนเว้า (Inflection Point)

จุด $(x_0, f(x_0))$ เรียกว่า จุดเปลี่ยนเว้า (inflection point) ถ้า f เปลี่ยนจากโค้งคว่ำ(โค้งหงาย) เป็นโค้งหงาย(โค้งคว่ำ) ที่ $x = x_0$





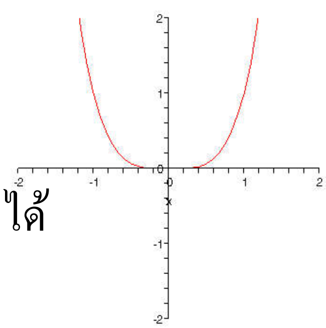
ทฤษฎีบท 3

ถ้า จุด $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าแล้ว

$f''(x_0) = 0$ หรือ $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

<u>ข้อสังเกต</u>

$f(x) = x^4$



ถ้า $f''(x_0) = 0$ หรือ $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

แล้วจุด $(x_0, f(x_0))$ อาจเป็นจุดเปลี่ยนเว้าหรือไม่ ก็ได้

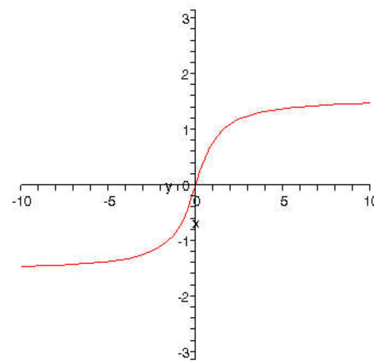
เช่น $f(x) = x^4$ พิจารณา $f''(x) = 12x^2$

ซึ่ง $f''(0) = 0$ แต่ที่ $x = 0$ ไม่ใช่จุดเปลี่ยนเว้า

Example 11 Find all inflection points of $f(x) = \tan^{-1} x$.

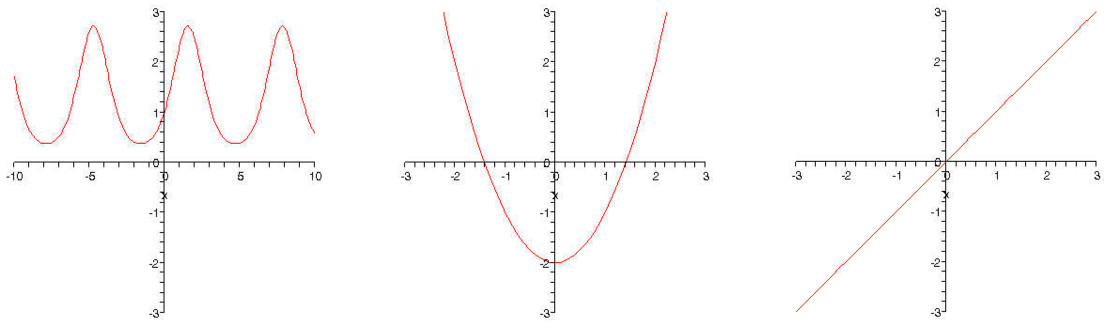
Solution

$f(x) = \tan^{-1} x$



6. <u>ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน</u>

(Maximum Value and Minimum Value of Function)



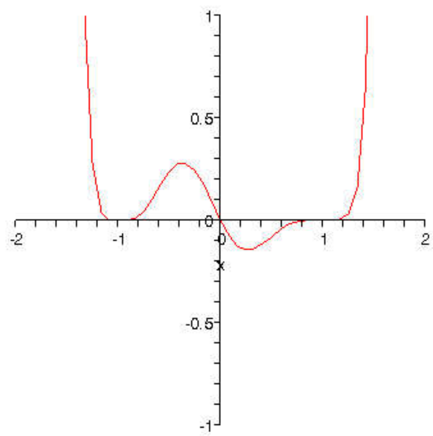
นิยาม 5 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum and Relative Minimum)

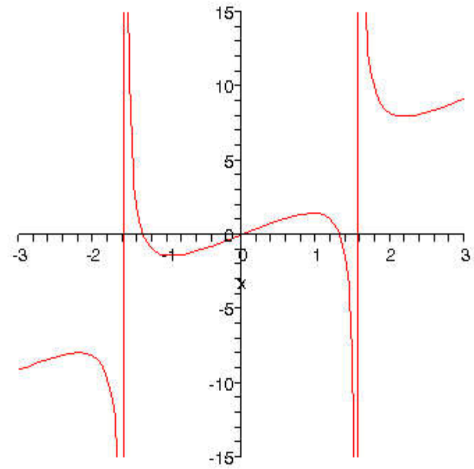
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง [a,b]

1. f มีค่า<u>สูงสุดสัมพัทธ์</u> (Relative Maximum) ที่จุด $x = x_0$ ถ้ามีช่วง (a,b) ซึ่ง $x_0 \in (a,b)$ และ $f(x) \le f(x_0)$ ทุกค่า $x \in (a,b)$ และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. f มีค่า<u>ต่ำสุดสัมพัทธ์</u> (Relative Minimum) ที่จุด $x = x_0$ ถ้ามีช่วง (a,b) ซึ่ง $x_0 \in (a,b)$ และ $f(x) \ge f(x_0)$ ทุกค่า $x \in (a,b)$ และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว จะกล่าวว่า f มีขีดสุดสัมพัทธ์





