

鞍马全旋运动的动力学

刘延柱

(上海交通大学工程力学系)

提要 本文从经典力学观点讨论人体在鞍马上的全旋运动。理想化的全旋运动要求人体以不变的章动角作匀速进动，同时绕纵轴朝相反方向自旋，以保证在运动过程中始终面向前方。文中规定一种带特殊完整约束条件的刚体规则进动作为这种运动的理想模式，并利用人体的多刚体模型分析鞍马上的直体全旋及托马斯全旋的运动规律，导出肩关节支撑力及肌肉控制力矩的计算公式。

关键词 刚体动力学、多体系统动力学、生物力学、运动生物力学。

一、引言

体操运动员在鞍马上的全旋运动具有经典力学中刚体规则进动的特点。将人体纵轴相对垂直轴的倾角定义为章动角，纵轴绕垂直轴的转角以及人体绕纵轴的转角定义为进动角及自旋角。理想化的全旋运动要求人体以不变的章动角作匀速进动，同时绕纵轴朝相反方向自旋，以保证运动员在运动过程中始终面向前方。从经典力学观点分析，鞍马全旋运动的理想模式可抽象为一种带有特殊完整约束条件的刚体规则进动，即本文所定义的平规则进动。利用人体的多刚体模型可对鞍马上的直体全旋及托马斯全旋运动的理想模式进行动力学分析，讨论人体肩关节的支撑力及肌肉控制力矩的变化规律。

二、刚体的平规则进动

讨论绕固定点 O 转动的刚体。以 O 为原点， $O\xi$ 为垂直轴建立惯性坐标系 ($O-\xi\eta\zeta$)，其绕 $O\xi$ 转过 ϕ 角的位置记作 ($O-XYZ$)，绕 OX 转过 ϑ 角后 OZ 与刚体主轴 Oz 重合，再绕 Oz 转过 φ 角后到达刚体的主轴坐标系 ($O-xyz$) 位置 (见图1)。规定以下完整约束条件：

$$\varphi = -\phi \quad (1)$$

表 1

	ξ	η	ζ
x	$1 - (1 - c\theta)s^2\phi$	$(1 - c\theta)c\phi s\phi$	$-s\theta s\phi$
y	$(1 - c\theta)c\phi s\phi$	$1 - (1 - c\theta)c^2\phi$	$s\theta c\phi$
z	$s\theta s\phi$	$-s\theta c\phi$	$c\theta$

本文于1986年8月1日收到。

满足此条件时 ($O-xyz$) 与 ($O-\xi\eta\zeta$) 之间的方向余弦关系见表 1, 其中 c, s 为 \cos, \sin 的简写。

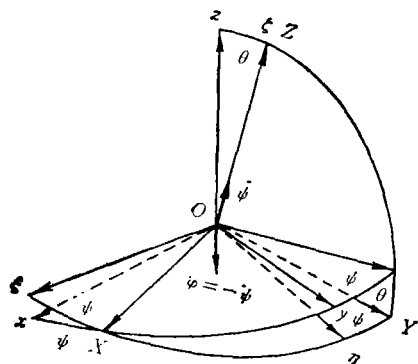


图 1

从表 1 可看出 Ox 相对 (ξ, η) 平面与 Oy 相对 (η, ζ) 平面有相同的倾角 δ ,

$$\delta = \sin^{-1}[(1 - \cos \vartheta) \cos \phi \sin \phi] \quad (2)$$

分析(2)式得出以下结论:

- 1) $\vartheta = 0$ 时, Ox, Oy 分别与 $O\xi, O\eta$ 重合;
- 2) $\phi = 0$ 或 π 时, Ox 与 $O\xi$ 重合, Oy 在 (η, ζ) 平面内;
- 3) $\phi = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时, Oy 与 $O\eta$ 重合, Ox 在 (ξ, ζ) 平面内;
- 4) $\vartheta \leq \pi/2$ 时, Ox 在 (ξ, ζ) 附近, Oy 在 (η, ζ) 附近摆动。

