曲线积分与曲面积分

作者：Betelgeuxe 2022年4月15日

第一型曲线积分（黎曼积分）

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s \equiv \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为中间点， $f(x,y,z)$ 为被积函数， $\mathrm{d}s$ 为弧微分，
λ 为积分曲线L 的子区域 l_i 长度的最大值

可积的判定：逐段光滑（光滑：切线存在且连续）

第一型曲线积分的对称性：$\begin{cases} L \text{ 与 } f(x,y) \text{ 关于同一轴对称（奇函数）}: & I=0 \\ L \text{ 与 } f(x,y) \text{ 关于同一轴对称（偶函数）}: & I=2I_0 \end{cases}$

直角坐标函数$L: y=y(x)\ (a\le x\le b)$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

极坐标函数$L: r=r(\theta),\ (\alpha\le x\le\beta)$

$$\int_L f(x,y)\underline{\underline{\mathrm{d}s}} = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\underline{\underline{\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta}}$$

平面参数方程$L: \begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}, \alpha\le x\le\beta$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

空间参数方程$L: \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}, \alpha\le t\le\beta$

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

第二型曲线积分（对坐标的曲线积分，黎曼积分）

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中向量函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$， $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$
有向曲线$\widehat{AB}$称为 积分路径

可积的判定：逐段光滑曲线 L 上的函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 连续

平面参数方程$L: \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}, t:\alpha\to\beta$（空间参数方程类似）

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \big[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\big]\mathrm{d}t.$$

直角坐标函数$L: y=y(x),\ x:a\to b$

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \int_a^b \big[P\big(x,y(t)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\big]\mathrm{d}x.$$

两类曲线积分的联系

当曲线 L 用参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}, \alpha\le t\le\beta$ 表出时

① $\mathrm{d}\vec{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\mathrm{d}t.$

② 设 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的 方向余弦 为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$, 则有

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{|\mathrm{d}\vec{r}|}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right).$$

$$\mathrm{d}x=\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}y=\cos\beta\cdot\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}z=\cos\gamma\cdot\mathrm{d}s.$$

③ $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$

格林公式（第二型曲线积分⇔二重积分）

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $P(x,y),Q(x,y)\subset C'(D)$， D 是有界 **闭区域**，
D 的边界 L 是逐段光滑的， L^+ 为区域 D 的 **正向边界**
（外边界逆时针，内边界顺时针）

格林公式使用方法

① 补路径，使积分曲线成环（通常沿坐标轴）
② 挖洞，使被积区域内 P,Q,R 的偏导处处连续

平面第二型曲线积分与路径无关的条件

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=C$$

⇔ ①$\forall$ 简单逐段光滑曲线 $L\subset D, \oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$

⇔ ②$\exists u(x,y), st.\ \mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$(**单连通区域**)

⇔ ③$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}.$(**单连通区域**)

求 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数（若存在）的方法（单连通区域）

① 直接凑全微分.

② 任取积分路径和起始点 (x_0,y_0)，则 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$

③ 先计算 $u_1(x,y)=\int P\mathrm{d}x,\ \varphi'(y)=Q(x,y)-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}$,
再计算 $u(x,y)=u_1(x,y)+\varphi(y)=u_1(x,y)+\int u_1(x,y)\mathrm{d}y.$

第一型曲面积分（无方向性的，黎曼积分）

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \equiv \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为中间点， $f(x,y,z)$ 为被积函数，
S 为 被积函数 ， λ 为 积分曲面S 的子区域 l_i 长度的最大值

可积的判定： S 是分片光滑曲面，函数 $f(x,y,z)$ 连续

投影法 ● 化为二重积分
$S: z=z(x,y),\ (x,y)\in D$

$$\iint_S f(x,y,z)\underline{\underline{\mathrm{d}S}} = \iint_D f(x,y,g(x,y))\underline{\underline{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\mathrm{d}\sigma}}$$

参数方程 ● 化为二重积分

$S: \begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}, (u,v)\in D,$

①$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, 则$\underline{\underline{\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}}$.

②$\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\ F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\ G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$, 则 $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

第二型曲面积分（有向）

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_S\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

其中 $\vec{n}(x,y,z)$ 为曲面 S 一侧的单位法向量, $\vec{S}=\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}S$

单侧曲面： 如 Möbius 带
双侧曲面： 如球面

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
+	前侧	右侧	上侧
−	后侧	左侧	下侧

第一型曲面积分形式

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.
$\underline{\cos\alpha\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \cos\beta\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad \cos\gamma\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$

坐标形式 $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为 S 在平面 xOy 的有向投影面积,$\vec{F}=(P,Q,R)$
三面投影法 ● 化为三个二重积分
化简 $\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}R\big(x,y,f(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的步骤
① 投影到 xOy 平面 ② 代入 $z=z(x,y)$ ③ 根据曲面的侧定号.

投影 × 偏导 ● 化为一个二重积分

$$S: z=z(x,y)\quad \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_{D_{xy}}(-z_xP-z_yQ+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中法向量 $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)$, $\cos\alpha=\dfrac{\pm z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

参数方程 ● 化为一个二重积分

$S: \begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}, (u,v)\in D,$

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}(AP+BQ+CR)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中法向量$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$,
$\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $\cos\alpha=\dfrac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

高斯公式 ● 化为三重积分

$$\oiint_{S^+(\text{外侧})}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

其中 Ω 的边界为 S（封闭、分片光滑）， $P,Q,R\subset C'(\Omega\cup S)$
即 $\oiint_{S^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V.$

斯托克斯公式

$$\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{S^+}\nabla\times\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

其中 S（分片光滑的双侧曲面） 的边界为 L（分段光滑的闭合曲线）， S 与 L 的定向构成右手系， $P,Q,R\subset C'(S\cup L)$.