การอินทิเกรต

(Integration)

โดย รศ.อรฤดี สุทธิศรี

อ.นิติมา อัจฉริยะโพธา

1. การอินทิเกรตในความหมายของปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

เมื่อโจทย์กำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้แล้ว ต้องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับอนุพันธ์นั้น นั่นก็คือ

โจทย์ให้ $y' = f'(x)$ ต้องการหา $y = f(x)$

พิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ถ้า $f(x) = x^2$ จะได้ $f'(x) = 2x$

ถ้า $f(x) = x^2 + 1$ จะได้ $f'(x) = 2x$

ถ้า $f(x) = x^2 + 2$ จะได้ $f'(x) = 2x$

………..

………..

ถ้า $f(x) = x^2 + C$ จะได้ $f'(x) = 2x$

ดังนั้น $f'(x) = 2x$ อาจมาจาก $f(x) = x^2$ หรือ $f(x) = x^2 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

เรียก $x^2 + C$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative) ของ $2x$ ซึ่งจะเห็นว่า $x^2 + C$ เป็นกรณีทั่วไปมากที่สุด

เรานิยามได้ดังนี้

นิยาม 1 ฟังก์ชัน $F(x)$ ซึ่งมี $F'(x) = f(x)$ จะถูกเรียกว่าเป็น "ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$"

เช่น ถ้า C เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ว่า

1. $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ เพราะว่า $F'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$
2. $F(x) = \sin x + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \cos x$ เพราะว่า $F'(x) = \cos x$
3. $F(x) = e^x + \tan^{-1} x + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$ เพราะว่า $F'(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$

คุณสมบัติของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

1. ทุกๆฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีความต่อเนื่อง จะมีปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เป็นจำนวนไม่จำกัด
2. ถ้า $F_1(x), F_2(x)$ ต่างเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ความแตกต่างของ $F_1(x)$ และ $F_2(x)$ อยู่ที่ค่าคงที่ คือ $F_1(x) - F_2(x) =$ ค่าคงที่
3. ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ว่า $F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย จึงเขียนปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x)$ เป็น $F(x) + C$

นิยาม 2 การหาปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x)$ เรียกว่าการอินทิเกรต

$$f(x) \to F(x) \text{ โดยที่ } F'(x) = f(x)$$

สัญลักษณ์ของการอินทิเกรต คือ $\int f(x)dx$ หมายถึง "อินทิกรัลเทียบกับ x ของ $f(x)$" โดยที่เรียก $\int$ ว่าเครื่องหมายอินทิกรัล ซึ่งบอกถึงการกระทำการอินทิเกรต และ dx บอกถึงตัวแปรของการอินทิเกรตคือ x และ $f(x)$ เป็นตัวถูกอินทิเกรต (Integrand)

การอินทิเกรต แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

1. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)
2. อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)

2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

นิยาม 3 ถ้า $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ เขียนในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ คือ
$dF(x) = f(x)dx$ จะได้ $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$
เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ

จะเห็นว่าเครื่องหมายอินทิกรัล $\int$ เป็นสัญลักษณ์ผกผันกับสัญลักษณ์การหาอนุพันธ์ d จึงเรียกการอินทิเกรตจากนิยามนี้ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต ซึ่งผลที่ได้จะต้องบวกด้วยค่าคงที่ใดๆ เสมอ

จากการที่ $\int f(x)dx = F(x) + C$ มีความหมายเหมือนคำว่า "ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$" จึงทำให้เราได้สูตรการอินทิเกรต คือปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เช่น

สูตรการหาอนุพันธ์	**สูตรการหาอินทิเกรต**
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int 1dx = \int dx = x + C$
$\frac{d}{dx}(ax) = a$	$\int adx = ax + C$
$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1)x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos xdx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin xdx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$

กฎเบื้องต้นของการอินทิเกรต (Rule of Algebra for Antiderivative)

1. กฎการคูณค่าคงที่

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a \text{ คือค่าคงที่}$$

2. กฎผลรวมและผลต่าง

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Example 1 Evaluate $\int (5x - x^2 + 2)dx$

Solution $\int (5x - x^2 + 2)dx = \int 5xdx - \int x^2 dx + \int 2dx$

$$= 5\int xdx - \int x^2 dx + 2\int dx$$

$$= 5\left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) - \left(\frac{x^3}{3} + c_2 \right) + 2\left(x + c_3 \right)$$

$$= \frac{5x^2}{2} + 5c_1 - \frac{x^3}{3} - c_2 + 2x + 2c_3$$

$$= \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

where $C = 5c_1 - c_2 + 2c_3$

Example 2 Evaluate

$$\int (8x^3 + 4x - 6\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{x^2})dx$$

<u>**วิธีทำ**</u> $\int (8x^3 + 4x - 6\sqrt{x} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 5x^{-2})dx$

$$= \int 8x^3 dx + \int 4x dx - \int 6\sqrt{x} dx - \int 2x^{-\frac{1}{3}} dx + \int 5x^{-2} dx$$

$$= \frac{8x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - \frac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{5x^{-1}}{-1} + C$$

$$= 2x^4 + 2x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{x} + C$$

Example 3 Evaluate

$$\int (3e^x - 7\sin x + \frac{5}{x})dx$$

<u>**วิธีทำ**</u> $\int (3e^x - 7\sin x + \frac{5}{x})dx = \int 3e^x dx - \int 7\sin x dx + \int \frac{5}{x} dx$

$$= 3\int e^x dx - 7\int \sin x dx + 5\int \frac{1}{x} dx$$

$$= 3e^x + 7\cos x + 5\ln|x| + C$$

Example 4 Evaluate $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

<u>**วิธีทำ**</u> $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx$

$$= \int \cot x \cdot \csc x dx$$

$$= -\csc x + C$$

3 อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)

อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ จาก a ถึง b แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x) dx$$

เรียก a และ b ว่าเป็นลิมิต หรือขีดจำกัดของการอินทิเกรต โดยที่ a เป็นลิมิตล่าง หรือขีดจำกัดล่าง และ b เป็นลิมิตบน หรือ ขีดจำกัดบน

นิยาม 4 อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $a \le x \le b$ คือ

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ทฤษฎีบท ถ้า $a < b$ และ $f(x)$ สามารถหาอินทิกรัลได้ในช่วง $a \le x \le b$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx > 0$ ถ้า $f(x) > 0$ และ

   $\int_a^b f(x)dx < 0$ ถ้า $f(x) < 0$

การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาปฏิยานุพันธ์ของ $F(x)$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หา $F(b) - F(a)$ ซึ่งเป็นค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต โดยการแทนค่า $x = b$ และ $x = a$ ใน $F(x)$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1

คุณสมบัติของการหาค่าของอินทิเกรตจำกัดเขต

ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ หาอินทิกรัลได้ในช่วง $a \le x \le b$ และ C เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้

1. $\int_a^b Cdx = C(x)\Big|_a^b = C(b-a)$
2. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Example 5 Evaluate $\int_1^2 \left[5x^2 + 3x - 1 - \frac{6}{x}\right]dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_1^2 \left[5x^2 + 3x - 1 - \frac{6}{x}\right]dx = \int_1^2 5x^2 dx + \int_1^2 3x dx - \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{6}{x}dx$$

$$= 5\int_1^2 x^2 dx + 3\int_1^2 x dx - \int_1^2 dx - 6\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

$$= 5\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 3\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 - 6\ln|x|\Big|_1^2$$

$$= 5\left(\frac{8-1}{3}\right) + 3\left(\frac{4-1}{2}\right) - (2-1)$$

$$-6(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= 5\left(\frac{7}{3}\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right) - (1) - 6(\ln 2 - 0)$$

$$= \frac{35}{3} + \frac{9}{2} - 1 - 6\ln 2$$

$$= \frac{70 + 27 - 6}{6} - 6\ln 2$$

$$= \frac{91}{6} - 6\ln 2$$

ดังนั้น $\int_1^2 \left[5x^2 + 3x - 1 - \frac{6}{x}\right]dx = \frac{91}{6} - 6\ln 2$

Example 6 Evaluate $\int_{\pi}^{\pi}\left[e^{x}+4\sin x\right]dx$

วิธีทำ $\int_{\pi}^{\pi}\left[e^{x}+4\sin x\right]dx=\int_{\pi}^{\pi}e^{x}dx+\int_{\pi}^{\pi}4\sin xdx$

$$=\int_{\pi}^{\pi}e^{x}dx+4\int_{\pi}^{\pi}\sin xdx$$

$$=e^{x}\Big|_{\pi}^{\pi}-4\cos x\Big|_{\pi}^{\pi}$$

$$=\left[e^{\pi}-e^{\pi}\right]-4\left[\cos\pi-\cos\pi\right]$$

$$=0-0-4(-1+1)$$

$$=0$$

ดังนั้น $\int_{\pi}^{\pi}\left[e^{x}+4\sin x\right]dx=0$

Example 7 Evaluate $\int_0^3 |x-2|dx$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f(x) = |x-2|$

เขียนใหม่ได้ดังนี้คือ $f(x) = \begin{cases} x-2; & x \ge 2 \\ -(x-2); & x < 2 \end{cases}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^3 |x-2|dx &= \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^3 |x-2|dx \\
&= \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx \\
&= -\int_0^2 xdx + \int_0^2 2dx + \int_2^3 xdx - \int_2^3 2dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 + 2x\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\bigg|_2^3 - 2x\Big|_2^3 \\
&= -\frac{1}{2}[4-0] + 2[2-0] \\
&\quad + \frac{1}{2}[9-4] - 2[3-2] \\
&= -2 + 4 + \frac{5}{2} - 2 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^3 |x-2|dx = \frac{5}{2}$

Example 8 Evaluate

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx \text{ where } f(x)=\begin{cases} 2-x^2; & x\ge 0 \\ x+2; & x<0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left[x+2\right]dx+\int_{0}^{1}\left[2-x^2\right]dx$

$$= \int_{-2}^{0} xdx+\int_{-2}^{0} 2dx+\int_{0}^{1} 2dx-\int_{0}^{1} x^2dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0} + 2x\Big|_{-2}^{0} + 2x\Big|_{0}^{1} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1}$$

$$= -2+4+2-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{11}{3}$$

ดังนั้น $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \frac{11}{3}$

4 เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integral)

4.1 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

โจทย์ประยุกต์ส่วนมากตัวถูกอินทิเกรต (Integrand) ไม่ได้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันพื้นฐานที่เราสามารถใช้สูตรอินทิเกรตได้โดยตรง จึงต้องมีการดัดแปลงเพื่อให้สามารถอินทิเกรตออกมาได้ โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรใหม่

Example 9 Evaluate $\int (3x-5)^{20}\,dx$

<u>Solution</u> Let $u = 3x-5$. Then $du = 3dx$ or $dx = \dfrac{du}{3}$

Thus
$$\int (3x-5)^{20}\,dx = \int u^{20}\,\frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{20}du$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{21}}{21} + C$$
$$= \frac{(3x-5)^{21}}{63} + C$$

Hence $\displaystyle\int (3x-5)^{20}\,dx = \frac{(3x-5)^{21}}{63} + C$

Example 10 Evaluate $\int \frac{(\ln x)^2}{x \ln 9} dx$

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $u = \ln x$ ดังนั้น $du = \frac{1}{x} dx$

จะได้
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x \ln 9} dx = \int \frac{(\ln x)^2}{\ln 9} \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{\ln 9} \int (\ln x)^2 \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{\ln 9} \int u^2 du$$
$$= \frac{1}{\ln 9} \cdot \frac{u^3}{3} + C$$
$$= \frac{1}{\ln 9} \cdot \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

ดังนั้น
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x \ln 9} dx = \frac{(\ln x)^3}{3 \ln 9} + C$$

Example 11 Evaluate $\int (x+3)\sqrt{x+1}dx$

วิธีทำ ให้ $u=\sqrt{x+1}$ และ $u^2 = x+1$ หรือ $x = u^2 + 1$

ดังนั้น $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$ หรือ $dx = 2udu$

และ $x+3 = u^2 + 4$

ดังนั้นแทนค่าจะได้

$$
\begin{aligned}
\int (x+3)\sqrt{x+1}dx &= \int (u^2+4)u(2udu) \\
&= \int (2u^4 + 8u^2)du \\
&= 2\int u^4 du + 8\int u^2 du \\
&= 2\frac{u^5}{5} + 8\frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{6u^5 + 40u^3}{15} + C \\
&= 2u^3\left[\frac{3u^2+20}{15}\right] + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(x-1)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3(x-1)-20}{15}\right] + C \\
&= 2(x-1)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3x+17}{15}\right] + C
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\int (x+3)\sqrt{x+1}dx = \dfrac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}(3x+17) + C$

ขั้นตอนวิธีการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

1. สร้างสมการรูปตัวแปรใหม่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$
2. แทนตัวแปรใหม่ในอินทิกรัล $\int f(x)dx$ เป็น $\int h(u)du$ อินทิกรัลใหม่จะมีตัวแปร u เป็นตัวแปรของอินทิกรัล
3. หาค่าอินทิกรัลของตัวแปรใหม่ $\int h(u)du = H(u) + C$
4. แทนค่ากลับเป็นตัวแปรเดิม

$$\int f(x)dx = H(u) + C = H(g(x)) + C = F(x) + C$$

Example 12 Evaluate $\int x^2(1-x)^{100}\,dx$

<u>Solution</u> Let $u = 1-x$ or $x = 1-u$

Then $x^2 = (1-u)^2$ and $du = -dx$

Thus
$$\begin{aligned}
\int x^2(1-x)^{100}\,dx &= \int (1-u)^2 u^{100}(-du) \\
&= \int (1-2u+u^2)(-u^{100})du \\
&= \int -u^{100}du + \int 2u^{101}du - \int u^{102}du \\
&= -\frac{u^{101}}{101} + 2\frac{u^{102}}{102} - \frac{u^{103}}{103} + C \\
&= \frac{2(1-x)^{102}}{102} - \frac{(1-x)^{101}}{101} - \frac{(1-x)^{103}}{103} + C
\end{aligned}$$

Hence
$$\int x^2(1-x)^{100}\,dx = \frac{2(1-x)^{102}}{102} - \frac{(1-x)^{101}}{101} - \frac{(1-x)^{103}}{103} + C$$

Example 13 Evaluate $\int \frac{\sec^2 2xdx}{1+\tan 2x}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = 1+\tan 2x$ และ $du = 2\sec^2 2xdx$

หรือ $\frac{du}{2} = \sec^2 2xdx$

ดังนั้นแทนค่าจะได้ $\int \frac{\sec^2 2xdx}{1+\tan 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+\tan 2x| + C$$