在经典力学中, $\vartheta, \dot{\phi}, \dot{\phi}$ 均保持常值的刚体运动称为规则进动^[1]。满足约束条件(1)时, 作规则进动的刚体在惯性空间中的转角积累为零而具有平动特征, 可称作平规则进动。其条件可写作

$$\vartheta = \text{const}, \quad \dot{\phi} = -\dot{\phi} = \Omega \quad (3)$$

常数 ϑ, Ω 取决于起始运动状态。

刚体的平规则进动必须在确定的力矩作用下才能实现。以拉格朗日情形重刚体为例, 设 m 及 A, C 为刚体的质量及对 O 点的赤道惯量矩和极惯量矩, $\omega = \Omega(\zeta^0 - x^0)$ 为平规则进动的刚体角速度, 固定点 O 及刚体质心 O_c 均在刚体的对称轴 Ox 上, O_c 低于 O 点的距离为 a 。根据刚体对 O 点的欧拉方程导出除重力矩以外的附加力矩 M 为

$$M = \{mga - \Omega^2[C + (A - C)c\vartheta]\}s\vartheta X^0 \quad (4)$$

只有在沿 Ox 方向的附加力矩 M 作用下, 刚体的平规则进动才可能完成。仅当 $a > 0$ 且进动角速度 Ω 满足以下条件的特殊情形, 刚体才可能在重力矩单独作用下完成平规则进动:

$$\Omega^2 = mga/[C + (A - C)c\vartheta] \quad (5)$$

三、直体全旋运动

分析鞍马上的全旋运动时, 由于人体的非轴对称性, 支撑点左右交替变换并随手臂运动而改变位置, 其运动规律远比上述拉格朗日重刚体复杂。先讨论不考虑双腿交替摆动的直体全旋运动的理想模式。假定人体的双腿伸直并拢与躯干合为一个刚体, 双臂简化为无质量的刚性细杆, 在肩关节 O_i 处与躯干铰结 ($i = 1$ 或 2 分别表示右侧或左侧)。在旋转过程中, 左、右臂必须交替支撑以保证人体不受阻碍地通过。设质心 O_c 与 O_1, O_2 的距离为 a , 以 O_c 为原点建立中心主轴坐标系 (O_c-xyz), O_cz 沿人体纵轴指向头顶, 额状轴 O_cx 平行于左、右肩关节的连线, 矢状轴 O_cy 自背部指向腹部。以 S_i 表示左、右手, R_i 表示左、右支撑环, 环的距离与肩关节距离 $2b$ 相等。以 R_1, R_2 的中点 O 为原点建立惯性坐标系 ($O-\xi\eta\zeta$), $O\xi$ 自左环指向右环, $O\zeta$ 为垂直轴(见图 2), ($O-XYZ$) 及欧拉角 ψ, ϑ ,

φ 的定义与上节相同(见图1)。以 i 表示支撑侧, j 表示非支撑侧, 则 S_i 与 R_i 重合。无质量的非支撑臂的运动对刚体运动不产生影响而不予考虑。规定以下条件作为全旋运动的理想模式:

条件1 躯干作平规则进动;

条件2 支撑臂保持垂直, O_i 成为固定点;

条件3 支撑臂周期性交替,

$0 \leq \psi \leq \pi$ 右臂支撑 ($i=1$)

$\pi \leq \psi \leq 2\pi$ 左臂支撑 ($i=2$)

条件1、2能保证当 $\psi=0$ 或 π 时双肩 O_1 、 O_2 相对 (η, ζ) 平面处于对称位置且与支承环 R_1 、 R_2 的距离相等, 以保证实现条件3规定的换臂动作。

列出人体的质心运动方程及相对 O_i 点的欧拉方程:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{g} + \mathbf{M} \quad (7)$$

其中 \mathbf{r} 为 O_c 相对 O_i 的矢径, $\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ 为人体相对 O_i 的动量矩,

$$\mathbf{r} = (-1)^i b \mathbf{x}^0 - a \mathbf{z}^0 \quad (8)$$

$$\mathbf{H} = -Q\{[As\vartheta s\psi + E(1 - c\vartheta)]\mathbf{x}^0 - Bs\vartheta c\psi\mathbf{y}^0 + [C(1 - c\vartheta) + Es\vartheta s\psi]\mathbf{z}^0\} \quad (9)$$

其中

$$A = A_c + ma^2, B = B_c + m(a^2 + b^2), C = C_c + mb^2, E = (-1)^i mab \quad (10)$$

