Szkic scenariusza zajęć z szeregów

Czas zajęć: 90 min.

Zajęcia, tak jak również komiks są pewnym mostem, który łączy program szkolny z poziomem akademickim.

Na początku warto zapytać się czy komiksy dotarły oraz do której klasy chodzą uczniowie, wówczas wiemy jaki poziom reprezentują. Jeśli jakaś grupa nie przerabiała na lekcji ciągów geometrycznych, to będzie miała dobry wstęp, wpp niektóre zagadnienia będą już znane uczestnikom, ale warsztaty pozwolą na lepsze zrozumienie tematu.

1. **Test na wejście** (**quiz**)
   - Quiz na wejście "Szeregi n" opublikowałem na quizizz.com i powinien być dostępny dla wszystkich użytkowników, chociaż sam nie będąc zalogowanym nie wiem czemu nie mogę go znaleźć, dlatego przesyłam bezpośredni link do niego w mailu.
   - Przygotowując link do quizu można wyłączyć opcje 'Pokaż odpowiedzi podczas aktywności' oraz 'Pokaż odpowiedzi po aktywności', ponieważ uczestnicy mogą się konsultować między sobą, a zadania zostaną omówione w trakcie zajęć. Jeśli tych opcji nie znajdziecie, to trudno, w każdym razie powinny być dostępne przy uruchamianiu quizu, o ile korzystacie z quizziz.
   - Każdy uczeń wchodząc na link jako nazwę gracza wpisuje imię i nazwisko.
   - Podczas rozwiązywania przez uczestników quizu może się zdarzyć, że nasz mikrofon nie będzie działał (tak miałem w przypadku Zoom-a).

2. **Lista obecności**
   - W przypadku korzystania z Zoom-a, który jest dostępny dla tego projektu, możemy poprosić, aby każdy uczeń wpisał imię i nazwisko na czacie, następnie zapisujemy czat.
   - Jeśli mamy inny komunikator z dostępną opcją zapisania listy uczestników, to możemy z niej skorzystać, ale należy to dobrze sprawdzić, czy będzie to działać np. MS Teams jest na MiNI, ale taka opcja jest chyba możliwa jedynie dla grup wcześniej zdefiniowanych: studentów lub pracowników.

3. Realizujemy scenariusz warsztatów.

Scenariusz jest zapisany w formie dialogu, z krótkimi opisami wprowadzającymi. Kursywą oznaczone są możliwe odpowiedzi uczestników.

1. HISTORIA WPROWADZAJĄCA

Zadanie na początek. W komiksie rozważany jest klasyczny przypadek z 1/2 , dlatego tutaj wybrałem ¼.

- Zaczniemy od nietypowego problemu, będziemy musieli przejść od jednego końca tablicy do drugiego. Załóżmy, że długość tablicy to x. Kolejne kroki to ¼ dystansu, który pozostaje nam do przejścia. Pierwszy krok jest długości ¼ x. Jakiej długości jest kolejny?

- *[cisza]*

- Jaki dystans nam pozostał do pokonania?

- *¾ x*

- Mamy przejść ¼ tej drogi, to jakiej długości jest drugi krok?

- *3/16 x*

- Możemy o tym myśleć w taki sposób: za każdym razem pozostaje nam długość drogi do końca tablicy, która jest 3 razy dłuższy od ostatniego wykonanego kroku i musimy wziąć jej ¼ . Jakiej długości jest trzeci krok?

⋮

Zapisujemy jeszcze kilka kroków.

- Czy jestem w stanie wykonać ostatni krok?

- *Nie!*

- Ile kroków muszę wykonać, aby dojść na drugi koniec tablicy?

- *Nieskończenie wiele!*

- Czy jestem w stanie pokonać nieskończenie wiele odcinków w skończonym czasie?

- *Nie!*

- Zatem wszelki ruch jest niemożliwy!

Zapisujemy na tablicy wniosek: <u>Wszelki ruch jest niemożliwy.</u>

- Takimi problemami blisko 2500 lat temu zajmował się niejaki Zenon z Elei, znane są one pod nazwą “Paradoksy Zenona z Elei”.