ดังนั้น $\int \frac{\sec^2 2xdx}{1+\tan 2x} = \frac{1}{2}\ln|1+\tan 2x| + C$

Example 14 Evaluate $\int \frac{(x^2+1)dx}{2x-3}$

<u>**Solution**</u> Let $u = 2x-3$. Then $du = 2dx$ or $\frac{du}{2} = dx$

and $x = \frac{u+3}{2}$, $x^2 = \left(\frac{u+3}{2}\right)^2$, $x^2 = \frac{1}{4}\left(u^2+6u+9\right)$

then $x^2+1 = \frac{1}{4}\left(u^2+6u+9+4\right)$

Substitution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^2+1)dx}{2x-3} &= \int \frac{1}{4}\cdot\frac{(u^2+6u+9+4)}{u}\cdot\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{(u^2+6u+13)}{u}du \\
&= \frac{1}{8}\int (u+6+\frac{13}{u})du \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{u^2}{2}+6u+13\ln|u|\right]+C \\
&= \frac{1}{8}\left\{\frac{(2x-3)^2}{2}+(2x-3)\right. \\
&\qquad \left.+13\ln|2x-3|\right\}+C
\end{aligned}$$

Thus

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{2x-3} = \frac{1}{8}\left[\frac{(2x-3)^2}{2}+(2x-3)+13\ln|2x-3|\right]+C$$

หมายเหตุ

การเปลี่ยนตัวแปรของอินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งมีลิมิตบน และลิมิตล่าง จะต้องเปลี่ยนลิมิตของตัวแปรเดิมให้เป็นลิมิตของตัวแปรใหม่ด้วย

Example 15 Evaluate $\int_0^1 xe^{4x^2+1}dx$

<u>Solution</u> Let $u = 4x^2 + 1$. Then $du = 8xdx$ or $xdx = \dfrac{du}{8}$

When $x = 0$, then $u = 1$. And when $x = 1$, then $u = 5$

Substitution:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{4x^2+1}dx &= \int_0^1 e^{4x^2+1}xdx \\ &= \int_1^5 \frac{e^u du}{8} \\ &= \frac{1}{8}\int_1^5 e^u du \\ &= \frac{1}{8}e^u\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{8}\left[e^5 - e^1\right]\end{aligned}$$

Thus

$$\int_0^1 xe^{4x^2+1}dx = \frac{1}{8}\left(e^5 - e\right)$$

Example 16 Evaluate $\int_0^3 x(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = 1 + x$ หรือ $x = u - 1$ และ $du = dx$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $u = 1$ และเมื่อ $x = 3$ จะได้ $u = 4$

แทนค่าจะได้ $\int_0^3 x(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$

$$= \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \left.\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^4$$

$$= \frac{2}{5}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right] - \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2^5 - 1\right] - \frac{2}{3}\left[2^3 - 1\right]$$

$$= \frac{2(32-1)}{5} - \frac{2(8-1)}{3}$$

$$= \frac{(62)(3) - 14(5)}{15} = \frac{116}{15}$$

ดังนั้น $\int_1^3 x(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{116}{15}$

4.2 การอินทิเกรตโดยการแยกส่วน (Integration by Parts)

การอินทิเกรตโดยการแยกส่วนนำมาใช้ เมื่อการอินทิเกรตโดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรไม่สามารถหาค่าอินทิกรัลได้ การอินทิเกรตโดยการแยกส่วนจะทำอินทิกรัลในรูป $\int f(x)g(x)dx$ ให้หาค่าอินทิกรัลได้ง่ายขึ้น โดยเปลี่ยนอินทิกรัลให้อยู่ในรูป $\int udv$ เมื่อ dv เป็นส่วนหนึ่งของตัวถูกอินทิเกรตที่ประกอบด้วย dx และฟังก์ชัน $f(x)$ หรือ $g(x)$

สูตรสำหรับการอินทิเกรตโดยแยกส่วน มาจากสูตรการหาอนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

หรือในรูป

$$d(uv) = udv + vdu$$
$$udv = d(uv) - vdu$$

และ

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

หมายเหตุ

จากสูตรอินทิเกรตโดยการแยกส่วน จะแสดงถึงอินทิกรัลตัวหนึ่ง $\int udv$ ในเทอมของอินทิกรัลตัวที่สอง $\int vdu$ เมื่อกำหนด u และ v เหมาะสม จะทำให้หาค่าอินทิกรัลตัวที่สอง ได้ง่ายกว่าอินทิกรัลเดิม

สรุป

การอินทิเกรตโดยการแยกส่วน $\int f(x)g(x)dx = \int h(x)dx$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

อินทิกรัลจะหาค่าได้ ถ้าฟังก์ชัน u และฟังก์ชัน v สอดคล้องตามเงื่อนไข

1. dv สามารถอินทิเกรตได้สะดวก
2. $\int vdu$ หาค่าได้

กรณีที่เป็นอินทิกรัลจำกัดเขตจะได้

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Example 17 Evaluate $\int x \ln x dx$

<u>Solution</u> Let $u = \ln x$ and $dv = xdx$

$$du = \frac{dx}{x} \text{ and } \int dv = \int xdx \quad \text{or} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

From $\int udv = uv - \int vdu$

Then $\int x \ln x dx = \int \ln x (xdx)$

$$= \ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$= \ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int xdx$$

$$= \ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Thus $$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Example 18 Evaluate $\int_1^2 \ln x dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = \ln x$ และ $dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{x}$ และ $\int dv = \int dx$ หรือ $v = x$

จาก $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$

แทนค่าจะได้ $\int_1^2 \ln x dx = \ln(x)x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$

$$= \ln(x)x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx$$

$$= x\ln x\Big|_1^2 - x\Big|_1^2$$

$$= \left(2\ln 2 - 1\ln 1\right) - \left(2 - 1\right)$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

ดังนั้น $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$

Example 19 Evaluate $\int \tan^{-1} x\, dx$

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ $u = \tan^{-1} x$ และ $dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ และ $\int dv = \int dx$ หรือ

$v = x$

จาก $\int udv = uv - \int vdu$

แทนค่าจะได้
$$\begin{aligned}
\int \tan^{-1} x\, dx &= x\tan^{-1} x - \int x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= x\tan^{-1} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} \\
&= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} \\
&= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

ในบางครั้งต้องทำการอินทิเกรตโดยแยกส่วนมากกว่าหนึ่งครั้ง เพื่อให้ได้คำตอบ

Example 20 Evaluate $\int e^{2x} \sin x \; dx$

Solution Let $u = e^{2x}$ and $dv = \sin x dx$

$du = 2e^{2x} dx$ and $v = -\cos x$

Then

$$\int e^{2x} \sin x \; dx = e^{2x}(-\cos x) - \int -\cos x (2e^{2x} dx)$$

$$= -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x dx$$

Next, consider $2\int e^{2x} \cos x dx$

Let $u = e^{2x}$ and $dv = \cos x dx$

$du = 2e^{2x} dx$ and $v = \sin x$

$$2\int e^{2x} \cos x dx = 2\left[e^{2x} \sin x - \int \sin x (2e^{2x} dx) \right]$$

$$= 2e^{2x} \sin x - 4\int e^{2x} \cos x dx$$

Then

$$\int e^{2x} \sin x \; dx = -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x dx$$

$$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4\int e^{2x} \sin x \; dx + C$$

$$5\int e^{2x} \sin x \; dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$$

Hence, $\int e^{2x} \sin x \; dx = \dfrac{1}{5}\left[-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \right] + C$

สรุปหลักเกณฑ์การกำหนด u และ dv

1. การเลือก u ควรเลือกเทอมที่ไม่ซับซ้อน เมื่อหาอนุพันธ์แล้ว จะได้เทอมที่ง่ายขึ้น
2. การเลือก dv ควรเป็นเทอมที่ค่อนข้างซับซ้อนแต่ง่ายในการอินทิเกรต
3. เทอม $\int vdu$ ต้องเป็นเทอมที่อินทิเกรตได้ง่ายกว่า $\int udv$

เช่นการพิจารณา u และ dv

1. $\int x^n e^{ax} dx,\ \int x^n \cos axdx,\ \int x^n \sin axdx$
   ให้ $u = x^n$ และ dv คือค่าที่เหลือ
2. $\int x^n \sin^{-1} xdx,\ \int x^n \cos^{-1} xdx,\ \int x^n \tan^{-1} xdx$
   ให้ $u = \sin^{-1} x$ หรือ $u = \cos^{-1} x$ หรือ $u = \tan^{-1} x$
   และ dv คือค่าที่เหลือ
3. $\int x^m \left[\ln x\right]^n dx$ เมื่อ $m \neq -1$
   ให้ $u = \left[\ln x\right]^n$ และ dv คือค่าที่เหลือ

4.3 การอินทิเกรตของฟังก์ชันตรรกยะโดยเศษส่วนย่อย

(Integration of Rational Function by Partial Fraction)

การอินทิเกรตจะใช้กับฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}; n < m$$

จะเขียน $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเศษส่วนย่อย**

เช่น $\dfrac{5x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-3}$

ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

และ $5x-3 = A(x-3) + B(x+1)$

$$5x-3 = (A+B)x + (-3A+B)$$

หาค่า Aและ B โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของ x จะได้

$$A + B = 5$$

และ $-3A + B = -3$

แก้สมการจะได้ $A = 2$ และ $B = 3$ เรียก A และ B ว่าค่าคงที่ที่เกิดจากวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undeterminated coefficient)

เงื่อนไขในการใช้เศษส่วนย่อย

การเขียนฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยมีหลักเกณฑ์หรือเงื่อนไขดังนี้**

1. กรณีที่กำลังของ $f(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังของ $g(x)$ $(n \geq m)$ ต้องเอา $g(x)$ หาร $f(x)$ เสียก่อน จะได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \phi(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

   โดยที่ $h(x), g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกำลังของ $h(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $g(x)$

2. กรณีที่ส่วนของ $g(x)$ สามารถแยกออกเป็นตัวประกอบเชิงเส้น หรือตัวประกอบกำลังสอง

   2.1 ประเภทของตัวประกอบ

   ก. ตัวประกอบเชิงเส้น (Linear factors) อยู่ในรูป $(ax+b)$ โดย ที่ a,b เป็นจำนวนจริง

   ข. ตัวประกอบกำลังสอง (Irreducible quadratic factors) อยู่ในรูป (ax^2+bx+c) โดยที่ a,b,c เป็นจำนวนจริง หรือลดทอนเป็นตัวประกอบเชิงจริง

ขั้นตอนการอินทิเกรตด้วยวิธีเศษส่วนย่อย

พิจารณาฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

กรณีที่หนึ่ง $g(x)$ มีตัวประกอบเชิงเส้นไม่ซ้ำ ถ้าแยกตัวประกอบได้ว่า

$$g(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)........(a_nx+b_n)$$

โดยที่ $\dfrac{b_1}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{a_2} \neq .... \neq \dfrac{b_n}{a_n}$ และ $a_1, a_2, ..., a_n \neq 0$

แล้วจะได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

Example 21 Evaluate $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

Solution Consider x^3+x^2-2x

$$x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$$

Thus $$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+2}$$

$$2x^2+5x-1 = A_1(x-1)(x+2)+A_2(x)(x+2)+A_3x(x-1)$$
$$= A_1(x^2+x-2)+A_2(x^2+2x)+A_3(x^2-x)$$

Compare coefficients:

$$A_1+A_2+A_3 = 2$$
$$A_1+2A_2-A_3 = 5$$
$$-2A_1 = -1$$

Solve to get $A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = 2,\ A_3 = -\frac{1}{2}$

Thus $$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x+2)}$$

Plug it back into the integral:

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \int \frac{1}{2x}dx+\int \frac{2}{x-1}dx-\int \frac{1}{2(x+2)}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$$

Hence

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$

กรณีที่สอง $g(x)$ มีตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ ถ้าแยกตัวประกอบได้ว่า

$$g(x) = (ax+b)^n$$

แล้วจะได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

Example 22 Evaluate $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$

Solution Consider

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}$$

$$x^2+2x+3=A_1(x+1)^2+A_2(x-1)(x+1)+A_3(x-1)$$

$$=A_1(x^2+2x+1)+A_2(x^2-1)+A_3(x-1)$$

Compare the coefficients:

$$A_1+A_2=1$$

$$2A_1+A_3=2$$

$$A_1-A_2-A_3=3$$

Solve to get $A_1=\frac{3}{2},\ A_2=-\frac{1}{2},\ A_3=-1$

Thus $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}$

Plug it back to the integral:

$$\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{(x+1)}+C$$

Hence,

$$\int\frac{(x^2+2x+3)dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{(x+1)}+C$$

กรณีที่สาม อยู่ในรูปสมการพหุนามกำลังสองที่ไม่ซ้ำ
ax^2+bx+c เป็นตัวประกอบของ $g(x)$ ที่ลดทอนไม่ได้ แล้วจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

เมื่อ A,B เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

Example 23 Evaluate $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3-1}dx$

Solution Consider

$$\frac{5x^2+3x-2}{x^3-1} = \frac{5x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{5x^2+3x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$5x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$= A(x^2+x+1)+Bx^2-Bx+Cx-C$$

Compare the coefficients:

$$A+B=5$$

$$A-B+C=3$$

$$A-C=-2$$

Solve to get $A=2,\ B=3,\ C=4$

Thus $\frac{5x^2+3x-2}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+4}{x^2+x+1}$

Plug it back into the integral:

$$\int \frac{(5x^2+3x-2)dx}{x^3-1} = \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2+x+1}$$

$$= \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2+x+1}$$

$$= 2\ln|x-1| + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2+x+1}$$

Next consider $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{(3x+4)dx}{\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}}$

Let $u = x+\frac{1}{2}$ and $du = dx$

Thus

$$\int \frac{(3x+4)dx}{\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{3\left[u-\frac{1}{2}\right]+4}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= \int \frac{3u+\frac{5}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= 3\int \frac{udu}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}\ln(u^2+\frac{3}{4}) + \frac{5(2)}{2(\sqrt{3})}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}u + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Hence

$$\int \frac{(5x^2+3x-2)dx}{x^3-1} = 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)$$
$$+\frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

กรณีที่สี่ อยู่ในรูปสมการพหุนามกำลังสองที่ซ้ำ $(ax^2+bx+c)^n, n \geq 2$ เป็นตัวประกอบของ $g(x)$ ที่ลดทอนไม่ได้ แล้วจะได้เศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots\ldots. + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

เมื่อ $A_1, \ldots\ldots A_n, B_1, \ldots\ldots, B_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

Example 24 Evaluate $\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2+4)^2}$

<u>Solution</u> Consider

$$\frac{x^3+1}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$x^3+1 = (Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)$$

$$= Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx+D$$

Compare coefficients: $A=1$ $B=0$

$$4A+C=0$$

$$4B+D=1$$

Solve to get $A=1,\ B=0,\ C=-4, D=1$

Thus $\frac{x^3+1}{(x^2+4)^2} = \frac{1x+0}{x^2+4} + \frac{-4x+1}{(x^2+4)^2}$

Plug it back into the integral:

$$\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{xdx}{x^2+4} - 4\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - 4\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