A_c 、 B_c 、 C_c 为人体的中心主惯量矩。将(8)、(9)式代入方程(6)、(7), 导出肩关节的支撑力 \mathbf{N} 及肌肉控制力矩 \mathbf{M} 相对 $(O-XYZ)$ 的投影式为

$$N_x = -(-1)^i 2mQ^2 b(1 - c\vartheta)c\psi \quad (11a)$$

$$N_y = mQ^2 [-as\vartheta + (-1)^i 2b(1 - c\vartheta)s\psi] \quad (11b)$$

$$N_z = m[g + (-1)^i Q^2 bs\vartheta s\psi] \quad (11c)$$

$$M_x = -Q^2\{C + (A - C)c\vartheta + (B - A)[1 - (2 - c\vartheta)c^2\psi]\}s\vartheta - 2Q^2 Ec\vartheta(1 - c\vartheta)s\psi + mg[as\vartheta - (-1)^i bc\vartheta s\psi] \quad (12a)$$

$$M_y = Q^2[(B - A)(1 - 2c\vartheta)s\vartheta s\psi - 2Ec\vartheta(1 - c\vartheta)]c\psi - (-1)^i mgbc\psi \quad (12b)$$

$$M_z = Q^2[2(A - B)s\vartheta s\psi + E(1 - 2c\vartheta)]s\vartheta c\psi \quad (12c)$$

拉格朗日重刚体的附加力矩公式(4)是(12)式中 $A = B$, $E = b = 0$ 时的特例。

四、托马斯全旋

托马斯全旋是比直体全旋更复杂的鞍马动作, 它要求人体在旋转过程中两腿叉开, 且靠近支撑臂的内侧腿比外侧腿更迅速地摆动。建立由躯干 B_T 及简化为均质细杆的双腿 B_i 、 B_j 组成的三刚体系统作为人体模型, B_i 、 B_j 在合为一点 P 的髋关节处与 B_T 铰结(见图3)。除保留前述条件以外, 再补充规定条件4作为托马斯全旋的简化模式:

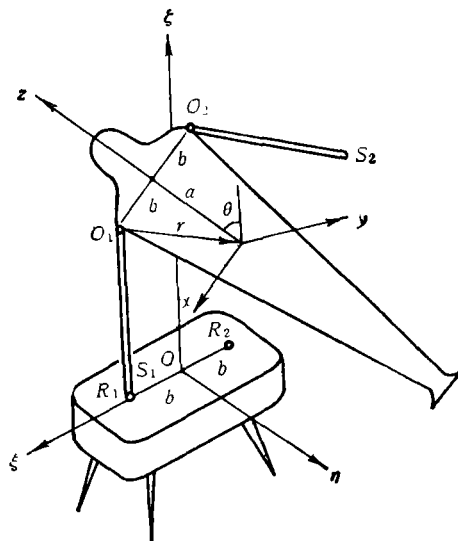


图 2

条件 4 在 $\phi = 0$ 处双腿在 (x, z) 平面内对称张开 2α 角, 随后绕过 P 点的垂直轴作平规则进动, 至 $\phi = \pi$ 处双腿恢复与 $\phi = 0$ 处相同的对称状态. 支撑臂交替后双腿的运动规律互易.