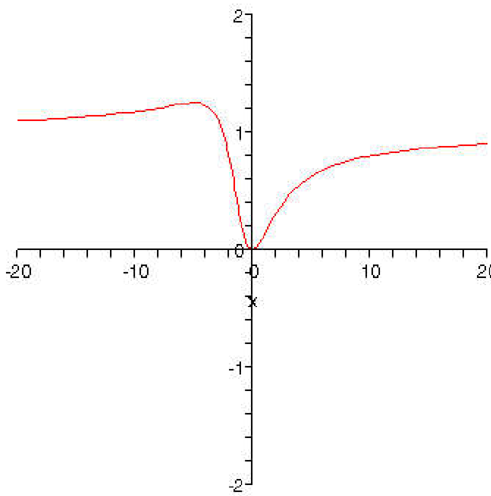
นิยาม 6 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum and Absolute Minimum)

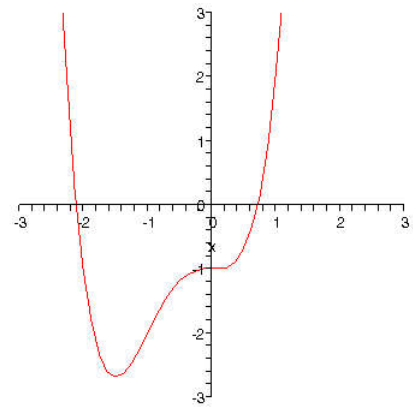
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง [a,b]

1. f มีค่า<u>สูงสุดสัมบูรณ์</u> (Absolute Maximum) ที่จุด $x = x_0$ ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ ทุกค่า $x \in D_f$ และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่าจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

2. f มีค่า<u>ต่ำสุดสัมบูรณ์</u> (Absolute Minimum) ที่จุด $x = x_0$ ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ ทุกค่า $x \in D_f$ และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่าจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือต่ำสุดสัมบูรณ์แล้ว จะกล่าวว่า f มีขีดสุดสัมบูรณ์





<u>ทฤษฎีบทค่าสุดขีด</u> (Extreme Value Theorem)

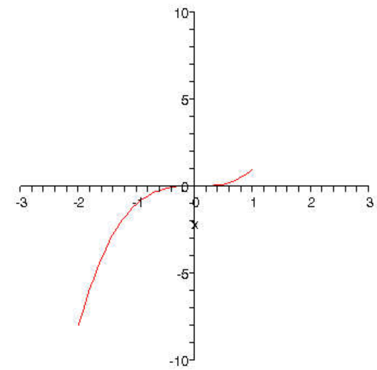
ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วง [a,b] แล้ว f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง [a,b]

<u>Extreme Value Theorem</u>

If function f is continuous on [a,b], then f has both absolute minimum and absolute maximum values on [a,b].

Example 12 Find absolute extreme values of $f(x) = x^3$ where $x \in [-2,1]$.

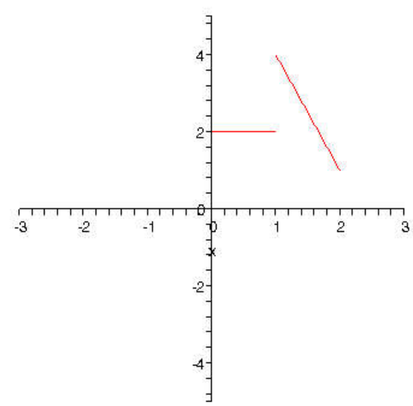
Solution



Example 13 Find absolute extreme values of

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ,0 \le x \le 1 \\ -3x+7 & ,1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Solution



จากตัวอย่าง จะเห็นว่า ถ้าฟังก์ชันไม่มีความต่อเนื่องในช่วง [a,b] ฟังก์ชันอาจจะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือสูงสุดสัมบูรณ์ หรือไม่มีก็ได้

ทฤษฎีบท 4
ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ แล้ว

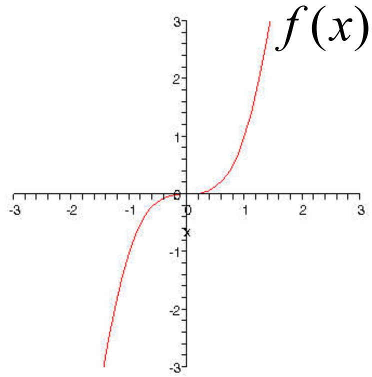
$$f'(x_0) = 0 \text{ หรือ } f'(x_0) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้า $f'(x_0) = k \neq 0$ แล้ว ที่ $x = x_0$ ไม่ใช่จุดสุดขีดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ หาค่าไม่ได้ แล้ว ที่ $x = x_0$ ไม่จำเป็นต้องให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

เช่น จากตัวอย่าง5 จะเห็นว่า $f'(x) = 0$ ที่ $x = 0$ แต่ฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$

$f(x) = x^3$



นิยาม 7 จุดวิกฤติ

จุดวิกฤติ (Critical Point) ของฟังก์ชัน f คือ จุดบนกราฟ ณ ตำแหน่ง $x = x_0$ หรือ $(x_0, f(x_0))$ ซึ่ง

1. $f'(x_0) = 0$

หรือ 2. $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

และเรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าวิกฤติ (Critical value) ของ f