Next consider $-4\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2}$

Let $u = x^2+4$ and $du = 2xdx$

So we have $-4\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2} = -2\int \frac{du}{u^2}$

$$= 2u^{-1} + C$$
$$= \frac{2}{x^2+4} + C$$

And for $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ We let $x = 2\tan\theta$ and $dx = 2\sec^2\theta d\theta$

We then have $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2}$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta}$$
$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$
$$= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{(x^2+4)}\right] + C$$

$$\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{2}{x^2+4} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$
$$+ \frac{x}{8(x^2+4)} + C$$

Example 25 Evaluate $\int \frac{(x^5 - x^4 - 3x + 5)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$

__วิธีทำ__ เนื่องจากกำลังของ $f(x)$ มากกว่ากำลังของ $g(x)$ ($n \geq m$) ต้องเอา $g(x)$ หาร $f(x)$ เสียก่อน จะได้

$$\frac{(x^5 - x^4 - 3x + 5)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = x + 1 + \frac{-2x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

และ $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + 1)(x - 1)^2$

ดังนั้นเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนย่อยจะได้

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{(x - 1)} + \frac{D}{(x - 1)^2}$$

และ $\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{(x - 1)} + \frac{1}{(x - 1)^2}$

ดังนั้นแทนค่ากลับลงในอินทิกรัลจะได้

$$\int \frac{(x^5 - x^4 - 3x + 5)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \int (x + 1) dx + \int \frac{(2x + 1) dx}{x^2 + 1}$$

$$- \int \frac{2dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2}$$

$$= \int x dx + \int dx + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{2dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2}$$

$$\int \frac{(x^5 - x^4 - 3x + 5)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|x^2 + 1\right| + \tan^{-1} x$$

$$-2 \ln\left|x - 1\right| - \frac{1}{x - 1} + C$$

Exercise Problems

Problem 1 Evaluate $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=\sqrt{x}$ และ $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ หรือ $dx=2udu$

ดังนั้น $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{u^2}{1+u}(2udu)$

$$=\int \frac{2u^3}{1+u}du$$

$$=2\int (u^2-u+1-\frac{1}{1+u})du$$

$$=2\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln\left|1+u\right|\right]+C$$

$$=2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C$$

Problem 2 Evaluate $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

<u>**วิธีทำ**</u> $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+1)+1}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$

ให้ $u = x+1$ และ $du = dx$

จะได้ $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$$

ให้ $u = \tan\theta$ และ $du = \sec^2\theta d\theta$

ดังนั้น $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$
$$= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta}$$
$$= \int \sec\theta d\theta$$
$$= \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C$$
$$= \ln\left|\sqrt{u^2+1}+u\right| + C$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right| + C$$

Problem 3 Evaluate $\int \ln(x+\sqrt{x})dx$

<u>วิธีทำ</u> ใช้วิธีแยกส่วน $\int udv = uv - \int vdu$

โดยให้ $u = \ln(x+\sqrt{x})$ และ $dv = dx$

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{x}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})dx \quad \text{และ} \quad v = x$$

จะได้

$$\int \ln(x+\sqrt{x})dx = x\ln(x+\sqrt{x}) - \int x\cdot(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x}})dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x(2\sqrt{x}+1)dx}{2x(\sqrt{x}+1)}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int (2-\frac{1}{\sqrt{x}+1})dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$$

พิจารณา $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

ให้ $\theta = \sqrt{x}+1$ และ $d\theta = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

หรือ $\theta - 1 = \sqrt{x}$ และ $dx = 2(\theta-1)d\theta$

ดังนั้น

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = 2\int \frac{\theta-1}{\theta}d\theta$$

$$= 2(\theta - \ln|\theta|) + C$$

$$= 2(\sqrt{x}+1-\ln\left|\sqrt{x}+1\right|)+C$$

แทนค่าทั้งหมดจะได้

$$\int \ln(x+\sqrt{x})dx = x\ln(x+\sqrt{x}) - \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - x$$

$$+\frac{1}{2}2(\sqrt{x}+1-\ln\left|\sqrt{x}+1\right|)+C$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - x + \sqrt{x}+1-\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

Problem 4 Evaluate $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

จะได้ $$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

และให้ $$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}$$

จึงได้ $$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$A+B=0$$

$$-A+B+C=0$$

$$A+C=1$$

แทนค่าจะได้ $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$ และ $C=\frac{2}{3}$

ดังนั้น $$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{(x^2-x+1)}$$

จึงได้

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x^2-x+1)}dx\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}dx\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\end{aligned}$$

พิจารณา $\int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$

ให้ $u=x-\frac{1}{2}$ และ $du=dx$

ดังนั้น

$$\int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{u+\frac{1}{2}-2}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= \int \frac{u - \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} du \quad = \int \frac{udu}{u^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2u}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| - \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| - \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

จึงได้ $$-\frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = -\frac{1}{6} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

นั่นคือ $$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \ln \left| x^2 - x + 1 \right| \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln|2| - 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Exercise 1

Evaluate the following integrals

1. $\int 3x^2(x^3+2)^2\,dx$
2. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$
3. $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)}\,dx$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$
5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$
6. $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\,dx$
7. $\int (3x^2-2)(x^3-2x)\,dx$
8. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$
9. $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$
10. $\int \frac{x^2}{1-2x^3}\,dx$
11. $\int (e^x+1)^3\,dx$
12. $\int \cos^3 2x\sin 2x\,dx$
13. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$
14. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$
15. $\int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}\,dx$
16. $\int \cos 2x\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$
17. $\int 3^{2x+1}\,dx$
18. $\int \frac{e^{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}\,dx$

19. $\int \left[\frac{\ln x}{x}\right]^3 dx$

20. $\int \frac{1}{x\ln x} dx$

Evaluate the following definite integrals

21. $\int_1^5 \frac{x+3}{\sqrt{2x-1}} dx$

22. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx$

23. $\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx$

24. $\int_4^8 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}}$

25. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2} dx$

Answers to exercise 1

1. $\left[\frac{x^3+2}{3}\right]^3 + C$

2. $\frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\frac{-4}{3(x^3+2)^2} + C$

4. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$

5. $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{3}} + C$

7. $\frac{1}{6}(x^3-2x)^6 + C$

8. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + C$

9. $\frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$

10. $-\frac{1}{6}\ln\left|1-2x^3\right| + C$

11. $\frac{1}{4}(e^x+1) + C$

12. $-\dfrac{\cos^4 2x}{8}+C$

13. $-e^{\cos x}+C$

14. $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)+C$

15. $2e^{\sqrt{1+x}}+C$

16. $-\dfrac{1}{3}(1-\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

17. $\dfrac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C$

18. $\dfrac{1}{2}e^{\tan^{-1}2x}+C$

19. $\dfrac{1}{4}[\ln x]^4+C$

20. $\ln\left|\ln x\right|+C$

21. 20

22. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$

23. 26

24. 6

25. 4

Exercise 2

Evaluate the following integrals

1. $\int x\sin xdx$

2. $\int xe^x dx$

3. $\int x^2 \ln xdx$

4. $\int x\sqrt{1+x}dx$

5. $\int \sec^3 xdx$

6. $\int x^2 \sin xdx$

7. $\int x^2 e^{2x} dx$

8. $\int x\cos xdx$

9. $\int x\sec^2 3xdx$

10. $\int \cos^{-1} 2xdx$

11. $\int \tan^{-1} xdx$

12. $\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

13. $\int x\tan^{-1} xdx$

14. $\int x^2 e^{-3x} dx$

15. $\int x^3 \sin x dx$

16. $\int x \sin^{-1} x^2 dx$

17. $\int \sin x \sin 3x dx$

18. $\int \sin(\ln x) dx$

19. $\int e^{ax} \cos bx dx$

20. $\int e^{ax} \sin bx dx$

Show how to use reduction formula to the following integrals.

21. $\int u^n e^{au} du$

22. $\int u^n \cos bu du$

Evaluate the following definite integrals

23. $\int_1^e \ln x dx$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin 3x dx$

25. $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2} dx$

Answers to exercise 2

1. $-x \sin x + \sin x + C$
2. $xe^x - e^x + C$
3. $\dfrac{x^3 \ln x}{3} - \dfrac{1}{9} x^3 + C$
4. $\dfrac{2}{3} x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$
5. $\dfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln\left|\sec x \tan x\right|) + C$

6. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$

7. $\frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$

8. $x \sin x + \cos x + C$

9. $\frac{1}{3}x \tan 3x - \frac{1}{9}\ln\left|\sec 3x\right| + C$

10. $x \cos^{-1} 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

11. $x \tan^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

12. $\frac{e^x}{1+x} + C$

13. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + C$

14. $-\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{2}{9}) + C$

15. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6\sin x + C$

16. $\frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

17. $\frac{1}{8}\sin 3x \cos x - \frac{3}{8}\cos 3x \sin x + C$

18. $\frac{1}{2}\left[x \sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right] + C$

19. $\frac{e^{ax}(b \sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

20. $\frac{e^{ax}(a \sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

21. $\frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$

22. $\frac{1}{b}u^n \sin bu - \frac{n}{b}\int u^{n-1}\sin bu du$

23. 1

24. $\frac{1}{27}(\pi^2 - 4)$

25. $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$

Exercise 3

Evaluate the following integrals

1. $\int \frac{1}{x^2 - 4}dx$

2. $\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}dx$

3. $\int \frac{1}{x^2 + 7x + 6}dx$

4. $\int \frac{x}{x^2 - 3x - 4}dx$

5. $\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}dx$

6. $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}dx$

7. $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$

8. $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}dx$

9. $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}dx$

10. $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}dx$

11. $\int \frac{x^2}{a^4 - x^4}dx$

12. $\int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}dx$

13. $\int \frac{1}{x^3 + x}dx$

14. $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}dx$

15. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$

16. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx$

17. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}dx$

18. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$

19. $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

20. $\int \frac{1}{e^{2x}-3e^x}dx$

21. $\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)}dx$

22. $\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}d\theta$

Evaluate the following definite integrals

23. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-9}dx$

24. $\int_{-8}^{-3} \frac{x+2}{x(x-2)^2}dx$

25. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-5\cos x+4}$

Answers to exercise 3

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

2. $\frac{1}{30}\ln\left|\frac{(x-2)^9}{(x)^5(x+3)^4}\right|+C$

3. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right|+C$

4. $\frac{1}{5}\ln\left|(x-4)(x+1)^4\right|+C$

5. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x(x+2)^3}{(x-1)^2}\right|+C$

6. $x+\ln\left|(x-4)^4(x+2)\right|+C$

7. $\ln|x-2|-\dfrac{2}{x-2}+C$

8. $-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C$

9. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}-2\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$

10. $\tan^{-1}x+\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C$

11. $\dfrac{1}{4a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|-\dfrac{1}{2a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+C$

12. $\dfrac{5}{2}\tan^{-1}x+\dfrac{x}{2(x^2+1)}+C$

13. $\ln\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

14. $\ln\left|\sqrt{x^2+3}\right|+\tan^{-1}x+C$

15. $\ln\left|x^2+1\right|+\dfrac{1}{x^2+1}+C$

16. $\ln\left|x^2+4\right|+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2+4}+C$

17. $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x-\dfrac{x}{2(x^2+1)}+C$

18. $-\dfrac{x^2}{2}-3x-6\ln|1-x|-\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{1}{2(1-x)^2}+C$

19. $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{x}{(x^2+2)^2}+C$

20. $\dfrac{1}{3e^x}+\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{e^x-3}{e^x}\right|+C$

21. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right|+C$

22. $\ln|1+\tan\theta|+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}}+C$

23. $-\dfrac{1}{6}\ln 10$

24. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{5}$

25. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-4}\right|-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-4}\right|$

Exercise 4

Evaluate the following integrals

1. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

2. $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

3. $\int \frac{1}{x^2+7x+6}dx$

4. $\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx$

5. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

6. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$

7. $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$

8. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

9. $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$

10. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

11. $\int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx$

12. $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$

13. $\int \frac{1}{x^3+x}dx$

14. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

15. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$

16. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx$

17. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}dx$

18. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$

19. $\int \frac{1}{e^{2x}-3e^x}dx$

20. $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

Evaluate the following definite integrals

21. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2-9}\,dx$ 22. $\int_{-8}^{-3} \frac{x+2}{x(x-2)^2}\,dx$

Answers to exercise 4

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$
2. $\frac{1}{30}\ln\left|\frac{(x-2)^9}{(x)^5(x+3)^4}\right|+C$
3. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right|+C$
4. $\frac{1}{5}\ln\left|(x-4)(x+1)^4\right|+C$
5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x+2)^3}{(x-1)^2}\right|+C$
6. $x+\ln\left|(x-4)^4(x+2)\right|+C$
7. $\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$
8. $-\frac{4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$
9. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$
10. $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C$

11. $\dfrac{1}{4a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|-\dfrac{1}{2a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+C$

12. $\dfrac{5}{2}\tan^{-1}x+\dfrac{x}{2(x^2+1)}+C$

13. $\ln\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

14. $\ln\left|\sqrt{x^2+3}\right|+\tan^{-1}x+C$

15. $\ln\left|x^2+1\right|+\dfrac{1}{x^2+1}+C$

16. $\ln\left|x^2+4\right|+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2+4}+C$

17. $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x-\dfrac{x}{2(x^2+1)}+C$

18. $-\dfrac{x^2}{2}-3x-6\ln\left|1-x\right|-\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{1}{2(1-x)^2}+C$

19. $\dfrac{1}{3e^x}+\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{e^x-3}{e^x}\right|+C$

20. $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{x}{(x^2+2)^2}+C$

21. $-\dfrac{1}{6}\ln 10$

22. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{5}$

<u>บทประยุกต์ของอินทิกรัล</u> รศ. วิภาวรรณ สิงห์พริ้ง

<u>การประยุกต์ของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต</u>

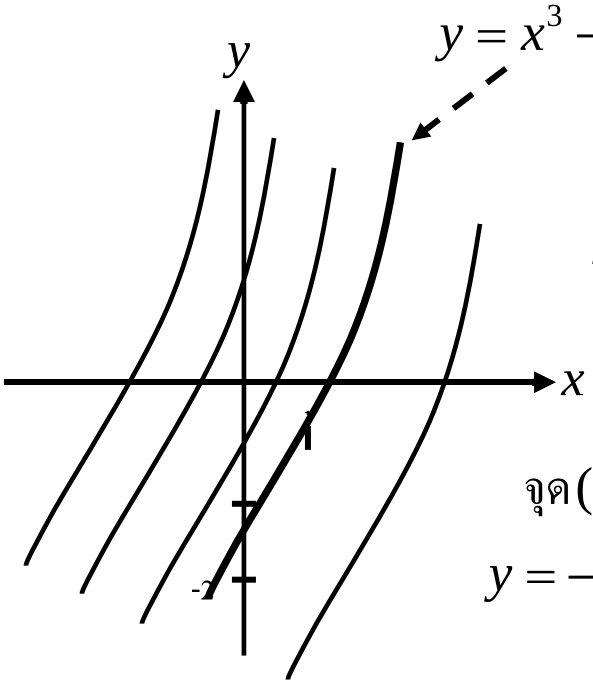
ก่อนที่จะพูดถึงการประยุกต์ของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จะพิจารณาความหมายของตัวคงที่ใด ๆ c ซึ่งบวกเข้าไปทุก ๆ ครั้งที่หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จาก $y = F(x) + c$ เป็นสมการที่ไม่เจาะจงค่า c ถ้าต้องการหาค่า c ที่เฉพาะเจาะจงลงไปว่าเป็นค่าอะไรนั้น จะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) ให้ แล้วหาค่า c จากสมการ

$$c = y_0 - F(x_0) \qquad (1)$$

อินทิกรัลไม่จำกัดเขตสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหาต่างๆ ดังเช่น

