2.5 Section

鞍　　马

鞍马运动起源于欧洲，来源于罗马人利用木制模型马对骑手的训练课目。将木马的头部和尾部去除，成为体操器械的鞍马则出现于19世纪初的德国。1896年鞍马运动被列为男子体操的比赛项目。现代比赛用的鞍马器械长160 cm，宽35 cm，马背中央木环的上沿离地面120 cm。鞍马比赛的成套动作包括：两臂交替支撑的各种单腿摆越，正、反交叉，单、双腿全旋和各种移位转体等动作。

忽略手臂的质量，将运动员的躯干简化为单个刚体。当运动员作鞍马的双腿全旋动作时，人体纵轴绕垂直轴作圆锥运动，与经典力学中的刚体规则进动非常相像（图2.16）。不同点在于：

图2.16　鞍马全旋运动

1. 刚体绕定点运动只有唯一的支承点，而运动员为使身体能越过马背，必须双臂交替支撑。

2. 运动员在全旋过程中始终

面对前方。尽管人体的纵轴绕垂直轴旋转 180°，但身体在空间中没有转动。

3. 刚体绕定点运动的支点为理想球铰，无约束力矩存在。而运动员是以木环为支点，手掌与木环之间存在摩擦力矩。

上述周期性改变支点的情况类似于 2.4 节中叙述的双足步行运动，也属于变结构系统的动力学问题。因此对鞍马全旋运动的分析也必须按照不同的支承状况分段进行，然后在保证运动参数连续性的条件下将各段运动状态进行拼接。

用欧拉角 ψ，θ，φ 表示运动员的姿态(见图 2.17，图 2.18)。设运动员作规则进动，其章动角 θ，进动角速度 $\dot{\psi}$ 和自旋角速度 $\dot{\varphi}$ 均为常值。如近似将躯体视为相对纵轴的轴对称刚体，则角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在躯干的中心主轴坐标系(O_c-xyz)中的投影为

$$\omega_x=0,\ \omega_y=\dot{\psi}\sin\theta,\ \omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$$