Czy na pewno wszelki ruch jest niemożliwy?

- Załóżmy, że nasza tablica ma długość 4 m. Załóżmy dodatkowo, że poruszam się z prędkością 36 km/h, czyli bliską średniej prędkości Usaina Bolta na 100 m. Wyraźmy tę prędkość w m/s. Ile ona wynosi?

- *10 m/s*

- Bardzo dobrze. Czyli w jakim czasie pokonam długość 4 m?

- *0,4 s*

- A powiedzieliście przed chwilą, że nigdy nie dojdę na koniec tablicy!?

2. WZÓR NA SUMĘ NIESKOŃCZONĄ

Nieprawidłowe wyprowadzenie wzoru na sumę nieskończoną oraz wynikające z tego nieporozumienia.

- Dodajmy do siebie wszystkie nasze kroki, z problemu początkowego. Załóżmy jeszcze, że x=4 m i oznaczmy sumę literą S. Jaką sumę nieskończoną otrzymamy?

- *1+ 3/4 + 9/16 + ... = S*

- Pomnóżmy obie strony przez ¾ . Co będziemy mieli?

- *3/4 + 9/16 + 27/64+ ... = ¾ S*

- Od pierwszego równania odejmijmy drugie, jaki wynik otrzymamy?

- *1 = ¼ S*

- S = 4, czyli wyszło to co powinno, ale otrzymaliśmy rzecz niesłychaną, ponieważ dodaliśmy do siebie nieskończenie wiele składników, a wynik wyszedł skończony. Spróbujmy uogólnić nasze rozumowanie, zauważmy, że możemy napisać:

1+ 3/4 + (¾)^2 + ... = S

W miejsce ¾ wpiszmy literę q i przeprowadźmy podobne rozumowanie.

1+ q + q^2 + ... = S

⋮

- Otrzymujemy wzór: 1/(1-q)=S. A teraz w miejsce q wstawmy -1. Jaką nieskończoną sumę otrzymamy i jaka będzie jej wartość?

- *1-1+1-1+1-1+...=½*

- Czy zgadzacie się z tym wynikiem?

- *Ja się nie zgadzam, ponieważ dla mnie wynik powinien wyjść 0!*

- Dlaczego 0?

- *Ponieważ za każdym razem mogę dodawać zera.*

- Aha, czyli chcesz zrobić następujące grupowanie w nawiasach:

(1-1)+(1-1)+(1-1)+...= 0+0+0+...= 0

Czy można jeszcze inaczej pogrupować składniki naszej sumy?

- *Tak, suma może wyjść jeden, jeśli zrobimy tak:*

1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+...=1- 0-0-0-...= 1

- Czyli ile jest równa nasza suma? Czy ½ , 0, 1 ??? A może jednak ½? Zobaczmy jeszcze inny sposób:

1-1+1-1+1-1+... = S

1-1+1-1+1-1+... = 1-(1-1+1-1+1-1+...)=1-S

1-S=S

zatem S=½

- Do naszego wzoru 1/(1-q)=S dla sumy 1+ q + q^2 + ... = S wstawmy q=2. Co wówczas otrzymamy?

- *1+2+4+8+... = -1*

- To może budzić wątpliwości:-) Ile jest równa nasza suma...?

- *Nieskończoność!*

- Mamy błąd w rozumowaniu. Na sumach nieskończonych nie zawsze możemy wykonywać działania, do których przyzwyczajeni jesteśmy w skończonym przypadku. Odpowiedź znajdziecie w komiksie, a dokładniej w części opisowej.

3. ZADANIA Z QUIZU

Zadanie 1.

- Rozwiążemy teraz zadanie nr 1:

Znajdź wartość czwartego wyrazu nieskończonej sumy: a1+a2+a3+... , wiedząc, że suma n pierwszych wyrazów wyraża się wzorem: Sn=n^2+2.