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงหาสมการเส้นโค้งที่มีความชันที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $3x^2$ และจงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1,-1)$ ด้วย

<u>วิธีทำ</u> ความชันที่จุด (x, y) ใดๆกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์



$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad , \quad dy = 3x^2 dx$$

$$y = \int dy = \int 3x^2 dx = x^3 + c \qquad (2)$$

สมการ $y = x^3 + c$ เป็นชุดเส้นโค้งดังรูป พิจารณาหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1,-1)$ เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x = 1$ และ $y = -1$ หาค่า c โดยแทนค่า x, y ในสมการ (2)

$$-1 = 1^3 + c \quad , \quad c = -2$$

นั่นคือ $y = x^3 - 2$ เป็นเส้นโค้งเฉพาะที่ผ่านจุด $(1,-1)$

ตัวอย่าง 2 ถ้ากำหนดความเร็วการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลา t เป็น $v = at$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ และถ้า $t = 0$, ระยะทาง $s = s_0$ จงหา s ที่เป็นฟังก์ชันของ t

วิธีทำ ความเร็ว $v = \frac{ds}{dt} = at$

$$ds = atdt$$

$$s = \int atdt = \frac{at^2}{2} + c$$

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $t = 0$, $s = s_0$ หาค่า c

$$s_0 = \frac{a(0)^2}{2} + c \quad , \quad c = s_0$$

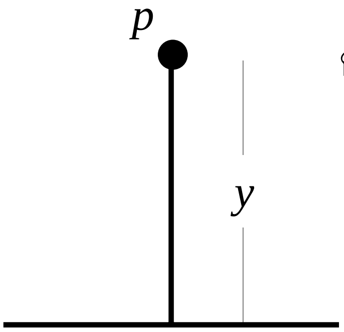
นั่นคือ ระยะทาง $s = \frac{at^2}{2} + s_0$

ตัวอย่าง 3 วัตถุหนึ่งพุ่งขึ้นไปในอากาศด้วยความเร็วต้น 256 ฟุตต่อวินาที กำหนดให้ความเร่งขึ้นอยู่กับแรงดึงดูดของโลก คือ $g = -32$ ฟุตต่อ(วินาที) ^{2} จงหาว่า

ก. วัตถุขึ้นสูงสุดเท่าไร ข. วัตถุถึงพื้นเมื่อไร

วิธีทำ ให้ y แทนระยะที่วัตถุขึ้นจากพื้น t วินาที หลังจากเริ่มต้น

เมื่อเวลา $t = 0$, $y = 0$, $v = 256$



ความเร่ง $a = g = \frac{dv}{dt} = -32$, $dv = -32dt$

$$v = \int (-32)dt = -32t + c_1$$

เงื่อนไข $t = 0$, $v = 256$ จะได้ $c_1 = 256$

ความเร็ว $v = -32t + 256 = \dfrac{dy}{dt}$ (3)

$$dy = \left(-32t + 256\right)dt$$

$$y = \int dy = \int\left(-32t + 256\right)dt = -16t^2 + 256t + c_2$$

เมื่อ $t = 0$, $y = 0$ จะได้ $c_2 = 0$

$$y = -16t^2 + 256t \qquad (4)$$

สมการ (4) นี้คือ กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุที่พุ่งขึ้นไป

ก.) ถ้าวัตถุขึ้นสูงสุด แสดงว่า $v = 0$ หาค่า t จากสมการ (3)

$$0 = -32t + 256 \quad , \quad t = \frac{256}{32} = 8$$

หาระยะทาง y จากสมการ (4)

$$y = -16(8^2) + 256(8) = 1024 \quad \text{ฟุต}$$

ข.) วัตถุตกถึงพื้น แสดงว่า $y = 0$ หาค่า t จากสมการ (4)

$$0 = -16t^2 + 256t = -16t(t - 16)$$

$$t = 0 \ , \ 16$$

แสดงว่าวัตถุตกถึงพื้นเมื่อเวลาผ่านไป 16 วินาที

ตัวอย่าง 4 สมมุติว่าเบรครถยนต์คันหนึ่งผลิตมาโดยมีอัตราการลดของความเร็วคงที่เป็น k ฟุต / (วินาที) ^{2} จงหาว่า

ก.) k ที่ทำให้รถซึ่งวิ่งมาด้วยความเร็ว 60 ไมล์ / ชั่วโมง หรือ 88 ฟุต / วินาที หยุดลงในระยะทาง 100 ฟุต จากจุดที่เริ่มเบรค

ข.) จากค่า k ในข้อ ก.) จงหาระยะทางที่รถจะหยุดหลังจากใช้เบรค เมื่อรถวิ่งด้วยความเร็ว 30 ไมล์ / ชั่วโมง

วิธีทำ ก.) $\dfrac{dy}{dt} = -k$, $dv = -kdt$

$$\int dv = \int(-k)dt \quad , \quad v = -kt + c_1$$

$t = 0$, $v = 88$ จะได้ $c_1 = 88$

$$v = -kt + 88 \qquad (5)$$

หา t ที่ทำให้รถซึ่งวิ่งมาด้วยความเร็ว $v = 88$ ฟุต / วินาที หยุดลง คือ หา t เมื่อความเร็ว $v = 0$ จากสมการ (5) จะได้

$$0 = -kt + 88 \quad , \quad t = \frac{88}{k} \qquad (6)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -kt + 88$$

$$x = \int(-kt + 88)dt = -\frac{kt^2}{2} + 88t + c_2$$

เมื่อ $t = 0$, $x = 0$ จะได้ $c_2 = 0$

$$x = -\frac{kt^2}{2} + 88t \qquad (7)$$

แทนค่า $t = \dfrac{88}{k}$ ในสมการ (7) จะได้

$$x=-\frac{k}{2}\left(\frac{88}{k}\right)^2+88\left(\frac{88}{k}\right) \qquad (8)$$

ถ้า $x=100$ หา k จากสมการ (8) จะได้

$$100=-\frac{1}{2}\frac{(88)^2}{k}+\frac{(88)^2}{k}=\frac{1}{2}\frac{(88)^2}{k}$$

$$k=\frac{(88)^2}{200}=\frac{968}{25}$$ ฟุต / (วินาที) ^{2}

ข.) $v=30$ ไมล์ / ชั่วโมง หรือ 44 ฟุต / วินาที

$v=-kt+c_1$ โดยที่ $k=\dfrac{968}{25}$

แทนค่า $t=0$, $v=44$ จะได้ $c_1=44$

$v=-kt+44$ หรือ $t=\dfrac{44-v}{k}$

หา t ที่ $v=0$ ได้ $t=\dfrac{44}{k}$

$$v=\frac{dx}{dt}=-kt+44$$

$$x=\int v\,dt=\int(-kt+44)\,dt$$

$$x=-\frac{kt^2}{2}+44t+c_2$$

แทนค่า $t=0$, $x=0$ จะได้ $c_2=0$

$$x=-\frac{kt^2}{2}+44t$$

$$=-\frac{k}{2}\left(\frac{44}{k}\right)^2+44\left(\frac{44}{k}\right)$$

$$= -\frac{44^2}{2k} + \frac{44^2}{k}$$

$$= \frac{44^2}{2k} = \frac{44^2}{2}\left(\frac{25}{968}\right) = 25 \text{ ฟุต}$$

แสดงว่ารถหยุดในระยะทาง 25 ฟุต หลังจากใช้เบรค

<u>ตัวอย่าง 5</u> ในการหารายได้ทั้งหมด $R(x)$ จากการขายสินค้า x หน่วย สามารถกำหนดได้ด้วยการอินทิเกรตรายได้เพิ่ม $\frac{dR}{dx}$, และใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อคำนวณค่าคงที่ของการอินทิเกรต

ให้ x แทนปริมาณสินค้าซึ่งมีค่าสูงสุดเท่ากับ L ทางบริษัทพบว่ารายได้เพิ่ม คือ $\frac{dR}{dx} = 5 + \frac{4}{(2x+1)^2}$

จงหา $R(x)$ เมื่อ $0 \le x \le L$ ถ้า $R(x) = 0$

<u>วิธีทำ</u> $\frac{dR}{dx} = 5 + \frac{4}{(2x+1)^2}$, $dR = \left(5 + \frac{4}{(2x+1)^2}\right)dx$

$$\int dR = \int 5dx + \int \frac{4}{(2x+1)^2}dx$$

$$R(x) = 5x - \frac{2}{2x+1} + c$$

เมื่อ $R(0) = 0$ จะได้ $0 = 0 - \frac{2}{0+1} + c$, $c = 2$

ดังนั้น ฟังก์ชันของรายได้สำหรับ $0 \le x \le L$ คือ

$$R(x) = 5x - \frac{2}{2x+1} + 2$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาชุดของเส้นโค้งที่มีความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ เท่ากับ $3x^2$

2. กำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y)เป็น $2x+1$ เส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(-4, 2)$ จงหาสมการเส้นโค้ง

3. จงหาสมการของเส้นโค้งซึ่ง$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1$และมีความชัน -2 ที่จุด$(3,1)$

4. จงหาสมการของเส้นโค้งซึ่ง $y'' = 6x$ และสัมผัสเส้นตรง $2x + y - 6 = 0$ ที่จุด $(1,4)$

5. จงหาสมการของเส้นโค้งซึ่ง $y'' = 6x - 4$และผ่านจุด $(1,2),(-2,5)$

6. จงหา s ที่เป็นฟังก์ชันของ t เมื่อกำหนดให้ $v = \dfrac{ds}{dt}$ และที่เวลา $t = 0$, $s = s_0$

6.1 $v = 2t + 1$

6.2 $v = \left(t^2 + 1\right)^2$

6.3 $v = (t+1)^{-2}$

6.4 $v = \sqrt{2gs}$, g คงที่

7. จงหาความเร็ว v และระยะทาง s เมื่อกำหนดให้ $a = \dfrac{dv}{dt}$ และที่ $t = 0$, $s = s_0$ และ $v = v_0$

7.1 $a = g$

7.2 $a = (2t+1)^3$

8. วัตถุถูกขว้างขึ้นไปจากพื้นดินด้วยความเร็วต้น 128 ฟุต / วินาที ถ้าความเร่ง $=g=-32$ ฟุต / (วินาที) ^{2} และไม่มีแรงอื่นกระทำนอกจากแรงดึงดูดจากโลก จงหา

8.1 กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุ

8.2 ความสูงที่วัตถุนั้นจะขึ้นไปได้สูงสุด

8.3 ความเร็วขณะที่วัตถุตกถึงพื้น

9. วัตถุตกจากหน้าต่างซึ่งสูง 144 ฟุตจากพื้นดิน จงหาว่า

9.1 วัตถุตกถึงพื้นเมื่อไร

9.2 วัตถุตกถึงพื้นด้วยความเร็วเท่าไร

10. โยนลูกหินขึ้นไปจากหน้าต่างซึ่งสูง 144 ฟุตเหนือพื้นดิน ด้วยความเร็วต้น 128 ฟุต / วินาที จงหา

10.1 ลูกหินขึ้นสูงสุดเท่าไร

10.2 ลูกหินตกถึงพื้นด้วยความเร็วเท่าไร

11. วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 16 ฟุต / วินาที ทันใดนั้นก็ลดความเร็วลง ถ้าอัตราการลดของความเร็วเป็นสัดส่วนกับรากที่สองของความเร็วและวัตถุหยุดนิ่งภายใน 4 วินาที จงหา

11.1 วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าไร หลังจากที่ลดความเร็วได้ 2 นาที

11.2 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปจนกระทั่งหยุดนิ่ง

12. 12.1 จงหารายได้ทั้งหมด $R(x)$ จากการขายของ x หน่วย ถ้ารายได้เพิ่มเป็นดอลลาร์ต่อหน่วยจาก $0 \leq x \leq 40$ คือ $\frac{dR}{dx} = \frac{125}{\sqrt{x}} - \frac{100}{x^2}$ และรายได้จากการขาย 100 หน่วยแรกเป็น \$2400

12.2 จงหารายได้ที่เพิ่มขึ้นจากการขาย 100 หน่วยถัดไป

13. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้ดังต่อไปนี้

13.1 $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}, x = 0, y = -2$

13.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}, x = 1, y = 1$

<u>คำตอบแบบฝึกหัด</u>

1. $y = x^3 + c$

2. $y = x^2 + x - 10$

3. $y = \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{19}{2}$

4. $y = x^3 - 5x + 8$

5. $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 9$

6.1 $s = t^2 + t + s_0$

6.2 $s=\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}+t+s_0$

6.3 $s=-(t+1)^{-1}+1+s_0$

6.4 $s=s_0+t\sqrt{2gs_0}+\frac{1}{2}gt^2$

7.1 $v=gt+v_0, s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t=s_0$

7.2 $v=-\frac{1}{4}(2t+1)^{-2}+v_0+\frac{1}{4},\ s=\frac{t^2}{30}+\frac{t^4}{6}+\frac{t^2}{2}+v_0t+s_0$

