重积分

作者：Betelgeuxe 2022年4月15日

二重积分（黎曼积分）

$$def:\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

其中 λ 为 **积分区域**D 的子区域 D_i 直径的最大值

可积的判定：有界闭区域上连续（或分片连续）的二元函数

性质

- 对积分区域的可加性&对被积函数的可加性
- 保号性&保不等号性
- $\int f(x)\mathrm{d}x\cdot\int g(y)\mathrm{d}y=\iint f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- 奇偶性 $\begin{cases}\text{关于 } x \text{ 的偶函数：} f(x,y)=f(-x,y)\\ \text{关于 } x \text{ 的奇函数：} f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$

  轮换对称性：$f(x,y)=f(y,x)$
- 积分中值定理

  $f(x,y)\subset C(D)$，则 $\exists(x_0,y_0)\in D$， $st.\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(x_0,y_0)\cdot S$，其中 $S=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma$

直角坐标下的计算公式（ **累次积分** ）

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

（面包片模型）（此例子为 X 型区域： D 为“两直两曲”四边形，其中直边为 $x=a$ 和 $x=b$，曲边为 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ ）

要点
- 积分次序影响积分的繁易
- 上下限函数分段时，分区域积分
- 改变积分次序可能改变分区域积分的需要

极坐标 下的计算公式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$$ （一般先 r 后 θ ）

其中有坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 另外，还有椭圆坐标系（广义极坐标变换）

二重积分的变量变换公式

若 $f(x,y)\subset C(D)$，变换 $T\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases},(u,v)\in D\to D$ 满足 ①$x(u,v),y(u,v)\subset C'(D)$ ②$J(u,v)=\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\neq 0$

则有 $\iint\limits_D f(x,y)\underline{\underline{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}}=\iint\limits_D f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot\underline{\underline{\big||J|\big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v}}$

曲面的面积

直角坐标 曲面 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 的面积为 $S=\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{|\cos\gamma|}=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma$

参数方程（坐标变换）曲面 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v)\end{cases}$ $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$，则$\underline{\underline{\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}}$.

三重积分（黎曼积分）

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V \text{ 或 } \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为 **积分区域**， $\mathrm{d}V$ 为 **体积元素**（**体积微元**）

性质

- 对积分区域的可加性&对被积函数的可加性
- 保号性&保不等号性
- 积分中值定理
- 关于某一变量的奇偶性&轮换对称性（计算量影响大）

直角坐标下的 **投影法** （先一后二）

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其中 D 为 Ω 在平面 xOy 的投影， Ω 是以 $z=z_1(x,y)$ 和 $z=z_2(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ 为底的的正柱面体，即侧面的母线平行于 z 轴，具有积聚性

直角坐标下的 **截面法** （先二后一）

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Ω 要介于平面 $z=a$ 和 $z=b$ 之间，
$\forall z_0\in[a,b]$， $z=z_0\cap\Omega=D_{z_0}$ 为闭区域（连通的开集并其边界）

如何选用坐标系

- 注意被积函数的特殊结构，如平方和
- 注意各种坐标下被积区域是否需要分割

柱坐标 下的计算公式

$$\left(T:\begin{cases}x=r\cos\theta & 0\le r<+\infty\\ y=r\sin\theta & 0\le\theta<2\pi\\ z=z & -\infty<z<+\infty\end{cases}\right)$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

球坐标 下的计算公式

$$\left(T:\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta & 0\le r<+\infty\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta & 0\le\varphi<\pi\\ z=\rho\cos\varphi & 0<\theta<2\pi\end{cases}\right)$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

另外，还有广义球坐标变换

在一般变量替换下的变换公式

若 $f(x,y,z)\subset C(\Omega)$，变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w),(u,v,w)\in\Omega'\leftrightarrow\Omega\\ z=(u,v,w)\end{cases}$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot\big||J|\big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

其中 $|J|=\dfrac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}$