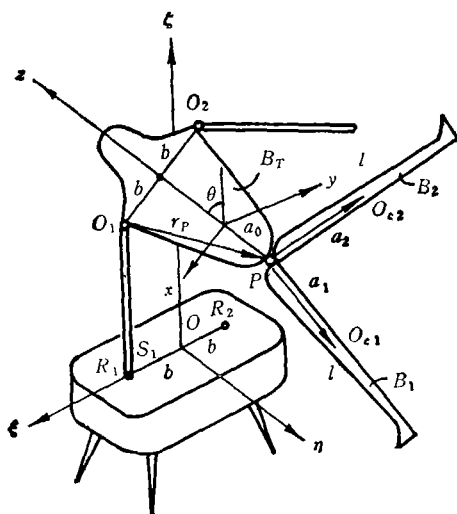


图 3

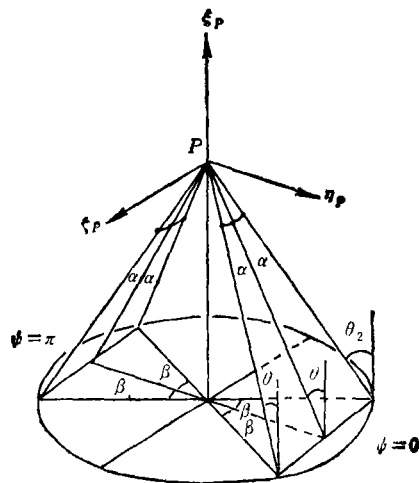


图 4

设 2β 为 $\phi = 0$ 处双腿在水平面上的投影夹角,

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} \alpha / \sin \vartheta) \quad (13)$$

条件 4 要求在 ϕ 从 0 变至 π 的过程中, 内侧腿 B_i 与外侧腿 B_j 的进动角变化范围分别为 $\pi + 2\beta$ 及 $\pi - 2\beta$, 因此 B_i 必须比 B_j 更迅速地进动 (见图 4). 直体全旋可看作是托马斯全旋模式当 $\alpha = 0$ 时的一种特殊情形.

以 $B_{i,j}$ 的质心 $O_{ci,j}$ 为原点建立腿的主轴坐标系 $(O_{ci,j}-x_{i,j}y_{i,j}z_{i,j})$, 双腿并拢时各轴均与 (O_c-xyz) 平行, 其中 $O_{ci,j}z_{i,j}$ 沿 $B_{i,j}$ 的腿轴指向髋关节 P . 以 P 为原点建立平动坐标系 $(P-\xi_P\eta_P\zeta_P)$, 各轴与惯性系 $(O-\xi\eta\zeta)$ 平行. 定义 $\vartheta_{i,j}$ 、 $\phi_{i,j}$ 为 $B_{i,j}$ 相对 $(P-\xi_P\eta_P\zeta_P)$ 的章动角及进动角, 则 $(O_{ci,j}-x_{i,j}y_{i,j}z_{i,j})$ 与 $(P-\xi_P\eta_P\zeta_P)$ 之间的关系与图 1 及表 1 相似, 只须将 ϑ 、 ϕ 换作 $\vartheta_{i,j}$ 、 $\phi_{i,j}$. 可导出

$$\vartheta_{i,j} = \vartheta_L = \cos^{-1}(\cos \alpha \cos \vartheta) \quad (14)$$

$$\phi_{i,j} = [1 - (-1)^{i,j}\gamma]\phi + (-1)^{i,j}\beta \quad (15)$$

其中 $\gamma = 2\beta/\pi$. 设 l 为腿长, a_0 为髋关节 P 与 O_1O_2 的距离, r_P 及 $a_{i,j}$ 分别为 O_i 至 P 及 P 至 $O_{i,j}$ 的矢径,

$$r_P = (-1)^i b x^0 - a_0 z^0 \quad (16)$$

$$a_{i,j} = -(l/2) z_{i,j}^0 \quad (17)$$

设 m_L 为腿的质量, 则双腿相对 O_i 的动量矩 $H_{i,j}$ 为

$$H_{i,j} = (1/3)m_L l^2 [1 - (-1)^{i,j}\gamma] \Omega s \vartheta_L (-s \phi_{i,j} x_{i,j}^0 + c \phi_{i,j} y_{i,j}^0) + m_L (a_{i,j} \times \dot{r}_P + r_P \times \dot{r}_{i,j}) \quad (18)$$

将双腿并拢时的矢量 α_i 、 α_j 、 H_i 、 H_j 分别记作 α_{i0} 、 α_{j0} 、 H_{i0} 、 H_{j0} , 定义矢量 $\Delta\alpha$ 、 ΔH 为

$$\Delta\alpha = (\alpha_i + \alpha_j) - (\alpha_{i0} + \alpha_{j0}), \Delta H = (H_i + H_j) - (H_{i0} + H_{j0}) \quad (19)$$