8.1 $y=-16t^2+128t$

8.2 256 ฟุต

8.3 128 ฟุต / วินาที

9.1 3 วินาที

9.2 96 ฟุต / วินาที

10.1 400 ฟุตจากพื้นดิน

10.2 160 ฟุต / วินาที

11.1 4 ฟุต / วินาที

11.2 $\frac{64}{3}$ ฟุต

12.1 $R(x)=250\sqrt{x}+\frac{100}{x}-101$

12.2 \$ 1,035.03

12.3 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-2$

12.4 $y=x-\frac{1}{x}+1$

<u>การประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต</u>

(Applications of the Definite Integral)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องในช่วง $a \le x \le b$ และ $F(x)$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ ซึ่งแทนด้วย

$$\int f(x)dx = F(x) + c\ , \qquad c \text{ เป็นตัวคงที่ใด ๆ} \tag{1}$$

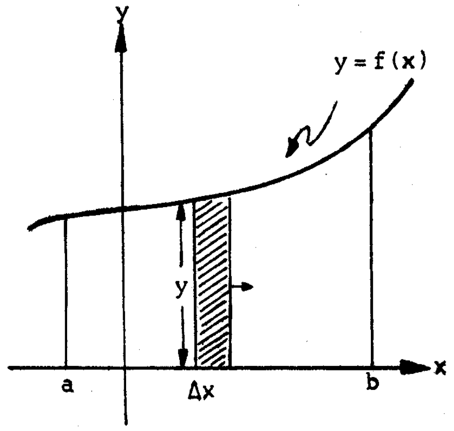
อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ ในช่วง (a,b) คือ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

นำอินทิกรัลจำกัดเขตนี้ไปประยุกต์ทางเรขาคณิตและทางฟิสิกส์ การประยุกต์ทางเรขาคณิต เช่น การหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง ปริมาตร ความยาวเส้นโค้ง และการหาพื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง สำหรับการประยุกต์ทางฟิสิกส์ เช่น การหาโมเมนต์ การหาจุดรวมมวล งาน และความดันของของเหลว เป็นต้น

1. <u>พื้นที่ใต้เส้นโค้ง</u> (Area Under a Curve)

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบและต่อเนื่องตลอดช่วง $a \le x \le b$ ดังรูปที่ 1

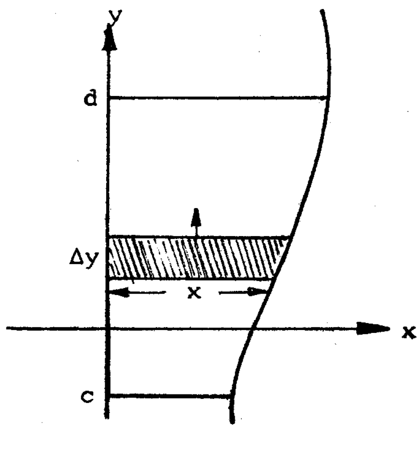


พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 1 คือ

$$A = \int_a^b y\,dx$$

รปที่ 1

ถ้าต้องการหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ โดยที่ $g(y) \geq 0,$ แกน $y, y = c$ และ $y = d$ ดังรูปที่ 2 แบ่งพื้นที่ออกเป็น n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n$ มีส่วนสูงตามเส้นโค้ง $x = g(y)$



รูปที่ 2

<u>พิจารณารูปที่</u> i

พื้นที่ $\Delta A_i \approx x\Delta y_i =$ สูง $\times$ กว้าง

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} x\Delta y_i$$

ถ้า $n \to \infty$, $\Delta y_i \to 0$

$$A = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=0}^{n} x\Delta y_i = \int_c^d x\,dy$$

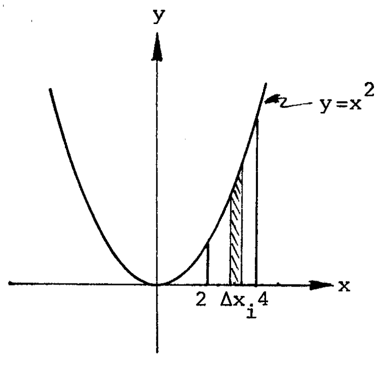
สรุป พื้นที่ใต้เส้นโค้ง

1. พื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยที่ $f(x) \geq 0$, แกน x, $x = a$ และ $x = b$ คือ $A = \int_a^b ydx$ (3)

2. พื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = g(y)$ โดยที่ $g(y) \geq 0$, แกน y, $y = c$ และ $y = d$ คือ $A = \int_a^b xdy$ (4)

Example 1 Compute the area covered by $y = x^2$, x-axis, $x = 2$ and $x = 4$.

Solution



รูปที่ 3

Partition along x-axias

$$\Delta A_i = y \ \ \Delta x_i$$

$$A = \int_2^4 ydx$$

$$= \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

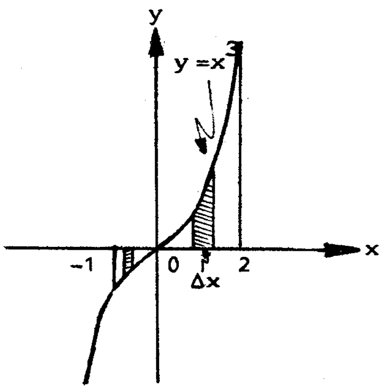
$$= \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Example 2 Find the area covered by $y = x^3$, x=-1 , $x = 2$ and x-axis.

<u>วิธีทำ</u> แบ่งการหาพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

จาก $x = -1$ ถึง $x = 0$ เป็น A_1

และ $x = 0$ ถึง $x = 2$ เป็น A_2



รูปที่ 4

<u>หา</u> A_1

$$\Delta A = (0 - y)\Delta x_i = -y\Delta x_i$$

$$A_1 = -\int_{-1}^{0} y dx = -\int_{-1}^{0} x^3 dx$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -\left[0 - \frac{(-1)^4}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

<u>หา</u> A_2 $\Delta A = (y - 0)\Delta x_i = y\Delta x_i$

$$A_2 = \int_{0}^{2} y dx = \int_{0}^{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{2^4}{4} - 0 = 4$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + 4 = 4\frac{1}{4}$$

<u>หมายเหตุ</u>

1. การหาพื้นที่ค่าพื้นที่จะติดลบไม่ได้ ดังนั้นสูตรการหาพื้นที่อาจเขียนเป็นค่าสัมบูรณ์ ดังนี้ $A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$
2. การหาพื้นที่ ถ้าอินทิเกรตตามแกน x จะไม่อินทิเกรตข้ามจุดตัดใดๆ บนแกน x มิฉะนั้นพื้นที่บางส่วนจะหายไปเพราะเกิดพื้นที่ติดลบขณะอินทิเกรต เช่น จากตัวอย่างที่ 2

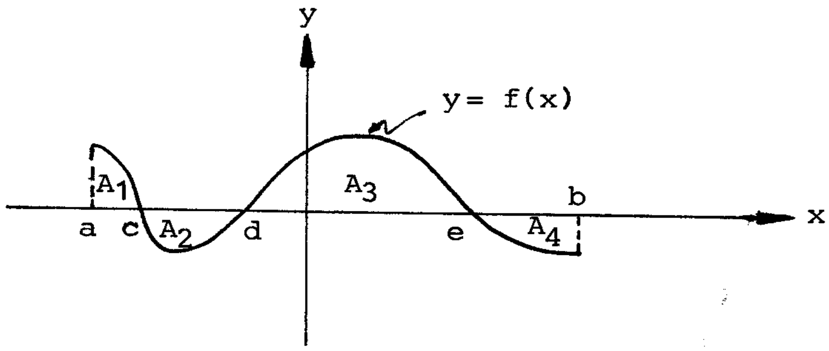
$$\int_{-1}^{2} ydx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right] = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$$

ซึ่งพื้นที่ที่หายไปเกิดขึ้นเพราะขณะที่อินทิเกรตจาก -1 ถึง 0 ผลการอินทิเกรต คือ $\int_{-1}^{0} ydx = -\frac{1}{4}$

ดังนั้นได้พื้นที่ติดลบในช่วง -1 ถึง 0 ซึ่งไม่ถูกต้อง เพราะพื้นที่ติดลบไม่ได้ เนื่องจาก พื้นที่ = สูง $\times$ กว้าง

ถ้าต้องการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$, $a \le x \le b$ ดังรูปที่ 5

รูปที่ 5



จะได้ $A = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$

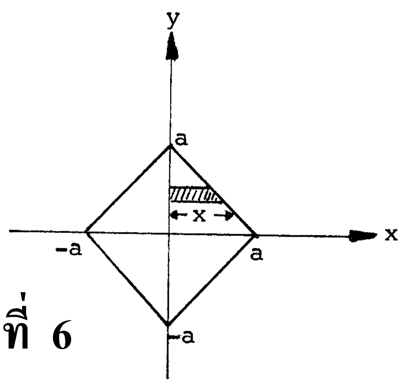
$$= \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \left| \int_d^e f(x)dx \right| + \left| \int_e^b f(x)dx \right|$$

ในทำนองเดียวกัน การหาพื้นที่ ถ้าอินทิเกรตตามแกน y จะไม่อินทิเกรตข้ามจุดตัดใดๆ บนแกน y

3. ในกรณีที่ต้องการหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่มีลักษณะสมมาตรกับแกน x หรือแกน y เพื่อป้องกันความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้น ให้หาพื้นที่เฉพาะส่วนเดียวแล้วคูณด้วยจำนวนส่วนที่สมมาตรดังตัวอย่างที่ 3

Example 3 Compute the area covered by $|x| + |y| = a$

Solution



รูปที่ 6

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| + |y|$$

$$= a \rightarrow \begin{cases} x+y=a & x\geq 0 \quad y\geq 0 \\ x-y=a & x\geq 0 \quad y<0 \\ -x+y=a & x<0 \quad y\geq 0 \\ -x-y=a & x<0 \quad y<0 \end{cases}$$

As we can see, this graph is symmetric about the origin. So we can just find the area in the first Quadrant, called it A_1. The total area is then four times A_1.

Consider A_1 : If partition along y-axis

$$\Delta A_1 = x \quad \Delta y \qquad \text{where} \quad x = a - y$$

$$A_1 = \int_0^a (a-y)\,dy = \left[ay - \frac{y^2}{2} \right]_0^a$$

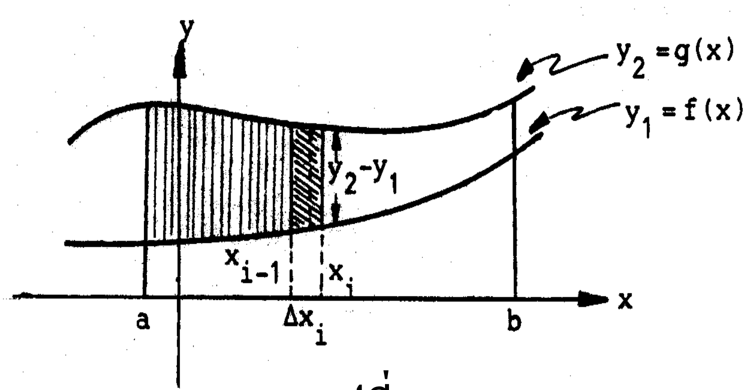
$$= a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$A = 4A_1 = \frac{4a^2}{2} = 2a^2.$$

2. <u>พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง</u> (Area Between Curves)

2.1 <u>ฟังก์ชันในระบบพิกัดฉาก</u> (Rectangular Form)

ถ้า $y_1 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $y_2 \geq y_1$ ตลอดช่วง $a \leq x \leq b$ จะหาอาณาบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง y_1, y_2 เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 7 ได้ดังนี้



รูปที่ 7

แบ่งอาณาบริเวณออกเป็น n ช่วงเล็กๆ กว้าง $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ พื้นที่ของอาณาบริเวณทั้งหมดเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปเล็กๆ ทั้ง n รูป ให้ ΔA_i = พื้นที่รูปที่ i

$$\Delta A_i \approx (y_2 - y_1)\Delta x_i = \text{สูง} \times \text{กว้าง}$$

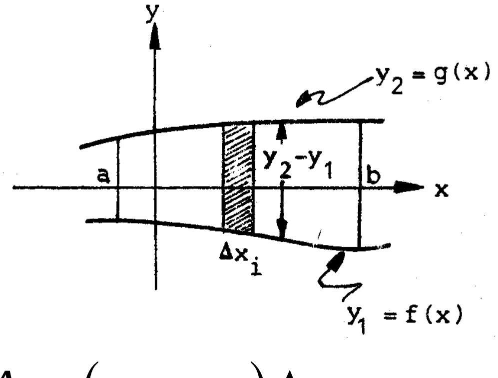
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} (y_2 - y_1)\Delta x_i$$

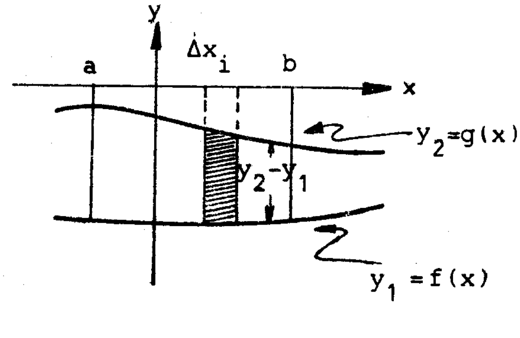
ถ้า $\Delta x_i \to 0$ ความสูง $(y_2 - y_1)$ ที่กึ่งกลางความกว้าง $(x_{i-1}, \ x_i)$ จะเข้าใกล้ $(y_2 - y_1)$ ที่จุด x_{i-1} และที่จุด x_i นั่นคือพื้นที่รูปเล็กๆ แต่ละรูปจะใกล้เคียงกับพื้นที่จริงๆ ดังนั้น

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\substack{\Delta x_{i \to 0} \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} (y_2 - y_1)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx$$

สูตรนี้เป็นจริงเสมอไม่ว่าเส้นโค้งจะอยู่เหนือแกนหรือใต้แกน เมื่อ $y_2 > y_1$ ความสูงจะเป็น $y_2 - y_1$ ดังรูปที่ 8 และรูปที่ 9





$$\Delta A_i = (y_2 - y_1)\Delta x_i \qquad\qquad \Delta A_i = (y_2 - y_1)\Delta x_i$$

รูปที่ 8 **รูปที่ 9**

<u>ข้อสังเกตุ</u> ถ้า $y_2 > y_1$ y_2 จะต้องอยู่เหนือ y_1 เสมอ เพราะค่า y นับจากล่างขึ้นบน

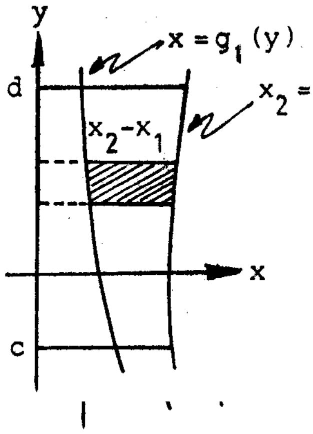
> **<u>สรุป</u>** ถ้า $y_2 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $y_2 \geq y_1$ ตลอดช่วง $a \leq x \leq b$ แล้วพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง y_1, y_2 เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ คือ
>
> $$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx \qquad (5)$$