⋮

Wprowadzenie do zadania 2 i 3, czyli znak sigma.

- Wróćmy teraz do naszej sumy, którą wcześniej rozważaliśmy:

1+ 3/4 + 9/16 + 27/64 +...

Jeśli widzimy regułę (innymi słowy wzór ogólny), która opisuje nam kolejne składniki sumy, to możemy zapisać tę sumę za pomocą dużej litery alfabetu greckiego sigma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

A teraz zadanie odwrotne, spróbujmy wypisać kolejne składniki sumy jeśli mamy:

- $\sum_{n=0}^{\infty} (3n + (2)^n)$
- $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2}\right)$ (zaczniemy celowo od 4. wyrazu)

A jak zapiszemy następujące sumy za pomocą sigma:

- 2+4+6+8+...
- 8+16+64+128   (przykład skończonej sumy)
- 1+8+27+64+...
- 4/5+9/7+16/9+25/11+36/13+...

Zadanie 2.

Rozwiążmy teraz zadanie nr 2:

Zapisz $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ bez używania znaku sigma.

⋮

Zadanie 3.

- Rozwiążemy teraz zadanie nr 3:

Wiedząc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+1)^2}$.

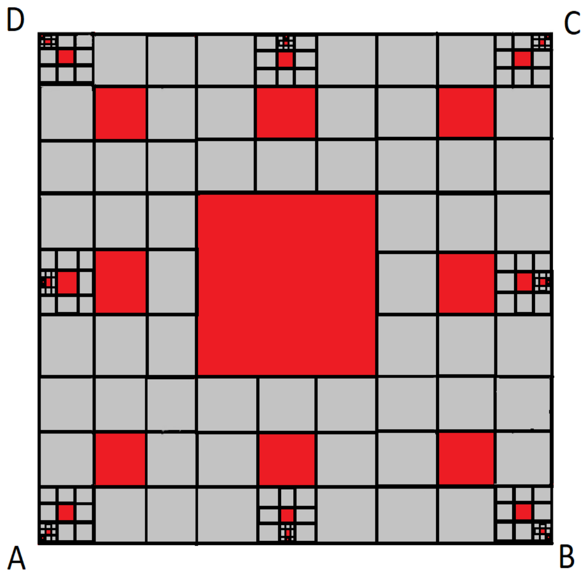
⋮

4. JEŚLI MAMY CO NAJMNIEJ 15 MINUT DO KOŃCA

(zakładam, że punkty 4 i 5 zajmą około 10 minut).

Wyświetlamy na ekranie zdalnym grafikę lub przesyłamy ją uczestnikom na czacie.

- A teraz zadanie na deser. Załóżmy, że kwadrat ABCD ma pole równe 1, zapiszmy pole czerwonych kwadratów.



4. **Prezentacja komiksu na podstawie flipbooka:**
   https://betaandbit.github.io/Szeregi/#p=1
   oraz zachęta do jego przeczytania np. “Łatwiej będzie Wam na pierwszym roku studiów” lub “Spróbujcie zmierzyć się z ciekawymi zadaniami, które są na końcu.” lub “Przeczytanie tej książki pozwoli Wam rozwinąć umiejętności matematyczne.”.

5. **Test na koniec (quiz).**
   - Quiz na koniec “Szeregi 2 n” opublikowałem na quizizz.com i powinien być dostępny dla wszystkich użytkowników, chociaż sam nie będąc zalogowanym nie wiem czemu nie mogę go znaleźć, dlatego przesyłam bezpośredni link do niego w mailu.
   - Przygotowując link do quizu można jedynie wyłączyć opcję ‘Pokaż odpowiedzi podczas aktywności’, jest taka opcja w przypadku używania quizizz.com.
   - Każdy uczeń wchodząc na link jako nazwę gracza wpisuje imię i nazwisko.

PO ZAJĘCIACH

6. **Przygotowujemy raport z przeprowadzonych zajęć**.
   Lista obecności i wyniki testów (taki raport można wygenerować w quizizz), które później przekazujemy koordynatorowi.