将托马斯全旋过程中的肩关节支撑力及肌肉控制力矩与直体全旋对应的支撑力及控制力矩之差分别记作 ΔN 、 ΔM , 利用方程(6)、(7)导出

$$\Delta N = m_L \Delta \ddot{\alpha} \quad (20)$$

$$\Delta M = \Delta \dot{H} - \Delta \alpha \times m_L g \quad (21)$$

将(16)至(19)式代入(20)、(21)式, 算出由托马斯动作所产生的肩关节支撑力及肌肉控制力矩增量相对 (O - XYZ) 各轴的投影式:

$$\Delta N_x = -(-1)^i 2m_L Q^2 l \gamma s \vartheta_L s(\gamma\phi - \beta) \quad (22a)$$

$$\Delta N_y = m_L Q^2 l [s\vartheta - (1 + \gamma^2) s \vartheta_L c(\gamma\phi - \beta)], \Delta N_z = 0 \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x = & m_L Q^2 l \{ (1/3) l [s(2\vartheta) - s(2\vartheta_L)(1 + \gamma^2) c(\gamma\phi - \beta)] \\ & + (-1)^i b [2(1 - c\vartheta)(c\vartheta - c\vartheta_L) s\phi - \gamma^2 s\vartheta s \vartheta_L s\phi c(\gamma\phi - \beta)] \\ & + a_0 [s\vartheta(2c\vartheta - c\vartheta_L) - (1 + \gamma^2) c\vartheta s \vartheta_L c(\gamma\phi - \beta)] \} \\ & + m_L g l [s\vartheta - s \vartheta_L c(\gamma\phi - \beta)] \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_y = & (-1)^i 2m_L Q^2 l \{ (1/3) l \gamma s(2\vartheta_L) s(\gamma\phi - \beta) + b[(1 - c\vartheta) \\ & \times (c\vartheta - c\vartheta_L) c\phi + \gamma s\vartheta s \vartheta_L s\phi s(\gamma\phi - \beta)] + a_0 \gamma c\vartheta s \vartheta_L s(\gamma\phi - \beta) \} \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_z = & -m_L Q^2 l \{ (-1)^i b [(1 - 2c\vartheta) s\vartheta - (1 - 2c\vartheta - \gamma^2) s \vartheta_L c(\gamma\phi - \beta)] \\ & \times c\phi - (-1)^i 2b \gamma c\vartheta s \vartheta_L s\phi s(\gamma\phi - \beta) + 2a_0 s\vartheta s \vartheta_L s(\gamma\phi - \beta) \} \end{aligned} \quad (23c)$$

对于直体全旋运动, 令 $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\vartheta_L = \vartheta$, 则(22)、(23)式表示的肩关节支撑力及控制力矩的增量均等于零.

五、带转体的全旋

带转体的鞍马全旋动作要求人体在全旋过程中, 同时相对惯性空间产生绝对转动. 这种动作的约束条件应改为

$$\varphi = -k\phi \quad (24)$$

每进动一周人体在空间中转过 $(1 - k)2\pi$ 角. 如允许水平面 (ξ, η) 内的任意点都可作为支撑点, 则只要 $O_c x$ 轴水平, 双肩 O_1 、 O_2 即与水平面等距离而可能实现换手. 此条件可写作 $x^0 \cdot \zeta^0 = 0$, 导出

$$\sin k\phi = 0, \phi = (n/k)\pi \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (25)$$

前面所叙述的全旋运动是 $k = 1$ 的特殊情形, 换手位置为 $\phi = 0, \pi$. $k = 1/2$ 是另一种特例, 换手位置为 $\phi = 0, 2\pi$, 每换手一次人体在空间中转过 π 角. $k = 0$ 表示人体绕垂直轴的定轴转动, 除非起始时 $O_c x$ 轴水平, 否则不可能实现(25)式表示的换手条件.

人体作带转体的直体全旋时, 其相对 O_i 的动量矩 H 为

$$\begin{aligned} H = & -Q \{ [A s \vartheta s k\phi + E(k - c\vartheta)] x^0 - B s \vartheta c k\phi y^0 \\ & + [C(k - c\vartheta) + E s \vartheta s k\phi] z^0 \} \end{aligned} \quad (26)$$