ในทำนองเดียวกันถ้า $g_1(y)$ และ $g_2(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $g_2(y) \geq g_1(y)$ ตลอดช่วง $c \leq y \leq d$ จะหาอาณาบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x_1 = g_1(y), x_2 = g_2(y)$ เส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ เมื่อ $x_2 > x_1$ ดังรูปที่ 10 รูปที่ 11 และรูปที่ 12 โดยแบ่งพื้นที่ตามแกน y ออกเป็น n ช่วงแต่ละช่วงกว้าง $\Delta y_1, \Delta y_2, ..., \Delta y_n$ พื้นที่ช่วง i คือ

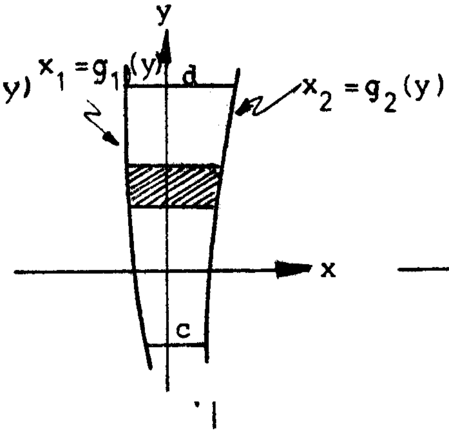
$$\Delta A_i \approx (x_2 - x_1)\Delta y_i = \text{สูง} \times \text{กว้าง}$$

$$A = \lim_{\Delta y_{i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\Delta y_{i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (x_2 - x_1)\Delta y_i$$

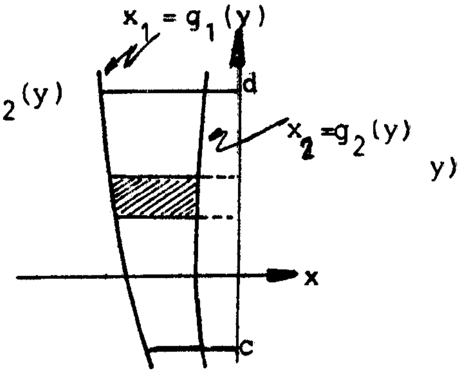
$$= \int_c^d (x_2 - x_1)dy$$



รูปที่ 10



รูปที่ 11



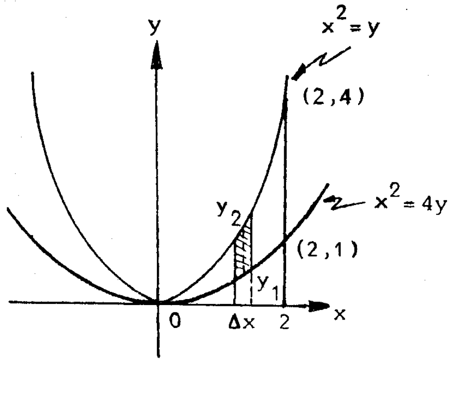
รูปที่ 12

สรุป ถ้า $x_1 = g_1(y)$ และ $x_2 = g_2(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $x_2 \geq x_1$ ตลอดช่วง $c \leq y \leq d$ แล้วพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x_1, x_2, y = c$ และ $y = d$ คือ

$$A = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy \qquad (6)$$

Example 4 Compute the area covered by $x^2 = y, x^2 = 4y$ and the line $x = 2$.

Approach 1 Partition along x-axis



รูปที่ 13

$$\Delta A = (y_2 - y_1)\ \Delta x$$

where $y_2 = x^2, \quad y_1 = \frac{x^2}{4}$

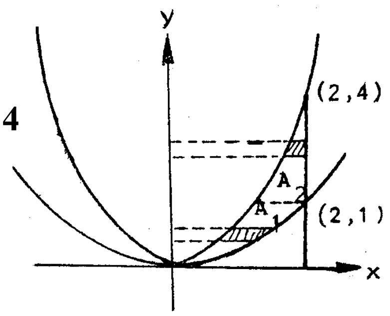
$$A = \int_0^2 (y_2 - y_1)\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2.$$

Approach 2 Partition along y-axis : there are 2 parts,

รูปที่ 14



A_1 : y from $0 \to 1$ we have

$$\Delta A_1 = (x_2 - x_1)\Delta y$$

where $x_2 = \sqrt{4y},\ x_1 = \sqrt{y}$.

(Don't forget that x_2 is on the right of x_1)

$$A_1 = \int_0^1 (x_2 - x_1)dy$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{4y} - \sqrt{y}\right)dy = \int_0^1 \sqrt{y}\ \ dy$$

$$= \left[y^{3/2}\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

A_2 : y from $1 \to 4$, we have

$$\Delta A_2 = (x_2 - x_1)\Delta y \text{ where } x_2 = 2, \quad x_1 = \sqrt{y}$$

$$A_2 = \int_1^4 (x_2 - x_1)dy = \int_1^4 \left(2 - \sqrt{y}\right)dy$$

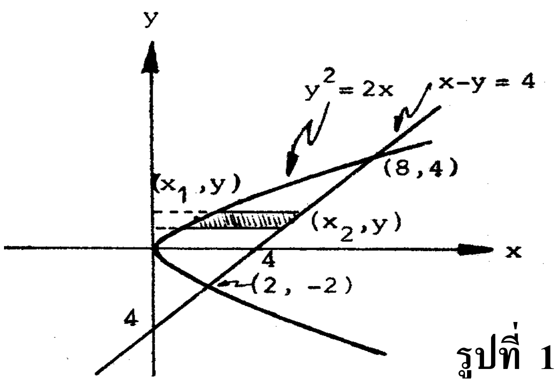
$$A_2 = \left[2y - y^{3/2}\ \frac{2}{3}\right]_1^4 = \frac{4}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

No matter which approach you may pick, the correct answer is always the same.

Example 5 Compute the area covered by $y^2 = 2x$ and $x - y = 4$.

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 15

<u>หาจุดตัด</u> ระหว่าง $y^2 = 2x$

และ $x - y = 4$

จาก $x = \frac{y^2}{2} = 4 + y$

$$y^2 = 2y + 8,$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2) = 0, \quad y = 4, \quad -2$$

ที่ $y = 4 \quad x = 8, \; y = -2 \quad x = 2$

ได้จุดตัด (2,-2) และ (8, 4)

<u>แบ่งตามแนวแกน</u> y

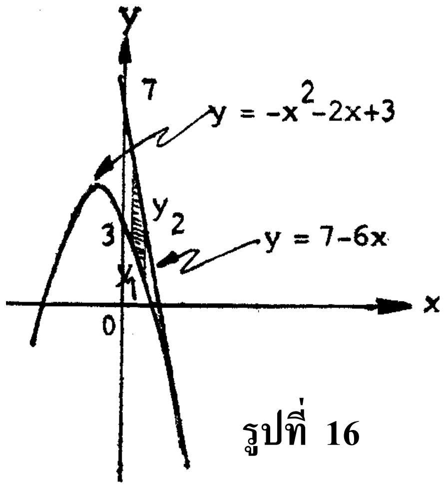
$$\Delta A = (x_2 - x_1)\Delta y \text{ เมื่อ } x_2 = 4 + y \qquad x_1 = \frac{y^2}{2}$$

$$A = \int_{-2}^{4} (x_2 - x_1)\,dy = \int_{-2}^{4} \left[(4+y) - \frac{y^2}{2}\right] dy = 18$$

Example 6 Compute the area covered by $y=-x^2-2x+3$, its tangent line at (2,-5) and the y-axis.

Solution

$$y=-x^2-2x+3 \quad = \quad -\left(x^2+2x+1\right)+4$$



รูปที่ 16

$y-4=-\left(x+1\right)^2$ is a parabolic curve having a vertex at (-1, 4).). This curve intercepts y-axis at (0, 3) and intercepts x-axis at $x=-3$ and $x=1$.

$$\frac{dy}{dx}=-2x-2$$

The slop of the tangent line at (2, -5) is -6 .

The equation of a tangent line is $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.

Here we have $y_1=-5, \quad x_1=2, \quad m=-6$.

So, $y-\left(-5\right)=-6\left(x-2\right), \quad y=7-6x$.

If partition on x-axis,

$\Delta A=\left(y_2-y_1\right)\Delta x$ where

$y_2=7-6x, \quad y_1=-x^2-2x+3$

$$A=\int_{0}^{2}\left[\left(7-6x\right)-\left(-x^{2}-2x+3\right)\right]dx$$

Exercise 1

Compute each area covered by the following graphs

1. x-axis, $y=2x-x^2$
2. y-axis , $x=y^2-y^3$
3. $y^2=x,\quad x=4$
4. $y=2x-x^2,\quad y=-3$
5. $y=x^2,\quad y=x$
6. $x=3y-y^2,\quad x+y=3$
7. $y=x^4-2x^2,\quad y=2x^2$
8. First part of $y=\sin x$
9. y-axis, $y^2-4x-4=0$
10. Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
11. $x=y^2,\quad x=y$
12. $y^2=8x,\quad x^2=4y$
13. $x^2-5x+y=0,\quad y=x$
14. $y^2=9x,\quad y^2=x^3$
15. $y=x^2,\quad y=x,\quad y=2x$
16. $y^2=4x,\quad 2x-y-4=0$

17. $y = x^3 - 4x, \quad x$-axis

18. $x + 2y = 2, \quad y - x = 1, \quad 2x + y = 7$

19. $x^2 y = x^2 - 4$, x-axis , $x = 2$ and $x = 4$

20. $y = 6x + x^2 - x^3, \quad x$-axis

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 &, \quad x \le 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}, \qquad x = 0$ and $x = 3$

22. $y = x(x-3)(x+3), \quad y = -5x$

23. $y = x^2, \quad y = 8 - x^2$ and $y = 4x + 12$

24. $x = 0, \quad x = 2, \quad y = 2^x$ and $y = 2x - x^2$

25. $x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2$

26. $y = x + 1, \quad y = \cos x$ and x-axis (biggest area)

27. One loop of $y^2 = (x-1)(x-2)^2$

28. $y = x^2 - 2x + 2$, its tangent line at $M(3, 5)$ and y-axis

29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ and $x + y = 1$

30. $y = x^2, \quad y = 4$. This area is divided into 2 equal parts by the line $y = c$. Evaluate c.

31. $x^2 = 4y, \quad y = 8/(x^2 + 4)$

32. One loop of $y^2 = (x-1)^2$

33. $y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y$ and $x^2 + y^2 = 5$ where $x \ge 0, \quad y \ge 0$

34. Hypocycloid: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

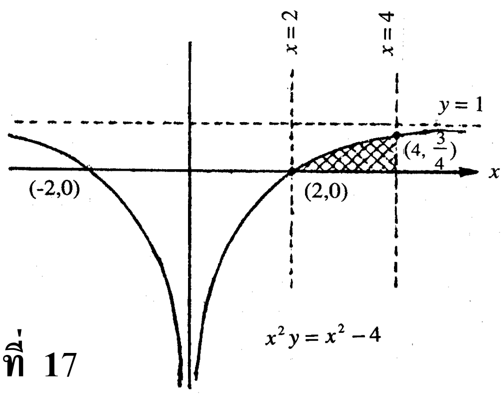
35. $y^3 = x^2$, the cord connecting (-1, 1) and (8, 4)

36. $y^2 = x^2\left(1 - x^2\right)$

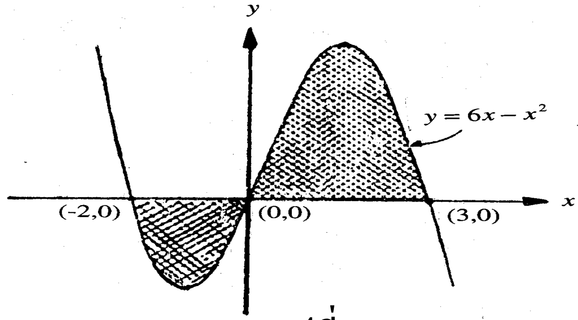
37. $xy = 4, \quad y = x, \quad x = 5$ and $x = \sqrt{-y}$

Answer to Exercise 1

1. $\frac{4}{3}$	2. $\frac{1}{12}$	3. $\frac{32}{3}$
4. $\frac{32}{3}$	5. $\frac{1}{6}$	6. $\frac{4}{3}$
7. $\frac{128}{15}$	8. 2	9. $\frac{8}{3}$
10. $\pi \ ab$	11. $\frac{1}{6}$	12. $\frac{16}{3}$
13. $\frac{32}{3}$	14. $\frac{24\sqrt{3}}{5}$	15. $\frac{7}{6}$
16. 9	17. 8	18. 6
19. 1 (รูปที่ 17)	20. $\frac{253}{12}$ (รูปที่ 18)	



รูปที่ 17



รูปที่ 18

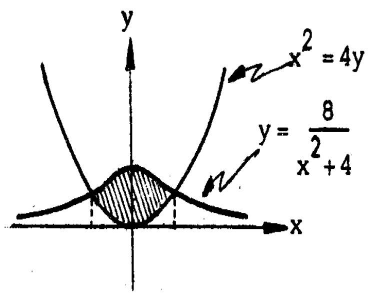
21. $\dfrac{37}{6}$ 22. 8 23. 64

24. $\dfrac{3}{\ln 2}-\dfrac{4}{3}$ 25. $\dfrac{4}{3}$ 26. $\dfrac{3}{2}$

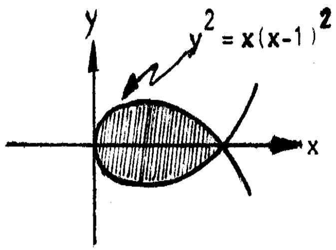
27. $\dfrac{8}{15}$ 28. 9 29. $\dfrac{1}{3}$

30. $\dfrac{32}{3},\ c=\sqrt[3]{16}$ 31. $2\pi-\dfrac{4}{3}$ (รูปที่19)

32. $\dfrac{8}{15}$ (รูปที่ 20)



รูปที่ 19



รูปที่ 20

33. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ 34. $\dfrac{3}{8}\pi a^{2}$ 35. 2.7 36. $\dfrac{4}{3}$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

(Improper Integrals)

1 บทนำ

ที่ผ่านมาเราศึกษาอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) $\int_a^b f(x)dx$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่งฟังก์ชัน $f(x)$ และช่วง $[a,b]$ ที่พิจารณามีคุณสมบัติว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (bounded function) บนช่วง $[a,b]$

ในบทนี้เราจะศึกษา $\int_a^b f(x)dx$ ที่มีช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์หรือฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต (integrand) เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงของการอินทิเกรตซึ่งเรียกอินทิกรัลประเภทนี้ว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ ซึ่งมีลักษณะแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

แบบที่ 1 ช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์ (infinite interval)

$$[a,+\infty) \qquad (-\infty,b] \qquad (-\infty,+\infty)$$

ตัวอย่างของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \qquad \int_{-\infty}^{0} e^x dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

แบบที่ 2 ตัวถูกอินทิเกรต $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตที่ $x = c$ ซึ่งอยู่บนช่วงของการอินทิเกรต $\left[a,b\right]$ นั่นคือ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

ตัวอย่างของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 2

$$\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2} \qquad \int_{1}^{2} \frac{dx}{x-1} \qquad \int_{0}^{\pi} \tan x\, dx$$

แบบที่ 3 ประเภทผสมของแบบที่ 1 และแบบที่ 2

ตัวอย่างของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 3

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 9} \qquad \int_{1}^{+\infty} \sec x\, dx$$

2 การหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 1

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,t]$ สำหรับทุก t ซึ่ง $t > a$ ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $f(x)$ บนช่วง $\left[a,+\infty\right)$ นั่นคือ $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ นิยามโดย

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

หมายเหตุ

- ถ้า $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ หาค่าได้ (exists) จะได้ว่า $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า (converges)
- ถ้า $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ หาค่าไม่ได้ (does not exist) จะได้ว่า $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก (diverges)

นิยาม ให้ b เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[t,b]$ สำหรับทุก t ซึ่ง $t<b$ ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $f(x)$ บนช่วง $(-\infty,b]$ นั่นคือ $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ นิยามโดย

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน

- ถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ หาค่าได้ จะได้ว่า $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ลู่เข้า
- ถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ หาค่าไม่ได้ จะได้ว่า $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ลู่ออก

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a<b$ ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $f(x)$ บนช่วง $\left(-\infty,+\infty\right)$ นั่นคือ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ นิยามโดย

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{โดยที่ } c\in\mathbb{R}$$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน

- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า ถ้าอินทิกรัลทั้งสองเทอมทางขวาลู่เข้า
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้าอินทิกรัลเทอมใดเทอมหนึ่งหรือทั้งสองเทอมทางขวาลู่ออก

Example 1 Evaluate $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$.