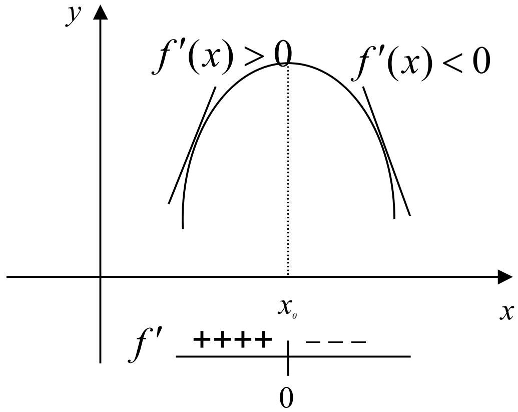
<u>การทดสอบหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน</u>

ทฤษฎีบท 5 การตรวจสอบอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative Test)

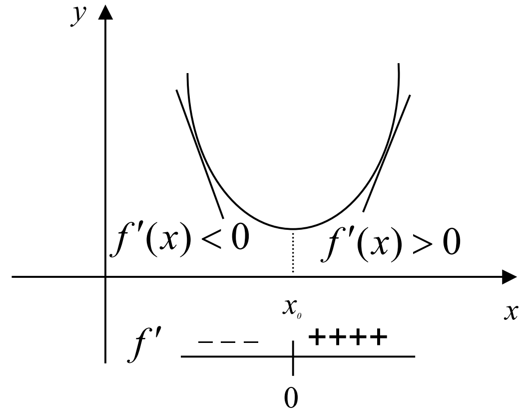
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดวิกฤติ $x = x_0$ และเมื่อพิจารณาอนุพันธ์ของ f ขณะที่ผ่าน x_0

1. ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

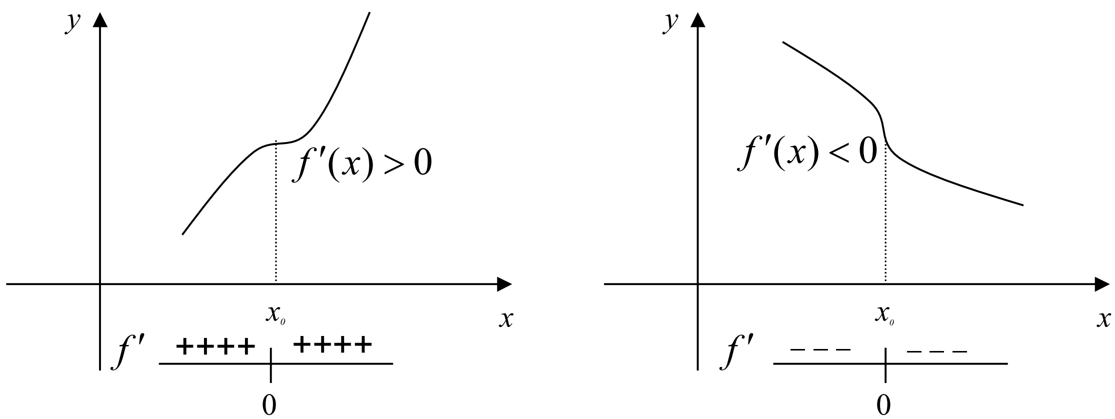
2. ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$



Relative Maximum



Relative Minimum

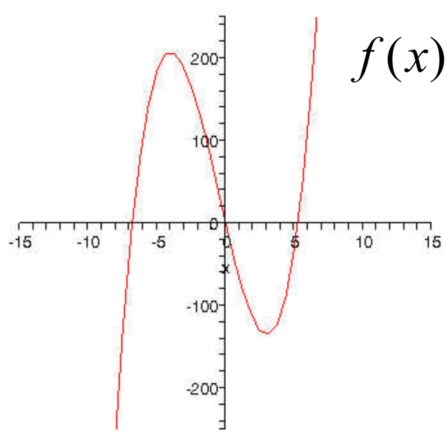


Neither Relative Maximum nor Minimum

Example 14 Find both relative max and relative min values of

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 27x.$$

Solution



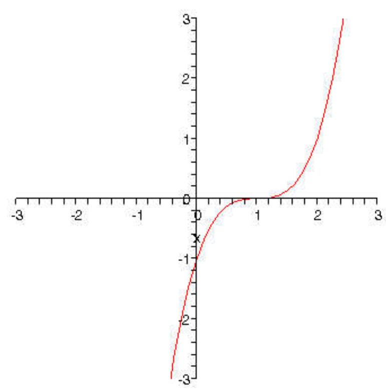
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 27x$$

Example 15 Find both relative max and relative min values of

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Solution

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$



Example 16 Find all absolute extreme value of function $f(x) = 6x - x^2$ on the interval [1,6].

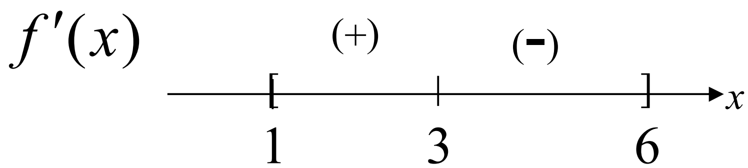
Solution

$f'(x) = 6 - 2x$

Set $f'(x) = 0$. So we get $x = 3$.

Thus the critical point is $x = 3$.

