位姿图优化公式推导

一、李群李代数知识回顾

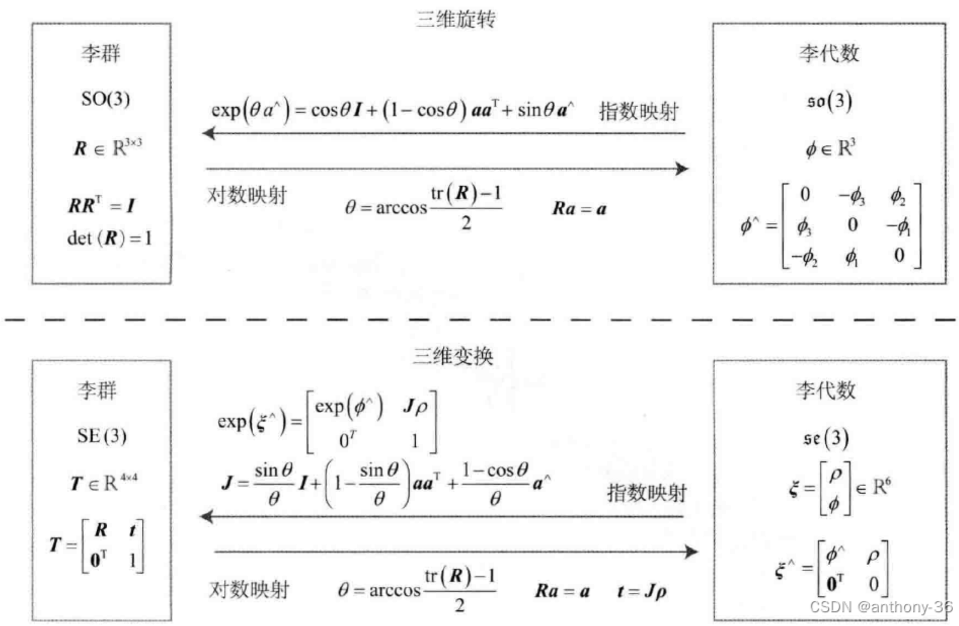

图 1: 李群李代数

1. 指数映射关系

(a) 三维旋转：

$$\begin{cases} \phi = ln(R)^{\vee} \\ R = exp\{\phi^{\wedge}\} \end{cases}$$

(b) 三维变换：

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix},\ \xi^{\wedge} = \begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi = ln(T)^{\vee} \\ T = exp\{\xi^{\wedge}\} \end{cases}$$

2. 伴随性质

(a) 引理一： $\mathbf{Rp}^{\wedge}\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{Rp})^{\wedge}$

证明：任取某向量 v，有以下关系：

$Rp^{\wedge}R^T\vec{v}$

$= Rp \times R^T\vec{v}$ （$^{\wedge}$的定义为向量叉乘的结果）

$= Rp{\times}RR^T\vec{v}$ （R作为旋转矩阵，因此$Rp \times Rv = (detR)R^{-T}(p \times v) = Rp \times v$）

$= Rp \times \vec{v}$ （R作为旋转矩阵，有$RR^T = I$）

$= Rp^{\wedge}\vec{v}$ （$^{\wedge}$的定义为向量叉乘的结果）

(b) 引理二： $\mathbf{Rexp\{p^{\wedge}\}R^T = exp\{(Rp)^{\wedge}\}}$

证明：

$Rexp\{p^{\wedge}\}R^T$

$= R\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(p^{\wedge})^k}{k!}R^T$ （将指数部分泰勒展开）

$= \Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(Rp^{\wedge}R^T)^k}{k!}$ （作为旋转矩阵，有$RR^T = I$）

$= \Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(Rp)^{\wedge k}}{k!}$ （引理一）

(c) SE(3) 上的伴随性质： $\mathbf{Texp\{\xi^{\wedge}\}T^{-1} = exp\{(Ad(T)\xi)^{\wedge}\}}$

其中，

$$Ad(T) = \begin{bmatrix} R & t^{\wedge}R \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

证明：

$Texp\{\xi^{\wedge}\}T^{-1}$

$= \Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(T\xi^{\wedge}T^{-1})^k}{k!}$ （同引理二的证明，将指数部分泰勒展开）