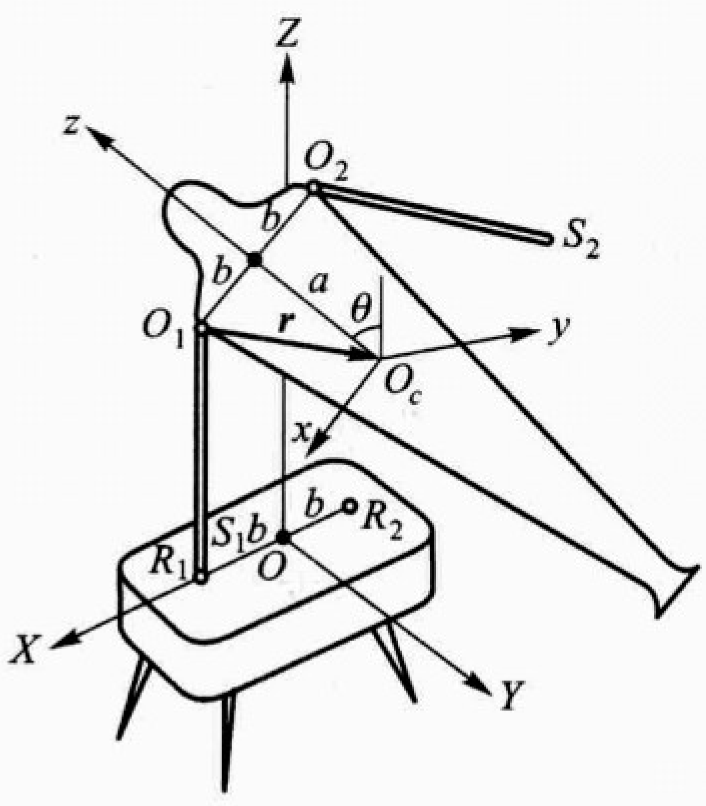

图 2.17　鞍马全旋运动的简化模式

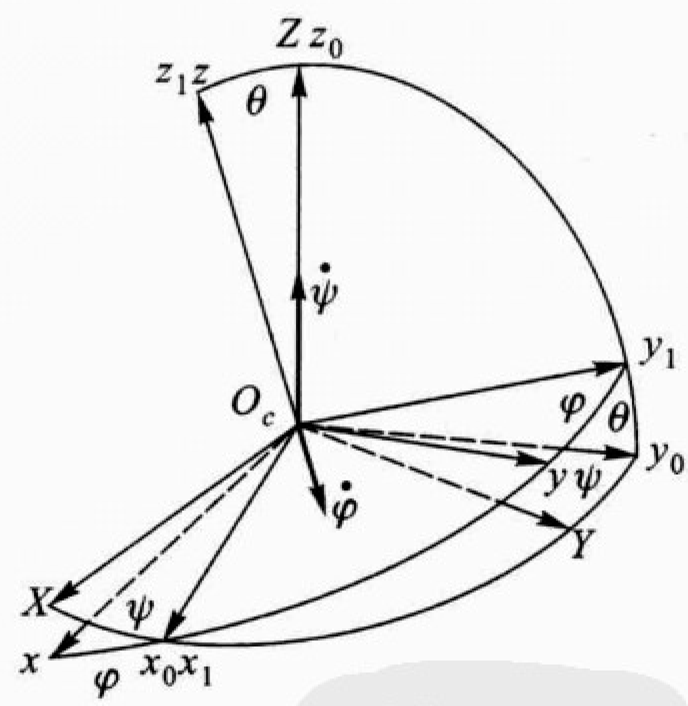

图 2.18　确定鞍马运动的坐标系

为使运动员始终面对前方，必须保证 $\omega_z=0$，要求自旋角速度满足约束条件：$\dot{\varphi}=-\dot{\psi}\cos\theta$。即人体绕纵轴的自旋必须与进动引起的转动方向相反，使绕纵轴的绝对角速度为零。满足此约束条件的规则进动称之为平规则进动。2.1 节中讨论猫的转体过程

时，猫的前半身相对后半身所作的圆锥运动也是平规则进动，对应的约束条件可以避免猫的前后体之间出现扭转。

经典力学在讨论刚体定点运动时，重力矩与刚体的惯性力矩(即陀螺力矩，详见 3.3 节中的解释)互相平衡。但对于作平规则进动的轴对称刚体，由于绕纵轴的绝对角速度为零，进动所产生的陀螺力矩非常微弱，不足以平衡重力矩。重力对支点的力矩除部分与陀螺力矩平衡以外，其余部分与支点的约束力矩平衡。后者通过运动员的手掌与木环之间的摩擦力实现。因此鞍马运动员在完成动作以前，必须用镁粉擦手以增加手掌握环的摩擦力。约束力矩与重力矩和惯性力矩的平衡还必须通过腕关节、肘关节和肩关节等一系列关节的传递才能实现。要确定各个关节的肌肉作用力矩，还必须以人体的各个分体为对象，分别列写动力学方程进行分析。

注释：鞍马全旋运动的理论分析[13]

设人体的双腿并拢与躯干合并简化为轴对称刚体，双臂简化为无质量的刚性细杆，在肩关节 O_i 处与躯干铰接($i=1$ 或 2 分别表示右侧或左侧)。在旋转过程中，左、右臂交替支撑以保证躯体不受阻碍地通过。设质心 O_c 与肩关节连线 O_1O_2 的距离为 a，以 S_i 表示手掌，R_i 表示左右支撑环，环间距离 R_1R_2 与肩关节距离 O_1O_2 均为 $2b$。以 i 表示支撑侧，则 S_i 与 R_i 重合，无质量的非支撑臂对刚体的运动不产生影响。以 R_1R_2 连线的中点 O 为原点建立惯性坐标系($O-XYZ$)，X 轴为水平轴，自左至右平行于 R_1R_2，Z 轴为垂直轴。将($O-XYZ$)的原点移至 O_c 作为参考坐标系(O_c-XYZ)(图 2.17)。按以下转动次序确定人体的姿态(图 2.18)：

$$(O_c-XYZ)\xrightarrow[\psi]{Z}(O_c-x_0y_0z_0)\xrightarrow[\theta]{x_0}(O_c-x_1y_1z_1)\xrightarrow[\varphi]{z_1}(O_c-xyz)$$