Consider the signs of $f'(x)$



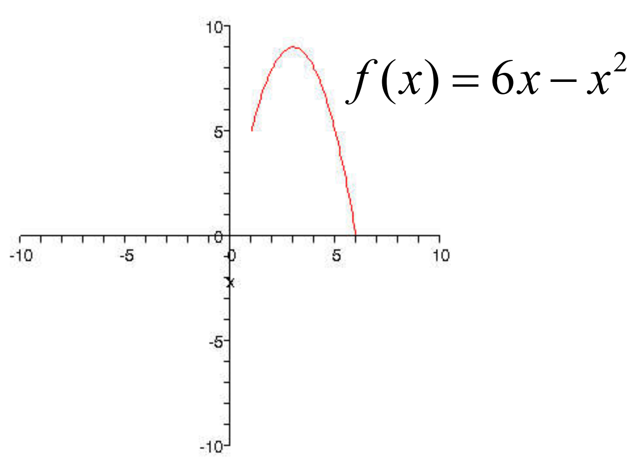
พิจารณา $f(1) = 5$, $f(3) = 9$ และ $f(6) = 0$

เพราะฉะนั้น ที่ $x = 3$ ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ 9

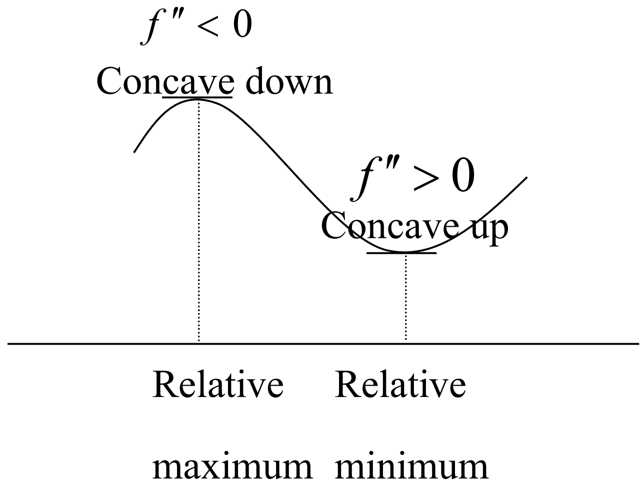
จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ (3,9)

ที่ $x = 6$ ให้ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ 0

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ (6,0)



สามารถใช้อนุพันธ์อันดับสองตรวจสอบค่าขีดสุดสัมพัทธ์ได้อีกวิธีหนึ่ง จากความรู้เรื่องโค้งคว่ำและโค้งหงายที่เรียนผ่านมา



ทฤษฎีบท 6 การตรวจสอบอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivative Test)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับสองได้ที่ x_0 และ $f'(x_0) = 0$

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ แล้ว ยังสรุปไม่ได้ ต้องใช้วิธีอื่น

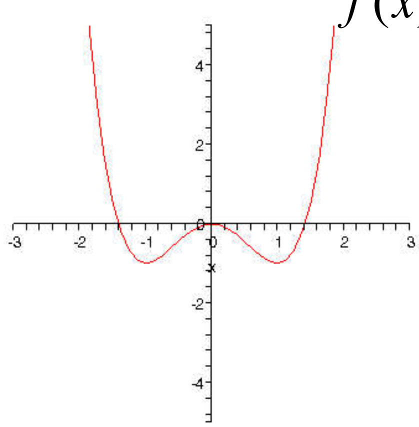
Example 17 Let $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(1) Identify the intervals of x where function f(x) is concave up and where it is concave down.

(2) Find its inflection point and relative extreme points.

Solution

$f(x) = x^4 - 2x^2$



Example18 Find a and b so that $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ has a relative maximum at $x = -1$ and relative minimum at $x = 3$.

Solution

7. <u>การวาดกราฟของฟังก์ชันพหุนาม</u> $f(x)$

ขั้นตอนในการวาดกราฟ ให้พิจารณาดังนี้

1. พิจารณาคุณสมบัติต่างๆของฟังก์ชัน ได้แก่
   ก. โดเมน เรนจ์
   ข. จุดตัดแกน x และ y
   ค. การสมมาตร
   ง. เส้นกำกับกราฟ
2. ใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง f' หาค่า
   ก. จุดวิกฤติ
   ข. ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด
   ค. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ ต่ำสุดสัมพัทธ์
3. ใช้อนุพันธ์อันดับสอง f'' หาค่า
   ก. จุดเปลี่ยนเว้า
   ข. ช่วงที่ f เป็นโค้งคว่ำ โค้งหงาย

<u>เส้นกำกับ</u> (Asymptotes)

เส้นกำกับกราฟ คือ เส้นตรงที่กราฟเบนเข้าไปหา ในขณะที่ x หรือ y (หรือทั้งคู่) มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ ลดลงอย่างไม่สิ้นสุด โดยทั่วไป มี 3 แบบ

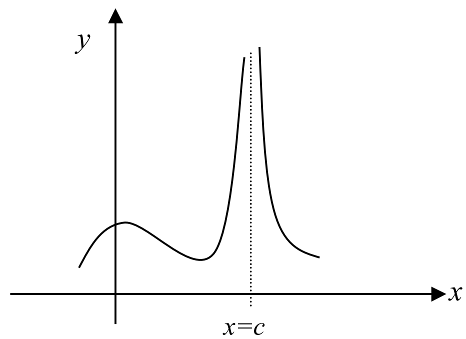
1. <u>เส้นกำกับแนวดิ่ง</u> (Vertical Asymptote)

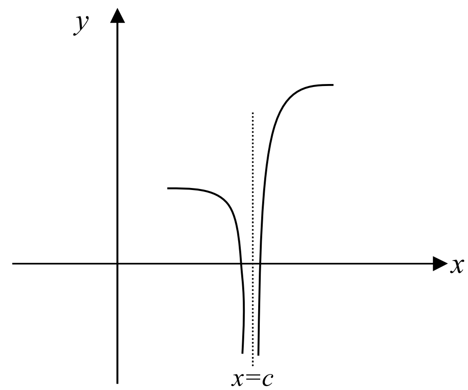
เส้นตรง $x = c$ จะเรียกว่าเป็นเส้นกำกับแนวดิ่ง ถ้า