将(26)式代入欧拉方程(7), 得到肩关节肌肉控制力矩 M 相对 (O - XYZ) 各轴的投影式:

$$M_x = -Q^2 \{ Ck + (A - C)c\vartheta + (B - A)[k - (2k - c\vartheta)c^2\phi] \} s\vartheta$$

$$-\Omega^2 E[1 - k^2 + 2c\vartheta(k - c\vartheta)]s\kappa\psi + mg[as\vartheta - (-1)^i bc\vartheta s\kappa\psi] \quad (27a)$$

$$M_Y = \Omega^2(B - A)(1 - 2k c\vartheta)s\vartheta c\kappa\psi s\kappa\psi - \Omega^2 E c\vartheta(1 + k^2 - 2c\vartheta)c\kappa\psi - (-1)^i mgb c\kappa\psi \quad (27b)$$

$$M_Z = \Omega^2[2(A - B)k s\vartheta s\kappa\psi + Ek(k - 2c\vartheta)]s\vartheta c\kappa\psi \quad (27c)$$

不带转体的直体全旋的力矩公式(12)是(27)式中 $k = 1$ 时的特例。

六、数值计算及结论

参考 Hanavan^[2] 的资料,采用以下数据作数值计算:

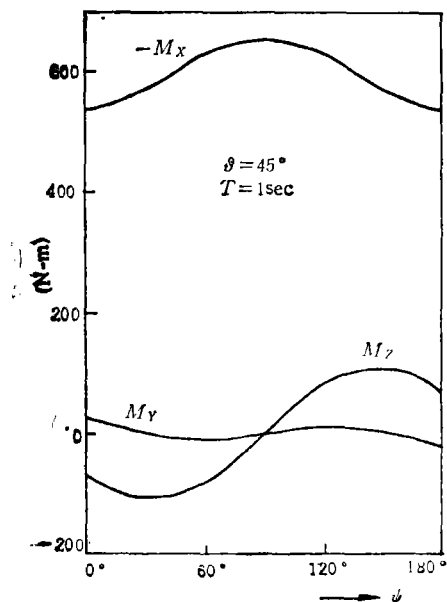


图 5

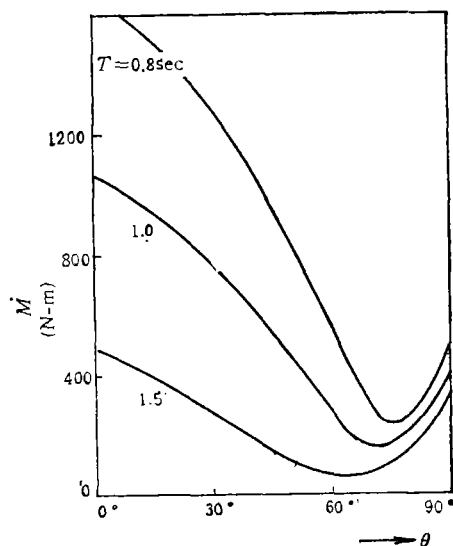


图 6

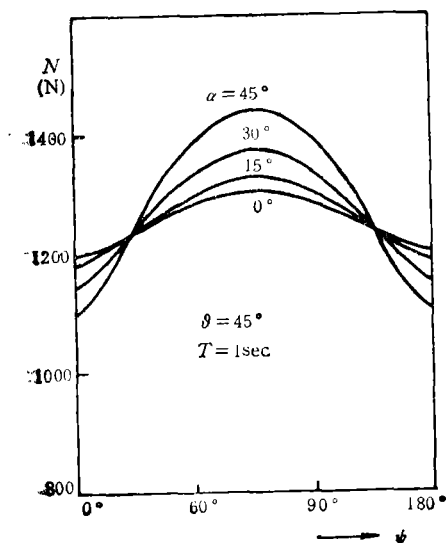


图 7

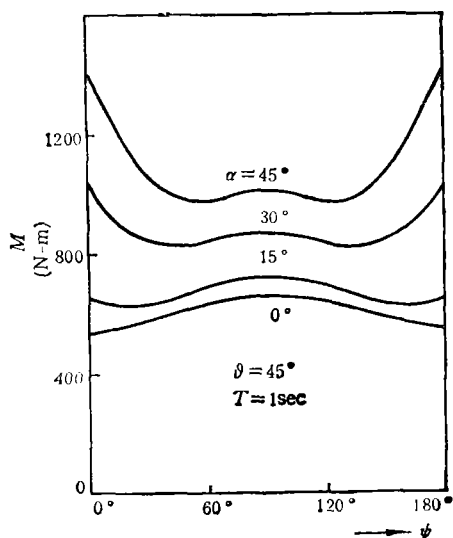


图 8

$$a = 0.50\text{m}, b = 0.20\text{m}, a_0 = 0.60\text{m}, l = 0.77\text{m}, m = 64\text{kg},$$

$$m_1 = 12\text{kg}, A_c = 10.7\text{kg}\cdot\text{m}^2, B_c = 11.0\text{kg}\cdot\text{m}^2, C_c = 0.6\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