Solution

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Thus, the improper integral converges to $1/2$. ■

Example 2 Evaluate $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

Solution

Example 3 For what values of p does the integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

converge ? When the integral does converge, what is its value?

Solution
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^p} dx$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^t$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$

For $p > 1$, we get that $1-p < 0$. So $t^{1-p} \to 0$ when $t \to +\infty$,

thus
$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1} .$$

For $p<1$, we get that $1-p>0$. So $t^{1-p}\to+\infty$ when $t\to+\infty$, thus

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) = +\infty \ .$$

For $p=1$, from previous example, we get that $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverges.

From these 3 cases, we can conclude that

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & , \ p>1 \\ \text{diverges} & , \ p\le 1. \end{cases}$$

■

Example 4 Determine whether the integral converges or diverges.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}dx$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{5}}dx$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$

Solution 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}dx$ diverges.

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ converges to $\dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$.

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converges to $\dfrac{1}{(3/2)-1} = 2$.

■

Example 5 Evaluate $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx$.

Solution

Example 6 Determine whether the integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^{-x^2}\,dx$ converges or diverges. When the integral does converge, what is its value ?

Solution $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{1} xe^{-x^2}\,dx$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2e}+\frac{e^{-t^2}}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2e}+0 = -\frac{1}{2e}$$

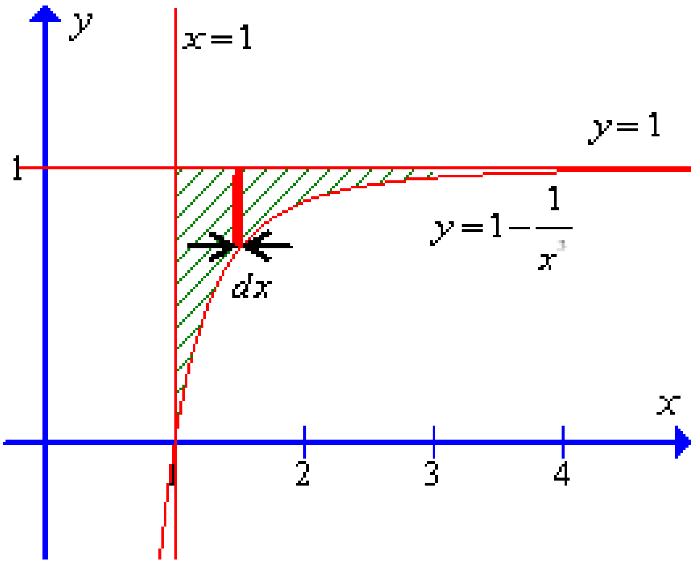
Thus, the improper integral converges to $-1/2e$. ■

Example 7 Find $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Solution

Example 8 Find the area of the region that lies between the curve $y = 1 - \dfrac{1}{x^3}$ and the line $y = 1$ for $x \geq 1$.

Solution



The area of the region R is

$$A = \int_1^{\infty} (y_2 - y_1)dx$$

$$= \int_1^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)\right] dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right]$$

$A = 1/2$ square unit ■

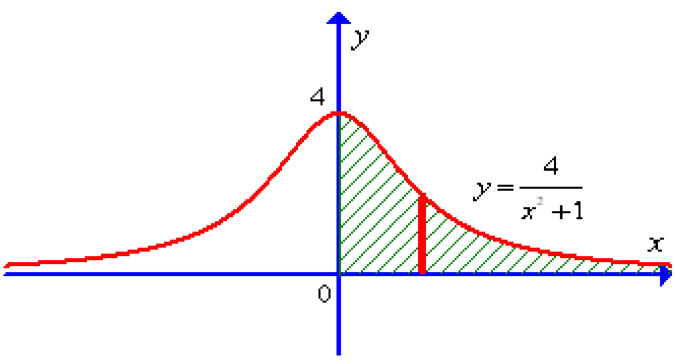
Example 9 Let R be the region that lies between the curve $y = \dfrac{4}{x^2+1}$ and x-axis for $x \geq 0$.

1) Find the area of the region R.

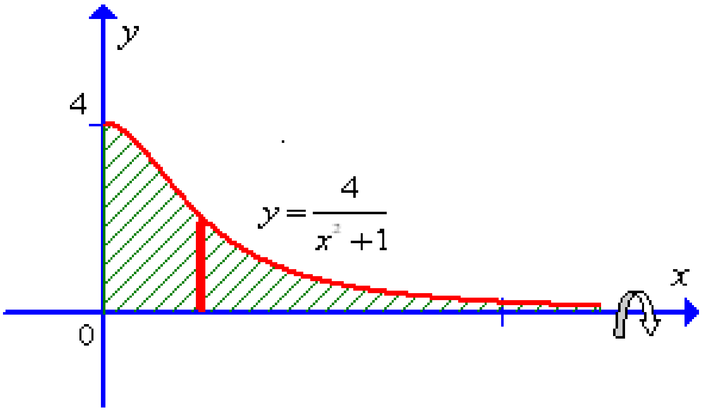
2) Find the volume of the Solutionid generated by revolving the region R about the x-axis .

Solution

1)



2)



The volume of the Solutionid generated by revolving the region

R about the x-axis is

$$V = \int_0^{\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{16}{(x^2+1)^2} dx = 16\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta$$

let $x = \tan\theta$

$\therefore dx = \sec^2\theta d\theta$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 8\pi \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 8\pi\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = 4\pi^2 \quad \text{cubic units}$$ ■

3 การหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 2

นิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[t,b]$ ทุก t ซึ่ง $a < t < b$ และ f มีความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x = a$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ นิยามโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

หมายเหตุ

- ถ้าลิมิตหาค่าได้ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า
- ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

นิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชัน

มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,t]$ ทุก t ซึ่ง $a<t<b$ และ f มี

ความไม่ต่อเนื่องแบบอนันต์ที่ $x=b$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$

ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ นิยามโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

หมายเหตุ

- ถ้าลิมิตหาค่าได้ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า
- ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

นิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และมีความไม่ต่อเนื่อง แบบอนันต์ที่ $x=c$ ในช่วง (a,b) ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f บนช่วง $[a,b]$ นิยามโดย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

หมายเหตุ

- $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า ถ้าอินทิกรัลทั้งสองเทอมขวาลู่เข้า
- $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก ถ้าเทอมใดเทอมหนึ่งหรือทั้งสองเทอมทางขวาลู่ออก

Example 10 Determine $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solution

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(2-2\sqrt{t}\right) = 2$$

Thus, the integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converges to 2 . ■

Example 11 Evaluate $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1-x}$.

Solution

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{1-x}$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left[-\ln|1-x|\right]_t^2$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \left(-\ln|-1| + \ln|1-t|\right)$$

$$= 0 + \lim_{t\to 1^+} \ln|1-t| = -\infty$$

Thus, the integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1-x}$ diverges . ■

Example 12 Evaluate $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solution

Example 13 Determine $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

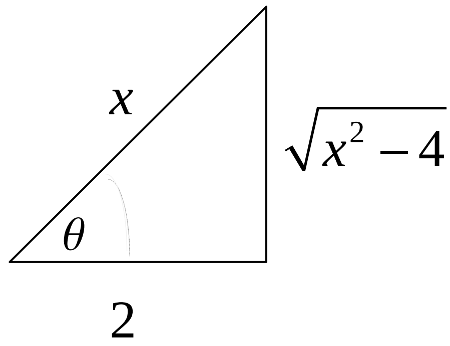
Solution To consider $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

let $x = 2\sec\theta$

$\therefore\ dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta$$



Example 14 Determine whether the integral $\int_{1}^{4} \frac{dx}{(x-2)^{2/3}}$ converges or diverges.

Solution

4 การหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ แบบที่ 3

Example 15 Evaluate $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Solution

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[2\tan^{-1}\sqrt{x}\right]_t^1 + \lim_{t\to\infty} \left[2\tan^{-1}\sqrt{x}\right]_1^t$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] + 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \pi$$

Thus, the integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ converges to π. ■

Example 16 Set up the following improper integrals in terms of the limit of the integral.

1) $\displaystyle\int_{-3}^{\infty} \frac{dx}{x+2}$

Solution

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2}$

Solution

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

Solution

Exercise 1

1. Determine whether the following integrals converges or diverges. When the integral does converge, what is its value ?

1.1 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

1.2 $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,dx$

1.3 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2^x}\,dx$

1.6 $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

1.9 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

1.10 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

1.11 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx$

1.12 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})^2}\,dx$

1.13 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{3-2x}\,dx$

1.14 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$

1.15 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1.16 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^{5/2}}\,dx$

1.17 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

1.18 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{2/3}}\,dx$

1.19 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x^2+2x+1}\,dx$

1.20 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+1|}{x^2+1}\,dx$

1.21 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1}dx$ 1.22 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}dx$

1.23 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ 1.24 $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

2. Find a such that $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx = 5.$

3 . Show that $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ converges for $p>1$ and diverges for $p \le 1.$

4 . Find the area of the region that lies between the curve $y=\frac{8}{x^2-4}$ and the x-axis for $x \ge 3.$

5 . Find the area of the region that lies between the curves $y=\frac{1}{x}$ and $y=\frac{1}{x^2}$ when $x \in [1,\infty)$

6 . Let $R=\{(x,y)\,|\, x \ge 4$ และ $0 \le y \le x^{-3/2}\}$ find

6.1 the area of the region R

6.2 the volume of the Solutionid generated by revolving the region R about the x-axis .

7. Let R be the region that lies between the curve $y=\frac{4}{x^2+1}$ and x-axis, for $x \ge 0$. Find

7.1 the area of the region R

7.2 the volume of the Solutionid generated by revolving the region R about the x-axis .

Answers to Exercise 1

1

1.1	$1/3$	1.2	ลู่ออก
1.3	ลู่ออก	1.4	$1/2$
1.5	1	1.6	ลู่ออก
1.7	$\pi/8$	1.8	2
1.9	1	1.10	$1/2$
1.11	$1-\ln 2$	1.12	$2\left(\ln(1+e)-1-\dfrac{1}{1+e}\right)$
1.13	ลู่ออก	1.14	$1/3$
1.15	ลู่ออก	1.16	$2/3$
1.17	$\dfrac{1}{2}\ln 3$	1.18	ลู่ออก
1.19	$3\pi/4$	1.20	ลู่ออก
1.21	ลู่ออก	1.22	0
1.23	$\pi/2$	1.24	0

2 $1/5$

4 $2\ln 5$ ตารางหน่วย

5 ไม่มีค่า

6

6.1 1 square unit

6.2 $\pi/32$ cubic units

7

7.1 2π square units

7.2 $4\pi^2$ cubic units

Exercise 2

1. Determine whether the following integrals converges or diverges. When the integral does converge, what is its value ?

1.1 $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

1.2 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

1.3 $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

1.4 $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{3/2}}\,dx$

1.5 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ 1.6 $\int_0^1 x\ln x\,dx$

1.7 $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}\,dx$ 1.8 $\int_0^{\pi/2} \sec^2 x\,dx$

1.9 $\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$ 1.10 $\int_0^1 \ln x\,dx$

1.11 $\int_0^4 \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 1.12 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx$

1.13 $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$ 1.14 $\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$

1.15 $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 1.16 $\int_{-2}^7 \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\,dx$

1.17 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ 1.18 $\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^7}\,dx$

1.19 $\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ 1.20 $\int_1^3 \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

1.21 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$ 1.22 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

1.23 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ 1.24 $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^{1/5}}\,dx$

2. Show that the integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converges for $p<1$, and

diverges for $p \geq 1$

3. Find the area that lies between the curve $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ and x-axis for $x \in [0,4]$.

4. Find

(a) the area between the region R

(b) the volume of the Solutionid generated by revolving the region R about the x-axis .

For 4.1 $R = \{(x,y) \mid -4 \leq x \leq 4 \text{ and } 0 \leq y \leq 1/(x+4)\}$

4.2 $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x}\}$.

5. Find the area that lies between the curves $y = \dfrac{1}{x}$ and $y = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ for $x \in [0,1]$.

Answers to Exercise 2

1.