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty \text{ หรือ } \lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$$

พิจารณาเส้นกำกับแนวดิ่งได้ง่ายขึ้น ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเศษส่วน

โดยดูค่า $x = c$ ที่ทำให้ส่วนเป็นศูนย์นั่นเอง



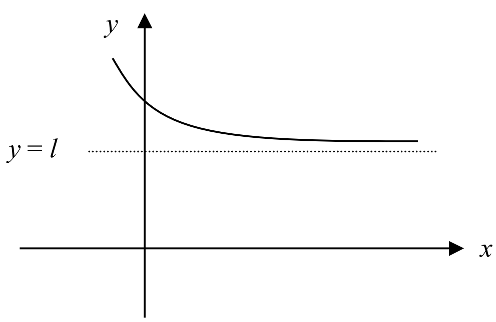


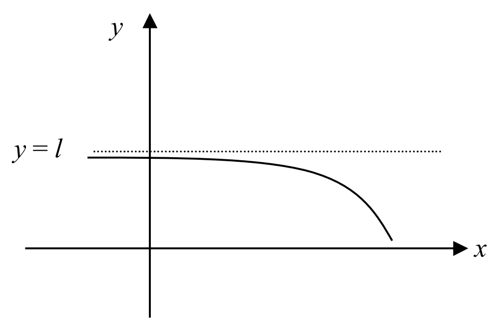
2. <u>เส้นกำกับแนวนอน</u> (Horizontal Asymptote)

เส้นตรง $y = l$ จะเรียกว่าเป็นเส้นกำกับแนวนอน ถ้า

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

พิจารณาเส้นกำกับแนวดิ่งได้ง่ายขึ้น โดยการจัดฟังก์ชันใหม่ให้เป็น x ในเทอมของ y และพิจารณาค่า $y = l$ ที่ทำให้ส่วนเป็นศูนย์นั่นเอง

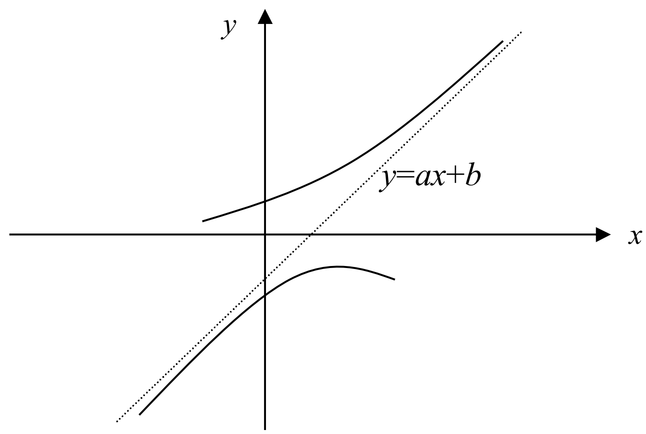




3. <u>เส้นกำกับแนวเอียง</u> (Oblique Asymptote)

เส้นตรง $y = ax + b$ จะเรียกว่าเส้นกำกับแนวเอียง เมื่อ

$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ และ $b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$



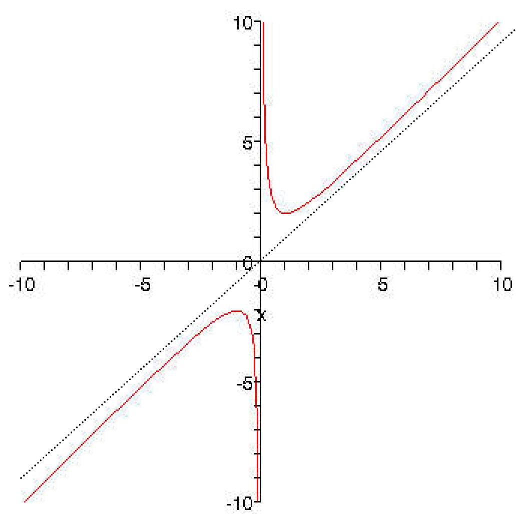
Example19 Find all asymptotes of the following functions

a. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ b. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