计算结果以图 5 至图 9 表示, 其中 $T = 2\pi/\Omega$ 为全旋运动的周期. 有以下结论:

1. 为实现平规则进动, 肩关节肌肉控制力矩 M 沿 OX 轴的分量远远超过其它分量. 力矩的作用平面接近于过人体纵轴的垂直面, 最大值发生在 $\phi = \pi/2$ 的侧摆位置(见图 5).

2. 控制力矩在半周期内的平均值 $\langle M \rangle = (1/\pi) \int_0^\pi M d\phi$ 随章动角 ϑ 变化. 与 $\langle M \rangle$ 取最小值对应的最优章动角随全旋周期的缩短而增大(见图 6).

3. 肩关节支撑力 N 的最大值发生在 $\phi = \pi/2$ 的侧摆位置. 作托马斯全旋时, 支撑力随腿的张角 α 的增加而增大(见图 7).

4. 作托马斯全旋时, 肩关节肌肉控制力矩增大. 腿的张角 α 愈大力矩增大愈显著. 最大力矩增量发生在 $\phi = 0$ 或 π 的换手位置(见图 8).

5. 作带转体的全旋动作时, 肩关节肌肉控制力矩小于无转体情形, 但每二次换手之间力矩的连续作用时间延长(见图 9).

以上对鞍马全旋运动的理论分析表明, 虽然实际的人体运动是包含许多非理想因素的复杂过程, 但根据运动的基本特征抽象出理想化的运动学模式, 就有可能将经典力学分析方法应用于运动生物力学, 从而对运动实践的基本原理给出严格的动力学解释.

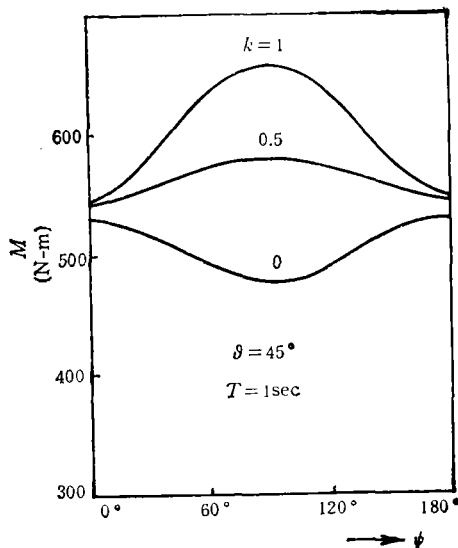


图 9

参 考 文 献

- [1] Goodstein, H., Classical Mechanics, Addison-Wesley (1956).
- [2] Hanavan, E. P. Jr., A Personalized Mathematical Model of the Human Body, *J. Spacecraft and Rockets*, 3, 3(1966).
- [3] 刘延柱, 运动生物力学中的力学模型问题, *力学与实践*, 3(1983).

DYNAMICS OF FLANK CIRCLE MOTION ON POMMEL HORSE

Liu Yanzhu

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University)

Abstract The flank circle motion of a sportsman on a pommel horse is discussed in this paper within the scope of classical mechanics. An ideal flank circle requires that the longitudinal axis of the human body rotates around the vertical axis with a constant precession speed and a constant nutation angle, while the body spins around its' longitudinal axis conversely, in order to assure that the performer faces continuously in one direction. As an ideal model of the flank circle, a special case of the regular precession of rigid body with a holonomic restraint condition is proposed in this paper. Using a multi-rigid-body model, both the stretched flank circle and Thomas circle are analysed, and the support force as well as the muscular torque in the shoulder joints are calculated theoretically.

Key words dynamics of rigid body, dynamics of multi-rigid- system, biomechanics, biomechanics of athletics.