(O_c-xyz)为人体的主轴坐标系，其中 z 轴沿人体纵轴指向头顶，额状轴 x 平行于左右肩关节连线，矢状轴 y 自背部指向腹部。ψ，θ，φ 为确定躯干姿态的欧拉角。规定以下条件作为鞍马全旋运动的简化模式：

1. 躯干作平规则进动，θ 为常值，且满足 $\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=0$ 条件；

2. 近似认为支撑臂保持垂直，O_i 和 R_i 均为固定点；

3. 双臂周期性交替支撑：$0\leqslant\psi\leqslant\pi$ 时右臂支撑($i=1$)，$\pi\leqslant\psi\leqslant2\pi$ 时左臂支撑($i=2$)。

条件 1，2 能保证当 $\psi=0$ 或 π 时双肩 O_1 和 O_2 相对(Y,Z)坐标面对称，且分别与 R_1，R_2 有相同的距离，以保证实现条件 3 规定的换臂动作。

不失一般性，令 $i=1$，将$(O_c-x_1y_1z_1)$的原点移至起支撑作用的右肩关节 O_1，$(O_1-x_1y_1z_1)$的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}$ 的投影为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}=\dot{\psi}(\sin\theta\boldsymbol{j}_1+\cos\theta\boldsymbol{k}_1) \tag{2.5.1}$$

躯干的角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$。由于平规则进动约束条件，$\boldsymbol{\omega}$ 沿 z 轴的分量为零，简化为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{j}_1 \tag{2.5.2}$$

将进动角速度记作 $\dot{\psi}=\omega_0$，对于躯干的轴对称刚体简化模型，其相对 O_1 点的动量矩 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=\omega_0\sin\theta(B\boldsymbol{j}_1+D\boldsymbol{k}_1) \tag{2.5.3}$$

?

其中

$$B=A_0+ma^2,\quad D=-mab \tag{2.5.4}$$

A_0 为躯干相对质心 O_c 的赤道惯性矩，m 为躯干的质量。设质心 O_c 相对支点 O_1 的矢径为 $\boldsymbol{r}=b\boldsymbol{j}-a\boldsymbol{k}$，随动 o-xyz 重力对 O_1 点的力矩为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{w}}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{g}=-mg(b\cos\theta+a\sin\theta)\boldsymbol{i} \tag{2.5.5}$$

设肩关节 O_1 的肌肉作用力矩为 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$，将力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{w}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 代入动量

矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{w}}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} \tag{2.5.6}$$

其中动量矩 $\boldsymbol{L}$ 的变化率为

?

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{L}=-\omega_0^2\sin\theta(B\cos\theta+D\sin\theta)\boldsymbol{i}_1 \tag{2.5.7}$$

将式(2.5.5)，(2.5.7)代入方程(2.5.6)，令 $\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi$，导出 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 沿额状轴 x 和矢状轴 y 的投影：

$$\left.\begin{aligned}M_{\mathrm{s}x}&=mg(b\cos\theta+a\sin\theta)-\omega_0^2\sin\theta[(A_0+ma^2)\cos\theta+mab\sin\theta]\cos\varphi\\M_{\mathrm{s}y}&=-\omega_0^2\sin\theta[(A_0+ma^2)\cos\theta+mab\sin\theta]\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.5.8}$$

对于 ψ，φ 同时为零的初始条件，从平规则进动约束条件积分得到 $\varphi=-(\omega_0\cos\theta)t$，则 $M_{\mathrm{s}x}$ 和 $M_{\mathrm{s}y}$ 为时间的周期函数。忽略支撑臂的质量时，手掌与木环之间的摩擦力矩以及腕关节、肘关节的肌肉力矩均与肩关节肌肉控制力矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}$ 相等。