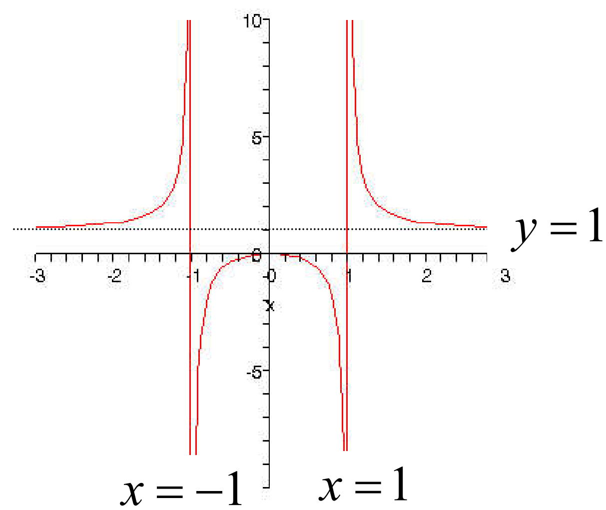
Solution

a. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

$y = x$



b. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

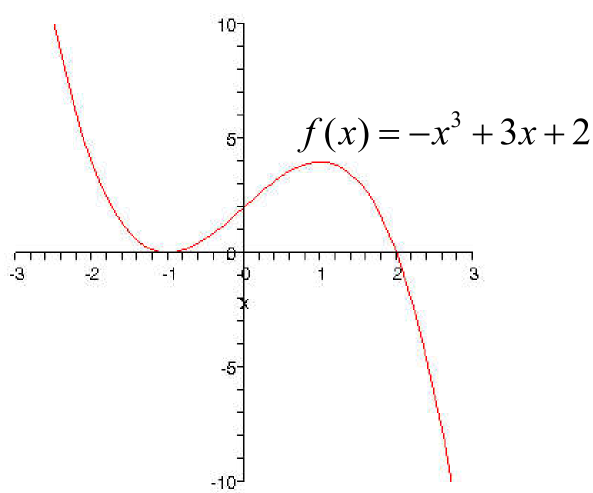


Example 20 Analyze and sketch graphs of these two functions

a. $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ b. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

Solution

a.



b. โดเมนและเรนจ์ : $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$,

$$R_f = \{y | y \le \frac{1}{2} \cup y > 2\}$$

จุดตัดแกน x : $(-2,0)$ และ $(2,0)$

จุดตัดแกน y : $(0,\frac{1}{2})$

การสมมาตร : สมมาตรกับแกน y

เส้นกำกับ :

เส้นกำกับแนวดิ่ง : $x = -4$ และ $x = 4$

เส้นกำกับแนวนอน : $y = 2$

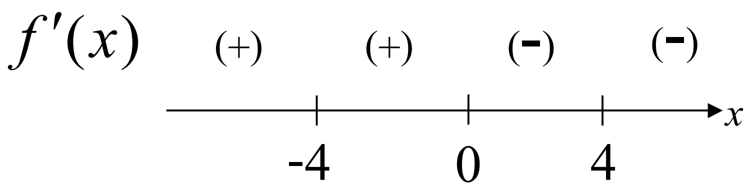
เส้นกำกับแนวเอียง : ไม่มี

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2-16)} - \frac{2x(2x^2-8)}{(x^2-16)^2} = -\frac{48x}{(x^2-16)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{48}{(x^2-16)^2} + \frac{192x^2}{(x^2-16)^3}$$

จุดวิกฤติเกิดขึ้นที่ $x = 0$

จุดที่อาจจะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า คือ $x = 0$



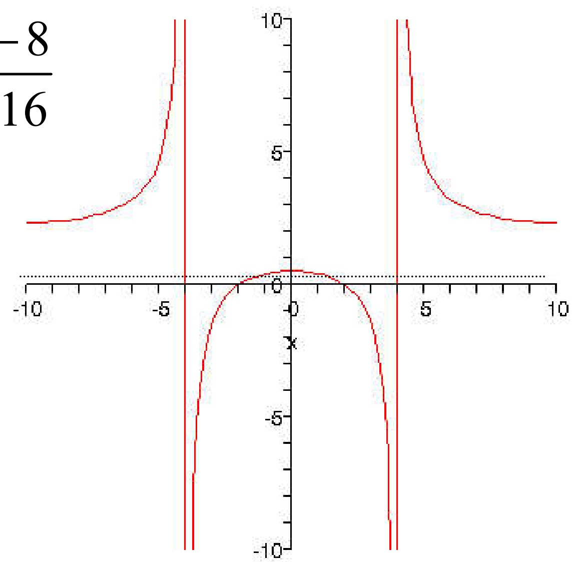
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,4)\cup(4,\infty)$

ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-4)\cup(-4,0)$

f เป็นโค้งหงายบนช่วง $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

โค้งคว่ำบนช่วง $(-4,4)$

$$f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-16}$$



$y=2$

$x=-4$ $\quad$ $x=4$

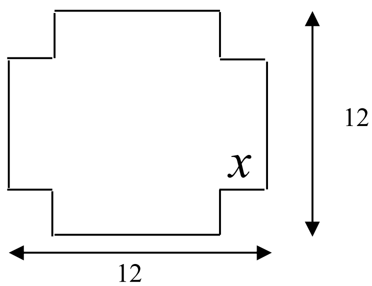
8. <u>การประยุกต์ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด</u>

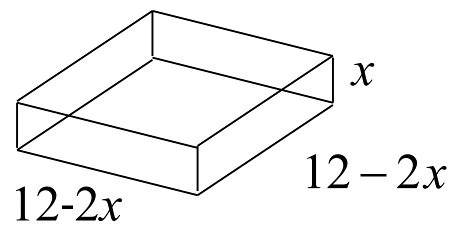
(Application of Maxima and Minima)

การแก้ปัญหาโจทย์ประยุกต์ของค่าสูงสุดและค่ำต่ำสุด สามารถทำได้โดย

1. สร้างรูปประกอบ
2. กำหนดตัวแปรให้กับปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้องกับปัญหา
3. สร้างฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ต้องการหา
4. ถ้าฟังก์ชันที่สร้างขึ้นมีหลายตัวแปร ทำให้เหลือตัวแปรเดียวโดยอาศัยเงื่อนไขจากปัญหา
5. ใช้วิธีหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน หาค่าที่ต้องการ

Example 21 We want to make a box with open top from a square paper. The paper has side length 12 cm. We cut out all four corners as shown below. To obtain the highest volume of the box, how long should we cut each corner?