$= exp\{T\xi^{\wedge}T^{-1}\}$ （通过泰勒展开还原回指数形式）

其中，指数部分有：

$T\xi^{\wedge}T^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^T & -R^Tt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\phi^{\wedge}R^T & -R\phi^{\wedge}R^Tt + R\rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (R\phi)^{\wedge} & -(R\phi)^{\wedge}t + R\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(使用两次引理一)}$$

$$= \begin{bmatrix} (R\phi)^{\wedge} & (R\phi)^{\wedge}t + R\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{右上角的}^{\wedge}\text{是反对称矩阵的意义，满足：}a^{\wedge}b = -b^{\wedge}a\right)$$

$$= \begin{bmatrix} (R\phi)^{\wedge}t + R\rho \\ R\phi \end{bmatrix}^{\wedge} \quad \left(\text{这里的}^{\wedge}\text{是对于}\xi^{\wedge}\text{拓展后的意思}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} R & t^{\wedge}R \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix}^{\wedge} = (Ad(T)\xi)^{\wedge} \quad \text{(进行矩阵分解，并带回 Ad(T) 和}\xi\text{)}$$

因此，带回得到

$Texp\{\xi^{\wedge}\}T^{-1}$

$= exp\{T\xi^{\wedge}T^{-1}\}$

$= exp\{(Ad(T)\xi)^{\wedge}\}$

3.BCH 近似公式

(a) 存在一个微扰的情况： $ln(exp\{\xi_1^{\wedge}\}exp\{\xi_2^{\wedge}\})^{\vee} = J_l(\xi_2)^{-1}\xi_1 + \xi_2$，其中$\xi_1$为小量

(b) 对微扰求逆运算： $exp\{\xi^{\wedge}\}exp\{-\xi^{\wedge}\} = exp\{\xi^{\wedge} - \xi^{\wedge}\} = I$，因此$exp\{\xi^{\wedge}\}$的逆是$exp\{-\xi^{\wedge}\}$

二、位姿图优化公式推导

理论运动位姿关系： 对于估计T_i到T_j的运动位姿关系为：$\Delta T_{ij} = T_i^{-1}T_j$，移项整理，得到

$$0 = ln(T_{ij}^{-1}T_i^{-1}T_j)^{\vee}$$

构建优化误差： 由于误差存在，上述式子左侧结果很可能不为 0，因此构建误差：

$e_{ij} = ln(T_{ij}^{-1}T_i^{-1}T_j)^{\vee}$

为便于求导，使用李代数表示，对T_i和T_i分别加入一个左扰动：

$\hat{e_{ij}} = ln(T_{ij}^{-1}exp\{(\delta\xi_i)^{\wedge}\}^{-1}exp\{(\delta\xi_j)^{\wedge}\}T_i^{-1}T_j)^{\vee}$

$= ln(T_{ij}^{-1}exp\{(-\delta\xi_i)^{\wedge}\}exp\{(\delta\xi_j)^{\wedge}\}T_i^{-1}T_j)^{\vee}$ (微小扰动求逆的结果为：$exp\{-\delta\xi^{\wedge}\}$)

$= ln(T_{ij}^{-1}T_i^{-1}T_j exp\{(-Ad(T_j^{-1})\delta\xi_i)^{\wedge}\}exp\{(-Ad(T_j^{-1})\delta\xi_j)^{\wedge}\})^{\vee}$

(使用两次李代数伴随性质的变式：$Texp\{\xi^{\wedge}\} = exp\{(Ad(T)\xi)^{\wedge}\}T$，将含 T 部分提前)

$\approx ln(T_{ij}^{-1}T_i^{-1}T_j[I - (Ad(T_j^{-1})\delta\xi_i)^{\wedge} + (Ad(T_j^{-1})\delta\xi_j)^{\wedge}])^{\vee}$

(用 BCH 近似将后两个小量指数部分直接相加，再对二元函数原点处进行一阶泰勒展开)

值得注意的是，对数部分是两部分乘积，前者是$T_{ij}^{-1}T_i^{-1}T_j$，即e_{ij}，

后者是关于 ij 的误差，是一个小量，记作$\delta\xi_{ij}$，由此通过 BCH 近似

$\hat{e_{ij}} \approx J_r^{-1}(e_{ij})ln(\delta\xi_{ij}) + ln(e_{ij})$

由此，我们得到误差的雅各比矩阵：

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{e_{ij}}}{\partial \delta\xi_i} = -J_r^{-1}(e_{ij})Ad(T_j^{-1}) \\ \frac{\partial \hat{e_{ij}}}{\partial \delta\xi_j} = J_r^{-1}(e_{ij})Ad(T_j^{-1}) \end{cases}$$

后续内容在书中就比较清晰了，分别是对$J_r^{-1}(e_{ij})$进行近似，并将问题彻底转化成了一个最小二乘问题，因此就不加赘述了。