1.1	6	1.2	$\pi / 2$
1.3	diverges	1.4	diverges
1.5	$8/3$	1.6	$-1/4$
1.7	1	1.8	diverges

1.9	diverges	1.10	-1
1.11	$4(\ln 2 - 1)$	1.12	$8/3$
1.13	$21\sqrt[3]{4}/5$	1.14	diverges
1.15	$9/2$	1.16	3
1.17	4	1.18	diverges
1.19	diverges	1.20	diverges
1.21	diverges	1.22	π
1.23	diverges	1.24	diverges

3. does not exist

4
4.1 (a) does not exist (b) does not exist
4.2 (a) 2 square units (b) does not exist

5 $\frac{1}{2}\ln 2$ square units

Exercise 3

1. Determine whether the following integrals converges or diverges. When the integral does converge, what is its value ?

1.1 $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx$

1.2 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

1.3 $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}dx$

1.4 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$

1.5 $\int_0^{\infty} x^{-0.1}dx$

1.6 $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx$

1.7 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+8}dx$

1.8 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$

1.9 $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}dx$

1.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}dx$

1.11 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

1.12 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1}dx$

Answers to Exercise 3

1.1	diverges	1.2	$\pi/2$
1.3	diverges	1.4	diverges
1.5	diverges	1.6	$\pi/2$
1.7	diverges	1.8	diverges
1.9	$\pi/3$	1.10	diverges
1.11	diverges	1.12	diverges

อินทิกรัลเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

พิจารณาการหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus) จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

โดยที่ $F(x)$ คือ ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ $f(x)$

ในบางกรณีการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ นั้นทำได้ยากหรือไม่สามารถหาได้ในรูปของฟังก์ชันมูลฐาน (elementary function) เช่น

$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$, $\int_1^2 \sin(x^2)\,dx$ เป็นต้น

หมายเหตุ ฟังก์ชันมูลฐานคือฟังก์ชันพหุนาม(polynomial functions) ฟังก์ชันตรรกยะ(rational functions) ฟังก์ชันกำลัง(power functions) ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง(exponential functions) ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic functions) ฟังก์ชันตรีโกณมิติและตรีโกณมิติผกผัน (trigonometric and inverse trigonometric functions) ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและไฮเพอร์โบลิกผกผัน(hyperbolic and inverse hyperbolic functions) และทุกฟังก์ชันที่เกิดจากการบวก ลบ คูณ หาร และคอมโพสิทของฟังก์ชันเหล่านี้

ในหัวข้อนี้จะศึกษาวิธีการประมาณค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต

$\int_a^b f(x)\,dx$ วิธีหนึ่งก็คือการประมาณโดยใช้ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) เริ่มต้นโดยการแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน แต่ละช่วงกว้าง $h=\dfrac{b-a}{n}$ และให้ $x_i = a+ih,\ i=0,1,2,\ldots,n$

จะได้ว่า

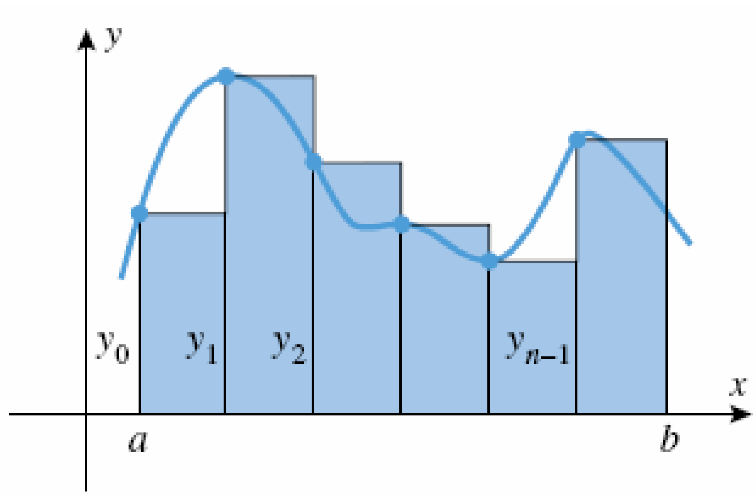
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)h$$

โดยที่ x_i^* เป็นจุดใดๆในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

ถ้าเลือก x_i^* เป็นจุดปลายทางซ้ายของช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ นั่นคือ $x_i^* = x_{i-1}$

และกำหนด $y_i = f(x_i),\ i=0,1,2,\ldots,n$ จะได้

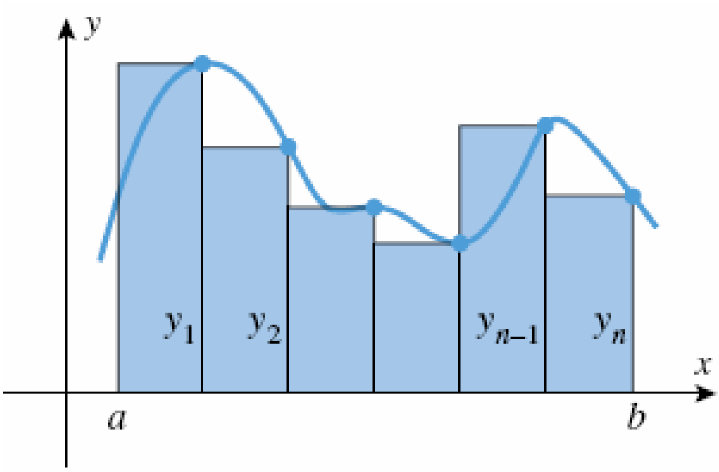
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}h$$



รูปที่ 1 การประมาณด้วยจุดปลายทางซ้าย

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเลือก x_i^* เป็นจุดปลายทางขวาของช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ นั่นคือ $x_i^* = x_i$ จะได้

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h = \sum_{i=1}^{n} y_i h$$



รูปที่ 2 การประมาณด้วยจุดปลายทางขวา

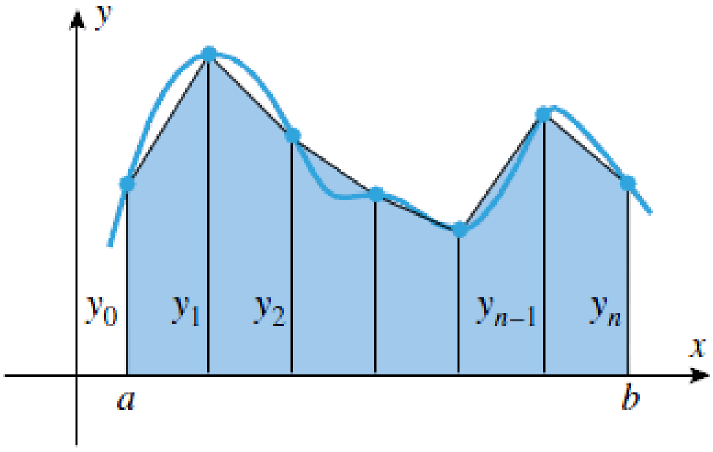
เรียก L_n ว่าการประมาณด้วยจุดปลายทางซ้าย และ R_n ว่า การประมาณด้วยจุดปลายทางขวา จะเห็นว่า L_n และ R_n เป็นการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน f โดยการแบ่งพื้นที่ออกเป็น n ส่วนบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ และประมาณพื้นที่แต่ละส่วนโดยใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง h และสูง $f(x_i^*)$ ($x_i^* = x_{i-1}$ สำหรับ L_n และ $x_i^* = x_i$ สำหรับ R_n)

นอกจากนี้ยังมีวิธีอื่นอีกหลายวิธีที่ให้ค่าประมาณดีกว่าวิธีจุดปลายทางซ้ายและวิธีจุดปลายทางขวา ดังเช่น 2 วิธีต่อไปนี้

1. กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

แนวคิดของวิธีนี้คือจะประมาณฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรต(ซึ่งหาปฏิยานุพันธ์ได้ยากหรือหาไม่ได้) ด้วยฟังก์ชันที่ไม่ซับซ้อน(ซึ่งหาปฏิยานุพันธ์ได้ง่ายกว่า) ในที่นี้ก็คือฟังก์ชันเชิงเส้น

เช่นเดียวกันกับวิธีจุดปลายทางซ้ายและจุดปลายทางขวา จะแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน จะประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ด้วยพื้นที่ใต้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_{i-1}, y_{i-1}) และ (x_i, y_i) พื้นที่ใต้เส้นตรงดังกล่าวคือพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านคู่ขนานยาว y_{i-1} และ y_i และมีความกว้าง h ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ดังนั้นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูบนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ คือ

$$\frac{1}{2} \times h \times (y_{i-1} + y_i)$$

ถ้ารวมพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูทั้งหมด จะได้ค่าประมาณของพื้นที่ใต้กราฟ $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

โดยที่ $h = \dfrac{b-a}{n},\ x_i = a + ih,\ y_i = f(x_i)$

ตัวอย่าง 1 จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่าของอินทิกรัล

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ โดยใช้ $n = 4$

วิธีทำ $a = 1, b = 2, n = 4$ ดังนั้น $h = \dfrac{b-a}{n} = 0.25$

$$x_i = a + ih = 1 + 0.25i,\ \ i = 0, 1, 2, 3, 4$$

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x_i}$
0	1.00	1.000000
1	1.25	0.800000
2	1.50	0.666667
3	1.75	0.571429
4	2.00	0.500000

ดังนั้น

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx T_4 = \frac{0.25}{2}\left(1 + 2(0.8) + 2(0.666667) + 2(0.571429) + 0.5\right)$$

$$= 0.697024$$

หมายเหตุ

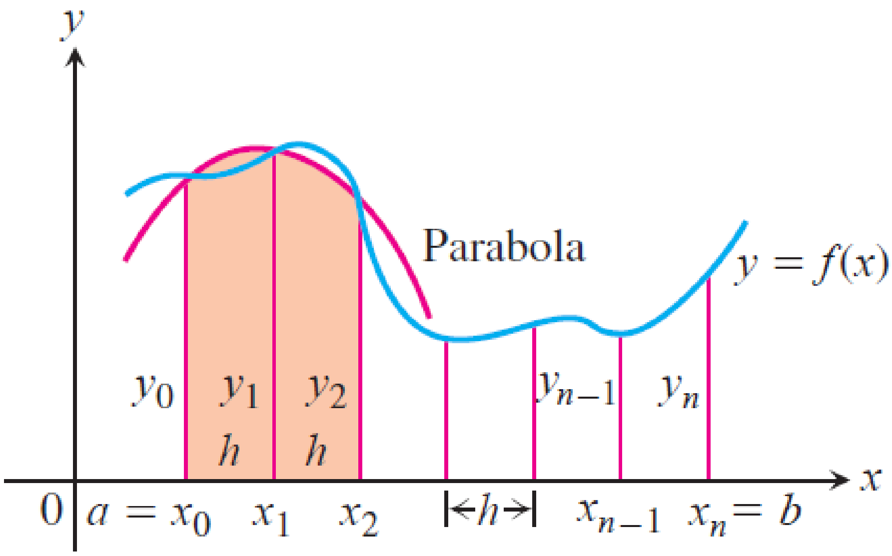
ค่าที่แท้จริงของ $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ คือ $[\ln x]_1^2 = \ln 2 = 0.693147...$

ตัวอย่าง 2 จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่าของอินทิกรัล $\int_0^1 e^{x^2} dx$ โดยใช้ $n = 4$

วิธีทำ

2. กฎของซิมป์สัน (Simpson's Rule)

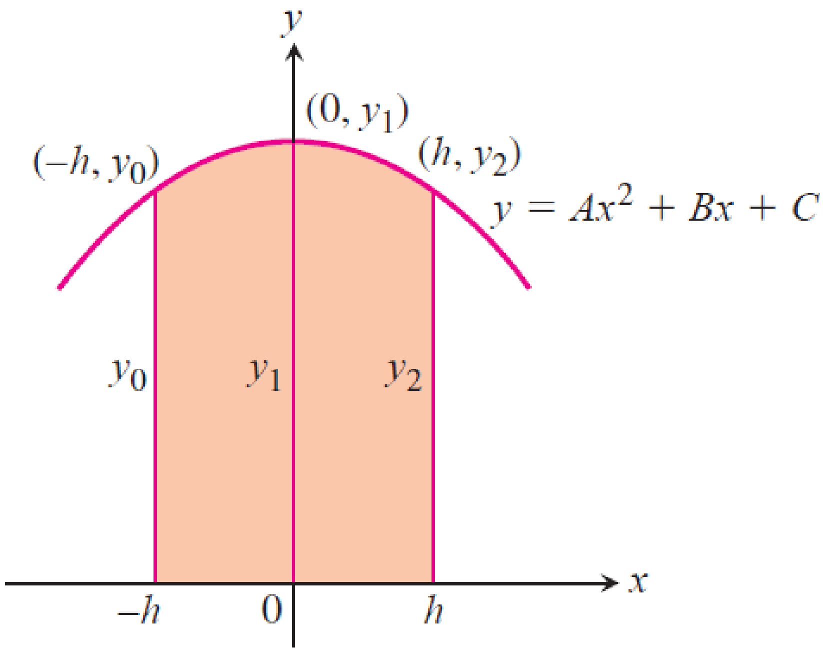
แนวคิดของวิธีนี้คล้ายกับกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ต่างกันตรงที่วิธีนี้จะประมาณฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตด้วยพาราโบลาบนช่วงย่อย 2 ช่วงที่ติดกันดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 กฎของซิมป์สัน

เริ่มจากการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน **โดยที่** n **ต้องเป็นเลขคู่เท่านั้น** พิจารณาการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุด $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น จะพิจารณาการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุด $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$ บนช่วง $[-h, h]$ ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

เนื่องจากสมการของพาราโบลาคือ $y = Ax^2 + Bx + C$ ดังนั้น

$$\int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{h}{3}\left[2Ah^2 + 6C\right] \qquad (*)$$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) ดังนั้น

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

ทำให้ได้ว่า

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

ดังนั้นอินทิกรัลในสมการ (*) สามารถเขียนในเทอมของ

y_0, y_1, y_2 ได้เป็น

$$\int_{-h}^{h}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\frac{h}{3}\left[2Ah^2+6C\right]$$
$$=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right]$$

โดยการเลื่อนจุดทั้งสามในแนวราบด้วยระยะ x_0+h จะได้ว่าพื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุดทั้งสาม(หลังการเลื่อน)ยังคงเท่าเดิม นั่นคือ พื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุด

$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ บนช่วง $[x_0,x_2]$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right]$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าพื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุด$(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ บนช่วง $[x_2,x_4]$ คือ

$$\frac{h}{3}\left[y_2+4y_3+y_4\right]$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y=f(x)$ บน $[a,b]$สามารถประมาณได้ด้วยผลรวมของพื้นที่ใต้เส้นโค้งพาราโบลาบนช่วงย่อย $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4],\ldots,[x_{n-2},x_n]$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$
$$\approx\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right]+\frac{h}{3}\left[y_2+4y_3+y_4\right]+\ldots$$
$$+\frac{h}{3}\left[y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right]$$
$$=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right]$$

<u>กฎของซิมป์สัน</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots$$
$$+2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

ตัวอย่าง 3 จงใช้กฎของซิมป์สันประมาณค่าของอินทิกรัล

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ โดยใช้ $n = 4$

วิธีทำ โดยใช้ตารางในตัวอย่างที่ 1 จะได้

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx S_4 = \frac{0.25}{3}\left(1 + 4(0.8) + 2(0.666667) + 4(0.571429) + 0.5\right)$$
$$= 0.693254$$

ข้อสังเกต เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากกฎสี่เหลี่ยมคางหมูและกฎของซิมป์สันจะเห็นว่าค่าที่ได้จากกฎของซิมป์สันใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากกว่า

ตัวอย่าง 4 จงใช้กฎของซิมป์สันประมาณค่าของอินทิกรัล

$\int_{0}^{1} e^{x^2}\, dx$ โดยใช้ $n = 4$

วิธีทำ