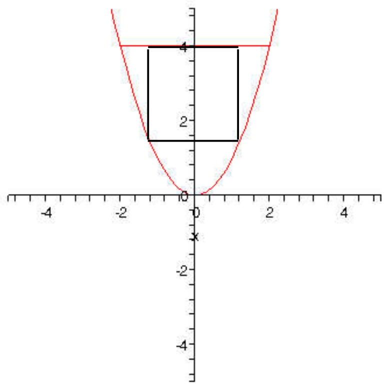
Solution กำหนดให้ x แทนความยาวมุมที่ตัดออก

V แทนปริมาตรของกล่อง

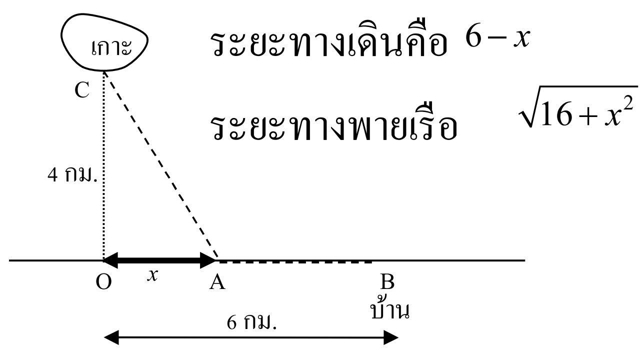
$$\therefore \quad V = x(12-2x)^2$$

Example 22 Find the dimension of a rectangle which occupies the largest area between a parabola of $y = x^2$ and a line $y = 4$.

Solution



Example 23 A man is on a deserted island which is 4 km vertically far from the seashore. He wants to sail back to his house 6 km away from the given point O as shown below. If he can sail with speed 4 km per hour and walk by 5 km per hour. How should he travel so that he reaches his house fastest?



Solution Let A be a point where the man reaches seashore, and x be the distance from point O to A.

ให้ T = เวลาทั้งหมดที่เขาใช้ในการเดินทาง

= เวลาที่ใช้ในการพายเรือ + เวลาที่ใช้ในการเดินเท้า

$$T = \frac{\sqrt{16+x^2}}{4} + \frac{6-x}{5}\ ,\ 0 \le x \le 6$$

9. <u>อัตราสัมพัทธ์</u> (Related Rates)

อัตราสัมพัทธ์ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความสัมพันธ์ที่มี เทียบกับเวลา หาได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

หลักการแก้ปัญหา

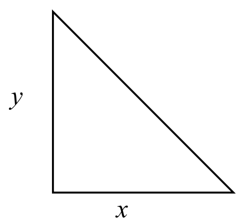
1. สร้างรูปประกอบ
2. กำหนดตัวแปรให้กับปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้องกับปัญหา
3. สร้างฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร ณ เวลา t ใดๆ
4. หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา
5. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ โดยแทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง และค่าตัวแปรที่ทราบ

การแทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง ถ้าเวลา t เพิ่ม และค่าของตัวแปร x เพิ่ม จะกำหนดเครื่องหมายของ $\dfrac{dx}{dt} = \;+$

การแทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง ถ้าเวลา t ลด และค่าของตัวแปร x ลด จะกำหนดเครื่องหมายของ $\dfrac{dx}{dt} = \;-$

Example 24 A right triangle has a fixed area of 6 square inch. Its base is 4 inch long. If the height increases by 0.5 inches per minute. Find the rate of change of the base of the triangle.

Solution



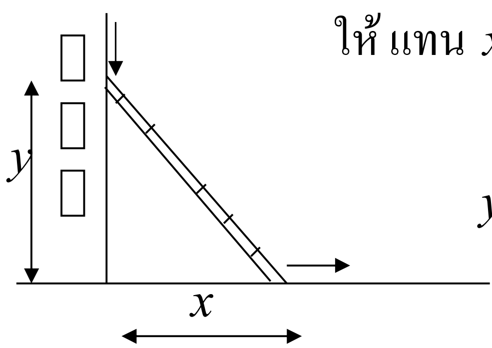
ให้ x แทนความยาวฐาน , y แทนความสูง

A แทนพื้นที่ของสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\therefore A = \frac{1}{2}xy$$

Example 25 A 13 meter long ladder is put up against the wall. It top end of the ladder is moving down along the wall by 5 meters per minute, thus making the other end of the ladder on the ground moves horizontally away from the wall. Calculate the rate of change of the ground distance between wall and ladder when the ladder end is 5 meters away from the wall.

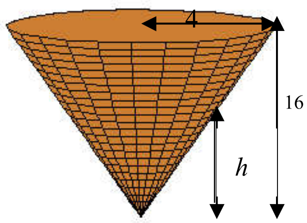
Solution



ให้ แทน x แทนระยะที่ปลายล่างของ
บันไดห่างจากกำแพง ณ เวลา t ใดๆ
y แทนระยะที่ปลายบนของบันได
สูงจากพื้นดิน ณ เวลา t ใดๆ

Example 26 A circular cone has top radius 4 cm and height 16 cm. Water is pouring in the cone by the rate of 10 cm^3 per minute. Find the rate of change of the water's height in the cone when water is 6 cm high from the bottom.

Solution



ให้ h แทน ความสูงของระดับน้ำ

r แทน รัศมีของภาคตัดกรวยที่ระดับผิวน้ำ

V แทน ปริมาตรของน้ำ

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

More Exercises on Applications of Derivatives

1. Locate the intervals of x where each function is increasing and where it is decreasing

1.1. $f(x) = 6x^2 - 2x^3 - 3$

1.2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

1.3 $f(x) = \ln(1+x^2)$

2. Find all the critical points of the following functions

2.1 $y = x^3 - 2x^2$

2.2 $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

2.3 $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

3. Show that these functions have no absolute extreme points.

3.1 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

3.2 $y = x + \sin x$

4. Locate the intervals of x where each function's graph is concave up and where it is concave down. Identify the inflection points and calculate relative extreme values.

4.1 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$

4.2 $f(x) = 5 + 12x - x^3$

4.3 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

5. Find all extreme values of the following functions.

5.1 $f(x) = \tan^2 3x$

5.2 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x \;,\; x \in [-10, 5]$

5.3 $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + a^2}$

6. Analyze and sketch a graph of each function.

6.1 $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$

6.2 $y = \dfrac{8}{4 - x^2}$

6.3 $y = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x^2}$

7. Find the maximum volume of a cylinder inscribed in a sphere whose radius is r.

8. An area of 14,4000 m^2 is required to construct one 7-Eleven shop in Bangkok. Its floor plan has a rectangular shape. The shop has three brick walls and one glass wall in the front. The cost of these material is calculated by the length. Suppose glass wall costs 1.88 times as much as the brick wall costs. Find the dimension of this shop so that the material cost is minimized.

9. Identify the point on the curve of $xy^2 = 128$ which is closest to the origin.

10. A rectangular bucket has the dimension: width×length×height = $x \times y \times x$ inch^3. It is made of a piece of tin with area 1350 inch^2. Calculate the possible maximum volume of this bucket.

11. A six-foot tall man walks along the road toward the lamp pole with speed 5 feet per second. The lamp is 16 feet above ground. Find the velocity of his shadow's tip and how the shadow's length changes when he is 10 feet away from the lamp pole.

12. Suppose the volume of a symmetric cube increases by 4 cm^3 per second. Find the rate of change of the cube's surface area when the surface area 24 cm^2.

13. A boy is flying a kite 300 feet high above the ground. If the wind pushes the kite away from the boy by horizontal speed of 25 feet per second, then how fast does the boy release the kite's rope when the kite is 500 feet far from him?

14. Two sailors sails two ships from the same position. The first ship starts sailing at noon and sail toward the east by 20 miles per hour. The second one starts sailing at 1 pm and sail toward the south by 25 miles per hour. Find the rate of change of the distance between these two ships at 2 pm.

Answers

1.1 decrease $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ / increase $[0, 2]$

1.2 decrease $[1, 3]$ / increase $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

1.3 decrease $(-\infty, 0]$ / increase $[0, \infty)$

2.1 $(0,0)$, $(\frac{4}{3}, -\frac{37}{27})$

2.2 $(1,3)$

2.3 $(2, \frac{1}{4})$

4.1 concave down $(0,2)$ / concave up $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ /

inflection point $(0,-2)$ / relative max 3 / relative min -6

4.2 concave down $(0, \infty)$ / concave up $(-\infty, 0)$ /

inflection point $(0,5)$ / relative max 21 / relative min -11

4.3 concave down $(0, \frac{3}{2})$ / concave up $(\frac{3}{2}, \infty)$ /

inflection point $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ / relative max 5 / relative min 4

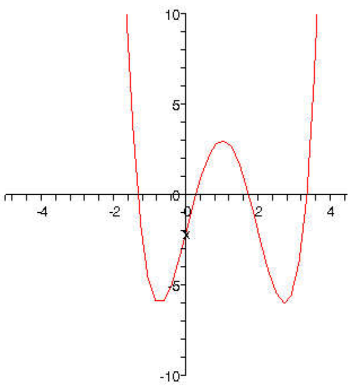
5.1 relative min 0

5.2 absolute max $f(-4) = 208$/ relative min $f(3) = -135$

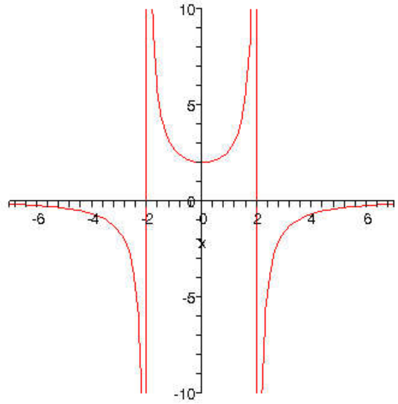
absolute min $f(-10) = -980$

5.3 relative max $\frac{1}{2}$ / relative min $-\frac{1}{2}$

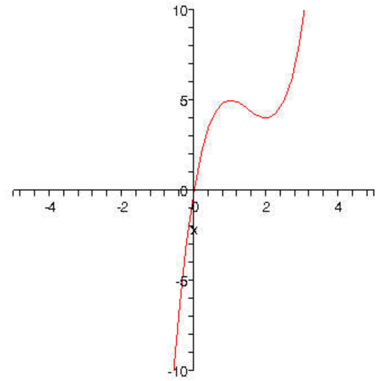
6.1



6.2



6.3



7. $\frac{4}{9}r^3\sqrt{3}$

8. 144 meters wide, 100 meters long

9. $(4, \pm 4\sqrt{2})$

10. 4500 inch^3

11. 8 ft/sec, decrease by 3 ft/sec

12. 8 cm^2/sec

13. 20 ft/sec

14. $\frac{285}{\sqrt{89}}$ mph (miles per hour)